

Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1990/06-1990/12.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisationcommerciale@bnf.fr.

Traces de fonctions régulières de plusieurs variables quaternioniennes

Donato PERTICI

Résumé — On donne des conditions différentielles nécessaires et suffisantes pour l'extension régulière (au sens de Fueter) de fonctions définies sur une hypersurface de $\mathbb{H}^n$.

Traces of regular functions of several quaternionic variables

Abstract — Some necessary and sufficient differential conditions are given for the regular extendibility (in the sense of Fueter) of functions defined on a hypersurface of $\mathbb{H}^n$.

1. INTRODUCTION. — Désignons par $\mathbb{H}$ l'algèbre des quaternions et considérons un élément $q = (q_1, \dots, q_n)$ de $\mathbb{H}^n$ ($n > 1$). Posons, pour

$$h = 1, \dots, n, \quad q_h = x_0^{(h)} + ix_1^{(h)} + jx_2^{(h)} + kx_3^{(h)},$$

où $x_\lambda^{(h)} \in \mathbb{R}$. Parfois nous écrirons $i_0 = 1$, $i_1 = i$, $i_2 = j$, $i_3 = k$. Si A est un ouvert de $\mathbb{H}^n$ et si $F: A \rightarrow \mathbb{H}$ est une fonction de classe C^1 , nous définissons, pour $h = 1, \dots, n$, les opérateurs $\partial/\partial \bar{q}_h$, $\partial/\partial q_h$, en posant

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \bar{q}_h} &= \frac{\partial F}{\partial x_0^{(h)}} + i \frac{\partial F}{\partial x_1^{(h)}} + j \frac{\partial F}{\partial x_2^{(h)}} + k \frac{\partial F}{\partial x_3^{(h)}}, \\ \frac{\partial F}{\partial q_h} &= \frac{\partial F}{\partial x_0^{(h)}} - i \frac{\partial F}{\partial x_1^{(h)}} - j \frac{\partial F}{\partial x_2^{(h)}} - k \frac{\partial F}{\partial x_3^{(h)}}. \end{aligned}$$

Si $\bar{\partial} = (\partial/\partial \bar{q}_1, \dots, \partial/\partial \bar{q}_n)$ désigne l'opérateur de Fueter (de dimension n), on dit que la fonction F est *régulière à gauche* (ou plus simplement *régulière*) dans A , si $\bar{\partial}F \equiv 0$.

Pour les résultats généraux de la théorie des fonctions régulières de la variable quaternionnienne nous renvoyons aux travaux originels [1] et [2] de Fueter et aux travaux [3] à [8] pour les développements plus récents.

2. L'ÉQUATION $\bar{\partial}g = f$. — Nous désignons par Δ et par Δ_h respectivement, le laplacien ordinaire de $\mathbb{H}^n$ et le laplacien partiel par rapport aux variables réelles de q_h . On vérifie que

$$(1) \quad \Delta_h = \frac{\partial}{\partial \bar{q}_h} \frac{\partial}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial q_h} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_h},$$

et par conséquent

$$(2) \quad \Delta = \sum_{h=1}^n \frac{\partial}{\partial q_h} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_h}.$$

En plus, puisque Δ_h est un opérateur réel, on a

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{q}_s} \Delta_h = \Delta_h \frac{\partial}{\partial \bar{q}_s} \quad \text{pour } s, h = 1, \dots, n.$$

Considérons maintenant une fonction $f = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$. Si l'équation $\bar{\partial}g = f$ a une solution, alors, à cause de (1) et (3), la fonction f doit satisfaire les conditions

Note présentée par Paul MALLIAVIN.

suivantes :

$$(4) \quad \Delta_h f_s = \frac{\partial}{\partial \bar{q}_s} \frac{\partial f_h}{\partial q_h} \quad \text{pour } s, h = 1, \dots, n.$$

Si la fonction f est à support compact, (4) est une condition suffisante pour l'existence de solutions de l'équation $\bar{\partial}g = f$. En effet, on a le

THÉORÈME 1. — Soit $f = (f_1, \dots, f_n) \in C_0^k(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^n)$ ($n > 1$, $k \geq 2$). L'équation $\bar{\partial}g = f$ admet une solution $g \in C_0^k(\mathbb{H}^n)$ si et seulement si les composantes f_h de f satisfont (4).

