



*Università degli Studi di Firenze*

**DOTTORATO DI RICERCA IN  
Metodologia delle scienze sociali**

**CICLO XXV**

**La teoria del caos nelle scienze sociali**

Settore Scientifico Disciplinare SPS/07

**Dottorando**

Dott.ssa Catone Maria Carmela

**Tutor**

Prof. Gentili Graziano

**Coordinatore**

Prof.ssa Magnier Annick

Anni 2010/2012

*Alla mia famiglia*

# Indice

|                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduzione</b> .....                                                            | 5         |
| <b>1 Tra determinismo e incertezza</b> .....                                         | 7         |
| 1. La teoria del caos: le origini .....                                              | 7         |
| 2. La fallibilità del sapere scientifico .....                                       | 10        |
| 3. Caos e complessità .....                                                          | 12        |
| 4. Il caos e le scienze sociali: le strade percorse.....                             | 15        |
| <b>2 Caos e non linearità: aspetti teorici</b> .....                                 | 18        |
| 1. Introduzione.....                                                                 | 18        |
| 2. I sistemi dinamici .....                                                          | 18        |
| 3. Gli equilibri stabili e instabili .....                                           | 20        |
| 4. Verso il caos: le biforcazioni .....                                              | 26        |
| 5. Gli esponenti di Lyapunov .....                                                   | 30        |
| 6. Gli attrattori .....                                                              | 33        |
| 7. Cos'è il caos deterministico?.....                                                | 36        |
| 8. La teoria del caos nelle serie storiche: concetti preliminari .....               | 40        |
| 8.1 Stazionarietà di una serie storica e analisi di Fourier .....                    | 41        |
| 8.2 La formazione dei vettori nell'analisi delle serie storiche .....                | 45        |
| 8.2.1 Spazio delle fasi e dimensione di embedding .....                              | 45        |
| 8.2.2 La funzione di autocorrelazione e la mutua informazione.....                   | 49        |
| 8.3 Il massimo esponente di Lyapunov per le serie storiche.....                      | 50        |
| 8.4 La dimensione dell'attrattore.....                                               | 51        |
| 8.5 La previsione a breve termine .....                                              | 55        |
| 9. La non linearità nell'elaborazione di modelli matematici.....                     | 56        |
| 9.1 Dai sistemi dinamici continui lineari a quelli non lineari.....                  | 56        |
| <b>3 Analisi delle serie storiche del sito web de “Il Corriere della Sera” .....</b> | <b>70</b> |
| 1. Introduzione.....                                                                 | 70        |
| 2. Numero di visite giornaliere: diagramma temporale e spazio delle fasi .....       | 70        |

|          |                                                                                           |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.1      | Ipotesi di modelli .....                                                                  | 73         |
| 2.2      | Il diagramma di ricorrenza .....                                                          | 75         |
| 2.3      | I quantificatori .....                                                                    | 77         |
| 2.4      | Serie delle visite senza trend lineare .....                                              | 79         |
| 2.5      | Lo spettro di potenza .....                                                               | 84         |
| 2.6      | Analisi non lineare e previsione a breve termine .....                                    | 85         |
| 3.       | Serie delle visite detrend dal lunedì al venerdì.....                                     | 89         |
| 4.       | Esempio di una serie in media periodica con componente caotica .                          | 92         |
| 5.       | Il tempo medio per pagina .....                                                           | 95         |
| 6.       | Il tempo medio per visita.....                                                            | 98         |
| 7.       | Il numero di pagine viste .....                                                           | 100        |
| 8.       | Considerazioni sulla caoticità delle serie .....                                          | 103        |
| <b>4</b> | <b>Alcune applicazioni nelle scienze sociali .....</b>                                    | <b>104</b> |
| 1.       | Introduzione.....                                                                         | 104        |
| 2.       | Guerra e caos .....                                                                       | 105        |
| 3.       | Il modello preda-predatore .....                                                          | 110        |
| 3.1      | Il modello popolazione-reddito .....                                                      | 116        |
| 3.1.1    | Applicazione alle città di Los Angeles e New York .....                                   | 118        |
| 4.       | Limiti dei modelli .....                                                                  | 121        |
| 5.       | Il caos nel sondaggio elettorale per la nomination democratica<br>americana del 1984..... | 123        |
|          | <b>Conclusioni .....</b>                                                                  | <b>127</b> |
|          | <b>Ringraziamenti .....</b>                                                               | <b>129</b> |
|          | <b>Bibliografia .....</b>                                                                 | <b>130</b> |

## INTRODUZIONE

Le prime intuizioni che gettarono le basi della teoria del caos affiorano dalle ricerche che Poincaré condusse alla fine dell'800 sul cosiddetto problema dei tre corpi. Lo studioso francese, infatti, si accorse che un sistema costituito da tre soli corpi nello spazio, benché soggetto alle leggi della meccanica newtoniana-laplaciana, poteva esibire comportamenti difficilmente prevedibili. Tuttavia, la nascita della teoria del caos si fa tradizionalmente risalire agli anni '60, quando il meteorologo Edward Lorenz, dall'elaborazione di un modello matematico che potesse prevedere l'evoluzione delle condizioni atmosferiche, si rese conto che piccole variazioni nelle condizioni iniziali erano in grado di produrre grandi variazioni nel comportamento a lungo termine di un sistema.

La teoria del caos si inserisce in un ripensamento del fare scienza, segnando il declino della concezione classica newtoniana-laplaciana che concepiva il mondo come un meccanismo preciso e perfetto, caratterizzato da una relazione tra fenomeni di tipo deterministico-lineare e si enuclea attorno al riconoscimento della non linearità, dell'incertezza, della discontinuità e dell'irregolarità dei fenomeni.

La definizione prevalentemente accettata di caos che lo descrive come un comportamento aperiodico a lungo termine in un sistema deterministico limitato, avente una sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali (Sprott, 2003), solleva dunque alcune questioni importanti: se l'esistenza di andamenti caotici da una parte impone fondamentali limiti di prevedibilità, dall'altra suggerisce che certi fenomeni che evolvono nel tempo, mostrando comportamenti apparentemente casuali, potrebbero essere più prevedibili di quanto si creda perché governati da leggi deterministiche. In sostanza, riconoscendo la natura dinamica di un sistema e studiandone le eventuali instabilità, la teoria del caos permette di far emergere delle regolarità nascoste attraverso l'identificazione di "tracce" di determinismo; la presenza di tali elementi consente di descrivere il sistema e di fornire una previsione a breve termine. Alla luce di quanto descritto, si può quindi intendere il caos come una classe di segnali che hanno un comportamento intermedio tra un andamento regolare e prevedibile e uno accidentale ed imprevedibile.

Lo studio del caos è stato esteso in molti ambiti, talvolta lontani da quelli originari, apportando dei risultati diversi rispetto a quelli ottenuti nelle scienze fisico-naturali;

pertanto, si è cercato di capire come il caos deterministico e i concetti principali di questa teoria sono stati usati anche nelle scienze sociali.

Essendo lo studio del caos una teoria matematica, il taglio di questo lavoro è prevalentemente tecnico. La tesi si compone di una parte teorica (primo e secondo capitolo) e di una applicativa (terzo e quarto capitolo).

In particolare, nel primo capitolo a partire dalle origini della teoria del caos, si considerano alcuni aspetti del rapporto tra scienze naturali e scienze sociali in virtù del ripensamento epistemologico che si ha con la crisi del determinismo; poi si cerca di capire, su un piano generale, come si contestualizza il caos nell'ambito degli studi della complessità e si introduce l'uso della teoria del caos nelle scienze sociali.

Nel secondo capitolo si delineano i principali aspetti della teoria matematica del caos. Pertanto, si affrontano analiticamente i vari *steps* che portano al caos, cioè gli equilibri stabili e instabili, le biforcazioni, gli attrattori, gli esponenti di Lyapunov fino ad arrivare al caos vero e proprio. Poi, si circoscrive l'attenzione verso uno dei maggiori usi della teoria del caos in molti ambiti, comprese le scienze sociali, cioè l'analisi di serie storiche. In sostanza, si illustrano le condizioni che permettono di individuare elementi di caoticità nelle serie temporali, introducendo alcuni strumenti che risultano utili per descrivere le caratteristiche delle serie. Nella parte conclusiva del capitolo si considera un ulteriore utilizzo della teoria del caos e della non linearità che consiste nell'elaborazione dei modelli matematici, di cui si presentano alcuni concetti basilari.

Nel terzo capitolo si propone l'analisi delle serie storiche su alcuni dati *online* (Catone, in stampa). Si analizzano varie serie storiche relative al comportamento di visita giornaliero del sito web del quotidiano de "Il Corriere della Sera" per il periodo che va dal 12 aprile 2008 all'11 settembre 2011, utilizzando le tecniche illustrate nella parte teorica. In particolare, si studiano il numero di visite, il tempo medio per pagina, il tempo medio per visita e il numero di pagine viste, usando due *software*: il *Visual Recurrence Analysis* (VRA) e il *Chaos Data Analyzer* (CDA).

