

LA GEOMETRÍA DELL'UNIVERSO DANTESCO

*Vincenzo Vespri**
Università di Firenze

0. Introduzione

In questa nota ci interessiamo della struttura architettonica-geometrica dell'Universo Dantesco. L'argomento non è ozioso, in quanto cercare di capire di come Dante immaginava il mondo ultraterreno ci può aiutare a capire meglio sia la Divina Commedia che la cosmologia medievale. Iniziamo a trattare l'Inferno in cui si parte dalla disputa fra Manetti e Vellutello che fu occasione per le celeberrime lezioni di Galileo sull'argomento e di come queste lezioni abbiano potuto influire sulle future ricerche di Galileo. Tratteremo velocemente del Purgatorio per concentrare la nostra attenzione sul Paradiso, in quanto proprio in questa cantica si concentra maggiormente la visione morale del cosmo Dantesco. Si fa notare che la raffigurazione comunemente accettata del Paradiso non corrisponde a quella usuale ed unitaria del Medio Evo Cristiano: vi è la raffigurazione di un cosmo che ruota intorno

* Membro dello G.N.A.M.P.A. (Istituto Nazionale di Alta Matematica)

alla Terra che ha al suo centro Lucifero e che è sostanzialmente separato da Dio circondato dai cori angelici. Un ardito tentativo proposto di dare una raffigurazione unitaria è quello basato sulla geometria non euclidea. Proposta sicuramente con molto fascino ma che ha insita l'incongruenza di supporre che Dante potesse aver intuito una branca della Matematica molto difficile e molto poco intuitiva, ben mezzo millennio prima della sua assiomatizzazione. Un aspetto però da non trascurare è che l'approccio non-euclideo è connesso ad un aspetto geometrico-proiettivo molto suggestivo ed intuitivo, e questo sì alla portata di Dante. Infatti la proiezione stereografica era già nota all'epoca di Ipparco di Nicea e comunemente usata in cartografia. Sicuramente era uno strumento utilizzato all'epoca delle repubbliche marinare e, quasi sicuramente, conosciuto da Dante. In un prossimo lavoro si cercherà di combinare queste osservazioni preliminari per proporre un modello di Paradiso compatibile con la visione cosmologica morale medievale, con i versi della Divina Commedia e con le conoscenze matematiche di Dante.

Parole Chiave: *Divina Commedia, Inferno, Galileo Galilei, Purgatorio, Paradiso, Geometria Non-Euclidea, Proiezione Stereografica.*

La Divina Commedia di Dante Alighieri rappresenta una occasione unica per incontrare una sintesi della visione cosmologica medievale. All'epoca di Dante, si riscopre la profondità del pensiero greco-latino che viene fuso nella mistica cristiana. Si può definire la Divina Commedia come la sintesi della concezione aristotelico-tolemaica filtrata attraverso la riflessione operata da San Tommaso d'Aquino con lo spirito della cosmogonia platonica.

Il concetto del tempo come creato dal Demiurgo per mezzo del moto delle sfere e che si realizza soltanto nel corso della vita fisica e mortale, discende senza dubbio dalle speculazioni

platoniche ma Dante è attento agli aspetti “scientifici”: gli elementi astronomici e cosmologici sono parte integrante della costituzione poetica e l’astronomia e astrologia sono fuse in un’unica concezione poetica ed esistenziale. In questa visione dove poesia, visione religiosa e conoscenze scientifiche sono mirabilmente fuse, i Regni dell’Oltretomba: Inferno, Purgatorio e Paradiso hanno una loro coerenza geometrica. In questa breve nota siamo interessati a descrivere le problematiche matematiche ed architettoniche collegate alla visione dantesca.

1. L’Inferno

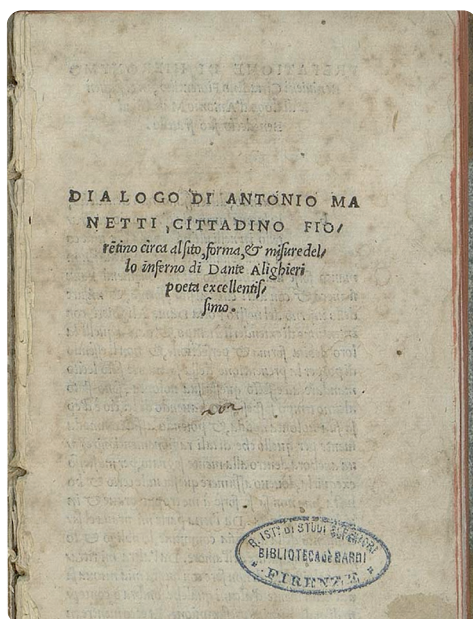
La terra nacque nel momento in cui Dio creò gli angeli e i cieli. Ma appena creati alcuni angeli si ribellarono, sollecitati da superbia, “Né giungeresi, numerando al venti, sì tosto, come de li angeli parte turbò il soggetto d’i vostri alimenti (*Paradiso* XXIX, 49-51)”. Dio li espulse e il loro capo, Lucifero, diventò il re di un regno negativo, l’Inferno. Scaraventati dal cielo i ribelli precipitarono verso la terra, che inorridita di dover contenere Lucifero, si ritirò nel settentrione e qui poi fu popolata dagli uomini. L’emisfero meridionale fu occupato interamente dalle acque. Degno di nota è che Dante lega la concezione fisica a quella etico-religiosa e quindi la disposizione acqua-terra deve rispondere alla sensibilità morale: in questo caso Dante non segue la concezione tolemaica che voleva essere solo geografica e fisica. Pertanto dentro la terra, insieme ai suoi compagni di rivolta, Lucifero si conficcò al centro a testa in giù e in quella posizione starà per l’eternità. La testa e il busto si collocarono nell’emisfero settentrionale, il resto del corpo in quello australe. Ma una parte estrema della terra, si aprì in forma di voragine e diede vita all’Inferno.

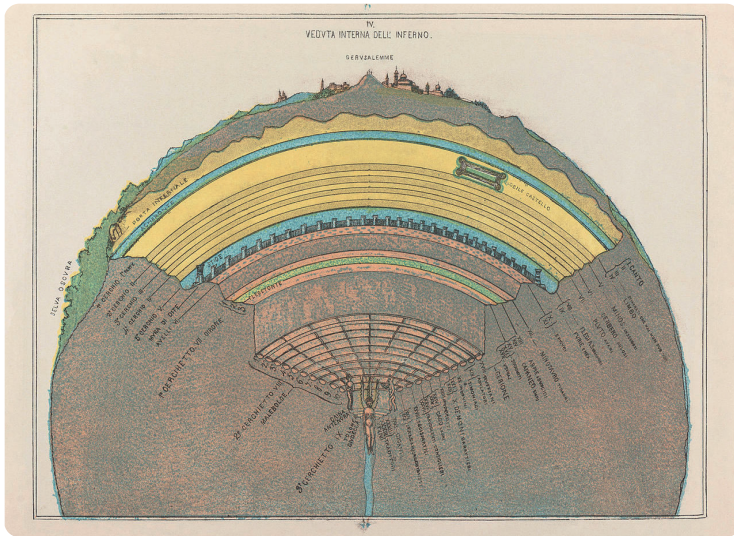
Per quanto riguarda le nostre osservazioni qui esposte abbiamo seguito l'approccio di Jean-Marc Lévy-Leblond (<https://www.resetdoc.org/it/story/nellinferno-di-dante/>) .

