



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

DOTTORATO DI RICERCA IN  
“INFORMATICA, SISTEMI E TELECOMUNICAZIONI”  
INDIRIZZO “TELEMATICA E SOCIETÀ  
DELL'INFORMAZIONE”

CICLO XXVI

COORDINATORE Prof. Luigi Chisci

*I test PISA e i test di ingresso di matematica con l'E-Learning:  
da momento di verifica a occasione didattica*

MAT 04

**Dottoranda**

Dott.ssa Stefania Pancanti

**Tutore**

Prof.ssa M. A. Mariotti

**Co-Tutore**

Prof. G. Fiorentino

**Coordinatore**

Prof. Luigi Chisci

Anni 2010/2014

# Ringraziamenti

*Vorrei ringraziare la Prof.ssa Mariotti per la sua grande disponibilità e l'interesse che ha sempre mostrato. Grazie per gli spunti di riflessione e per avermi aiutato a dare "forma" alle idee e ai contenuti di questo lavoro.*

*Ringrazio il Gruppo di Didattica della Matematica dell'Università di Pisa per avermi dato la possibilità di lavorare con loro. In particolare, ringrazio il Prof. Fiorentino per il suo supporto e il suo sostegno e la Prof.ssa Zan, che ha ispirato questa attività di ricerca ed ha creduto fin dall'inizio in questo progetto. Grazie per i colloqui e le riflessioni che mi hanno sempre arricchito sia come insegnante sia come persona.*

*Ringrazio poi le tante persone che hanno reso possibile questo percorso e in particolare voglio ringraziare Maurizio Berni, per il suo incoraggiamento e il suo sostegno, anche in tante questioni burocratiche che poco hanno a che fare con la ricerca ma dalle quali un'insegnante precaria come me non può non sfuggire per mettere in relazione questi due mondi, la Scuola e l'Università, da un lato molto vicini ma dall'altro, troppo spesso, troppo "lontani".*

*Infine, i ringraziamenti più "vicini".*

*A Massi, per la sua presenza, la sua pazienza, il suo sostegno e per la fiducia che sempre mi dimostra. Grazie per aver condiviso e creduto con me in questa "avventura" fin dall'inizio.*

*A Sara, Martina, Mariachiara e Elena per la loro curiosità e per il loro interesse semplice per lo "studio di mamma". Grazie per i loro sorrisi, per i loro abbracci e per la loro pazienza.*

*Ai miei genitori che hanno sempre accompagnato i miei studi con tanto affetto, fiducia e interesse. Grazie anche per tutto il loro supporto "fisico" e organizzativo, soprattutto con le bimbe. Grazie a loro e alle mie sorelle, che non mi hanno mai fatto mancare il loro supporto e la loro vicinanza.*

*Grazie anche agli altri nonni delle mie bimbe, Annamaria e Romano, perché, veramente, senza i nonni, non sarebbe stato possibile raggiungere questo obiettivo.*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>10</b>
1.1 Le prove standardizzate esterne e il nostro sistema scolastico . .	10
1.2 Le prove INVALSI . . . . .	11
1.2.1 Le prove INVALSI di Matematica . . . . .	13
1.3 Le Prove OCSE-PISA . . . . .	14
1.3.1 Literacy Matematica . . . . .	18
1.4 Criticità nelle prove standardizzate esterne . . . . .	21
1.5 Formulazione del problema . . . . .	22
<b>2</b>	<b>23</b>
2.1 Il Quadro di Riferimento delle Prove OCSE-PISA . . . . .	23
2.2 Situazioni e contesti . . . . .	25
2.3 Il contenuto matematico – le quattro “idee chiave” . . . . .	26
2.3.1 Quantità . . . . .	27
2.3.2 Spazio e forma . . . . .	28
2.3.3 Cambiamento e relazioni . . . . .	28
2.3.4 Incertezza . . . . .	29
2.4 La competenza matematica . . . . .	29
2.4.1 I raggruppamenti di competenze . . . . .	31
2.5 Presentazione dei livelli di competenza matematica . . . . .	33
2.6 Il Quadro di Riferimento delle Prove INVALSI . . . . .	35
2.6.1 Gli ambiti dei contenuti . . . . .	35
2.6.2 I processi . . . . .	37
2.7 Le criticità nei Quadri di Riferimento delle prove standardizzate esterne rispetto alle problematiche linguistiche . . . . .	38
2.8 Un percorso formativo dalle conoscenze alle competenze, ma come? . . . . .	39

<b>3</b>		<b>42</b>
3.1	La formazione e le nuove tecnologie . . . . .	42
3.2	L'evoluzione delle tecnologie per l'educazione . . . . .	44
3.3	L'E-Learning e la formazione . . . . .	46
3.4	L'E-Learning e l'Educazione Matematica . . . . .	48
<b>4</b>		<b>51</b>
4.1	E-learning: quadro di riferimento teorico . . . . .	51
4.1.1	Come cambiano i ruoli e la comunicazione . . . . .	54
4.1.2	Personalizzazione dei processi di insegnamento- apprendimento . . . . .	56
4.2	Le Piattaforme per l'E-Learning . . . . .	58
4.3	La piattaforma Moodle . . . . .	60
4.4	Gli "strumenti" di Moodle . . . . .	61
4.4.1	Glossario . . . . .	61
4.4.2	Compito . . . . .	62
4.4.3	Lezione . . . . .	63
4.4.4	Wiki . . . . .	64
4.4.5	Chat . . . . .	66
4.4.6	Forum . . . . .	66
<b>5</b>		<b>68</b>
5.1	Sulla comprensione del testo in matematica: stato dell'arte. . .	68
5.2	Quadro di riferimento teorico . . . . .	70
5.2.1	La teoria dei Modelli Mentali per la comprensione del testo . . . . .	70
5.2.2	La coerenza e la coesione di un testo . . . . .	74
5.2.3	Quale approccio alla comprensione del testo di un que- sito? . . . . .	74
5.2.4	Sulla Conoscenza Matematica . . . . .	76
5.2.5	Dalla teoria delle rappresentazioni semiotiche . . . . .	79
5.2.6	Sul Linguaggio Matematico . . . . .	80
<b>6</b>		<b>83</b>
6.1	Difficoltà di comprensione: una proposta di classificazione dei quesiti . . . . .	83
6.1.1	Contesto . . . . .	84
6.1.2	Tipo di testo . . . . .	86
6.1.3	Dizionario . . . . .	89
6.1.4	Coesione del testo . . . . .	92
6.1.5	Enciclopedia . . . . .	95

6.1.6	Conoscenza Matematica . . . . .	96
6.1.7	Operatività . . . . .	105
6.2	Caratteristiche del testo e difficoltà di comprensione . . . . .	108
6.2.1	Difficoltà nella rappresentazione proposizionale . . . . .	110
6.2.2	Difficoltà nella costruzione del modello mentale . . . . .	110
6.3	Esempi di classificazione e individuazione delle difficoltà di comprensione . . . . .	113
<b>7</b>		<b>123</b>
7.1	Il coordinamento di registri semiotici . . . . .	123
7.1.1	I registri semplici . . . . .	124
7.1.2	I registri coordinati . . . . .	128
7.2	Analisi di sottotesti figurali . . . . .	129
7.3	Misura della complessità di un sottotesto figurale . . . . .	135
7.4	Lo spazio topologico dei codici di complessità . . . . .	138
7.5	Esempi di classificazione e di individuazione delle difficoltà di comprensione di quesiti di tipo <i>figurale</i> . . . . .	139
<b>8</b>		<b>150</b>
8.1	Percorso di formazione sulle difficoltà linguistiche e sulla com- prensione del testo dei quesiti OCSE-PISA e INVALSI . . . . .	150
8.2	Fasi del percorso di formazione . . . . .	151
8.3	La piattaforma Moodle del Corso . . . . .	152
8.4	Fase 1: il Quadro di Riferimento Teorico . . . . .	153
8.5	Fase 2: i criteri di classificazione . . . . .	155
8.5.1	Le attività laboratoriali . . . . .	156
8.5.2	Una attività collaborativa e laboratoriale . . . . .	157
8.6	Fase 3: l'individuazione delle difficoltà di comprensione . . . . .	157
8.7	Fase 4: le proposte di intervento in classe . . . . .	158
8.7.1	Attività di intervento sulle Difficoltà di Secondo Livello	159
8.7.2	Attività di intervento sulle Difficoltà di Terzo Livello .	161
8.7.3	Attività sulla costruzione di percorsi tematici e storie, basata sulla selezione di quesiti INVALSI e OCSE-PISA	162
8.8	Fase 5: la realizzazione dell'intervento e la riflessione critica sull'attività svolta . . . . .	164
8.9	Al termine del Corso.... . . . .	165
<b>9</b>		<b>166</b>
9.1	Una prima sperimentazione del Corso di Formazione . . . . .	166
9.2	Gli obiettivi della sperimentazione . . . . .	167
9.3	Il Forum e il questionario di valutazione . . . . .	167

9.4	Analisi dei risultati . . . . .	169
9.5	Sviluppi futuri . . . . .	171
	<b>Conclusioni</b>	<b>172</b>

# Introduzione

Una *società della conoscenza*, quale è quella in cui viviamo, si deve confrontare con bisogni conoscitivi sempre più articolati, crescenti e diffusi. In particolare, è diventato di primaria importanza l'idea di una formazione al di là dei limiti spazio-temporali tradizionalmente imposti dai sistemi educativi, estesa lungo tutto l'arco della vita, alla quale ci riferiamo con il termine *lifelong learning*. Questa idea, che si è venuta gradualmente affermando ad opera di organismi quali UNESCO (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization), OECD (Organization for Economic Cooperation and Development) e Consiglio d'Europa, si è imposta come una sorta di paradigma.

L'educazione 'una volta sola', su cui ha poggiato il sistema scuola, appare sempre più inadeguata dinanzi alle recenti istanze sociali: il rapporto tra vita e apprendimento si è rovesciato in quanto non si tratta più di un apprendimento per la vita, ma di una vita per apprendere; la richiesta che viene avanzata è quella di sistemi dislocabili nel corso dell'intera esistenza, accessibili da ogni luogo. Garantire a tutti un apprendimento secondo le proprie necessità, rispettando bisogni di ciascuno in ogni condizione, tempo e luogo: questa è la sfida con cui la società contemporanea dovrebbe confrontarsi e, in questo contesto, sono le nuove tecnologie a giocare un ruolo di primaria importanza.

Tra le diverse opportunità che le nuove tecnologie mettono al servizio dell'educazione, l'E-Learning costituisce una risposta efficace al problema della formazione continua, senza limitazioni di tempo e di spazio.

Dal punto di vista teorico, la ricerca più avveduta, mette in evidenza come l'E-Learning non si identifichi con una tecnologia o metodologia unica, bensì possa comportare una varietà di soluzioni flessibili, in evoluzione, suscettibili di molteplici caratterizzazioni.

In virtù del fatto che la comunicazione si svolge in un contesto digitale e di rete, rispetto alla didattica in presenza, si consentono delle possibilità nuove: i materiali di natura digitale possono, per esempio, essere trovati, ripresi,

modificati e integrati nell'enorme biblioteca rappresentata da Internet; ciò permette di riusare con facilità il lavoro già fatto, anche da altri, e rimodularlo in forme individualizzabili.

La possibilità di accedere all'ambiente di lavoro nei momenti più opportuni e la velocità dell'interazione alunno-tutor consentono possibili personalizzazioni dei ritmi di apprendimento e un'alta qualità nei feedback rilasciati all'allievo; la natura stessa della comunicazione mediata da computer rende possibile stabilire rapporti di condivisione o di collaborazione, a vario grado e livello, con una pluralità di soggetti che possono interagire in una classe virtuale o in gruppi di lavoro on-line, in forme più articolate di quanto sia possibile nei rapporti in presenza.

E' in questa cornice che si inserisce l'attività di ricerca descritta in questa tesi, dove si affronta un problema di formazione per insegnanti in servizio, sfruttando le potenzialità offerte dalle nuove tecnologie. In particolare, viene affrontato il problema di formare gli insegnanti in relazione alle criticità che si osservano nelle prove esterne standardizzate, nello specifico, le prove nazionali INVALSI e le prove internazionali OCSE-PISA.

Queste prove standardizzate esterne hanno l'obiettivo di valutare i livelli degli apprendimenti raggiunti dagli studenti in alcune discipline, tra le quali è prevista anche la Matematica, in alcuni momenti del loro percorso scolastico. I risultati di tali prove hanno come conseguenza comune una ampia e condizionante ricaduta sulle politiche scolastiche dei diversi paesi, con l'obiettivo del miglioramento di tali sistemi ma con non poche problematiche interpretative e decisionali.

Nell'ambito specifico delle prove relative alla Matematica, dalle rilevazioni si evidenziano diversi tipi di criticità. Queste riguardano sia la relazione dei quesiti proposti con i percorsi scolastici realizzati dagli studenti, sia le strategie risolutive, sia le modalità e i tempi di somministrazione. In particolare si evidenziano significative problematiche linguistiche, sia in relazione alla comprensione del testo, sia in relazione alla produzione in domande aperte. La problematica linguistica legata alla comprensione del testo, evidenziata anche dalle prove parallele di lettura e comprensione della lingua Italiana, costituisce una difficoltà fondamentale per le prove di Matematica, perché nella maggior parte dei casi non consente allo studente neppure di arrivare ad attivare processi matematici significativi. E' proprio sulle problematiche linguistiche che si è concentrato il nostro lavoro nell'ambito del percorso di dottorato. Infatti, l'obiettivo della nostra ricerca è quello di formare gli insegnanti in merito alle competenze necessarie per l'analisi dei quesiti dal punto di vista delle difficoltà di comprensione del testo.

In questa tesi, dopo un quadro introduttivo sulle problematiche legate ai momenti valutativi delle prove standardizzate esterne OCSE-PISA e INVALSI, si affronta il problema della formazione degli insegnanti e della relazione tra formazione e nuove tecnologie.

Si descrive poi la progettazione e la realizzazione di un prototipo di corso di formazione per insegnanti in modalità E-Learning, su piattaforma Moodle, il cui obiettivo è quello di formare gli insegnanti alle competenze di analisi dei testi dei quesiti, per l'individuazione di eventuali difficoltà di comprensione del testo. Il contenuto di questo corso consiste in un nuovo quadro di riferimento teorico che è stato ideato nel nostro percorso di ricerca per l'osservazione, l'interpretazione e l'intervento sulle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo.

Vengono infine riportati e discussi i primi risultati di una sperimentazione del Corso realizzata nell'ambito di un Master in Formatore in Didattica della Matematica, attualmente in corso di svolgimento presso l'Università di Pisa.

# Capitolo 1

In questo capitolo, dopo un quadro introduttivo sulle prove standardizzate esterne e il sistema scolastico italiano, vengono descritti gli scopi e le caratteristiche delle prove OCSE-PISA e INVALSI e sono descritte le problematiche legate a tali prove. Viene presentata, inoltre, una prima analisi delle criticità legate alle prove standardizzate in ambito matematico.

## 1.1 Le prove standardizzate esterne e il nostro sistema scolastico

Le profonde trasformazioni sociali, economiche e culturali che hanno interessato la maggior parte dei paesi economicamente avanzati a partire dal secondo dopoguerra hanno prodotto radicali cambiamenti anche sulla scuola che già da diversi decenni ha assunto le caratteristiche del fenomeno di massa.

Questi mutamenti si sono in parte tradotti in riforme, non sempre compiute, dei sistemi scolastici con conseguenze anche sul sistema di valutazione centrale e locale, ponendo in primo piano il problema della comparabilità dei risultati all'interno del medesimo paese, ma anche tra paesi differenti, quindi con sistemi scolastici ed educativi profondamente diversi.

In questo contesto generale, già a partire dagli anni sessanta del Novecento, alcuni organismi internazionali hanno proposto e promosso rilevazioni sui livelli di apprendimento raggiunti dagli allievi in alcune discipline fondamentali, tipicamente, anche se non esclusivamente, la lingua del paese, la matematica e le scienze. Nel corso degli anni queste ricerche hanno definito degli standard di riferimento fondamentali per tutti i sistemi di valutazione nazionali, pur con le dovute differenze rispetto alle esigenze e finalità specifiche di ciascun paese. Anche l'Italia non ha fatto eccezione, nonostante alcune incertezze e scelte non sempre pienamente coerenti con le finalità annunciate.

Dall'inizio degli anni 2000 è stato creato l'Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema Educativo di Istruzione e Formazione (INVALSI).

L'INVALSI ha tra i suoi scopi principali, insieme ad altri, il compito istituzionale di promuovere rilevazioni nazionali e internazionali sui livelli degli apprendimenti raggiunti dagli studenti italiani in alcune discipline in determinati momenti del loro percorso scolastico. Questo compito è particolarmente rilevante con l'autonomia scolastica. Se, infatti, ogni scuola è pienamente responsabile della propria offerta formativa, è evidente che gli utenti, e i cittadini tutti, hanno il diritto di disporre di affidabili strumenti di valutazione della qualità di tale offerta.

La creazione di sistemi di rilevazione che permettano di disporre di dati utili e affidabili per effettuare analisi e confronti sincronici e diacronici presuppone l'utilizzo di prove in grado di rispondere a queste esigenze. Nella quasi totalità dei casi si è quindi fatto ricorso alle cosiddette prove standardizzate, ossia a prove la cui peculiarità è quella di esser costruite secondo modalità trasparenti e codificate e, soprattutto, di prevedere modalità di correzione riproducibili, quindi, nel limite del possibile, indipendenti dal soggetto che effettua la correzione stessa. Sono stati realizzati sistemi di valutazione sia a livello nazionale, come le prove INVALSI, sia internazionale. A questo secondo gruppo appartiene il progetto OCSE PISA, *Programme for International Student Assessment*<sup>1</sup>.

## 1.2 Le prove INVALSI

L'INVALSI è l'Ente di ricerca che ha raccolto, in un lungo e costante processo di trasformazione, l'eredità del Centro Europeo dell'Educazione (CEDE) istituito nei primi anni settanta del secolo scorso. Sulla base delle vigenti Leggi, che sono frutto di un'evoluzione normativa significativamente sempre più incentrata sugli aspetti valutativi e qualitativi del sistema scolastico, l'Istituto [INVALSI, 2012]:

- effettua verifiche periodiche e sistematiche sulle conoscenze e abilità degli studenti e sulla qualità complessiva dell'offerta formativa delle istituzioni di istruzione e di istruzione e formazione professionale, anche nel contesto dell'apprendimento permanente; in particolare gestisce il Sistema Nazionale di Valutazione (SNV);

---

<sup>1</sup>A livello internazionale vi sono altri tipi di prove, come l'indagine TIMSS, che misura la performance degli studenti relativamente alla IV classe della scuola primaria e III secondaria di I grado

- studia le cause dell'insuccesso e della dispersione scolastica con riferimento al contesto sociale ed alle tipologie dell'offerta formativa;
- effettua le rilevazioni necessarie per la valutazione del valore aggiunto realizzato dalle scuole;
- predispone annualmente i test della nuova prova scritta, a carattere nazionale, volta a verificare i livelli generali e specifici di apprendimento conseguiti dagli studenti nell'esame di Stato al terzo anno della scuola secondaria di primo grado;
- predispone modelli da mettere a disposizione delle autonomie scolastiche ai fini dell'elaborazione della terza prova a conclusione dei percorsi dell'istruzione secondaria superiore;
- provvede alla valutazione dei livelli di apprendimento degli studenti a conclusione dei percorsi dell'istruzione secondaria superiore, utilizzando le prove scritte degli esami di Stato secondo criteri e modalità coerenti con quelli applicati a livello internazionale per garantirne la comparabilità;
- fornisce supporto e assistenza tecnica all'amministrazione scolastica, alle regioni, agli enti territoriali, e alle singole istituzioni scolastiche e formative per la realizzazione di autonome iniziative di monitoraggio, valutazione e autovalutazione;
- svolge attività di formazione del personale docente e dirigente della scuola, connessa ai processi di valutazione e di autovalutazione delle istituzioni scolastiche;
- svolge attività di ricerca, sia su propria iniziativa che su mandato di enti pubblici e privati;
- assicura la partecipazione italiana a progetti di ricerca europea e internazionale in campo valutativo, rappresentando il Paese negli organismi competenti;
- formula proposte per la piena attuazione del sistema di valutazione dei dirigenti scolastici, definisce le procedure da seguire per la loro valutazione, formula proposte per la formazione dei componenti del team di valutazione e realizza il monitoraggio sullo sviluppo e sugli esiti del sistema di valutazione.

L'INVALSI è soggetto alla vigilanza del Ministero della Pubblica Istruzione che individua le priorità strategiche delle quali l'Istituto tiene conto per programmare la propria attività.

### 1.2.1 Le prove INVALSI di Matematica

Le prove INVALSI riguardano sia il primo ciclo di istruzione sia il secondo ciclo. La definizione degli obiettivi di apprendimento del secondo ciclo di istruzione è contenuta in tre blocchi di documenti normativi. Su di essi è costruita la valutazione del Servizio Nazionale di Valutazione e a essi vengono agganciati i singoli item delle prove, per permettere un corretto posizionamento del risultato della valutazione rispetto al percorso scolastico curricolare.

Il primo blocco è costituito dall'insieme dei documenti relativi all'Obbligo di istruzione, che riguardano tutte le articolazioni del sistema scolastico. La legge 26 dicembre 2006, n.296, ha elevato l'obbligo di istruzione a 10 anni; anche con riferimento alla Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 l'innalzamento dell'obbligo di istruzione è finalizzato all'acquisizione dei saperi e delle competenze chiave di cittadinanza (asse dei linguaggi, asse matematico, asse scientifico-tecnologico, asse storico-sociale) così come definite nel decreto ministeriale 22-8-2007, n. 1391. Il riferimento alla valutazione per la matematica è quindi costituito dall'asse culturale matematico; in esso si dice che: *la competenza matematica comporta la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (dialettico e algoritmico) e di rappresentazione grafica e simbolica (formule, modelli, costrutti, grafici, carte), la capacità di comprendere ed esprimere adeguatamente informazioni qualitative e quantitative, di esplorare situazioni problematiche, di porsi e risolvere problemi, di progettare e costruire modelli di situazioni reali.* Finalità dell'asse matematico è l'acquisizione, al termine dell'obbligo d'istruzione, delle abilità necessarie per applicare i principi e i processi matematici di base nel contesto quotidiano della sfera domestica e sul lavoro, nonché per seguire e vagliare la coerenza logica delle argomentazioni proprie e altrui in molteplici contesti di indagine conoscitiva e di decisione. Le quattro competenze di base di questo asse culturale sono così enunciate:

- 1) Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica <sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>I documenti della normativa di riferimento, nonché altri materiali utili attinenti all'obbligo di istruzione, sono reperibili sul sito dedicato <http://www.indire.it/obbligoinistruzione/>

- 2) Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.
- 3) Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi.
- 4) Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

I saperi sono articolati in abilità/capacità e conoscenze, con riferimento al sistema di descrizione previsto per l'adozione del Quadro Europeo dei Titoli e delle Qualifiche (EQF). Nel momento in cui una domanda è proposta per il Servizio Nazionale di Valutazione, si cerca di esplicitare in che modo tale domanda possa fornire indicazioni significative riguardo a una di queste competenze di base. Queste informazioni vengono raccolte nelle Guide alla lettura che accompagnano le prove.

Per quanto riguarda il sistema dei licei, gli obiettivi di apprendimento specifici sono contenuti nel complesso dei documenti delle Indicazioni nazionali. In essi gli obiettivi di apprendimento sono articolati in quattro ambiti (Aritmetica e algebra; Geometria; Relazioni e funzioni; Dati e previsioni). Per ogni domanda proposta per il Servizio Nazionale di Valutazione viene stabilito un collegamento con uno o più di questi obiettivi di apprendimento e queste informazioni sono riportate nelle Guide alla lettura.

Per quanto riguarda infine il sistema dell'istruzione tecnica e professionale, il documento di riferimento è costituito dalle Linee Guida, che contiene la declinazione dei risultati di apprendimento in conoscenze e abilità. Per ogni domanda proposta per il Servizio Nazionale di Valutazione si cerca di stabilire un collegamento con uno o più di questi obiettivi di apprendimento e queste informazioni sono riportate nelle Guide alla lettura.

### 1.3 Le Prove OCSE-PISA

Il progetto PISA (Programme for International Student Assessment), che fu avviato nel 1997 da parte dei paesi aderenti all'OCSE, testimonia l'impegno dei Governi di questi paesi a monitorare l'efficacia dei loro sistemi scolastici vagliandone i risultati ottenuti in termini di livello di apprendimenti degli studenti, misurati all'interno di un quadro di riferimento condiviso a livello internazionale. PISA è prima di tutto uno sforzo collaborativo che si avvale della competenza di esperti provenienti da tutti i paesi partecipanti e di una

guida congiunta da parte dei loro governi sulla base di interessi condivisi e improntati alla definizione di politiche comuni. I paesi Partecipanti hanno la responsabilità politica del progetto. Gli esperti dei paesi partecipanti siedono in gruppi di lavoro la cui finalità è quella di realizzare gli obiettivi politici affidati al progetto PISA utilizzando le migliori tecniche disponibili a livello internazionale nel campo della valutazione comparata delle competenze. Questa architettura di governo del progetto PISA garantisce che gli strumenti di valutazione adottati

- siano validi a livello internazionale e tengano conto del contesto culturale e curricolare dei paesi membri dell'OCSE;
- abbiano solide basi metodologiche;
- diano il dovuto risalto all'autenticità delle situazioni e alla efficacia dell'azione educativa.

Per la scuola italiana il progetto PISA ha valenza strategica per valutarne il posizionamento in ambito internazionale e per analizzarne e comprenderne la capacità di far acquisire agli studenti le competenze ritenute essenziali nei paesi a sviluppo avanzato. In Italia i risultati del progetto hanno progressivamente guadagnato visibilità, ricevendo l'attenzione di un pubblico sempre più ampio, ben oltre gli ambiti specialistici; è crescente il loro utilizzo a fini di ricerca, ma anche come base informativa per disegnare e valutare programmi di intervento in materia di politica educativa.

Il progetto OCSE PISA (Programme for International Student Assessment) rappresenta il frutto di un lavoro collaborativo compiuto da tutti i paesi membri dell'OCSE e da paesi terzi consociati teso a rilevare in che misura gli studenti di quindici anni siano preparati ad affrontare le sfide che potrebbero incontrare nel corso della propria vita.

È stata scelta l'età di quindici anni perché a quest'età, nella maggior parte dei paesi OCSE, gli studenti sono vicini al termine dell'obbligo scolastico e, di conseguenza, proprio in questa fase si può tentare di misurare le conoscenze, le abilità e gli atteggiamenti accumulati in quasi dieci anni di istruzione. La rilevazione PISA, infatti, adotta una prospettiva ampia nella valutazione delle conoscenze, delle abilità e degli atteggiamenti.

Questa prospettiva tiene conto dei cambiamenti in atto nei programmi di studio e nello stesso tempo supera un'impostazione meramente scolastica per prendere in considerazione la capacità di servirsi delle conoscenze acquisite per affrontare i compiti e le sfide proposte dalla vita quotidiana.

Le abilità acquisite, dunque, riflettono la capacità degli studenti di continuare ad apprendere per tutta la vita, applicando quanto appreso a scuola a

contesti extra scolastici, valutando le proprie scelte e prendendo decisioni. L'indagine, guidata congiuntamente dai governi dei paesi partecipanti, armonizza le priorità politiche dei singoli paesi ricorrendo alla competenza scientifica di esperti di livello nazionale e internazionale.

PISA associa alla valutazione di aree cognitive riferibili a precisi ambiti disciplinari, quali le scienze, la matematica e la lettura, la raccolta di informazioni sul contesto familiare, sugli stili di apprendimento, sulla percezione degli ambienti in cui l'apprendimento stesso ha luogo e sulla familiarità con le nuove tecnologie.

L'indagine PISA adotta: a) meccanismi che garantiscono un elevato grado di qualità nei processi di traduzione delle prove, di campionamento e di somministrazione del test; b) misure che consentono di rendere gli strumenti di valutazione il più possibile "di ampio respiro" in termini linguistici e culturali, soprattutto grazie alla partecipazione dei singoli paesi al processo di costruzione e di revisione dei quesiti; c) gli strumenti e le metodologie più aggiornati per il trattamento dei dati.

La compresenza di tali tratti distintivi produce strumenti di grande qualità e risultati dotati di un alto livello di validità e di affidabilità, e, di conseguenza, una migliore comprensione sia dei sistemi educativi sia delle conoscenze, delle abilità e degli atteggiamenti degli studenti.

PISA si basa su una concezione dinamica dell'apprendimento per tutta la vita, *lifelong learning*, secondo la quale, le conoscenze e le abilità necessarie per adattarsi con successo a un mondo in perenne mutamento si acquisiscono lungo l'intero arco della vita.

Il Programme for International Student Assessment focalizza l'attenzione su ciò di cui gli studenti quindicenni avranno bisogno nel futuro e si sforza di valutare che cosa siano in grado di fare con ciò che hanno appreso. I programmi scolastici e i curricula dei singoli paesi, dunque, fungono da comune denominatore per la definizione dell'indagine, senza però costituirne un limite.

Pertanto, se è vero che il progetto valuta le conoscenze degli studenti, esso, d'altra parte, prende in considerazione anche la loro capacità di riflettere e di applicare le proprie conoscenze e la propria esperienza alle questioni che si presentano nel mondo reale. Ad esempio, per comprendere e valutare consigli riguardanti la scienza dell'alimentazione, un adulto non deve soltanto possedere alcune nozioni di base sui valori nutritivi dei diversi alimenti, ma deve anche saper applicare tali informazioni. Allo scopo di abbracciare con un'unica parola una simile e più ampia concezione dell'insieme di conoscenze e abilità, si è fatto ricorso al termine *literacy* [OCSE-PISA, 2012].

PISA è stato organizzato in modo tale da consentire di raccogliere informazioni con periodicità triennale e di fornire dati riguardo alla literacy in

lettura, alla literacy matematica, e alla literacy scientifica di studenti, scuole e paesi.

Poiché il progetto PISA ha l'obiettivo di valutare i risultati ottenuti dai sistemi di istruzione in una fascia d'età che è compresa nella stragrande maggioranza dei paesi nella fascia dell'istruzione obbligatoria, la rilevazione interessa tutti i quindicenni scolarizzati, sia che essi siano inseriti nel settore dell'istruzione sia che essi siano inseriti nella formazione professionale.

In ciascun paese la rilevazione interessa dai 5.000 ai 10.000 studenti di almeno 150 scuole, il che fornisce una base di campionamento valida, tale da consentire una aggregazione dei risultati sulla base di una pluralità di caratteristiche degli studenti.

Obiettivo principale di PISA è verificare in che misura i giovani studenti abbiano acquisito quell'insieme di conoscenze e di abilità nella literacy in lettura, nella literacy matematica e nella literacy scientifica che occorreranno loro nella vita adulta.

Sebbene l'acquisizione di conoscenze specifiche rivesta grande importanza nell'apprendimento scolastico, il saper applicare nella vita adulta le conoscenze acquisite dipende in maniera cruciale dall'acquisizione di cognizioni e di abilità più vaste. Per quanto riguarda le scienze, possedere conoscenze specifiche – sapere, ad esempio, il nome scientifico di piante o animali – è meno rilevante che non comprendere grandi temi, quali, ad esempio, il consumo energetico, la biodiversità o la salute per riflettere sulle questioni oggetto di dibattito nella comunità degli adulti.

Per quanto riguarda la lettura, invece, le abilità fondamentali consistono nell'essere in grado di interpretare un testo scritto e di riflettere sul suo contenuto e sulle sue caratteristiche formali. Per quanto riguarda la matematica, quando si tratta di dispiegare le proprie abilità matematiche nella vita quotidiana, è più importante saper ragionare in termini quantitativi o saper rappresentare relazioni e rapporti di dipendenza, piuttosto che saper rispondere alle domande tipiche di un libro di testo.

In un contesto internazionale, focalizzare l'attenzione sui contenuti curricolari, significherebbe limitarsi a considerare soltanto gli elementi comuni a tutti i paesi partecipanti o alla maggior parte di essi. Ciò comporterebbe, ovviamente, molti compromessi e si risolverebbe in una valutazione troppo ristretta per risultare di un qualche valore per i governi che volessero conoscere i punti di forza o le innovazioni presenti nei sistemi scolastici di altri paesi.

È essenziale che gli studenti sviluppino alcune abilità di carattere generale quali, ad esempio, le abilità comunicative, l'adattabilità, la flessibilità, la capacità di risolvere problemi e quella di servirsi delle tecnologie dell'informazione. Tali abilità, infatti, si sviluppano in maniera trasversale e dunque

richiedono di essere valutate in una prospettiva cross-curricolare.

PISA non è un'indagine transnazionale una tantum per valutare le abilità degli studenti quindicenni nella lettura, nella matematica e nelle scienze. Si tratta, invece, di un progetto di ampio respiro che, a lungo termine, porterà alla costituzione di un corpus di informazioni tale da consentire di monitorare l'andamento delle conoscenze e delle abilità degli studenti, non soltanto a livello di paese ma anche nelle diverse sub-popolazioni di ciascun paese.

A ogni ciclo viene valutato nel dettaglio uno degli ambiti al quale, nelle prove, vengono dedicati i due terzi del tempo. Al centro della rilevazione del 2006 è stata la literacy scientifica, del 2009 è stata la literacy in lettura e nel 2012 la literacy matematica. L'organizzazione delle prove consente un'analisi approfondita delle prestazioni in ciascuna area ogni nove anni e un'analisi delle tendenze ogni tre anni.

Da PISA ci si attendono tre tipi di risultati principali:

- indicatori di base che consentano di costruire un profilo essenziale delle conoscenze e delle abilità degli studenti;
- indicatori di contesto che mostrino come tali competenze siano in rapporto con importanti variabili di carattere demografico e socio-economico o riguardanti il sistema educativo;
- indicatori di tendenza, derivanti dal carattere ciclico della raccolta dati, che mettano in luce i cambiamenti sia nel livello e nella distribuzione dei risultati, sia nelle relazioni che intercorrono fra tali risultati e le variabili di contesto relative tanto agli studenti quanto alle scuole.

### 1.3.1 Literacy Matematica

In PISA l'ambito della literacy matematica riguarda la capacità degli studenti di analizzare, di ragionare e di comunicare idee in modo efficace nel momento in cui essi pongono, formulano, risolvono e spiegano la soluzione di problemi matematici in una molteplicità di situazioni [OCSE-PISA, 2006, OCSE-PISA, 2012].

La rilevazione PISA focalizza l'attenzione su problemi del mondo reale e non si limita al tipo di problemi e di situazioni che generalmente si affrontano nelle aule scolastiche.

In contesti di vita reale, infatti, facendo acquisti, viaggiando, preparando da mangiare, tenendo la propria contabilità o valutando questioni politiche un cittadino si trova spesso a confrontarsi con situazioni nelle quali l'uso di ragionamenti di tipo quantitativo o spaziale o di altre competenze matematiche può aiutare a chiarire, formulare o risolvere un problema.

Un tale uso della matematica è basato sulle abilità apprese a scuola ed esercitate attraverso il tipo di problemi che normalmente sono presentati nei libri di testo e a lezione. Tuttavia esso richiede la capacità di applicare tali abilità a un contesto meno strutturato, in cui le istruzioni sono meno chiare e in cui è lo studente a dover decidere quali conoscenze siano pertinenti e in che modo esse possano essere utilmente applicate.

In PISA la literacy matematica riguarda la misura in cui i quindicenni possono essere considerati come cittadini informati che riflettono e come consumatori intelligenti. In tutti i paesi, i cittadini devono sempre più spesso confrontarsi con una miriade di compiti che implicano concetti di tipo quantitativo, spaziale, probabilistico o altri tipi di concetti matematici.

Per esempio, i mass media (quotidiani, riviste, televisione e Internet) sono pieni di informazioni presentate sotto forma di tabelle, diagrammi e grafici su argomenti quali il clima, l'economia, la medicina e lo sport, per citarne solo alcuni. I cittadini sono ormai bombardati da informazioni su questioni quali "il surriscaldamento della terra e l'effetto serra", "la crescita demografica", "le macchie di petrolio e i mari", "la scomparsa della campagna".

E da ultimo, ma non per questo meno importante, i cittadini sono chiamati a confrontarsi con la necessità di leggere moduli, di consultare orari di autobus e treni, di portare a termine correttamente transazioni economiche, di decidere il miglior rapporto qualità-prezzo quando fanno acquisti, eccetera. In PISA, la literacy matematica mira a stabilire se gli studenti di 15 anni (età che per molti studenti corrisponde alla fine della scuola dell'obbligo e, quindi, segna il termine dell'apprendimento formale della matematica) sono in grado di utilizzare le nozioni e la comprensione della matematica per orientarsi nei problemi della vita quotidiana e per svolgere un ruolo attivo nella società.

PISA definisce la literacy matematica nel modo seguente:

*La literacy matematica è la capacità di un individuo di individuare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino impegnato, che riflette e che esercita un ruolo costruttivo [OCSE-PISA, 2012].*

Alcune note esplicative possono aiutare a chiarire ulteriormente tale definizione dell'ambito. L'espressione "literacy matematica" pone l'accento sulle conoscenze matematiche attivate in modo funzionale in una molteplicità di situazioni differenti e con una varietà di approcci basati sul ragionamento e sull'intuizione (insight).

Naturalmente, affinché un simile utilizzo sia possibile e praticabile, sono necessarie molte conoscenze e abilità matematiche fondamentali. In ambito linguistico, la literacy presuppone un lessico ampio e una conoscenza sostanziale di regole grammaticali, di fonetica, di ortografia, ma non può essere ridotta

solo a questo.

Per comunicare, gli esseri umani combinano questi elementi in maniera creativa, in risposta alle varie situazioni che incontrano nel mondo reale. Analogamente, la literacy matematica non può essere ridotta alla sola conoscenza della terminologia matematica, dei fatti e dei procedimenti, né tantomeno alle abilità necessarie per svolgere certe operazioni e applicare certi metodi, sebbene presupponga tutto ciò.

La literacy matematica comporta l'uso creativo dell'insieme di tali elementi per rispondere a quanto richiesto dalle situazioni esterne.

L'espressione "mondo reale" indica l'ambiente naturale, sociale e culturale nel quale l'individuo vive. Come ha detto Freudenthal, "i nostri concetti matematici, le nostre strutture e le nostre idee sono state inventate come strumenti per organizzare i fenomeni del mondo fisico, sociale e mentale", [Freudenthal, 1983].

L'espressione "usare la matematica e confrontarsi con essa" indica l'uso della matematica e la soluzione di problemi, nonché un più ampio coinvolgimento personale nel comunicare, nel rapportarsi, nel valutare e perfino nell'apprezzare la matematica e nel goderne. La definizione, dunque, va oltre l'uso funzionale della matematica in senso stretto, comprendendo anche la preparazione a proseguire gli studi e gli aspetti estetici e ludici della matematica.

Con "la vita di quell'individuo" s'intende sia la vita privata, professionale e sociale con colleghi e parenti, sia la vita in quanto cittadino che fa parte di una collettività. Fra le capacità fondamentali che la nozione di literacy matematica comporta vi è quella di porre, formulare, risolvere e interpretare problemi servendosi della matematica in una molteplicità di situazioni e di contesti. Questi ultimi vanno da contesti puramente matematici a contesti in cui non è presente o evidente fin dall'inizio una struttura matematica, che deve piuttosto essere introdotta in modo efficace da chi pone o risolve il problema.

È importante sottolineare, inoltre, che la definizione non si limita a una conoscenza di base della matematica, ma comprende il fare e l'utilizzare la matematica in situazioni che vanno da quelle quotidiane a quelle insolite e da quelle semplici a quelle complesse.

Gli atteggiamenti e le emozioni che la matematica suscita, come la fiducia in se stessi, la curiosità, la percezione dell'interesse e dell'importanza della matematica e il desiderio di fare o di capire, non entrano a far parte direttamente della definizione della literacy matematica, ma ciò nonostante apportano ad essa un contributo sostanziale.

In linea di principio, è possibile possedere una literacy matematica senza che questa sia accompagnata da tali atteggiamenti ed emozioni. In pratica, però,

è improbabile che la literacy venga esercitata e attivata da chi non possiede un minimo di fiducia in se stesso, di curiosità, di percezione dell'interesse e dell'importanza della matematica e di desiderio di fare o di capire. L'importanza di tali atteggiamenti ed emozioni in quanto correlati alla literacy matematica è ormai riconosciuta. Tali aspetti non entrano a far parte direttamente della rilevazione della literacy matematica, ma sono comunque oggetto di valutazione in PISA.

## 1.4 Criticità nelle prove standardizzate esterne

Le prove standardizzate esterne OCSE-PISA e INVALSI risultano essere differenti sia per scopi valutativi, sia per contenuti, sia per fasce di età a cui sono rivolte, ma i loro risultati hanno come conseguenza comune una ampia e condizionante ricaduta sulle politiche scolastiche dei diversi paesi, con l'obiettivo del miglioramento di tali sistemi ma con non poche problematiche interpretative e decisionali.

Un equivoco di fondo implicito sta nella parola stessa *valutazione*, che può significare sia la valutazione del sistema sia la valutazione degli allievi o addirittura la valutazione degli operatori scolastici [?]. Una delle principali fonti di preoccupazione consiste nel fatto che vi sono differenze di contesto in cui ogni insegnante opera, e differenze di contesto per quanto riguarda la provenienza di ogni allievo e si teme che queste prove non tengano nel dovuto conto la storia e le difficoltà specifiche dei singoli ragazzi.

Nel nostro paese, le Prove INVALSI, che da alcuni anni coinvolgono un numero sempre crescente di ragazzi, hanno suscitato molta attenzione, tra gli insegnanti e le famiglie e provocato non poche paure, soprattutto in relazione al fatto che gli esiti sono negativi. I timori sono legati principalmente al fatto che i risultati di queste prove possano essere usati per valutare gli insegnanti o le scuole o per intervenire pesantemente dall'esterno sulle valutazioni individuali degli allievi (timore questo legato in particolare alla Prova Nazionale inserita nell'Esame di Stato conclusivo del primo ciclo di istruzione) [Bolondi, 2010].

In particolare, la gran parte del corpo docente vede queste prove esterne come un'attività lontana dalla didattica quotidiana svolta in classe e finalizzata a valutare il proprio operato; d'altra parte un eventuale esito negativo degli allievi viene vissuto come un fallimento globale dell'azione didattica svolta, piuttosto che come occasione per una riflessione in grado di suggerire interventi mirati.

Quanto fino ad ora descritto si riferisce, in modo generale, a tutti i tipi di prove standardizzate esterne. Nell'ambito specifico delle prove relative al-

la Matematica, dalle rilevazioni si evidenziano diversi tipi di problematiche. Queste riguardano sia la loro relazione con i percorsi scolastici, sia le modalità e i tempi di somministrazione, sia le strategie risolutive messe in atto dagli studenti. In particolare si evidenziano significative problematiche linguistiche, sia in relazione alla comprensione del testo, sia in relazione alla produzione in domande aperte.

La problematica linguistica legata alla comprensione del testo, evidenziata anche dalle prove parallele di lettura e comprensione in lingua Italiana, costituisce una criticità sostanziale per le prove di Matematica perché nella maggior parte dei casi non permette allo studente neppure di arrivare ad attivare alcun processo matematico significativo. Inoltre, a questo tipo di problematiche, non è posta la dovuta attenzione neppure nei Quadri di Riferimento Teorici delle relative prove standardizzate. E' per questo motivo che la nostra attività di ricerca ha posto l'attenzione sulle problematiche linguistiche e di comprensione del testo dei quesiti, con l'obiettivo di trasformare il momento di valutazione delle prove esterne in occasione didattica, fornendo agli insegnanti strumenti per l'osservazione e l'interpretazione dei risultati delle prove in termini di difficoltà degli allievi e per ridirigere la propria attività didattica, sfruttando le potenzialità offerte dalle nuove tecnologie.

## **1.5 Formulazione del problema**

In questa tesi si vuole affrontare il problema della formazione degli insegnanti di matematica rispetto alle criticità che si osservano nelle prove standardizzate esterne, in particolare, per quanto riguarda le difficoltà linguistiche e di comprensione del testo.

# Capitolo 2

Con l'obiettivo di individuare le possibili difficoltà di comprensione nel testo dei quesiti delle prove standardizzate esterne, si analizza quale contributo possono fornire in questa direzione i Quadri di Riferimento delle prove OCSE-PISA e delle prove INVALSI.

## 2.1 Il Quadro di Riferimento delle Prove OCSE-PISA

Il quadro di riferimento della *literacy matematica* delle prove OCSE-PISA, [OCSE-PISA, 2006, OCSE-PISA, 2012], fornisce il fondamento logico e la descrizione di come è impostata la verifica della capacità dei quindicenni di servirsi della matematica in modo fondato quando si confrontano con i problemi del mondo reale, o in termini più generali, la verifica di quanto i quindicenni siano competenti dal punto di vista matematico.

Per descrivere più chiaramente l'ambito dell'indagine, devono essere distinte tre componenti:

- le situazioni o i contesti in cui sono calati i problemi,
- il contenuto matematico che deve essere usato per risolvere il problema, classificato in relazione ad alcune idee chiave (*overarching ideas*),
- le competenze che devono essere attivate nel processo attraverso cui il mondo reale (nel quale hanno origine i problemi) viene messo in relazione con la matematica, e dunque nella soluzione dei problemi.

Il grado di competenza matematica di una persona si può vedere dal modo in cui utilizza conoscenze e abilità matematiche per risolvere i problemi. Nella

vita di una persona, i problemi (e le loro soluzioni) possono presentarsi in una molteplicità di situazioni e contesti.

I problemi dell'indagine OCSE/PISA si basano sul mondo reale in un duplice senso: in primo luogo, i problemi fanno riferimento ad alcuni ambiti situazionali che sono pertinenti alla vita degli studenti, le situazioni fanno parte del mondo reale e sono indicate dal rettangolo nella parte in alto a sinistra dello schema; in secondo luogo, all'interno di quella situazione, i problemi presentano un contesto più specifico.

L'altra componente del mondo reale che deve essere considerata quando si parla della competenza matematica è il contenuto matematico che una persona dovrebbe mettere in gioco nel risolvere un problema.

Il contenuto matematico può essere articolato in quattro categorie che comprendono i diversi tipi di problemi che sorgono attraverso l'interazione con gli eventi quotidiani, e si basano su una concezione dei modi in cui il contenuto matematico si presenta nella realtà. Per gli obiettivi della valutazione in PISA, tali categorie sono chiamate "idee chiave" e più precisamente sono *quantità, spazio e forma, cambiamento e relazioni, e incertezza*.

Un simile approccio al contenuto si differenzia in parte da quello comune nell'insegnamento della matematica e negli indirizzi curriculari normalmente adottati nelle scuole. Tuttavia, le idee chiave abbracciano grosso modo la gamma degli argomenti di matematica che gli studenti dovrebbero avere appreso.

I processi matematici che gli studenti applicano quando cercano di risolvere un problema vengono definiti competenze matematiche. Tali competenze sono state articolate in tre raggruppamenti (competency clusters) in relazione ai diversi processi cognitivi richiesti per risolvere vari tipi di problemi. Questi raggruppamenti riflettono il modo in cui i processi matematici sono normalmente impiegati quando gli studenti affrontano i problemi che sorgono nella loro interazione con la realtà.