Infine, nel quarto capitolo si affrontano altre applicazioni della teoria del caos e dell'analisi non lineare nelle scienze sociali. Si tratta di due modelli matematici, uno di tipo discreto applicato a situazioni di guerra (Saperstein 1984) e l'altro di tipo continuo, avanzato di Lotka (1925) e Volterra (1926), di cui si sviluppano alcune varianti relative alle dinamiche di crescita delle popolazioni (Dendrinis 1992b; Dendrinis e Mullally 1981, 1985); infine, si propone una ricerca di tecniche di analisi non lineare sui dati longitudinali raccolti durante un sondaggio elettorale (McBurnett 1996a, 1996b).

# PRIMO CAPITOLO

## Tra determinismo e incertezza

### 1. La teoria del caos: le origini

A partire dalla fine del XIX secolo, il pensiero scientifico e filosofico ha vissuto dei profondi momenti di trasformazione e di messa in discussione dei principali fondamenti teorici e pratici del sapere come il tempo, lo spazio, il determinismo perfetto, il rapporto tra cause ed effetti.

Le scoperte della meccanica quantistica con i principi di complementarità di Bohr, di indeterminazione di Heisenberg e della relatività di Einstein rivisitarono quell'idea di scienza basata sulla corretta predizione e replicabilità del risultato di un esperimento, vincolato da certe condizioni di osservazione e di controllo e fautrice di una natura ritenuta fondamentalmente semplice e ordinata. La successiva comparsa della teoria del caos ha ulteriormente contribuito a ridisegnare i termini della questione, proclamando la “fine delle certezze” (Prigogine, 1996; tr. it. 1997). Questi studi segnarono innanzitutto un evidente distacco dal rigido determinismo, definito come “una particolare tesi sulla struttura causale del mondo ... così forte che, data una descrizione completa dell'intero stato del mondo in un dato istante di tempo, allora, con l'aiuto delle leggi, può essere calcolato ogni evento passato o futuro” (Hempel, 1952; trad. it. 1976, p. 271). Tale visione fu avanzata principalmente da Laplace secondo cui “noi dobbiamo considerare lo stato presente dell'universo come l'effetto di un dato stato anteriore e come la causa di ciò che sarà in avvenire. Una intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze di cui è animata la natura e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se per di più fosse abbastanza profonda per sottomettere questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato sarebbe presente ai suoi occhi” (Laplace, 1814; tr. it. 1967, pp. 243-4). Dunque, per Laplace le leggi della natura sono deterministiche e il fine fondamentale della scienza è la ricerca della successione necessaria degli avvenimenti prevista dalla natura. Tuttavia, come afferma Hempel “non si dispone mai di sufficiente informazione che ci renda capaci di prevedere con certezza. L'uomo immaginario della formulazione di Laplace fa previsioni perfette, ma un uomo tale non esiste” (Hempel, trad. it. 1976, p. 275). In particolare, oltre al principio di indeterminazione scoperto in seguito

nell'ambito della meccanica quantistica, Laplace non teneva conto che i sistemi, soprattutto quelli reali, potevano seguire anche dinamiche non lineari. Questi ultimi, a partire da piccole variazioni negli stati iniziali, creano una sorta di area di incertezza nella determinazione dei valori delle variabili di stato che si amplifica nel tempo. In tal modo, al trascorrere del tempo, la previsione del sistema diventerà meno accurata. Inoltre, come ricordano Bertuglia e Vaio (2007), la scienza, a partire dal periodo illuministico fino all'inizio del Novecento, ha confuso il concetto di determinismo, cioè la possibilità di identificare dei legami diretti fra cause ed effetti esprimibili per mezzo di leggi, con la linearità delle leggi stesse, cioè l'assunzione che il legame tra le cause e gli effetti sia di tipo proporzionale. "Attribuire al determinismo le proprietà della linearità comporta l'assunzione che un modello deterministico, essendo perciò lineare, debba necessariamente contenere in sé tutte le informazioni che servono per la previsione esatta e completa del futuro, come avviene, per l'appunto per i modelli lineari" (*ivi*, p.279). Con la teoria del caos invece l'idea di determinismo, lungi dall'essere una caratteristica esclusiva dei sistemi lineari, viene estesa, seppur in termini più deboli ma sicuramente più realistici, anche a quelli non lineari.

Queste idee affiorarono già nei lavori del matematico, fisico e filosofo Poincaré, considerato il fondatore della teoria qualitativa dei sistemi. Partendo da un problema apparentemente semplice, il moto di tre corpi che interagiscono tra loro attraverso la forza di gravità, Poincaré nel 1908 descrisse in modo chiaro il fenomeno del caos, come segue: "una causa piccolissima che sfugge alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto. Ma non è sempre così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diviene impossibile" (Poincaré, 1908; tr. it. 1997, p. 121). Le ricerche di Poincaré diedero un primo impulso a quella che sarà la teoria del caos, ma verranno effettivamente riconosciute solo vari decenni dopo, quando ulteriori studi, come i



fondamentali lavori di Birkhoff negli Stati Uniti e di Lyapunov, Kolmogorov, Andronov e Pontrjaguine, appartenenti alla scuola russa degli anni '30, favoriranno lo sviluppo di un clima scientifico pronto ad accettare delle posizioni diverse rispetto al passato.

La scoperta della teoria del caos si fa tradizionalmente risalire alla pubblicazione nel 1963 dell'articolo *Deterministic Nonperiodic Flow* di Edward Lorenz, in cui il matematico statunitense ideò un modello dinamico non lineare per la descrizione e previsione dei moti convettivi nell'atmosfera e riscontrò che piccole variazioni nelle condizioni iniziali producevano grandi variazioni nel comportamento a lungo termine del sistema; oltre a tale fenomeno, noto come sensibilità di un sistema dalle condizioni iniziali e divenuto celebre con la nota metafora del "*butterfly effect*" secondo cui un battito di ali di una farfalla in Brasile potrebbe provocare una tromba d'aria in Texas, emergeva un'altra caratteristica rilevante: le traiettorie delle variabili del sistema si accumulavano in una particolare area circoscritta, chiamata attrattore, indicante la presenza di determinismo. Lo studio di Lorenz e i lavori successivi di Mandelbrot, Ruelle, Feigenbaum, Yorke ed altri segnarono la nascita del cosiddetto caos deterministico, un'apparente contraddizione in termini, dato che il caos è comunemente associato a un'idea di disordine e di mancanza di regole, mentre il concetto di determinismo si attribuisce a fenomeni prevedibili e regolari (Bischi *et al.*, 2004). La compresenza di tali caratteristiche a prima vista opposte risiede nella scoperta di fenomeni sì deterministici, ma prevedibili solo a breve termine a causa della sensibilità alle condizioni iniziali. La profonda convinzione in un determinismo perfetto, capace di cogliere il funzionamento del mondo, lascia posto quindi a un determinismo fallibile, di cui si riconosce e si accetta un raggio d'azione limitato. Se da un lato dunque la scoperta del caos deterministico impone delle restrizioni al potere predittivo della scienza, dall'altro permette di rilevare strutture nascoste e regolari in fenomeni apparentemente casuali. La teoria del caos deterministico è considerata infatti come una teoria dell'ordine (Capra, 1996), un ordine nascosto che sottende fenomeni dalle sembianze irregolari (Gleick, 1987; tr. it. 1989).

In sintesi, gli aspetti più importanti di questo nuovo filone di studio sono essenzialmente tre (Condorelli, 2007):

- l'esistenza di una classe di fenomeni non lineare, la cui relazione non è quindi dettata da rapporti proporzionali di causa ed effetto;
- l'importante scoperta della sensibilità alle condizioni iniziali che segna la linea di demarcazione tra sistemi lineari e non lineari. Mentre i primi

sono strutturalmente stabili e rispondono alle variazioni esterne in modo proporzionale, i secondi si caratterizzano per la loro instabilità e discontinuità perché dei piccoli cambiamenti possono generare enormi e inaspettati mutamenti, dando luogo a nuove configurazioni. Chiaramente, mentre per i sistemi lineari la proporzionalità tra cause ed effetti è garanzia della prevedibilità del sistema, in quelli non lineari tale prevedibilità è comunque possibile, ma limitata;

- la rivisitazione del rapporto tra determinismo e prevedibilità che si allontana dalla visione newtoniana-laplaciana e sfocia in un'accezione meno rigida di prevedibilità, che riconosce la presenza di leggi deterministiche in comportamenti dall'andamento bizzarro e inatteso.

Lo sviluppo della teoria del caos deterministico ha rappresentato dunque un'area di frontiera verso nuove possibilità di conoscenza, intesa come continuo e diretto confronto con la realtà che ci circonda. Nata quando la scienza classica non era più in grado di spiegare le irregolarità presenti in natura, la teoria del caos suggerisce un diverso modo di osservare il mondo reale, ed è proprio in virtù di questo cambio di prospettiva che ha avuto una notevole influenza su diversi ambiti scientifici (Brown, 1995b; Grebogi e Korke, 1997).

## **2. La fallibilità del sapere scientifico**

I rilevanti cambiamenti prodotti dalle scoperte del XX secolo inaugurarono una nuova visione di fare scienza negli studi fisico-naturali che ha influenzato anche le scienze sociali. Tra questi ambiti del sapere si è spesso instaurato un rapporto di potere, sulla base di un presunto criterio di esattezza, per cui in alcune tradizioni di pensiero le scienze fisiche, considerate come certe e perfette, hanno rappresentato per quelle sociali un modello di riferimento a cui tendere. Tale influenza ha visto nel corso della storia diversi momenti di espansione; si ricorda soprattutto il periodo positivista che nel corso dell'800 ha profetizzato una fede assoluta nei confronti dei metodi delle scienze naturali, ritenuti essenziali per lo studio della realtà sociale, in base all'idea che la vita dell'uomo appariva regolata da leggi che hanno la stessa necessità e immutabilità di quelle della fisica.