La curiosità di come fosse fatto effettivamente l'inferno di Dante prende chiunque inizi a leggere la Divina Commedia. Tanti artisti si erano cimentati nella raffigurazione dell'aldilà. Vedasi ad esempio Giotto (Cappella degli Scrovegni) e Signorelli (Cappella di San Brizio del Duomo di Orvieto).

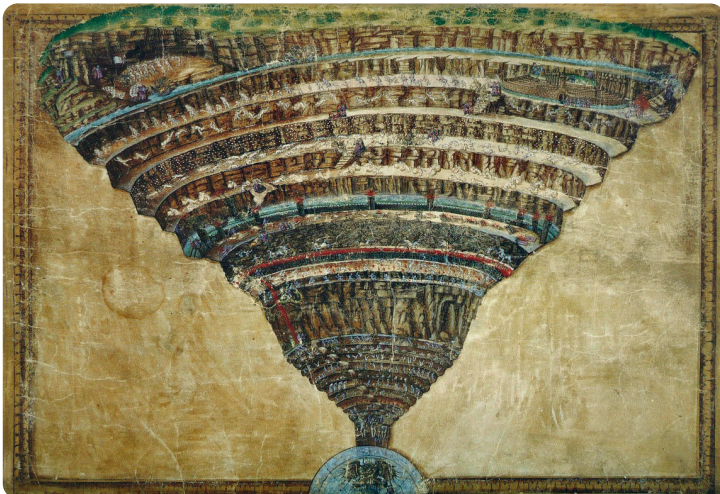


Nel 1506 fu pubblicata una descrizione, firmata dal fiorentino Antonio Manetti (*Dialogo di Antonio Manetti, cittadino fiorentino circa al sito, forme e misure dello inferno di Dante Alighieri, poeta eccellentissimo*), della geografia e della geometria dell'Inferno così come erano state descritte da Dante.





Manetti intendeva valutare l'attendibilità delle rappresentazioni figurative proposte da Botticelli negli anni novanta del Quattrocento in una edizione illustrata che seguiva i primi disegni di Giuliano da Sangallo.



Le illustrazioni si basavano su dimensioni in cifre esplicite tratte dal testo di Dante attraverso calcoli complessi e che, per i circoli intellettuali di un'epoca per la quale La Divina Commedia costituiva un punto di riferimento fondamentale, dovevano essere stabilite con precisione. Ma nel 1544 Alessandro Vellutello, letterato lucchese che operò a Venezia, da buon lucchese non si sentiva partecipe della tradizione linguistica e letteraria fiorentina e pubblicò una critica severa soprattutto al commento di Cristoforo Landino ma anche alla descrizione fatta da Manetti e propose una visione molto diversa dell'Inferno. Vedasi ad esempio Francesco Sansovino (1578).



Due erano essenzialmente i punti considerati dal Vellutello:

1. I gradini successivi dell'Inferno erano porzioni di un cilindro con le pareti parallele all'asse comune invece che sezioni coniche.
2. La volta che ricopriva l'Inferno era troppo sottile.

Ovviamente nessuno considerava attendibile la descrizione di Dante dal punto di vista teologico. L'importanza della Divina Commedia nell'ambito della cultura toscana, però, rendeva evidente la necessità di commentarla e di comprenderla in tutti i suoi aspetti - compresi quelli topografici - in modo da renderne più agevole la complessa lettura. Vedasi Agnelli (1891) e Orlando (1993).

Era quindi necessario dirimere la questione. Ossia se avesse ragione Manetti appartenente all'epoca dell'Accademia delle Scienze di Firenze, poi Accademia della Crusca, o Vellutello. Chiaramente l'unico che fosse in grado di farlo poteva essere solo un matematico, perché con le competenze giuste per esaminare la questione sia dal punto di vista scientifico (utilizzato soprattutto da Manetti), sia da quello umanistico, essendo questo tipo di formazione piuttosto di base all'epoca. L'unico matematico che decise di accettare la sfida proposta dall'Accademia delle Scienze di Firenze fu un ambizioso e giovane (allora sono ventiquattrenne) Galileo Galilei che accettò l'incarico sia per amore della sfida sia per mettersi in luce. Ebbero così origine le due lezioni che Galileo dedicò, nel 1587, all'*Inferno* di Dante (Galilei, 1968). Galileo scelse con cura e commentò i versi di Dante chiamati in causa, cominciando con il confermare la descrizione di Manetti: l'*Inferno* è una cavità conica il cui vertice si trova al centro della Terra, e il cui asse, a livello della superficie, è posto in corrispondenza di Gerusalemme come testimoniato dai seguenti versi: "E se' or sotto l'emisperio giunto, ch'è opposto a quel che la gran secca coverchia e sotto 'l cui colmo consunto fu l'Uomo che nacque e visse senza pecca" (*Inf.* XXXIV, 112-115); "Già era 'l Sole all'orizzonte giunto, lo cui meridian cerchio coverchia Ierusalem col suo più alto punto" (*Purg.* II, 1-3).

Il cerchio che è alla base dell'*Inferno* ha un diametro uguale al raggio della Terra, e ciò equivale a dire che, in una sezione

centrale della Terra che passa per l'asse del cono, il settore infernale occupa un sesto dell'area del disco. Galileo pensò che qualcuno, non esperto in geometria tridimensionale, avrebbe potuto pensare che la medesima proporzione fosse valida anche per i volumi. Galileo non perdere un'occasione così ghiotta di mostrare la propria erudizione:

“Ma volendo sapere la sua grandezza rispetto a tutto l'aggregato dell'acqua e della terra, non doviamo già seguitare la opinione di alcuno che dell'Inferno abbia scritto, stimandolo occupare la sesta parte dello aggregato; però che, facendone il conto secondo le cose dimostrate da Archimede ne i libri Della sfera e del cilindro, troveremo che il vano dell'Inferno occupa qualcosa meno di una delle 14 parti di tutto l'aggregato: dico quando bene tal vano si estendessi sino alla superficie della terra, il che non fa; anzi rimane la sboccatura coperta da una grandissima volta della terra, nel cui colmo è Jerusalem, ed è grossa quanto è l'ottava parte del semidiametro”.