Occorre sottolineare che le tre componenti appena descritte sono di diversa natura. Mentre le situazioni e i contesti definiscono l'ambito del problema nel mondo reale e le idee chiave riflettono il modo in cui si guarda il mondo attraverso "lenti matematiche", le competenze costituiscono il nucleo centrale della literacy matematica.

Soltanto se gli studenti possiedono determinate competenze sono in grado di risolvere correttamente determinati problemi. Valutare la competenza matematica vuol dire accertare fino a che punto gli studenti possiedano competenze matematiche e siano in grado di usarle in situazioni problematiche.

## 2.2 Situazioni e contesti

Un aspetto importante della definizione di competenza matematica è il confrontarsi con la matematica: utilizzare la matematica e “fare matematica” in una molteplicità di situazioni. Si è visto che, occupandosi di questioni che si prestano a essere trattate in termini matematici, la scelta dei metodi e delle rappresentazioni matematiche dipende spesso dalle situazioni in cui si presentano i problemi.

La situazione è quella porzione del mondo dello studente in cui sono collocati i compiti da svolgere. Essa si trova a una certa distanza dagli studenti. Nel progetto OCSE-PISA, la situazione considerata più prossima è la vita personale dello studente, seguita dalla vita scolastica, dal lavoro e dal tempo libero e, infine, dalla comunità locale e dalla società come la si incontra nella vita quotidiana. Le situazioni considerate più remote, invece, sono quelle scientifiche.

Si definiranno e si utilizzeranno quattro situazioni-tipo quali ambiti dei problemi da risolvere: personale, scolastica/professionale, pubblica e scientifica. Il contesto di un quesito è rappresentato dal suo scenario specifico all'interno di una situazione. Il contesto comprende tutti i singoli elementi utilizzati per formulare il problema.

È da notare che questo problema potrebbe far parte della reale esperienza di una persona che si trova in un determinato ambito del mondo reale. Esso fornisce un contesto autentico per l'uso della matematica, dal momento che l'applicazione della matematica a questo contesto è realmente orientata alla soluzione del problema.

Ciò differenzia il problema considerato da quelli che spesso compaiono nei libri di testo di matematica, il cui scopo principale è quello di far fare un esercizio matematico, piuttosto che utilizzare la matematica per risolvere un problema reale. Tale autenticità nell'uso della matematica è un aspetto importante della messa a punto e dell'analisi dei quesiti dell'indagine OCSE-PISA ed è in stretta relazione con la definizione di competenza matematica. Bisogna anche notare che alcuni elementi del problema sono inventati, come la valuta che è fittizia. Questo elemento fittizio è stato introdotto per evitare che gli studenti di qualche Paese siano ingiustamente avvantaggiati.

La situazione e il contesto di un problema possono essere considerati anche in termini di distanza tra il problema e la matematica che esso richiede. Se un compito fa riferimento unicamente a oggetti, simboli o strutture matematiche e non ad aspetti esterni al mondo matematico, il contesto del compito viene considerato come intra-matematico e il compito viene classificato come appartenente alla situazione “scientifica”.

L'OCSE-PISA comprende un numero limitato di prove di questo tipo, nelle

quali il contesto del problema rende esplicita la stretta connessione tra quest'ultimo e la matematica che ne sta alla base. Normalmente però, i problemi incontrati dagli studenti nella vita quotidiana non sono formulati in termini matematici espliciti.

Essi si riferiscono a oggetti del mondo reale. Tali contesti sono detti “extra-matematici” ed è lo studente a doverli tradurre in forma matematica. In linea generale, l'OCSE-PISA dà spazio a compiti che si potrebbero incontrare in situazioni del mondo reale e sono calati in contesti autentici che influenzano la loro soluzione e interpretazione.

È da notare che questo non esclude che nella prova vengano anche inclusi compiti con un contesto ipotetico, purché tale contesto abbia qualche elemento reale, non sia troppo distante da una situazione del mondo reale e richieda realmente l'uso della matematica per risolvere il problema.

## **2.3 Il contenuto matematico – le quattro “idee chiave”**

I concetti, le strutture e le idee matematiche sono stati messi a punto quali strumenti per organizzare i fenomeni del mondo naturale, sociale e mentale [OCSE-PISA, 2006]. A scuola, i programmi di matematica sono stati organizzati logicamente in ambiti di contenuto (per es. aritmetica, algebra, geometria) che riflettono branche del pensiero matematico storicamente consolidate e facilitano lo sviluppo di un programma di insegnamento strutturato.

Tuttavia, nel mondo reale, i fenomeni che si prestano ad essere trattati in termini matematici non si presentano secondo la stessa organizzazione logica. Raramente i problemi sorgono in modi e contesti che permettono di riuscire a comprenderli e a risolverli applicando conoscenze provenienti da un'unico ambito.

Dal momento che l'indagine OCSE-PISA mira ad accertare la capacità degli studenti di risolvere problemi reali, la gamma dei contenuti inclusi nella valutazione è stata definita servendosi di un approccio fenomenologico per descrivere i concetti, le strutture e le idee matematiche.

Questo significa che il contenuto viene descritto in relazione ai fenomeni e ai tipi di problemi per i quali è stato costruito. Tale approccio garantisce una coerenza tra l'impostazione della valutazione e la definizione dell'ambito della competenza matematica e, allo stesso tempo, copre una gamma di contenuti che comprende quanto generalmente si trova sia in altre indagini sulla

matematica sia nei curricula nazionali di matematica.

Le quattro idee chiave che seguono sono utilizzate nell'indagine PISA in quanto consentono di seguire lo sviluppo storico della disciplina, di abbracciare in modo esauriente l'ambito matematico e di riflettere i temi principali del curriculum scolastico:

- quantità;
- spazio e forma;
- cambiamento e relazioni;
- incertezza.

Attraverso queste quattro idee chiave è possibile articolare il contenuto matematico in un numero di aree sufficiente a garantire che i quesiti delle prove fossero distribuiti su tutto il curriculum e che, allo stesso tempo, il loro numero fosse sufficientemente ridotto da evitare distinzioni troppo minuziose che impedirebbero di prendere in considerazione problemi fondati su situazioni reali.

Un'idea chiave può essere concepita come un insieme coerente di fenomeni e di concetti che si possono incontrare in una molteplicità di situazioni differenti. Per sua natura, ciascuna idea chiave può essere considerata come una sorta di nozione generale che ha a che fare con un qualche ambito generale di contenuto.

Questo implica che le idee chiave non possano essere delineate con precisione una in rapporto all'altra. Ciascuna di esse rappresenta piuttosto una particolare prospettiva, o punto di vista, che può essere concepito come dotato di un nucleo, di un centro di gravità, e di contorni in un certo senso indistinti che consentono l'intersezione con altre idee chiave. In teoria, ogni idea chiave si interseca con tutte le altre.

Le quattro idee chiave sono descritte sinteticamente nei seguenti paragrafi.

### **2.3.1 Quantità**

Questa idea chiave è centrata sul bisogno di quantificare per organizzare la realtà. Tra i suoi aspetti più importanti vi sono la comprensione delle dimensioni relative, il riconoscimento di modelli numerici e l'uso di numeri per rappresentare quantità e attributi quantificabili degli oggetti del mondo reale (misure e conteggi).

Inoltre, la quantità ha a che fare con l'elaborazione e la comprensione di numeri rappresentati in vari modi. Un aspetto saliente del lavorare con la quantità è il ragionamento quantitativo. Componenti essenziali del ragionamento

quantitativo sono: il concetto di numero, l'uso di diverse rappresentazioni numeriche, la comprensione del significato delle operazioni, l'averne un'idea dell'ordine di grandezza dei numeri, i calcoli eleganti da un punto di vista matematico, i calcoli mentali e le stime.

### **2.3.2 Spazio e forma**

Dovunque intorno a noi vi sono modelli: nel linguaggio orale, nella musica, sul video, nel traffico, nelle costruzioni edili e nell'arte. Le forme possono essere considerate come modelli: case, uffici, ponti, stelle di mare, fiocchi di neve, piante topografiche delle città, quadrifogli, cristalli e ombre.

I modelli geometrici possono funzionare come modelli relativamente semplici di molti tipi di fenomeni ed è possibile e desiderabile studiarli a tutti i livelli (Grünbaum, 1985).

Quando si analizzano le componenti della forma e si riconoscono le forme in diverse rappresentazioni e in diverse dimensioni, lo studio della forma e delle costruzioni comporta la ricerca di somiglianze e differenze. Lo studio delle forme è strettamente legato al concetto di "capire lo spazio". Questo significa imparare a conoscere, esplorare e conquistare lo spazio per poter vivere, respirare e muoversi in esso con una maggiore consapevolezza [Freudenthal, 1973]. Per ottenere ciò, dobbiamo essere in grado di capire le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni: dobbiamo essere consapevoli di come vediamo le cose e del perché le vediamo così, dobbiamo imparare a navigare attraverso lo spazio e attraverso le costruzioni e le forme.

Ciò significa capire la relazione tra forme e immagini o rappresentazioni visive, come la relazione tra una città reale e le fotografie e le carte topografiche di quella città; significa anche capire come si possano rappresentare gli oggetti tridimensionali in due dimensioni, come si creino e si interpretino le ombre e che cosa sia la prospettiva e come funzioni.

### **2.3.3 Cambiamento e relazioni**

Ogni fenomeno naturale è la manifestazione di un cambiamento e nella realtà che ci circonda si possono osservare tra i fenomeni molte relazioni, sia temporanee che permanenti. La trasformazione degli organismi durante la loro crescita, il ciclo delle stagioni, il flusso e riflusso delle maree, i cicli di disoccupazione, i cambiamenti del tempo, gli indici della borsa valori non sono che alcuni esempi.

Alcuni di questi processi di cambiamento comportano semplici funzioni matematiche, che possono essere lineari, esponenziali, periodiche o logistiche, sia discrete che continue, e possono essere descritti o modellizzati in base a esse.

Molte relazioni, tuttavia, rientrano in più di una categoria e l'analisi dei dati è molto spesso indispensabile per determinare il tipo di relazione presente. Le relazioni matematiche assumono spesso la forma di equazioni o disequazioni, ma vi possono anche essere relazioni di natura più generale (come relazioni di equivalenza, divisibilità, inclusione, per citare solo alcuni esempi). Le relazioni possono essere rappresentate in molti modi, tra i quali vi sono le rappresentazioni simboliche, algebriche, grafiche, tabulari e geometriche. Rappresentazioni diverse possono essere utili per scopi diversi e hanno proprietà differenti. Quindi, quando si ha a che fare con situazioni e compiti problematici, il passaggio da una rappresentazione all'altra è spesso un procedimento chiave.

### **2.3.4 Incertezza**

L'attuale "società dell'informazione" offre una gran quantità di informazioni, presentandole spesso come precise, scientifiche e dotate di un certo grado di certezza.

Nella vita quotidiana, tuttavia, ci imbattiamo in risultati elettorali incerti, ponti che cedono, crolli del mercato azionario, previsioni del tempo inattendibili, pronostici inesatti sulla crescita demografica, modelli economici imprevedibili e molte altre dimostrazioni dell'incertezza del nostro mondo.

La constatazione di tale incertezza chiama in causa due argomenti tra loro correlati: i dati e il caso. Tali fenomeni sono oggetto di studi matematici rispettivamente nella statistica e nella teoria della probabilità.

Attività e concetti matematici specifici in questo ambito sono la raccolta e l'analisi dei dati, la loro rappresentazione/visualizzazione, la probabilità e l'inferenza statistica.

## **2.4 La competenza matematica**

Il progetto OCSE-PISA esamina la capacità degli studenti di analizzare, ragionare e comunicare idee matematiche in modo efficace nel momento in cui pongono, formulano, risolvono problemi matematici e ne interpretano le soluzioni. Tale attività di analisi e soluzione di problemi richiede, da parte degli studenti, l'uso di abilità e competenze acquisite attraverso il percorso scolastico e l'esperienza.

Ciascuna di queste competenze può essere posseduta a diversi livelli di padronanza.

Per individuare e analizzare queste competenze, il progetto OCSE-PISA ha

deciso di fare riferimento a otto tipiche competenze matematiche, che si basano, nella loro forma attuale, sul lavoro di Niss [Niss, 1999] e dei suoi colleghi danesi:

1. **Pensiero e ragionamento.** Questa competenza consiste: nel formulare domande che sono tipiche della matematica (“C’è...?”, “Se è così, quanti?”, “Come troviamo...?”); nel conoscere i tipi di risposte che la matematica dà a tali domande; nel distinguere tra diversi tipi di enunciati (definizioni, teoremi, congetture, ipotesi, esempi, affermazioni di tipo condizionale); e nel comprendere e trattare la portata e i limiti di determinati concetti matematici.
2. **Argomentazione.** Questa competenza consiste: nel conoscere cosa sono le dimostrazioni matematiche e come differiscono da altri tipi di ragionamento matematico; nel seguire catene di ragionamenti matematici di diverso tipo e nel valutarne la validità; nell’averne un’idea dell’euristica (“Che cosa può o non può accadere? E perché?”); e nel creare ed esprimere ragionamenti matematici.
3. **Comunicazione.** Questa competenza consiste nel sapersi esprimere in vari modi su questioni di carattere matematico, in forma orale e scritta e nel comprendere gli enunciati scritti od orali di altre persone circa tali questioni.
4. **Modellizzazione.** Questa competenza consiste: nella strutturazione del campo o della situazione che deve essere modellizzata; nel tradurre “la realtà” in strutture matematiche; nell’interpretare i modelli matematici in termini di “realtà”; nel lavorare con un modello matematico; nel validare il modello, nel riflettere, analizzare e valutare un modello e i suoi risultati; nel comunicare ad altri il modello e i suoi risultati (compresi i limiti di tali risultati); e nel monitorare e controllare il processo di modellizzazione.
5. **Formulazione e risoluzione di problemi.** Questa competenza consiste nel porre, formulare e definire diversi tipi di problemi matematici (quali problemi “puri”, “applicati”, “aperti” e “chiusi”) e nel risolverli in vari modi.
6. **Rappresentazione.** Questa competenza consiste: nel decodificare e codificare, tradurre, interpretare e distinguere le diverse forme di rappresentazione di oggetti e situazioni matematiche e le relazioni tra le varie rappresentazioni; nello scegliere e passare da una forma di rappresentazione a un’altra, in relazione alla situazione e allo scopo.

- 7. Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni.** Questa competenza consiste: nel decodificare e interpretare il linguaggio simbolico e formale e nel comprendere il suo rapporto con il linguaggio naturale; nel tradurre il linguaggio naturale in linguaggio simbolico/formale; nel lavorare con enunciati ed espressioni che contengano simboli e formule; e nell'usare variabili, risolvere equazioni ed effettuare calcoli.
  
- 8. Uso di sussidi e strumenti.** Questa competenza consiste nel conoscere ed essere capaci di usare vari sussidi e strumenti (comprese le tecnologie dell'informazione) che possono facilitare l'attività matematica e nel conoscerne i limiti.

Il progetto PISA non vuole sviluppare prove che valutino individualmente le sopracitate competenze. Fra tali competenze, infatti, esiste una considerevole sovrapposizione e, quando ci si serve della matematica, è generalmente necessario attingere simultaneamente a molte di queste competenze.

Qualsiasi sforzo di valutare competenze individuali, quindi, porterebbe a quesiti artificiali e a una suddivisione inutile dell'ambito della competenza matematica. Le particolari competenze che ciascuno studente sarà in grado di mostrare varieranno considerevolmente da individuo a individuo.

Il progetto OCSE-PISA parte dal presupposto che la maggior parte della matematica conosciuta dagli studenti sia appresa a scuola. La comprensione di un ambito è acquisita gradualmente. Modi più formali e astratti di rappresentazione e ragionamento emergono con il tempo come conseguenza di un impegno attivo in attività designate per aiutare lo sviluppo di idee informali. La competenza matematica viene anche acquisita attraverso esperienze che comprendono interazioni in una molteplicità di situazioni o contesti sociali. Per descrivere e presentare in modo produttivo le capacità degli studenti, come anche i loro punti di forza e di debolezza in una prospettiva internazionale, è necessaria una qualche schematizzazione. Un modo per strutturare il discorso in modo comprensibile e maneggevole consiste nel descrivere raggruppamenti di competenze (clusters of competencies), basati sui tipi di richieste cognitive che sono necessarie per risolvere diversi problemi matematici.

### **2.4.1 I raggruppamenti di competenze**

Il progetto PISA ha scelto di dividere le competenze e i processi cognitivi che esse mettono in gioco in tre diversi raggruppamenti: il raggruppamento della riproduzione, quello delle connessioni e quello della riflessione. Nei para-

grafi che seguono si descrivono tali raggruppamenti e il modo in cui ciascuna competenza è messa in gioco all'interno di ciascuno di essi.

Il raggruppamento della riproduzione: le competenze che rientrano in questo raggruppamento consistono nella riproduzione di conoscenze note e comprendono quelle più comunemente usate negli accertamenti standardizzati e nelle verifiche scolastiche. Tali competenze sono la conoscenza di dati di fatto e di rappresentazioni di problemi comuni, l'identificazione di equivalenze, il ricordo di argomenti e proprietà matematiche note, l'esecuzione di procedure di routine, l'applicazione di algoritmi standard e di abilità tecniche, la manipolazione di espressioni con simboli e formule standard e l'esecuzione di calcoli.

I quesiti che accertano le competenze che rientrano in questo raggruppamento potrebbero essere definiti con i seguenti descrittori: riproduzione di materiale già conosciuto ed esecuzione di operazioni di routine.

Il raggruppamento delle connessioni: le competenze del raggruppamento delle connessioni presuppongono le competenze della riproduzione in quanto estendono l'attività di soluzione di problemi a situazioni che non sono di semplice routine, ma che chiamano in causa ambiti comunque familiari o semi-familiari.

I quesiti che rientrano in questa classe di competenze generalmente richiedono che si dimostri di saper integrare e mettere in connessione elementi che fanno parte di varie idee chiave, o dei diversi filoni curriculari della matematica, oppure di saper collegare diverse rappresentazioni di un problema.

I quesiti che accertano le competenze del raggruppamento delle connessioni potrebbero essere definiti dai seguenti descrittori: integrazione, connessione e un qualche ampliamento di materiali già conosciuti.

Il raggruppamento della riflessione: le competenze di questo raggruppamento richiedono un elemento di riflessione da parte degli studenti sui processi richiesti o utilizzati per risolvere un problema. Esse sono legate all'abilità degli studenti di pianificare strategie di soluzione e di applicarle affrontando ambiti problematici più complessi e meno familiari rispetto a quelli del raggruppamento delle connessioni.

I quesiti che accertano le competenze del raggruppamento della riflessione potrebbero essere definiti dai seguenti descrittori: ragionamento avanzato, argomentazione, astrazione, generalizzazione e modellizzazione applicate a nuovi contesti.

## 2.5 Presentazione dei livelli di competenza matematica

Per presentare i risultati delle prove di PISA viene messa a punto una scala di competenza a cinque livelli, [OCSE-PISA, 2006, OCSE-PISA, 2012]. La scala complessiva sarà usata per descrivere le prestazioni in relazione a cinque livelli di abilità e permetterà di classificare i Paesi in base a tali livelli, fornendo così un quadro di riferimento per il confronto internazionale.

Si considererà la possibilità di costruire diverse scale indipendenti per la presentazione dei risultati. Tali scale potrebbero essere basate sui tre raggruppamenti di competenze o sulle quattro idee chiave. La costruzione di tali scale verrà decisa sulla base di diverse considerazioni, tra cui vi sono l'analisi dei parametri psicometrici delle prove che sarà condotta nel corso dell'analisi dei dati di PISA.

Per rendere possibile la costruzione di diverse scale, è necessario che le prove di PISA comprendano un numero sufficiente di quesiti per ciascuna delle possibili categorie di presentazione dei risultati. Inoltre, i quesiti all'interno di ciascuna categoria dovranno coprire una gamma di difficoltà sufficientemente ampia.

I raggruppamenti di competenza descritti precedentemente nel quadro di riferimento riflettono categorie concettuali di complessità crescente, ma non una gerarchia di prestazioni degli studenti basata sulla difficoltà dei quesiti. La complessità concettuale rappresenta solo una delle componenti della difficoltà dei quesiti che influisce sul livello delle prestazioni. Altre componenti sono la familiarità del problema, le opportunità recenti di apprendimento e di esercizio e così via. Quindi un quesito a scelta multipla che mette in gioco competenze del raggruppamento della riproduzione (per esempio la domanda "quale tra i seguenti è un parallelepipedo rettangolo?" seguita dalle figure di una palla, di una lattina, di una scatola e di una piazza) può risultare molto facile per studenti a cui è stato insegnato il significato di tali termini, ma molto difficile per altri a causa della mancanza di familiarità con la terminologia usata.

Anche se è possibile immaginare quesiti relativamente difficili del raggruppamento della riproduzione e quesiti relativamente facili del raggruppamento della riflessione, e per quanto sia possibile quesiti di difficoltà variabile per ciascun raggruppamento, ci si aspetta una relazione grosso modo positiva tra i raggruppamenti di competenze e la difficoltà dei quesiti.

Tra i fattori sottesi ai crescenti livelli di difficoltà del quesito e di competenza matematica vi sono i seguenti:

- Il tipo e il grado di interpretazione e di ragionamento richiesti. Questo

aspetto comprende la natura della richiesta di interpretazione che deriva dal contesto del problema; la misura in cui i procedimenti matematici richiesti per risolvere il problema sono forniti esplicitamente o devono essere ricostruiti dallo studente; e la misura in cui sono richiesti insight, ragionamenti complessi e generalizzazioni.

- Il tipo di capacità di rappresentazione che sono necessarie, spaziando da problemi dove è usato solo un metodo di rappresentazione a problemi nei quali gli studenti devono passare tra diversi metodi oppure trovare essi stessi quelli appropriati.
- Il tipo e il livello di capacità matematiche richieste. Per questo aspetto si spazia da problemi con un unico passaggio (single-step problems) che richiedono la riproduzione di elementi matematici di base e l'esecuzione di semplici processi di calcolo fino a problemi con molti passaggi (multi-step problems) che richiedono conoscenze matematiche più complesse e abilità complesse di decisione, di elaborazione cognitiva, di analisi e soluzione di problemi e di modellizzazione.
- Il tipo e il grado di argomentazione matematica che è richiesta, andando da problemi dove non è richiesto alcun tipo di argomentazione, a problemi in cui gli studenti possono dover applicare argomentazioni matematiche note, fino a problemi dove gli studenti devono creare loro stessi argomentazioni matematiche o comprendere quelle di altre persone o giudicare la correttezza di determinati argomenti o dimostrazioni.

Al livello più basso di competenza descritto, gli studenti portano a termine processi con un unico passaggio che implicano il riconoscimento di contesti familiari e problemi matematicamente ben formulati, utilizzando nozioni e processi matematici molto noti e applicando semplici abilità di calcolo.

A un successivo livello di competenza, gli studenti portano a termine compiti più complessi che richiedono un'elaborazione a più passaggi e si basano sul collegamento di più informazioni o sull'interpretazione di diverse rappresentazioni di concetti o informazioni matematiche, riconoscendo quali elementi sono pertinenti e rilevanti e come si collegano uno all'altro. A questo livello essi lavorano con modelli o formulazioni date, spesso in forma algebrica, per individuare soluzioni, o portano a termine brevi sequenze di processi o passaggi di calcolo per arrivare a una soluzione.

Al livello di competenza più alto, gli studenti assumono un ruolo più creativo e attivo nel loro approccio ai problemi matematici. Interpretano informazioni più complesse e trattano più passaggi di elaborazione. A questo livello gli studenti formulano il problema e spesso sviluppano un modello

adeguato che ne favorisce la soluzione. Essi individuano e applicano strumenti e conoscenze pertinenti spesso in un contesto problematico poco familiare, dimostrano intuizione nell'individuare una strategia di soluzione appropriata e mostrano processi cognitivi di ordine superiore quali la generalizzazione, il ragionamento e l'argomentazione nella spiegazione o comunicazione dei risultati.

## 2.6 Il Quadro di Riferimento delle Prove INVALSI

Le domande di matematica delle prove del Servizio Nazionale di Valutazione sono costruite in relazione a due dimensioni [?]:

- i contenuti matematici coinvolti, organizzati nei quattro ambiti sopra citati;
- i processi coinvolti nella risoluzione.

Questa bi-dimensionalità della valutazione è utilizzata in quasi tutte le indagini per fotografare correttamente gli apprendimenti dello studente, individuandone le componenti strutturali. È importante sottolineare il fatto che, in matematica, non è possibile in generale stabilire una corrispondenza univoca tra il singolo quesito e un unico contenuto o processo il cui possesso venga verificato in esclusiva mediante quello stesso quesito. Infatti, in generale, la risposta a ciascuna domanda coinvolge diversi livelli di conoscenze di vario tipo e richiede contemporaneamente il possesso di diverse abilità.

È questa una conseguenza della natura stessa del pensiero matematico, che non consiste solo in convenzioni o procedure di calcolo, ma in ragionamenti complessi, che coinvolgono rappresentazioni, congetture, argomentazioni, deduzioni. Ogni quesito delle prove del Servizio Nazionale di Valutazione viene quindi riferito a un ambito di contenuti e a un singolo processo, ma va sempre inteso che quelli indicati sono l'ambito e il processo prevalenti.

### 2.6.1 Gli ambiti dei contenuti

Gli ambiti di contenuti vengono indicati con Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni. L'ambito Numeri è riconducibile all'ambito Aritmetica e algebra delle Indicazioni Nazionali e l'ambito Spazio e figure a quello Geometria. L'elenco che segue vuole esplicitare i nodi concettuali attorno ai quali vengono costruite le prove:

### Numeri:

Numeri naturali, interi e razionali: significati, operazioni (calcolo esatto e approssimato) e proprietà, rappresentazioni e ordinamento sulla retta dei numeri, rappresentazioni sul piano cartesiano.  
Rapporti, frazioni, percentuali, proporzioni: significati, operazioni e proprietà. Potenze, radici: significati, operazioni e proprietà.  
Grandezze: significati, misura, stima, cifre significative, ordine di grandezza, arrotondamento.  
Espressioni numeriche: significati, rappresentazioni, operazioni (calcolo esatto e approssimato) e proprietà, problemi.  
Espressioni simboliche: significati, rappresentazioni, operazioni e proprietà, problemi.  
Successioni: ricerca di regolarità, rappresentazioni numeriche e simboliche.

Spazio e figure: Le principali figure del piano e dello spazio: definizioni, relazioni tra i loro elementi (congruenza, perpendicolarità, parallelismo, ...), costruzioni, proprietà.

Segmenti (distanza punto-punto, punto-retta, ...): misure con utilizzo del righello, calcoli e problemi.

Angoli (interni, esterni, opposti al vertice, ...): misure con utilizzo del goniometro, calcoli e problemi.

Traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini: significati, invarianti, proprietà, problemi.

Teoremi di Pitagora e di Euclide: problemi di equivalenza.

Teorema di Talete: problemi di similitudine.

Perimetri, aree e volumi di figure del piano e dello spazio: operazioni, relazioni, somme, scomposizioni, approssimazioni.

Punti, rette, semplici parabole, semplici iperboli nel piano cartesiano: rappresentazioni, relazioni, problemi.

Rappresentazioni bidimensionali di figure nello spazio: collocazione, interpretazione spaziale, descrizione.

### Relazioni e funzioni:

Relazioni tra oggetti matematici (numeri, figure, ...): rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà (es. perpendicolarità, ordine, proporzionalità diretta e inversa, ...).

Successioni di numeri, figure, dati: ricerca di regolarità, rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà e caratteristiche.

Funzioni (lineari, quadratiche, valore assoluto, razionali fratte): signi-

ficati, rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà e caratteristiche.

Zeri di una funzione: semplici equazioni, proprietà.

Segno di una funzione: semplici disequazioni, proprietà.

Relazioni tra funzioni rappresentate sul piano cartesiano: sistemi di equazioni e disequazioni.

#### Dati e previsioni

Insiemi di dati: raccolta, organizzazione, rappresentazione.

Frequenza assoluta, relativa, percentuale: significati, calcoli, rappresentazione (tabelle, grafici, diagrammi, ...).

Campione estratto da una popolazione: determinazione casuale e non casuale.

Valori medi e misure di variabilità: calcoli, rappresentazione.

Eventi e previsioni (evento certo, possibile e impossibile, eventi disgiunti, dipendenti e indipendenti): significati, determinazione di probabilità a priori e a posteriori.

### 2.6.2 I processi

I processi utilizzati per costruire le domande e analizzare i risultati sono i seguenti [?]:

1. conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture...);
2. conoscere e utilizzare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico, algebrico, statistico e probabilistico);
3. conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (verbale, numerica, simbolica, grafica, ...);
4. risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico – (individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie di soluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo,...);
5. riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze (individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto,...);
6. utilizzare forme tipiche del ragionamento matematico (congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, dimostrare ...);

7. utilizzare strumenti, modelli e rappresentazioni nel trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni ...).
8. riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...).

## **2.7 Le criticità nei Quadri di Riferimento delle prove standardizzate esterne rispetto alle problematiche linguistiche**

Il nostro progetto iniziale si basava sulla convinzione che dall'analisi delle prove PISA e INVALSI rispetto al tipo di quesito, ai quadri di riferimento teorici [INVALSI, 2012, OCSE-PISA, 2006, OCSE-PISA, 2012] e alle rilevazioni dei dati sulle prove svolte, fosse possibile individuare delle caratteristiche dei quesiti che permettessero di identificare eventuali difficoltà nella comprensione del testo da parte degli studenti.

L'analisi dei quadri teorici di riferimento del PISA e dell'INVALSI, però, ha evidenziato delle criticità inattese. Tali criticità riguardano innanzitutto la descrizione dei processi matematici attivati: infatti, sia nel quadro del PISA sia nel quadro di riferimento delle prove INVALSI, la descrizione dei processi che sono utilizzati nella costruzione e nell'analisi dei quesiti non permette sostanzialmente nessuna classificazione significativa delle possibili difficoltà che il Lettore può incontrare nell'affrontare i quesiti. Tali processi risultano troppo generici per poter dare informazioni efficaci all'insegnante sul tipo di difficoltà che lo studente può incontrare e su come reindirizzare l'attività didattica.

Le criticità nei quadri di riferimento esaminati riguardano in maniera sostanziale anche la scarsa attenzione agli aspetti linguistici delle prove stesse. Se si analizzano i processi descritti nei rispettivi quadri di riferimento si può rilevare come nessun processo si riferisca in modo diretto alla comprensione del testo,

mentre sostanzialmente nessun processo può essere attivato se non si realizza la comprensione del testo.

La problematica linguistica costituisce una difficoltà in matematica non solo nella risoluzione dei quesiti delle prove esterne ma più in generale nel suo insegnamento. La componente linguistica può sembrare minore o andare da sé in un insegnamento scientifico ed invece il linguaggio diventa un ostacolo supplementare all'acquisizione di conoscenze matematiche [ Laborde, 1995]. A questo proposito ci troviamo di fronte ad una situazione paradossale: si deve evitare che il linguaggio utilizzato sia fonte di ostacoli alla comprensione ma allo stesso tempo, uno dei suoi obiettivi, è quello di far acquisire ed utilizzare un linguaggio appropriato in matematica. Inoltre, il periodo di insegnamento agli allievi in età adolescenziale costituisce un periodo critico per l'apprendimento degli usi specifici del linguaggio matematico per almeno due ragioni [ Laborde, 1995]:

- i processi di acquisizione del linguaggio si prolungano in questo periodo di tempo nel quale gli allievi non hanno ancora acquisito una completa padronanza della loro lingua materna;
- è a partire dall'inizio dell'insegnamento secondario che la matematica insegnata fa appello a degli usi specifici del linguaggio, dal momento che la matematica vicina all'azione della scuola primaria non necessita che di poca formalizzazione.

Risulta quindi importante che nella formazione degli insegnanti si diano strumenti di analisi linguistica dei testi, dall'altra si sviluppino nell'insegnamento della matematica attività specifiche di apprendimento degli usi linguistici in matematica.

## **2.8 Un percorso formativo dalle conoscenze alle competenze, ma come?**

L'obiettivo della nostra ricerca è formare gli insegnanti rispetto alle problematiche linguistiche e di comprensione del testo. Il nostro specifico focus riguarda la comprensione dei testi dei quesiti delle prove standardizzate esterne. La rilevazione degli aspetti critici nei quadri di riferimento attuali, descritti nel paragrafo precedente, ha fatto nascere la necessità di definire un nuovo quadro di riferimento teorico, all'interno del quale poter interpretare le difficoltà degli allievi attraverso l'analisi delle caratteristiche del testo stesso. Il Quadro di riferimento teorico che è stato sviluppato fa riferimento a diversi

ambiti di ricerca: la linguistica, per quanto riguarda il significato di “comprensione” di un testo e le relative proprietà sintattiche; la teoria semiotica delle rappresentazioni, per lo studio dell’interpretazione dei sistemi di segni che intervengono nel testo; infine, più specifici dell’ambito matematico, si farà riferimento alla ricerca internazionale sul Problem-Solving e alla Teoria della Conoscenza Matematica.

Questo quadro di riferimento permette di individuare delle caratteristiche del testo che possono rimandare a possibili difficoltà di comprensione cioè, attraverso il quadro di riferimento introdotto, è stato possibile identificare dei criteri di classificazione dei testi in base ai quali individuare la presenza di ostacoli interpretativi che possono comprometterne la comprensione.

Questo quadro di riferimento teorico costituisce lo strumento di analisi dei testi per la identificazione di eventuali difficoltà di comprensione e quindi il contenuto teorico del percorso di formazione per insegnanti che è stato sviluppato in questo lavoro di ricerca.

Un percorso formativo da sviluppare su questi contenuti necessita di tempi lunghi e prevede la lettura e il confronto di molti testi. Considerando il tipo di destinatari del Corso, un lavoro di questo tipo ha necessità di essere molto individualizzato ed è per questo motivo che abbiamo deciso di realizzarlo in modalità E-Learning, prevedendo solo due incontri in presenza, uno iniziale e uno finale. Inoltre, sviluppare il corso su piattaforma permette di non perdere gli aspetti di confronto e di collaborazione tra i partecipanti, per i quali la riflessione sulla problematica linguistica non avviene solo attraverso i contenuti del corso ma anche attraverso la reciproca interazione attraverso il linguaggio scritto.

A questo punto è possibile definire la domanda di ricerca, che è articolata in due parti:

Prima parte: *Come trasformare il contenuto teorico sulle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo in un percorso di formazione per insegnanti che passi dalle conoscenze alle competenze?*

Seconda parte: *Come interpretare le difficoltà linguistiche e di comprensione del testo nelle prove standardizzate esterne e sviluppare quindi attività mirate di intervento?*

Nel Capitolo 3 sarà trattata la problematica della formazione con le nuove tecnologie e in particolare sarà descritto il contributo dell’E-Learning in questa direzione; nel Capitolo successivo sarà invece presentato il Quadro Teorico di Riferimento relativo all’E-Learning e la piattaforma Moodle, individuata come piattaforma E-Learning per la realizzazione del Corso.

Nel Capitolo 5 sarà introdotto un nuovo Quadro di Riferimento Teorico

sulle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo nei quesiti INVALSI e OCSE-PISA di matematica, al quale fa riferimento la descrizione delle caratteristiche di un testo che permettono di individuare le eventuali difficoltà di comprensione, come presentato nei Capitoli 6 e 7.

Nel Capitolo 8 viene descritto il prototipo di Corso di Formazione sviluppato in questo lavoro di tesi. Nel Capitolo 9 sono riportati i primi risultati della sperimentazione effettuata.

# Capitolo 3

Tra comunicazione ed educazione vi è sempre stata una stretta interdipendenza dal momento che l'atto educativo è un atto relazionale e comunicativo, che si svolge tra soggetti che operano nello spazio e nel tempo e qualsiasi mutamento nella struttura spazio-temporale della comunicazione comporta un mutamento nelle modalità di esercizio educativo.

La storia stessa è garante del fatto che le innovazioni tecniche nella sfera della comunicazione hanno spesso avuto una ricaduta su quella dell'educazione, sia sulle modalità didattiche, sia sul versante delle implicazioni cognitive; si pensi, per esempio, a come la stampa abbia condizionato le forme dell'istruzione e le concrete pratiche di studio.

## 3.1 La formazione e le nuove tecnologie

La condivisione spazio-temporale tra educatore e allievo ha rappresentato un riferimento costante nell'educazione e fa ancora parte del sentire comune ritenere che questa, nel senso vero del termine, si debba svolgere attraverso una compresenza fisica anche se, dall'affermarsi della scrittura, la storia della comunicazione ha mostrato come siano possibili dialoghi educativi a distanza (si pensi agli epistolari scritti a scopo di educazione-istruzione come le lettere di Platone a Dionigi di Siracusa o quelle di s. Paolo rivolte alle comunità cristiane).

La consapevolezza vera e propria dell'esistenza di un'educazione a distanza come ambito a sé stante dell'educazione emerge solo dagli anni Ottanta, quando decade anche l'espressione sino ad allora prevalente di educazione per corrispondenza. È però negli anni Novanta che l'educazione a distanza registra un incremento esponenziale, trovando uno straordinario alleato in Internet, sia dal punto di vista delle applicazioni concrete nelle organizzazioni, sia coniugandosi alle speculazioni teoriche sulla natura della conoscenza e della formazione. La diffusione delle reti telematiche sollecita un ripensamento

sui modelli stessi dell'autoformazione e della formazione a distanza, tendendo progressivamente a ricollocarli all'interno di una concezione negoziale, cooperativa e pluricentrica dell'apprendimento che né il libro, né le altre forme tradizionali d'istruzione a distanza possono consentire [Calvani, 2009].

La crescente penetrazione dell'educazione a distanza procede in parallelo, oltre che con la diffusione di Internet stesso, con l'affermarsi di un quadro concettuale e normativo. Il tema della conoscenza, intesa come uno dei valori più rilevanti della società in cui viviamo, già introdotto dagli apporti teorici di autori come Peter Drucker, Peter Senge, Ikujiro Nonaka, ripreso con i libri bianchi nel corso degli anni Novanta, e la riflessione su come produrla, conservarla, trasferirla, acquisirla, sono al centro delle politiche dell'Unione Europea che, a partire dal Consiglio di Lisbona del 2000, si propone l'ambizioso obiettivo di rendere l'Europa del 2010 la più competitiva e dinamica economia basata sulla conoscenza.

Una "società della conoscenza" si deve confrontare con bisogni conoscitivi articolati e crescenti. Il problema investe in particolare i sistemi per l'alta formazione (universitaria e postuniversitaria) sottoposti negli ultimi trent'anni a una profonda trasformazione che ha visto un'utenza limitata, con studenti della stessa età, dello stesso retroterra culturale, frequentante a tempo pieno, essere gradualmente sostituita da un'utenza di massa, formata da studenti di tutte le età, di diversa provenienza culturale e sociale, condizione lavorativa o residenziale o appartenenti a categorie con bisogni speciali. Nell'ottica di dare risposta a queste esigenze, alcuni concetti o ambiti assurgono a nuova risonanza o si impongono per la prima volta, espressi, per esempio, da termini come capitale sociale e knowledge management e altri più specifici relativi alla formazione, che pongono al centro il soggetto e un'offerta formativa più articolata e più estesa (open, flexible learning, lifelong learning, e-learning) [Calvani, 2009].

In particolare il concetto di *lifelong learning*, l'idea cioè di una formazione al di là dei limiti spazio-temporali tradizionalmente imposti dai sistemi educativi estesa durante tutto l'arco della vita, che si è venuto gradualmente affermando a opera di organismi quali UNESCO (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization), OECD (Organization for Economic Cooperation and Development) e Consiglio d'Europa, si impone come una sorta di paradigma. L'educazione 'una volta sola', su cui ha poggiato il sistema scuola, appare sempre più inadeguata dinanzi alle recenti istanze sociali: il rapporto tra vita e apprendimento si è rovesciato in quanto non si tratta più di un apprendimento per la vita, ma di una vita per apprendere; la richiesta che viene avanzata è quella di sistemi dislocabili nel corso dell'intera esistenza, accessibili da ogni luogo. Garantire a tutti un apprendimento secondo le proprie necessità, rispettando bisogni di ciascuno in ogni condizione,

tempo e luogo: questa è la sfida con cui la società contemporanea dichiara di volersi confrontare.

## 3.2 L'evoluzione delle tecnologie per l'educazione

L'istruzione a distanza ha origini antiche. Come già anticipato, si possono individuare le prime forme di istruzione a distanza nei casi di epistolari scritti a scopo di educazione-istruzione, un esempio ne è la lettera di Platone a Dionigi di Siracusa o quella di San Paolo rivolte alla comunità cristiana anche se i sistemi di istruzione a distanza veri e propri nascono solo con la diffusione dei moderni sistemi postali. In definitiva la storia dell'istruzione a distanza vera e propria riguarda gli ultimi due secoli e attraverso un itinerario che può essere schematizzato in tre "generazioni" <sup>1</sup>:

- Prima generazione: le prime applicazioni di una certa significatività prendono piede nell'ottocento con lo sviluppo del sistema ferroviario che ha reso possibile la distribuzione estensiva di materiale di insegnamento nei riguardi di popolazioni disseminate sul territorio: in questo caso ci si basa ovviamente sulla sola corrispondenza scritta.
- Seconda generazione: è durante gli anni 60'-70' che l'istruzione a distanza acquisisce una maggiore consapevolezza. Tale generazione è distinta dall'impiego di soluzioni "multimediali" caratterizzate cioè da un uso integrato di materiale a stampa, registrazioni sonore, trasmissioni televisive e computer. La comunicazione è basata su un rapporto di uno-molti (in particolare attraverso l'emittenza televisiva). In particolare, negli anni '70, quando i computer erano già sufficientemente diffusi, si iniziò a parlare di CBT (Computer Based Training) e di CAI (Computer Aided Instruction), ovvero di formazione distribuita tramite il pc, con prodotti informatici pensati appositamente per l'auto-apprendimento. Si trattava generalmente di semplici dischetti con informazioni strutturate (sequenze di schermate), utilizzate soprattutto in ambito aziendale. Negli anni 80' e per buona parte degli anni 90' i CBT continuarono a essere progettati e prodotti o per usi specifici o sempre più spesso per usi più ampi e generalizzati (si pensi ad esempio ai corsi multimediali di lingue diffusi con la stampa).

---

<sup>1</sup>Si fa riferimento ai materiali del Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica del 2013

- Terza generazione: è caratterizzata dall'impiego delle reti telematiche. Con l'avvento delle reti e di internet, la sigla CBT ha lasciato spazio alla nuova WBT acronimo per Web Based Training. Apparentemente si potrebbe pensare a una semplice trasposizione delle tecniche di istruzione programmata o strutturata basata su prodotti multimediali in ambiente internet. In realtà non si è trattato solo di un salto su un nuovo canale di distribuzione, ma di una svolta sia metodologica che progettuale. Tra le ragioni della diffusione della formazione web-based vi sono certamente i vantaggi organizzativi e logistici, e conseguentemente economici, che un ambiente di apprendimento on-line garantisce.

Ma l'elemento più importante, che per molti ha indotto ad una corsa all'uso sempre più intenso del supporto telematico per i prodotti e per i progetti educativi, riguarda l'idea, oramai largamente acquisita, che per rispondere ai bisogni formativi reali, occorra una dose molto alta di flessibilità e di molteplicità dell'offerta. Il Web in tal senso, garantirebbe un "escursione" particolarmente ampia: dalla possibilità di erogare prodotti educativi legati ad una impostazione strutturata all'avvio di programmi informali e attività di educazione aperta. Secondo questa ottica, il Web Based Training si potrebbe caratterizzare come una strategia orientata a dare agli "studenti" la possibilità di plasmare lo spazio dell'apprendimento secondo i propri bisogni, o meglio ancora, di aumentare la possibilità di interagire in modo flessibile con i materiali formativi.

Col tempo poi sorgono le prime piattaforme di E-Learning (LMC o CMS) con le quali si aggiunge a una tipologia comunicativa del tipo uno a molti, che ha caratterizzato i modelli di prima e seconda generazione, una tipologia comunicativa del tipo molti a molti, in cui non solo il discente può interagire più rapidamente con il docente, ma può anche stabilire interazioni e rapporti cooperativi con tutti gli altri allievi partecipanti [Trentin, 2006].

La capacità di creare un ambiente emotivamente valido, ricco di rapporti interpersonali e di supporti variegati diventa una componente di grande rilevanza, sottolineata in vari modi da diversi autori (Harasim, 1990, 1995; Palloff e Prat, 1999; White e Weight, 1999; Draves, 2000). È qui che fallisce l'istruzione a distanza di seconda generazione, in cui predomina il senso di un apprendimento come successione di operazioni condotte per lo più in isolamento. In questo contesto si rivaluta il ruolo del dialogo come funzione essenziale per l'apprendimento, in quanto capace di educare all'argomentazione, a valutare criticamente la conoscenza sollevata da altri, a riflettere criticamente e collaborativamente sulla conoscenza acquisita, procedere razionalmente e metodologicamente

nella presentazione orale delle proprie idee.

### 3.3 L'E-Learning e la formazione

L'E-Learning, definito come *“l'uso di nuove tecnologie multimedia e di Internet per migliorare la qualità dell'apprendimento mediante l'accesso a risorse e servizi e a collaborazioni e interscambi a grande distanza”*<sup>2</sup>, rappresenta il complesso di tecnologie e metodologie principale a cui la politica educativa europea, attraverso considerevoli investimenti articolati in differenti iniziative (eEurope, Education and training 2010, e-learning initiative) affida le sue aspettative di successo.

Da questo momento il termine E-Learning registra un consenso crescente in tutte le organizzazioni che si occupano di formazione estendendosi, nel giro di qualche anno, da una ristretta cerchia di addetti ai lavori a un pubblico più vasto. I tempi così rapidi di diffusione e l'urgenza delle applicazioni non sembrano però consentire un'adeguata comprensione del concetto e molte sono le accezioni riduttive e le ambiguità che permangono; così accade che il termine, nella sua difficile determinatezza, diventi una sorta di cartina di tornasole o di test proiettivo della concezione che i diversi soggetti già posseggono della natura dell'educazione stessa.

Sul piano teorico la ricerca più avveduta mette in evidenza come l'E-Learning non si identifichi con una tecnologia o metodologia unica, bensì possa comportare una varietà di soluzioni flessibili, in evoluzione, suscettibili di molteplici caratterizzazioni. In virtù del fatto che la comunicazione si svolge in un contesto digitale e di rete, rispetto alla didattica in presenza si consentono delle possibilità nuove: i materiali di natura digitale possono, per esempio, essere attinti, ripresi, modificati e integrati nell'enorme biblioteca rappresentata da Internet; ciò permette di riusare con facilità il lavoro già fatto, anche da altri, e rimodulare percorsi didattici in forme individualizzabili.

La possibilità di accedere all'ambiente di lavoro nei momenti più opportuni e la velocità dell'interazione alunno-tutor consentono possibili personalizzazioni dei ritmi di apprendimento e un'alta qualità nei feedback rilasciati all'allievo; la natura stessa della comunicazione mediata da computer rende possibile stabilire rapporti di condivisione o di collaborazione, a vario grado e livello, con una pluralità di soggetti che possono interagire in una classe virtuale o in gruppi di lavoro on-line, in forme più articolate di quanto sia possibile nei rapporti in presenza [Calvani, 2009].

