DANTE E LA NASCITA DELLA PROBABILITÀ

Il VI canto del Purgatorio è noto per il grido di dolore (purtroppo quanto mai attuale) di Dante sulle condizioni miserevoli dell'Italia:

Ahi serva Italia, di dolore ostello,
nave sanza nocchiere in gran tempesta,/
non donna di province, ma bordello!/

(*Purgatorio* VI, 76-78)

Secondo me, per noi matematici, sono molto più significativi, direi perfino stupefacenti, i primi sei versi:

Quando si parte il gioco de la zara,/
colui che perde si riman dolente,
repetendo le volte, e tristo impara;/
con l'altro se ne va tutta la gente;
qual va dinanzi, e qual di dietro il prende,/
e qual dallato li si reca a mente;

(*Purgatorio* VI, 1-6)

La zara era un gioco d'azzardo in uso nel Medioevo. Si giocava con tre dadi: a turno ogni giocatore chiamava un numero da 3 a 18 e gettava i dadi. Vinceva chi per primo otteneva il punteggio pari al numero chiamato. Era chiaro che è un gioco che poteva essere fatto solo se non era stata ancora inventata la Probabilità. Ed è chiaro che Dante, utilizzando il termine "impara", intuisce che per saper giocare bene a zara, occorreva studiare, imparare qualcosa.

È incredibile pensare che la probabilità fosse una scienza assolutamente sconosciuta nel Medioevo. L'Umanità non aveva, fino a quel momento, pensato che fosse necessario sviluppare le conoscenze probabilistiche/statistiche che appaiono così basilari e naturali oggigiorno. Ma in effetti, a pensarci bene, la Probabilità è una Scienza che si basa su un concetto metafisico. La Probabilità non è un evento fisico, non è un ente geometrico, è un'idea veramente astratta. Non deve essere stato facile sviluppare questo concetto. Inoltre non è intuitiva come uno è portato a credere. Prendiamo, ad esempio, il paradosso di Monty Hall legato al gioco a premi statunitense *Let's Make a Deal* che ha preso il nome da quello del conduttore dello show. Il problema che andiamo a descrivere, era stato formulato originariamente da Steve Selvin, in una lettera all'*American Statistician* (febbraio 1975). Nel gioco descritto da Selvin venivano mostrate al concorrente tre porte chiuse; dietro ad una si trovava un'automobile, mentre ciascuna delle altre due nascondeva una capra. Il giocatore poteva scegliere una delle tre porte, vincendo il premio corrispondente. Dopo che il giocatore aveva selezionato una porta, ma non l'aveva ancora aperta, il conduttore dello show – che conosceva ciò che si trovava dietro ogni porta – apriva una delle altre due, rivelando una delle due capre, e offriva al giocatore la possibilità di cambiare la propria scelta iniziale, passando all'unica porta restante. Un po' contro intuitivamente cambiare la porta migliorava le chance del giocatore di vincere l'automobile, portandole da un terzo a due terzi. Questo problema è in realtà una variazione sul tema del gioco a premi originale; Monty Hall in effetti apriva una porta dietro cui si trovava una capra per aumentare la tensione, ma non consentiva ai giocatori di cambiare la propria scelta originale. Come scrisse lo stesso Monty Hall a Selvin:

E se mai dovesse partecipare al mio gioco, le regole sarebbero le stesse per lei - nessuno scambio dopo la scelta originale

(letsmakeadeal.com).

A dire il vero un problema essenzialmente identico era apparso nella rubrica *Mathematical Games* (sulla rivista Scientific American) di Martin Gardner già nel 1959, col nome di "Problema dei tre prigionieri". In questo problema si consideravano tre prigionieri, A, B e C, posti in celle separate e condannati a morte. Il governatore ne aveva scelto uno a caso per la grazia. Il direttore sapeva quale era stato graziato, ma non gli era permesso di dirlo. Il prigioniero A chiedeva al direttore di fargli conoscere l'identità di uno dei due che stavano per essere giustiziati: se B era stato graziato, gli doveva dare il nome di C. Se C era stato graziato, gli doveva dare il nome di B. E se invece era proprio A ad essere stato graziato, doveva lanciare segretamente una moneta per decidere se nominare B o C. Supponiamo che il direttore avesse detto ad A che era B a dover essere giustiziato. La domanda era di calcolare la probabilità di essere stato graziato per A e per C. La risposta corretta è che la probabilità di non essere giustiziato è rimasta invariata a un terzo per A, mentre è salita a due terzi per C.

Ma Gardner non fu il primo a proporre questo tipo di problematiche. Il primo che si conosca è il così detto *Paradosso delle tre scatole di Bertrand*, che era stato, per l'appunto, ideato dal matematico francese Joseph Louis François Bertrand che lo aveva proposto nel suo libro *Calcul des Probabilités* nel 1889.