La forte convinzione secondo cui l'unico metodo valido fosse dunque quello delle scienze naturali era tale che Comte considerava la sociologia, intesa come un possibile

terreno di produzione di conoscenza basata su prove scientifiche, in termini di fisica sociale e in sintesi sosteneva che:

- la realtà sociale in quanto “reale” può essere conosciuta in modo completo e perfetto;
- nei fenomeni sociali vige una relazione di causa-effetto;
- l’unico metodo valido è quello sperimentale;
- solo grazie alla scienza si sarebbe pervenuti a una conoscenza oggettiva, in grado di scorgere le certezze autentiche, indiscutibili sulle quali si sarebbe eretto il nuovo ordine sociale. In tal senso, l’indagine conoscitiva ”è percepita, letteralmente, come un’operazione progressiva di disvelamento: un velo si frappone tra la realtà e la conoscenza che di essa ha l’uomo, e conoscere oggettivamente significa per l’appunto strappare quel velo, restituendo alla natura la sua limpidezza e trasparenza” (Campelli, 1999, p. 53).

Il difficile rapporto tra scienze sociali e scienze naturali da un lato e l’ideale classico della scienza come sistema compiuto di verità necessarie dall’altro hanno vissuto poi, nel corso del neopositivismo e postpositivismo, altri momenti di discussione che ancora oggi continuano ad essere affrontati. In accordo con Bruschi, “il nocciolo della lunga polemica che, ora con toni accesi, ora in modo latente e sotterraneo, ha accompagnato (e accompagna) il cammino delle scienze sociali, sta da una parte nel non avere saputo interpretare metodologicamente il mondo dell’uomo, dall’altra nel non aver compreso cosa è il sapere scientifico” (Bruschi, 1971, p. 12). Su quest’ultimo punto, in seguito ai progressi delle scienze naturali all’inizio del ‘900, si iniziò a respirare una nuova atmosfera filosofico-scientifica, in cui si abbracciava l’idea di una scienza che, lungi dall’essere certa, onnisciente e sicura, è invece ipotetica e fallibile. A riconoscere tale fallibilità furono gli stessi scienziati naturali. Come ricorda Nagel (1961), le scoperte scientifiche del secolo scorso hanno messo in evidenza i limiti delle teorie della fisica come sistemi di spiegazione universalmente adeguati, scuotendo così le fondamenta della visione tradizionale della scienza, le convinzioni del positivismo e frantumando così anche il progetto di Comte di usare il metodo delle scienze naturali in qualsiasi ambito conoscitivo.

Si infrange così l’idea che “l’universo categoriale della scienza sia unitario, omogeneo al suo interno, fissato una volta per tutte ... provocando un’immagine dello sviluppo e della struttura della conoscenza in cui i possibili universi del discorso non sono mai definiti esaustivamente” (Ceruti, 2007, p. 3). Oggi, in tutti gli ambiti scientifici, non

solo in quelli meno formalizzati a lungo afflitti da un senso di inferiorità rispetto alle scienze ritenute “esatte”, c’è la consapevolezza di non poter fornire delle soluzioni certe, né di potersi adagiare su dei risultati definitivi. Ecco che i criteri di esattezza e perfezione su cui per lungo tempo si è edificato il rapporto gerarchico tra scienze naturali e sociali vengono meno, mettendo in luce che tra le scienze non vige una relazione di potere. Come sostiene Bruschi “l’oggettività della scienza non è ontologica, è solo metodologica. Il sapere scientifico è dunque contingente, rivedibile. Benchè il ragionamento scientifico sia costituzionalmente fallibile, la storia della scienza mostra che è perfettibile ed è compito della metodologia cooperare a questo perfezionamento. Lo sviluppo della metodologia non assicurerà mai la “verità” – espressione di uso facile e di difficile definizione- ma permette al ricercatore di non commettere molti errori” (Bruschi, 1999, pp. 19-20). La pretesa di conoscere il mondo senza errori assume quindi un carattere utopico che solleva invece l’esigenza, come ricordano Bocchi e Ceruti, “di un nuovo modo di pensare il futuro che riconosca il reale e il possibile non come dati immutabili, ma come costruzioni mai definitive e dipendenti dalle nostre scelte, che tratti l’incertezza non come il peggiore nemico ma come il migliore alleato, che consideri la proliferazione di idee, di approcci e di azioni non come un’inutile dispersione di energie ma come l’unica strada percorribile per costruire nuove possibilità” (Bocchi e Ceruti, 2007, p. XXXVI).

### **3. Caos e complessità**

La scoperta e lo studio dei concetti della teoria del caos come la non linearità, gli equilibri instabili, gli insiemi frattali, le biforcazioni e gli attrattori si contestualizzano in un periodo importante sul piano della ricerca scientifica in cui si pone in primo piano il carattere radicalmente costruttivo delle limitazioni della scienza e si favorisce l’inizio delle interrelazioni tra discipline tradizionalmente distanti, permettendo così ai ricercatori di inquadrare fenomeni differenti come i mercati azionari, i modelli meteorologici, i terremoti, i comportamenti collettivi, attraverso un’unica matrice concettuale (Bak, 1999), risiedente nell’idea di complessità.

Tale concetto deriva principalmente dalla matematica e dalla fisica e, attraverso gli sviluppi delle teorie dei sistemi, dell’informazione, della cibernetica, dell’evoluzione, della termodinamica dei sistemi lontani dall’equilibrio e del caos, con il passare del tempo è stato oggetto di studio di altre discipline, come quelle sociali, fino a instaurare

un'alleanza tra scienze umane e scienze naturali (Prigogine e Stengers, 1979; tr. it. 1999) e a creare una "terza cultura" (Tinti, 1998).

Con la complessità si supera la visione riduzionista della scienza classica e si accoglie una prospettiva olistica nello studio dei sistemi, caratterizzati da dinamiche non lineari, che permette di scorgere fenomeni emergenti, ovvero fenomeni che si individuano non dalle singole componenti del sistema bensì dall'interazione globale tra esse. Tali proprietà emergenti danno luogo a nuove forme di autoorganizzazione. Tecnicamente "si parla di autoorganizzazione quando la dinamica del sistema presenta degli attrattori verso i quali il sistema tende a portarsi, se si trova nel bacino di attrazione di uno di questi." (Bertuglia e Vaio, 2009, p. 321). Secondo Byrne (1998), l'adozione di nuovi modi di concepire la scienza che vede nella complessità il suo futuro è stata necessaria per cogliere le sfide dei cambiamenti degli ultimi decenni come la post-industrializzazione, l'economia globale, il collasso ambientale, i conflitti politico-culturali e di tutti quegli eventi, il cui studio si rivelava inadeguato con i tradizionali strumenti della scienza. Secondo Morin (2007), se da un lato la complessità si fa portatrice di quel senso di incertezza per lungo tempo rifiutata, dall'altro propone lo sviluppo di un pensiero multidimensionale che mostra come le varie categorie disciplinari specializzate contemplano aspetti comuni che nello stesso tempo bisogna distinguere e rendere comunicanti.

La natura interdisciplinare della complessità, che rende ardua una sua precisa definizione comunemente accettata, ha generato tuttavia numerosi fraintendimenti che, come ricordano Castellani e Hafferty (2008), è necessario sfatare. Se da una parte nel corso degli ultimi cinquant'anni, l'approccio complesso è stato usato in moltissimi settori di indagine, dall'altra è bene tener presente che la complessità è settore di ricerca empirica con caratteristiche molto specifiche che:

- è svincolato da una particolare agenda politica o morale;
- lungi dall'essere considerato come una sorta di tuttologia, esula da una visione metaforica o da un atteggiamento quasi spirituale secondo cui ogni aspetto della realtà è necessariamente interrelato a un altro.

Un altro equivoco da superare è la frequente identificazione del caos con la complessità. Sicuramente gli studi della teoria del caos riguardanti le irregolarità, le biforcazioni, gli attrattori, la sensibilità dalle condizioni iniziali e gli insiemi frattali hanno dato un forte contributo allo studio dei sistemi complessi comprovando che essi sono instabili, più difficilmente controllabili e conoscibili, operano in una posizione lontana dall'equilibrio

(Kauffman, 1995; tr. it. 2001) e possono dar luogo a processi spontanei di autoorganizzazione. Tuttavia, come ricorda Bak (1999), *chaos is not complexity*. In effetti:

- non tutti i sistemi caotici sono complessi. Anzi, sono caotici anche sistemi molto semplici. Piuttosto succede che, a partire da un insieme ristretto e “semplice” di possibilità iniziali, man mano che ci si spinge in là con il tempo, l’universo delle possibili evoluzioni di un sistema caotico può diventare sempre più complesso;
- viceversa, non è detto che un sistema complesso mostri necessariamente un comportamento caotico. La complessità infatti “si configura come una particolare situazione intermedia tra equilibrio stabile e caos, situazione nella quale il sistema manifesta un comportamento diverso sia dalla tendenza all’equilibrio stabile, sia dalla tendenza al caos” (Bertuglia e Vaio, 2007 p. 304). In effetti, a volte si parla di sistemi ai margini del caos (Waldrop, 1992; Kauffman, 1995; tr. it. 2001).