Nonostante ciò, come del resto accade spesso per ogni innovazione tecnologica, anche in questo caso nella sua prima fase la recente tecnologia riproduce

---

<sup>2</sup><http://www.elearn-ingeuropa.info/mail/index.php>; 18 marzo 2009

prevalentemente i modelli preesistenti, mostrando una scarsa attenzione alle specificità offerte dalla particolare condizione comunicativa; come era successo in precedenza per la televisione, anche l'E-Learning nei primi anni viene per lo più identificato con un sistema efficiente di trasmissione di contenuti o di lezioni in tempo reale: le lezioni in videoconferenza o la distribuzione di materiali all'interno di specifiche infrastrutture tecnologiche di comunicazione nella rete (più comunemente note come piattaforme) rappresentano la soluzione più frequente: prevale dunque un'accezione erogativa del concetto di E-Learning.

Solo dopo qualche anno acquistano risalto orientamenti più sensibili alle specificità del mezzo, volti a offrire soluzioni che mettono al centro uno studente on-line attivo, impegnato in attività di interazione dialogica con i tutors e con gli stessi compagni; si assiste allora a una crescente enfasi verso i modelli dell'apprendimento collaborativo, in linea con i suggerimenti del costruttivismo, un orientamento teorico che vede nella conoscenza un processo di costruzione attiva, situata e socialmente negoziata e che tende a diventare il paradigma di riferimento più frequentemente adottato per l'E-Learning.

Negli ultimi anni si affacciano sul web nuove cornici teoriche. Mentre la modalità canonica dell'E-Learning strutturato tramite corsi, moduli, piattaforme, tracciamenti, valutazioni, comincia a penetrare nelle istituzioni, (*E-Learning forma*), ne affiora una seconda caratterizzata maggiormente da partecipazione interattiva, da forme di condivisione e collaborazione anche estemporanee, che si può in senso lato raccogliere nell'espressione *E-learning informal* o Networked Learning [Calvani, 2009].

Non a caso, dal web il suffisso 2.0 comincia a essere utilizzato anche per l'E-Learning. L'introduzione del termine E-Learning 2.0 costituisce una critica alla visione tradizionale dell'E-Learning fondata sulla concezione trasmissiva e gerarchica della conoscenza e sostenendo che l'apprendimento è prima di tutto conversazione, racconto, condivisione; esso si realizza nello spazio globale del web senza le limitazioni introdotte dalle piattaforme, riproposizioni digitali degli ambienti di apprendimento chiusi secondo il modello della scuola che crea uno spazio artificiale separato dalla vita: la vera piattaforma è il web stesso.

Complessivamente, in rapporto anche al diffondersi dei più recenti modelli teorici e in relazione ai cambiamenti più generali cui abbiamo accennato (avvento del web 2.0), nei primi anni del millennio le forme dell'apprendimento in rete (E-Learning) vedono un graduale spostamento da modelli tradizionalmente istruttivi, che mettono al centro uno studente sostanzialmente recettore di informazioni e contenuti precedentemente strutturati, verso modelli che pongono al centro un soggetto più attivo che partecipa alla

costruzione del suo percorso didattico, con un'accentuazione verso l'apprendimento collaborativo in modalità più o meno informali [Calvani, 2009].

### 3.4 L'E-Learning e l'Educazione Matematica

Come evidenziato nei paragrafi precedenti, l'E-Learning sta assumendo un ruolo decisivo nell'educazione per le enormi opportunità che offre. La sua flessibilità consente di superare i limiti spaziali e temporali dell'insegnamento tradizionale, personalizzandolo e rendendolo più vicino alle esigenze cognitive e affettive degli allievi.

Per quanto riguarda l'Educazione Matematica, queste esigenze indicano una direzione di ricerca nuova, finalizzata a raccordare le potenzialità dell'E-Learning con le caratteristiche disciplinari di quello che si vuole insegnare, in modo da utilizzare le tecnologie per intervenire su difficoltà di apprendimento non generiche, ma dipendenti da aspetti peculiari della matematica. Finora la ricerca sull'E-Learning non si è occupata abbastanza di collegare l'uso delle piattaforme con le caratteristiche dell'insegnamento-apprendimento della matematica e, simmetricamente, la ricerca in educazione matematica ha poco tenuto conto delle potenzialità dell'E-Learning [G. Albano, P.L. Ferrari, 2008]. È quindi necessario mettere insieme i risultati della ricerca in educazione matematica con le potenzialità offerte dall'E-Learning, avendo ben presenti le caratteristiche della matematica, che è un sistema di conoscenze fortemente strutturato e sedimentato, che ha un rapporto con la realtà non banale e che fa uso di un linguaggio fortemente specializzato, con proprietà computazionali rilevanti, il quale gode di caratteristiche in parte diverse da quelle dei linguaggi usati quotidianamente.

In passato si è ritenuto che la tecnologia vincolasse le scelte pedagogiche e la stessa interpretazione della matematica, ad esempio, privilegiando gli aspetti computazionali o quelli sintattici rispetto ai significati e al contesto, o modelli trasmissivi rispetto a quelli costruttivi, o il lavoro individuale rispetto a quello collaborativo.

Questo potrebbe spiegare perché nelle ricerche in educazione matematica ancora oggi la tecnologia è spesso presente ma con ruoli ridotti, a volte marginali, quasi sempre subordinati alle esigenze dei quadri teorici, di conseguenza con sfruttamento insufficiente o distorto delle opportunità offerte. Inoltre, in relazione a quanto sopra, ma anche alle esigenze di produttività tipiche delle comunità scientifiche, vi è un predominio di ricerche puntuali, che mettono in gioco pochi soggetti per poco tempo, che usano in minima parte le possibilità offerte dalla tecnologia e su un solo argomento.

È, al contrario, necessario uno sfruttamento più ampio e completo delle

potenzialità offerte, tenendo conto che, a differenza del passato anche recente, oggi la tecnologia offre un'ampia gamma di opportunità e di scelte, che consentono di realizzare piani pedagogici di natura diversa.

In particolare, si riconoscono in educazione matematica diversi aspetti che possono essere aiutati dalla tecnologia:

1. la rappresentazione di grafici matematicamente accurati e pedagogicamente validi. I grafici possono essere usati per differenti propositi: esplorazione, investigazione di cosa succede se alcuni elementi variano, provare, illustrare idee, spiegazioni, soluzioni.
2. il controllo del lavoro degli errori della classe. Questo da una parte fornisce indicazioni (principalmente per insegnante) per reindirizzare il lavoro seguente, dall'altra permette, soprattutto per gli studenti, di vedere i propri miglioramenti incrementando il proprio senso di self-efficacy (propria efficacia o competenza) [Zan, 2007].
3. la coordinazione delle letture e dei libri di testo. La tecnologia da l'opportunità di designare incarichi e attività addizionali per gli studenti.
4. un accesso semplice al docente. La tecnologia da l'opportunità di adottare un orario flessibile per incontrare gli studenti. Inoltre gli scambi di messaggi tra insegnante e alunno contribuiscono a tracciare lo storico di ogni studente e i suoi progressi.
5. la natura ripetitiva di alcune richieste. Molto spesso alcuni non capiscono problemi che ciclicamente vengono posti e le FAQ permettono agli insegnanti di rendere accessibili a tutti gli studenti le discussioni topiche potenzialmente vantaggiose.

Inoltre possiamo individuare ulteriori opportunità e miglioramenti per quanto riguarda l'E-Learning [G. Albano, P.L. Ferrari, 2008]:

- a) Personalizzazione: come già introdotto precedentemente, è largamente condivisa l'opinione che i metodi sono più o meno efficaci per particolari individui a seconda delle loro specifiche competenze e attitudini. In questo senso le piattaforme di E-Learning permettono ai docenti di creare situazioni di apprendimento appropriati per ciascuno studente così come la disponibilità di vari materiali didattici (testi scritti, file multimediali, esercizi interattivi etc.) e di un'ampia gamma di stimoli attraverso vari canali sensoriali (uditivo, visivo, manipolativo, etc.) per ogni unità didattica. Il tracciamento del lavoro e degli errori di ciascuno, offerto dalle piattaforme di E-Learning, può essere usato

per modificare dinamicamente il percorso di apprendimento del singolo studente.

- b) Apprendimento cooperativo e costruttivo: una piattaforma di E-Learning permette agli studenti di costruire nuova conoscenza interagendo con l'ambiente attraverso un certo numero di attività che coinvolgono interazioni tra pari o con i tutor.
- c) Linguaggio e rappresentazioni: il potenziale delle ICT, *Information and Communication Technologies*, riguardo problemi semiotici o linguistici è largamente sottostimato. Infatti, in accordo a Sfard [Sfard, 2001] e Ferrari [Ferrari, 2004], una piattaforma di E-Learning fornisce molteplici opportunità per disegnare attività destinate a migliorare le competenze linguistiche, compresa la competenza nel linguaggio verbale, attraverso la disponibilità di un'ampia gamma di situazioni di comunicazione e l'opportunità di disegnare compiti che forzino lo studente a usare risorse linguistiche perfezionate e a raggiungere il coordinamento dei sistemi semiotici.

# Capitolo 4

L'obiettivo della nostra ricerca è la realizzazione di un percorso di formazione per insegnanti sulle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo nei quesiti INVALSI e OCSE-PISA, che permetta agli insegnanti di passare dalle conoscenze teoriche alle competenze. Questo percorso è stato sviluppato in modalità E-Learning su piattaforma Moodle e in questo capitolo sarà presentato il quadro teorico di riferimento per quanto riguarda l'E-Learning e le sue potenzialità in ambito formativo ,e successivamente, sarà descritta la piattaforma Moodle.

## 4.1 E-learning: quadro di riferimento teorico

Quando si parla di metodi di apprendimento si fa riferimento alle modalità attraverso cui l'educatore fornisce le "consegne", come esercizi, compiti, problemi, contenuti teorici e gli allievi accedono a tali materiali.

L'apprendimento tradizionale è caratterizzato da sessioni in presenza, durante le quali il docente consegna il materiale del corso a tutti gli studenti in uno stesso ambiente ed allo stesso tempo. Tale metodo di apprendimento è spesso "centrato sul docente".

L'E-Learning si differenzia dal metodo tradizionale soprattutto per quanto riguarda i mezzi, l'ambiente ed il tempo di insegnamento-apprendimento. Una definizione abbastanza ampia e generale, che cerca di abbracciare vari aspetti, è quella di [Trentin, 2006], che utilizza il termine E-Learning per indicare "le modalità d'uso delle tecnologie informatiche e della comunicazione a supporto dei processi di insegnamento-apprendimento basati sull'erogazione elettronica di contenuti e l'uso di basi condivise di conoscenza, sull'apprendimento attivo e/o collaborativo".

Un'altra definizione, invece, dell'E-Learning che ne mette in luce la matrice

costruttivista sociale <sup>1</sup> è la seguente: *attiva costruzione di saperi teorico-pratici, competenze, valori, che utilizza le potenzialità della rete nella negoziazione e condivisione di significati e nella promozione di relazioni [Coppola, 2009].*

Di fatto, l'E-Learning ha determinato una trasformazione profonda delle pratiche didattiche, stimolando una riflessione più generale sul processo di insegnamento-apprendimento e sul modo di innovarlo e migliorarlo qualitativamente. In particolare, al carattere personale e soggettivo dell'apprendimento, si accompagna il carattere sociale, in quanto la tradizionale comunicazione didattica da uno a molti si trasforma in inter-azione da molti a molti, e l'apprendimento diventa, quindi, frutto di scambi e relazioni all'interno della cornice della rete [Coppola, 2009].

L'E-Learning è caratterizzato dalle seguenti variabili:

**multimedialità** che valorizza l'integrazione tra diversi media, favorendo una migliore comprensione dei contenuti;

**interattività con i materiali** che favorisce percorsi di studio personalizzati e valorizza l'impegno attivo dello studente;

**interattività umana** che favorisce la creazione di contesti collettivi di apprendimento (classi virtuali);

**adattività** ovvero la possibilità di personalizzare la sequenza dei percorsi didattici sulla base delle performance e delle interazioni dell'utente con i contenuti on line;

**interoperabilità** ovvero la possibilità di riutilizzo e integrazione delle risorse con cui si è venuti a contatto attraverso l'uso delle tecnologie [Liscia, 2005].

---

<sup>1</sup>Il costruttivismo è una filosofia dell'educazione per la quale la realtà è governata da un principio intellegibile cioè la ragione è la principale forma di conoscenza. L'apprendimento diventa il risultato di un impegno attivo dello studente che costruisce la propria conoscenza in costante interazione con l'ambiente esterno [Laeng, 1982]. Secondo i contributi dei suoi principali esponenti (George Kelly, Ernst von Glasersfeld, Heintz von Foester, Humberto Maturana, Francisco Valera, Jean Piaget) gli assunti fondamentali del costruttivismo sono: il sapere come costruzione personale; l'apprendimento attivo; l'apprendimento collaborativo; l'importanza del contesto; la valutazione intrinseca.

Possiamo distinguere un *costruttivismo individuale* e un *costruttivismo sociale*. Il primo sostiene che l'apprendimento deriva da un'interpretazione personale della conoscenza, in un processo attivo in cui il significato è sviluppato sulla base dell'esperienza, mentre nel secondo il significato è negoziato con gli altri sotto diversi punti di vista. Ogni disciplina ha una sua *verità* che viene accettata al momento perché è il risultato attuale della negoziazione tra gli esperti. Acquisendo nuove conoscenze, le verità delle discipline cambiano [Giacomoantonio, 2008].

Rispetto alle tipologie di E-Learning esistenti Mason, in [Mason, 2002], ne distingue quattro:

- *content and support*: si tratta della tipologia più diffusa ed economica e si basa sull'erogazione dei contenuti (materiali stampati o pagine web) e sul supporto minimale di un tutor; si caratterizza per la netta distinzione tra contenuto e supporto;
- *wrap around*: consiste nella combinazione di risorse Internet, attività e discussioni online con libri, cd-rom e tutorial; si lascia maggiore spazio e libertà allo studente, il contenuto è meno strutturato e assume diverse connotazioni a seconda delle attività; il tutor assolve il ruolo di facilitatore interagendo singolarmente o con piccoli gruppi;
- *integrated model*: si basa essenzialmente su attività collaborative in piccoli gruppi; i contenuti del corso sono fluidi e dinamici e in un certo senso viene meno la distinzione tra contenuto e supporto, in questo caso il tutor/docente diventa un moderatore animatore di comunità di apprendimento;
- *informal E-Learning*: rinvia a forme di apprendimento che si collocano al di fuori di un corso istituzionale organizzato e che si basano sull'interazione tra colleghi e lo scambio tra esperienze. In tale ambito si possono includere anche forme di esplorazione libera per uso personale: il soggetto ricerca sul web risorse, accedendo ai siti, data base, documenti ecc.

Un'altra significativa classificazione ci viene da Bellier, [Bellier, 2001], che basandosi non tanto sugli aspetti metodologici quanto sulle pratiche correnti, distingue tra le seguenti cinque principali modalità di E-Learning:

- *Completamente a distanza senza l'intervento di un tutor*: il discente è completamente autonomo, si iscrive, paga, accede ai contenuti e viene valutato completamente a distanza. I contenuti sono per la maggior parte procedurali (contabilità, informatica, internet ecc).
- *Completamente a distanza, ma con il supporto di un tutor*: si tratta di una categoria molto ampia, le modalità con le quali può essere attuato il tutorato sono le più disparate, dando luogo a dispositivi tecnici e pedagogici di natura differente. Il tratto comune sta nel fatto che l'apprendimento avviene completamente a distanza e che i discenti vengono seguiti individualmente da un tutor. Il tutor può avvalersi di

strumenti di comunicazione sincrona (video-audio conferenze, chat ecc) o asincrona (e-mail, forum).

- *Misto distanza/presenza (blended) con autoformazione a distanza*: in questo caso la formazione vera e propria avviene a distanza con incontri in presenza che vengono organizzati in base a un ritmo che può variare secondo diversi schemi. Alcuni corsi prevedono gli incontri in presenza all'inizio per facilitare la conoscenza tra i partecipanti, altri invece utilizzano gli incontri in presenza a metà corso per verificare direttamente che gli apprendimenti abbiano avuto luogo mettendo i discenti in situazione; altri corsi prevedono gli incontri alla fine dell'attività formativa per verificare se ciascuno è riuscito a rendere operative le conoscenze acquisite. Questa modalità mantiene tutti i vantaggi dell'E-Learning (quali l'autonomia organizzativa, riduzione degli spostamenti, aumento della possibilità di personalizzazione), inoltre gli incontri in presenza riducono il rischio del "senso di isolamento" e di abbandono che di solito si iscrive alla formazione a distanza.
- *Misto distanza/presenza (blended) con attività complementari a distanza*: l'attività avviene prevalentemente in presenza, mentre le attività a distanza sono concepite come complementari. Si tratta in questo caso di arricchire e completare un insegnamento che si svolge essenzialmente in forma immediata. Il corsista può utilizzare le risorse per il lavoro a distanza come userebbe il manuale tradizionale. Possono essere previste anche interazioni in una classe virtuale.
- *Lavoro collaborativo a distanza*: può essere presente anche nelle modalità precedentemente descritte, ma in questo caso il lavoro collaborativo rappresenta un elemento all'interno di un dispositivo basato sulla trasmissione dei contenuti d'apprendere e lo stesso apprendimento si genera come conseguenza della partecipazione e dello scambio. Il tutor svolge la funzione di organizzatore e animatore di scambi e il suo ruolo consiste essenzialmente nel monitorare che il lavoro sia fonte di apprendimento per tutti.

#### **4.1.1 Come cambiano i ruoli e la comunicazione**

E' evidente che le tecnologie dell'informazione e della comunicazione hanno prodotto cambiamenti che influenzano fortemente l'ambiente educativo dal momento che implicano nuove opportunità metodologiche e allo stesso tempo hanno causato la comparsa di nuove necessità educative. Ad esempio, dal punto di vista metodologico, le tecnologie dell'educazione offrono nuove

modalità per comunicare, collaborare e prendere parte nei processi di apprendimento.

L'uso delle tecnologie dell'educazione ed, in particolare, di approcci E-Learning facilitano il passaggio da un paradigma didattico centrato sulla figura di un insegnante esperto verso un paradigma emergente in cui gli studenti hanno un ruolo di attori centrali ed attivi nei loro processi di apprendimento.

In questo approccio il ruolo dell'insegnante cambia: da un ruolo legato alla trasmissione delle conoscenze si sposta verso il ruolo di "facilitatore", cioè di uno specialista che progetta il corso, guida e supervisiona i processi di apprendimento degli studenti [Juan et al., 2008]. D'altra parte, lo studente tende a diventare più autonomo nella ricerca delle risorse informative e conoscitive legate allo specifico dominio dei contenuti (Trentin, 2005). Gli studenti si appropriano del loro apprendimento e dello sviluppo personale [Kahiigi et al., 2008] ed apprendono con l'aiuto degli insegnanti, delle tecnologie e degli altri studenti. L'interazione che si viene a stabilire in rete si distingue per caratteristiche comunicative proprie che comportano dinamiche relazionali solitamente molto intense e connotate da un forte senso di partecipazione sociale [Trentin, 2006].

L'interazione mediata introduce dimensioni emotive e partecipative non meno coinvolgenti di quelle che si possono generare attraverso contatti diretti, anche se il loro sviluppo segue logiche diverse da quelle della presenza [Kiesler et al., 1984]. Quanto si modifichino i ruoli del docente e dello studente, però, dipende dal tipo di approccio adottato, e cioè se parzialmente o totalmente basato sull'uso delle TIC [Laurillard, 1993].

Dal punto di vista teorico si può affermare che i processi di comunicazione e rappresentazione possono essere visti come successivi rispetto alla costruzione dei concetti o come più strettamente collegati ad essa ; nel primo caso (ipotesi denotazionale) si ritiene che i concetti vengono costruiti indipendentemente e che i sistemi semiotici (comprese le lingue) servano per rappresentarli e comunicarli. Nel secondo caso (ipotesi strumentale) i concetti vengono costruiti anche grazie alla possibilità di utilizzare sistemi di segni e il pensiero stesso viene interpretato come una forma di comunicazione [Sfard, 2001]. In un'ipotesi di questo tipo la qualità del pensiero sarebbe fortemente influenzata dalla qualità del linguaggio. Una conseguenza didattica permanente di queste considerazioni è l'attenzione per la qualità dei linguaggi adottati e per la corrispondenza fra attività semiotiche e competenza linguistica dei partecipanti. D'altronde l'E-Learning attualmente trova nella comunicazione testuale (scritta) la sua forma prevalente, anche se tende progressivamente a incorporare elementi multimediali. Il frame della comunicazione non è costituito dal corpo, dalla percezione posturale e dall'espressione fisionomica dei soggetti che interagiscono: la comunicazione è priva, o comunque povera, di

elementi para-extralinguistici [Calvani, Rotta, 2001]: ciò induce il linguaggio a una riconfigurazione nello sforzo di farsi carico della necessità di esplicitare attraverso la comunicazione scritta quanto nella comunicazione diretta passa in altre forme. In ogni caso oggi si assiste sempre in modo più forte alla nascita di un nuovo linguaggio caratterizzato da una propria specificità: il linguaggio utilizzato in una comunicazione mediata da computer è infatti a metà strada tra lo scritto e il parlato ad esempio per il ricorso a tratti iconografici quali smile o faccine, per l'approccio maggiormente dialogico, per la contrazione degli indici simbolici paralinguistici ed extralinguistici.

Un'altra conseguenza è che tutte le analisi linguistiche vanno effettuate in un contesto di comunicazione tra persone, tenendo conto dei fenomeni che inevitabilmente si verificano e che sono studiati in modo efficace dalla pragmatica. Da questo punto di vista una piattaforma può fornire un'ampia gamma di possibilità di uso della lingua, da usi molto vicini ai registri colloquiali a usi più sofisticati. Va tenuto presente che il medium con cui viene realizzata la comunicazione gioca una funzione rilevante sia per le opportunità semiotiche che offre, sia per gli atteggiamenti che suscita; la modalità scritta, ad esempio, offre opportunità cognitive enormi ma può anche bloccare alcuni soggetti linguisticamente più deboli.

#### **4.1.2 Personalizzazione dei processi di insegnamento-apprendimento**

Nelle teorie di apprendimento che mettono lo studente al centro del processo di apprendimento, tener conto delle caratteristiche di ciascuno è uno delle mete più ambite. L'apprendimento quindi diventa personalizzato.

Questa attenzione alla dimensione personalizzata dell'apprendimento sta portando a modifiche sostanziali nella gestione dei processi formativi anche se è pur vero che allo stato attuale risulta poco praticabile la promozione di una didattica che tenga conto delle esigenze del fattore personalizzazione, soprattutto se si pensa alle modalità tradizionali di insegnamento in presenza per la gestione di un consistente numero di studenti. È proprio all'interno di questa realtà, che l'E-Learning ha tutte le carte in regola per divenire uno strumento in grado di concretizzare le esigenze richieste dagli attuali contesti formativi.

Oggi infatti la rete e le tecnologie offrono opportunità uniche riguardo a questi aspetti, sia dal punto di vista dell'individualizzazione delle esigenze e profili anche per un numero qualsivoglia elevato di studenti, sia da quello dell'offerta di percorsi formativi accessibili e flessibili che possano dunque tener conto delle esigenze individuali di ciascun utente. In tale ottica, l'in-

infrastruttura tecnologica potrebbe essere utilizzata sia come mezzo capace di elaborare dati in maniera intelligente sia per supportare la gestione di processi di apprendimento dinamici.

Da tempo è stata sempre viva la consapevolezza che esistono differenze nei soggetti che apprendono e che di queste si dovrebbe tener conto per l'allestimento di ambienti di apprendimento. Infatti l'argomento personalizzazione non è una novità negli studi pedagogici, poiché già nella cultura novecentesca è stato osservato e analizzato sotto il concetto di individualizzazione da autori autorevoli quali Claparède (1920), Decroly (1929), Montessori (1920). Essi, attraverso i loro lavori, hanno proposto, sia in prospettiva teorica che pratica, una "scuola su misura" costruita in funzione alle caratteristiche, alle esigenze degli alunni caratterizzata da un metodo di insegnamento basato sull'interesse-bisogno dell'apprendimento. Successivamente, altri autori, quali Kilpatrick (1994), Dottrens (1936) e Freinet (1967) hanno avuto il merito di aver formalizzato criteri di insegnamento che tenevano in considerazione la necessità di individualizzare la didattica senza renderla individualistica.

Il vero grande limite di questi primi studi centrati sull'individualizzazione, consisteva però nel non avere considerato ed esaminato la complessità degli elementi capaci di condizionare le modalità di apprendimento dei singoli individui. In primo luogo il disegno di adeguati percorsi formativi, non può prescindere da un'attenta analisi nei confronti di quegli aspetti della mente che gli approcci cognitivisti hanno osservato. Sono i cognitivisti a puntare l'attenzione su fattori dell'apprendimento quali la percezione, l'attenzione, la memoria, il linguaggio, il pensiero, la creatività, gli stili cognitivi, gli stili intellettivi e le conoscenze possedute.

In secondo luogo è necessario considerare l'aspetto sociale dell'apprendimento, essendo esso stesso inserito in uno specifico contesto e influenzato dalle complesse relazioni sociali che, nell'interazione fra discente e docente e fra discenti, si attuano. Studi prodotti da approcci costruttivisti e in particolare dal costruttivismo sociale, ritengono che le persone costruiscono attivamente nuova conoscenza solo quando interagiscono con gli altri all'interno di azioni collaborative .

Da quanto emerge da questa veloce panoramica si può dire che l'individualizzazione, che ha caratterizzato la "storia" negli anni 60'-80' tiene conto del grado di adeguatezza dell'istruzione rispetto alle caratteristiche degli studenti, la misura in cui vengono create condizioni di apprendimento adatte ai diversi alunni. Baldacci in [Baldacci, 2006] la definisce come l'adattamento dell'insegnamento alle caratteristiche individuali dei discenti, tramite specifiche e concrete procedure didattiche.

La personalizzazione invece, a differenza dell'individualizzazione, tiene conto,

nella sua realizzazione, di tutti quei fattori trascurati dall'individualizzazione e che la rendono capace di stimolare ogni singolo studente al raggiungimento del massimo delle proprie capacità intellettive, cioè al raggiungimento di una propria eccellenza cognitiva [Baldacci, 2006]. La personalizzazione inoltre, oltre a tener conto della complessità degli elementi capaci di condizionare le modalità di apprendimento dei singoli individui necessita, per la sua realizzazione, che tali fattori siano espressi dagli stessi studenti che dunque vengono a possedere la consapevolezza di scegliere almeno in parte il loro percorso di apprendimento; ciò infatti che in particolar modo caratterizza la personalizzazione è la consapevolezza che il percorso di apprendimento si presenta agli occhi del soggetto come appartenente ad un orizzonte di senso di cui egli stesso, entro certi limiti contribuisce a determinare. In tal senso in un percorso di apprendimento personalizzato le scelte vengono, almeno in parte poste in essere dal soggetto stesso, se pur attraverso le necessarie negoziazioni con i suoi interlocutori che siano essi il docente, il tutor o, in una prospettiva più "tecnologica", la stessa macchina.

E' chiaro, come è già stato accennato nell'introduzione, che tanto l'individualizzazione quanto la personalizzazione sono piuttosto impraticabili per un numero elevato di allievi, con la sola modalità tradizionale della lezione in aula. In questa direzione invece la modalità del blended learning, sembra portare un contributo notevole. Va infatti sottolineato il valore aggiunto che la tecnologia può offrire in termini di personalizzazione dell'apprendimento sia dal punto di vista dell'individuazione di esigenze e caratteristiche anche di un numero elevato di utenti (cioè la designazione per ciascun'utente di un "profilo studente"), sia da quello dell'offerta di percorsi formativi accessibili e flessibili che bene si modellano per la creazione di percorsi di apprendimento che tengano conto delle esigenze di ogni singolo utente [G. Albano, P.L. Ferrari, 2008].

## 4.2 Le Piattaforme per l'E-Learning

Una piattaforma E-Learning è una complessa architettura di software costruita, con logica e struttura modulare, intorno a un data-base.

L'architettura delle piattaforme di E-Learning è identificabile ad un insieme di moduli per l'apprendimento tra loro connessi; ogni modulo rappresenta un blocco funzionale, corrispondente a esigenze che possono essere didattiche, amministrative o gestionali. Nei prodotti di ultima generazione sono presenti moduli che interfacciano la piattaforma con la rete e mettono a disposizione degli utenti i diversi modi della comunicazione interpersonale, quali la posta elettronica, la chat, il web forum, wiki, blog, la videconferenza ecc.

A loro volta, anche i moduli presentano una struttura modulare: ognuno si costituisce infatti a partire da funzionalità elementari, di livello base, e più moduli si aggregano tra loro per formare insiemi di livello più alto e di complessità superiore. La caratteristica peculiare di questa architettura modulare consiste nel poter aggregare alla struttura moduli dello stesso livello, o riordinare la disposizione dei moduli stessi, senza che vengano alterate le principali modalità di funzionamento interno degli elementi preesistenti, e dunque nel poter espandere il sistema, sia in orizzontale (aggiunta di moduli di pari livello) sia in verticale (aggregazione di più moduli per crearne uno “macro” con funzionalità più elevate e complesse). L’infrastruttura così creata assume un particolare rilievo strategico nell’orientare e guidare la progettazione dei corsi.

Dunque la strategia modulare, applicata alla progettazione di corsi, partendo dalle unità elementari di contenuto e arrivando ad aggregazioni complesse di aree di sapere, può consentire una serie quasi illimitata di combinazioni di micro e macro-oggetti, il che vuol dire garantire il massimo livello di individualizzazione e ancor più di personalizzazione delle pratiche di apprendimento. Le più diffuse piattaforme Open Source attualmente presenti rispondono alle tipologie LMS e LCMS. Un Learning Management System (LMS) consente la gestione di attività quali la preparazione dei corsi e dei curricula, la creazione dei cataloghi e dei calendari degli insegnamenti, l’iscrizione degli studenti, il monitoraggio dello studio, la misurazione e la valutazione dei risultati. Un Learning Content Management System (LCMS) consente, invece, di creare e gestire i contenuti e gli utenti attraverso la condivisione di archivi digitali (digital repository); in pratica è il modulo software che permette di interagire con le basi di dati (database).

Le piattaforme Open Source sono tutte web based; questo significa che sono accessibili tramite Internet su protocollo IP e pertanto utilizzabili mediante un browser (come Internet Explorer) . Le piattaforme Open Source hanno tutte raggiunto un buon grado di sviluppo in termini software che si traduce in un buon livello delle funzionalità.

Tra le piattaforme di maggior rilievo vi sono:

**Moodle** (acronimo di Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment) è un piattaforma web open source per l’E-Learning, di tipo Course Management System, progettato per aiutare gli insegnanti e gli educatori a creare e gestire corsi on-line con ampie possibilità di interazione tra studente e docente. Esso è stato creato da Martin Dougiamas, un amministratore web alla Curtin University, in Australia, È scritto in PHP.

La sua licenza libera e la sua progettazione modulare consentono alla comunità di sviluppare di continuo funzionalità aggiuntive. Le funzionalità di Moodle spaziano dalla creazione e all'organizzazione di corsi e lezioni on-line a strumenti per la comunità.

La filosofia di *Moodle* include un approccio costruttivista e sociale all'educazione, mettendo in evidenza il fatto che gli studenti possano contribuire all'esperienza educativa.

Detto questo, Moodle è abbastanza flessibile per permettere una gamma completa di insegnamento. Può essere usato sia per la consegna introduttiva e avanzata di contenuti (ad esempio pagine HTML) o di giudizi e non è vincolato a un approccio di insegnamento costruzionista.

**DoceboLMS** è una piattaforma Open Source per l'E-Learning nata in Italia, anche essa scritta in PHP/MySQL. Il progetto, chiamato inizialmente Spaghetti Learning, arrivato al terzo anno di vita, è stato riscritto completamente e grazie a collaborazioni con molte università italiane e straniere, include funzioni molto particolari. Tra queste funzioni c'è per esempio quella in cui il docente può personalizzare l'ambiente didattico abilitando e disabilitando voci di menu ed inoltre può assegnare voci personalizzate alle funzioni e gestirne i permessi; per la didattica collaborativa c'è il project manager, il forum con possibilità di allegare file e la chat con sistema di richiesta per poter parlare e scambiare file all'interno di essa. Da sottolineare la presenza di marcatori semantici ossia la possibilità da parte del docente di poter valutare ogni singolo intervento del forum e averne una reportistica per studente.

Il professore può scegliere la modalità di presenza on air che permette ai discenti di raggiungerlo in videoconferenza o in chat. Un orologio, presente anche nell'area discente, permette di monitorare il tempo di presenza in un dato corso. Si tratta di una funzionalità che in parte riprende la dinamica scolastica, in cui il tempo è scandito dal passaggio delle ore. Sono inoltre a disposizione del docente una serie di strumenti per la comunicazione: messaggistica, forum e chat. Infine è prevista anche la presenza di test di autovalutazione o verifica creati dal docente stesso.

### 4.3 La piattaforma Moodle

Il percorso di formazione per insegnanti sviluppato in questo lavoro di tesi è stato realizzato in modalità E-Learning, su piattaforma *Moodle*.

Un aspetto molto importante della piattaforma *Moodle* consiste nella sua flessibilità nella costruzione di percorsi di apprendimento personalizzati, che si modellano in base alle scelte, e dunque, alle necessità dei partecipanti. Questo è possibile sfruttando l'aspetto *modulare* della piattaforma cioè la possibilità di creare un ambiente didattico in cui lo studente trovi contenuti matematici e diversi strumenti di apprendimento con i quali realizzare il proprio percorso formativo [ P. Di Martino, G. Fiorentino, R. Zan, 2011].

La citata filosofia di Moodle include un approccio costruzionista e sociale all'educazione e le caratteristiche di Moodle riflettono questo in vari aspetti progettuali, come il rendere possibile agli studenti il commentare i contenuti in un database (o contribuire all'inserimento di dati) o lavorare collaborativamente in un wiki [?].

Per la realizzazione di un Corso, Moodle mette a disposizione diversi tipi di risorse e attività, che possono essere di tipo statico oppure di tipo dinamico. Le risorse statiche sono risorse che gli utenti possono leggere ma con le quali non possono interagire, come pagine di testo, pagine web, eventuali link sul Web o file, mentre le attività dinamiche del Corso sono attività che permettono ai partecipanti di interagire con la piattaforma come la consegna di compiti, il Glossario e la Lezione. Infine si hanno risorse di tipo sociale, come la Chat, il Wiki e il Forum, che permettono agli utenti di interagire con il tutor e tra di loro.

Di seguito sono descritti gli “strumenti” più avanzati che la piattaforma Moodle rende disponibili per la realizzazione di attività di insegnamento-apprendimento [?].

## 4.4 Gli “strumenti” di Moodle

### 4.4.1 Glossario

Questa attività permette di creare e mantenere una lista di definizioni, come un dizionario. Quindi sostanzialmente il Glossario consiste in una lista di parole e di definizioni a cui gli studenti hanno accesso. E' possibile anche permettere agli studenti di aggiungere termini alla lista e questo trasforma il Glossario da una statica lista di parole del vocabolario ad uno strumento collaborativo per l'apprendimento.

Quando una parola del Glossario appare nel Corso è evidenziata in grigio e cliccandovi sopra si apre una finestra pop-up con la spiegazione del significato del termine. E' possibile inserire inoltre una opzione nel Glossario che permette di visualizzare un termine del Glossario, a rotazione, sulla pagina

principale del Corso.

Moodle mette a disposizione due tipi di Glossari: il Glossario Principale e il Glossario Secondario. Nel Glossario Principale solo l'insegnante può inserire nuovi termini, mentre nel Glossario Secondario possono aggiungere termini anche i partecipanti. E' possibile definire un Glossario Secondario per ciascuna sezione e i termini di ciascuna sezione andranno automaticamente a far parte del Glossario Principale. Se si vuole realizzare un unico Glossario per tutto il Corso ed si ritiene necessario che i partecipanti possano aggiungere nuovi termini, allora il Glossario deve essere di tipo Secondario.

Nella figura 4.4.1 viene mostrato il risultato di una richiesta di accesso al Glossario per un termine di una pagina del Corso.

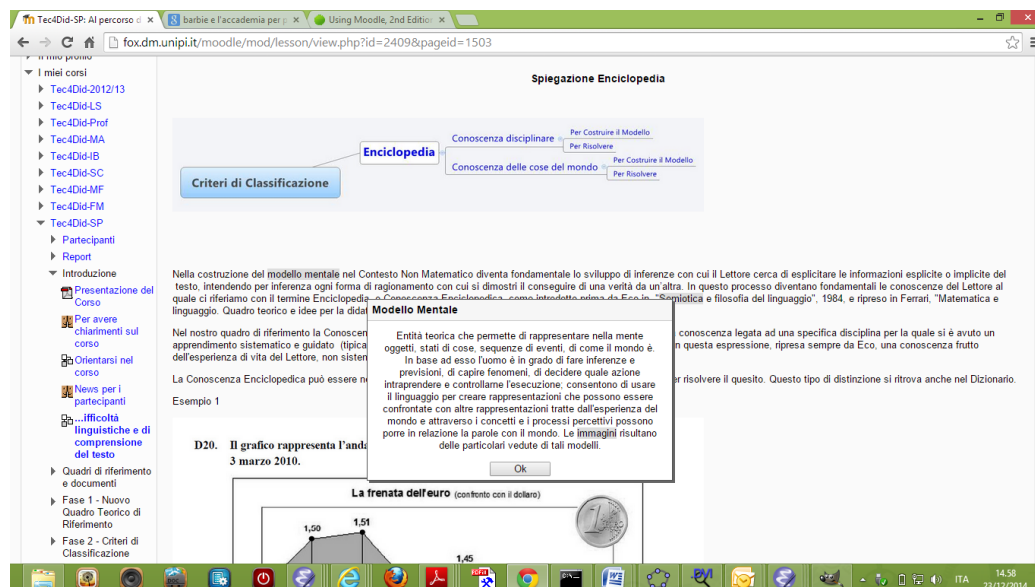


Figura 4.1: Un esempio di visualizzazione del significato di un termine, “modello mentale”, con l'utilizzo del Glossario.

## 4.4.2 Compito

Il modulo Compito consiste in uno stimolo proposto (una domanda, un problema, un testo da analizzare, ...) al quale gli studenti rispondono con la sottomissione di un file in un formato qualsiasi, la compilazione di un modulo online o in altri modi che richiedono comunque l'elaborazione di un testo o di un ipertesto. Sia il testo del compito che la risposta possono includere testi verbali, espressioni simboliche e rappresentazioni figurali.

Il docente può valutare il prodotto, comunicare gli esiti della valutazione a

ciascun studente ed eventualmente richiedere una nuova sottomissione della risposta. In questa attività, come anche nelle altre, è possibile porre limiti temporali alla possibilità sia di vedere il testo del compito, sia di sottomettere la risposta.

È anche possibile subordinare lettura o sottomissione alla conclusione di altre attività. Queste opportunità possono essere sfruttate per spingere gli studenti a rimanere in contatto col corso, ad esempio con compiti che richiedono di riflettere su argomenti preliminari rispetto ai temi trattati in una lezione, con il vincolo di svolgerli nei giorni immediatamente precedenti alla medesima.

### 4.4.3 Lezione

La Lezione costituisce il tipo di attività più potente e complessa sviluppabile sulla piattaforma Moodle e permette la realizzazione di percorsi personalizzati, in base alle risposte e alle esigenze dei partecipanti.

Una Lezione consiste in un serie di pagine web che presentano informazioni e domande. Solitamente ogni pagina termina con una o più domande e la pagina successiva dipende dalle risposte dell'utente.

L'obiettivo principale della Lezione è quello di presentare un argomento, consentendo un eventuale feed-back da parte dei partecipanti sulla efficacia della pagina e mettendo in condizione i partecipanti di valutare il proprio progresso.

Le pagine di una Lezione sono pagine web e quindi vi si può aggiungere contenuto di ogni tipo e quando vengono create è possibile scegliere sostanzialmente tra due tipi di pagina: pagina con domanda oppure pagina con contenuto. Le pagine con domanda, oltre a informazioni, contengono una domanda per l'utente, che può essere inerente all'argomento trattato oppure può essere di tipo metacognitivo, sul tipo di decisioni che l'utente è chiamato a prendere rispetto alla specifica lezione o al Corso. Alla risposta del partecipante è possibile replicare con un feed-back immediato oppure attraverso il collegamento con altre pagine.

E' possibile scegliere tra diversi tipi di domande:

- Vero/falso
- A risposta breve
- Numerica
- Di tipo Matching
- A scelta multipla

Una pagina di contenuto invece, ha lo scopo di dare informazioni e permette all'utente di scegliere quale tipo di direzione dare alla esplorazione successiva dei contenuti.

Nella figura 4.4.3 è mostrata la struttura della Lezione *Orientarsi nel Corso*, che avendo scopo prettamente orientativo sulla piattaforma è stata realizzata mediante pagine con contenuto. Mentre la figura 4.4.3 mostra la struttura della Lezione *Al percorso di formazione sulle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo*, dove si utilizzano sia pagine con contenuto sia pagine con domanda, precisamente domanda con risposta a scelta multipla. Oltre al tipo di domanda si visualizzano i salti che è possibile fare da ciascuna pagina.

Le figure 4.4.3 e 4.4.3 mostrano rispettivamente come avviene l'inserimento di una pagina con contenuto e l'inserimento di una pagina con domanda, la cui risposta è a scelta multipla.

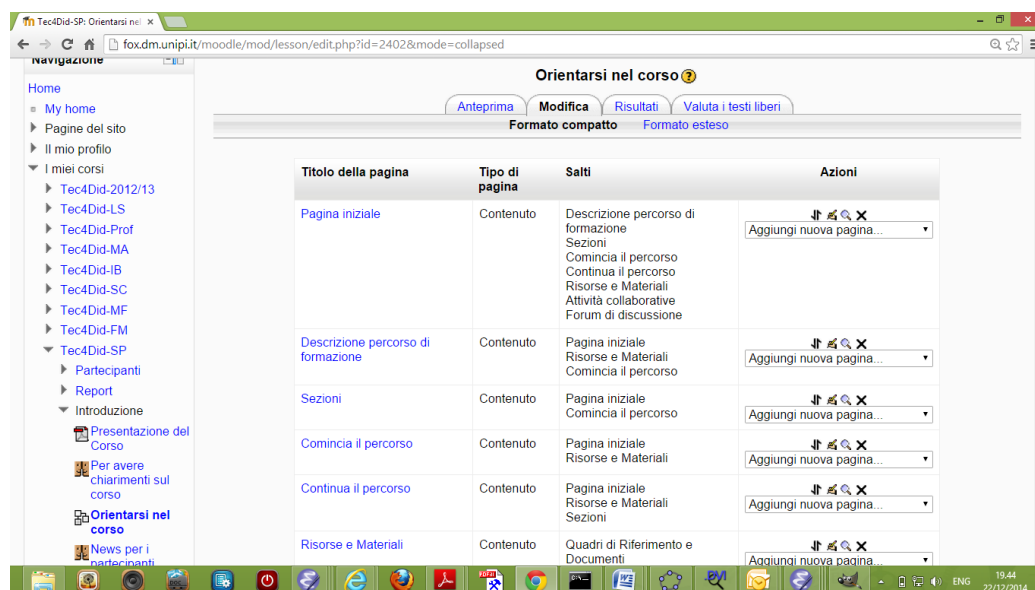


Figura 4.2: La struttura delle pagine della Lezione *Orientarsi nel Corso*.

#### 4.4.4 Wiki

Rappresenta un tipo di attività collaborativa, basata sulla creazione a più mani di pagine web con contenuti che possono essere inseriti e/o modificati da tutti gli utenti del corso. Questo tipo di attività favorisce tra i partecipanti discussioni di tipo informale.



Figura 4.3: Una parte della struttura delle pagine della Lezione Al percorso di formazione sulle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo.

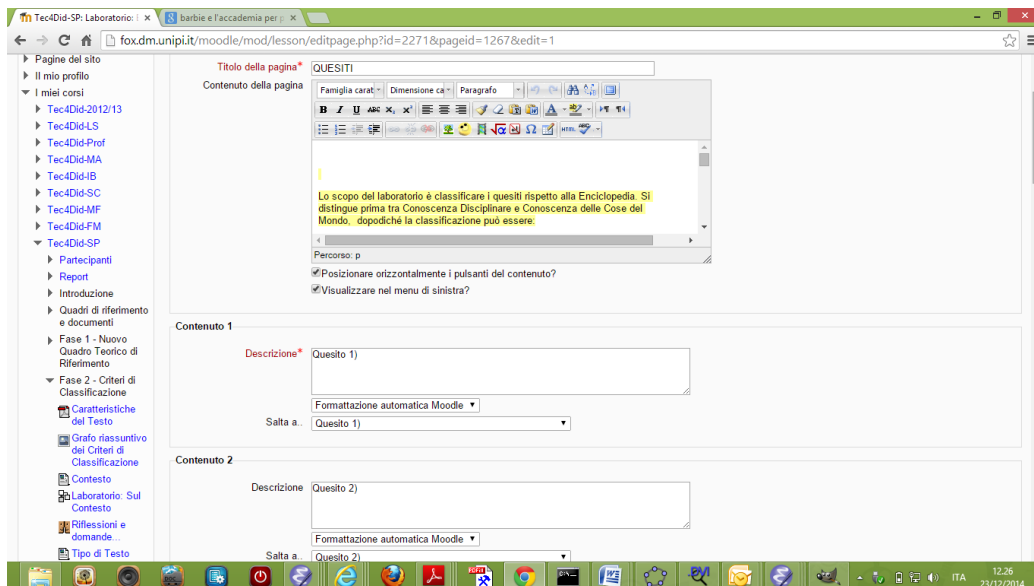


Figura 4.4: Inserimento di una pagina con contenuto.

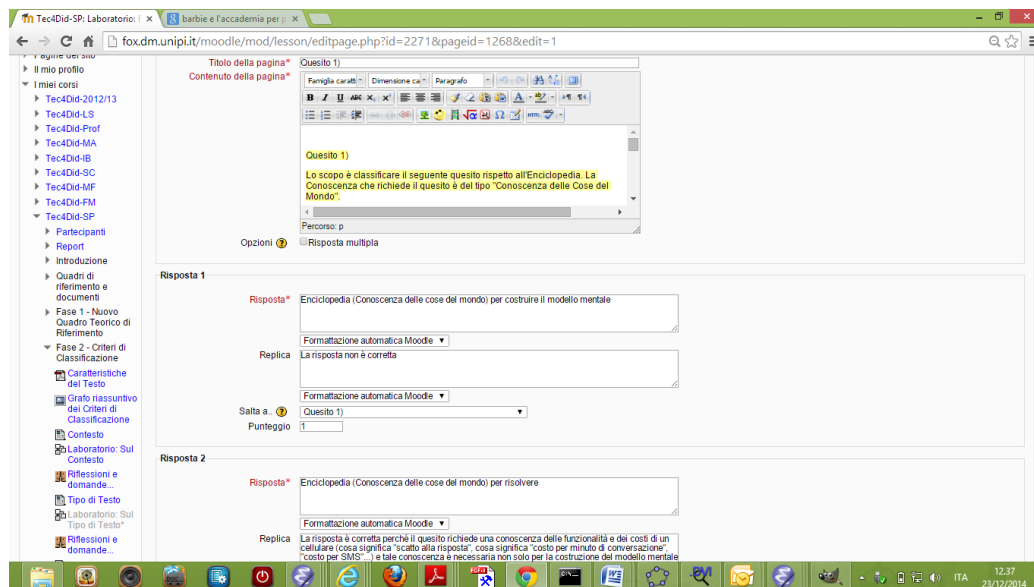


Figura 4.5: Inserimento di una pagina con domanda la cui risposta è a scelta multipla.