I trattati di Archimede erano molto poco noti, allora, e facevano parte dei testi matematici eruditi che i commentatori precedenti di Dante, letterati puri, non potevano conoscere. I calcoli di Galileo son chiaramente giusti (Lévy-Leblond, 2008, p. 167-168). Galileo, nel commento proposto, proseguì chiamato in causa le proprie conoscenze fisiche e criticando i commenti di Vellutello. Per quanto riguarda i gradoni infernali, Galileo fa giustamente notare che tali pareti non possono essere verticali. Questo perché la forma dell'inferno è un cono con vertice il centro della Terra, i gradoni infernali devono necessariamente seguire la direzione dei raggi che passano al centro della Terra: in due punti distanti, le direzioni delle verticali locali non sono parallele ma convergenti nel centro ella Terra. Così, i gradoni cilindrici pensati da Vellutello, che erano di fatto obliqui rispetto alla verticale terrestre e, con uno strapiombo pronunciato, sarebbero stati assolutamente instabili.

“Ponendo [Vellutello] che il burrato si alzi su con le sponde equidistanti tra di loro, si troveranno le parti superiori prive di sostegno che le regga, il che essendo, indubitatamente rovineranno: perciò che essendo che le cose gravi, cadendo, vanno per una linea che dirittamente al centro le conduce, se in essa linea non trovano chi le impedisca e sostenga, rovinano e caggiono”.

Questa frase contiene in sé l'embrione delle riflessioni sulla caduta dei gravi che Galileo svilupperà magistralmente durante il suo periodo di docenza a Pisa. Da notare quindi che le lezioni di Galileo mostrano, senza ombra di dubbio, che il grande scienziato aveva in mente il problema della caduta dei corpi da quando aveva solo 24 anni. In realtà, nelle due lezioni, Galileo, anche se non gli sfugge la maggiore verosimiglianza naturale del pendio rispetto al precipizio, in riferimento anche al notato digradare concentrico del settore sferico dalla superficie intorno a Gerusalemme verso il centro terrestre, non disdegna, però, del tutto neanche la tesi del dirupo, in base alla indicazione indiziaria autentica di Dante stesso, secondo il quale le calate erano previste solo una per cerchio con un diavolo di guardia per impedire la risalita dei dannati in fuga verso tormenti meno severi.

Per la seconda obiezione di Vellutello, ossia l'esistenza della volta che copre l'Inferno, Galileo chiamò in causa la resistenza dei materiali:

“Sì come alcuni hanno sospettato, non par possibile che la volta che l'Inferno ricuopre, rimanendo sì sottile quant'è di necessità se l'Inferno tanto si alza, si possa reggere, e non precipiti [...], oltre al rimanere non più grossa dell'ottava parte del semidiametro [...]. Al che facilmente si risponde, che tal grossezza è sufficientissima: perciò che, presa una volta piccola, fabricata con quella ragione, se sarà di arco 30 braccia, gli rimarranno per la grossezza braccia 4 in circa, la quale non

solo è bastante, ma quando a 30 braccia di arco se gli desse un sol braccio, e forse $1/2$, non che 4, basteria a sostenersi”.

Il paragone tra la calotta dell’Inferno e una volta in muratura utilizzato da Galileo rimanda senza alcun dubbio ai rapporti tra la struttura dell’Inferno di Dante e l’architettura della celebre cupola del Duomo di Firenze progettata da Brunelleschi, che ebbe un ruolo emblematico nel Rinascimento (cfr. Toussaint, 1997). Ma se questa analogia ha un senso culturale profondo, il suo valore scientifico è nullo: una volta gigantesca come quella dell’Inferno, se avesse le medesime proporzioni geometriche di una piccola volta in muratura, non sarebbe di certo altrettanto solida. Alla luce delle concezioni moderne sull’accelerazione di gravità e la resistenza dei materiali, la copertura dell’Inferno sarebbe ineluttabilmente destinata a crollare. Infatti, la resistenza di una volta aumenta come l’area della sua sezione mentre il suo peso varia in rapporto al suo volume. Se tutte le dimensioni sono moltiplicate per un medesimo fattore di scala, per esempio 10, il peso sarà moltiplicato per 1.000, ma la resistenza al crollo soltanto per 100; e quindi sarebbe, in proporzione, 10 volte più fragile. Dunque esiste necessariamente un limite alla solidità di una struttura ottenuta attraverso il semplice cambiamento di scala a partire da una struttura solida più piccola. En el caso della volta dell’Inferno paragonata alla piccola volta in muratura presa in considerazione da Galileo, in cui il fattore di scala è di qualche centinaio di migliaia, il limite è ovviamente superato, e di gran lunga.

In termini matematici, la cupola deve avere la volta spessa quanto $k\sqrt{l^3}$ con k costante che dipende dai materiali e l l’altezza della cupola (ossia nel caso dell’Inferno, sarebbe pari al raggio della Terra ossia circa 6370 km). Ovviamente lo spessore della cupola deve essere inferiore alla lunghezza del cono e questo rende la costruzione dell’inferno dantesco matematicamente impossibile. O è molto più stretto o è molto più corto. Facendo il paragone con la cupola del Brunelleschi che è alta 50 metri ed

ha una volta di circa 2 metri, se si applicassero le sue costanti strutturali e l'Inferno avesse la struttura pensata da Dante, l'Inferno potrebbe avere al massimo un'altezza di soli 38 km e quindi con un volume più piccolo di quasi 5 milioni di volte rispetto a quello dell'Inferno immaginato da Dante. Quindi le alternative sono: o il regno di Lucifero è molto ma molto piccolo (e quindi abbiamo una speranza anche noi peccatori di scamparlo), o non vi è alcuna cupola che separi il Regno di Lucifero dal nostro mondo. Lo stesso argomento invalida anche il pittoresco passaggio delle Lezioni in cui Galileo tenta di stimare per omotetia l'altezza di Lucifero (il risultato è 2000 braccia, un po' più di un kilometro). Ma un gigante non può avere le stesse proporzioni corporee di un uomo delle nostre dimensioni. Ad esempio, la superficie plantare dovrebbe essere grandissima, quindi per un gigante alto 1 km, i piedi dovrebbero essere più o meno lunghi 10 km...