Inoltre, molti studi sulla complessità tendono a svincolarsi da quei sistemi di equazioni su cui, per molti versi, si fonda la teoria del caos, per avvalersi di un quadro interpretativo e di strumenti computazionali che si rivelano più flessibili soprattutto per le discipline meno formalizzate dal punto di vista matematico. Non a caso, le scienze sociali trovano un campo di applicazione più ampio nelle più recenti tecniche che si avvalgono della simulazione e della modellazione computazionale rispetto a quelle della teoria del caos. Comunque, gli studi del caos nelle scienze sociali sono stati limitati anche per altri motivi che verranno approfonditi in seguito.

Secondo molti studiosi (Capra, 1996; Bar-Yam, 1997; Castellani e Hafferty, 2008) la complessità può essere considerata come un settore di studi generale che si articola in diversi filoni di ricerca tra cui anche la teoria del caos. Gli altri ambiti di studio che negli ultimi anni stanno riscuotendo molto interesse sono rappresentati principalmente dallo sviluppo di automi cellulari, degli algoritmi genetici, della modellizzazione computazionale, della teoria degli insiemi fuzzy, dell’intelligenza artificiale, delle tecniche avanzate di *data mining*, della simulazione multiagente e dell’analisi delle reti. Le scienze sociali e la sociologia in particolare, secondo Castellani e Hafferty, possono riconoscersi come discipline della complessità, ma affinché tale riconoscimento raggiunga uno status di maturità, è necessario che gli studiosi di questi ambiti acquisiscano una maggiore consapevolezza e destrezza delle tecniche di funzionamento

soprattutto della modellazione ad agenti, della matematica computazionale e della teoria dei sistemi dinamici.

#### **4. Il caos e le scienze sociali: le strade percorse**

La teoria del caos è una branca della matematica che, mediante l'analisi della dinamica di un sistema con le sue eventuali instabilità, permette di far emergere delle regolarità nascoste, identificando "tracce" di determinismo. Si tratta chiaramente di un determinismo diverso da quello imposto dalla visione classica della scienza perché si insinua in sistemi non lineari estremamente sensibili alle condizioni iniziali. Secondo Brown (1995), i sistemi sociali presentano tutte e tre le caratteristiche fondamentali del caos: l'aperiodicità, la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali e la previsione solo di breve termine. Essi, infatti, risultano aperiodici in quanto sono spesso il risultato di comportamenti che si ripetono nel tempo, ma in modo mai identico, perché frutto di un percorso unico e irripetibile; presentano poi una sensibilità dalle condizioni iniziali, dato che piccole perturbazioni cambiano e a volte stravolgono la storia di un fenomeno; per questi motivi è possibile contemplare una previsione solo nel breve periodo. Inoltre, i sistemi sociali si caratterizzano per la quasi totale mancanza di linearità (McBurnett, 1996b). Malgrado queste caratteristiche, lo studio del caos nelle scienze sociali ha incontrato molte resistenze a causa di una serie di motivi di carattere generale. Innanzitutto, la teoria del caos necessita di un uso massiccio di analisi matematica che in genere non è oggetto di studio da parte dei ricercatori sociali (Harvey e Reed, 1996). Inoltre, come ricorda Trobia (2001), a differenza degli studi di dinamiche caotiche, gran parte dei metodi e delle tecniche di ricerca sociale considera i fenomeni sociali come se fossero statici, limitandosi a fotografare una certa situazione in un dato tempo.

Esistono poi altre ragioni di natura più tecnica che contribuiscono ad alimentare un certo pregiudizio verso l'uso della teoria del caos nelle scienze sociali.

Nello studio del caos si configurano due ambiti di ricerca: si possono esaminare i dati di serie temporali ed estrarre direttamente informazioni attraverso l'applicazione di opportuni coefficienti deputati ad accertare l'eventuale andamento caotico oppure si studiano i comportamenti di sistemi di equazioni completamente specificati. Nel primo caso, si ritiene che sia importante avere a disposizione lunghe serie storiche che però nelle scienze sociali raramente sono disponibili. Tuttavia su questo punto, come ricorda Condorelli (2001), il dibattito è tutt'altro che definito. Secondo molti studiosi (Albano, 1987; Ramsey *et al.*, 1992) "non esisterebbe un enunciato di portata generale in grado di

fissare in maniera univoca e definitiva la giusta lunghezza di una serie storica, al fine di rilevare la presenza del caos deterministico quale meccanismo generatore sottostante” (Condorelli, 2001, p.127). Infatti, anche se l’uso di lunghe successioni di dati apporta notevoli vantaggi, da alcuni studi (Abraham, 1986; Albano, 1987; Swinney, 1987) emerge che risultati apprezzabili sarebbero possibili con serie composte perfino da circa 200 osservazioni. Inoltre, il problema di essere in possesso di una quantità limitata di dati potrebbe essere risolto adoperando algoritmi diversi rispetto a quelli usati nelle serie più ampie e più adatti, invece, a serie brevi (Judd, 1994). Un’altra considerazione riguarda la natura delle serie storiche: la presenza di caos deterministico, rilevabile attraverso precisi parametri matematici, è certamente più frequente nelle serie di dati delle scienze fisiche e naturali, rispetto a quelle delle scienze sociali (Ruelle, 1991; tr. it. 2003). Ecco perché l’interpretazione di Brown secondo cui i sistemi sociali possiedono in senso pieno le caratteristiche del caos (aperiodicità, sensibilità alle condizioni iniziali, possibilità di fare previsioni solo nel breve periodo) necessita di una certa dose di cautela sul piano formale. Le serie temporali delle scienze sociali, lungi dall’essere “perfettamente caotiche”, si collocano spesso in situazioni intermedie di instabilità e talvolta sono difficilmente classificabili (Grabogi e Yorke, 1997). In ogni caso, lo studio della teoria del caos si rivela necessario per poterle interpretare.

Quanto al secondo scenario di ricerca, quello dello studio di comportamenti di sistemi di equazioni e cioè di modelli matematici completamente specificati, si solleva un’altra questione. Se nei sistemi fisici e naturali è possibile tentare di determinare e di risalire alle equazioni che governano l’evoluzione temporale dei sistemi medesimi, tale conoscenza incontra delle serie difficoltà nelle scienze sociali. Questo aspetto, che in realtà riguarda la formulazione di modelli matematici in generale applicati alle scienze sociali e non solo quelli che innescano delle dinamiche caotiche, mette in luce sì la necessità di adottare una certa prudenza e consapevolezza dei limiti di tali usi nello studio dei fenomeni sociali, che non possono essere messi sotto controllo negli stessi termini in cui lo sono quelli delle scienze fisiche, ma non si traduce in un rifiuto netto tale da impedire l’impiego della teoria del caos. Anzi, secondo Condorelli “tale applicazione appare già come una reale possibilità” (Condorelli, 2001, p. 121). D’altronde, continua Condorelli “si tratta pur sempre di tentativi che vengono ad incastonarsi in una cornice teoretica che seleziona e quindi restringe il campo delle possibili scelte per cui solo certe variabili e non altre, solo certe relazioni e non altre possono essere indagate nella ricostruzione del sistema in esame. Insomma la



costruzione del modello non avviene mai in una sorta di disorientante vuoto teorico, ma sempre in riferimento ad una relazione ai valori che orienta il ricercatore a sondare certi discorsi piuttosto che altri” (*ivi*, p. 135). Alla luce di queste riflessioni, la teoria del caos, anche se con risultati diversi, può apportare degli interessanti risultati anche in ambiti di applicazione diversi da quelli originari.

## SECONDO CAPITOLO

### Caos e non linearità: aspetti teorici

#### 1. Introduzione

In questo capitolo verranno affrontati da un punto di vista teorico i concetti basilari della teoria del caos, cioè i sistemi dinamici, gli equilibri, le biforcazioni, la sensibilità alle condizioni iniziali e gli attrattori. Si procederà con lo studio di tali aspetti nell'analisi non lineare delle serie storiche che rappresenta uno degli ambiti di applicazione più frequenti della teoria del caos in molti settori, tra cui le scienze sociali. Pertanto, verranno esaminate le tecniche per rendere stazionaria una serie temporale, per capire la struttura periodica o aperiodica della serie, per calcolare la sensibilità alle condizioni iniziali, per individuare la presenza di un attrattore e fornire una previsione di breve termine. Infine, si contempla un ulteriore uso della teoria del caos e più in generale della non linearità, rappresentato dalla formulazione di modelli matematici, di cui, nell'ultimo paragrafo, si approfondiscono quelli di tipo continuo.

#### 2. I sistemi dinamici

Per addentrarsi nello studio del caos, è necessario prima soffermarsi sulla definizione di alcuni concetti basilari. Essendo la teoria del caos una parte della teoria dei sistemi, si inizia proprio dalla nozione di sistema, utilizzando in tal sede l'accezione tipica delle scienze naturali. Per sistema si intende un oggetto identificato rispetto al suo ambiente circostante e quindi, come emerge dalla sua origine etimologica, un aggregato di elementi che stanno insieme, tanto da poter essere distinti da tutto il resto (Bertuglia e Vaio, 2007). Gli atomi, le cellule, gli ambienti economici, le città, le popolazioni sono peculiari esempi di sistemi nelle scienze naturali e in quelle sociali. Un sistema dinamico consiste, invece, in un insieme di possibili stati legati da una regola deterministica che stabilisce lo stato successivo in funzione dei precedenti (Alligood *et al.*, 1997).