#### 4.4.5 Chat

Questa attività (letteralmente, “chiacchierata”) permette il dialogo tra i partecipanti in tempo reale. Nello specifico, è uno strumento per la comunicazione che permette di avere discussioni in modo sincrono attraverso il web. In questo modo, una chat permette di creare in piattaforma luoghi virtuali di incontro e di scambio di informazioni.

#### 4.4.6 Forum

E’ un strumento per la comunicazione che permette la discussione asincrona di argomenti proposti o dal docente o dagli studenti; permettere la valutazione, anche da parte degli studenti, delle risposte. Il forum può essere anche utilizzato dal solo docente per inserire messaggi, avvisi generali e promemoria per gli studenti. Moodle rende disponibili diversi tipi di Forum, in particolare:

- Forum monotematico - Forum costituito da un solo argomento di discussione, tutti i partecipanti possono intervenire
- Ciascuno avvia una sola discussione - Ogni partecipante può avviare un’unica discussione su un argomento e gli altri partecipanti possono intervenire.

- Domande e Risposte\* - Il forum Domande e Risposte obbliga i partecipanti ad intervenire prima di poter visualizzare gli interventi degli altri.
- Forum standard visualizzato in stile blog - Un forum aperto dove chiunque può avviare discussioni e visualizzato con link [Discuti questo argomento](#).
- Forum standard per uso generale - Forum aperto dove tutti i partecipanti in qualsiasi momento possono avviare discussioni.

# Capitolo 5

In questo capitolo viene introdotto il Quadro di Riferimento Teorico in base al quale saranno poi osservate e interpretate le difficoltà di comprensione del testo.

## 5.1 Sulla comprensione del testo in matematica: stato dell'arte.

Il problema della comprensione del testo in matematica è stato affrontato nell'ambito della ricerca internazionale sul Problem Solving.

Il Problem Solving, cioè l'attività di soluzione di problemi, è da sempre considerata un'attività che caratterizza l'essere umano e come tale ha avuto un ruolo importante nella psicologia. Uno degli approcci che ha dato i contributi più rilevanti è quello della Psicologia della Gestalt, a partire dagli anni '20 del secolo scorso. In realtà, il termine Problem Solving si incontra raramente negli scritti degli psicologi della Gestalt, che preferiscono parlare di Pensiero Produttivo, in contrapposizione al pensiero ri-produttivo [Kanizsa ed altri, 1975]. Il pensiero produttivo caratterizza i processi che producono il nuovo, che fanno scaturire l'idea originale. Tipico dell'approccio della Gestalt è il ruolo riconosciuto alla ristrutturazione del problema, una trasformazione che non è puramente percettiva, ma consapevole e funzionale al problema stesso. Il pensiero produttivo può essere coinvolto nella risoluzione di problemi di qualsiasi tipo, in particolare in problemi di carattere pratico, ma molti dei contributi significativi sono interessanti proprio dal punto di vista matematico e didattico. In particolare la matematica è considerata un contesto particolarmente significativo per studiare i processi tipici del Problem Solving. D'altra parte il ruolo dei problemi nell'attività matematica è ampiamente riconosciuto, tanto che alcuni matematici caratterizzano la matematica come l'arte di risolvere i problemi. [Zan, 2007]

Attualmente il problem Solving è oggetto di attenzione in diverse discipline: psicologia, didattica, ma anche psicoterapia, counseling, economia, gestione aziendale...In tutti questi casi varia il contesto in cui il problema è posto, e naturalmente le conoscenze che sono coinvolte, ma non le abilità trasversali che è importante avere. Nonostante la differenza di approcci e di terminologia che caratterizza la ricerca dei diversi settori, c'è una condivisione nel riconoscere che la soluzione di un problema si articola in alcune fasi; che il processo risolutivo, nel suo complesso, enfatizza il ruolo delle decisioni; che tali decisioni coinvolgono aspetti cognitivi, metacognitivi, emozionali. In letteratura, l'attività di risoluzione di problemi è suddivisa in fasi ed una o più di tali fasi riguardano proprio la comprensione del problema. Polya in *How to solve it*, [Polya, 1945], propone le seguenti fasi: Comprensione del problema; Progettare un piano; Implementare il piano; Controllo e verifica.

Ogni fase individuata da Polya è generata da una o più domande. In relazione alla fase di comprensione del problema, le domande che si pone Polya sono:

*Che cosa non si conosce? Quali sono i dati? Quali sono le condizioni? E' possibile soddisfare la condizione? La condizione è sufficiente per determinare quello che non si conosce? E' ridondante? E' contraddittoria? Disegna una figura e introduci notazioni adatte. Separa le varie parti della condizione e prova a scriverle.*

Rispetto al nostro approccio, la prima osservazione che possiamo fare è che in Polya non si distingue il testo dalla domanda, quindi la comprensione viene svolta in funzione degli obiettivi risolutivi. Inoltre, la comprensione del testo costituisce una fase precedente anche rispetto alla distinzione tra dati e condizioni: questo nel senso che è precedente al riconoscimento del ruolo di una certa informazione all'interno del quesito (dato o condizione, appunto). Successivamente Schoenfeld in *Mathematical Problem Solving*, [Schoenfeld, 1985] classifica le fasi del Problem-Solving nel seguente modo: Analisi, Rappresentazione, Esplorazione, Implementazione e Verifica. Le fasi che riguardano la comprensione del problema sono l'Analisi e l'Esplorazione. Schoenfeld in [Schoenfeld, 1985] descrive la fase di Analisi nel modo seguente:

Fase di ANALISI:

1. Disegna un diagramma se è possibile;
2. Esamina casi speciali:

- (a) Scegli alcuni valori speciali per fare qualche esempio del problema (get a feel for it);
  - (b) Prova a settare ogni parametro intero a 1; 2; 3; : : : , per osservare se il modello è induttivo;
3. Prova a semplificare il problema sia attraverso proprietà di simmetria sia attraverso condizioni del tipo senza perdere di generalità (includendo anche la riduzione);
  4. Riformula il problema nel modo più conveniente: scegli la prospettiva che userai e riscrivi il problema in una forma matematica più adatta alla sua manipolazione.

In letteratura si hanno solo queste due posizioni rispetto alla comprensione di un problema e comunque, queste due posizioni sono riconducibili l'una all'altra in quanto non si preoccupano della mancata comprensione e dei fattori che possono determinare particolari casi di mancanza di comprensione: Polya risulta troppo orientato alla soluzione del problema mentre Schoenfeld, pur riconoscendo nella comprensione del testo un momento preliminare e distinto rispetto alla risoluzione, non è in grado di descrivere ed esplicitare tutti gli aspetti di un testo che possono condurre ad una mancata comprensione, quali la forma linguistica di un testo, la conoscenza matematica necessaria per la sua comprensione e il tipo di rappresentazioni mentali prodotte.

## 5.2 Quadro di riferimento teorico

Il Quadro di Riferimento Teorico che viene proposto per osservare e interpretare le difficoltà linguistiche e di comprensione del testo dei quesiti è stato sviluppato attingendo da diversi ambiti di ricerca che sono il Problem Solving, la Conoscenza Matematica, il Linguaggio Matematico e la Linguistica della Linguistica.

### 5.2.1 La teoria dei Modelli Mentali per la comprensione del testo

Il primo aspetto significativo da definire è che cosa si intende per *comprensione di un testo*<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Una definizione generale di testo che troviamo in Ferrari in *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*, 2004 è: produzione linguistica scritta. Il nostro

*“E’ più facile fornire dei criteri relativi a ciò che è rilevante per la comprensione che catturarne l’essenza, forse perché non esiste una essenza della comprensione. (P. Jhonson-Laird)*

La Teoria dei Modelli Mentali di Jhonson-Laird, alla quale facciamo riferimento per definire cosa si intende per comprensione e per spiegare come avviene [Johnson-Laird, 1988], è una teoria psicologica che stabilisce vincoli espliciti alla classe delle possibili rappresentazioni mentali. Alla base della Teoria dei Modelli Mentali si hanno i seguenti assunti:

**Assunto 1:** il fondamento psicologico della comprensione consiste nell’avere nella propria mente un modello operativo del fenomeno. Questo significa che se abbiamo compreso una certa entità allora si deve avere nella mente una rappresentazione mentale che serva da modello (esempio dell’orologio, che funziona come modello della rotazione terrestre). La prima formulazione di questa teoria risale a Kenneth Craik (1983). I tre processi di elaborazione individuati sono: traduzione, derivazione e ritraduzione. La definizione che dà Craik di modello è: per modello intendiamo ogni sistema fisico o chimico i cui rapporti sono strutturati come nel processo che viene imitato, ossia in cui vi è una struttura di rapporti equivalente [...]. La mia ipotesi, quindi, è che il pensiero costituisca un modello o un parallelo della realtà – che il suo aspetto essenziale non sia la mente, l’io, i dati di senso e neppure le proposizioni, ma il simbolismo <sup>2</sup>.

**Assunto 2:** ogni teoria scientifica dovrebbe essere descrivibile con una procedura effettiva cioè producibile mediante una macchina.

**Assunto 3:** la mente può essere studiata indipendentemente dal cervello (la natura fisica non vincola le possibili configurazioni del pensiero (dottrina del funzionalismo)).

Le scienze cognitive hanno come obiettivo quello di capire come funziona la mente cioè costruire un modello operativo che sia il modello di un congegno che serva a costruire modelli operativi.

---

quadro teorico fa riferimento a questa definizione ogni volta che si riferisce ad un testo generico. In modo più specifico, per testo di un quesito invece, si intenderà il mezzo attraverso il quale avviene la comunicazione del quesito stesso. In particolare indicheremo con “Testo Situazione” il testo completo del quesito, dove però la domanda viene considerata solo nella sua funzione di rendere esplicito quale sia l’aspetto significativo del testo che la precede. Non verrà però analizzata né nella sua forma né in tutte le sue possibili relazioni con il testo precedente.

<sup>2</sup>Da [Johnson-Laird, 1988], pag. 8

Secondo la Teoria dei Modelli Mentali esistono tre tipi fondamentali di rappresentazione mentale: la rappresentazione proposizionale, il modello mentale e le immagini. Questi differenti tipi di rappresentazione, ad un qualche livello di analisi, possono essere logicamente distinte cioè si sviluppano come differenti opzioni per codificare le informazioni. La rappresentazione proposizionale fornisce l'intensione del testo cioè il suo significato visto come funzione dei significati delle singole parole e delle loro relazioni sintattiche. Il modello mentale invece fornisce l'estensione del testo, detta anche *significanza*, cioè permette di individuare i referenti, le loro relazioni e quindi un *mondo possibile* rispetto a quanto descritto nel testo stesso.

I Modelli Mentali possono essere manipolati da diverse variabili dimensionali, ma, al contrario delle rappresentazioni proposizionali, non hanno struttura sintattica e non codificano niente della forma linguistica. Inoltre presentano un alto grado di specificità e sono soggetti ad assunzioni arbitrarie. I Modelli Mentali si ricordano più facilmente e permettono di trattare le relazioni determinate più prontamente e facilmente rispetto a quelle indeterminate, meglio codificate in una rappresentazione proposizionale. Inoltre un Modello Mentale va al di là del significato letterale di un testo e il significato di una frase non è recuperabile dal modello. Un modello mentale è un singolo esemplare rappresentativo dell'insieme dei modelli che soddisfano l'asserzione. Il processo di comprensione conduce ad un unico modello a partire dalle condizioni di verità di un'asserzione. Nel momento che ci accorgiamo che tale modello è sbagliato allora vi sono *procedure ricorsive* che tenteranno di modificarlo in modo da verificare le asserzioni disponibili.

Le procedure ricorsive utilizzate nei processi interpretativi sono:

1. Una procedura che inizia la costruzione di un nuovo modello mentale ogni qualvolta si incontra un'asserzione che non fa riferimento, né esplicito né implicito, ad alcuna entità già inclusa nel modello corrente del discorso.
2. Una procedura che aggiunge al modello corrente altre entità, proprietà o relazioni, qualora almeno una entità a cui l'asserzione si riferisce vi sia già rappresentata.
3. Una procedura che integra due o più modelli fino a quel momento separati, se una nuova asserzione pone in relazione entità che vi appartengono.
4. Una procedura in grado di verificare se le proprietà o le relazioni asserite sono congruenti con il modello corrente, quando si incontra una asserzione che si riferisce ad entità già tutte rappresentate nel modello.

5. Una procedura che aggiunge al modello la proprietà o la relazione nel modo appropriato.

Infine due procedure che inglobano quello che è indicato come principio semantico della validità:

6. Se si scopre in base ad una procedura di verifica che una asserzione è vera in relazione al modello corrente, allora si ha una procedura che controlla se un'asserzione vera in un certo modello corrente, è deducibile dalle asserzioni precedenti e quindi non aggiunge nessun contenuto semantico nuovo.
7. Se si scopre in base ad una procedura di verifica che una asserzione è falsa in relazione al modello corrente, allora si ha una procedura che cerca di modificare il modello corrente, pur mantenendolo consistente con le asserzioni precedenti, in modo da rendere vera l'asserzione. Se tale modifica non è possibile, l'asserzione di cui si tratta risulta inconsistente con le asserzioni precedenti.

In particolare, la significanza (o estensione) di un'asserzione dipende sia dal modello sia dalle procedure impiegate per costruirlo. In realtà il numero degli interventi ricorsivi di ricostruzione è limitato dalla limitata capacità della memoria operativa.

La semantica basata sulla Teoria dei Modelli pone in corrispondenza biunivoca le rappresentazioni proposizionali e i modelli mentali e quindi le espressioni del linguaggio naturale con i mondi possibili. Il passaggio dalla rappresentazione proposizionale al modello mentale avviene attraverso le procedure ricorsive.

Questa teoria afferma che il processo di interpretazione di un testo deve condurre ad un unico modello mentale. Tale processo avviene mediante il passaggio attraverso tre livelli di rappresentazione del testo: il primo è il livello di rappresentazione grafema (il testo stesso) \*rappresentazione esterna); il secondo è il livello di rappresentazione proposizionale \*rappresentazione interna); infine il terzo livello è proprio la rappresentazione mediante un modello mentale \*Rappresentazione interna).

In relazione ai passaggi attraverso i diversi livelli di rappresentazione prima descritti, nel nostro Quadro Teorico di Riferimento si distinguono due classi di ostacoli interpretativi che possono causare difficoltà di comprensione di un testo, che indicheremo come *difficoltà di secondo livello* e *difficoltà di terzo livello*. Alla prima classe appartengono le situazioni in cui non si raggiunge il secondo livello di rappresentazione cioè la rappresentazione

proposizionale, mentre alla seconda classe appartengono le situazioni in cui non si raggiunge il terzo livello di rappresentazione cioè non si costruisce un modello mentale o si costruisce un modello mentale non consistente con quello atteso dall'autore.

### 5.2.2 La coerenza e la coesione di un testo

Nella costruzione di un modello mentale entra in gioco la *coerenza del testo*, intesa come la proprietà del testo di non essere una sequenza casuale di frasi, e nella Teoria dei Modelli Mentali si assume quanto segue:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché un discorso sia coerente è che se ne possa ricavare un singolo modello mentale.*

Quindi la possibilità di costruire un singolo modello mentale dipende principalmente da fattori di co-referenza e di consistenza [Johnson-Laird, 1988]. Ciascuna frase di un discorso deve, esplicitamente o implicitamente, riferirsi ad una entità cui ci si è già riferiti ( o che è stata già introdotta) in un'altra frase, dato che soltanto questa condizione rende possibile rappresentare le frasi all'interno di un singolo modello integrato. Allo stesso modo, proprietà e relazioni ascrivibili ai singoli referenti devono essere consistenti, cioè compatibili le une con le altre e prive di contraddizioni.

Un'altra caratteristica importante di un testo, che riguarda sempre la Linguistica, è la coesione di un testo. Per *coesione di un testo*, [Colombo, 2002], si intende l'insieme dei legami linguistici che tengono unito un testo. Si tratta di un insieme di relazioni "locali", linguisticamente espresse, tra singoli elementi testuali. Si distingue però dalla sintassi perché i legami "coesivi" attraversano le strutture del periodo, non solo perché si possono stabilire tra periodi diversi, ma perché anche all'interno di uno stesso periodo possono collegare elementi che si trovano a livelli strutturali diversi. Ciò che assicura la coesione di un testo è la ripresa degli stessi referenti cioè il far riferimento più volte ad uno stesso oggetto del discorso.

### 5.2.3 Quale approccio alla comprensione del testo di un quesito?

L'approccio proposto in questo lavoro alla comprensione può essere descritto facendo riferimento alla Linguistica dei testi narrativi.

*"Ci sono due modi per percorrere un testo narrativo. Esso si rivolge anzitutto a un lettore modello di primo livello, che desidera sapere come la storia*

*vada a finire. Ma il testo si rivolge anche ad un lettore modello di secondo livello, il quale si chiede quale tipo di lettore quel racconto gli chiedesse di diventare e vuole scoprire come proceda l'autore modello che lo sta istruendo passo per passo.” (Eco, Sei passeggiate nei boschi narrativi, 1994)*

Le categorie a cui fa riferimento Umberto Eco in questa citazione sono di Lettore Modello e di Autore Modello e si contrappongono al lettore empirico e autore empirico (di cui Eco ha già parlato in *Lector in fabula* [Eco, 1979]). Il lettore empirico è una qualunque persona che legge un testo. Questo lettore può leggere in molti modi e non c'è nessuna regola che gli imponga come leggere.

Il Lettore Modello invece è un lettore-tipo che il testo non solo prevede come collaboratore ma che anche cerca di creare. Ci sono delle regole del “gioco” e il lettore modello è colui che sa stare al gioco [Eco, 1994]. Ma chi impone queste regole del gioco? Cioè chi fornisce al lettore empirico le indicazioni per diventare un Lettore Modello?

Indubbiamente il testo avrà un autore empirico cioè colui che ha scritto materialmente il testo, un narratore interno o esterno al testo (che non è detto coincida con l'autore empirico) e infine l'Autore Modello. L'Autore Modello è una voce che parla al lettore, che chiede al lettore di collaborare e questa voce si manifesta come strategia narrativa, come insieme di istruzioni che vengono impartite a ogni passo e a cui è necessario ubbidire quando si decide di comportarci come Lettore Modello [Eco, 1994].

Queste categorie possono essere utilizzate per un'analisi dei testi dei quesiti delle prove standardizzate con un vincolo però di natura pragmatica dovuto ai ruoli dell'Autore Modello e del Lettore Modello nel nostro caso specifico. Nel caso dei problemi, l'Autore Modello ha il ruolo di porre il quesito e il Lettore Modello quello di risolverlo. L'Autore Modello non solo “costringe” a leggere il testo, non solo impone di rispondere ma si aspetta anche una ben determinata risposta e questi aspetti naturalmente differenziano il testo di un quesito dal testo narrativo.

Tornando alla citazione di Eco, il risolutore del quesito è un Lettore Modello di primo livello, mentre la lettura che ci proponiamo di fare noi del testo di un quesito ci individua come Lettore Modello di secondo livello. Le caratteristiche del testo, che saranno descritte nel Capitolo successivo a partire dal Quadro di Riferimento Teorico introdotto, permetteranno di individuare il Lettore Modello che l'Autore cerca di costruire. In modo più specifico, determinate combinazioni di tali caratteristiche individueranno difficoltà di comprensione che non permettono al lettore empirico di diventare Lettore Modello.

Nella realtà scolastica, però, è più corretto affermare che gli allievi sono Let-

tori Modello per il tipo di problemi trattati in classe e per il modo in cui sono affrontati, poiché l'attività in classe può essere vista come una narrazione all'interno della quale un certo problema viene affrontato e discusso. Lo studente si troverà in difficoltà nel momento in cui il suo tipo di Lettore Modello non sarà consistente con il Lettore Modello richiesto dal quesito.

## 5.2.4 Sulla Conoscenza Matematica

Le classificazioni più recenti della Conoscenza Matematica sono riconducibili al filosofo inglese Ryle che, in [Ryle, 1949], distingue due tipi di Conoscenza, rispettivamente come *knowing that*, “sapere che cosa”, e *knowing how*, “sapere come”. Successivamente lo psicologo cognitivista Anderson in [Anderson, 1983], parla di *conoscenza dichiarativa* per la prima e *conoscenza procedurale* per la seconda. Per *conoscenza dichiarativa* intende una forma inerte di conoscenza dei singoli fatti, non tra loro correlati mentre parla della *conoscenza procedurale* come conoscenza di operatori e di condizioni su tali operatori che garantiscano il raggiungimento di determinati obiettivi. Saranno James Hiebert e Patrica Lefevre nel 1986 che proporranno la distinzione tra *Conoscenza Concettuale* e *Conoscenza Procedurale*.

Sulla conoscenza Concettuale in [Hiebert, Lefevre, 1986] scrivono:

*Conceptual Knowledge is characterized most clearly as knowledge that is rich in relationships. It can be thought of as a connected web of knowledge, a network in which the linking relationships are as prominent as the discrete pieces of information. Relationships pervade the individual facts and propositions so that all pieces of information are linked to some network. In fact a unit of conceptual knowledge cannot be an isolated piece of information; by definition it is a part of conceptual knowledge only if the holder recognizes its relationship to other pieces of information. The development of conceptual knowledge is achieved by the construction of relationships between pieces of information. This linking process can occur between two pieces of information that already have been stored in memory or between an existing piece of knowledge and one that is newly learned<sup>3</sup>*

La conoscenza di tipo concettuale è caratterizzata come una conoscenza ricca di relazioni. Rispetto alla conoscenza dichiarativa di Anderson, i fatti conosciuti sono visti in relazione gli uni agli altri: infatti la conoscenza concettuale può essere visualizzata come un grafo formato da nodi ed archi (relazioni o link), dove i nodi rappresentano singoli fatti o proposizioni. Lo

---

<sup>3</sup>da [Hiebert, Lefevre, 1986] pag. 3-4

sviluppo della conoscenza concettuale avviene attraverso la costruzione di nuove relazioni tra nodi esistenti oppure tra un nodo già presente in memoria ed un nuovo nodo di conoscenza. La letteratura in psicologia ed in educazione tratta in modo diffuso contributi dove si descrive come fatti tra loro non in relazione sono improvvisamente visti in relazione sotto qualche aspetto. Queste costruzioni stanno alla base dell'apprendimento come scoperta [Bruner, 1961].

*It is useful to distinguish between two levels at which relationships between pieces of mathematical knowledge can be established. One level we will call primary. At this level the relationship connecting the information is constructed at the same level of abstractness (or at a less abstract level) than that at which the information itself is represented. That is, the relationship is not more abstract than the information it is connecting. The term abstract is used here to refer to the degree to which a unit of knowledge (or a relationship) is tied to specific contexts. Abstractness increases as knowledge becomes freed from specific contexts<sup>4</sup>.*

Una relazione tra due nodi di conoscenza è di livello primario se la relazione che connette le diverse informazioni è costruita allo stesso livello di astrattezza al quale appartengono le informazioni di partenza. Come esempio, per chiarire l'idea di *relazione di livello primario*, viene riportato l'esempio dell'addizione tra numeri decimali. Quando gli studenti imparano a lavorare con i numeri decimali, tra i diversi fatti che devono conoscere, vi sono i due seguenti: primo, i valori posizionali prima della virgola sono unità, decine, centinaia e così via; secondo, quando si addizionano o sottraggono numeri decimali si devono allineare rispetto alla posizione della virgola. Di solito ci aspettiamo che gli studenti mettano in relazione questi due fatti, riconoscendo che in questo modo vengono sommate o sottratte unità con le unità, decine con le decine, centinaia con le centinaia. Se gli studenti mettono in relazione questi due fatti significa che hanno realizzato una comprensione più avanzata dell'algoritmo dell'addizione in colonna ma il livello di questa relazione si definisce primario perché si rimane all'interno dello stesso contesto dei numeri decimali.

*Some relationships are constructed at a higher, more abstract level than the pieces of information they connect. We call this the reflective level. Relationships at this level are less tied to specific contexts. They often are created by recognizing similar core features in pieces of information that are superficially*

---

<sup>4</sup>da [Hiebert, Lefevre, 1986] pag. 4-5

*different. The relationships transcend the level at which the knowledge currently is represented, pull out the common features of different-looking pieces of knowledge and tie them together*<sup>5</sup>

Alcune relazioni sono costruite ad un livello di astrattezza più elevato. Queste relazioni permettono di legare informazioni che sono in apparenza non collegate. Riprendendo l'esempio precedente della somma tra numeri decimali, possiamo metterlo in relazione alla somma di frazioni decimali. In questo caso si sommano le frazioni con lo stesso denominatore ed in questo modo si ottiene la somma operando sui diversi valori posizionali. Questo tipo di relazione è di livello riflessivo perché mette in relazione ambiti matematici differenti, che sono il calcolo decimale e il calcolo frazionario. Per quanto riguarda la Conoscenza Procedurale in [Hiebert, Lefevre, 1986] è così descritta:

*Procedural knowledge is made up of two distinct parts. One part is composed of the formal language or symbol representation system, of mathematics. The other part consists of the algorithms or rules for completing mathematical tasks. [...] It is useful to distinguish two kinds of procedures by noticing the objets upon which they operate. A basic distinction can be drawn between objets that are standard written symbols and objets that are non symbolic (e.g. concrete objets or mental images)*<sup>6</sup>

La Conoscenza Procedurale è formata da due parti: una parte riguarda il linguaggio formale della matematica e quindi la sintassi, mentre l'altra parte consiste di algoritmi o procedure per la risoluzione dei quesiti. Per quanto riguarda questa seconda parte, è possibile distinguere ulteriormente in procedure che lavorano su simboli quindi realizzano sostanzialmente manipolazioni simboliche, e procedure che lavorano su oggetti concreti, diagrammi visuali oppure su immagini mentali.

I successivi contributi sulla Conoscenza Matematica non hanno sostanzialmente modificato questa distinzione tra Conoscenza Concettuale e Conoscenza Procedurale, ma hanno riguardato sostanzialmente lo studio delle relazioni reciproche tra i due tipi di Conoscenza e l'analisi di possibili metodologie di misurazione di tali Conoscenze [Schneider, Stern, 2010, Rittle-Johnson, Koedinger, 2005, Rittle-Johnson, Siegler, 1998, Saenz, 2009].

---

<sup>5</sup>da [Hiebert, Lefevre, 1986] pag. 5.

<sup>6</sup>da [Hiebert, Lefevre, 1986] pag. 6

### 5.2.5 Dalla teoria delle rappresentazioni semiotiche

La semiotica è la disciplina che studia tutti i sistemi di segni, quelli che sono lingue e quelli che non lo sono [Ferrari, 2004]. La semiotica comprende la sintattica, che studia i rapporti formali dei segni tra loro, la semantica, che studia i rapporti dei segni con ciò che essi designano, e la pragmatica, che studia i rapporti dei segni con chi ne fa uso. Una rappresentazione semiotica è una produzione che utilizza un determinato sistema di segni [Ferrari, 2004]. La teoria semiotica di riferimento nella costruzione del nostro Quadro Teorico è la Teoria Semiotica di Duval, [Duval, 2006, Duval, 1995, Duval, 1999]. Duval ha cercato di analizzare l'uso di rappresentazioni semiotiche in matematica, presenti in grande varietà e di fondamentale importanza. In particolare, si è soffermato sull'analisi delle relazioni esistenti tra rappresentazioni e funzionamento cognitivo, individuando una diversità di processi di apprendimento da cui scaturiscono le difficoltà. Duval sostiene che i processi di costruzione della conoscenza sono strettamente legati ai processi di rappresentazione: *- non c'è noesis senza semiosis cioè [non c'è conoscenza] senza il ricorso a una pluralità almeno potenziale di sistemi semiotici, ricorso che comporta il loro coordinamento da parte del soggetto stesso [Duval, 1995].* D'altra parte è evidente che l'accesso stesso agli oggetti matematici è vincolato alla possibilità ed al modo di rappresentarli. Questo sta alla base del paradosso con il quale Duval esprime la specificità dell'apprendimento matematico, dal quale originano sostanzialmente le difficoltà nell'insegnamento-apprendimento della matematica.

Un sistema semiotico è un registro, secondo Duval, se ammette la possibilità di trasformare una rappresentazione in un'altra. Duval individua due trasformazioni fondamentali riguardanti le rappresentazioni semiotiche:

il trattamento: consiste in trasformazioni sulle rappresentazioni all'interno di uno stesso sistema semiotico;

la conversione: consiste nel passaggio da una rappresentazione in un sistema semiotico ad una in un altro sistema semiotico, senza cambiare l'oggetto.

Nel trattamento si ha una trasformazione di rappresentazione all'interno dello stesso registro mentre nella conversione si cambia il registro rappresentativo, il significante, senza modificare il significato. La conversione è una trasformazione di rappresentazione più complessa rispetto al trattamento perché ogni cambio di registro richiede il riconoscimento dello stesso oggetto nelle diverse rappresentazioni, che, come abbiamo già detto, possono avere significanti molto diversi.

I trattamenti che possono essere effettuati dipendono dal sistema semiotico di rappresentazione usato. La conversione, da un punto di vista matematico, ha lo scopo di scegliere un sistema semiotico in cui il trattamento possa risultare più efficiente. Dal punto di vista cognitivo, invece, permette di separare l'oggetto matematico dalle sue rappresentazioni. Infatti due rappresentazioni distinte di uno stesso oggetto non hanno lo stesso contenuto. Consideriamo, come esempio, la rappresentazione cartesiana di una retta e la corrispondente rappresentazione algebrica: i contenuti delle due rappresentazioni sono molto diversi ma l'oggetto matematico a cui si riferiscono è lo stesso.

Oltre alle trasformazioni di rappresentazione introdotte da Duval, vi è un altro tipo di relazione tra registri diversi, che indicheremo con il termine di *coordinamento*: è il caso in cui in una rappresentazione intervengono due (o più) sistemi semiotici ed è il modo in cui entrano in relazione tali registri che permette l'interpretazione della rappresentazione stessa. Ne è un esempio la rappresentazione cartesiana, dove compaiono il registro grafico, numerico e simbolico ed è dalla loro reciproca interazione che si produce il significato della rappresentazione stessa. E' a tale relazione che ci riferiamo con il termine di *coordinamento*.

Il coordinamento tra due registri ha una natura diversa rispetto alla conversione: nel caso della conversione ciascuno dei due registri possiede una completa autonomia di rappresentazione del significato, mentre, nel caso del coordinamento, i singoli registri non sono in grado di esprimere in modo isolato il significato della rappresentazione.

La trattazione del coordinamento tra i registri e, più in generale, l'utilizzo e l'interpretazione di rappresentazione semiotiche, riveste un ruolo sostanziale nella comprensione di un testo matematico e verrà ripreso e ampliato nel Capitolo 5.

### 5.2.6 Sul Linguaggio Matematico

Nella teoria linguistica sulle funzioni dei linguaggi, si attribuisce ai linguaggi tre funzioni principali [Halliday, 1985]: quella ideazionale, che riguarda l'identificazione dei riferimenti e la verità o la falsità delle affermazioni; quella interpersonale che riguarda le reciproche influenze fra i partecipanti allo scambio; quella testuale che riguarda la costruzione dei testi. Nel Linguaggio Matematico, la funzione prevalente è quella ideazionale, con un forte orientamento all'applicazione di algoritmi. Questo significa che molte scelte riguardo alla rappresentazione delle idee e delle relazioni matematiche sono influenzate dall'esigenza di applicare algoritmi più che quella di comunicare

informazioni.

Nei testi in linguaggio Matematico è possibile individuare componenti diverse, spesso intrecciate tra loro: una componente verbale, una componente simbolica ed una componente figurale. Tali componenti sono poi riconducibili a uno o più sistemi semiotici; ad esempio la componente verbale è riconducibile ad un linguaggio ibrido composto da linguaggio naturale e da espressioni specifiche, mentre la componente simbolica è riconducibile a più sistemi semiotici, tra i quali il registro algebrico, quello numerico ecc.

Le caratteristiche peculiari di questo linguaggio non risiedono solo nella componente simbolica ma mettono in gioco tutte le componenti e in particolare quella verbale. I sistemi semiotici della Matematica utilizzano una grande varietà di vocaboli dotati di significati specifici, tecnici e definiti con precisione, che rispondono alla loro esigenza di rappresentare la conoscenza come prodotto, in forma compatta, senza che si renda necessario negoziare i significati. Questo processo si chiama *lessicalizzazione*.

Il processo di *nominalizzazione* invece consente di usare le diverse proprietà dei nomi rispetto ai verbi per separare le informazioni essenziali da quelle irrilevanti, come per esempio accade nel formalismo algebrico, che rappresenta un caso estremo di stile nominale, in quanto esiste sostanzialmente un predicato, l'uguaglianza, e tutti gli altri predicati vengono espressi con l'ausilio di espressioni nominali.

Non sono condivisibili le argomentazioni di chi attribuisce il ricorso ai linguaggi simbolici della matematica alla presunta ambiguità, o imprecisione, del linguaggio verbale. Questo perché si sottovaluterebbe la profonda differenza delle funzioni che svolge il linguaggio nei diversi contesti. Il linguaggio verbale è del tutto adeguato per una grande varietà di scopi ma non è adatto alla funzione di trattamento e infatti per questo nella storia si sono sviluppati i linguaggi simbolici. A tale proposito si osserva che le notazioni simboliche hanno giocato un ruolo fondamentale nello sviluppo della matematica. Questo ruolo non riguarda solo la ricerca ma anche l'impatto della matematica sulla società. Le notazioni simboliche hanno contribuito a rendere accessibili ad ampi strati dell'umanità conoscenze e tecniche matematiche che in precedenza erano riservate a ristretti circoli. Un esempio emblematico è la soluzione delle equazioni algebriche.

La relazione tra la componente verbale del testo e le espressioni simboliche è molto complessa. Ogni scienza richiede lo sviluppo di un linguaggio specifico nel quale esprimere i propri risultati. Il linguaggio verbale non è destinato a scomparire ma ad assumere prevalentemente funzioni di metalinguaggio,

incorporando sia la funzione illocutoria <sup>7</sup> e perlocutoria<sup>8</sup>. Tuttavia la situazione non è così semplice perché la componente verbale in moltissimi casi deve inevitabilmente svolgere funzioni di sostituto e di parafrasi di quella simbolica. Il linguaggio verbale può rappresentare idee e relazioni matematiche ma anche commentarle, evidenziarne l'organizzazione logica (ipotesi, tesi, dato,...) e quella testuale, esprimere le convinzioni dell'Autore sul tema trattato (rilevanza di quanto viene comunicato, scopi, adeguatezza del messaggio rispetto a questi...) e influenzare in modo corrispondente quelle del Lettore. La diversità nelle funzioni svolte dalla componente verbale fa sì che, anche in uno stesso testo, le stesse parole vengano utilizzate con significati o in base a criteri diversi. Questo succede per esempio quando si illustra un'espressione che contiene occorrenze di un connettivo (per esempio la *e*) la cui interpretazione è vero-funzionale (come avviene nella definizione di intersezione fra due insiemi, per esempio) oppure quando una voce del lessico matematico assume un diverso significato negli usi quotidiani.

Il rapporto tra linguaggio matematico e linguaggio naturale (o quotidiano, come spesso viene chiamato in letteratura) è complesso e spesso fonte di ostacoli interpretativi di diversa natura. A tale proposito è importante rilevare come questo rapporto sia delicato proprio nella pratica didattica. Un'analisi attenta mostra come un linguaggio corrente in un'aula scolastica sia un linguaggio ibrido, nel quale possiamo trovare parole del linguaggio quotidiano, ovvero termini specifici, ma anche espressioni simboliche appartenenti a specifici sistemi semiotici, caratteristici delle diverse aree della matematica.

Lungo tutto il percorso scolastico, quindi, risulta di primaria importanza porre particolare attenzione all'articolazione tra il linguaggio specifico della disciplina, anche nei suoi aspetti simbolici, e il linguaggio naturale, specie nel suo doppio ruolo di mezzo di comunicazione interno alla disciplina stessa e esterno come linguaggio usato per parlare di essa.

---

<sup>7</sup>intesa come espressione delle convinzioni e delle azioni del parlante, [Ferrari, 2004]

<sup>8</sup>intesa come espressione delle azioni del parlante che hanno come obiettivo la modifica degli atteggiamenti e delle convinzioni del ricevente, [Ferrari, 2004]

# Capitolo 6

In questo capitolo saranno descritte le caratteristiche del testo in base alle quali sono classificati i quesiti e come sia possibile utilizzare tale classificazione per l'individuazione di eventuali difficoltà di comprensione del quesito.

## 6.1 Difficoltà di comprensione: una proposta di classificazione dei quesiti

Le caratteristiche di un testo che saranno utilizzate per la classificazione del quesito sono le seguenti:

- **Contesto**
- **Tipo di testo**
- **Dizionario**
- **Coesione del testo**
- **Enciclopedia**
- **Conoscenza matematica**
- **Operatività.**

Di seguito viene descritta ciascuna caratteristica, cercando di spiegare, attraverso degli esempi, come individuarla all'interno del quesito.

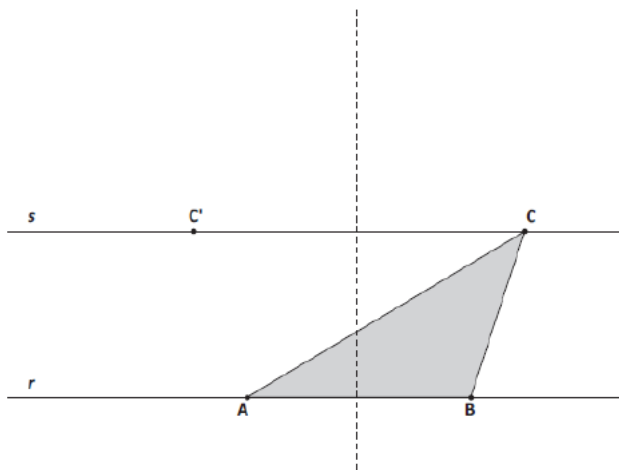
In questa analisi delle caratteristiche del testo, come già introdotto nel Quadro di Riferimento Teorico, si considera quello che indichiamo con “Testo Situazione” cioè il testo del quesito dove la domanda verrà considerata solo nella

sua funzione di rendere esplicito quale sia l'aspetto significativo del testo che la precede. Non verrà però analizzata né nella sua forma né in tutte le sue possibili relazioni con il testo precedente.

### 6.1.1 Contesto

Per **Contesto** si intende la situazione in cui il quesito viene ambientato. Si distingue in Contesto Matematico, Contesto non Matematico e Contesto Ibrido. Nel contesto matematico si trattano situazioni interne alla matematica, dove entrano in gioco solo oggetti matematici, mentre nel contesto non matematico si trattano situazioni interne ad altre discipline oppure relative al mondo reale, nelle quali i termini matematici assumono un significato specifico rispetto all'ambiente in cui il quesito viene collocato. Infine se termini e oggetti matematici sono inseriti in una narrazione descritta dal testo, il contesto si definisce ibrido.

- D3. **ABC è uno degli infiniti triangoli aventi la base AB sulla retta  $r$  e il terzo vertice in un punto qualunque della retta  $s$  parallela a  $r$  e passante per C.**



**Fra gli infiniti triangoli descritti sopra, quali hanno la stessa area di ABC?**

*Esempio 1 (INVALSI Secondaria Superiore 2012, Contesto Matematico).*

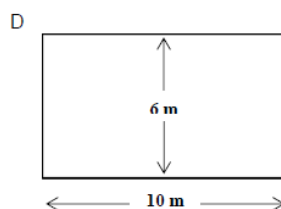
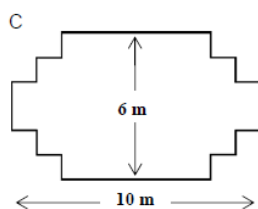
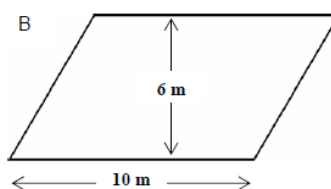
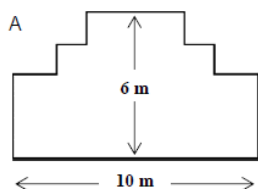
In questo esempio, poiché si descrive una situazione interna alla matematica, intervengono solo oggetti matematici e quindi il Contesto è *Matematico*

## CARPENTIERE

### Domanda 1: CARPENTIERE

M266Q01

Un carpentiere ha 32 metri di tavole di legno e vuole fare il recinto a un giardino. Per il recinto prende in considerazione i seguenti progetti.



Indica per ciascun progetto se è possibile realizzarlo con 32 metri di tavole.

*Esempio 2 (INVALSI Secondaria Superiore 2012, Contesto non Matematico).*

Il testo del quesito dell'esempio 2 si riferisce ad una situazione del mondo reale, dove non si fa riferimento alle forme come particolari ma come forme di recinti di un giardino, che vuole essere realizzato avendo una certa disponibilità di assi di legno.

Quindi il Contesto si classifica come *non Matematico*. La soluzione del quesito richiederà poi di riconoscere tali forme come figure geometriche per applicare proprietà e relazioni geometriche e il fatto che tutto questo non compaia nel testo, che dunque si riferisce ad un contesto non Matematico, ci fa capire come questa classificazione diventi significativa per interpretare eventuali difficoltà, difficoltà che in questo caso possono proprio emergere dalla necessità di interpretare "matematicamente" una situazione descritta in un contesto non matematico.

*Esempio 3 (INVALSI Secondaria Superiore 2011, Contesto Ibrido).*

**D14.** L'insegnante chiede: "Se  $n$  è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri  $2n+1$ ,  $2n+3$  e  $2n+5$ ?"

Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri".

Luisa risponde: "Si ottiene sempre un numero dispari".

Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3".

Chi ha ragione?

- A. Tutti e tre
- B. Solo Mario
- C. Solo Luisa
- D. Solo Giovanni

Nell'esempio 3 gli oggetti matematici intervengono come tali all'interno della narrazione di uno scambio di opinioni in una classe e quindi il Contesto si definisce *Ibrido*.

### 6.1.2 Tipo di testo

Nel testo di un quesito possono comparire diversi tipi di registri, fra cui il registro verbale, simbolico, numerico e grafico. Se il testo non è solo verbale significa che presenterà una o più parti non verbali, che possono essere simboliche o figurali. Ciascuna delle parti del testo che non sono né verbali né simboliche ma posseggono una autonomia di significato all'interno del testo, le indicheremo con il termine di *sottotesti figurali*. E' possibile allora classificate il quesito rispetto al **tipo di testo** in *verbale*, se compare solo il registro verbale e gli eventuali numeri sono espressi in lettere, *verbale generalizzato* se nel testo compaiono il registro verbale e numeri espressi in simboli, *verbale/figurale* se oltre al registro verbale compare almeno una componente figurale, *verbale/simbolico* se nel testo compaiono il registro verbale e il registro simbolico non numerico, *verbale/simbolico/figurale* quando compaiono il registro verbale, il registro simbolico non numerico e almeno una componente figurale. Nel caso in cui nel testo compaiano numeri in simboli, in modo equivalente si classificherà in *verbale generalizzato/figurale*, *verbale generalizzato/simbolico*, *verbale generalizzato/simbolico/figurale*.

## Testo verbale generalizzato

---

### VERIFICA DI SCIENZE

#### Domanda 1: VERIFICA DI SCIENZE

M468Q01

Nella scuola di Martina, l'insegnante di scienze fa delle verifiche nelle quali il punteggio massimo è 100. Martina ha un punteggio medio di 60 nelle sue prime quattro verifiche di scienze. Alla quinta verifica, prende 80.

Qual è la media dei punteggi in scienze di Martina dopo tutte e cinque le verifiche?

Media: .....

*Esempio 4 (INVALSI Secondaria Superiore 2012).*

Nell'esempio 4 compare il registro verbale e la scrittura simbolica dei numeri, mentre non compaiono né simboli non numerici né sottotesti figurali e quindi il quesito si classifica come testo verbale generalizzato.

## Testo verbale/figurale

D1. Osserva la seguente fotografia:

M1310D0100



Gli automobilisti che precedono l'autoambulanza vedono riflessa nello specchietto retrovisore la scritta:

**AMBULANZA**

Se la parola "AMBULANZA" fosse scritta normalmente sulle autoambulanze, in quale dei seguenti modi gli automobilisti la vedrebbero riflessa nello specchietto retrovisore?

*Esempio 5 (INVALSI, Secondaria Superiore 2011).*

Nell'esempio 5, una parte del testo è redatta nel registro verbale, inoltre compaiono due immagini che considereremo come due sottotesti figurali ma non compaiono simboli e quindi il testo si classifica come verbale/figurale.

## Testo verbale generalizzato/simbolico

**D4.** Considera l'affermazione: "Per ogni numero naturale  $n$ ,  $2^n + 1$  è un numero primo".

**Mostra con un esempio che l'affermazione è falsa.**

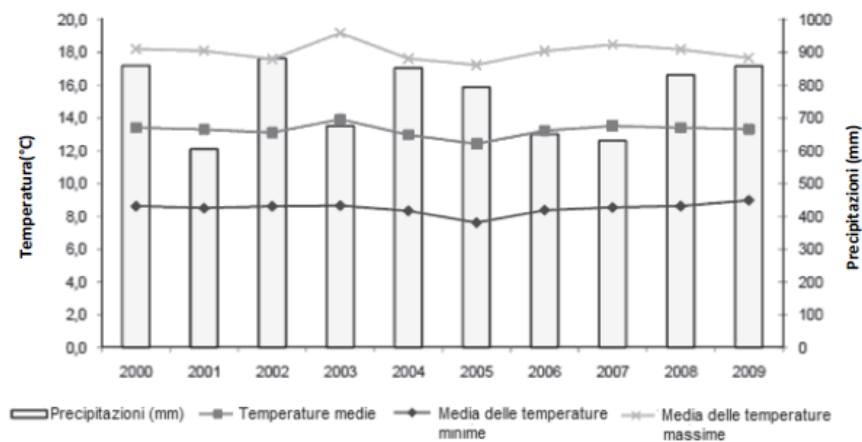
*Esempio 6 (INVALSI Secondaria Superiore 2012).*

In questo esempio nel testo compaiono simboli numerici e non, come  $n$ , ed espressioni simboliche,  $2^n + 1$ , ma non sottotesti figurali e quindi il quesito si classifica come verbale generalizzato/simbolico.

**Testo verbale generalizzato/simbolico/figurale**

**D12.** Osserva il seguente grafico che rappresenta l'andamento delle temperature (scala a sinistra) e delle precipitazioni piovose (scala a destra) in Italia negli ultimi anni.

**Figura 1.** Media annua della temperatura media, massima e minima giornaliera e precipitazioni totali annue in Italia. Anni 2000-2009 (temperatura in gradi Celsius e precipitazioni in millimetri)



99

*Esempio 7 (INVALSI Secondaria Superiore 2011).*

Nel quesito dell'esempio 7 oltre ad un aprte verbale, compare un sottotesto figurale. In questo sottotesto figurale sono riportati: il diagramma delle precipitazioni, il grafico delle temperature medie, il grafico delle medie delle temperature minime e il grafico delle medie delle temperature massime. Inoltre vi sono anche espressioni simboliche, sia numeriche che non numeriche e quindi il quesito si classifica come testo verbale generalizzato/simbolico/figurale.