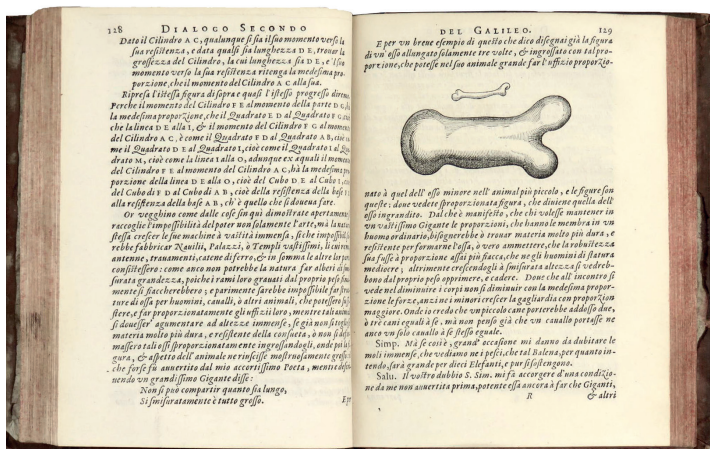
Si noti che la relazione $k\sqrt[3]{V}$ è usata ancora oggi dagli architetti e che questo risultato è stato per la prima volta dimostrato e sviluppato... da Galileo stesso. Infatti, proprio nelle lezioni, quando stima il volume dell'inferno un quattordicesimo di tutta la Terra, applica in modo implicito proprio la legge precedentemente enunciata della radice quadrata del cubo. (quattordici è circa la radice quadrata del cubo di 6). Galileo poi applicò questi argomenti in modo esplicito e puntualmente in *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (Galilei, 1968). Secondo Mark Paterson (2002) è decisamente verosimile che Galilei abbia compreso subito il proprio errore di ragionamento, derivato da una concezione puramente geometrica, che non teneva conto delle leggi di scala riguardanti le proprietà fisiche della materia. Il fatto che Galileo abbia inteso molto presto il carattere fallace dei cambiamenti di scala considerati nelle Lezioni sull'Inferno spiegherebbe in particolare la discrezione, per non dire la reticenza, dimostrata quasi immediatamente riguardo a tale lavoro. Lo scienziato

ha sicuramente riservato a tali questioni riflessioni intense tra il 1590 e il 1600. Si può anche avanzare la congettura che Galileo, nel comprendere il proprio errore, abbia subito un vero e proprio choc psicologico, di cui si trova eco nei *Discorsi*:

“Sagredo: Io già mi sento rivolgere il cervello, e, quasi nugola dal baleno repentinamente aperta, ingombrarmi la mente da momentanea ed insolita luce, che da lontano mi accenna e subito confonde ed asconde immaginazioni straniere ed indigeste. E da quanto ella ha detto parmi che dovrebbe seguire che fusse impossibile cosa costruire due fabbriche dell’istessa materia simili e diseguali, e tra di loro con egual proporzione resistenti”.

Da questa frase si può inferire che Galileo abbia compreso rapidamente il proprio errore. Anche per quanto riguarda le dimensioni di Lucifero, si noti che, proprio parlando di giganti, Galileo spiega che le ossa dei giganti dovrebbero essere molto più spesse. Quindi le proporzioni da lui pensate per Lucifero nelle Lezioni non potevano essere corrette.





Di fatto, se i Discorsi erano stati pubblicati soltanto nel 1638, i materiali che l'opera raccoglie erano pronti già prima del 1610, momento in cui Galileo si dedicò alle osservazioni astronomiche e pubblicò la prima opera importante, il Sidereus Nuncius. È dunque lecito considerare le Lezioni sull'Inferno come il punto di partenza del pensiero matematico sviluppato da Galileo nei Discorsi. Degno di nota è quindi che queste lezioni sulla Divina Commedia siano state di stimolo per Galileo Galilei per importanti ricerche (caduta dei gravi e la legge $k\sqrt{t^3}$) che avrebbe affrontato con successo nella sua maturità.

Ovviamente molte altre osservazioni sono state fatte su alcune incongruenze della geometria dell'Inferno nella Divina Commedia. A titolo di esempio, fra queste ricordiamo Fabrizio Cacciafesta (2003, p. 349-400): "Dante ha creato Malebolge come dieci cerchi concentrici infossati, separati da nove argini; le bolge sono diverse e diversi elementi le connotano come strette, mentre è facilmente deducibile che gli argini siano piuttosto alti e più stretti. Ma ciò che dice Maestro Adamo (*Inf.* XXX, 84-7) sembra contraddire quanto affermato da Virgilio (in *Inf.* XXIX, 9). La contraddizione si spiega ove non si pensi

alle bolge come a circonferenze ma come a corone circolari dotate di una certa larghezza, ma il conto della misura in miglia delle bolge torna solo ove, nelle parole del maestro Adamo (Inf. XXX, 86), si scriva, in luogo di ‘undici’, ‘ventun’, che è anche metricamente corretto”.

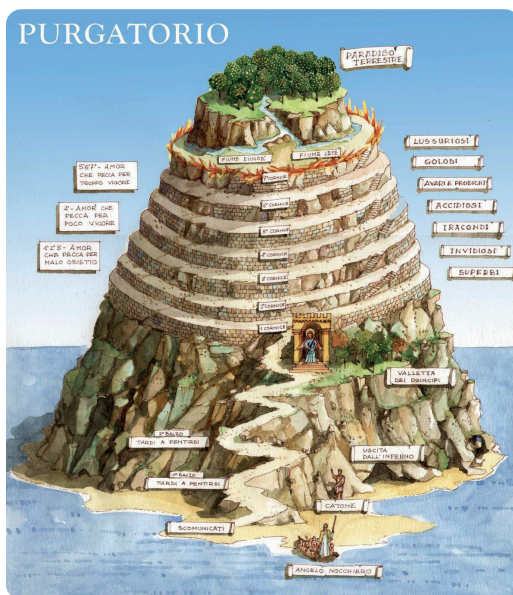
2. Il Purgatorio

Quando Lucifero si conficcò al centro a testa in giù, dalla terra che emerse dallo svuotamento dell'emisfero australe si formò un'isola a forma di alta montagna, che si restringe dalla base verso la cima: quell'isola divenne il Purgatorio. In origine fu la dimora dei nostri progenitori ma, dopo il peccato e dopo che Caino uccise Abele, gli uomini ne furono espulsi e l'isola fu assegnata alle anime purganti. La terra, dunque, secondo Dante, contiene oltre il continente emerso e popolato, l'Inferno, sotterraneo, e il Purgatorio, l'unica isola dell'oceano.

Lungo la stessa linea assiale si dispongono:

1. Gerusalemme, centro della terra emersa e luogo dove la storia dell'uomo si può dividere in storia precristiana e storia post-cristiana.
2. L'Inferno e Lucifero, attraversato dalla linea ideale nell'ombelico (centro interno della terra);
3. il Purgatorio o meglio l'albero del bene e del male che si pone al centro del paradiso terrestre e che occupa la cima dell'isola-montagna.