La descrizione dell'evoluzione di un sistema viene fatta delineando l'andamento temporale delle sue variabili rilevabili e rientra in un settore della fisica-matematica detto teoria dei sistemi dinamici. Quest'ambito di ricerca, risalente già alla fisica di Galileo e Newton, ha visto un rapido sviluppo nel corso degli ultimi decenni grazie agli studi del matematico, fisico e filosofo Poincarè e ai sempre più aggiornati strumenti di

calcolo e dispositivi informatici. Per comprendere da un punto di vista formale come funziona la dinamica di un sistema, si parte dal suo stato iniziale, cioè dai valori in un dato momento  $t$  delle variabili rilevate. Gli stati per ogni periodo successivo, cioè la sequenza dei punti che forma una traiettoria, rappresentano l'evoluzione del sistema.

“Se il tempo è considerato come una grandezza discreta, ossia la sua misura assume solo valori che sono multipli interi di una data unità di misura (un giorno, un anno o un minuto a seconda del fenomeno che si sta studiando), allora può essere rappresentato mediante una variabile  $t$  che assume i valori interi  $t = 0, 1, 2 \dots$ . La legge di evoluzione di un sistema dinamico a tempo discreto è spesso rappresentata da una funzione che, applicata allo stato del sistema al tempo  $t$ , fornisce lo stato al tempo  $t+1$  per cui  $X_{t+1} = f(X_t) \dots$ . Se il tempo  $t$  viene descritto come una grandezza continua, ovvero si ammette la possibilità che gli eventi che scandiscono l'evoluzione del sistema possano presentarsi a distanze temporali arbitrariamente piccole, allora si parla di sistemi dinamici a tempo continuo e la legge locale di evoluzione del sistema è rappresentata da equazioni differenziali” (Bischi *et al.*, 2004, p. 4). Un sistema continuo viene denominato anche flusso.

Un sistema può essere retto da una o più variabili, sia nel discreto che nel continuo. Per motivi di semplicità si incomincia a considerare un sistema a una sola variabile  $X_n$  nel tempo discreto individuato nel numero intero  $n$ . Applicando ripetutamente la legge  $X_{n+1} = f(X_n)$  che governa il fenomeno, è possibile ottenere dallo stato iniziale  $X_0$  quelli successivi  $X_1, X_2, X_3 \dots$ . Tale funzione, che opera su un insieme di numeri reali, è detta anche mappa. Per quanto detto, si ricava:

$$X_1 = f(X_0), X_2 = f(X_1), X_3 = f(X_2) \dots X_{n+1} = f(X_n) \dots$$

Quindi, dal punto iniziale  $X_0$  si ricava la successione dei punti  $X_0, X_1, X_2, X_3 \dots, X_n \dots$  che rappresenta la traiettoria, associata alla condizione iniziale  $X_0$ ; l'insieme dei punti che compongono una traiettoria viene detta orbita.

Ad esempio, data la mappa  $X_{n+1} = -X_n$  con punto iniziale  $X_0 = 5$  si otterrà  $X_1 = -5, X_2 = 5, X_3 = -5 \dots$  perciò la traiettoria è data dalla sequenza infinita  $5, -5, 5, -5 \dots$  mentre l'orbita<sup>1</sup> è formata dai due punti  $-5$  e  $5$ .

I punti possono essere calcolati e rappresentati su una retta, ma anche individuati con il procedimento grafico detto “metodo della scala” o “cobweb”. Per esempio, la mappa del raddoppio  $X_{n+1} = 2X_n$ , con punto iniziale pari a  $1$ , produce la traiettoria  $1, 2, 4, 8, 16, \dots$

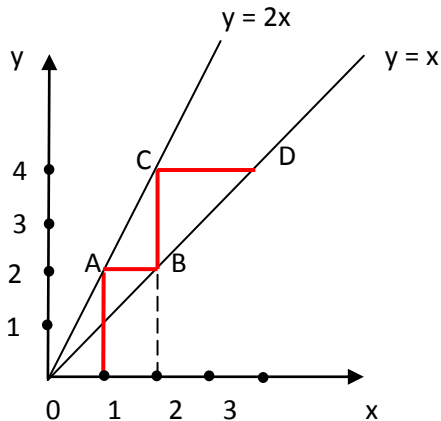
Per evidenziarla graficamente, si rappresentano la mappa  $X_{n+1} = 2X_n$  e la bisettrice

---

<sup>1</sup> Tuttavia, spesso si identifica la traiettoria con l'orbita.

$Y = X$  (fig. 1). Si traccia l'ordinata 2 del punto iniziale  $X_0=1$  che termina nel punto A della mappa. Per continuare l'iterazione, bisogna riportare questa ordinata in ascissa e ciò si ottiene con la parallela ad X per A fino a incontrare la bisettrice in B, in cui  $X_B=Y_B=Y_A=2$ ; il procedimento viene iterato e le ascisse dei punti segnati sulla mappa rappresentano la traiettoria. Questa tecnica risulta utile per comprendere la dinamica del sistema, soprattutto quando si affrontano situazioni più difficili.

**Fig. 1 - Metodo della scala**



### 3. Gli equilibri stabili e instabili

Si esamina adesso il comportamento della mappa nelle sue successive iterazioni. Essa può:

1. tendere all'infinito;
2. essere periodica;
3. convergere a un punto fisso;

Se la mappa non presenta gli andamenti sopra menzionati, potrebbe sfociare in un sistema caotico. Per quanto riguarda il primo comportamento, un esempio in cui una mappa può divergere è:

$f(X)=X^4$  con  $X_0 > 1$ . Infatti, iterando la funzione, i successivi valori della mappa diventano sempre più grandi.

La possibilità che la mappa sia periodica si manifesta, per esempio, con la funzione  $f(X) = 1-X^2$  che per  $X=0$  fornisce 1 e per  $X=1$  riproduce 0 e così via; da cui  $f(0)=1$  e  $f(1)=0$ . Applicando due volte la mappa ai due punti 0 e 1, si ritorna al punto di partenza. Ciò significa che tali punti costituiscono un'orbita di periodo 2 per la mappa. Quindi, si

parla di periodicità quando la  $X$  assume un certo numero di valori che poi si ripetono esattamente<sup>2</sup>.

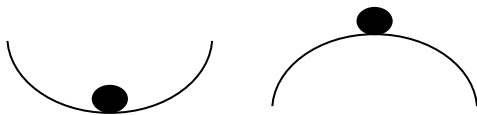
Quanto all'ultimo aspetto, se un sistema a ogni iterazione permane in un punto, quest'ultimo si dice fisso o di equilibrio. Quindi, la condizione a cui deve soddisfare il punto d'equilibrio  $X$  è che  $X_{n+1} = X_n$ , cioè  $f(X) = X$ ;

ad esempio:  $f(X) = 2X(1 - X)$ , uguagliata a  $X$ , fornisce due punti fissi:  $0$  e  $1/2$ ; a partire da questi valori, l'iterazione della mappa li riproduce sempre. Un punto fisso  $X^*$  è stabile se partendo da un intorno di  $X^*$  le traiettorie restano vicino a  $X^*$ ; in particolare,  $X^*$  è stabile asintoticamente o attrattivo se le traiettorie convergono a  $X^*$ .

Un punto fisso che non è stabile si dice instabile o repulsivo se, partendo da un intorno di  $X^*$ , le traiettorie si allontanano da  $X^*$ .

Ad esempio, una pallina, appoggiata sul fondo di una semisfera, è in equilibrio stabile perché, allontanandola leggermente da quella posizione, tende a ritornarvi; al contrario, la pallina adagiata sulla sommità della semisfera è in equilibrio instabile perché una piccola perturbazione altera tale equilibrio (fig. 2).