### 6.1.3 Dizionario

non chiaro. stiamo parlando di un testo, direi, per quanto riguarda l'interpretazione del testo si farà riferimento

Per quanto riguarda l'interpretazione del testo, si farà riferimento al significato dei singoli termini (appartenenti ai diversi registri o in generale a diversi sistemi semiotici nei quali il testo è composto). In questo senso ci riferiremo al Dizionario. Si distingue, come nel caso del *Contesto*, in Dizionario Matematico, Dizionario non Matematico e Dizionario Ibrido. Il *Dizionario Matematico* si riferisce a termini che appartengono solo al linguaggio matematico, con un significato ben definito e unico. Con *Dizionario Non Matematico* si indicano termini che non appartengono al linguaggio matematico ma ad altri ambiti disciplinari o a situazioni del mondo reale. Il *Dizionario Ibrido* si riferisce a termini del linguaggio naturale che appartengono anche al linguaggio matematico oppure a termini del linguaggio naturale che si possono riferire a situazioni o ad oggetti matematici. Tali termini si possono suddividere in:

1. termini che appartengono sia al linguaggio naturale sia al linguaggio matematico ma con significati diversi (limite, altezza, spigolo, stima .....)
2. termini che appartengono al linguaggio naturale ma che possono essere utilizzati per esprimere relazioni tra oggetti matematici (si avvicina a. . . . , è all'incirca. . . . , ).

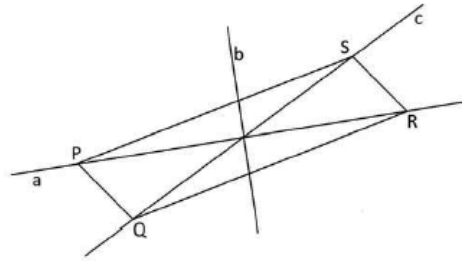
Per quanto riguarda il *Dizionario Non Matematico* si possono avere termini necessari per la costruzione del modello mentale ed eventualmente per la risoluzione del quesito.

Nel testo del quesito dell'esempio 1 interviene il Dizionario Matematico per i termini *triangoli*, *base*, *retta*, *vertice*, *retta*, *punto*, *parallela*, *area*, il Dizionario Ibrido per i termini *infiniti*, *passante* e *qualunque* dove, il primo termine appartiene sia al linguaggio matematico sia al linguaggio naturale (gruppo 1) mentre il secondo e il terzo termine appartengono al linguaggio naturale e in questo testo vengono utilizzati in ambito geometrico, il primo per esprimere una relazione tra rette e punti, mentre il secondo per descrivere la posizione del terzo vertice sulla retta  $s$ .

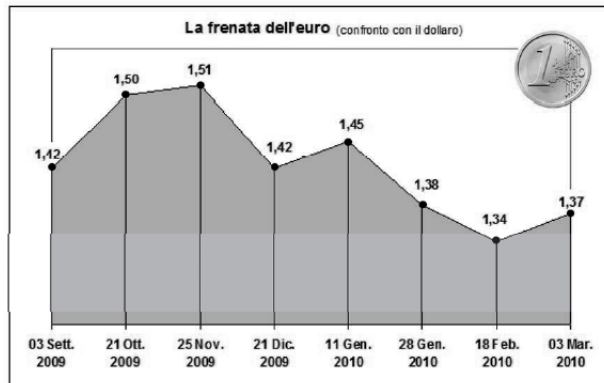
*Esempio 8 (INVALSI Secondaria Superiore 2011).*

Nel testo dell'esempio 8 interviene il Dizionario Matematico in relazione ai termini *assi di simmetria*, *parallelogramma* e *piano della figura*.

D17. Quale fra le rette  $a$ ,  $b$  e  $c$ , nel piano della figura, è un asse di simmetria del parallelogramma PQRS?



D20. Il grafico rappresenta l'andamento del cambio euro-dollaro nel periodo 3 settembre 2009 - 3 marzo 2010.



a. In base al grafico in quale periodo mi sarebbe convenuto cambiare i miei euro in dollari per andare negli Stati Uniti?

*Esempio 9 (INVALSI Secondaria Superiore 2011).*

Nel testo dell'esempio 10, riportato nella pagina seguente, appartengono al Dizionario Matematico i termini *diagramma*, *funzione* e *grafico* mentre appartengono al Dizionario Non Matematico i termini *consumi elettrici*, *terawattora*, *Mercato Libero*, *Autoproduzione*, *Mercato vincolato* e *andamento*. La conoscenza dei termini del Dizionario non Matematico è necessaria per la costruzione del modello mentale della situazione problematica ma non lo è per la sua risoluzione perché sarebbe stato sufficiente non specificare i termini della provenienza ma solo che vi sono provenienze differenti.

Nell'esempio 9, invece il significato di *cambio* risulta necessario sia per costruire il modello mentale sia per risolvere il problema: infatti oltre al significato del termine *cambio*, per la risoluzione del quesito è necessario conoscere e saper applicare al procedura finanziaria del cambio.

D6. Nel diagramma di figura 1 sono riportati i consumi elettrici (in TWh - terawattora) in Italia dal 2000 al 2005 in funzione della provenienza dell'energia dall'Autoproduzione, dal Mercato libero o dal Mercato vincolato.

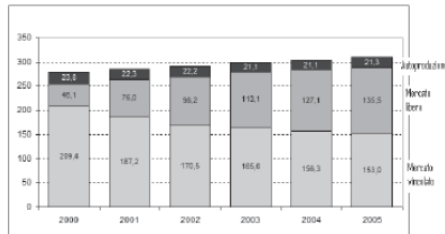


Figura 1

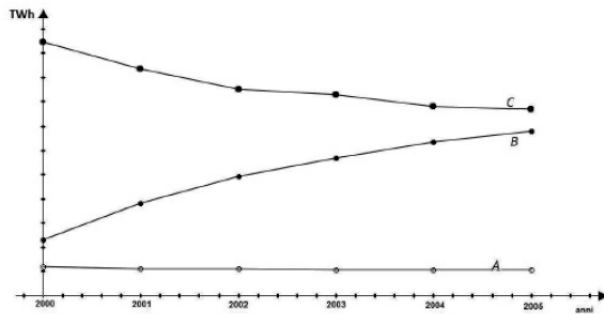


Figura 2

Confronta le figure 1 e 2 e completa le seguenti frasi indicando la provenienza dell'energia (Autoproduzione, Mercato libero, Mercato vincolato).

1.	Il grafico A corrisponde all'andamento dei consumi di energia proveniente da	.....
2.	Il grafico B corrisponde all'andamento dei consumi di energia proveniente da	.....
3.	Il grafico C corrisponde all'andamento dei consumi di energia proveniente da	.....

*Esempio 10 (INVALSI Secondaria Superiore 2011 - Dizionario non Matematico per la costruzione del modello mentale).*

### 6.1.4 Coesione del testo

Come introdotto nel Quadro di Riferimento Teorico, per **coesione di un testo** si intende l'insieme dei legami linguistici che tengono unito un testo. Vi sono diversi tipi di legami coesivi, come descritto in [?], ma la nostra classificazione, per il tipo di testi da analizzare e in relazione alle possibili difficoltà di comprensione, si concentra sulle *anafore testuali*. Un'*anafora testuale* si verifica quando un punto del testo rinvia a qualcosa che è stato precedentemente menzionato. Vi sono diversi tipi di anafora testuale ma per le caratteristiche sintattiche del testo dei quesiti, non trattandosi di testi narrativi, ci occuperemo di anafore nominali e di anafora ellittiche.

L'*anafora nominale* si ha quando si verifica la ripetizione dello stesso nome oppure quando la ripresa avviene per mezzo di un sinonimo, di un iperonimo<sup>1</sup> o anche di una espressione nominale non legata semanticamente all'antecedente, ma che comunque richiama per inferenza lo stesso referente.

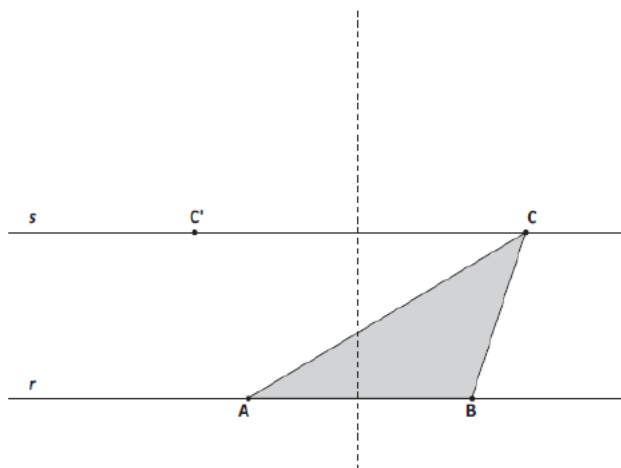
Nel testo dell'esempio 1, del quale riportiamo di seguito il testo, sia l'espressione "la base  $AB$ " sia l'espressione "il terzo vertice" costituiscono due anafora nominali, riferendosi al triangolo  $ABC$  indicato proprio all'inizio del testo. Si ha poi un'anafora nominale per l'espressione  $r$ , in "della retta  $s$  parallela a  $r$ ", con ripetizione dello stesso termine  $r$ , e un'altra anafora nominale nell'espressione "passante per  $C$ ", dove  $C$  è il vertice del triangolo iniziale  $ABC$ . In questo modo si rileva un errore del testo che utilizza lo stesso simbolo  $C$  per individuare il terzo vertice del triangolo di riferimento rappresentato nella figura sia per il terzo vertice del triangolo modificato. (Anzi in questo modo il triangolo  $ABC$  non sarebbe neppure costruibile).

Un altro caso di anafora nominale consiste nella "capsula anaforica": un sintagma nominale rinvia al contenuto di una frase o di una porzione più ampia del testo.

---

<sup>1</sup>In linguistica, termine indicante un'unità lessicale di significato più generico ed esteso rispetto ad una o più altre unità lessicali che sono in essa incluse (per es., fiore è iperonimo, ossia «superordinato», rispetto a rosa, viola, garofano) da *Vocabolario Treccani.it*

- D3. ABC è uno degli infiniti triangoli aventi la base AB sulla retta  $r$  e il terzo vertice in un punto qualunque della retta  $s$  parallela a  $r$  e passante per C.



Fra gli infiniti triangoli descritti sopra, quali hanno la stessa area di ABC?

*Esempio 11 (INVALSI Secondaria Superiore 2012).*

In questo caso l'espressione "il prezzo già scontato" si riferisce "al prezzo originario diminuito dello sconto del 30%". L'espressione "il prezzo già scontato" rinvia ad una porzione di testo più ampia, risultando quindi un esempio di capsula anaforica.

Per quanto riguarda l'anafora ellittica, l'*ellissi*, in generale, consiste nell'omissione di componenti strutturali ai fini di un guadagno in termini di lunghezza testuale. L'anafora ellittica costituisce un "buco" nel testo da riempire con il rinvio a qualcosa che è stato nominato in precedenza.

Nell'esempio precedente, esempio 12, nell'espressione "il prezzo già scontato viene abbassato del 10%" non viene esplicitato su quale somma dovrà essere calcolata la percentuale del 10%. Si ha quindi un'anafora ellittica, dove il riferimento potrebbe essere al prezzo già scontato del 30% oppure il prezzo originario.

*Esempio 12 (INVALSI Secondaria Superiore 2012).*

Nel periodo "Nel secondo anno Luigi perde il 5% , mentre Paolo guadagna il 10%." sono state omesse delle parti di testo che esprimono a quali somme le percentuali si riferiscono. In particolare sarebbe "Luigi perde il 5% *delle somme ottenute dopo il primo anno* mentre Paolo guadagna il 10% *delle somme ottenute dopo il primo anno*" e il riferimento è all'investimento del-

- D25.** In un negozio un abito è messo in vendita con uno sconto del 30% sul prezzo originario. Durante la stagione dei saldi il prezzo già scontato viene ancora abbassato del 10%. Qual è la percentuale complessiva di sconto sul prezzo originario dell'abito?
- A.  20%
  - B.  33%
  - C.  37%
  - D.  40%

- D20.** Luigi e Paolo investono la stessa somma di denaro. Dopo il primo anno, la somma investita da Luigi è aumentata del 10% e quella investita da Paolo è diminuita del 5%. Luigi e Paolo decidono di reinvestire per un altro anno ancora le somme ottenute dopo il primo anno. Nel secondo anno Luigi perde il 5%, mentre Paolo guadagna il 10%. Se Luigi e Paolo hanno investito inizialmente una somma di 1000 euro ciascuno, quanto avrà ciascuno dei due alla fine del secondo anno? Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e infine riporta i risultati.

l'anno precedente, introdotto nel periodo precedente. Quindi si tratta di anafore ellittiche.

### 6.1.5 Enciclopedia

Con il termine **Enciclopedia** ci riferiamo ad una *Conoscenza Disciplinare* diversa da quella matematica e alla *Conoscenza delle Cose del Mondo*, introdotto da Eco in *Semiotica e Filosofia del Linguaggio* e ripreso poi da Ferrari [Ferrari, 2004]. In contesti non matematici questa conoscenza diventa indispensabile per la costruzione di un modello mentale ed eventualmente per risolvere il quesito.

Nell'esempio 9, per interpretare il grafico dell'andamento del cambio euro-dollaro è necessario avere la conoscenza del funzionamento del meccanismo del cambio e del suo significato in termini finanziari. Quindi l'Enciclopedia è necessaria per costruire il modello mentale e per risolvere. Il quesito allora si classifica come Enciclopedia - Conoscenza delle Cose del Mondo - per Risolvere.

---

## RIFIUTI

### Domanda 1: RIFIUTI

M505Q01 - 0 1 9

Nell'ambito di una ricerca sull'ambiente, gli studenti hanno raccolto informazioni sui tempi di decomposizione di diversi tipi di rifiuti che la gente butta via:

Tipo di rifiuto	Tempo di decomposizione
Buccia di banana	1-3 anni
Buccia d'arancia	1-3 anni
Scatole di cartone	0,5 anni
Gomma da masticare	20-25 anni
Giornali	Pochi giorni
Bicchieri di plastica	Oltre 100 anni

Uno studente prevede di presentare i risultati con un diagramma a colonne.

Scrivi **un** motivo per cui un diagramma a colonne non è adatto per rappresentare questi dati.

*Esempio 13 (PISA 2003).*

In questo esempio, 13, nonostante l'Enciclopedia sia necessaria per la costruzione del modello poiché viene trattato il problema della decomposizione dei rifiuti solidi, di fatto, indipendentemente dalla natura del problema e quindi delle informazioni della prima colonna, per la risoluzione interessa

solo la variabilità tra i valori della seconda colonna. Quindi in questo quesito il ricorso all'Enciclopedia è necessario per costruire il modello mentale ma non per risolvere. e la classificazione risulta "Enciclopedia - Conoscenza delle Cose del Mondo - per Costruire il modello mentale.

M1310D0600

- D6. Un atomo di idrogeno contiene un protone la cui massa  $m_p$  è all'incirca  $2 \cdot 10^{-27}$  kg, e un elettrone la cui massa  $m_e$  è all'incirca  $9 \cdot 10^{-31}$  kg. Quale tra i seguenti valori approssima meglio la massa totale dell'atomo di idrogeno (cioè  $m_p+m_e$ )?**
- A.   $2 \cdot 10^{-27}$  kg
- B.   $11 \cdot 10^{-31}$  kg
- C.   $11 \cdot 10^{-58}$  kg
- D.   $18 \cdot 10^{-58}$  kg

*Esempio 14 (PISA 2003).*

In questo quesito si ricorre ad una conoscenza enciclopedica disciplinare che consiste nella conoscenza della struttura dell'atomo e delle proprietà delle particelle di cui è costituito. Tale conoscenza risulta necessaria per la costruzione del modello mentale ma non per la sua risoluzione. A livello risolutivo l'unica conoscenza enciclopedica necessaria la proprietà additiva delle masse. Quindi il quesito si classifica come "Enciclopedia - Conoscenza Disciplinare - per costruire il modello mentale" per la parte della struttura dell'atomo, mentre "Enciclopedia - Conoscenza Disciplinare - per risolvere" per la proprietà additiva delle masse.

### 6.1.6 Conoscenza Matematica

Come introdotto nel Quadro di Riferimento Teorico, per la Conoscenza Matematica sarà utilizzata la classificazione proposta in [Hiebert, Lefevre, 1986] di Conoscenza Concettuale e Conoscenza Procedurale.

Il quesito sarà classificato rispetto ai due tipi di conoscenza, analizzando le conoscenze relative agli ambiti matematici a cui il testo fa riferimento, analizzando i termini che intervengono nel testo e la domanda del quesito. Inoltre si farà riferimento agli strumenti e alle conoscenze necessarie per la risoluzione del quesito stesso, andando a verificare la misura in cui tali conoscenze siano necessarie per la comprensione del testo.

## Conoscenza Concettuale

La procedura per la classificazione di un quesito rispetto alla Conoscenza Concettuale inizia con l'individuazione dei nodi di conoscenza necessari alla comprensione. Ma la classificazione riguarderà il tipo di relazione tra tali nodi e cioè se il quesito chiede di mettere in relazione fatti o proprietà già note al Lettore oppure no e quanto queste relazioni siano relative ad uno specifico ambito matematico o a più ambiti.

Le conoscenze alle quali il quesito fa riferimento sono rappresentate secondo il modello che Hiebert propone per la Conoscenza Concettuale. In tale modello, la Conoscenza Concettuale è rappresentata come un grafo, dove i nodi costituiscono i fatti, le proposizioni e i concetti, mentre gli archi rappresentano le relazioni che intercorrono tra i nodi. La classificazione della Conoscenza Concettuale avviene non tanto rispetto ai nodi di conoscenza che intervengono nel testo ma al tipo di relazione tra tali nodi necessaria per la comprensione del quesito. In questa classificazione si distinguono relazioni tra nodi conosciuti oppure relazioni tra uno o più nodi conosciuti e uno o più nodi non conosciuti. Si tratta di definire cosa si intende per nodo conosciuto, che possiamo anche indicare come nodo di conoscenza attivato, e nodi non conosciuti o non attivati. Si possono distinguere tre categorie:

1. si considerano i nodi conosciuti e non conosciuti in base alle Indicazioni Nazionali o alla Linee Guida riferite ad un ben determinato livello scolastico, comunque individuate all'esterno della classe nella quale l'insegnante lavora;
2. si possono individuare i nodi conosciuti e non rispetto alla classe in cui viene svolta l'attività;
3. l'individuazione dei nodi conosciuti e non conosciuti può essere realizzata sul singolo studente.

Classificare il testo di un quesito rispetto alla Conoscenza Concettuale significa, una volta individuati i nodi di conoscenza necessari alla comprensione del quesito, andare ad analizzare il tipo di relazione tra tali nodi. Una prima classificazione delle possibili relazioni tra i nodi di conoscenza è la seguente:

- A) Relazione tra Nodi Conosciuti: vengono collegati nodi di conoscenza che risultano già attivi rispetto ad una delle tre categorie descritte precedentemente. Questo significa che il testo del quesito chiede allo studente di utilizzare nodi di conoscenza già attivati;

- B) Relazione tra Nodi non Conosciuti: vengono collegati uno o più nodi conosciuti ad un nodo o più nodi non conosciuti cioè si aggiunge al grafo un'informazione, una proprietà ulteriore non evidente rispetto all'ambito a cui si riferisce il testo.

Un secondo tipo di classificazione delle possibili relazioni tra nodi di conoscenza è:

- i) Relazione Riflessiva: si mettono in relazione fatti che non sono per loro natura interconnessi e quindi il legame va oltre il contesto dei singoli fatti matematici. Rientrano in questo livello anche quelle relazioni che permettono di evidenziare fatti o proprietà di validità generale all'interno del singolo contesto. Un esempio è il caso dell'algoritmo della somma tra numeri decimali e la loro relazione con l'addizione di frazioni decimali. Quando viene compresa la relazione che c'è tra l'incolonnamento dei numeri decimali per lo svolgimento dell'operazione di addizione e l'addizione di frazioni decimali si realizza un collegamento tra fatti che appartengono a contesti differenti, non evidenti in precedenza.
- ii) Relazione Primaria: una relazione si dice primaria se non riflessiva. In questo senso, una relazione primaria lega fatti appartenenti al medesimo ambito matematico e tale relazione non rappresenta una proprietà generalizzabile a tale ambito.

Negli esempi che seguiranno l'espressione *nodo di conoscenza attivato* farà riferimento al caso in cui l'individuazione dei nodi di conoscenza attivati o non attivati venga realizzata in base alle Indicazioni Nazionali e alle Linee Guida per la Secondaria di Secondo Grado.

*Esempio 15 (INVALSI Secondaria Superiore 2012).*

Nell'esempio 15 i fatti che vengono messi in relazione riguardano il calcolo letterale (cosa significa  $a^4$ , cosa significa dividere per 2) sono nodi già conosciuti e quindi il quesito si classifica come Relazione tra nodi conosciuti. Inoltre i nodi di conoscenza attivati appartengono ad un unico ambito matematico che è il calcolo letterale, quindi la relazione risulta di *Livello Primario*.

**D18.** Armando, Bruno, Caterina e Daniela hanno opinioni diverse sul numero che si ottiene dividendo  $a^4$  per 2.

**Armando dice:** "si ottiene  $\left(\frac{a}{2}\right)^4$ "

**Bruno sostiene:** "si ottiene  $a^2$ "

**Caterina dice:** "si ottiene  $\frac{1}{2} a^4$ "

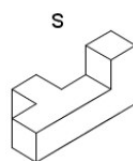
**Daniela afferma:** "si ottiene  $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ "

**Chi ha ragione?**

*Esempio 16 (INVALSI Secondaria Superiore 2012).*

Nell'esempio 16 i nodi di conoscenza a cui si fa riferimento riguardano le nozioni di base di geometria solida, relativa alle trasformazioni nello spazio e poiché tali nodi rientrano nelle Indicazioni Nazionali e Linee Guida per il Biennio, il quesito si classifica come Relazione tra Nodi Conosciuti. Tali relazioni risultano di Livello Primario perché rimangono all'interno della geometria solida.

D10. Se il solido S viene fatto ruotare,



quale tra le seguenti configurazioni non può assumere?

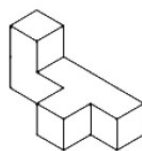


Figura 1

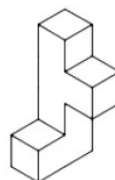


Figura 2



Figura 3

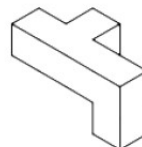


Figura 4

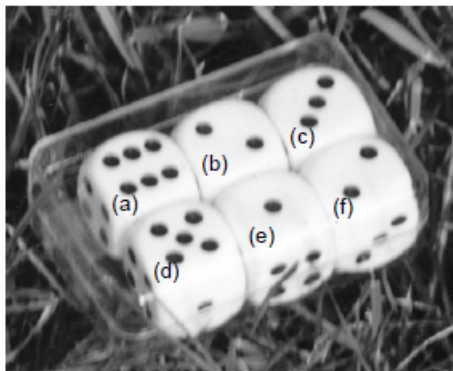
- A.  Figura 1  
 B.  Figura 2  
 C.  Figura 3  
 D.  Figura 4

### Domanda 1: DADI

M145Q01

In questa fotografia vi sono sei dadi da gioco, denominati con le lettere da (a) a (f).  
Per tutti i dadi vale la seguente regola:

il numero totale di punti su due facce opposte è sempre sette.



Scrivi, in ogni casella, il numero di punti della faccia **opposta** di ciascun dado mostrato in fotografia.

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

*Esempio 17 (INVALSI Secondaria Superiore 2012).*

Nell'esempio 17 si mettono in relazione fatti conosciuti riguardanti i dadi (numeri naturali, proprietà di un dado cubico, calcolo aritmetico, significato e utilizzo di una tabella) e quindi il quesito si classifica rispetto alla Conoscenza Concettuale come un quesito che coinvolge per la costruzione del modello una conoscenza concettuale rappresentabile come un sistema di relazioni tra nodi conosciuti. Per quanto riguarda il tipo di relazione, il quesito si classifica di *Livello Riflessivo* perché mette in relazione due tipi di registri semiotici diversi, il registro iconico e il registro tabella.

D29. L'espressione  $\frac{9}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{7}{10^4} + \frac{2}{10^5}$  si può rappresentare mediante il numero decimale

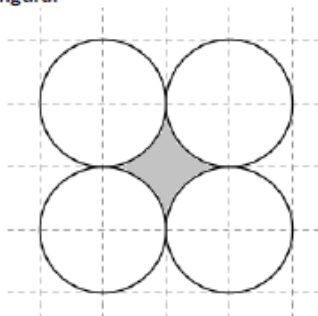
- A. 98,72
- B. 9,8072
- C. 0,9872
- D. 0,98072

*Esempio 18 (INVALSI Secondaria Superiore 2012).*

Nell'esempio 18 la Conoscenza Concettuale, secondo il modello di Hiebert, necessaria per la comprensione del quesito richiede di mettere in relazione fatti relativi ai numeri decimali e, in particolare, il significato posizionale delle cifre di un numero decimale, con le operazioni fra frazioni decimali. Questo quesito fa riferimento all'esempio già citato in [Hiebert, Lefevre, 1986] e poichè mette in relazione nodi concettuali appartenenti ad ambiti diversi ma già attivati rispetto alle Indicazioni Nazionali e alle Linee Guida, possiamo classificare il quesito come Relazione tra nodi conosciuti e di Livello Riflessivo.

Per quanto riguarda gli esempi di quesiti che rispetto alla Conoscenza Concettuale si classificano come Relazione tra nodi non conosciuti, nell'esempio 2, i nodi di conoscenza attivati risultano conosciuti in relazione al significato di perimetro e del suo calcolo, mentre il fatto che figure di forma differente possano avere lo stesso perimetro costituisce un nodo che possiamo considerare come *non conosciuto* in quanto non esplicitamente menzionato nelle Linee Guida e nelle Indicazioni Nazionali. D'altra parte la relazione che si istaura non richiede di uscire dall'ambito geometrico, nè e di evidenziare risultati validi per tutta una classe di figure. Questo significa che la proprietà osservata non risulterà applicabile se non a quelle specifiche figure. Da queste considerazioni segue che questo quesito si può classificare di *Livello Primario*.

- D13. Ricorda che la lunghezza di una circonferenza si calcola moltiplicando il suo diametro per  $\pi$  e che l'area di un cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato del suo raggio per  $\pi$ .  
Quattro circonferenze, ciascuna con diametro 10 cm, sono tangenti a due a due come mostrato nella seguente figura.



- a. Il perimetro della regione evidenziata in grigio misura in centimetri:
- A.   $20\pi$
- B.   $10\pi$
- C.   $5\pi$
- D.   $4\pi$
- b. La superficie della regione evidenziata in grigio misura .....  $\text{cm}^2$

*Esempio 19 (INVALSI Secondaria Superiore 2013).*

Nell'esempio 19 il grafo della Conoscenza Concettuale necessario per la comprensione del quesito ha per nodi il significato di circonferenza, di lunghezza di una circonferenza, di area di un cerchio, di diametro, del significato di  $\pi$ , di tangente, di raggio e di quadrato del raggio e gli archi rappresentano le relazioni tra tali significati. Questi fatti di conoscenza risultano già attivati per il livello scolastico considerato mentre costituiscono fatti non conosciuti le proprietà della figura, della quale viene richiesto di misurare il perimetro e l'area. Poiché si rimane nell'ambito geometrico, il quesito si classifica come Relazione tra nodi non conosciuti e di livello primario.

Nell'esempio 1, la Conoscenza Concettuale necessaria alla comprensione del quesito è costituita dai fatti riguardanti la definizione di triangolo, di base e altezza relativa, il concetto di area e la sua procedura di calcolo e le relative relazioni. I triangoli  $ABC'$  costruiti con il terzo vertice sulla retta  $s$  avranno tutti la stessa area e questo non è un fatto evidente rispetto alla conoscenze di partenza.

Quindi si tratta di un quesito del tipo Relazione tra nodi non conosciuti. Poiché il tipo di relazione che si realizza tra i fatti permette di ottenere una

proprietà sulle aree dei triangoli che non esce dal contesto geometrico, ma che risulta generalizzabile a tutti i triangoli generati, si classifica di Livello Riflessivo.

**D4. Considera l'affermazione: “Per ogni numero naturale  $n$ ,  $2^n + 1$  è un numero primo”.**

**Mostra con un esempio che l'affermazione è falsa.**

*Esempio 20 (INVALSI Secondaria Superiore 2012).*

Anche l'esempio 20 si classifica come Relazione tra nodi non conosciuti e di livello riflessivo. Infatti in questo testo i nodi di conoscenza necessari alla comprensione del quesito risultano il significato di numero naturale, di numero primo, le operazioni con le potenze, il significato del quantificatore “per ogni”, che costituiscono nodi già attivati rispetto alle Indicazioni Nazionali e alle Linee Guida mentre il fatto di mettere in relazione i numeri primi con una loro possibile scrittura (che poi risulterà falsa) costituisce un'informazione nuova nel contesto dei numeri primi. E' per questo motivo che il quesito si classifica come Relazione tra nodi non conosciuti.

Poiché nel testo si mettono in relazione la Logica e la teoria dei numeri primi, cercando in questo modo di studiare proprietà legate all'insieme di tali numeri, questo legame tra contesti diversi giustifica la classificazione del testo del quesito di *livello riflessivo*.

## Conoscenza Procedurale

Hiebert distingue la Conoscenza Procedurale in *Linguaggio Matematico e Sintassi e Algoritmi*. Sostanzialmente si fa riferimento al tipo di espressioni del linguaggio matematico che intervengono nel testo ed ad eventuali loro manipolazioni. Per quanto riguarda poi gli *Algoritmi*, questi sono ulteriormente classificati in *Algoritmi che operano manipolazioni simboliche* e *Algoritmi che operano su oggetti non simbolici*, come oggetti concreti, immagini mentali o diagrammi.

Facendo riferimento alla definizione di *trattamento* che propone Duval [Duval, 1995] per un sistema semiotico, introdotta nel precedente capitolo relativo al Quadro di Riferimento Teorico, proponiamo di modificare la classificazione degli *Algoritmi* nel seguente modo: *trattamenti numerici*, se la trasformazione di

rappresentazione avviene all'interno del registro numerico, *trattamenti simbolici*, se il trattamento riguarda un registro simbolico come per esempio il registro del calcolo letterale o il registro algebrico, ed infine *trattamenti grafici* se la trasformazione di rappresentazione avviene all'interno del registro grafico.

Nel testo dell'esempio 15 compaiono espressioni letterali e quindi il quesito si classifica come *Linguaggio Matematico e Sintassi*. Per quanto riguarda gli *Algoritmi*, il testo riporta risultati relativi a manipolazioni di espressioni letterali e per la sua comprensione risulta necessario essere in grado di mettere in relazione scritte simboliche differenti. Quindi si classifica come *Algoritmi; Trattamento numerico/simbolico*.

Nell'esempio 10 la conoscenza di tipo procedurale consiste in un trattamento all'interno del registro cartesiano, dalla rappresentazione mediante diagrammi alla rappresentazione mediante grafici. Da questo segue la classificazione del quesito come *Algoritmi; Trattamento grafico*. Anche il quesito dell'esempio 1 si classifica come *Algoritmi; Trattamento grafico* perché si ha un trattamento nel registro delle figure geometriche, che consiste nella trasformazione del triangolo di partenza  $ABC$  nei triangoli  $ABC'$ , con lo spostamento del vertice  $C$  in  $C'$  lungo la retta  $s$ .

### 6.1.7 Operatività

La caratteristica di Operatività di un testo riguarda la possibilità, per la comprensione del testo, di costruire un modello mentale consistente con quello atteso dall'Autore, anche quando le conoscenze necessarie alla comprensione non sono tutte già attivate prima della lettura del testo stesso. Questo significa che la comprensione del testo può essere raggiunta attraverso un approccio di tipo operativo che il testo stesso suggerisce.

In un testo operativo, la struttura del testo e i suoi sottotesti verbali e figurati permettono un'interpretazione di tipo operativo, che potremmo distinguere in "tipo diretto" se il testo indirizza a svolgere procedure operazionali e "tipo indiretto" se le procedure a cui il testo fa riferimento non sono operazionali (per esempio, potrebbe richiedere la rappresentazione di diverse figure geometriche). In particolare, la costruzione del modello mentale del testo si realizza attraverso la costruzione di sottomodelli, ciascuno con una propria rappresentazione, la quale aiuta e favorisce l'attivazione delle conoscenze necessarie alla comprensione. Quindi è la costruzione dei sottomodelli e l'individuazione delle loro relazioni reciproche che permette la costruzione di un modello mentale unico.

Questa caratteristica del testo si definisce a partire dalla fase di compren-

sione di un problema di Polya in [Polya, 1945] e, in modo più specifico, dai contributi di Schoenfeld in [Schoenfeld, 1985], dove sono descritte le fasi del Problem-Solving. La fase corrispondente alla comprensione del testo in Schoenfeld prende il nome di *Analisi* e la sua descrizione è la seguente:

**Fase di ANALISI:**

1. Disegna un diagramma se è possibile;
2. Esamina casi speciali:
  - (a) Scegli alcuni valori speciali per fare qualche esempio del problema (get a *feel* for it);
  - (b) Prova a settare ogni parametro intero a  $1, 2, 3, \dots$ , per osservare se il modello è induttivo;
3. Prova a semplificare il problema sia attraverso proprietà di simmetria sia attraverso condizioni del tipo senza perdere di generalità (includendo anche la riduzione);
4. Riformula il problema nel modo più conveniente: scegli la prospettiva che userai e riscrivi il problema in una forma matematica più adatta alla sua manipolazione.

La nostra caratterizzazione di *Operatività* di un testo consiste nella possibilità di applicare al testo i punti 2. e 3. della descrizione precedente, modificati nel seguente modo:

- I. Esamina casi speciali, scegliendo alcuni valori o situazioni particolari per fare qualche esempio del problema
  - (I.i) Se sono presenti uno o più parametri interi, prova a dare ad ogni parametro i valori  $1; 2; 3; \dots$ , per osservare se il modello è induttivo;
- II. Prova a semplificare il problema sia attraverso proprietà di simmetria sia attraverso il rilassamento di vincoli.

**D14. L'insegnante chiede:** "Se  $n$  è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri  $2n+1$ ,  $2n+3$  e  $2n+5$  ?"  
**Mario afferma:** "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri".  
**Luisa risponde:** "Si ottiene sempre un numero dispari".  
**Giovanni dice:** "Si ottiene sempre un multiplo di 3".  
**Chi ha ragione?**

*Esempio 21 ( D14 INVALSI Secondaria Superiore 2011).*

Il quesito di questo esempio si classifica come *Operativo*, di tipo diretto, perché, per la comprensione del testo, è possibile procedere provando a dare valori interi successivi a  $n$ . In questo modo si possono osservare i numeri ottenuti, provando a riconoscere delle proprietà comuni a tali risultati. Oppure è possibile prima semplificare il problema limitandoci al caso della somma dei primi due numeri e poi andare ad analizzare cosa significa e cosa provoca, in termini numerici, aggiungere anche il terzo addendo. In questo modo diventa evidente come la comprensione di un problema operativo possa essere aiutato da un approccio procedurale, non immediatamente finalizzato alla risoluzione del problema.

Stesso tipo di classificazione e quindi poi di osservazione vale per l'esempio 20, dove, per comprendere l'enunciato del problema, è possibile procedere dando valori diversi al parametro  $n$  e andando ad osservare che tipo di risultati si ottengono.

### Domanda 1: SCELTE

M510Q01

In una pizzeria, puoi prendere la pizza normale con due ingredienti base: formaggio e pomodoro. Puoi chiedere anche una pizza a tua scelta con l'aggiunta di **altri** ingredienti scegliendo tra quattro diversi ingredienti: olive, prosciutto, funghi e salame.

Riccardo vuole ordinare una pizza con **altri** due ingredienti diversi.

Tra quante diverse combinazioni può scegliere Riccardo?

*Esempio 22 (Compendio Prove PISA 2009).*

Anche in questo quesito il testo presenta la caratteristica di Operatività perchè, per la costruzione del modello mentale, è possibile andare a studiare la situazione problematica variando il numero di ingredienti disponibili, partendo da due ingredienti e poi andando ad aumentarne il numero, cercando una relazione tra i diversi casi. Oppure è possibile procedere modificando il numero degli ingredienti aggiungibili.

Il testo si classifica come operativo di tipo indiretto perché il tipo di procedura che il testo suggerisce è combinatoria e quindi presenta una struttura concettuale più complessa rispetto al semplice calcolo.

Sono esempi di testi non operativi l'esempio 18 e ??, dove per la comprensione del testo, la conoscenza (concettuale, enciclopedica, procedurale) necessaria deve essere tutta già attivata al momento della lettura del testo stesso.

## 6.2 Caratteristiche del testo e difficoltà di comprensione

L'assunto psicologico sulla comprensione di un testo che sta alla base della teoria dei modelli mentali è che la comprensione sia raggiunta quando il Lettore costruisce un unico modello mentale del testo stesso.

Mentre in un contesto narrativo il tipo di modello mentale costruito può essere lasciato al Lettore, nel caso delle prove standardizzate l'Autore, che pone il quesito, si aspetta la costruzione di un certo tipo di modello, in base ai suoi obiettivi valutativi. Questo significa che a livello di comprensione del testo, l'Autore ha in mente un determinato modello mentale, che potremmo chiamare "Canonic", frutto di un processo interpretativo del testo da lui considerato corretto. Il Lettore, potrà seguire un proprio processo interpretativo, ma il modello finale dovrà essere consistente con quello "Canonic". In questo caso potremo affermare che la comprensione del testo è stata raggiunta. Quindi dire che un Lettore non è un Lettore Modello rispetto ad un

certo quesito significa constatare che il modello mentale prodotto dal processo interpretativo del Lettore non è consistente con il modello “Canonic” dell’Autore.

Il nostro obiettivo è mettere in relazione le caratteristiche del testo, mediante le quali avviene la classificazione del quesito, e le possibili cause che nel processo interpretativo del Lettore possono portare a costruire un modello mentale non corretto.

Nella costruzione di un modello entra in gioco la coerenza del testo e, nella teoria dei modelli mentali, viene proposta la seguente ipotesi: Condizione necessaria e sufficiente affinché un discorso sia coerente è che se ne possa ricavare un singolo modello mentale.

La possibilità di costruire un singolo modello mentale dipende principalmente da fattori di co-referenza e di consistenza. Ciascuna frase di un discorso deve, esplicitamente o implicitamente, riferirsi ad una entità cui ci si è già riferiti in un’altra frase, dato che soltanto questa condizione rende possibile rappresentare le frasi all’interno di un singolo modello integrato. Allo stesso modo, proprietà e relazioni riguardanti i singoli referenti devono essere consistenti, cioè compatibili le une con le altre e prive di contraddizioni.

La teoria dei modelli mentali afferma che il processo di interpretazione di un testo avviene mediante il passaggio attraverso tre livelli di rappresentazione: il primo è il livello di rappresentazione grafema (il testo stesso); il secondo è il livello di rappresentazione proposizionale; infine il terzo livello è proprio la rappresentazione mediante un modello mentale.

La rappresentazione proposizionale fornisce il significato del testo ottenuto come funzione dei significati delle singole parole e delle loro relazioni sintattiche. Il modello mentale permette di individuarne i referenti, le loro relazioni e quindi un “mondo possibile” rispetto a quanto descritto nel testo stesso.

Il processo di interpretazione di un testo è descritto dalla teoria dei modelli tramite una sequenza di procedure ricorsive, introdotte nel Capitolo 5, che a partire da un testo portano alla costruzione di un modello mentale.

Per esplicitare la relazione tra le caratteristiche con cui classifichiamo il testo di un quesito e le possibili cause di difficoltà nel processo interpretativo si propone di:

- Considerare le situazioni in cui non si raggiunge il secondo livello di rappresentazione (rappresentazione proposizionale)
- Considerare le situazioni in cui non si raggiunge il terzo livello di rappresentazione cioè la costruzione di un unico modello mentale.

### 6.2.1 Difficoltà nella rappresentazione proposizionale

Per quanto riguarda i testi dei quesiti, se si verificano Difficoltà di Secondo Livello, è possibile che la funzione che fornisce il significato del testo dia il “risultato” sbagliato o non dia nessun risultato e quindi non si realizzi correttamente la rappresentazione proposizionale. Ricordiamo che la rappresentazione proposizionale si ottiene come risultato di un processo attivato utilizzando il significato delle singole parole e le relazioni sintattiche all’interno del testo.

I quesiti che possono presentare difficoltà per il secondo livello di rappresentazione sono quindi quelli dove interviene il Dizionario matematico, non matematico o ibrido. In particolare, i termini del Dizionario ibrido, come già introdotto, possono essere ulteriormente suddivisi in termini che appartengono sia al linguaggio naturale sia al linguaggio matematico ma con significati diversi (limite, altezza, spigolo, stima . . . .) e in termini che appartengono al linguaggio naturale ma che possono essere utilizzati per esprimere relazioni tra oggetti matematici (si avvicina a . . . ., è all’incirca . . . ., ). I termini del Dizionario Ibrido appartenenti al primo gruppo potranno causare difficoltà interpretative a livello di rappresentazione proposizionale poiché è possibile che il Lettore utilizzi un significato del termine non corretto rispetto a quello atteso dall’Autore.

Un altro ostacolo interpretativo a livello di rappresentazione proposizionale riguarda la coesione del testo. Se nel testo intervengono anafore testuali, è possibile che i collegamenti sintattici individuati dal Lettore producano una rappresentazione proposizionale non adeguata rispetto al processo interpretativo atteso dall’Autore.

Se il quesito è classificato come *Linguaggio Matematico e Sintassi*, la presenza di espressioni numeriche e/o simboliche richiede una propria decodifica sia a livello di simboli che di trattamento. Tutto questo può essere di ostacolo ad una rappresentazione proposizionale perché possono essere non decodificate dal punto di vista del significato dei segni operazionali oppure per la struttura sintattica dell’espressione o per il significato dei simboli che intervengono. Se nel testo del quesito è presente anche un trattamento numerico o simbolico le difficoltà di decodifica possono essere legate alla trasformazione semiotica all’interno del registro numerico o simbolico.

### 6.2.2 Difficoltà nella costruzione del modello mentale

Facendo riferimento all’ipotesi già introdotta che lega la coerenza di un testo alla sua comprensione e al funzionamento delle procedure ricorsive, analizzi-

amo le possibili cause di difficoltà nel processo interpretativo che non portano alla costruzione di un solo modello mentale o che costruiscono un modello mentale non compatibile con quello “Canonico”.

Secondo la procedura 1., la costruzione di un nuovo modello mentale è avviata ogni volta che si inserisce una asserzione che non ha precedenti referenti nel modello (né espliciti né impliciti). La procedura 2. aggiunge al modello corrente altre entità, proprietà e relazioni quando il riferimento è ad entità già presenti nel modello. La procedura 3., invece, permette la riunificazione di modelli mentali diversi in un unico modello nel momento in cui un’asserzione pone in relazione entità che vi appartengono.

Se però, una volta applicate le procedure 1. e 2., il Lettore non riconosce le relazioni intercorrenti tra i modelli mentali generati, non sarà possibile la loro riunificazione. Ma anche nel caso in cui le procedure ricorsive permettano la riunificazione dei modelli mentali in un unico modello, l’obiettivo della comprensione può non essere raggiunto se l’asserzione che pone in relazione entità appartenenti a modelli mentali diversi non è corretta rispetto al processo interpretativo dell’Autore. In questo caso il modello mentale prodotto non sarà consistente con quello “Canonico”.

Nella classificazione di un quesito, le caratteristiche del testo che rimandano a possibili difficoltà nella costruzione del modello mentale sono il tipo di testo figurale, la Conoscenza Matematica e, in particolare, la Conoscenza Concettuale e la Conoscenza Procedurale per quanto riguarda i trattamenti grafici, il Dizionario Ibrido, per i termini del linguaggio comune utilizzati in ambito matematico, l’Enciclopedia e l’Esploratività.

Se il testo di un quesito è classificato come *figurale*, la presenza di sottotesti figurali può causare difficoltà nella costruzione del modello mentale per eventuali presenze di conversioni o trattamenti all’interno del sottotesto figurale, in relazione al tipo di variabili o di informazioni che sono rappresentate oppure per possibili conversioni tra il sottotesto figurale e la restante parte del testo del quesito.

Quando la classificazione di un quesito rispetto alla Conoscenza Concettuale è del tipo “Relazione tra nodi conosciuti”, il Lettore può non possedere tale relazione e quindi il processo interpretativo produrrà due modelli mentali che non possono essere riuniti. Se il quesito è classificato poi di “Livello Riflessivo” e il Lettore possiede la relazione solo ad un “livello primario” è possibile che il modello mentale prodotto non sia compatibile con quello “Canonico”.

Se la classificazione è del tipo “Relazione tra nodi non conosciuti”, il raggiungimento di un unico modello mentale può essere ostacolato dal fatto che il Lettore può non distinguere i nodi di conoscenza che devono essere già attivati durante il processo interpretativo, da quelli che il processo risolutivo

del quesito ha lo scopo di attivare oppure distingue i nodi conosciuti da quelli non conosciuti ma si ferma perché pensa di dover già disporre del loro reciproco collegamento, quando invece la costruzione della relazione è lo scopo del quesito stesso.

Per quanto riguarda la Conoscenza Procedurale, nel caso di classificazione del quesito rispetto alla caratteristica “Linguaggio Matematico e Sintassi” è possibile incontrare difficoltà nella costruzione del modello mentale, dovute alla non individuazione dei referenti a cui la scrittura si riferisce nel modello corrente oppure per la presenza nel testo di conversioni tra l’espressione matematica e la parte verbale del testo oppure si possono avere difficoltà nella conversione tra scrittura numerico-simbolica e uno o più sottotesti figurati. Nel caso in cui il quesito sia classificato come “Trattamento grafico”, tale classificazione potrebbe indicare un eventuale difficoltà interpretativa nelle trasformazioni semiotiche tra sottotesti figurati diversi all’interno dello stesso quesito.

Se poi il testo è operativo, è possibile che il Lettore, per completare la costruzione del modello mentale, debba recuperare le referenze del testo attraverso una parte procedurale che può consistere nell’affrontare esempi particolari, modificare il valore di un parametro oppure rilassare certi vincoli, non necessariamente nella direzione della soluzione del quesito. Se il Lettore non individua nel testo questa caratteristica è possibile che non riesca a mettere in relazione i fatti riportati nel testo, non raggiungendo quindi un unico modello mentale. Se invece il Lettore riconosce la possibilità di un approccio operativo ma non interpreta correttamente le informazioni ottenute, il modello mentale prodotto non risulterà compatibile con quello “Canonic”.

Per quanto riguarda il Dizionario Ibrido, i termini del linguaggio naturale che sono utilizzati per esprimere relazioni tra oggetti matematici, faranno riferimento ad un particolare contesto matematico e quindi sarà necessario una sorta di pseudo-coordinamento tra un registro matematico (individuato in base al contesto matematico a cui si fa riferimento) e il registro verbale, che consiste nel cercare di dare senso al significato del termine nel contesto matematico in questione. Si indica come “pseudo-coordinamento” perché nel definire il coordinamento tra registri semiotici abbiamo supposto che i singoli registri non siano in grado di esprimere in modo separato il significato della rappresentazione ma necessitano l’uno dell’altro per esprimerlo (nel senso che ciascuno, in modo individuale, non permette di esprimere le proprietà e la ricchezza di informazione del registro coordinato). In questo caso è il termine del linguaggio naturale a non avere autonomia interpretativa, ma il registro matematico in questione potrebbe esprimere il significato pensato dall’Au-

tore senza ricorrere al linguaggio naturale. Questo “pseudo-coordinamento” è possibile che porti a situazioni di ambiguità nella costruzione del modello mentale dovute alla non univocità del significato che nel registro matematico potrà assumere il termine del linguaggio naturale.