Dans [4] on a montré un théorème analogue dans lequel la condition (4) est remplacée par des conditions intégrales plus compliquées. En fait la démonstration du théorème 1 consiste à prouver que (4) implique les conditions intégrales mentionnées.

3. EXTENSIONS RÉGULIÈRES DE FONCTIONS ANALYTIQUES. — Considérons une hypersurface analytique orientée S de $\mathbb{H}^n$ ($n > 1$), définie par une fonction Φ , à savoir $S = \{\Phi = 0\}$ où $\text{grad } \Phi \neq 0$ sur S . Soit $f: S \rightarrow \mathbb{H}$ une fonction analytique. Il est naturel de se demander quelles conditions f doit satisfaire pour que f soit la restriction d'une fonction régulière sur un voisinage de S . Dans [4] on a prouvé que f doit nécessairement satisfaire certaines conditions différentielles, nommées, à cause de l'analogie avec la variable complexe, *conditions de Cauchy-Riemann-Fueter*. De telles conditions peuvent s'exprimer de la façon suivante : si on désigne par F une extension différentiable quelconque de f sur un voisinage de S , on a :

$$(5) \quad \bar{\partial}F = \bar{\partial}\Phi \cdot A + \Phi \cdot \psi,$$

où A et ψ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{H}$ et dans $\mathbb{H}^n$ respectivement. Dans ce cas on dit même que f est une CRF-fonction à gauche sur S . Il est clair que la définition ne dépend ni de F , ni de Φ .

On verra que les conditions seules de Cauchy-Riemann-Fueter ne suffisent pas en général pour assurer l'existence de l'extension régulière.

Nous définissons pour $h = 1, \dots, n$, les formes suivantes à valeurs dans $\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned} \vartheta_h &= dx_0^{(h)} \wedge dx_1^{(h)} \wedge dx_2^{(h)} \wedge dx_3^{(h)}, \\ dq_h &= dx_0^{(h)} + idx_1^{(h)} + jdx_2^{(h)} + kdx_3^{(h)}, \\ \bar{d}q_h &= dx_0^{(h)} - idx_1^{(h)} - jdx_2^{(h)} - kdx_3^{(h)}. \end{aligned}$$

Si l'on note v et ω , respectivement, le vecteur normal et la forme volume de S , et $f^\perp$ la fonction déterminée par l'équation

$$(6) \quad -\frac{1}{2} \left(\sum_{h=1}^n \vartheta_1 \wedge \dots \wedge \bar{d}q_h \wedge dq_h \wedge \dots \wedge \vartheta_n \right) \wedge df = f^\perp \omega,$$

on peut prouver ([5]) que $\partial F / \partial v = f^\perp$, où F est une extension régulière de f . En plus, compte tenu de (2), chaque fonction régulière est harmonique. Donc il s'ensuit que la seule extension régulière possible de f est la solution F du problème

$$(7) \quad \left\{ \Delta F = 0, F|_S = f, \frac{\partial F}{\partial v} = f^\perp \right\}.$$

Soit donc F la solution de (7). Dans [5] on a prouvé que si f est une CRF-fonction à gauche, alors on a $\bar{\partial}F|_S = 0$. Toutefois, en général, F n'est pas régulière. En effet si, par exemple, S est l'hyperplan de $\mathbb{H}^2$ d'équation $x_3^{(2)} = 0$ et si $f = x_0^{(1)} x_0^{(2)} k - x_1^{(1)} x_0^{(2)} j$, on trouve que f est une CRF-fonction à gauche sur S , tandis que la solution de (7) est

$F = (x_0^{(2)}k - x_3^{(2)})(x_0^{(1)} - ix_1^{(1)})$, qui n'est pas une fonction régulière. Donc f est une CRF-fonction à gauche qui n'admet pas une extension régulière. Afin que la solution F de (7) soit une fonction régulière, il faut ajouter aux conditions de Cauchy-Riemann-Fueter d'autres conditions différentielles d'ordre supérieur.