**Fig. 2 – Equilibri stabile e instabile**

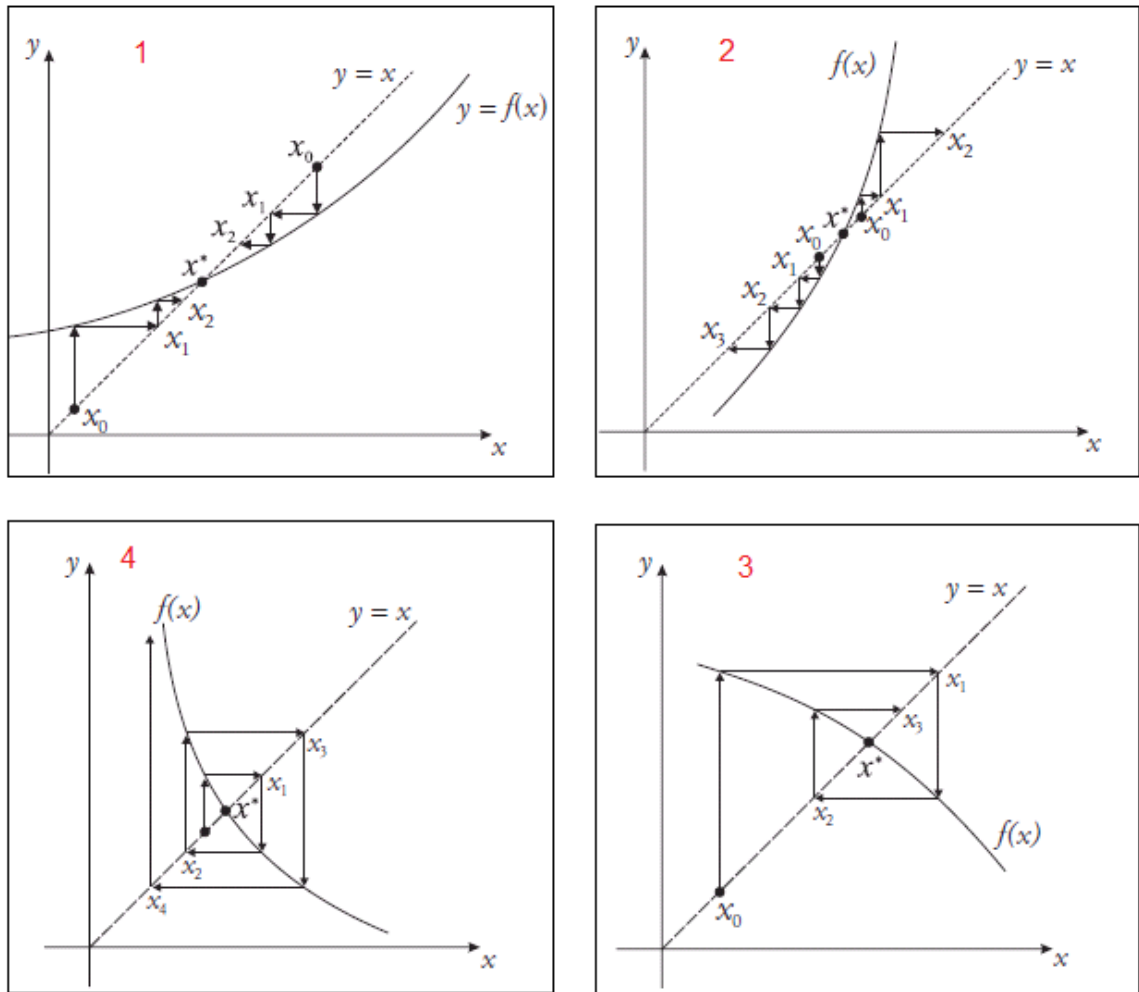


I punti fissi, dovendo obbedire alla relazione  $f(X)=X$ , si possono ottenere graficamente dall'intersezione dei grafici della mappa  $Y=f(X)$  e della bisettrice  $Y=X$ . In fig. 3 sono riportate quattro situazioni di equilibrio, rappresentate con il metodo della scala, che risultano stabili nel primo e terzo riquadro in cui le frecce tendono a confluire verso  $X^*$ , e instabili nel secondo e quarto riquadro in cui le frecce si allontanano da  $X^*$ .

---

<sup>2</sup> Una mappa può essere anche asintoticamente periodica se al crescere di  $n$  converge a una serie periodica; in particolare, se la mappa diventa esattamente periodica si dice periodica alla fine (Alligood *et al.*, 1997).

**Fig. 3 – Situazioni di equilibrio**



Fonte: Bischi, 2004, p. 30

Per comprendere da un punto di vista analitico la stabilità o l'instabilità di un sistema, si affronta lo studio della mappa proporzionale  $f(X) = aX$ , che è di tipo lineare, dove  $a$  è una costante.

Nelle prime tre iterazioni la mappa diventa:

$$X_1 = aX_0$$

$$X_2 = aX_1 = a(aX_0) = a^2 X_0$$

$$X_3 = aX_2 = a(a^2 X_0) = a^3 X_0;$$

di conseguenza  $X_n = a^n X_0$  e per  $a = 1$  il punto di partenza rimane fisso.

Se  $a$  è diverso da 1, l'unico punto fisso della mappa è 0.

Infatti:

$f(X) = X$  equivale all'equazione  $aX = X$  ossia  $X(a-1) = 0$ , che è soddisfatta da  $X = 0$ .

Dal termine generale della mappa  $X_n = a^n X_0$  scaturisce che, con segno costante o alternato,  $X_n$  tende a 0 se  $|a| < 1$  e diverge se  $|a| > 1$ . Se  $a$  è positivo, i valori della serie conservano il segno del punto iniziale. Se  $a$  è negativo, i valori della serie hanno segni alterni.

Dato che  $f(X) = aX$ , il rapporto incrementale tra le variabili dipendente e indipendente

$$\frac{\Delta f}{\Delta X} = \frac{a(X_{02} - X_{01})}{X_{02} - X_{01}} = a \quad (\text{dove } X_{02} \text{ e } X_{01} \text{ sono due diversi punti iniziali}), \text{ vale a anche}$$

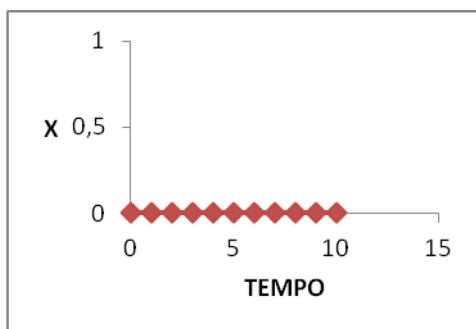
per  $\Delta X$  piccoli e ciò significa che la derivata della funzione  $f'(X) = a$ . Quindi, le condizioni ricavate per  $a$  sulla convergenza e divergenza della serie possono essere trasferite sulla derivata.

Pertanto, se la derivata prima (in valore assoluto) è minore di 1 nel punto di equilibrio, allora quel punto è un equilibrio stabile. Se è maggiore di 1, l'equilibrio è instabile. Questo risultato vale per tutte le funzioni derivabili. Inoltre, poiché la derivata della bisettrice è uguale a 1, risulta che la mappa nel punto di equilibrio stabile ( $|f'| < 1$ ) avrà una pendenza minore (in valore assoluto) di quella della bisettrice e nel punto di equilibrio instabile ( $|f'| > 1$ ) avrà una pendenza (in valore assoluto) maggiore.

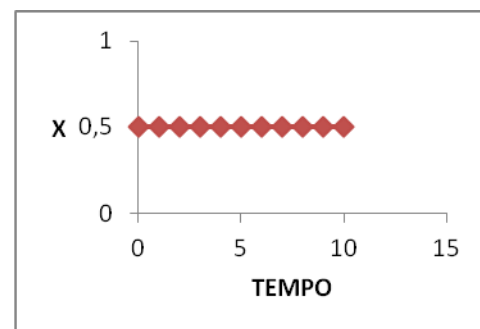
Infatti, ritornando alla fig. 3, nel primo e nel terzo riquadro l'inclinazione della curva nel punto di equilibrio stabile è minore di quella della bisettrice; nel secondo e quarto riquadro l'inclinazione della curva nel punto di equilibrio instabile è maggiore.

Riprendendo la mappa  $f(X) = 2X(1 - X)$  con punti fissi a 0 e a 1/2, si va ora ad esaminare la natura di tali punti in modo grafico e analitico. In figg. 4-5, sono riportati i diagrammi dei valori della mappa in funzione del tempo: si vede che se i punti iniziali sono 0 o 1/2, essi resteranno costanti, essendo fissi.