Si potranno avere ulteriori difficoltà nella costruzione del modello mentale nel caso sia necessario ricorrere alla Conoscenza Enciclopedica. Se l’Enciclopedia del Lettore, “per Costruire il Modello” o “per Risolvere” o entrambe, non è adeguata a quella richiesta dall’Autore è possibile che si verifichi una situazione di non operatività della procedura ricorsiva 3.. Come conseguenza, è possibile che non si riesca a riunificare i diversi modelli mentali avviati durante il processo interpretativo oppure che il modello mentale prodotto dal processo interpretativo non sia compatibile con il modello “Canónico”. Infine, se il quesito è classificato rispetto al contesto come Contesto Ibrido, l’obiettivo dell’Autore è quello di facilitare la comprensione del testo inserendo una situazione problematica, interna alla matematica, in una narrazione. Dal punto di vista della costruzione del modello mentale, il Lettore può “perdersi” nella narrazione che fa da cornice alla situazione interna alla matematica (con le parole di U. Eco si direbbe che il Lettore si perde nel “bosco narrativo” [Eco, 1994]), andando a produrre un modello mentale inconsistente con il modello “Canónico” atteso.

### 6.3 Esempi di classificazione e individuazione delle difficoltà di comprensione

**D5.** Si sa che  $2^{10} = 1024$ . Quale fra le seguenti potenze del 10 è quella che più si avvicina a  $2^{70}$ ?

A.   $10^{24}$

B.   $10^{21}$

C.   $10^{14}$

D.   $10^7$

*Esempio 23* (INVALSI Secondaria Superiore 2012).

Questo quesito si classifica come:

Contesto matematico: situazione interna alla matematica.

Testo verbale generalizzato/simbolico: compaiono i numeri in simboli, compare la notazione di potenza e il simbolo di uguaglianza; non compaiono sottotesti figurati.

Dizionario matematico: nel testo compare il termine *potenze*.

Dizionario ibrido: nel testo compare il termine *avvicina*.

Conoscenza concettuale: Relazione tra nodi conosciuti e di livello primario. I nodi di conoscenza a cui si riferisce sono il calcolo sui numeri naturali e le proprietà delle potenze quindi si tratta di nodi già attivati. Inoltre, rimanendo nell'ambito del calcolo aritmetico, il quesito si classifica di livello primario.

Conoscenza procedurale: Linguaggio Matematico e sintassi.

Questa caratterizzazione del quesito è dovuta alla presenza nel testo dell'operazione di potenza sui numeri naturali.

Conoscenza procedurale: Trattamento numerico.

Il testo del quesito presenta trasformazioni di rappresentazione delle potenze all'interno del registro numerico. Da questo segue la sua classificazione per quanto riguarda l'aspetto algoritmico della conoscenza procedurale.

#### Difficoltà di Secondo Livello

La classificazione mette in evidenza la possibilità di non raggiungere il livello di rappresentazione proposizionale in relazione al significato del termine matematico "potenze". Si possono avere, inoltre, difficoltà interpretative nella decodifica dell'operazione di potenza a livello sintattico oppure operativo e nel passaggio dal calcolo effettivo di  $2^{10}$  alla sua approssimazione con  $10^3$ . Inoltre il quesito si classifica come Trattamento numerico perché richiede trasformazioni di rappresentazione delle potenze all'interno del registro numerico e questo può comportare difficoltà a livello interpretativo nella rappresentazione proposizionale se non si riesce a mettere in relazione le operazioni tra interi con le proprietà delle potenze rispetto a tali operazioni (cioè il fatto che  $70 = 7 \times 10$  e che

$$2^{70} = 2^{7 \times 10} = (2^{10})^7$$

#### Difficoltà di Terzo Livello

Dall'analisi delle caratteristiche del quesito deduciamo la possibilità di avere difficoltà nella costruzione del modello mentale perché, per quanto riguarda

il Dizionario ibrido, il Lettore può non dare al termine avvicina un' interpretazione corretta all'interno del registro dei numeri naturali: infatti, l'Autore utilizza questo termine per descrivere una relazione tra numeri naturali, espressi mediante potenze in base 2 e in base 10.

A livello di costruzione del modello mentale, l'espressione  $2^{10} = 1024$  dovrebbe avere come conseguenza la visualizzazione di  $2^{10}$  con 1024 sulla retta dei numeri, immagine che rende esplicita nel modello l'idea di "vicinanza" espressa dal testo, richiedendo di approssimare  $2^{10}$  con  $10^3$ . Si possono avere quindi difficoltà nel posizionamento reciproco delle potenze in base 2 e base 10 sulla retta. Il Lettore, inoltre, può non mettere in relazione la scrittura del numero 1024 con la sua approssimazione  $10^3$ .

- D6.** Un atomo di idrogeno contiene un protone la cui massa  $m_p$  è all'incirca  $2 \cdot 10^{-27}$  kg, e un elettrone la cui massa  $m_e$  è all'incirca  $9 \cdot 10^{-31}$  kg. Quale tra i seguenti valori approssima meglio la massa totale dell'atomo di idrogeno (cioè  $m_p+m_e$ )?
- A.   $2 \cdot 10^{-27}$  kg
- B.   $11 \cdot 10^{-31}$  kg
- C.   $11 \cdot 10^{-58}$  kg
- D.   $18 \cdot 10^{-58}$  kg

*Esempio 24* (INVALSI Secondaria Superiore 2012).

Questo quesito si classifica come:

Contesto non matematico: situazione scientifica non interna alla matematica perché nel testo intervengono oggetti ed espressioni che riguardano la struttura della materia.

Testo verbale generalizzato/simbolico: compaiono i simboli dei numeri e i simboli delle masse del protone e dell'elettrone.

Dizionario ibrido: compare l'espressione *all'incirca* e il termine *approssima*.

Dizionario non matematico per costruire il modello: nel testo compaiono i termini "atomo", "idrogeno", "protone", "elettrone" necessari alla costruzione del modello mentale ma non alla risoluzione del quesito.

Dizionario non matematico per risolvere: il termine "massa" è necessario per la costruzione del modello mentale e anche per la risoluzione del quesito.

Enciclopedia – Conoscenza disciplinare- per costruire il modello: la conoscenza della struttura dell'atomo in generale e in particolare quella dell'idrogeno è necessaria per la costruzione del modello mentale ma non per risolvere.

Enciclopedia – Conoscenza disciplinare- per risolvere: la conoscenza del fatto che quando si considerano insieme due masse, la massa totale è la somma delle singole masse è necessaria per la costruzione del modello mentale e anche per la risoluzione del quesito.

Conoscenza concettuale: Relazione tra nodi conosciuti e di livello primario. I nodi di conoscenza ai quali si riferisce il quesito sono la scrittura in

notazione scientifica dei numeri e le operazioni tra potenze con esponente negativo. Si tratta quindi di nodi conosciuti e poiché si rimane comunque nell'ambito del calcolo numerico il quesito si classifica di Livello primario.

Conoscenza procedurale: linguaggio matematico e sintassi. Questa caratterizzazione del quesito è dovuta alla presenza nel testo delle espressioni delle moltiplicazioni tra numeri interi e potenze in base 10 e dall'espressione simbolica della somma delle masse.

Difficoltà di Comprensione di Secondo Livello:

Le difficoltà nella rappresentazione proposizionale possono essere individuate dalla classificazione del quesito come Dizionario Ibrido, Dizionario non Matematico per risolvere e, nella Conoscenza Procedurale, come Linguaggio Matematico e Sintassi.

Nel Dizionario Ibrido, il termine *approssima*, appartiene sia al linguaggio quotidiano sia al linguaggio matematico. Mentre nel linguaggio naturale il termine *approssimare* ha come sinonimi *avvicinarsi*, *accostarsi*, *esprimersi in modo impreciso*, *superficiale o scorretto*<sup>2</sup>, nel linguaggio matematico questo termine esprime la possibilità di sostituire un oggetto matematico con un altro, che permetta di rappresentare l'oggetto iniziale in modo più efficace rispetto a degli specifici obiettivi di trattamento e tra i due oggetti sono esplicitate quantitativamente le relazioni matematiche che li legano. La eventuale possibilità di utilizzare, da parte del Lettore, un significato del termine diverso da quello atteso, può causare una rappresentazione proposizionale non consistente con quella attesa dall'Autore Modello.

L'altro termine del Dizionario Ibrido, *all'incirca*, invece, è un termine del linguaggio quotidiano utilizzato per esprimere una relazione numerica nell'ambito dei numeri decimali e quindi può causare difficoltà a livello di costruzione del modello mentale ma non a livello di rappresentazione proposizionale.

Per quanto riguarda invece la classificazione del quesito come "Dizionario non matematico per costruire il modello", si fa riferimento ai termini che intervengono nel testo ma che non sono necessari alla soluzione del quesito (idrogeno, atomo, protone, elettrone). In questo caso si dovrà andare a considerare la loro funzione nella costruzione del modello mentale.

Per quanto riguarda invece il "Dizionario non Matematico per risolvere", si possono avere difficoltà nel significato di "massa", che risulta necessario alla soluzione del quesito, dove al Lettore è richiesto di individuare tra diverse espressioni numeriche quella che più si avvicina alla somma delle masse.

Infine, dalla caratterizzazione "Linguaggio Matematico e sintassi", mette in

---

<sup>2</sup>dal Vocabolario Treccani.it dei sinonimi e dei contrari

luce possibili difficoltà dal punto di vista sintattico-interpretativo, nelle espressioni che si riferiscono alla massa. Si possono avere difficoltà di decodifica anche nel mancato riconoscimento della conversione tra il riferimento alla massa totale dell'atomo e la scrittura simbolica  $m_e + m_p$ .

Difficoltà di Comprensione di Terzo Livello:

Nella costruzione del modello mentale il Lettore può incontrare difficoltà nell'interpretazione del termine *all'incirca* del Dizionario ibrido. Questo accade se i risultati dello pseudo-coordinamento non sono consistenti con quelli attesi dall'interpretazione dell'Autore. In particolare, si tratta di interpretare il significato di tale termine nel modello dei numeri decimali espressi in notazione scientifica e che si riferiscono alle masse delle particelle. Sostanzialmente il testo, con questo termine, intende esprimere il fatto che il valore della massa indicata costituisce una approssimazione del valore reale, senza però indicare il grado di approssimazione.

Anche le Conoscenze enciclopediche possono causare difficoltà interpretative a livello di costruzione del modello mentale. Il riferimento alla struttura dell'atomo non serve per la risoluzione del quesito, ma il lettore può rendersi conto immediatamente del fatto che questo elemento non serve o, al contrario, nel tentativo di costruirsi un modello mentale a partire dall'interpretazione del testo, può restare bloccato dall'impossibilità di evocare una conoscenza che non possiede.

Per quanto riguarda la Conoscenza Concettuale, si possono avere difficoltà nella costruzione del modello perché il Lettore non mette in relazione la definizione di potenza e le sue proprietà con le proprietà delle operazioni aritmetiche tra potenze, in particolare, nel trattamento di potenze ad esponente negativo. Infine, la classificazione del quesito rispetto alla Conoscenza Procedurale come "Linguaggio Matematico e Sintassi" può rimandare a difficoltà nella costruzione del modello mentale nel caso in cui la proprietà additiva della massa, espressa dalla scrittura simbolica  $m_e + m_p$ , non sia rappresentata nel modello mentale prodotto dal processo interpretativo del Lettore.

**D13. L'insegnante di inglese dà ai suoi studenti un test formato da 25 domande e spiega che il punteggio totale  $p$  è calcolato assegnando 4 punti per ogni risposta esatta e togliendo 2 punti per ogni risposta sbagliata o mancante.**

**a. Il punteggio massimo possibile è .....**

**b. Scrivi la formula che fornisce il punteggio  $p$  complessivo, indicando con  $n$  il numero di risposte esatte.**  
 $p = \dots\dots\dots$

**c. Se la sufficienza si ottiene con più di 60 punti, qual è il numero minimo di domande al quale occorre rispondere correttamente per avere la sufficienza?**

*Esempio 25 (INVALSI Secondaria Superiore 2012).*

Questo quesito si classifica come:

Contesto non matematico: situazione non interna alla matematica perché gli oggetti matematici che intervengono, che sono numeri interi, esprimono il numero di domande del test, i punteggi delle risposte corrette, sbagliate oppure mancanti. Si fa quindi riferimento a situazioni del mondo reale.

Testo verbale generalizzato/simbolico: compaiono i numeri in simboli, il simbolo  $p$  per l'indicazione del punteggio complessivo, il simbolo  $n$  per il numero delle risposte esatte e il simbolo di uguaglianza.

Dizionario Ibrido: compare il termine *formula*.

Coesione del testo: nella domanda *c. Se la sufficienza si ottiene....* si ha una anafora ellittica riferita al termine "test" perché il testo completo sarebbe *c. Se la sufficienza nel test si ottiene....*

Enciclopedia – Conoscenza delle cose del mondo - per risolvere: si tratta di avere familiarità con il funzionamento della valutazione di un test, per il conteggio dei relativi punti. Questa conoscenza costituisce il primo passo per poter esprimere il punteggio complessivo come una funzione del numero  $n$  delle risposte corrette.

Conoscenza Concettuale: Relazione tra nodi conosciuti e di livello Riflessivo. I nodi di conoscenza attivati in questo quesito che rientrano negli obiettivi di apprendimento per il Biennio della Secondaria di Secondo Grado sono le operazioni sui numeri naturali, il significato di equazione, la traduzione di una relazione in linguaggio algebrico. Costituisce invece un nodo non conosciuto la forma dell'equazione del punteggio complessivo in funzione delle risposte corrette, alla quale chiede di lavorare

la domanda b.. Per questo motivo il quesito si classifica come Relazione tra nodi non conosciuti. Il livello della relazione, sempre per la domanda b. del quesito, che lega l'ambito aritmetico con il linguaggio algebrico è Riflessivo (Osserviamo che con le sole domande a. e c. il quesito sarebbe stato classificato come Relazione tra nodi conosciuti e di livello primario perché saremmo rimasti nell'ambito del solo calcolo aritmetico).

Conoscenza Procedurale: linguaggio matematico e sintassi. Nella domanda b. compare la scrittura  $p=...$  che rappresenta il tipo di risposta attesa dall'Autore sotto forma appunto di una espressione simbolica, in particolare di una formula.

Testo Operativo: nel testo compare la variabile intera positiva  $n$ , alla quale si possono assegnare valori specifici per la determinazione del punteggio del test. In particolare, nella domanda b. si chiede di mettere in relazione il numero di risposte corrette  $n$  con il punteggio totale e tale relazione può essere studiata assegnando ad  $n$  valori decrescenti, partendo da 25 e diminuendo ogni volta di una unità. Questo tipo di approccio può essere utilizzato anche per la domanda c. Il testo si classifica come operativo di tipo diretto perché suggerisce al Lettore di procedere, per la comprensione, attraverso l'analisi di sottomodelli ottenuti nei quali si richiede la risoluzione di operazioni numeriche.

Difficoltà di secondo livello:

Per quanto riguarda la rappresentazione proposizionale, le eventuali difficoltà di comprensione del testo sono individuate dalla classificazione del quesito come Dizionario Ibrido, Coesione del testo e, nella Conoscenza Procedurale, come Linguaggio Matematico e Sintassi.

In relazione al Dizionario Ibrido, il termine *formula* appartiene sia al linguaggio matematico sia al linguaggio naturale, ma con significati diversi. In particolare, si hanno ambiguità anche all'interno del linguaggio matematico perché nel testo in esame il termine "formula" si riferisce alla esplicitazione algebrica della relazione tra il punteggio totale e il numero di risposte corrette, ma, in altri ambiti matematici come per esempio quello geometrico in riferimento alle formule delle aree, questo termine viene utilizzato per esprimere conoscenze da ricordare e non da individuare.

A livello di legami coesivi, il Lettore si può domandare se la "sufficienza" si riferisce al test oppure alla conclusione del corso o alla valutazione in qualche specifico momento dell'anno scolastico oppure in un numero di prove maggiore di uno e queste ambiguità possono causare difficoltà a livello proposizionale e successivamente avranno conseguenze anche a livello di costruzione

del modello mentale.

Rispetto alla Conoscenza Procedurale, la classificazione del quesito come Linguaggio Matematico e sintassi si riferisce alla parte di testo  $p = \dots$ , dove l'Autore si aspetta che il Lettore esprima la relazione algebrica tra il punteggio totale e il numero di risposte corrette mediante una formula. In realtà il Lettore può dare significati diversi al simbolo di uguaglianza, come per esempio quello di svolgere una certa operazione oppure di semplificare una determinata espressione. Se l'interpretazione del Lettore è una delle ultime due descritte, la rappresentazione proposizionale realizzata dal Lettore non sarà consistente con quella ritenuta corretta dall'Autore Modello.

Difficoltà di terzo livello:

I possibili ostacoli interpretativi nella costruzione del modello mentale possono riguardare l'Enciclopedia, la Conoscenza Concettuale, la classificazione della Conoscenza Procedurale in Linguaggio Matematico e Sintassi e l'Esploratività del testo.

Per quanto riguarda l'Enciclopedia si ha la classificazione Enciclopedia - Conoscenza delle cose del mondo - per risolvere e si riferisce alla conoscenza del funzionamento dei test e del loro utilizzo come strumento valutativo. Nel caso in cui il Lettore non possieda tale conoscenza o la possieda errata, il modello mentale prodotto dal processo interpretativo potrebbe non essere unico (per esempio nel caso in cui non si considerino nello stesso punteggio le risposte corrette e le risposte errate) oppure potrebbe essere non consistente con quello dell'Autore Modello, come nel caso in cui a livello coesivo, nella domanda c., si interpreti la sufficienza per un numero di prove maggiore o uguale a due.

In relazione alla Conoscenza Concettuale è possibile che il Lettore non metta in relazione il calcolo aritmetico per l'esame di alcune situazioni particolari e la scrittura della relativa relazione algebrica tra  $n$  e  $p$  mediante una formula e quindi metta in relazione i fatti del testo solo a livello aritmetico. Potrebbe succedere invece che il Lettore si aspetti di dover esprimere la relazione algebrica tra  $n$  e  $p$  ricorrendo ad esempi già incontrati e quindi interpretando il testo a livello di conoscenza concettuale come relazione tra nodi già conosciuti.

Infine, dal fatto che il testo è di tipo operativo, si possono avere difficoltà a livello di costruzione del modello mentale perché il Lettore può non individuare nel testo il suggerimento a procedere in modo sistematico. Questo fatto non gli permetterà di riunire i diversi modelli mentali prodotti dal processo interpretativo oppure è possibile che il Lettore proceda in questa fase operativa in modo non corretto oppure può non interpretare i risultati di questa parte procedurale in modo consistente con il processo interpretativo atteso

dall'Autore.

# Capitolo 7

In questo capitolo si propone una modalità di analisi e di individuazione delle difficoltà di comprensione del testo per i quesiti che presentano componenti figurali.

Quando il testo non è solo verbale significa che presenterà una o più parti non verbali, che possono essere simboliche o figurali. Ciascuna delle parti del testo che non sono né verbali né simboliche ma posseggono una autonomia di significato all'interno del testo, le indicheremo con il termine di *sottotesti figurali*. Quando compare nel quesito un sottotesto figurale, proponiamo di classificarlo in base ai sistemi semiotici che vi compaiono, partendo dal quadro di riferimento di Duval, [Duval, 1995] e adattandolo al caso specifico dei quesiti INVALSI e OCSE-PISA.

Secondo la terminologia corrente, indicheremo con il termine *significante* ciò che viene rappresentato e con il termine *significato* ciò a cui il *significante* si riferisce. La nostra analisi consisterà nel determinare i tipi di registri che intervengono nel sottotesto figurale, dove con il termine *registro* Duval definisce un sistema semiotico che permette trasformazioni di rappresentazione.

## 7.1 Il coordinamento di registri semiotici

Secondo la teoria di Duval, nei sistemi semiotici i possibili tipi di trasformazione sono due: il trattamento e la conversione.

Nel trattamento si ha una trasformazione di rappresentazione all'interno dello stesso registro mentre, nella conversione, si cambia il registro rappresentativo, cioè il *significante*, senza modificare il *significato*.

Nel Capitolo 3, nel Quadro di Riferimento Teorico, è stato introdotto un altro tipo di relazione tra registri diversi che abbiamo indicato con il termine di coordinamento. È il caso in cui in una rappresentazione compaiano due (o più) sistemi semiotici e nessuno, in modo autonomo, è in grado di

esprime la ricchezza di informazione e il significato di tale rappresentazione, ma è il modo in cui entrano in relazione che permette l'interpretazione della rappresentazione stessa. E' a tale relazione che ci riferiamo con il termine di *coordinamento*.

Il *coordinamento* tra due registri ha una natura diversa rispetto alla conversione: nel caso della conversione ciascuno dei due registri possiede una completa autonomia di rappresentazione del significato, mentre, nel caso del *coordinamento*, le espressioni nei diversi registri non hanno autonomia rappresentativa ma necessitano l'uno dell'altro per l'interpretazione del significato.

L'introduzione della definizione di *coordinamento* ci permette di classificare i registri in due classi: i registri semplici e i registri coordinati.

### 7.1.1 I registri semplici

Indicheremo con il termine *registro semplice* quei registri che potremmo definire "puri" nel senso che i segni che vi compaiono appartengono ad un solo sistema semiotico.

Sono registri semplici: il registro verbale, il registro numerico, il registro simbolico, il registro grafico. Come sottoregistro del registro grafico, si ha il registro tabella vuota che consiste in un sistema semiotico costituito da caselle individuate dall'incrocio di una posizione secondo l'asse verticale e una posizione secondo un asse orizzontale. Ogni casella è individuata da una coppia ordinata di due posizioni (riga/colonna). Si tratta di una rappresentazione schematica che si basa sulla relazione tra due dimensioni (orizzontale e verticale); ciascuna di queste dimensioni può essere riempita con elementi specifici di qualche variabile, di modo che una tabella può raccogliere dati relativi a due variabili. Le singole occorrenze di ciascuna variabile sono espresse attraverso l'uso di sistemi semiotici specifici e verranno poi determinate dalle interpretazione del contenuto di ciascuna casella, mentre la relazione tra le variabili è rappresentata dalla corrispondenza riga/colonna, ovvero rispetto alla posizione specifica lungo ciascuna delle due dimensioni.

Nel quesito dell'esempio 26, riportato nella pagina successiva, la dimensione verticale ha come variabile il tempo, mentre quella orizzontale ha come variabile il numero delle vittime. Ciascuna variabile è riconducibile ad una dimensione (orizzontale in questo caso, ma poteva anche essere verticale, ovvero ad una riga o ad una colonna della tabella). In questo item il contenuto della casella (2, 3), seconda riga terza colonna, deve essere interpretato collegando il suo contenuto con quello della casella (1, 3) per arrivare a individuare l'informazione seguente: "nell'anno 2002 ci sono state 776 vittime

per incidenti". Le caselle (1, 1) e (2, 1) contengono i nomi delle variabili che si stanno considerando.

M1310D20A0 - M1310D20B0

**D20. La seguente tabella riporta il numero di vittime per incidenti stradali dal 2001 al 2007 in una regione italiana.**

Anno	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Numero di vittime	792	776	700	681	635	539	531

(Fonte: Eurostat, Regional Transport Statistics)

**a. In quale dei seguenti periodi si è avuta la diminuzione più consistente del numero di vittime per incidenti stradali?**

- A.  tra il 2001 e il 2002
- B.  tra il 2002 e il 2003
- C.  tra il 2003 e il 2004
- D.  tra il 2004 e il 2005

**b. Di quale percentuale è diminuito il numero di vittime per incidenti stradali dal 2001 al 2007?**

**Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e infine riporta il risultato.**

.....  
 .....  
 .....

**Risultato:** .....

*Esempio 26 (INVALSI Secondaria Superiore 2013).*

Più in generale, il registro tabella costituisce un registro che esprime schemi relazionali, in genere non comparirà mai da solo ma sarà sempre coordinato con altri sistemi semiotici /registri con i quali i valori delle variabili in gioco sono espressi; la relazione tra tali valori è espressa in modo sintetico tramite lo schema relazionale a tabella. Il fatto che non ci sia una forma standard che stabilisce l'uso del verticale e dell'orizzontale può costituire un motivo di difficoltà nell'interpretazione di tabelle.

Sempre come sottoregistro del registro grafico si ha il registro diagramma ad albero vuoto, che consiste in un grafo che presenta un nodo radice dal quale escono un numero finito di rami. I nodi raggiunti da tali rami si chiamano nodi figli e costituiscono il primo livello. Ciascun nodo figlio diventerà padre per i nodi che gli saranno collegati mediante rami da lui uscenti. Tali nodi

figli costituiranno il secondo livello dell'albero. In questo modo è possibile procedere nella costruzione dei livelli successivi, per un numero finito di livelli. Quindi i nodi che si trovano ad un certo livello dell'albero costituiscono i figli dei nodi appartenenti al livello superiore. Ogni cammino sull'albero è costituito da una successione di nodi, dove ogni nodo risulta figlio del nodo precedente e il nodo di partenza è sempre il nodo radice.

A livello interpretativo, il nodo radice si riferirà ad una certa entità che viene studiata rispetto a determinate caratteristiche: ad ogni livello, ogni nodo figlio rappresenterà una determinazione della caratteristica studiata a quel determinato livello. Da un punto di vista matematico, ad ogni livello sarà presa in esame una variabile e i nodi figli rappresenteranno i possibili valori o classi di valori che tale variabile potrà assumere.

Più in generale, il registro diagramma ad albero potrà comparire coordinato con altri sistemi semiotici /registri, che permettono di individuare le variabile trattate ad ogni livello del grafo; la relazione tra tali variabili è espressa in modo sintetico tramite lo schema relazionale individuato dai rami del grafo.

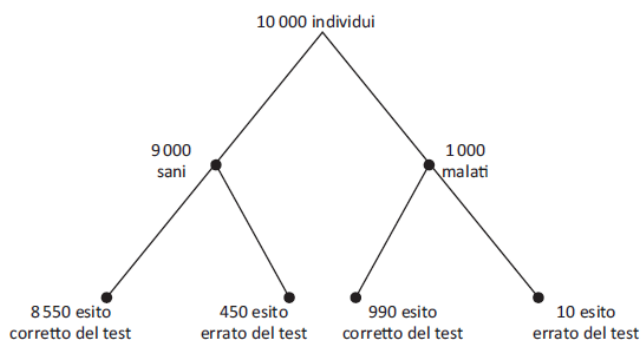
*Esempio 27 (INVALSI Secondaria Superiore 2012).*

Nel quesito riportato nella pagina seguente compaiono due sottotesti figurati, di cui il primo è un esempio di diagramma ad albero.

In questo diagramma ad albero il nodo radice costituisce la popolazione di 10.000 individui sulla quale si esegue un test diagnostico per la presenza di una certa malattia. I nodi figli, al primo livello dell'albero, rappresentano rispettivamente il numero degli individui sani e degli individui malati della popolazione. Al secondo livello, sia per gli individui "sani" della popolazione sia per gli individui "malati", si hanno due nodi figli, che rappresentano il numero degli individui che hanno avuto un esito corretto del testo e il numero degli individui che hanno avuto un esito errato. Dal punto di vista interpretativo, per esempio, il percorso ottenuto partendo dal nodo radice e scegliendo ad ogni livello il primo nodo a sinistra e considerando le variabili alle quali si fa riferimento a ciascun livello, rappresenta la parte della popolazione in esame, formata da "individui sani" che hanno avuto un esito corretto al test. In generale la mancanza di un riferimento standard per quanto riguarda sia le variabili in gioco a ciascun livello, sia il criterio con cui sono i valori di tali variabili sono associate ai nodi figli, può costituire una causa di difficoltà di interpretazione del diagramma ad albero.

D6. Si sa che in una popolazione di 10 000 individui il 10% è affetto da una malattia, mentre il 90% è sano.

Il test che diagnostica la presenza della malattia è affidabile solo parzialmente: nel 5% dei casi rileva la malattia su un individuo sano e nell' 1% dei casi non rileva la malattia su un individuo malato. Il diagramma seguente riassume la situazione:



a. Utilizzando i dati del diagramma ad albero, completa la seguente tabella.

	Esito corretto del test	Esito errato del test	Totale
Sani	.....	450	.....
Malati	.....	.....	.....
Totale	9 540	.....	10 000

b. Qual è la probabilità che l'esito del test sia corretto per una persona scelta a caso da quella popolazione?

- A.  99,0%
- B.  97,0%
- C.  95,4%
- D.  85,5%

c. Qual è la probabilità che un individuo, preso a caso tra tutti quelli che hanno avuto un esito corretto al test, sia sano? Scrivi il risultato in percentuale con una cifra dopo la virgola.

Risposta: ..... %

## 7.1.2 I registri coordinati

Definiamo *registro coordinato* un sistema semiotico ottenuto da uno più coordinamenti di registri semplici, il cui sistema di segni ha ancora la proprietà di essere un registro. I registri coordinati sono:

il registro coordinato delle figure geometriche: tale registro è dato dal *coordinamento* del registro grafico e del registro simbolico, oppure del registro grafico e numerico. Fanno parte di questo registro il disegno delle figure, le lettere che indicano i vertici, i simboli che denotano gli angoli interni o esterni alle figure, i simboli con i quali si indicano lati uguali o angoli uguali, le lettere in corsivo che rappresentano le lunghezze dei lati o degli spigoli, le eventuali frecce che rappresentano la lunghezza dei lati o degli spigoli, oppure le misure della lunghezza dei lati o degli spigoli, o comunque grandezze numeriche riferite alla figura geometrica.

Il registro coordinato cartesiano: questo registro è ottenuto dal *coordinamento* del registro grafico con il registro numerico e del registro grafico con il registro simbolico. Osserviamo che il sistema semiotico ottenuto è ancora un registro perché permette trattamenti cioè manipolazioni delle figure o delle rappresentazioni all'interno del registro stesso e anche conversioni nel registro algebrico o verbale.

Il registro coordinato tabella piena: è dato dal *coordinamento* del registro tabella vuota con il registro verbale e/o il registro simbolico e/o il registro numerico e/o il registro grafico. Anche in questo caso il sistema di segni ottenuto dal *coordinamento* è ancora un registro perché è possibile realizzare trattamenti, eliminando righe o colonne oppure inserendo nuove colonne o righe, contenenti informazioni e dati che rispettino il tipo di variabili rappresentate rispettivamente nella dimensione orizzontale e nella dimensione verticale. Per quanto riguarda la conversione, è possibile la conversione nel registro verbale ed eventualmente in altri registri, in dipendenza del tipo di variabili e di relazioni rappresentate nella tabella.

Il registro coordinato diagramma ad albero pieno: è dato dal *coordinamento* del registro diagramma ad albero vuoto con il registro verbale e/o il registro simbolico e/o il registro numerico e/o il registro grafico. Il sistema di segni ottenuto da tale *coordinamento* è ancora un registro perché è possibile realizzare trattamenti, eliminando nodi figli oppure aggiungendone altri, purché sia rispettata la caratteristica analizzata ad un determinato livello. Per quanto riguarda la conversione, è possibile

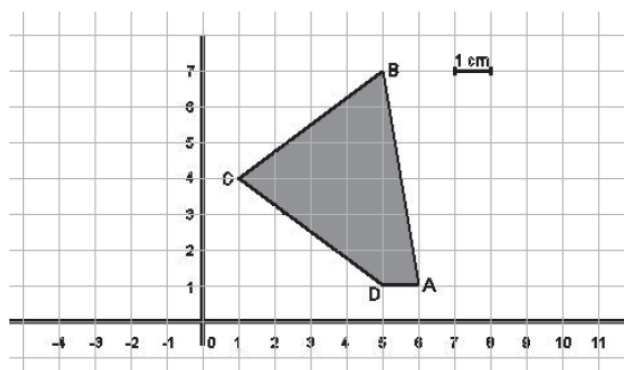
la conversione nel registro verbale ed eventualmente in altri registri, in relazione al tipo informazioni rappresentate nel diagramma ad albero.

## 7.2 Analisi di sottotesti figurali

Di seguito sono riportate le analisi di alcuni quesiti rispetto ai sottotesti figurali.

Nel testo del quesito dell'esempio 28 si ha un sottotesto figurale, nel quale compare il registro coordinato cartesiano, di cui fanno parte le due rette perpendicolari, i numeri interi indicati su tali rette, il reticolo e l'unità di misura. Il quadrilatero è una rappresentazione cartesiana e fanno parte del registro cartesiano anche le lettere che individuano i vertici. In termini di *coordinamento*, si ha un *coordinamento* tra il registro grafico e il registro numerico che individua il sistema di assi cartesiani e il relativo reticolo e un *coordinamento* tra il registro grafico e il registro simbolico nella rappresentazione dei punti che costituiscono i vertici del quadrilatero. Nel sottotesto figurale compare anche la rappresentazione dell'unità di misura con l'indicazione del valore della misura di un centimetro. Tale rappresentazione, che non fa parte del registro cartesiano, è data sia nel registro verbale sia nel registro grafico e quindi si ha una conversione tra il registro verbale e quello grafico.

**D18. L'unità di misura riportata sugli assi cartesiani rappresenta 1 cm.**



**Calcola l'area del quadrilatero ABCD.**

**Risposta:** ..... cm<sup>2</sup>

*Esempio 28 (INVALSI Secondaria Superiore 2010).*

Il testo del quesito dell'esempio 29 presenta un unico sottotesto figurale in cui compare il registro coordinato tabella piena, dove nelle colonne sono indicati gli anni e nelle righe il numero i vittime per incidenti stradali. Nella prima colonna si riportano le descrizioni verbali delle due variabili ( anni nella prima posizione e numero di vittime nella seconda) mentre nella prima riga sono riportati gli anni in esame dal 2001 al 2007. Nelle altre posizioni il numero riportato indicherà il numero di vittime registrate nell'anno corrispondente alla colonna in cui si trova la cella in esame.

In termini di registri, il registro coordinato tabella piena è il risultato del *coordinamento* del registro tabella vuota con il registro verbale (descrizione del significato delle variabili riportato nella prima colonna) e il registro numerico, il quale indica gli anni nella prima riga(tranne la prima posizione) e il numero delle vittime nelle altre posizioni.

D20. La seguente tabella riporta il numero di vittime per incidenti stradali dal 2001 al 2007 in una regione italiana.

Anno	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Numero di vittime	792	776	700	681	635	539	531

(Fonte: Eurostat, Regional Transport Statistics)

a. In quale dei seguenti periodi si è avuta la diminuzione più consistente del numero di vittime per incidenti stradali?

- A.  tra il 2001 e il 2002
- B.  tra il 2002 e il 2003
- C.  tra il 2003 e il 2004
- D.  tra il 2004 e il 2005

b. Di quale percentuale è diminuito il numero di vittime per incidenti stradali dal 2001 al 2007?

Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e infine riporta il risultato.

.....

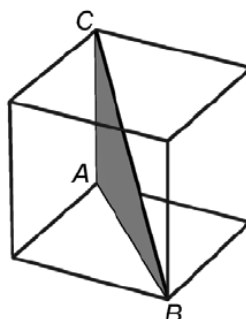
.....

.....

Risultato: .....

*Esempio 29* (INVALSI Secondaria Superiore 2013).

Nella figura è rappresentato un cubo.



Il triangolo ABC ha come lati uno spigolo del cubo, la diagonale di una sua faccia e un diagonale del cubo.

a. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

		Vera	Falsa
a1.	Il lato AB è uguale al lato AC	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
a2.	Il triangolo ABC è rettangolo	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
a3.	Il lato BC è il più lungo dei tre	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
a4.	L'angolo ABC è di $45^\circ$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

b. Se lo spigolo del cubo misura 1 m, quanto misurano i lati del triangolo ABC?

*Esempio 30* (INVALSI Secondaria Superiore 2013).

Nel testo del quesito dell'esempio 30 sono presenti due sottotesti figurali. Nel primo sottotesto figurale compare una rappresentazione nel registro coordinato delle figure geometriche, dato dalla rappresentazione grafica del cubo e del triangolo, dove il triangolo ha un lato coincidente con uno spigolo del cubo, un'altro coincidente con la diagonale della faccia inferiore e il terzo lato coincidente con una diagonale del cubo, e dalle lettere che individuano i vertici del triangolo. Il registro delle figure geometriche è il risultato del *coordinamento* tra il registro grafico e il registro simbolico.

Il secondo sottotesto figurale è una tabella. Si ha una rappresentazione nel registro coordinato tabella piena dove, nella prima colonna, si denota con un simbolo la proposizione espressa, sulla stessa riga, nella seconda colonna, mentre la terza colonna permette, rispetto ad ogni riga, di indicare la condizione di verità della proposizione corrispondente. La quarta colonna, invece, permette di indicarne la falsità.

In termini di registri compaiono il registro tabella vuota e, all'interno della tabella, il registro simbolico, sia nella prima colonna sia nelle proposizioni

della seconda colonna, il registro verbale, sia nella seconda colonna sia nella prima riga della quarta e quinta colonna, il registro numerico, nella proposizione della quinta riga( seconda colonna), e il registro grafico in ogni riga, dalla seconda alla quinta, nella quarta e quinta colonna. Si ha quindi un *coordinamento* del registro semplice tabella vuota con il registro verbale, un *coordinamento* del registro semplice tabella vuota con il registro simbolico e un *coordinamento* del registro tabella vuota con il registro grafico. Tali coordinamenti generano il registro coordinato tabella piena.

Si ha inoltre un coordinamento tra il registro tabella piena e tutti gli altri registri dovuto al fatto che la tabella in realtà è da completare: infatti il segno ha una complessità particolare perché presenta due colonne dove si dovrà esprimere un giudizio di verità o di falsità.

Nel testo del quesito dell'esempio 31 compaiono due sottotesti figurali. Il primo sottotesto figurale è un diagramma ad albero. Si ha quindi una rappresentazione nel registro coordinato diagramma ad albero pieno, dove il nodo radice rappresenta una popolazione sulla quale viene studiata la frequenza di una certa malattia rispetto agli esiti del test che la diagnostica. Vi sono rappresentate quattro possibili situazioni: Individui sani con esito del test corretto, individui sani con esito del test errato, individui malati con esito del test corretto e individui malati con esito del test errato.

In termini di registri, in questo sottotesto figurale compaiono il registro semplice diagramma ad albero vuoto, il registro verbale, nel nodo radice per fare riferimento alla popolazione e nei nodi figli per individuare le determinazioni della caratteristica in esame, e il registro numerico, nel nodo radice per esprimere la numerosità della popolazione e negli altri nodi per esprimere il numero di individui sani o malati oppure per esprimere il numero dei test corretti o errati. Si ha quindi un *coordinamento* del registro diagramma ad albero vuoto con il registro verbale e un *coordinamento* del registro diagramma ad albero vuoto e il registro numerico. Tali coordinamenti generano il registro diagramma ad albero pieno.

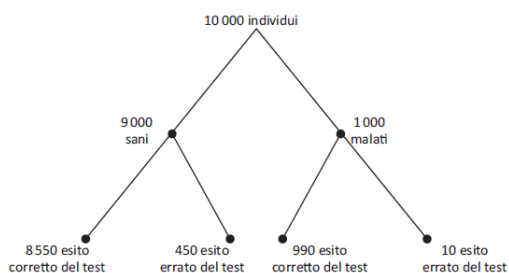
Il secondo sottotesto figurale è una tabella. Si ha una rappresentazione nel registro coordinato tabella piena dove, nella prima colonna devono essere indicati i numeri degli individui che hanno avuto un esito corretto del test, per ciascuna delle categorie espresse dalle due righe: "sani" "e malati". L'ultima riga riporta il totale degli individui con esito corretto del test. Nella seconda colonna devono essere riportati i valori degli individui che hanno avuto un esito errato al test, per ciascuna delle due categorie indicate dalle due righe, sani o malati, mentre nell'ultima riga è indicato il totale degli individui che hanno avuto esito errato al test. Infine nella terza colonna, per quanto riguarda la prima riga, devono essere indicati il numero di individui sani, nella seconda il numero di individui malati e nella terza è riportato il

totale della popolazione.

In termini di registri semplici compaiono il registro tabella vuota, il registro verbale, il registro numerico e il registro grafico (riferito ai puntini che indicano le parti della tabella da completare), mentre per i registri coordinati, si ha il registro tabella piena, ottenuto dal *coordinamento* del registro semplice tabella vuota con il registro verbale, dal *coordinamento* del registro semplice tabella vuota con il registro numerico e dal *coordinamento* del registro tabella vuota con il registro grafico.

Anche in questo caso si rileva un ulteriore coordinamento tra il registro tabella piena e gli altri registri dovuto al fatto che la tabella è da completare.

- D6. Si sa che in una popolazione di 10 000 individui il 10% è affetto da una malattia, mentre il 90% è sano. Il test che diagnostica la presenza della malattia è affidabile solo parzialmente: nel 5% dei casi rileva la malattia su un individuo sano e nell' 1% dei casi non rileva la malattia su un individuo malato. Il diagramma seguente riassume la situazione:



- a. Utilizzando i dati del diagramma ad albero, completa la seguente tabella.

	Esito corretto del test	Esito errato del test	Totale
Sani	.....	450	.....
Malati	.....	.....	.....
Totale	9 540	.....	10 000

- b. Qual è la probabilità che l'esito del test sia corretto per una persona scelta a caso da quella popolazione?
- A.  99,0%
- B.  97,0%
- C.  95,4%
- D.  85,5%
- c. Qual è la probabilità che un individuo, preso a caso tra tutti quelli che hanno avuto un esito corretto al test, sia sano? Scrivi il risultato in percentuale con una cifra dopo la virgola.

Risposta: ..... %

*Esempio 31 (INVALSI Secondaria Superiore 2012).*

## 7.3 Misura della complessità di un sottotesto figurale

Per misurare la complessità della componente figurale proponiamo di associare un codice di classificazione di 6 cifre (supponendo di utilizzare le cifre da 0 a 9) ad ogni componente, formato nel modo seguente (partendo da sinistra):

- prima cifra: numero di potenziali conversioni o coordinamenti presenti nel sottotesto figurale;
- seconda cifra: numero di registri presenti;
- terza cifra: numero di registri coordinati che compaiono nel sottotesto figurale;
- quarta cifra: numero dei registri semplici che compaiono nel sottotesto figurale;
- quinta cifra: numero di sovrapposizioni, intendendo per sovrapposizione il caso in cui in uno stesso registro semplice e nello stesso sottotesto figurale, si abbiano due o più rappresentazioni;
- sesta cifra: numero di trattamenti presenti nel sottotesto figurale. Questo significa che nel sottotesto figurale compaiono due rappresentazioni nello stesso registro che costituiscono una trasformazione l'una dell'altra oppure che nel quesito vi è un altro sottotesto figurale rispetto al quale, nel sottotesto in esame, vi è una rappresentazione semiotica che ne costituisce un trattamento.

L'assegnazione dei significati ad ogni cifra è stata scelta prendendo come riferimento il quadro di Duval. Secondo tale quadro, le conversioni costituiscono la fonte più consistente di difficoltà nella comprensione e quindi rappresentano la grandezza di dimensione maggiore (le centinaia di migliaia). Noi abbiamo associato alla conversione anche i coordinamenti, ritenendo che la complessità della costruzione della relazione tra due registri diversi fosse equivalente alla complessità della conversione. Dopodiché risulta determinante il numero di registri diversi che intervengono nel sottotesto figurale (decine di migliaia) e, tra questi, il numero di registri coordinati (unità di migliaia) contribuiscono alla complessità della rappresentazione più pesantemente rispetto ai registri semplici (centinaia). Le ultime due cifre daranno informazione sulla complessità del sottotesto figurale per quanto riguarda possibili sovrapposizioni (decine) ed infine possibili trattamenti (unità).

Come conseguenza, l'ordinamento numerico rispecchia l'ordinamento dei sottotesti figurali rispetto al grado di complessità. Inoltre, dal codice di classificazione di un sottotesto figurale, è possibile risalire a molte (ma non tutte) informazioni sui sistemi semiotici che intervengono nella rappresentazione utilizzando il criterio sopra descritto in direzione inversa.

Scriviamo adesso i codici di classificazione per i quesiti analizzati negli esempi precedenti.

Elenchiamo, per l'esempio 28, i registri che compaiono in questo sottotesto figurale, indicando se sono semplici o coordinati:

- il registro coordinato cartesiano;
- il registro semplice numerico;
- il registro semplice simbolico;
- il registro semplice verbale;
- il registro semplice grafico.

Elenchiamo adesso i coordinamenti e le conversioni individuate in questo sottotesto figurale:

- nel registro cartesiano si hanno 2 coordinamenti: tra il registro grafico e numerico e tra il registro numerico e simbolico;
- una conversione tra il registro verbale e il registro grafico.

Inoltre si ha un'unica rappresentazione nel registro grafico (il quadrilatero) e non si hanno né sovrapposizioni né trattamenti. Quindi il codice di classificazione risulta 351400.

Nel testo del quesito 29, i registri che compaiono nel sottotesto figurale sono:

- il registro coordinato tabella piena;
- il registro semplice tabella vuota;
- il registro semplice verbale;
- il registro semplice numerico.

Si hanno due *coordinamento*, uno tra il registro tabella vuota e il registro verbale e uno tra il registro tabella vuota e il registro numerico e non si hanno né sovrapposizioni né trattamenti. Quindi il codice di classificazione è 241300.

Nel testo del quesito 30 si hanno due sottotesti figurali. Nel primo sottotesto figurale compare il registro delle figure geometriche. Questo registro coordinato è il risultato del *coordinamento* tra il registro grafico e il registro simbolico. Elenchiamo i registri che compaiono nel primo sottotesto figurale:

- Il registro coordinato delle figure geometriche
- Il registro semplice grafico
- Il registro semplice simbolico

e quindi il codice di classificazione è 131200. Elenchiamo i registri che compaiono nel secondo sottotesto figurale:

- Il registro coordinato tabella piena
- Il registro semplice tabella vuota
- Il registro semplice verbale
- Il registro semplice simbolico
- Il registro semplice numerico.

Per quanto riguarda i coordinamenti, ne sono presenti 4. Quindi il codice di classificazione è 451400.

Nel testo del quesito dell'esempio 31 sono presenti due sottotestifigurati. Nel primo sottotesto figurale compaiono:

- il registro coordinato diagramma ad albero pieno;
- il registro semplice diagramma ad albero vuoto;
- il registro semplice verbale;
- il registro semplice numerico.

Si ha quindi un *coordinamento* del registro diagramma ad albero vuoto con il registro verbale e un *coordinamento* del registro diagramma ad albero vuoto e il registro numerico. Tali coordinamenti generano il registro diagramma ad albero pieno. Quindi il codice di classificazione risulta 241300. Elenchiamo i registri che compaiono nel secondo sottotesto figurale:

- registro coordinato tabella piena;
- registro semplice tabella vuota;
- registro semplice verbale;
- registro semplice numerico;
- registro semplice grafico.