Pour cela considérons $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $s \in \{1, \dots, n\}$ et écrivons $\partial/\partial x_\alpha^{(s)}|_S = T_\alpha^{(s)} + \mathfrak{G}_\alpha^{(s)}$ où $T_\alpha^{(s)}$ est tangent à S et $\mathfrak{G}_\alpha^{(s)} = (\partial/\partial x_\alpha^{(s)}, \nu)$, ν est normal à S [$(\cdot, \cdot)$ = produit scalaire ordinaire dans $\mathbb{R}^{4n} \simeq \mathbb{H}^n$]. Définissons $f_\alpha^{(s)}: S \rightarrow \mathbb{H}$ en posant $f_\alpha^{(s)} = T_\alpha^{(s)}(f) + (\partial/\partial x_\alpha^{(s)}, \nu) f^\perp$. Il est clair que $f_\alpha^{(s)} = \partial F / \partial x_\alpha^{(s)}|_S$ et que si F est régulière il en est de même pour $\partial F / \partial x_\alpha^{(s)}: f_\alpha^{(s)}$ est donc une CRF-fonction à gauche. On a alors le

THÉORÈME 2. — *Soit S une hypersurface connexe, orientable et analytique de $\mathbb{H}^n$ ($n > 1$). Soient $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$, $h \in \{1, \dots, n\}$ choisies de telle façon que le champ de vecteurs $\partial/\partial x_\alpha^{(h)}$ ne soit pas partout tangent à S . Une fonction analytique $f: S \rightarrow \mathbb{H}$ admet une extension régulière sur un voisinage de S si et seulement si f et $f_\alpha^{(h)}$ sont des CRF-fonctions à gauche sur S .*

En effet comme on l'a déjà vu plus haut, on a $\bar{\partial}F|_S = 0$, puisque f est une CRF-fonction à gauche; également l'hypothèse que $f_\alpha^{(h)}$ est aussi une CRF-fonction à gauche implique que $\partial/\partial \nu(\bar{\partial}F) = 0$. $\bar{\partial}F$ est donc une fonction harmonique, nulle sur S avec sa dérivée normale. Du théorème de Cauchy-Kowalewski il en découle que $\bar{\partial}F \equiv 0$ et par conséquent que F est l'extension régulière de f cherchée.

L'énoncé du théorème 2 peut être simplifié dans le cas où l'hypersurface S est définie par une fonction Φ de classe C^2 qui vérifie

$$(8) \quad -\|\text{grad}_m \Phi\|^2 \frac{\partial}{\partial x_\mu^{(s)}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{q}_h} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{q}_h} \frac{\partial \Phi}{\partial q_m} \frac{\partial}{\partial x_\mu^{(s)}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{q}_m} \right) = c_{hms} i_\mu,$$

où c_{hms} est une fonction à valeurs dans $\mathbb{H}$ indépendante de μ , $\forall m, s, h = 1, \dots, n$, $\forall \mu = 0, 1, 2, 3$. En effet on peut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit S une hypersurface analytique orientable de $\mathbb{H}^n$ ($n > 1$), définie par une fonction Φ qui vérifie (8). Une fonction analytique $f: S \rightarrow \mathbb{H}$ admet une extension régulière sur un voisinage de S si et seulement si f et $f^\perp \cdot \|\text{grad} \Phi\|$ sont des CRF-fonctions à gauche sur S .*

Observons que parmi les hypersurfaces définies par une fonction Φ qui vérifie (8), il y a les hyperplans, les hypersphères et les hyperellipsoïdes.