**Fig. 4 – Punto fisso = 0**

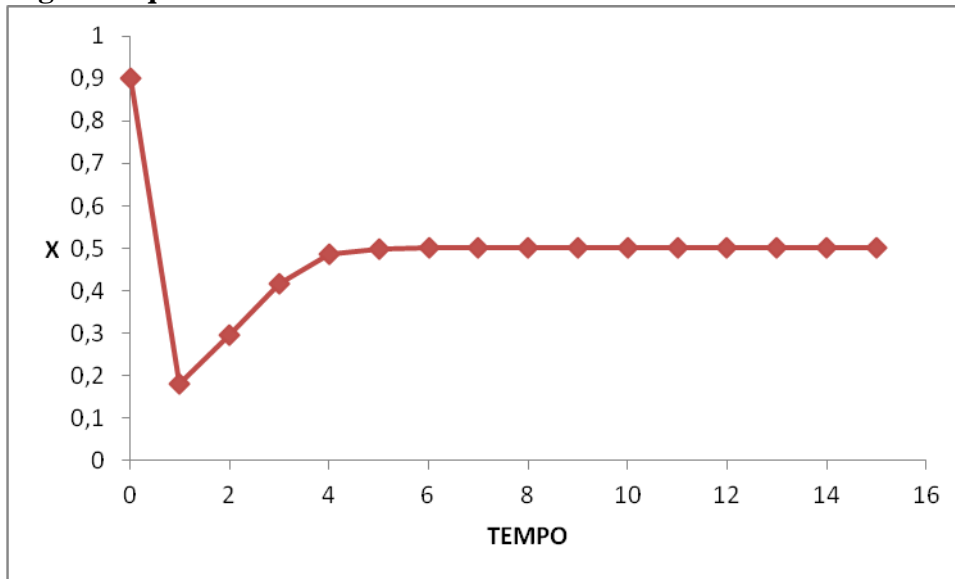


**Fig. 5 – Punto fisso = 1/2**



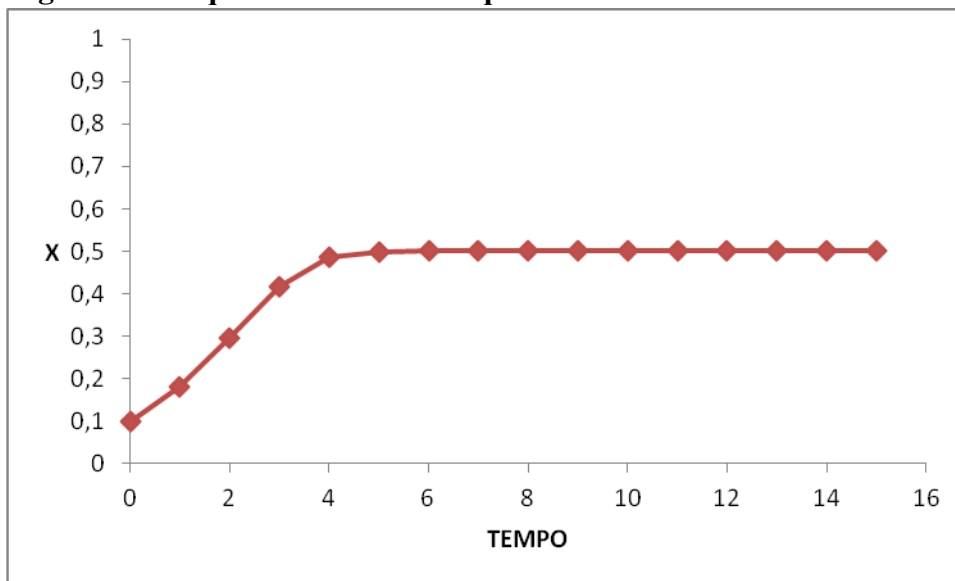
Se i punti iniziali nell'intervallo  $[0,1]$  sono diversi da 0 o 1/2, per esempio 0,9 (fig. 6), l'iterazione li conduce al punto fisso 1/2 perché questo è un equilibrio stabile.

**Fig. 6 – Equilibrio stabile**



Se si parte da un punto prossimo allo 0 come 0,1, la traiettoria si allontana da 0 che è un equilibrio instabile e si colloca sull'equilibrio stabile a 1/2 (fig. 7).

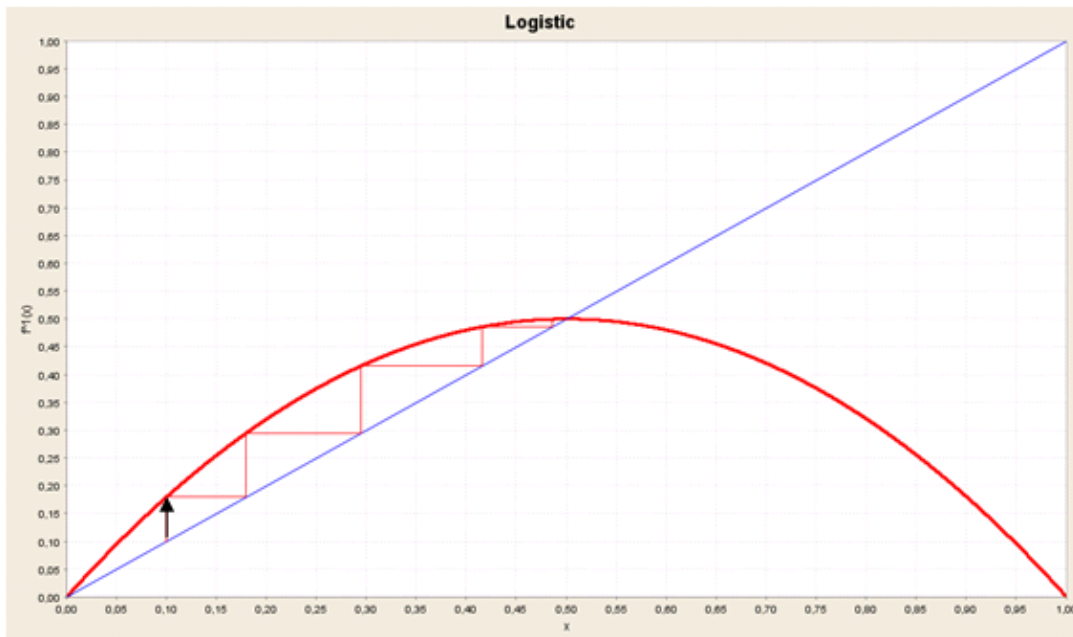
**Fig. 7 – Dall'equilibrio instabile a quello stabile**



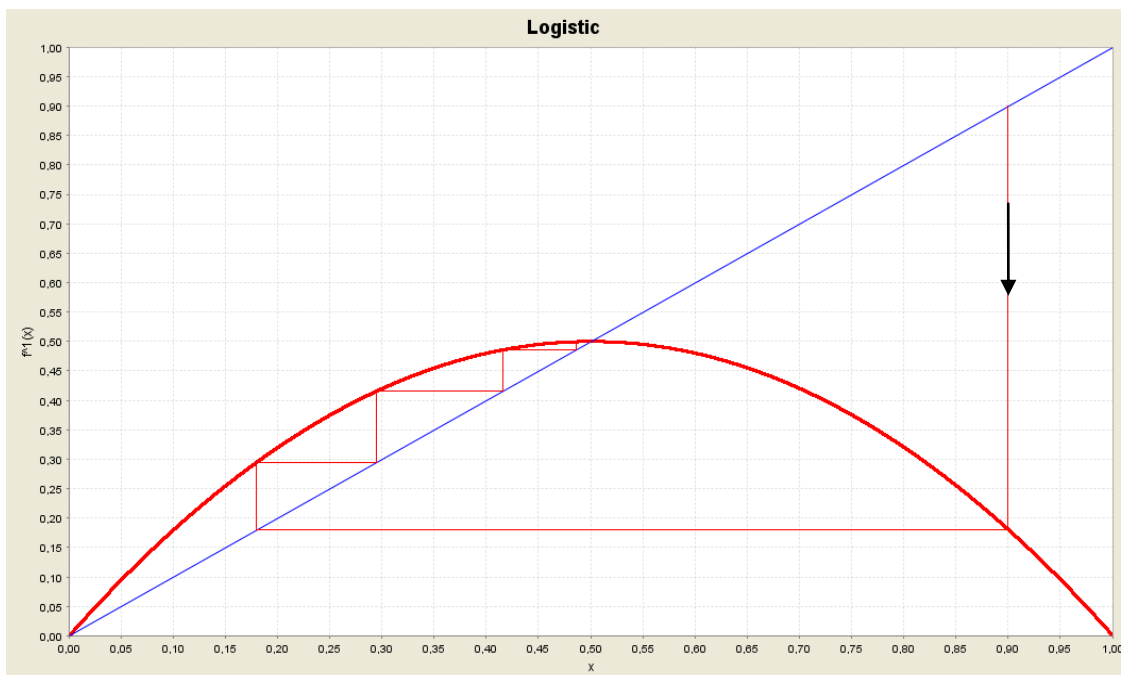
Tali risultati sono evidenti anche dall'applicazione del metodo della scala ai diagrammi della mappa e della bisettrice. Infatti essi si intersecano nei punti fissi 0 e 1/2 e la scala confluisce nel punto stabile 1/2 a partire dai punti 0,1 (fig. 8) e 0,9 (fig. 9).



**Fig. 8 – Equilibrio stabile da 0,1 con metodo della scala**



**Fig. 9 – Equilibrio stabile da 0,9 con metodo della scala**



Analiticamente queste conseguenze emergono calcolando la derivata prima nei punti fissi.

Dato che la  $f(x) = 2x(1-x) = 2(x - x^2)$ , la sua derivata  $f'(x) = 2(1-2x)$  nei punti fissi vale  $f'(0) = 2$  e  $f'(1/2) = 0$ . Poiché  $|f'(0)| = 2 > 1$ , il punto 0 è di equilibrio instabile e, giacché  $|f'(1/2)| = 0 < 1$ , il punto  $1/2$  è un equilibrio stabile. Si

riscontra anche che la pendenza della curva nell'origine è maggiore di quella della bisettrice (equilibrio instabile), mentre nel punto di ascissa 1/2 risulta minore (equilibrio stabile).

#### 4. Verso il caos: le biforcazioni

Nel linguaggio comune si parla di biforcazione per identificare un bivio, un punto in cui una strada si divide in due. Nel linguaggio matematico una biforcazione indica un cambiamento qualitativo del comportamento del sistema, che si ha quando i parametri<sup>3</sup> attraversano valori critici (Sprott, 2003; Bischi *et al.*, 2004; Kuznetsov, 2004). In tal modo si determina un passaggio tra due diversi scenari dinamici, in quanto prima della biforcazione si ha una certa situazione, dopo il punto di biforcazione si verifica una configurazione diversa. Secondo Kiel e Elliot (1996) i fenomeni sociali non sono statici e tendono ad attraversare continue situazioni di cambiamento, che possono essere espresse e comprese anche attraverso l'uso di biforcazioni e l'analisi degli equilibri stabili e instabili. Particolarmente interessanti sono alcuni studi che si sono serviti delle biforcazioni per descrivere il fenomeno della corruzione politica nelle società democratiche (Colombo *et al.*, 2008), il periodo di tangentopoli in Italia negli anni '90 (Rinaldi *et al.*, 1998a) e le dinamiche di consumo della droga (Gragnani *et al.*, 1997a).