Si ha un *coordinamento* tra il registro tabella vuota e il registro verbale, un *coordinamento* tra il registro tabella vuota e il registro numerico e un *coordinamento* tra il registro tabella vuota e il registro grafico. Inoltre si ha un ulteriore coordinamento tra il registro tabella piena e gli altri registri per il completamento della tabella. Quindi il codice di classificazione risulta 451400.

## 7.4 Lo spazio topologico dei codici di complessità

Di seguito descriviamo come sia possibile definire una distanza sullo spazio dei codici di classificazione, tale da rendere tale spazio uno spazio metrico. Indichiamo con  $C$  lo spazio dei codici di classificazione dei sottotesti figurati: per come è stato definito il codice di classificazione, si ha che  $C \in \mathbb{Z}$ .

*Definizione 1.* Distanza pitagorica sull'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  [Prodi, 1992]. Consideriamo su  $\mathbb{R}$  la distanza pitagorica:

$$a, b \in \mathbb{R} \quad d(a, b) = |a - b|.$$

La coppia  $(\mathbb{R}, d)$  costituisce uno spazio metrico.

*Proposizione 1.*  $C$  è uno spazio metrico rispetto alla distanza pitagorica.

**Dim. 1.** Sia  $C$  lo spazio dei codici di classificazione. Poiché  $C$  è contenuto in  $\mathbb{Z}$ , che a sua volta è sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ , lo spazio  $C$  eredita da  $\mathbb{R}$  la struttura metrica.

Quindi la restrizione allo spazio  $C$  della distanza pitagorica definisce una distanza sullo spazio dei codici di classificazione dei sottotesti figurati. E' quindi possibile calcolare una distanza tra le componenti figurati in termini di complessità, utilizzando i loro codici di classificazione.

Nell'esempio 28 si utilizza questa definizione di distanza sullo spazio dei codici di classificazione per confrontare due versioni dello stesso quesito, nelle

quali viene modificata solo la componente figurale. In questo caso la distanza calcolata fra i due sottotesti figurali prende il nome di “rumore”.

L’osservazione che possiamo fare su questa componente figurale è che a livello risolutivo la struttura cartesiana non ha nessuna utilità. Sarebbe stato sufficiente rappresentare il quadrilatero su un reticolo. In questo caso avremmo il registro grafico in cui sarebbe rappresentato il reticolo e il registro coordinato delle figure geometriche in cui sarebbe rappresentato il quadrilatero, con le relative lettere dei vertici, e poi l’informazione sulla unità di misura di un centimetro, espressa sia nel registro grafico, sia nel registro verbale. Si avrebbe il *coordinamento* tra il registro grafico e il registro simbolico che determina il registro coordinato delle figure geometriche e la conversione tra il registro grafico e il registro verbale per l’unità di misura.

In questo caso i registri sarebbero: il registro coordinato delle figure geometriche, il registro semplice grafico, il registro semplice simbolico e il registro semplice verbale. Avremmo un *coordinamento* (quello all’interno del registro coordinato delle figure geometriche) e una conversione e non avremmo nessuna sovrapposizione e nessun trattamento. Quindi il codice di classificazione risulterebbe 241300.

Poiché questo codice misura la complessità del sottotesto figurale, in questo secondo tipo di rappresentazione avremmo espresso le informazioni necessarie alla risoluzione del quesito con una più bassa complessità di rappresentazione. E’ possibile misurare questa riduzione di difficoltà, che chiamiamo rumore del sottotesto figurale del quesito, calcolando la distanza tra i due sottotesti figurali (cioè calcolando la differenza in valore assoluto tra i due codici di classificazione) data da:

$$|351400 - 241300| = 110100$$

Il valore 110100 che è la distanza tra le due componenti figurali, fornisce la misura del rumore presente nel sottotesto figurale originale.

## 7.5 Esempi di classificazione e di individuazione delle difficoltà di comprensione di quesiti di tipo *figurale*

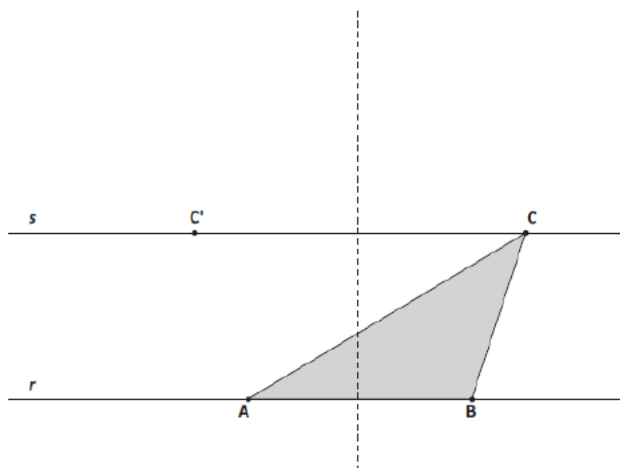
Se nel testo di un quesito compaiono dei sottotesti figurali, il Lettore può incontrare difficoltà interpretative sia nella rappresentazione proporzionale

e nella costruzione del modello mentale. Queste possono riguardare l'interpretazione delle espressioni numeriche o simboliche che vi compaiono, la presenza di conversioni o trattamenti all'interno del sottotesto figurale, possono essere legate al tipo di variabili o di informazioni che sono rappresentate oppure alle possibili conversioni tra il sottotesto figurale e la restante parte del testo del quesito.

Di seguito sono riportate le classificazioni complete di alcuni quesiti che presentano sottotesti figurali, riportando l'analisi e la individuazione delle difficoltà di comprensione in particolare per la componente figurale.

Il primo esempio è il quesito riportato nell'esempio 1, il cui testo viene riportato qui sotto per una maggiore leggibilità:

**D3.** *ABC è uno degli infiniti triangoli aventi la base AB sulla retta r e il terzo vertice in un punto qualunque della retta s parallela a r e passante per C.*



**Fra gli infiniti triangoli descritti sopra, quali hanno la stessa area di ABC?**

Questo quesito si classifica come:

Contesto Matematico: situazione interna alla matematica

Testo verbale/simbolico/figurale: si ha una componente figurale e compaiono i simboli  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dei vertici del triangolo,  $ABC$ , per il triangolo,  $AB$  la base del triangolo, le rette  $r$  e  $s$  e il punto  $C'$  sulla retta  $s$ , il triangolo  $ABC'$ .

Dizionario Matematico: compaiono i termini triangolo, retta, parallela, simmetrico, asse, triangolo isoscele, triangolo rettangolo, area.

Dizionario ibrido: compaiono i termini base, vertice, infiniti e passante: base, vertice e infiniti, che appartengono sia al linguaggio naturale sia al linguaggio matematico ma con significati diversi e, passante, che appartiene al linguaggio naturale ma che è utilizzato in ambito matematico geometrico per esprimere una relazione tra rette e punti

Coesione del testo: sia l'espressione "la base  $AB$ " sia l'espressione "il terzo vertice" costituiscono due anafora nominali, riferendosi al triangolo  $ABC$  indicato proprio all'inizio del testo. Si ha poi un'altra anafora nominale per  $r$ , ripetendo lo stesso termine, quando si parla "della retta  $s$  parallela per  $r$ " e nell'espressione "passante per  $C$ ",  $C$  è di nuovo un'anafora nominale per il vertice del triangolo iniziale  $ABC$ . In questo modo si rileva un errore del testo che utilizza lo stesso simbolo  $C$  per individuare il terzo vertice del triangolo di riferimento rappresentato nella figura sia per il terzo vertice del triangolo modificato.

Conoscenza Concettuale: Relazione tra nodi non conosciuti e di livello riflessivo. I nodi di conoscenza attivati dal quesito e da mettere in relazione sono i significati dei termini matematici, l'interpretazione dei termini del dizionario ibrido nel modello della geometria sintetica, il significato di altezza di un triangolo e la sua rappresentazione grafica e la procedura per il calcolo dell'area di un triangolo. Il nodo non conosciuto è proprio la proprietà dei triangoli  $ABC'$  di avere tutti la stessa area, proprietà non evidente per i triangoli, e poichè tale proprietà si estende a tutta la classe dei triangoli aventi il terzo vertice su una stessa retta parallela alla base  $AB$ , il quesito si classifica come Relazione tra nodi non conosciuti e di livello riflessivo.

Conoscenza Procedurale: Algoritmi, trattamento grafico. Si hanno trasformazioni di rappresentazione del triangolo di vertici  $ABC'$  all'interno del registro coordinato geometrico (sottoregistro del registro grafico) attraverso lo spostamento del punto  $C'$  sulla retta  $s$ , necessario per la visualizzazione dei triangoli dei quali il quesito chiede di analizzare le proprietà relative all'area

Testo Operativo, di tipo indiretto: è possibile procedere attraverso l'esame di casi particolari, modificando la posizione del punto  $C'$  sulla retta  $s$ , la comprensione del testo può essere facilitata da una fase procedurale dove i diversi tipi di triangoli  $ABC'$  sono confrontati con il triangolo

$ABC$  e dove le proprietà rispetto alla misura della base e dell'altezza vengono analizzate. Si osserva che la conoscenza delle proprietà della misura della base e dell'altezza dei triangoli  $ABC'$  rispetto ad  $ABC$  possono non essere attivate prima della lettura del testo, ma possono essere prodotte proprio dalla fase procedurale prima descritta.

Analisi della componente figurale:

In questo testo si ha una sola componente figurale. Compare il registro coordinato delle figure geometriche, ottenuto dal *coordinamento* del registro semplice grafico e del registro semplice simbolico. Si hanno cinque rappresentazioni nel registro coordinato delle figure geometriche: la retta  $s$ , la retta  $r$  a cui appartengono i vertici del lato  $AB$  del triangolo  $ABC$ , tra loro parallele, il triangolo  $ABC$ , il punto  $C'$  sulla retta  $s$  e l'asse del segmento  $AB$ .

Elenchiamo i registri semplici e coordinati che compaiono in questo sottotesto figurale: il registro coordinato delle figure geometriche, il registro semplice grafico, il registro semplice simbolico.

Vi sono cinque rappresentazioni nello stesso registro coordinato delle figure geometriche e un trattamento dato dallo spostamento del punto  $C$  nel punto  $C'$  lungo la retta  $s$  quindi il codice di classificazione di questo sottotesto figurale risulta 131251.

Difficoltà di secondo livello:

I possibili ostacoli interpretativi per quanto riguarda la rappresentazione proposizionale riguardano la conoscenza dei significati dei termini matematici riportati nel Dizionario Matematico. In particolare, a livello di dizionario, per il termine matematico *area*, è sufficiente il suo significato geometrico e quindi risulta non necessaria la conoscenza della procedura di calcolo, che invece interverrà tra le difficoltà di terzo livello. Per quanto riguarda il Dizionario Ibrido, il termine *infiniti* appartiene sia al linguaggio naturale sia al linguaggio matematico, ma con significati diversi: mentre nel linguaggio naturale si utilizza per indicare un numero elevato di volte in cui un fatto si può ripetere o si è ripetuto in passato oppure per esprimere l'idea di qualcosa veramente grande in qualche senso, normalmente non quantificabile, nel linguaggio matematico il termine *infinito* ha un suo preciso significato e delle proprietà. In questo quesito il termine *infiniti* si riferisce all'insieme dei triangoli che possono essere generati spostando il vertice  $C'$  sulla retta  $s$ , quindi tale insieme è in corrispondenza biunivoca con i punti della retta  $s$ , dalla quale quindi eredita la cardinalità del continuo.

Per quanto riguarda la coesione del testo, i legami coesivi costruiti dal Lettore possono non essere consistenti con quelli attesi dall'Autore e quindi non è

possibile non raggiungere una rappresentazione proposizionale corretta. D'altra parte, la possibilità per il Lettore di incontrare questo tipo di ostacolo interpretativo nel testo di questo quesito è molto elevata, in considerazione del fatto che sono stati rilevati errori nella stesura del testo, proprio a livello coesivo, da imputare all'Autore stesso.

Difficoltà di terzo livello:

Per quanto riguarda la costruzione del modello mentale si possono avere difficoltà a livello del Dizionario Ibrido per quanto riguarda l'interpretazione del termine *passante* nel modello della geometria sintetica, legato anche al modo in cui nel testo il termine viene utilizzato. Infatti questo termine lo incontriamo nella descrizione del terzo vertice del triangolo dove però prima viene presentata la retta  $s$  che in realtà non è ancora conosciuta mentre i dati conosciuti risultano la retta  $r$ , a cui appartiene la base  $AB$  e, appunto, il punto  $C$ , al quale si riferisce il termine *passante*, che però sono indicati solo alla fine della frase.

Infatti il significato di tale termine è che la retta  $s$ , della quale sappiamo solo che è parallela alla retta  $r$ , deve passare per il punto  $C$ , vertice del triangolo dato nella figura. Questo tipo di costruzione, dove i dati conosciuti si recuperano solo alla fine della descrizione, può costituire un ostacolo interpretativo. Un'altra difficoltà per la costruzione del modello mentale è legata alla conversione tra il registro verbale, nel quale si descrivono i triangoli, e il registro delle figure geometriche del sottotesto figurale, all'interno del quale la descrizione verbale va interpretata.

Inoltre lo spostamento del punto  $C$  nel punto  $C'$  sulla retta  $s$  costituisce un trattamento nel registro delle figure geometriche e tale interpretazione è necessaria per poter mettere in relazione i triangoli che il testo del quesito chiede di analizzare.

Vi è poi un'altra conversione necessaria che può creare difficoltà interpretative tra la procedura di calcolo dell'area di un triangolo e l'individuazione della base e dell'altezza nel sottotesto figurale.

Per quanto riguarda la Relazione tra nodi conosciuti, è possibile che il Lettore ritenga necessario avere già tutti i nodi attivati al momento della lettura del quesito, impedendo in questo modo il completamento del modello mentale o provocando la costruzione di un modello mentale non compatibile con quello "Canonic" atteso dall'Autore. Lo stesso tipo di risultato si ottiene se il Lettore, trovandosi davanti ad un testo esplorativo, non mette in atto procedure efficaci che permettano di attivare nuovi nodi di conoscenza, attraverso i quali sia possibile mettere in relazione le aree dei triangoli  $ABC'$  con l'area del triangolo iniziale  $ABC$ .

Il fatto che la relazione tra i nodi sia di tipo riflessivo significa che il Lettore, non solo deve essere in grado di riconoscere gli elementi "base e "altezza"

per un qualsiasi triangolo  $ABC$  generato come descritto dal testo ma, per diventare Lettore Modello, deve saper riconoscere che l'area è un invariante per questi triangoli, altrimenti la relazione tra i nodi di conoscenza rimane "primaria" e quindi non rispondente alle attese dell'Autore.

Il secondo esempio è l'esempio 10, il cui testo riportiamo di seguito.

**D6. Nel diagramma di figura 1 sono riportati i consumi elettrici (in TWh - terawattora) in Italia dal 2000 al 2005 in funzione della provenienza dell'energia dall'Autoproduzione, dal Mercato libero o dal Mercato vincolato.**

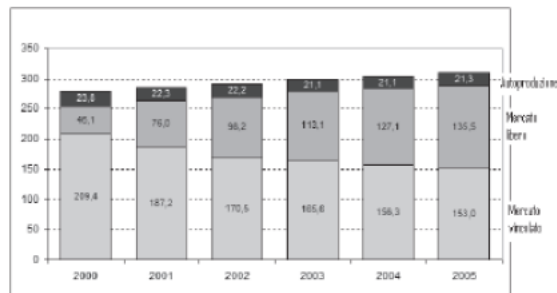


Figura 1

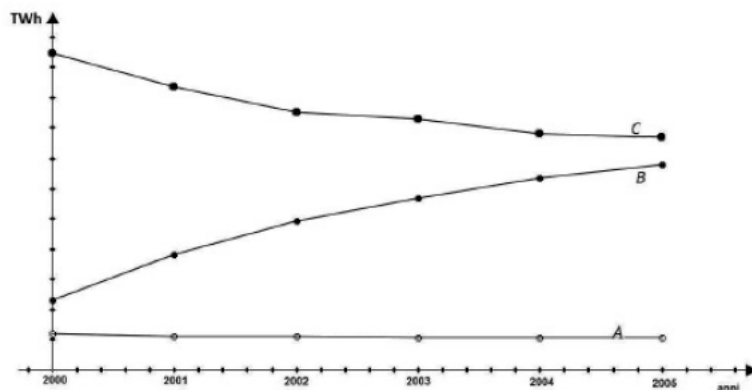


Figura 2

Questo quesito si classifica come:

Contesto non Matematico: la situazione trattata dal quesito si riferisce alla problematica della provenienza dell'energia elettrica e quindi non intervengono solo oggetti matematici

Confronta le figure 1 e 2 e completa le seguenti frasi indicando la provenienza dell'energia (Autoproduzione, Mercato libero, Mercato vincolato).

1.	Il grafico A corrisponde all'andamento dei consumi di energia proveniente da	.....
2.	Il grafico B corrisponde all'andamento dei consumi di energia proveniente da	.....
3.	Il grafico C corrisponde all'andamento dei consumi di energia proveniente da	.....

Testo verbale generalizzato/simbolico/figurale:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  per indicare i grafici; vi sono tre sottotesti figurali: i diagrammi (Figura 1), i grafici (Figura 2) e la tabella

Dizionario matematico: compaiono i termini *diagrammi* e *grafico*

Dizionario Ibrido: compare l'espressione in *funzione*

Dizionario non matematico per costruire il modello: si riferisce ai termini Terawattora, Autoproduzione, Mercato vincolato e Mercato libero

Enciclopedia – Conoscenza delle cose del mondo- per costruire il modello: fa riferimento al significato di energia e più in particolare di consumo energetico; si tratta però di conoscenze necessarie per la costruzione del modello mentale ma non per la risoluzione del quesito nel senso che la relazione matematica che lega la figura 1 e la figura 2 non dipende dal significato dei dati rappresentati.

Conoscenza concettuale: Relazione tra nodi conosciuti e di livello riflessivo. I nodi di conoscenza matematica attivati dal quesito e che devono essere messi in relazione per la comprensione del testo sono: il significato di diagramma, di funzione, e di grafico, il processo interpretativo di un diagramma a valori nell'insieme dei numeri decimali, l'interpretazione del grafico di una funzione e la lettura di una tabella. Tali nodi, facendo riferimento alle Linee Guida e le Indicazioni Nazionali, risultano nodi già attivati e quindi il quesito, rispetto alla Conoscenza Matematica, si classifica come Relazione tra nodi conosciuti. Inoltre tale relazione è di livello Riflessivo perché permette di collegare il registro coordinato cartesiano, in cui sono rappresentate la figura 1 e la figura 2, con il registro coordinato tabella piena, attraverso il quale si chiede di fornire la soluzione del quesito.

Conoscenza procedurale: Algoritmi, trattamento grafico. Ciascun grafico del secondo sottotesto figurale (Figura 2) costituisce una trasformazione

di rappresentazione dei dati espressi da uno dei diagrammi del primo sottotesto figurale (Figura 1). Si hanno quindi tre trattamenti all'interno del registro coordinato cartesiano: da qui la classificazione del quesito rispetto alla Conoscenza Procedurale.

Analisi della componente figurale:

Nel testo di questo quesito si hanno 3 componenti figurali: la Figura 1, la Figura 2 e la tabella.

Nella figura 1 compaiono il registro coordinato cartesiano, il registro semplice numerico decimale e il registro semplice verbale. Il registro cartesiano è dato dal *coordinamento* tra il registro grafico e il registro numerico. Il registro numerico permette di esprimere sull'asse orizzontale gli anni di produzione dell'energia, dal 2000 al 2005, mentre sull'asse verticale sono indicati i consumi dell'energia, espressi mediante livelli di valore intero. Nel registro cartesiano sono presenti 3 rappresentazioni mediante diagrammi sovrapposte. All'interno di ciascun diagramma e quindi per ogni tipo di provenienza, è riportato il valore decimale (nel registro dei numeri decimali) della produzione di energia per ogni anno in terawattora. Nel registro verbale sono esplicitate le provenienze dell'energia: Autoproduzione, Mercato libero e Mercato vincolato. Ciascuna provenienza è associata ad un diagramma e quindi ad una rappresentazione cartesiana e tali rappresentazioni sono sovrapposte. Elenchiamo i registri semplici e coordinati che compaiono in questo sottotesto figurale:

- il registro coordinato cartesiano
- il registro semplice grafico
- il registro semplice dei numeri naturali
- il registro semplice verbale
- il registro semplice dei numeri decimali

Si hanno tre rappresentazioni cartesiane sovrapposte, un *coordinamento* tra il registro grafico e il registro numerico, nessuna conversione e nessun trattamento quindi il codice di classificazione della Figura 1 risulta: 151430.

Nella Figura 2 compaiono il registro coordinato cartesiano, il registro simbolico e il registro verbale. Il registro cartesiano è dato dal *coordinamento* tra il registro grafico e il registro numerico e dal *il coordinamento* tra il registro grafico e il registro verbale. Infatti sull'asse delle ascisse sono rappresentati gli anni dal 2000 al 2005 e nel registro verbale è anche riportato il termine "anni".

Sull'asse delle ordinate sono riportati i valori numerici dei consumi elettrici in Terawattora, la cui abbreviazione TWh, è esplicitata nel registro verbale. Nel registro coordinato cartesiano si hanno 3 rappresentazioni sovrapposte date da 3 grafici. Nel registro simbolico, ad ogni grafico è associato un simbolo, A, B, C. Ciascuno dei 3 grafici costituisce un trattamento di uno dei diagrammi rappresentati nella componente figurale precedente (Figura 1). Elenchiamo i registri semplici e coordinati che compaiono in questo sottotesto figurale:

- il registro coordinato cartesiano
- il registro semplice grafico
- il registro semplice numerico intero
- il registro semplice verbale
- il registro simbolico

Si hanno 3 rappresentazioni cartesiane sovrapposte, date da 3 grafici. Ogni grafico costituisce un trattamento rispetto al sottotesto figurale precedente e ogni grafico è individuato da un simbolo *A*, *B*, *C*. Il codice di classificazione di questa componente figurale è 251433.

Per quanto riguarda il terzo sottotesto figurale, compaiono il registro coordinato tabella piena, il registro grafico, il registro verbale e il registro simbolico. Il registro tabella piena è dato dal *coordinamento* tra il registro semplice tabella vuota e il registro verbale, il *coordinamento* tra il registro tabella vuota e il registro grafico e il *coordinamento* tra il registro tabella vuota e il registro simbolico. Ogni riga è etichettata da un simbolo indicato nella prima colonna. Nella seconda colonna compaiono il registro verbale e simbolico. Nella terza colonna, i puntini, nel registro grafico, esprimono la parte della tabella da completare con il tipo di provenienza dell'energia, in modo che la relazione tra il grafico indicato in una certa riga nella seconda colonna e il rispettivo completamento nella terza colonna permetta di individuare un trattamento tra un diagramma della Figura 1 e un grafico della Figura 2, all'interno del registro cartesiano. Elenchiamo i registri semplici e coordinati che compaiono in questo sottotesto figurale:

- il registro coordinato tabella piena
- il registro semplice grafico
- il registro semplice verbale
- il registro semplice simbolico

Si hanno 3 coordinamenti per il registro tabella piena e nessun trattamento e nessuna sovrapposizione. Quindi il codice di classificazione risulta 341300.

Difficoltà di secondo livello:

Nel testo di questo quesito si possono avere difficoltà interpretative a livello della rappresentazione proposizionale per quanto riguarda il Dizionario Matematico, il Dizionario Ibrido e il Dizionario non Matematico. L'espressione "in funzione" appartiene sia al linguaggio matematico sia al linguaggio naturale ma con significati diversi: mentre nel linguaggio naturale esprime una dipendenza generica tra due fatti o tra due eventi che si sono già verificati oppure che devono ancora avvenire, nel linguaggio matematico, esprime una relazione tra insiemi che deve verificare delle specifiche proprietà algebriche. Se il significato utilizzato nel processo interpretativo si riferisce al linguaggio naturale la rappresentazione proposizionale del Lettore non potrà essere consistente con quella attesa dall'Autore Modello.

Per quanto riguarda invece il Dizionario non Matematico, il significato dei termini Terawattora, Autoproduzione, Mercato vincolato e Mercato libero può costituire un ostacolo interpretativo per il Lettore. E' da osservare che tali significati non sono necessari alla comprensione della struttura matematica del quesito. In questo caso l'insegnante può decidere di modificare il testo eliminando i termini specifici, oppure lavorare sul testo originale, preoccupandosi di esplicitare questi significati che poi avranno effetti anche a livello di costruzione del modello mentale.

Difficoltà di terzo livello:

In relazione alle possibili difficoltà interpretative nella costruzione del modello mentale, rispetto all'Enciclopedia, il quesito si classifica come Enciclopedia – Conoscenza delle cose del mondo- per costruire il modello. Questo significa che il contesto non matematico in cui il quesito è ambientato richiede una conoscenza enciclopedica legata al significato di energia e di consumo energetico. Questa conoscenza è necessaria per la costruzione del modello mentale ma non per la comprensione della struttura matematica del quesito, che invece fa riferimento all'interpretazione di grafici e diagrammi e al loro trattamento. Anche i termini Terawattora, Autoproduzione, Mercato vincolato e Mercato libero fanno riferimento a questa conoscenza enciclopedica. Una conoscenza enciclopedica non adeguata rispetto alle aspettative dell'Autore può comportare la costruzione di un modello mentale non consistente rispetto a quello "canonico" e non permettere quindi la comprensione del testo.

Per quanto riguarda la Conoscenza Concettuale, è possibile che il Lettore non abbia attivato i nodi di conoscenza richiesti rispetto al suo livello scolare oppure è possibile che i nodi siano attivati ma manchino alcune relazioni tra

tali nodi: per esempio il collegamento tra il significato di funzione e di grafico oppure tra il significato di funzione e di diagramma oppure non si riesce a mettere in relazione l'interpretazione del diagramma con quella del grafico oppure la tabella con le rappresentazioni precedenti.

Il quesito si classifica, inoltre, sempre per quanto riguarda la Conoscenza Concettuale di Livello Riflessivo perché mette in relazione il registro cartesiano con il registro tabella. E' possibile che il Lettore non riesca a collegare all'interno del testo questi due tipi di registri e che, per questo motivo, non raggiunga un unico modello mentale. In merito alla Conoscenza Procedurale, il quesito si classifica come Algoritmi, trattamento grafico perché per la sua comprensione è richiesta la conoscenza delle procedure necessarie per il trattamento all'interno del registro cartesiano, tra la rappresentazione mediante diagrammi e la rappresentazione mediante grafici. La mancanza di questa conoscenza può causare il non raggiungimento di un unico modello mentale oppure di un modello mentale non coerente rispetto a quello atteso dall'Autore.

# Capitolo 8

In questo lavoro di tesi è stato progettato e realizzato un prototipo di un corso di formazione sulle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo.

## 8.1 Percorso di formazione sulle difficoltà linguistiche e sulla comprensione del testo dei quesiti OCSE-PISA e INVALSI

L'obiettivo del corso è dare un contributo nella direzione di un miglioramento della didattica degli insegnanti, con particolare riferimento alle prove standardizzate esterne OCSE-PISA e INVALSI.

In tali prove si riconosce una sostanziale difficoltà dal punto di vista della comprensione del testo, che però non viene né evidenziata, né affrontata nei quadri di riferimento corrispondenti. In questo percorso di formazione viene proposto un nuovo quadro di riferimento per le prove standardizzate esterne che ha lo scopo di individuare e interpretare le difficoltà di comprensione dei quesiti. Vengono inoltre proposte attività di recupero in base al tipo di problematiche evidenziate.

Il Corso di formazione è rivolto agli insegnanti di Scuola Secondaria Secondo Grado<sup>1</sup> è stato realizzato in modalità E-learning, in forma *blended*, su piattaforma Moodle, con il supporto di un tutor.

Sono previsti due incontri in presenza, uno iniziale ed uno finale. L'incontro iniziale ha l'obiettivo di conoscere e far incontrare gli insegnanti che seguiranno il corso, in modo anche da facilitare i successivi contatti che avverranno in piattaforma; inoltre permette una introduzione all'approccio alla interpre-

---

<sup>1</sup>Il nostro Quadro di Riferimento può essere esteso all'interpretazione delle difficoltà di comprensione dei quesiti della Scuola Secondaria di Primo Grado ma, per il momento, gli esempi e le attività che sono proposte in piattaforma riguardano solo la Secondaria di Secondo Grado

tazione delle difficoltà che verrà poi sviluppato nel corso. L'incontro finale, invece, permetterà di raccogliere le esperienze e le riflessioni degli insegnanti, anche in prospettiva di un miglioramento del percorso e della sua efficacia didattica.

## 8.2 Fasi del percorso di formazione

Il percorso si suddivide in cinque fasi:

Fase 1: in questa prima fase viene presentato il Quadro di Riferimento Teorico per l'osservazione e l'interpretazione delle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo nei quesiti INVALSI e OCSE-PISA.

Fase 2: In questa fase del corso vengono descritte le caratteristiche del testo attraverso le quali saranno classificati i quesiti, proponendo esempi sia sulle singole caratteristiche sia sulla classificazione completa dei quesiti. Viene poi affrontata la definizione e l'analisi della complessità dei sottotesti figurali. Sia per i criteri di classificazione sia per l'analisi dei sottotesti figurali sono proposti dei laboratori che hanno lo scopo di guidare l'insegnante nella individuazione delle caratteristiche evidenziate all'interno del testo.

Fase 3: Individuazione delle Difficoltà. A partire dalla classificazione del testo, con riferimento al quadro teorico, si identificano le possibili difficoltà di comprensione del quesito.

Fase 4: Proposte di attività da svolgere in classe. In questa fase si propongono: percorsi di intervento su specifiche criticità che emergono dalla classificazione, attività tematiche oppure che consentono di lavorare su quesiti che affrontano tutte le diverse problematiche legate alla comprensione del testo in contesti narrativi.

Fase 5: Realizzazione e Verifica dell'esperienza in classe. Una volta individuato il tipo di attività di intervento o di laboratorio più rispondente ai bisogni della propria classe, si tratta di realizzare l'intervento, scrivendo un diario dell'esperienza, possibilmente dopo ogni lezione. Infine sarà richiesta una relazione conclusiva dell'attività, nella quale raccogliere le riflessioni e le criticità evidenziate nell'intervento.

## 8.3 La piattaforma Moodle del Corso

Questo prototipo di Corso di Formazione per insegnanti in modalità E-Learning è stato sviluppato su piattaforma Moodle, come già introdotto e motivato nel Capitolo 4. Nei paragrafi successivi saranno descritte le fasi del Corso, facendo riferimento agli specifici “strumenti” che la piattaforma Moodle rende disponibili per la loro realizzazione. L’URL della piattaforma è:

<http://fox.dm.unipi.it/moodle/course/view.php?id=28>.



Figura 8.1: Pagina iniziale del Corso

La figura 8.3 mostra la pagina iniziale del Corso. Una volta acceduto alla piattaforma sono sostanzialmente due le attività principali che si trovano nella pagina iniziale: *Orientarsi nel Corso* e *Al percorso di formazione sulle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo*.

La prima attività è realizzata come un Lezione di Moodle ed ha l’obiettivo di presentare tutto quello che la piattaforma offre, spiegando come sia possibile recuperarlo. Come mostrato dal menù della figura precedente, questa attività permette di avere informazioni sul Corso, sulle risorse e sui materiali che è possibile trovare in piattaforma, sulla struttura in sezioni e sulle attività collaborative del Corso.

Anche la seconda attività è stata realizzata come una Lezione di Moodle e costituisce l’attività più importante della piattaforma perché il percorso di

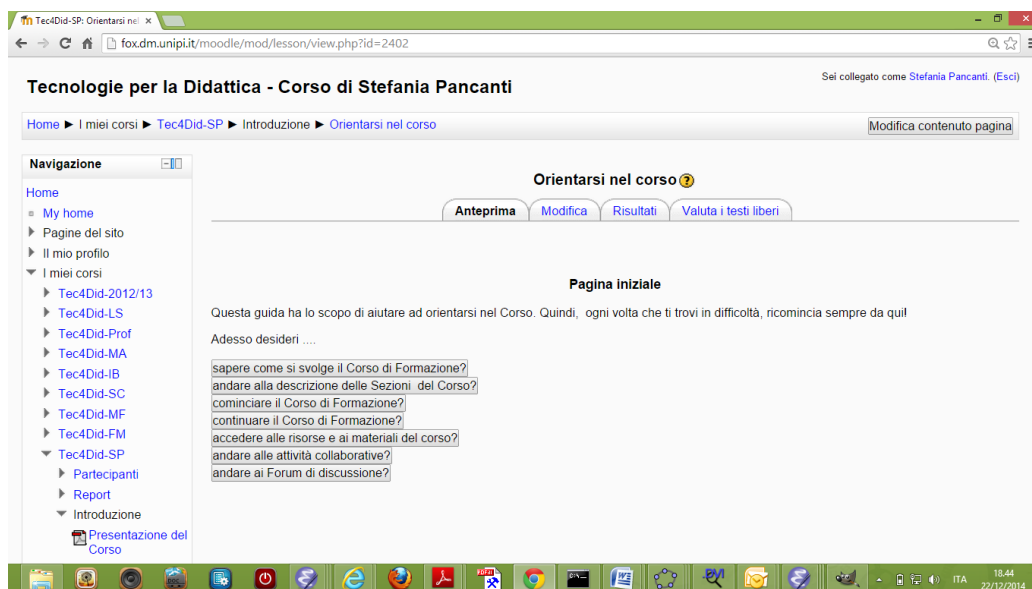


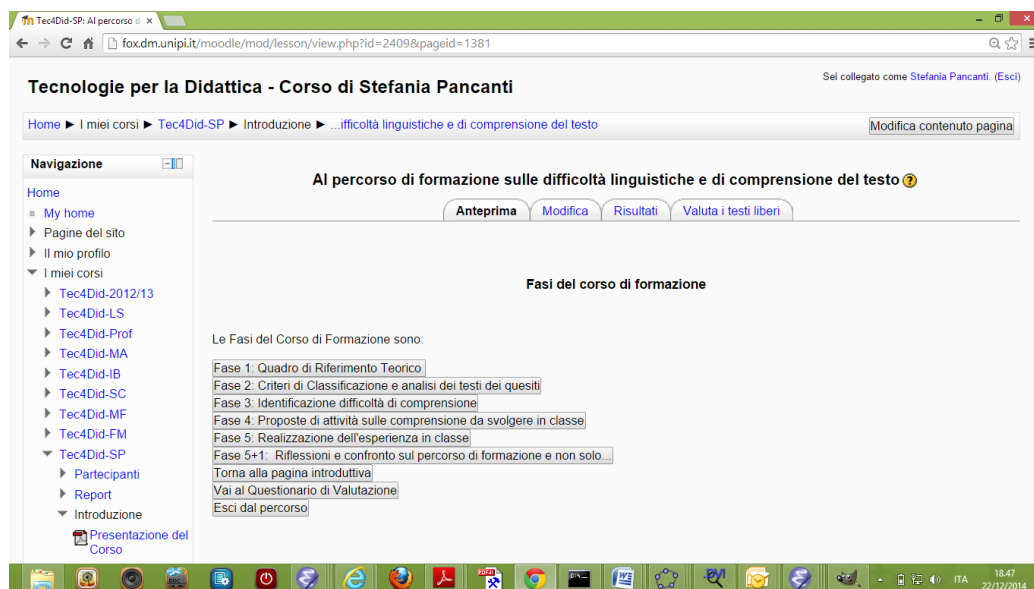
Figura 8.2: Menù di scelta per l'attività *Orientarsi nel Corso*

formazione si svolge interamente all'interno di questa Lezione. E' da questa attività infatti che si accede alle pagine e alle risorse delle diverse sezioni della piattaforma. Di seguito sarà descritta in modo più dettagliato ciascuna fase del Corso, descrivendo gli "strumenti" di Moodle impiegati per la loro realizzazione.

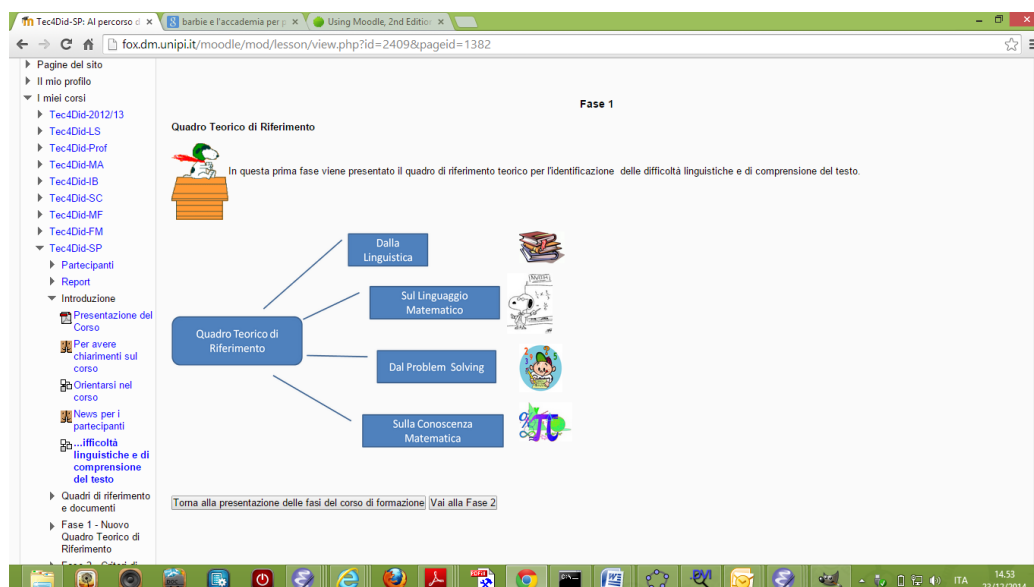
## 8.4 Fase 1: il Quadro di Riferimento Teorico

In questa prima fase del corso viene presentata la parte teorica del Quadro di Riferimento. Questo quadro attinge a diversi ambiti di ricerca che sono la Linguistica e in particolare la Teoria dei Modelli Mentali, la Teoria Semiotica delle Rappresentazioni, la Teoria della Conoscenza Matematica e il Problem Solving. Ciascuno di questi ambiti è indicato nella pagina a cui si accede dal menù principale cliccando sulla *Fase 1*.

Da questa pagina, cliccando sulle icone corrispondenti ai vari ambiti, è possibile aprire il collegamento alle pagine introduttive delle diverse parti del quadro di riferimento. Da ciascuna pagina introduttiva sono possibili esplorazioni del quadro di riferimento con diversi gradi di approfondimento, anche perché l'obiettivo è quello di prendere confidenza con il tipo di approccio alle difficoltà di comprensione proposto in questo quadro di riferimento, al quale sarà possibile ritornare nelle fasi successive per approfondire e verificare le conoscenze acquisite.



Cliccando su una delle quattro icone sarà aperta la pagina di collegamento



in un'altra finestra, all'interno della quale avverrà l'esplorazione. Per tornare nelle pagine del percorso sarà sufficiente chiudere la finestra corrente.

Nella *Fase 1* è previsto un unico Forum nel quale è possibile discutere di ciascuno degli ambiti di ricerca da quale prende spunto il Quadro di Riferimento. Lo scopo del Forum è quello di fare domande al tutor inerenti ai contenuti di conoscenza affrontati oppure, tra i partecipanti, raccogliere ri-

flessioni e dubbi, condividere le proprie opinioni e confrontarsi sulle diverse opinioni.

## 8.5 Fase 2: i criteri di classificazione

In questa fase del Corso sono descritte le caratteristiche del testo attraverso le quali saranno analizzati i quesiti. Le caratteristiche, come descritte nel Capitolo 6, sono: il Contesto, il Tipo di testo, la Coesione del testo, il Dizionario, la Conoscenza Enciclopedica, la Conoscenza Matematica e l'Operatività di un testo. Queste caratteristiche costituiscono i criteri in base ai quali i partecipanti saranno in grado di classificare i quesiti e attraverso questa classificazione, nella Fase 3, potranno individuare eventuali difficoltà linguistiche e di comprensione del testo.

Cliccando dal menù principale della figura 8.3 sulla *Fase 2*, viene aperto un nuovo menù, specifico di questa fase, come riportato nella figura 8.5. Da

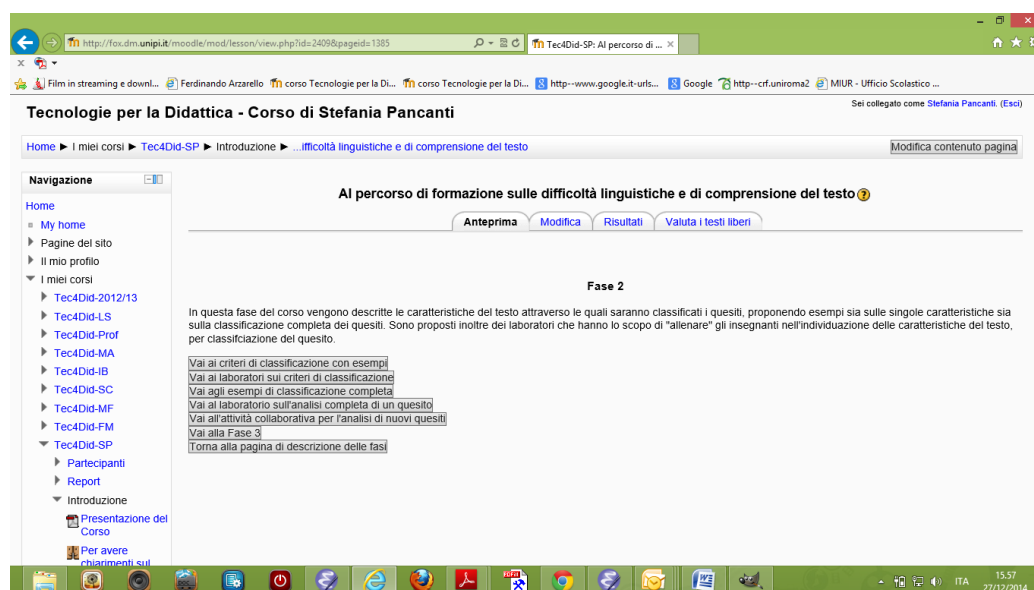


Figura 8.3: Menù principale della *Fase 2*

questo menù è possibile, cliccando su “Vai ai criteri di classificazione con esempi”, andare alla descrizione delle caratteristiche del testo, ciascuna illustrata da una parte teorica, che fa riferimento al Quadro Teorico, e una parte di esempi, dove viene mostrato come queste caratteristiche possano essere individuate nel testo. La figura 8.5 mostra questa pagina: cliccando sui tasti

inseriti in fondo alla pagina, ciascuno corrispondente ad una determinata caratteristica, è possibile accedere alla relativa descrizione ed agli esempi. Le

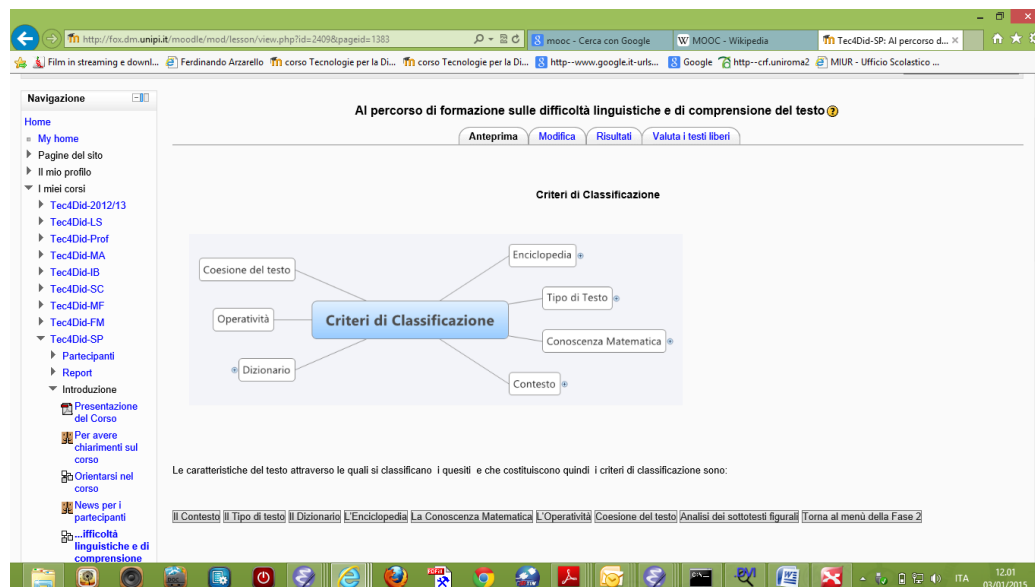


Figura 8.4: Pagina dalla quale è possibile accedere alla descrizione ed agli esempi di ciascuna caratteristica utilizzata per l'analisi del quesito

altre opzioni del menù della Fase 2 permettono di visualizzare alcuni esempi di descrizione completa delle caratteristiche di un quesito oppure di accedere alle attività laboratoriali o collaborative che saranno illustrate di seguito.

### 8.5.1 Le attività laboratoriali

Le attività laboratoriali sono attività dove ciascun partecipante può sperimentare e verificare la classificazione di un quesito rispetto ad una specifica caratteristica oppure, in modo completo, rispetto a tutte le caratteristiche di classificazione, avendo la possibilità di controllare le proprie risposte, attraverso feed-back del sistema immediati. Tali repliche hanno l'obiettivo di argomentare una eventuale risposta corretta oppure di lavorare a livello metacognitivo sulle decisioni da prendere in caso di risposta errata (chiedere un suggerimento, tornare alla teoria oppure chiedere di vedere la soluzione...). Le attività laboratoriali sugli specifici criteri di classificazione riguardano il *Contesto*, il *Dizionario*, l'*Enciclopedia*, la *Conoscenza Concettuale*, la *Conoscenza Procedurale* e la *Operatività*. Ciascun laboratorio è realizzato come Lezione di Moodle: nella pagina iniziale della Lezione vi sono presentati i quesiti da

analizzare ed una volta scelto e letto il quesito su cui lavorare, è possibile scegliere fra le seguenti opzioni, come riportato nella figura:

- provare a rispondere
- avere un suggerimento
- tornare alla teoria
- vedere la soluzione

In tutti i casi è sempre possibile riprovare a rispondere dopo un tentativo errato, tranne nel caso in cui l'opzione scelta sia "vedere la soluzione".

Nel caso di risposta non corretta viene fornito un feed-back immediato sulla non correttezza della risposta dopodiché tutte le opzioni sono nuovamente attive.

I laboratori sull'analisi completa dei quesiti sono stati realizzati in modo equivalente, solo che per ciascun quesito, quanto sopra descritto, si ripete per ciascuna caratteristica prevista per la classificazione del quesito.

Per quanto riguarda i Forum, ne è previsto uno per ciascun laboratorio sui singoli criteri di classificazione ed uno sul laboratorio di classificazione completa.

### **8.5.2 Una attività collaborativa e laboratoriale**

Nella Fase 2 è proposta un'attività collaborativa e laboratoriale, realizzata mediante lo strumento Wiki. Come introdotto nel Capitolo 4, il Wiki permette la realizzazione di attività nella quali tutti i partecipanti possono intervenire, modificare e commentare i contributi altrui. In particolare in questo Wiki si chiede di realizzare una classificazione completa di un quesito in modo collettivo, andando quindi a analizzare le diverse caratteristiche del testo, confrontando le diverse idee e posizioni ed ottenendo quindi una classificazione unica "a tante mani".

Nella figura 8.5.2 viene mostrata la pagina Moodle per l'aggiornamento del Wiki.