4. EXTENSIONS RÉGULIÈRES DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES. — Soit U un ensemble ouvert borné de $\mathbb{H}^n$ avec le bord de classe C^7 , tel que $\mathbb{H}^n - \bar{U}$ soit connexe, et soit Φ une fonction de classe C^7 qui définit ∂U . Soit $f: \partial U \rightarrow \mathbb{H}$ une fonction de classe C^7 . Dans [4] on a trouvé des conditions intégrales qui sont nécessaires et suffisantes pour la résolution du problème

$$(9) \quad \{ \bar{\partial}F = 0 \text{ dans } U, F|_{\partial U} = f \}.$$

De telles conditions intégrales peuvent être remplacées par les conditions différentielles du paragraphe précédent. En fait, on a le

THÉORÈME 4. — *Si f et chaque $f_\alpha^{(h)}$, pour $\alpha = 0, 1, 2, 3$, $h = 1, \dots, n$, sont des CRF-fonctions à gauche, alors il existe $F \in C^2(\bar{U})$ régulière dans U qui est la solution de (9).*

Pour des domaines particuliers les conditions sur f peuvent être simplifiées.

A ce propos on a les théorèmes suivants :

THÉORÈME 5. — *Supposons que $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$, $h \in \{1, \dots, n\}$ existent de façon que $\{p \in \partial U : \partial/\partial x_\alpha^{(h)} \notin T_p(\partial U)\}$ soit dense dans ∂U . Si f et $f_\alpha^{(h)}$ sont des CRF-fonctions à gauche, alors il existe $F \in C^2(\bar{U})$ régulière dans U qui est la solution de (9).*

THÉORÈME 6. — *Supposons que Φ satisfait (8). Alors si f et $f^\perp \cdot \|\text{grad } \Phi\|$ sont des CRF-fonctions à gauche, il existe $F \in C^2(\bar{U})$ régulière dans U qui est la solution de (9).*

Les points essentiels de la démonstration dans les trois cas sont les mêmes :

- (a) existence d'une extension F_1 de f qui satisfait $\bar{\partial}F_1 = \Phi\psi_1$;
- (b) existence d'une extension F_2 de f telle que $\bar{\partial}F_2 = \Phi^2\psi_2$ (et pour cela on utilise l'hypothèse que les $f_\alpha^{(h)}$ ou $f^\perp \cdot \|\text{grad } \Phi\|$ sont des CRF-fonctions à gauche);
- (c) existence d'une extension F_3 de f qui satisfait $\bar{\partial}F_3 = \Phi^3\psi_3$ [et pour cela on utilise (4)].

Ceci étant, la fonction u qui vaut $\Phi^3\psi_3$ dans U et 0 dans $\mathbb{H}^n - U$ est de classe C^2 , satisfait la condition (4), et donc, compte tenu du théorème 1, il existe $v \in C_0^2(\mathbb{H}^n)$ telle que $\bar{\partial}v = u$. La fonction $F = F_3 - v$ est l'extension régulière de f cherchée.

Note remise le 9 avril 1990, acceptée le 24 avril 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. FUETER, Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta \Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen, *Comment. Math. Helv.*, 7, 1935, p. 307-330.
- [2] R. FUETER, Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen, *Comment. Math. Helv.*, 8, 1936, p. 371-378.
- [3] K. NÔNO, Hyperholomorphic Functions of a Quaternion variable, *Bull. Fukuoka Univ. Educ.*, part III, 32, 1982, p. 21-37.
- [4] D. PERTICI, Funzioni regolari di più variabili quaternioniche, *Ann. Mat. Pur. Appl.*, serie IV, C.L.I., 1988, p. 39-65.
- [5] D. PERTICI, Teoria delle funzioni di più variabili quaternioniche, *Tesi di dottorato, Università degli Studi di Firenze*, 1987-1988.
- [6] S. M. SALAMON, Quaternionic Manifolds, *Symp. Math.*, 26, 1982, p. 139-151.
- [7] S. M. SALAMON, Quaternion Kähler Manifolds, *Invent. Math.*, 67, 1982, p. 143-171.
- [8] A. SUDBERY, Quaternionic Analysis, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85, 1979, p. 199-225.

Istituto Matematico U. Dini, viale Morgagni 67 A, 50134 Firenze, Italy.