Da notare che l'idea del Purgatorio è quasi contemporanea all'opera di Dante. Jacques Le Goff (1981) ricostruì lo sviluppo dell'idea del Purgatorio nel corso dei secoli. Uno sviluppo che porta da un modello dualistico cielo-terra e Inferno-Paradiso, ad una “terza via” che ha radici molto antiche ma che non troverà una sua definizione prima del XII secolo. E' tra il 1150 e il 1250



che si affermò infatti l'idea di un aldilà intermedio, nel quale alcuni defunti subiscono una prova che può essere abbreviata dai suffragi dei viventi. “Esso si basa sulla credenza di un doppio giudizio —spiega ancora Le Goff— il primo al momento della morte e il secondo alla fine dei tempi. Presuppone dunque la proiezione di un'idea di giustizia e di un sistema penale molto sofisticati”.

La struttura geometrica del Purgatorio ha attratto molto meno interesse di quella dell'Inferno. Considerando che il Purgatorio è per sua natura simmetrico all'Inferno, risulta chiaro che la legge fisica $k\sqrt{l^3}$ applicata in questo contesto, ne riduce sensibilmente l'altezza. Questo però, a differenza dell'Inferno, non riduce drasticamente la capienza del Purgatorio. Mentre nell'Inferno le anime occupano l'intero spazio e risulta importante il volume, qui nel Purgatorio le anime si muovono sulla superficie laterale della montagna e fra due coni con la stessa base ma uno con l'altezza trascurabile rispetto alla base

e un altro con l'altezza pari al diametro della base, la superficie laterale della prima è circa la metà della seconda. Quindi una riduzione di capienza non così drammatica come per l'Inferno.

3. Il Paradiso

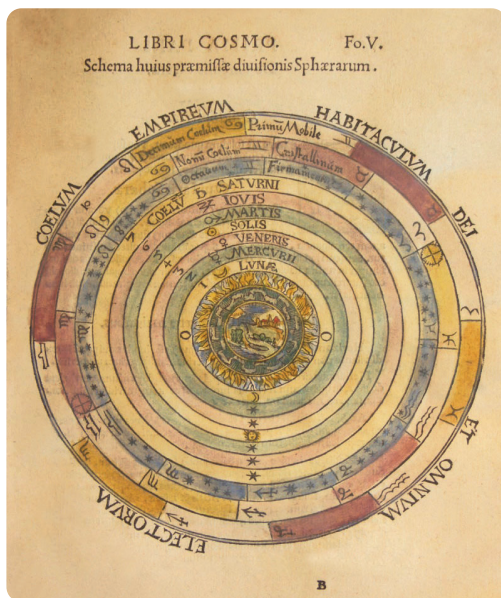
Secondo la concezione cosmologica dantesca, la Terra, creata dalla divinità, come ogni altro elemento fisico e metafisico, è una sfera immobile al centro dell'universo ed è circondata da sette pianeti (Luna, Mercurio, Venere, Sole, Marte, Giove, Saturno), dal cielo delle stelle fisse, dal cielo Cristallino o Primo Mobile e, infine, dall'empireo (che non è un cielo, anzi non è neppure spazio). Fuori dalla terra, in alto, nel cielo Dante ha collocato il Paradiso, cui si accede passando per nove cieli o stelle o pianeti. Il vero paradiso è l'Empireo, puro pensiero divino, al di fuori dello spazio, e i beati, che vivono la loro beatifica visione della divinità, si dispongono attorno ad essa gerarchicamente, quasi a comporre un'ideale corte. I cieli appartengono ancora al mondo della materia, anche se sono formati di quintessenza. Solo l'Empireo è immateriale. Ed immateriale sono anche gli angeli distribuiti gerarchicamente in nove cori.

Gli Angeli sono mossi dall'Amore verso Dio e hanno il compito di far muovere i nove cieli e di comunicare, attraverso gli influssi astrali, le tendenze o caratteri che distinguono creatura da creatura e che le avviano al proprio destino. Essi fanno muovere l'universo in base alla loro visione di Dio; il moto dei cieli è misurabile dalla rotazione dei pianeti ed è causato dal velocissimo movimento del Primo Mobile; quindi il moto dei pianeti è costituito dal moltiplicarsi del primo moto che, a sua volta, è frutto dell'amore di Dio e per Dio, Motore Immobile del Tutto. Le sfere celesti ruotando producono un suono armonioso, segno sonoro dell'ordine cui obbediscono. Questa musica non viene avvertita sulla terra dagli uomini per ottundimento dell'udito (tale credenza era anche in Cicerone che ha sua volta

l'aveva dedotto da Platone e dai pitagorici). Dante, salendo nei vari cieli, percepisce un'armonia sempre crescente fino a quando è tanto sublime che non la può più sopportare e non ode più nulla.

Per esporre la geometria del Paradiso ho tratto spunto dal contributo di Bersanelli (<http://www.diesse.org/cm-files/2010/03/30/terza-lezione-percorsi-didattici-alla-luce-de-la-coscienza.pdf>).

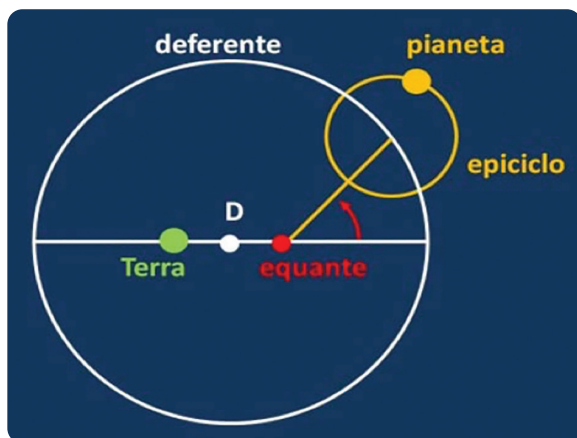
Nell'antica Grecia nasce l'idea di un ordine, di una regolarità, di una spiegabilità dei fenomeni. Esiste quindi un modello geometrico dell'universo, ed il modello geometrico che si è sviluppato nell'antica Grecia rimane la base fondamentale del cosmo fino al Medio Evo.