Il problema di Monty Hall divenne famoso grazie a una lettera del 1990 di Craig F. Whitaker, indirizzata alla rubrica di Marilyn vos Savant nel settimanale *Parade*. Marilyn vos Savant risolse il problema correttamente ma la sua risposta fece scalpore. Circa 10.000 lettori, di cui quasi 1.000 con addirittura un dottorato di ricerca in tasca, scrissero alla rivista, molti dei quali sostennero che la vos Savant aveva sbagliato nella risoluzione del problema. La vos Savant, nel numero successivo, fornì spiegazioni e prove matematiche formali ma molte persone continuarono a non accettare l'idea che cambiare porta fosse la strategia migliore. Perfino Paul Erdős, un matematico molto famoso all'epoca, non rimase convinto fino a quando non gli fu mostrata una simulazione al computer che dimostrava che il risultato previsto da vos Savant era quello corretto. Da notare che la teoria matematica alla base dei ragionamenti della vos Savant è detta probabilità condizionata. Si insegna al Liceo e al Primo anno di Università, risulta spesso ostica agli studenti, e, dal caso di Monty Hall, non solo a loro ma anche a matematici famosi come Erdos.

Dopo la terzina di Dante, i primi veri contributi alla formalizzazione della Probabilità furono dati da Gerolamo Cardano e Galileo Galilei. Cardano scrisse "*Liber de ludo aleae*" nel 1526 che fu pubblicato solo un secolo e mezzo dopo, nel 1663. Non bisogna meravigliarsi di questo ritardo: sapere a priori la probabilità significava guadagnare soldi sui sempliciotti che non avevano ancora "imparato" (per usare l'espressione dantesca) e quindi era una informazione da tenere nascosta. Il saggio di Cardano aveva un'impostazione sostanzialmente corretta ma in qualche punto conteneva degli errori che furono corretti da Galileo Galilei in "*Sopra la scoperta dei dadi*" scritto nel 1612 ma pubblicato solo nel 1656. In questo breve scritto di Galilei è determinata la probabilità delle possibili somme con tre dadi, numerati ciascuno da 1 a 6. Galileo, a differenza di Cardano, risponde correttamente alla seguente domanda: lanciando 3 dadi, le somme 9 e 10 si ottengono con lo stesso numero di triplicità. Ma allora perché, in pratica, si osserva che è più frequente ottenere 10 piuttosto che 9? Infatti la somma 9 si compone con: 1.2.6; 1.3.5; 1.4.4; 2.2.5; 2.3.4, 3.3.3; cioè con 6 triplicità. La somma 10 si compone con: 1.3.6; 1.4.5; 2.2.6; 2.3.5; 2.4.4, 3.3.4; sempre con 6 triplicità. Galileo, facendo espliciti conti dimostrò che gli eventi possibili sono 216 e che gli eventi favorevoli non sono equiprobabili. Ad esempio la combinazione (3,3,3) ha solo un evento favorevole e quindi la "probabilità" è solo di $\frac{1}{216}$. La combinazione (1,4,4) ha 3 eventi favorevoli (anche (4,1,4) e (4,4,1) vanno bene) e quindi la probabilità è $\frac{3}{216}$, Analogamente (1,2,6) ha probabilità $\frac{6}{216}$. Quindi il numero di triplicità non rappresenta la vera probabilità dell'evento. La soluzione fu espressa da Galilei con grande chiarezza, senza errori e con una visione, certamente ancora intuitiva, ma notevolmente unitaria dei vari aspetti coinvolti. Così, nello spazio di soltanto quattro pagine si trova in nuce la definizione classica della probabilità, come rapporto fra casi favorevoli e casi possibili, purché questi siano equiprobabili, e l'utilizzazione delle proprietà di indipendenza logica e di indipendenza stocastica. C'è, sorprendentemente, il collegamento fra teoria ed esperienza, con l'intuizione della Legge dei Grandi Numeri e della Legge Empirica del Caso.

Ma la Probabilità nacque ufficialmente solo nel 1654 con Pascal e Fermat. Il Cavalier de Méré (un accanito giocatore di zara) aveva calcolato (sbagliando) che ottenere almeno un 6 in 4 lanci di un dado non truccato (la probabilità è pari a 1 – $(\frac{1}{6})^4$ ossia circa 0,517746914) era equivalente ad ottenere almeno un doppio 6 in 24 lanci di due dadi sempre non truccati (qui la probabilità è invece 1- $(\frac{35}{36})^{24}$ pari a circa 0,491403). Tuttavia, giocando secondo tale convinzione, invece di vincere, perdeva e scrisse a Pascal lamentandosi che la matematica falliva di fronte all'evidenza empirica. Da ciò scaturì una fitta corrispondenza tra Pascal e Fermat in cui si delineò il concetto di probabilità moderna. Certo che è strano che la spinta per questa importante conquista del sapere umano sia nata dal vizio del gioco. Dante, Cardano, Galileo, Pascal e Fermat per delineare le leggi della Probabilità furono ispirati dai dadi, ma, pensandoci bene, quasi tutte le scoperte dell'umanità nascono o dalla passione per il gioco o dalla guerra… e dovendo scegliere, molto ma meglio il vizio del gioco.

VINCENZO VESPRI
Università di Firenze