## **8.6 Fase 3: l'individuazione delle difficoltà di comprensione**

L'obiettivo di questa fase è quello di utilizzare la classificazione del quesito per identificare i possibili ostacoli interpretativi che un Lettore può incontrare nel testo e che non ne permettono una corretta comprensione. Le

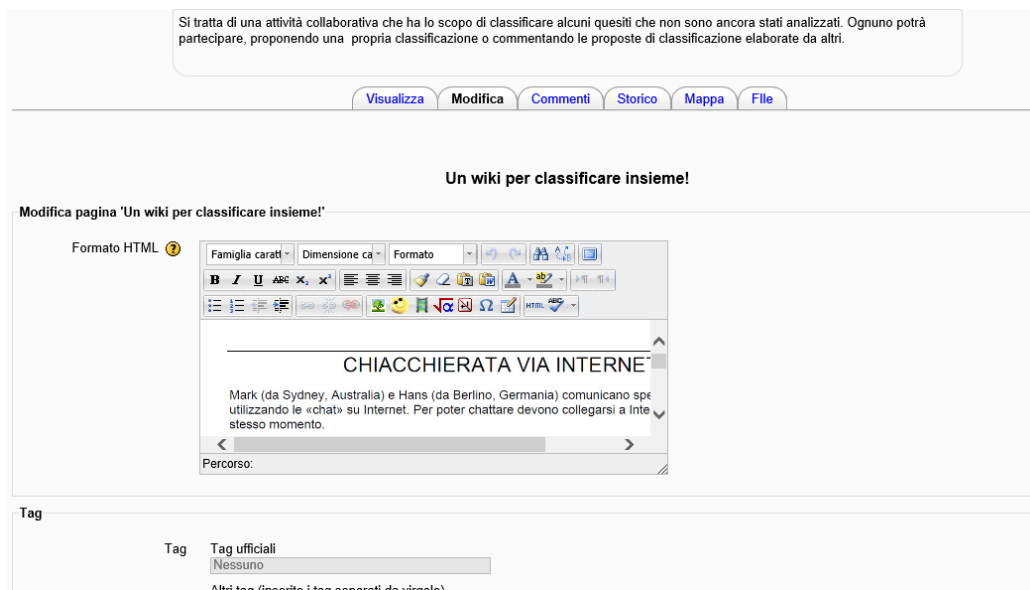


Figura 8.5: Pagina di Moodle per la definizione dell'attività Wiki

eventuali difficoltà di comprensione, facendo riferimento al Quadro Teorico, si distinguono in Difficoltà di Secondo Livello e Difficoltà di Terzo Livello. Le Difficoltà del primo gruppo non permettono il raggiungimento della rappresentazione proposizionale mentre quelle appartenenti al secondo gruppo non permettono la costruzione di un unico modello mentale oppure il modello mentale costruito non risulta consistente con il modello canonico dell'Autore. Dopo aver mostrato alcuni esempi di individuazione delle difficoltà di comprensione attraverso le caratteristiche del testo evidenziate, attraverso lo strumento Compito, si richiede ai partecipanti, in modo individuale, di provare ad interpretare le difficoltà di comprensione di uno dei quesiti classificati nella fase precedente.

## 8.7 Fase 4: le proposte di intervento in classe

In questa fase si propongono delle attività di intervento da svolgere in classe su specifiche difficoltà di comprensione. Il quadro di riferimento per la realizzazione di queste attività è ancora il Problem-Solving: in particolare, in tale ambito, è possibile la progettazione di interventi di tipo metacognitivo, sia sulla consapevolezza delle risorse dello studente sia sul controllo di tali risorse [Schoenfeld, 1985].

E' su questi due aspetti che viene ideato il nostro intervento, per il quale sono porposte attività distinte tra Difficoltà di secondo livello e Difficoltà di

terzo livello. Inoltre si propongono alcune selezioni di quesiti, tratti dalle prove INVALSI e OCSE-PISA, con lo scopo di lavorare sulla comprensione di quesiti relativi a specifici temi nel contesto matematico oppure sono utilizzate per la costruzione di strutture narrative, in contesto non matematico, su cui affrontare il problema della comprensione. Utilizzando tali selezioni è possibile progettare attività di intervento da svolgere in classe, che affrontino specifiche problematiche legate alla comprensione del testo attraverso l'utilizzo delle attività proposte per i due livelli i difficoltà.

L'obiettivo di questa fase è dare agli insegnanti degli strumenti con i quali intervenire ma che solo in parte sono già completamente sviluppati: saranno poi i singoli insegnanti, secondo la propria esperienza e le proprie necessità a calare le idee proposte nella propria situazione di classe.

Il menù specifico della Fase 4 è riportato nella figura 8.7.


**Al percorso di formazione sulle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo ?**

[Anteprima](#) [Modifica](#) [Risultati](#) [Valuta i testi liberi](#)

---

**Fase 4**

**Proposte di attività da svolgere in classe**

 In questa fase si propongono delle attività di intervento da svolgere in classe su specifiche difficoltà di comprensione, distinte per [Difficoltà di secondo livello](#) e [Difficoltà di terzo livello](#), e alcune selezioni di quesiti, tratti dalle prove INVALSI e OCSE-PISA. Queste selezioni riguardano specifici temi nel contesto matematico, oppure sono utilizzate per la costruzione di storie nel contesto non matematico.

Utilizzando tali selezioni è possibile progettare attività di intervento da svolgere in classe, che affrontino specifiche problematiche legate alla comprensione del testo attraverso l'utilizzo delle attività proposte per i due livelli i difficoltà.

[Vai alle attività sulle Difficoltà di secondo livello](#)  
[Vai alle attività sulle Difficoltà di terzo livello](#)  
[Vai all'attività sulla costruzione di percorsi tematici e di storie, basata sulla selezione di quesiti INVALSI e OCSE-PISA](#)  
[Torna alla descrizione delle fasi del percorso di formazione](#)  
[Vai alla Fase 5](#)

Figura 8.6: Introduzione e menù della *Fase 4*

### 8.7.1 Attività di intervento sulle Difficoltà di Secondo Livello

Queste attività hanno l'obiettivo di intervenire sugli ostacoli interpretativi che non permettono il raggiungimento della rappresentazione proposizionale e quindi riguardano il Dizionario Matematico, il Dizionario non Matematico,

il Dizionario ibrido (per quanto riguarda i termini che appartengono sia al linguaggio matematico sia al linguaggio naturale, ma con significati diversi), problematiche legate alla coesione di un testo, espressioni del linguaggio formale della matematica ed eventuali trattamenti numerici o simbolici. Per questo tipo di difficoltà si propongono sostanzialmente, sia nel Contesto Matematico sia nel Contesto non Matematico, tre tipi di attività: la riformulazione del testo, griglie di attività a gruppi o individuali e tracce per la discussione in classe.

Per quanto riguarda le *riformulazioni del testo*, si tratta di chiedere ai ragazzi, divisi in gruppi, di provare a riscrivere il testo del quesito con l'obiettivo di renderlo più chiaro e comprensibile per un altro gruppo di ragazzi della stessa classe o per un'altra classe che partecipa allo stesso tipo di attività (all'altro gruppo o all'altra classe sarà chiesto di fare lo stesso tipo di lavoro sul testo di un altro quesito).

Più chiaro e comprensibile nel senso di provare a esplicitare, con l'eventuale utilizzo di un vocabolario di italiano e di libri di matematica, tutte quelle parole che secondo loro possono creare difficoltà nella comprensione, cercando, allo stesso momento, di provare di descrivere, secondo loro, in modo più efficace la situazione problematica espressa dal testo e lo scopo del quesito stesso.

Se nel quesito sono presenti espressioni del linguaggio formale, si chiede ai ragazzi di esplicitarne a parole il significato, mettendo in evidenza se sono espressioni che possono essere ottenute le une dalle altre oppure se non hanno relazione.

Deve essere chiaro ai ragazzi che l'obiettivo del lavoro non è la risoluzione del quesito ma una sua riformulazione cercando di eliminare possibili difficoltà nel significato delle parole matematiche e non matematiche.

Sarà interessante l'analisi delle diverse riformulazioni da parte dell'insegnante con i gruppi (o eventualmente l'intera classe) che hanno lavorato a tali riformulazioni, mettendo in evidenza le somiglianze e le particolarità delle varie riscritture, cercando di far emergere eventuali riformulazioni non consistenti con quelle attese dell'Autore e soprattutto cercando di capire le motivazioni di tali inconsistenze.

Per quanto riguarda le *griglie di attività*, si tratta di preparare una serie di domande da sottoporre alla classe, in modo individuale oppure a gruppi, con successiva discussione sulle risposte fornite, oppure proposte direttamente a tutta la classe e negoziando in modo collettivo i significati dei termini matematici ed eventualmente di quelli specifici di un certo contesto non matematico e delle espressioni formali che compaiono nel testo stesso. L'intervento ha un

obiettivo metacognitivo cioè quello di rendere i ragazzi consapevoli delle loro risorse e aiutarli a gestirle per la costruzione di un modello mentale del testo che sia consistente con quello atteso dall'Autore.

Come esempio riportiamo una griglia di attività di intervento sul Dizionario che può essere applicata ad ogni tipo di quesito.

#### *SUL DIZIONARIO*

1. Scrivi tutte i termini del testo delle quali pensi di sapere il significato.
2. Accanto ad ogni termine scrivi I se del suo significato sei incerto, S se ritieni di conoscerlo in modo corretto con sufficiente certezza, MS se sei molto sicuro del significato che conosci.
3. Per i termini incerti utilizza il dizionario e gli altri libri a tua disposizione.
4. Elenca i termini del testo che non hai scritto al punto 2, dei quali non conosci il significato.
5. Prova a dividere questi termini in due gruppi con il seguente criterio:  
primo gruppo: inserisci i termini che ti sembrano utili per la comprensione del testo, motivando la tua risposta;  
secondo gruppo: inserisci i termini dei quali ritieni che il significato non sia necessario alla comprensione del testo, motivando la tua risposta.

### **8.7.2 Attività di intervento sulle Difficoltà di Terzo Livello**

Queste attività hanno l'obiettivo di intervenire sugli ostacoli interpretativi che non permettono la costruzione di un unico modello mentale consistente con il modello canonico atteso dall'Autore. Tali ostacoli possono riguardare l'Enciclopedia e il Dizionario Ibrido (per quanto riguarda i termini di linguaggio comune che sono utilizzati in ambito matematico per descrivere relazioni tra oggetti matematici), la Conoscenza Matematica, l'interpretazione di sottotesti figurati e l'approccio a testi che si classificano come Operativi.

Per quanto riguarda l'Enciclopedia e il Dizionario Ibrido si propongono due tipi di attività: la riformulazione del testo e l'utilizzo di questionari da sottoporre in modo individuale, a gruppi o, come strumento di discussione collettiva, a tutta la classe. Come nel caso delle attività proposte per le difficoltà di secondo livello, l'idea è di proporre la riformulazione dei quesiti oppure schede di attività.

Nella *riformulazione* si chiederà ai ragazzi di provare a rendere, secondo loro, più comprensibile per i loro compagni il tipo di conoscenza enciclopedica

richiesta dal testo e di descrivere in modo esplicito il significato dei termini del Dizionario Ibrido che appartengono al linguaggio naturale ma che nel testo sono utilizzati in ambito matematico. Alle riformulazioni seguirà una discussione collettiva nella quale si andranno ad individuare le riformulazioni consistenti con il modello canonico.

Per quanto riguarda, invece, le *schede di attività*, le domande avranno lo scopo di far emergere la conoscenza enciclopedica dei ragazzi rispetto alla specifica situazione problematica trattata nel testo del quesito, in modo da evidenziare eventuali inconsistenze rispetto alle attese dell'Autore.

Per lavorare sull'interpretazione di sottotesti figurali, si propone di progettare attività che permettano di rendere esplicite le eventuali conversioni tra il o i registri che compaiono nella componente figurale e il registro verbale oppure, all'interno dei registri della componente figurale, si propone di separare rappresentazioni sovrapposte (potremmo dire smontare la componente figurale nel caso di sovrapposizioni) con lo scopo di studiarle singolarmente e solo successivamente ricostruire la componente originale, andando a rilevare le relazioni tra le varie rappresentazioni.

In molte situazioni può essere utile far ricostruire ai ragazzi la componente figurale del testo manualmente o mediante l'utilizzo di strumenti informatici, proponendo un approccio guidato al riconoscimento delle proprietà e dell'informazioni che si possono riconoscere o ottenere da tale componente.

### **8.7.3 Attività sulla costruzione di percorsi tematici e storie, basata sulla selezione di quesiti INVALSI e OCSE-PISA**

A partire da una selezione di quesiti Invalsi e prove OCSE-PISA, organizzati secondo gruppi tematici oppure perché legati nella costruzione di una struttura narrativa, dopo aver classificato i quesiti proposti, averli analizzati per l'individuazione delle difficoltà di comprensione e deciso su quali tipi di difficoltà lavorare in classe, si passa alla progettazione dell'intervento utilizzando le attività proposte sulle Difficoltà di Secondo Livello e le attività proposte sulle Difficoltà di Terzo Livello.

Per il Contesto Matematico si propongono le seguenti selezioni tematiche:

**Sui Numeri Naturali:** è una selezione che permette di costruire un percorso tematico sulle proprietà dei numeri naturali per quanto riguarda il significato di multiplo, divisore, di numero primo e l'utilizzo di quantificatori.

**Sui triangoli:** è una selezione dei quesiti che permette di costruire un percorso tematico sulle proprietà dei triangoli e delle loro aree, sulle loro trasformazioni nel piano e sulle proprietà di triangoli nello spazio.

**Quadrati in costruzioni...** : è una selezione di quesiti che permette di progettare un percorso tematico legato a situazioni problematiche in cui la figura geometrica quadrata è utilizzata per realizzare diversi tipi di costruzioni, geometriche e non, delle quali si chiedono congetture e generalizzazioni.

In un Contesto non Matematico si propongono delle storie costruite a partire da quesiti delle prove esterne, dove la struttura narrativa vuole essere di supporto agli obiettivi di comprensione. Si riporta di seguito un esempio dal titolo *Un'auto per Giorgio*:

*Giorgio ogni mattina prende il tram per andare a lavoro. Il tram passa alle 6:30 alla fermata dove sale Giorgio. Nel 40% dei casi è in orario, nel 50% dei casi ha un ritardo di 5 minuti e nei rimanenti casi ha un ritardo di 10 minuti. Se Giorgio arriva alla fermata alle 6:34, che probabilità ha di prendere il tram? Giorgio però del tram si è veramente stufato e pensa che sia venuto il momento di comprarsi una macchina. Di questo problema ne parla con un suo collega, Marco, valutando, secondo anche la sua esperienza, quale auto possa essere più conveniente per lui. Marco gli propone un'analisi di questo tipo... Tutto dipende da quanti chilometri Giorgio pensa di fare*

**D11. La relazione seguente esprime la spesa annuale per l'automobile, composta da una parte fissa e da una parte proporzionale al numero di km percorsi:**

$$S = F + c \cdot k$$

dove  $F$  sono le spese fisse,  $c$  è il costo al km e  $k$  è il numero di km percorsi.

Nella tabella sono riportate le spese fisse e il costo al km per alcuni tipi di automobile.

	Auto A	Auto B	Auto C	Auto D
Spese fisse $F$	900 euro	580 euro	650 euro	1 200 euro
Costo al km $c$	0,25 euro/km	0,33 euro/km	0,27 euro/km	0,31 euro/km

*con la sua nuova macchina. Se pensa di farne non più di 15000 in un anno quale sarà il tipo di macchina più conveniente per lui? Dopo essersi chiarito le idee decide di andare, naturalmente con il tram, ad una concessionaria che si trova in via G. Botero...Giorgio scende dal tram all'incrocio di via Pietro Micca con via 20 Settembre (nella mappa che vedi qui sotto il punto è contrassegnato da un asterisco). Giorgio percorre 150 metri di via 20 Settembre e, all'incrocio con via A.G.I. Bertola, svolta a destra risalendo*



che possa essere letto, commentato e confrontato con le esperienze degli altri. Infine un'attività Compito che richiede ai partecipanti la consegna della relazione sull'esperienza realizzata in classe e, più in generale, sul corso.

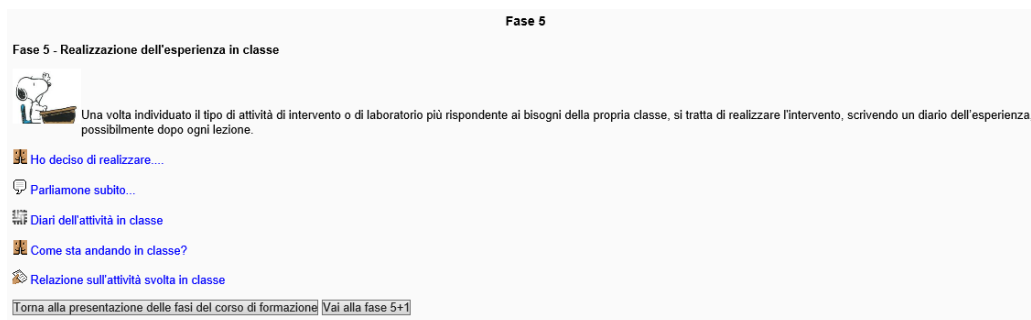


Figura 8.7: Attività della *Fase 5*

## 8.9 Al termine del Corso....

Una volta terminata la realizzazione dell'intervento in classe e consegnata, sempre in piattaforma, la relazione sull'attività svolta, con le relative riflessioni critiche, il Corso si conclude.

In realtà la Fase 5 non dovrebbe essere l'ultima fase del Corso: l'obiettivo sarebbe quello di realizzare una fase successiva, dove la piattaforma diventi luogo di scambio e di confronto anche dopo il Corso.

Infatti, questo lavoro di ricerca, ha permesso la realizzazione di strumenti di analisi delle difficoltà degli allievi, che possano essere condivisi tra gli insegnanti e possano essere loro di aiuto nel lavoro di classe per superare le difficoltà che osservano. La condivisione tra i partecipanti su piattaforma ha il valore aggiunto di creare una comunità che, a partire da strumenti comuni di analisi, possa condividere esperienze e riflessioni [Wenger, 1998]. Questo permette l'attivazione di un processo di apprendimento che si possa sviluppare nel tempo anche dopo che il corso è stato 'fruito'.

# Capitolo 9

In questo Capitolo sono riportati e discussi i primi risultati di una sperimentazione del prototipo del Corso di Formazione.

## 9.1 Una prima sperimentazione del Corso di Formazione

La sperimentazione del Corso di Formazione in modalità E-Learning, in forma *blended*, su piattaforma Moodle è stata proposta agli insegnanti che stanno frequentando un Master Universitario di II Livello in Professione Formatore in Didattica della Matematica, presso l'Università di Pisa. Il Master consiste in un percorso di due anni, dei quali adesso è in corso il secondo, interamente finanziato dalla Direzione Generale per il personale del MIUR e affidato alla organizzazione e gestione del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa.

Il master di II livello in “Professione Formatore in Didattica della Matematica” nasce per rispondere all'urgenza della diffusione di una migliore e più approfondita conoscenza della matematica. Il corso si propone di creare figure che possano formare i colleghi insegnanti e supportarli nel processo di acquisizione delle nuove competenze, sfruttando opportunamente le esperienze maturate in seno a sperimentazioni innovative promosse dal Ministero in questi ultimi anni nel campo dell'educazione matematica <sup>1</sup>.

Il Master è riservato a insegnanti di ruolo delle Scuole Secondarie di Primo

---

<sup>1</sup>Si fa riferimento a diversi progetti: il progetto M@t.abel, un percorso di formazione dedicato ai docenti di matematica della scuola secondaria di primo grado e del biennio di scuola secondaria di secondo grado per supportarli nell'insegnamento della disciplina; il progetto PQM, Progetto Qualità e Merito (PQM-PON), che consiste in un piano pluriennale di interventi per il potenziamento degli apprendimenti di base; il Progetto Lauree Scientifiche, che ha lo scopo di perfezionare le conoscenze disciplinari e interdisciplinari degli insegnanti e la loro capacità di interessare e motivare gli allievi nell'apprendimento delle materie scientifiche, nonché di sostenerli nel processo di orientamento pre-universitario.

e di Secondo Grado della Liguria e della Toscana.

Come indicato dal MIUR sono stati ammessi al Master, a seguito di selezione, trenta docenti, di cui ventiquattro junior e sei senior, cioè con precedente attività di formazione degli insegnanti nell'ambito di progetti ministeriali di formazione di insegnanti di matematica.

Con gli insegnanti del Master è stato svolto un incontro iniziale in presenza, dove sono stati presentati gli aspetti teorici più significativi ed esplicativi del Corso e dove gli insegnanti hanno potuto accedere per la prima volta alla piattaforma. Poi il percorso di formazione è continuato in modo individuale in piattaforma, con interazioni frequenti con il tutor e tra i partecipanti.

## 9.2 Gli obiettivi della sperimentazione

Gli obiettivi della sperimentazione del percorso di formazione sulle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo nei quesiti delle prove OCSE-PISA e INVALSI per la Scuola Secondaria di Secondo Grado sono stati:

- l'individuazione dei punti di forza e dei punti deboli del percorso per insegnanti, sia a livello disciplinare, sia a livello formativo;
- una misurazione delle ore necessarie per lo svolgimento del corso;
- la valutazione della "ricaduta", a livello didattico, del percorso;
- la navigabilità della piattaforma;
- l'efficacia delle attività laboratoriali;
- l'efficacia delle attività collaborative.

## 9.3 Il Forum e il questionario di valutazione

Al termine del Corso è previsto un momento di valutazione del percorso in modo strutturato, attraverso la compilazione di un questionario di valutazione.

Il questionario ha l'obiettivo di raccogliere le opinioni dei partecipanti sia sulla struttura e sulla navigazione della piattaforma, sia sul percorso di formazione. L'obiettivo è individuare i punti deboli e i punti forti del Corso, in modo da renderlo più efficace rispetto agli scopi formativi per cui è stato progettato.

Il questionario è stato realizzato mediante il modulo Feedback di Moodle, che consente di realizzare sondaggi personalizzati.

La prima parte del questionario, chiede ai partecipanti di valutare l'efficienza della struttura e dell'organizzazione della piattaforma, mentre la seconda parte del questionario è strettamente inerente alla valutazione del percorso formativo e vuole andare ad analizzare l'efficacia di ciascuna delle varie fasi rispetto all'obiettivo del Corso. Il questionario completo è riportato nelle pagine seguenti.

Per avere riscontri sul percorso di formazione, è stato predisposto anche un Forum di discussione *Riflessioni e commenti sulla piattaforma e sul corso*, con l'obiettivo di raccogliere le impressioni e i commenti dei partecipanti. Rispetto al questionario, che è in grado di fornire informazioni sul corso solo al tutor, il Forum permette l'interazione tra i partecipanti, che non solo possono aggiungere le proprie impressioni e riflessioni sul corso, ma possono leggere e commentare quelle degli altri.

## Questionario di Valutazione del Corso

### *Aspetti di funzionamento della Piattaforma*

() La navigazione è agevole?

Molto

Abbastanza

Poco

Per niente

() La modalità di navigazione è di facile comprensione?

Molto

Abbastanza

Poco

Per niente

() È facile trovare i contenuti cercati?

Molto

Abbastanza

Poco

Per niente

() Hai avuto bisogno di aiuto per navigare il sito?

Molto

Abbastanza

Poco

Per niente

()Suggerimenti per migliorare la navigazione della piattaforma:

### ***Aspetti di contenuto del Percorso di Formazione***

() L'obiettivo del corso è migliorare la didattica degli insegnanti in merito alle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo nelle prove standardizzate esterne. Secondo te l'obiettivo è stato raggiunto?

Molto

Abbastanza

Poco

Per niente

() Hai completato tutto il percorso (fino alla Fase 5)?

Sì

No

() Se sì, quante ore ritieni che siano necessarie per seguire tutto il percorso di formazione?

20-30

30- 40

40-50

oltre le 50 ore

() Se no, quale Fase del Corso hai raggiunto?

Fase 1

Fase 2

Fase 3

Fase 4

Fase 5

() Quanto tempo, in termini di ore, è stato necessario per raggiungere tale fase?

() Da un punto di vista formativo, il Percorso ti è sembrato utile?

Molto

Abbastanza

Poco

Per niente

() Pensi che le problematiche affrontate siano importanti da un punto di vista didattico?

Molto

Abbastanza

Poco

Per niente

() Pensi che il modo in cui tali problematiche sono affrontate sia efficace?

Molto

Abbastanza

Poco

Per niente

() Quale Fase del Corso ti è sembra più chiara?

- Fase 1 - Quadro di riferimento
- Fase 2 - Criteri di Classificazione
- Fase 3 - Identificazione delle Difficoltà
- Fase 4 - Proposte di intervento
- Fase 5 - Realizzazione in classe

() Quale Fase del Corso ti è sembrata più utile?

- Fase 1
- Fase 2
- Fase 3
- Fase 4
- Fase 5

() In quale Fase hai trovato maggiori difficoltà?

- Fase 1
- Fase 2
- Fase 3
- Fase 4
- Fase 5

() Il Quadro di Riferimento Teorico proposto nella Fase 1 ti sembra efficace per il riconoscimento delle difficoltà di comprensione?

- Molto
- Abbastanza
- Poco
- Per niente

() Quanto hai fatto ricorso al glossario?

- Molto
- Abbastanza
- Poco
- Per niente

() Vi sono, secondo te, ulteriori aspetti che potrebbero essere inseriti nel quadro di riferimento per renderlo più completo? Quali?

() Pensi che i laboratori sul riconoscimento delle caratteristiche di un testo siano utili?

- Molto
- Abbastanza
- Poco
- Per niente

() Eventuali suggerimenti sui laboratori:

() Le proposte di intervento della Fase 4 ti sembrano efficaci per il recupero-approfondimento sulla comprensione del testo in classe?

- Molto
- Abbastanza
- Poco
- Per niente

() Eventuali suggerimenti sulle proposte di intervento della Fase 4:

() Come riflessione conclusiva sul Corso, pensi che lo sviluppo di questo percorso di formazione in modalità E-learning consenta un più efficace raggiungimento degli obiettivi del Corso?

- Molto
- Abbastanza
- Poco
- Per niente

() Motiva la risposta data alla domanda precedente:

() Secondo te, la modalità E-learning, nella quale si richiede uno scambio comunicativo con il tutor e gli altri partecipanti prevalentemente in forma scritta, contribuisce al raggiungimento dell'obiettivo del corso di riflessione-formazione sulle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo?

- Molto
- Abbastanza
- Poco
- Per niente

() L'assistenza svolta dal tutor durante il percorso è stata utile?

Molto

Abbastanza

Poco

Per niente

() In quali aspetti può essere migliorata e resa più efficace?

() Commenti e suggerimenti finali:

() Scrivi il tipo di Istituto in cui insegni e le relative classi:

## 9.4 Analisi dei risultati

Come introdotto all'inizio del Capitolo, si riportano i primi risultati della sperimentazione realizzata nell'ambito del secondo anno del Master in "Professione Formatore in Didattica della Matematica", attualmente in corso di svolgimento. Dal questionario di valutazione e dal forum di discussione appositamente creato, sono state raccolte ed analizzate le risposte e gli interventi sia sulla navigabilità della piattaforma sia sui contenuti del Corso.

Per quanto riguarda la navigabilità della piattaforma, i partecipanti si sono espressi positivamente e questo fatto è stato rilevato anche dalle poche richieste di aiuto indirizzate al tutor. L'aspetto più delicato, però, ha riguardato i collegamenti dall'attività *Al percorso di Formazione sulle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo* alle attività laboratoriali. Infatti ciascun laboratorio è esso stesso realizzato come Lezione di Moodle e quindi si ha una doppia navigazione, nel percorso principale del Corso e all'interno del laboratorio stesso.

Sull'aspetto più formativo, è emerso come i contenuti del Corso riguardino problematiche attuali e particolarmente sentite nell'ambito della formazione. Il percorso è risultato interessante e ben strutturato, anche se molti partecipanti hanno evidenziato una difficoltà iniziale dal punto di vista teorico. Infatti, secondo alcuni commenti, la descrizione del Quadro di Riferimento Teorico fa riferimento ad argomenti che raramente i docenti conoscono e in questo consiste la difficoltà maggiore, anche perché il linguaggio è decisamente diverso da quello a cui gli insegnanti di matematica sono abituati.

Anche le attività laboratoriali hanno avuto successo e, dalle interazioni successive allo svolgimento dei laboratori, è stato possibile sperimentare come attraverso il confronto e la collaborazione all'interno della piattaforma, sia possibile arricchire gli esempi proposti nel percorso.

Anche le attività collaborative hanno riscosso molto interesse nella fase di presentazione del Corso, ma poi non hanno visto la partecipazione immaginata. Questo fatto forse è ricollegabile anche alla necessità di educare gli insegnanti all'utilizzo di formule comunicative telematiche.

Il Corso, sempre dai feedback dei partecipanti, è risultato molto interessante ma anche molto impegnativo e complesso. Per quanto riguarda la "misurazione della lunghezza" del Corso in termini di ore, sembra non sia stata inferiore alle 30 ore, escludendo l'intervento in classe della Fase 5. Questo può essere ricollegato alle difficoltà iniziali della Fase 1, nel fare proprie le conoscenze necessarie per poi precedere nella classificazione dei quesiti.

Alcuni insegnanti, però, hanno sottolineato come questa difficoltà a livello linguistico, incontrata nel percorso, sia servita a porre maggiore atten-

zione all'aspetto linguistico nel lavoro in classe e, in modo particolare, nella preparazione delle verifiche scritte. Anche le attività laboratoriali hanno richiesto tempo, soprattutto per prendere familiarità con il tipo di approccio alla osservazione delle difficoltà di comprensione proposto nel percorso.

La Fase 4 del Corso ha riscosso molto interesse da parte dei partecipanti, sia per la varietà delle proposte, sia perché tali proposte consentono al corsista di svilupparne altre in autonomia. Ma nonostante l'interesse per le attività di intervento, la fase successiva, la Fase 5 del Corso di Formazione che consiste nella realizzazione di una attività in classe, è stata raggiunta solo da pochi partecipanti al momento. Le cause, come indicato dagli insegnanti, sono da ricollegarsi sia al fattore tempo, sia alle difficoltà di coordinazione di attività di questo tipo con la normale attività didattica.

Come riflessione conclusiva sul Corso, alla domanda *L'obiettivo del corso è migliorare la didattica degli insegnanti in merito alle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo nelle prove standardizzate esterne. Secondo te l'obiettivo è stato raggiunto?*, la maggioranza dei partecipanti ha risposto in modo affermativo, anche se è stata da più parti sottolineata la necessità di ideare delle specifiche attività che possano aiutare a superare le difficoltà teoriche iniziali.

Alla domanda *Pensi che lo sviluppo di questo percorso di formazione in modalità E-learning consenta un più efficace raggiungimento degli obiettivi del Corso?*, i partecipanti hanno risposto dicendo che per il tipo di lavoro richiesto dal corso e le diverse esigenze dei partecipanti, la modalità E-Learning risulta al momento l'unica praticabile. Anche se non pochi partecipanti hanno sottolineato come a questo tipo di modalità di apprendimento si ha necessità di essere formati in qualche modo e quindi alla fine in realtà i percorsi di formazione erano due in parallelo: uno per imparare ad usare la piattaforma ed uno sui contenuti specifici del Corso.

Infine *Secondo te, la modalità E-learning, nella quale si richiede uno scambio comunicativo con il tutor e gli altri partecipanti prevalentemente in forma scritta, contribuisce al raggiungimento dell'obiettivo del corso di riflessione-formazione sulle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo?* La risposta dei partecipanti è stata concorde nel rilevare come l'essere stati "forzati" a confrontarsi attraverso il linguaggio scritto, cosa che all'inizio hanno vissuto in modo un pò faticoso, gli abbia però permesso una riflessione critica continua sugli aspetti linguistici della comunicazione, non solo in ambito disciplinare.

## 9.5 Sviluppi futuri

Il Corso di Formazione, che è stato realizzato in questo lavoro di tesi ed è stato sperimentato nell'ambito del Master, costituisce un prototipo di corso che necessita di essere ulteriormente perfezionato. Gli aspetti su cui lavorare riguardano soprattutto quelle attività che, a livello formativo, permettono di passare dalle conoscenze alle competenze e che si realizzano nelle attività laboratoriali e nella progettazione di attività di intervento sulle difficoltà di comprensione del testo.

Questo percorso formativo è rivolto agli insegnanti della Scuola Secondaria di Secondo Grado, nel senso che gli esempi e i laboratori sono stati ideati e realizzati sui quesiti delle prove OCSE-PISA, che sono rivolte ai ragazzi quindicenni, e sulla prova INVALSI per la classe seconda della Secondaria di Secondo Grado, ma il Quadro di Riferimento proposto in questo lavoro di tesi è applicabile anche all'analisi e all'interpretazione delle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo dei quesiti INVALSI della Scuola Secondaria di Primo Grado.

Molti sono stati gli insegnanti della Scuola Secondaria di Primo Grado che si sono dimostrati interessati alle problematiche del Corso, forse anche a causa dell'inserimento della Prova Nazionale INVALSI nell'Esame di Stato conclusivo del primo ciclo di istruzione. Quindi una linea di sviluppo consiste proprio nell'ampliare l'offerta formativa della piattaforma, prevedendo attività specifiche per gli insegnanti del triennio conclusivo del Primo Ciclo.

# Conclusioni

In questo lavoro di tesi è stato affrontato il problema della formazione degli insegnanti sulle difficoltà linguistiche e di comprensione del testo nei quesiti delle prove esterne OCSE-PISA e INVALSI. Con questo scopo è stato realizzato un prototipo di un Corso di Formazione in modalità E-Learning, su piattaforma Moodle, rivolto agli insegnanti della Scuola Secondaria di Secondo Grado.

L'obiettivo del Corso è dare un contributo nella direzione di un miglioramento della didattica degli insegnanti, con particolare riferimento alle prove standardizzate esterne. In tali prove si riconosce una sostanziale difficoltà dal punto di vista della comprensione del testo, che però non viene né evidenziata, né affrontata nei quadri di riferimento corrispondenti.

In questo percorso di formazione viene proposto un nuovo Quadro di Riferimento per le prove standardizzate esterne, che ha lo scopo di individuare e interpretare le difficoltà di comprensione dei quesiti. Vengono inoltre proposte attività di intervento in base al tipo di problematiche evidenziate.

Questo Corso di Formazione, come prototipo, è stato sperimentato nell'ambito di un Master Universitario in "Professione Formatore in Didattica della Matematica", in corso di svolgimento presso l'Università di Pisa, rivolto ad insegnanti della Scuola Secondaria Superiore di Primo e di Secondo Grado.

Le problematiche affrontate nel Corso hanno incontrato l'interesse dell'insegnanti e si sono mostrate di grande attualità nel mondo della scuola. Si tratta però di un prototipo di Corso che necessita di essere ulteriormente perfezionato. Indubbiamente la difficoltà più grande emersa dalla sperimentazione è il tempo necessario per lo svolgimento del Corso, che risulterebbe non inferiore a 30 ore.

La motivazione risiede nel fatto che lo strumento teorico del Quadro di Riferimento proposto per l'osservazione e l'interpretazione delle difficoltà di comprensione nei quesiti, presenta alcune parti, come quella relativa alle Lingui-

stica sulla Teoria dei Modelli Mentali oppure quella relativa alle Rappresentazioni Semiotiche, che rischiano di risultare lontane dalla preparazione degli insegnanti di matematica.

Inoltre, questo prototipo del Corso rivolto agli insegnanti della Scuola Secondaria di Secondo Grado, ha riscosso molto interesse anche tra gli insegnanti della Scuola Secondaria di Primo Grado. Il Quadro di Riferimento proposto per le difficoltà di comprensione del testo è applicabile anche alla Scuola Secondaria di Primo Grado ma al momento, in piattaforma, sono riportati esempi e laboratori riferiti solo alla Scuola Secondaria di Secondo Grado.

Possiamo, quindi, concludere che la nostra attività di ricerca ha permesso la realizzazione di strumenti di analisi delle difficoltà degli allievi, che possano essere condivisi con gli insegnanti e possano essere loro di aiuto nel lavoro di classe per superare le difficoltà che osservano. La condivisione tra i partecipanti su piattaforma ha il valore aggiunto di creare una comunità che, a partire da strumenti comuni di analisi, possa condividere esperienze e riflessioni. Questo permette l'attivazione di un processo di apprendimento che si possa sviluppare nel tempo anche dopo che il corso è stato 'fruito'.

Per quanto riguarda gli sviluppi futuri, l'obiettivo finale consiste nella realizzazione di un MOOC<sup>2</sup> cioè quello di rendere il Corso di Formazione sulle problematiche linguistiche e di comprensione del testo un corso online aperto, accessibile solo via web, completamente autonomo, pensato per realizzare una formazione a distanza che coinvolga un numero elevato di utenti.

In Italia i primi MOOC sono stati realizzati in ambito universitario a partire dal 2013<sup>3</sup> e, a livello mondiale, costituiscono l'orizzonte di sviluppo della formazione a distanza.

---

<sup>2</sup>Acronimo di Massive Open Online Courses, in italiano: Corsi massivi online aperti a tutti

<sup>3</sup>I corsi MOOC si sono diffusi su scala mondiale a partire dall'autunno 2011, quando la Stanford University erogò gratuitamente un corso post-laurea di intelligenza artificiale.

# Bibliografia

- [OCSE-PISA, 2003] Quadro di riferimento PISA 2003.
- [Compendio OCSE-PISA, 2003] Compendio prove OCSE PISA 2009.
- [OCSE-PISA, 2006] Quadro di riferimento PISA 2006.
- [OCSE-PISA, 2012] Quadro di riferimento PISA 2012.
- [INVALSI, 2012] <http://www.invalsi.it/snv2012>
- [INVALSI, 2011] <http://www.invalsi.it/snv2011>
- [Hiebert, Lefevre, 1986] J. Hiebert, P. Lefevre, *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*, In J. Hiebert (Ed.) *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1986
- [Johnson-Laird, 1988] P. N. Johnson-Laird, *Mental Models. Towards a Cognitive Science of Language, Inference and Consciousness* Cambridge University Press, 1983. Traduzione italiana di Alberto Mazzocco, *Modelli Mentali*, il Mulino, Bologna 1988
- [Niss, 1999] M. Niss, *Quantitative Literacy and Mathematical Competencies*, dal sito internet <http://www.maa.org/ql/pgs215.pdf>
- [Colombo, 2002] A. Colombo, *Leggere, capire e non capire*, Bologna, Zanichelli, 2002
- [Eco, 1979] U. Eco, *Lector in fabula*, Milano, Bompiani (“Studi Bompiani” n. 22), 1979.
- [Eco, 1994] U. Eco, *Sei passeggiate nei boschi narrativi*, Milano, Bompiani, 1994.

- [Schoenfeld, 1992] A. H. Schoenfeld , *Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in Mathematics*, In D.A. Grows(ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, NY: Macmillan 1992.
- [Hasan, 2002] Hasan, R., *Semiotic mediation, language and society: three exotripic theories - Vygotsky, Halliday and Bernstein*, 2002
- [Freudenthal, 1983] H. Freudenthal, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht: D. Reidel, 1983.
- [Freudenthal, 1973] H. Freudenthal, *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht: D. Reidel, 1973.
- [Schoenfeld, 1985] H. , *Mathematical Problem Solving*, New York: Accademic Press, 1985.
- [Polya, 1945] G. Polya , *How to solve it*, Princeton University Press, Princeton, 1945.
- [TIMSS, 2007] In *TIMSS 2007 Assessment Frameworks* a cura di A. M. Caputo, C. Zicchi, 2007.
- [Bolondi, 2010] G. Bolondi, *Come usare in classe le prove INVALSI, L'insegnamento della metmatica e delle scienze integrate*, pp. 686-701, 2010
- [Ferrari, 2004] P.L. Ferrari, *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*, 2004
- [Schneider, Stern, 2010] M. Schneider, E. Stern, *The Developmental Relations Between Conceptual and Procedural Knowledge: a Multimethod Approach*, In American Psychological Association, Vol. 46, No. 1, 178-192, 2010
- [Saenz, 2009] C. Saenz, *The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (PISA)*, In Educational Studing in Mathematics, Vol. 71, 123-143, 2009
- [Rittle-Johnson, Koedinger, 2005] B. Rittle-Johnson, K. R. Koedinger, *Designing knowledge scaffolds to support mathematical problem solving*, In Cognition and Instruction, Vol. 23, No. 3, 313-349, 2005

- [Duval, 2006] R. Duval, *A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics*, in Educational Studing in Mathematics, Vol. 61, 103-131, 2006
- [Duval, 1995] R. Duval, *Semíosis et pensée humaine*, Berna, Peter Lang, 1995.
- [Duval,1999] R. Duval, *L'apprendimento in matematica richiede un funzionamento cognitivo specifico?*, *La matematica e la sua didattica*, 1, 17-42, 1999.
- [ Laborde, 1995] . C. Laborde, *Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica?*, *La matematica e la sua didattica*, 2, 121-135.
- [Coppola, 2009] D. Coppola, P. Nicolini (a cura di), *Comunicazione e Processi di Formazione. Un approccio interdisciplinare*, Franco Angeli, Milano, 2009.
- [Giacomo, 2008] M. Giacomoantonio, *Learning Object. Progettazione dei contenuti didattici per l'e-learning* Carocci, Roma 2008
- [Rittle-Johnson,Siegler, 1998] B. Rittle-Johnson, R. S. Siegler, *The Relation between conceptual and procedural knoweledge in learning mathematics: A review.*, In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 75-328). Hove. United Kingdom: Psychology Press. 1998
- [Kanizsa ed altri, 1975] G. Kanizsa, P. Legrenzi, P. Meazzini, *I processi cognitivi*, Società editrice il Mulino, Bologna, 1975
- [Ryle, 1949] G. Ryle, *The concept of mind*, Hutchinson, London, 1949.
- [Halliday, 1985] M.A.K. Halliday, *An introduction to functional grammar*, Arnold, London, 1985.
- [Bruner, 1961] J. S. Bruner, *The act of discovery*, Harvard Educational Review, 31, 21-32, 1961.
- [Anderson, 1983] J. R. Anderson, *The architecture of cognition*, Harvard University Press, Cambridge, 1983
- [Mason, 2012] J. Mason, *On Knowing in Mathematics*, CULMS 5, 29-39, 2012

- [Mason,Spence, 1996] J. Mason, M. Spence, *Beyond Mere Knowledge of Mathematics: The Importance of Knowing - To Act in the Moment*; J. Mason, M. Spence. *On Knowing in Mathematics*. In Educational Studies in Mathematics, 1996
- [Ernest, 1996] P. Ernest, *FORMS OF KNOWLEDGE IN MATHEMATICS AND MATHEMATICS EDUCATION: PHILOSOPHICAL AND RHETORICAL PERSPECTIVES*, In Educational Studies in Mathematics, 1996
- [Zan, 2007] R. Zan, *Difficoltà in Matematica. Osservare, Interpretare, intervenire*, Springer, 2007.
- [Giacomoantonio, 2008] M. Giacomoantonio, *Learning Object. Progettazione dei contenuti didattici per l'e-learning* Carocci, Roma 2008
- [Moodle, 2006] W. H. Rice, *Moodle. E-Learning Course Development* Packt Publishing, Birmingham 2006
- [Liscia, 2005] R. Liscia, *E-Learning: lo stato e le prospettive in Italia* in G. Bellandi, A. Martini, L. Pellegrini (a cura di), *Realizzare l'e-learning. Esperienze e casi nelle organizzazioni*, Plus-Pisa University Press, Pisa, 2005
- [Nacamulli, 2005] R. C. D. Nacamulli, *Un click e s'impara? E-learning e cambiamento dei sistemi educativi* in G. Bellandi, A. Martini, L. Pellegrini (a cura di), *Realizzare l'e-learning. Esperienze e casi nelle organizzazioni*, Plus-Pisa University Press, Pisa, 2005
- [Wiener, 1953] N. Wiener, *Cybernetics*, J. Wiley, New York, 1948; trad. it. a cura di G. Barosso, *La Cibernetica*, Bompiani, Milano 1953
- [Coppola, 2009] . Coppola, P. Nicolini (a cura di), *Comunicazione e Processi di Formazione. Un approccio interdisciplinare*, Franco Angeli, Milano, 2009.
- [ P. Di Martino, G. Fiorentino, R. Zan, 2011] P. Di Martino, G. Fiorentino, R. Zan, *Il progetto ELTP: dai test a scelta multipla ai percorsi individualizzati*, In *TD Tecnologie Didattiche*, 19 (3), pp. 163-169, 2011
- [G. Albano, P.L. Ferrari, 2008] G. Albano, P.L. Ferrari, *Integrating technology and research in mathematics education: the case of e-learning*, In Garcia Penalvo (ed.): *Advances in E-Learning: Experiences and Methodologies*, pp. 132-148, 2008

- [Sfard, 2001] A. Sfard, *There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning*. In *Educational Studies in Mathematics*, 46, pp. 13-57, 2001
- [Calvani, 2009] A. Calvani, *Dall'educazione a distanza all'E-Learning*. In <http://www.treccani.it/enciclopedia/dall-educazione-a-distanza-all-e-learning>
- [Baldacci, 2006] M. Baldacci, *Personalizzazione o individualizzazione?* Centro Studi Erickson, 2006.
- [Wenger, 1998] E. Wenger, *Communities of practice: learning, meaning, and identity*, Cambridge University Press, 1998
- [Laurillard, 1993] D. Laurillard, *Rethinking university teaching*. London: Routledge, 1993
- [Kiesler et al., 1984] S.Kiesler, J. Siegel, T. McGuire, *Social psychological aspects of computer-mediated communication*. *American Psychologist*, vol. 39, 10, 1123-1134, 1984
- [Calvani, Rotta, 2001] A. Calvani, M. Rotta, *FARE FORMAZIONE IN INTERNET. MANUALE DELLA DIDATTICA ONLINE*. TRENTO: ERICKSON, 2001
- [Juan et al., 2008] A. Juan, A. Huertas, C. Steegmann, C. Corcoles, C. Serrat, *Mathematical e-learning: state of the art and experiences at the Open University of Catalonia*. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39 (4), 455-471. Americ, 2008
- [Kahiigi et al., 2008] E. K. Kahiigi, L. Ekenberg, H. Hansson, F.F. Tusubira, M. A. Danielson, *Exploring the e-Learning State of Art*. *The Electronic Journal of e-Learning*, vol. 6, 2, 77-88, 2008
- [Laeng, 1982] M. Laeng, *Il costruttivismo*, in Id. (a cura di), *Enciclopedia pedagogica*, La Scuola, Brescia, 1982.
- [Mariani, 1996] L. Mariani, *Investigating Learning Styles*, Perspectives - *Journal of TESOL/Italy*, Vol. XXI, 2/Vol. XXII, 1, Spring, 1996
- [Trentin, 2006] G. Trentin, *Dall'e-learning formale a quello informale attraverso i processi di gestione e condivisione della conoscenza professionale*, *TD Tecnologie Didattiche*, 39, 3, 39-42, 2006

[Mason, 2002] R. Mason, *Review of E-learning for Education and Training*,  
*in Proceedings third Networked Learning Conference*, 26-28 Marzo 2002,  
University of Sheffield, UK.

[Bellier, 2001] S. Bellier, *Le e-learning*, Editions Liaisons, Parigi 2001.