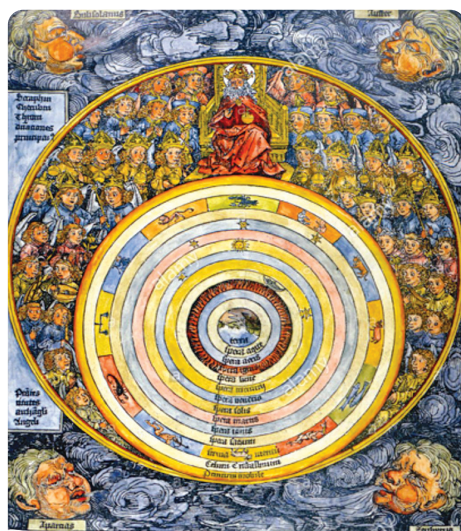
La cultura medievale fa suo il modello di universo dell'antica Grecia, modello geocentrico, con la Terra al centro del mondo,

con le sfere che portano i vari pianeti a distanze via via superiori. I cinque pianeti visibili a occhio nudo, e naturalmente il Sole e la Luna insieme a essi e la sfera delle stelle fisse: questo era il primo ordine che il modello aristotelico-tolemaico ha definito, e che l'era cristiana medievale europea ha fatto proprio. E in questo universo ben ordinato, ben centrato sulla Terra, la cultura cristiana aveva immaginato la presenza dell'Empireo, quindi del cielo che è la sede propria del divino. Oltre il Primo Mobile, che Aristotele aveva posto come origine del tempo e del movimento, la cultura cristiana medievale aveva aggiunto un cielo ulteriore, un cielo "spirituale", non fisico, ma rappresentato geometricamente da un'ultima sfera che circonda tutto l'universo. Dio è l'orizzonte ultimo di tutta la realtà e abbraccia tutto il cosmo. Va detto che il modello ereditato dagli antichi greci funzionava benissimo, era un'architettura estremamente ben compaginata nella quale c'erano alcuni punti fissi. Intanto la materia di cui i corpi celesti erano fatti, per gli antichi greci così come per i medievali, era di una natura diversa da quella che fa il nostro ambiente terrestre: era una materia perfetta e incorruttibile; e la compagine del movimento cosmico è un sistema molto complesso che deve obbedire a questa sorta di dogma intellettuale dei greci, per cui il moto deve essere un moto perfetto: il moto circolare uniforme, il moto perfetto che ripete se stesso indefinitamente. E allora ecco che nel sistema più evoluto di Tolomeo abbiamo una grande quantità di sfere che devono muoversi le une dentro le altre, anche con dei trucchi abbastanza complicati, ma che permettono di riprodurre in modo assai accurato tutte le osservazioni dei movimenti degli astri, delle stelle e dei pianeti. Quindi un modello assolutamente efficace.

Il Medio Evo eredita quindi un modello geocentrico. Un universo che però, a differenza di quanto accadeva per i greci, nel Medio Evo viene sentito come una creatura: è la creazione di un Dio che vuole l'essere. Così non era per i greci. L'Empireo



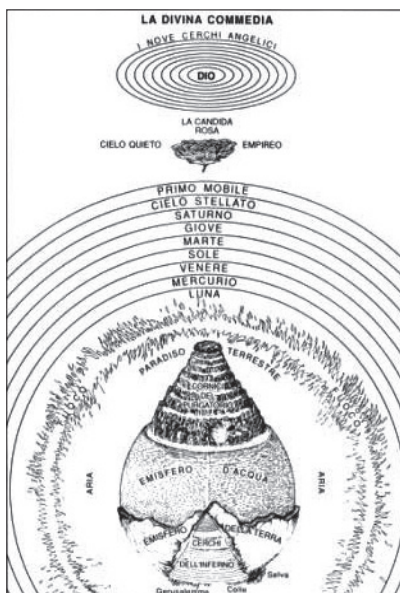
è il segno “geometrico”, intorno al cosmo della realtà divina, che abbraccia tutto l’universo. Il modello di riferimento, dal punto di vista dei moti, è quello che abbiamo detto, ma nello stesso tempo è interessante notare come nel Medio Evo ci sono diverse raffigurazioni in cui non è la Terra al centro del movimento e dei cerchi dei pianeti, ma è Dio; perché Dio, oltre



a essere ciò che circonda l'universo, per il medievale doveva essere anche il cuore dell'universo. C'è questa tensione fra la presenza del divino come ciò che abbraccia tutto quanto e come centro di tutto.

C'era un altro tipo di discussione molto vivace nel Medio Evo, che riguardava il confine dell'universo: che cosa c'è oltre? Qui abbiamo chiaramente un paradosso, per cui se c'è un universo che ha un confine, il Primo Mobile, che cosa c'è oltre? Che cosa succede se si esce dall'Universo? Ha qualche senso questa domanda? Dante sembra ribaltare il tavolo ed uscire dalla tradizione il suo Universo sembra avere una configurazione non usuale in cui abbiamo la Terra con Lucifero al centro, e poi tutti i cerchi dei pianeti che circondano la Terra e poi l'Empireo che circonda tutto quanto; c'è poi la Candida Rosa e l'universo degli angeli che circondano il divino, il punto da cui tutto dipende.

In questo schema, la raffigurazione del Paradiso è la seguente:



Ma facendo così si perde l'unitarietà della visione medievale. La Creazione è in uno spazio diverso da quello in cui dimora il Creatore. Proprio per venire a capo di questa visione dell'Universo dantesco così lontana da quella tipica del Medio Evo, è stato proposto da vari autori (Speiser, 1925; Peterson, 1979, p. 1031-1035; 2008, p. 14-19; Egginton, 1999, p. 195-216; Blair, 2015) un Universo immerso in quattro dimensioni.

In tutti questi contributi, l'ipotesi quadri-dimensionale viene suffragata dalla antinomia fra una visione tolemaica che Dante non poteva non avere e la struttura del Paradiso descritta da Dante. Infatti, nel Canto XXVII del Paradiso Dante sembra far sua la classica impostazione geocentrica medievale, ereditata dalla scuola aristotelica. Dopo averci descritto nei canti precedenti l'ascesa attraverso tutti i cieli, quando giunge con Beatrice alle soglie del Primo Mobile, afferma:

Luce e amor d'un cerchio lui comprende,
sì come questo li altri; e quel precinto
colui che 'l cinge solamente intende.

(*Par.* XXVII, 112-114)

In piena coerenza con l'immagine classica, l'Empireo è qui descritto come un cerchio di luce ed amore che circonda l'universo sensibile. E ancora, riferito al Primo Mobile:

Le parti sue vivissime ed eccelse
sì uniforme son, ch'ì non so dire
qual Beatrice per loco mi scelse.

(*Par.* XXVII, 100-102)

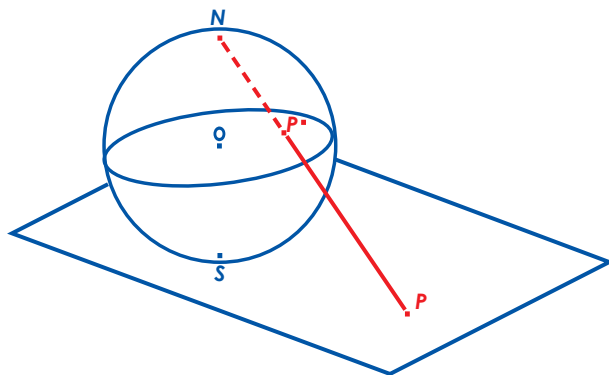
Il maggior corpo è luminosissimo e talmente uniforme che Dante non riesce a identificare il punto della sfera che Beatrice ha scelto per passare oltre, per entrare nell'Empireo. Ma quando nel canto XXVIII Dante e Beatrice si affacciano al "ciel ch'è pura luce" Dante ci racconta qualcosa di inaspettato: egli si trova

davanti un altro Universo (*Par.* XXVIII, 71), fatto anch'esso di nove cerchi concentrici, la sede delle schiere angeliche che ruotano intorno a un punto: "Da quel punto dipende il cielo e tutta la natura" (*Par.* XXVIII, 41-42). Dio è dunque un punto infinitesimo e luminosissimo attorno al quale ruota una festa cosmica, l'Empireo strutturato in cerchi di fuoco. Quindi, si direbbe, in questa scena l'Empireo non è più posto intorno al Primo Mobile, come vuole la tradizione, ma sembra comporre un secondo universo esterno a quello sensibile. Insomma, una descrizione che appare palesemente contraddittoria. Inoltre, in questo schema il passaggio attraverso il Primo Mobile dovrebbe avvenire in un punto ben preciso, una "soglia" che conduce all'Empireo, contrariamente a quanto affermato in *Paradiso* XXVII, 100-102. Ma non solo Dante e Beatrice passano in questo nuovo Universo da un punto qualunque invece che da una porta del cielo, ma anche Dante si premura di dire "è totalmente uniforme": ogni punto è uguale a qualunque altro. Passano quindi dall'altra parte e vedono il punto del divino, Dio, come una stella luminosissima e infinitesima, intorno alla quale ci sono i cerchi che corrispondono a uno a uno coi cerchi dell'universo visibile. Ma altrove, sempre nella Divina Commedia, lui ci dice che "il cielo divino" —proprio in sintonia con la raffigurazione tradizionale— è un cerchio che circonda il Primo Mobile, "luce ed amor d'un cerchio lui comprende sì come questo li altri". È proprio un cerchio come gli altri. Sembra contraddirsi. E c'è una contraddizione, c'è una dicotomia che possiamo risolvere se si immagina il Creato immerso in uno spazio curvo. E se lo spazio è curvo, quello che abbiamo è che partendo dal punto più basso della sfera (in questo caso quadridimensionale) rappresentato da Lucifero, qualunque direzione prendiamo per andare verso Dio punto ci mostra la stessa situazione dei cerchi che vanno a convergere intorno all'altro punto, il punto più alto che è rappresentato da Dio. Dio come punto all'infinito, l'infinito che collassa in un Punto, centro e confine di tutto.

L'ipotesi è appunto che lo spazio nell'universo dantesco sia uno spazio curvo, non euclideo; e la Terra, da un certo punto di vista, è l'anti-centro di Dio, il polo opposto. È sempre un modello geocentrico, ma forse si può dire che è il meno geocentrico possibile, tant'è vero che nel centro della Terra c'è il demonio. Il vero centro da cui tutto proviene è la sede del Creatore. Quindi Dio è centro e al tempo stesso confine del cosmo. Questo dà una soluzione a dilemma che aveva alimentato il dibattito relativo al confine dell'universo e alle diverse rappresentazioni dello spazio. Nel Medio Evo c'era una visione dell'Universo che rispondeva a una concezione unitaria, che viveva nella tensione fra quello che era l'universo sperimentabile e la presenza del Creatore. Dante, se prediamo per vera questa ardita interpretazione, avrebbe dato una risposta al dilemma della sua epoca rendendo Dio contemporaneamente centro e confine dell'universo. Certo qui si suppone un Dante capace di un incredibile colpo di genio che anticipa di 600 anni lo sviluppo e la ricerca matematica sullo specifico argomento. Forse un colpo di genio eccessivo anche per un genio indiscusso come Dante.

Ci potrebbe aiutare un'osservazione: nel modello quadrimensionale, per risolvere l'antinomia di un universo finito ma senza un confine, la proiezione stereografica gioca un ruolo centrale. Ed è assolutamente probabile che Dante conoscesse la proiezione stereografica, studiata in Grecia da Ipparco di Nicea, utilizzata nella realizzazione di carte geografiche, conosciuta dagli arabi e probabilmente riscoperta all'epoca delle repubbliche marinare (cfr. Russo, 2013). In geometria e in cartografia per proiezione stereografica si intende la proiezione dei punti sulla superficie di una sfera da un punto N della sfera stessa (che spesso viene chiamato polo Nord della sfera) sopra un piano che è, solitamente, il piano tangente alla sfera nel suo punto (antipodale ad N) chiamato S, polo Sud. Questa proiezione determina una corrispondenza biunivoca tra i punti della sfera privata di N e i punti del piano. Questa può

estendersi ad una corrispondenza biunivoca tra punti della sfera e i punti del piano ampliato con un punto all'infinito: basta far corrispondere a questo il polo Nord. Usiamo un esempio per essere più chiari. Immaginiamo di avere una palla trasparente su cui disegniamo delle figure. Mettiamo una lampadina sul punto più alto della sfera. Le immagini proiettate sul pavimento non sono altro che l'immagine stereografica dei disegni fatti sulla sfera. Esattamente come funziona la lanterna magica che proietta sulla parete le immagini impresse sulla tela della lampada.



Quando Dante è nell'emi-sfera meridionale vede proiettata la sfera celeste su uno spazio tridimensionale, sul piano tangente alla sfera nel Polo Sud, dove è la Terra. Analogamente quando raggiunge l'empireo, che è l'equatore di questa sfera quadridimensionale, e raggiunge l'emi-sfera settentrionale, vede i cori degli angeli roteare intorno a Dio. I cori angelici celestiali sono la proiezione stereografica sul piano tangente alla sfera dell'Universo nel Polo Nord (ossia rispetto al piano tangente contenente Dio). La differenza fra queste due proiezioni risiede nella luce. La luce che produce la proiezione stereografica relativamente al piano tangente del Polo Sud e che illumina il creato è quella che proviene da Dio. Con questa luce Dio non solo muove i cieli ma anche, creando il tempo, regala la

vita, momento dopo momento, alla sua creazione. La luce che produce la proiezione stereografica relativamente al piano tangente del Polo Nord è che illumina i cori celesti degli angeli è quella della fede, che va dall'Uomo a Dio. Non a caso Dante prima è interrogato da San Pietro sulla fede nel XXIV e XXV canto del Paradiso e solo dopo la sua risposta corretta gli è concesso di avere la visione delle schiere angeliche. Immaginare quindi che Dante abbia usato la proiezione stereografica per rappresentare la sua visione dell'Universo ha di sicuro vari elementi positivi:

1. dà unitarietà alla visione Dantesca. Dio e il Creato non appartengono a due mondi separati ma ad uno stesso Universo;
2. si riesce a superare l'antinomia "universo finito ma assenza di confini";
3. in questa costruzione ci sono due elementi quali la luce e il cerchio. La luce per il suo valore simbolico e al tempo stesso per la varietà e la bellezza delle sue manifestazioni fisiche, è onnipresente nel Paradiso. Invece il cerchio è la figura geometrica allusiva alla perfezione, alla completezza.

Ma come fa Dante ad immaginare una geometria quadrimensionale anche se immersa, tramite proiezioni, in un mondo tridimensionale? Come fa ad usare le proiezioni stereografiche tridimensionali se non era in grado di immaginare lo spazio quadridimensionale da cui hanno origine. Dante non poteva aver intuito le geometrie non euclidee che nascono grazie ai contributi di Gauss (1828) e di Lobacevskij (1829). Questo ultimo motivò la sua opera scrivendo:

"I vani sforzi compiuti dai tempi di Euclide, per il corso di duemila anni, mi spinsero a sospettare che nei concetti stessi della geometria non si racchiuda ancora quella verità che si

voleva dimostrare, e che può essere controllata, in modo simile alle altre leggi della fisica, soltanto da esperienze, quali, ad esempio, le osservazioni astronomiche”.

L'ipotesi di geometrie non euclidee venne poi perfezionata da Bernhard Riemann (1854). Le geometrie non euclidee sono attualmente presenti nella cultura dell'uomo contemporaneo perché costituiscono la base della teoria della Relatività e della Cosmologia attuale ma non sono intuitive né semplici da comprendere. È una forzatura, quindi, pensare che Dante possa aver concepito un Universo quadridimensionale.

Inoltre la costruzione, che abbiamo sopra descritto, non spiega come il movimento degli angeli possa trasferirsi nei moti dei pianeti e non spiega perché il movimento degli angeli determini lo scorrere del tempo solo nei cieli e non anche nell'empireo.

Siamo convinti però che l'ardita costruzione intuita da Speiser presenti aspetti da tenere comunque in considerazione per formulare un modello di Universo compatibile con la visione cosmologica morale medievale, con i versi della Divina Commedia e con le conoscenze matematiche di Dante. Si dovrà tenere presente, a nostro parere, per avere una ipotesi coerente con le conoscenze dell'epoca e non in contrasto con i versi di Dante, della matematica effettivamente conosciuta da Dante (D'Amore, 2011), delle visioni mistiche del mondo ultraterreno contemporanee a Dante (cfr. Il libro della Scala di Maometto, 2013) e sicuramente della visione religiosa-filosofica della scolastica con particolare attenzione al ruolo degli angeli (cfr. Barsella, 2012).

Ringraziamenti:

Ringrazio il Professor Iannizzotto sia per utili suggerimenti che per avermi aiutato ad editare il testo.

BIBLIOGRAFÍA

- Agnelli, G. (1891). *Topo-cronografia del Viaggio dantesco*. Milano: Hoepli.
- Barsella, S. (2012). Angels and Creation in Paradiso 29. *MLN*, 127(1), 189-198.
- Bersanelli, M. (2010). Percorsi didattici alla luce de la coscienza religiosa nell'uomo moderno [en línea]. Recuperado de <http://www.diesse.org/cm-files/2010/03/30/terza-lezione-percorsi-didattici-alla-luce-de-la-coscienza.pdf>
- Blair, M. (2015). *Points and Spheres: Cosmological Innovation in Dante's Divine Comedy* [Tesis doctoral].
- Cacciafesta, F. (2003). Un' osservazione sulla Geometria delle Malebolge. *Letteratura Italiana Antica*, 4, pp. 349-400.
- D'Amore, B. (2011). *Dante e la Matematica*. Milano: Giunti.
- Egginton, W. (1999). On Dante, Hyperspheres, and the Curvature of the Medieval Cosmos. *Journal of the History of Ideas*, 60(2), 195-216.
- Galilei, G. (1966). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Le opere di Galileo Galilei* (A. Favaro, ed., vol. VIII). Barbera: Firenze.

- . (1968). *Due lezioni all'Accademia Fiorentina circa la figura, sito e grandezza dell'Inferno di Dante, Le opere di Galileo Galilei* (A. Favaro, ed., vol. IX). Barbera: Firenze.
- Gauss, C. F. (1828). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Gottinga: Dieterichianis.
- Le Goff, J. (1981). *La nascita del Purgatorio*. Torino: Einaudi.
- Lévy-Leblond, Jean-Marc (2008): *Galilée, Leçons sur l'Enfer de Dante*, Fayard, Paris, pp. 167-168. e<https://www.reset-doc.org/it/story/nellinferno-di-dante/>
- Libro della scala di Maometto* (2013). Milano, BUR.
- Orlando, S. (1993). Geografia dell'Oltretomba dantesco. *Guida alla Commedia*. Milano: Bompiani.
- Lobacevskij, N. I. (1963). *Nuovi principi della geometria*. Torino: Boringhieri.
- Peterson, M. A. (1979). Dante and the 3-Sphere. *American Journal of Physics*, 47, 12, 1031-1035.
- . (2002). Galileo's Discovery of Scaling Laws. *American Journal of Physics*, 70, 575-580.
- . (2008). The Geometry of Paradise. *The Mathematical Intelligencer*, 30, 4, 14-19.
- Riemann, B. (1854). Über die Hypothesen, welche der Geometrie Zugrunde liegen (Ausdem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen) [en línea]. Recuperado de <https://www.emis.de/classics/Riemann/Geom.pdf>

- Russo, L. (2013). *La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*. Milano: Feltrinelli.
- Sansovino, F. (1578). *Dante con l'espositioni di Chrisforo Landino et Alessandro Velutello. Sopra la sua Comedia dell'Inferno, del Purgatorio e del Paradiso*. Venezia: Sessa fratelli.
- Speiser, A. (1925). *Klassische Stücke der Mathematik*. Orell Füssli.
- Toussaint, S. (1997). *De l'Enfer à la Coupole. Dante, Brunelleschi et Ficini A propos des Codici Caetani di Dante*. Roma: L'Erma di Bretschneider.