Le vie che in genere portano al caos sono serie di biforcazioni per raddoppio del periodo, quasi-periodicità in cui configurazioni stabili diventano instabili e l'alternanza di fasi periodiche e caotiche.

Le biforcazioni per le mappe e flussi possono essere classificate per:

- 1) dimensione, cioè il numero di variabili che descrivono il sistema;
- 2) codimensione ovvero il numero di parametri che vengono variati contemporaneamente<sup>4</sup>;
- 3) estensione che può essere locale, in cui il punto di equilibrio appare o scompare (comportamento discontinuo) oppure cambia la sua stabilità (comportamento continuo), o globale che coinvolge l'intera orbita;

Per capire la struttura di una biforcazione si considerano brevemente alcuni esempi di quelle fondamentali con codimensione 1 (Strogatz, 1994): si ricordano in dimensione 1 le biforcazioni *fold*, transcritiche e *pitchfork* per le mappe e per i flussi e la biforcazione *flip* solo per le mappe; per il flusso si illustra la biforcazione di Hopf a due dimensioni; infine, si descrivono le due biforcazioni globali, l'eteroclinica e l'omoclinica.

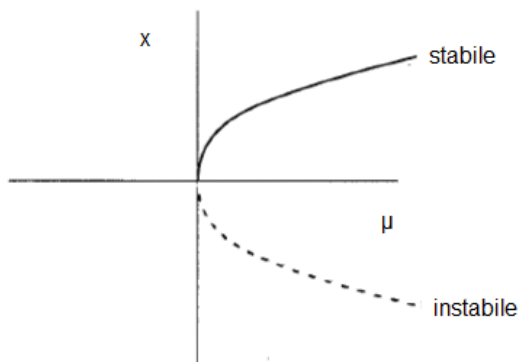
---

<sup>3</sup> Un parametro è una costante che può assumere valori in un dato ambito. Ad esempio, data la mappa  $y = \mu x^2$ ,  $\mu$  è il parametro.

<sup>4</sup> Per esempio, codimensione 1 vuol dire che viene cambiato un solo parametro.

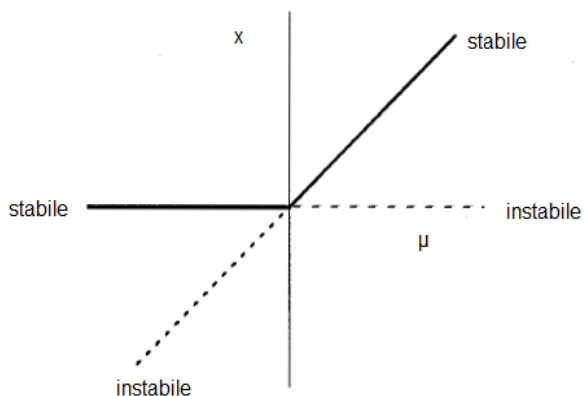
Le biforcazioni possono essere spiegate facilmente con i diagrammi di biforcazione, in cui le ascisse e le ordinate indicano rispettivamente il parametro e i punti di equilibrio. In fig. 10 si nota che per  $\mu < 0$  non ci sono equilibri e per  $\mu > 0$  si creano due equilibri: uno stabile ( $X$  positivo) distinto dalla linea continua e l'altro instabile ( $X$  negativo) segnato dal tratteggio. Questa biforcazione, detta *fold*, sorge a  $\mu = 0$  che è un elemento di separazione tra  $\mu$  negativi (assenza di equilibrio) e  $\mu$  positivi (una coppia di equilibri: stabile e instabile).

**Fig. 10 – Biforcazione *fold***



In fig. 11 si osserva che per  $\mu < 0$  si hanno due equilibri: uno stabile per  $X=0$  e uno instabile per  $X$  negativo. Invece per  $\mu > 0$  si ha un equilibrio instabile per  $X=0$  e uno stabile per  $X$  positivo. Quindi, passando da  $\mu$  negativo a  $\mu$  positivo, si ottiene a  $\mu = 0$  il punto di biforcazione transcritico: l'equilibrio stabile a  $X=0$  diventa instabile e quello instabile ( $X$  negativo) si trasforma in stabile ( $X$  positivo). Dunque, nel punto di biforcazione gli equilibri cambiano la loro stabilità: da instabile a stabile e viceversa.

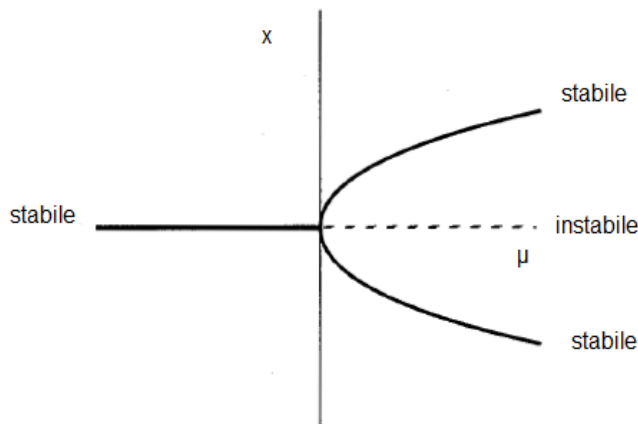
**Fig. 11 –Biforcazione transcritica**



Nella biforcazione *pitchfork* (fig. 12) per  $\mu < 0$  vi è un equilibrio stabile ( $X=0$ ) che diviene instabile per  $\mu > 0$ , ma si originano altri due equilibri stabili sempre per  $\mu > 0$ .

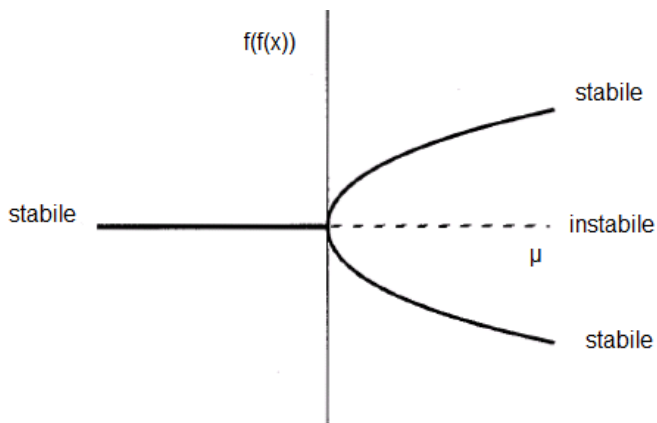
Quindi, la biforcazione a  $\mu=0$  modifica l'equilibrio stabile in instabile e forma altri due equilibri stabili, aventi valori di ascissa opposti.

**Fig. 12 – Biforcazione *pitchfork***



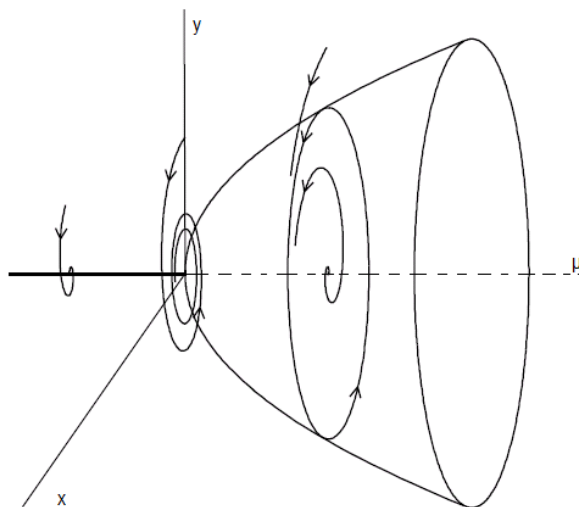
Per le mappe è importante la biforcazione *flip* (fig.13) che consiste in una biforcazione *pitchfork* non della mappa  $f$ , ma della sua iterata  $f^2$  cioè  $f(f(X))$ . Sia la  $f$  che la  $f^2$  presentano un equilibrio stabile con  $X=0$  e per  $\mu < 0$  che diventa instabile per  $\mu > 0$ ; inoltre, compaiono anche due equilibri stabili con valori opposti per  $\mu > 0$ . Se si parte dall'equilibrio stabile  $X=0$  per  $\mu < 0$  e si applica la  $f$  più volte, il punto di equilibrio resta tale, analogamente un punto prossimo a 0 tende a 0. Se si inizia dall'equilibrio instabile  $X=0$  per  $\mu > 0$  e si itera la  $f$  più volte, l'equilibrio resta invariato, però un punto prossimo a 0 si allontana da 0. Per  $\mu > 0$  ci sono due equilibri stabili con valori opposti  $P_1$  e  $P_2$ , quindi l'applicazione della funzione  $f$  a  $P_1$  conduce a  $P_2$ , cioè  $f(P_1)=P_2$ . Allo stesso modo, l'applicazione della funzione  $f$  a  $P_2$  porta a  $P_1$ , cioè  $f(P_2)=P_1$ . Ciò significa che dopo due iterazioni si ritorna al punto  $P_1$ , per cui  $P_1$  è un punto fisso per la  $f^2$ . Il medesimo risultato vale per  $P_2$ . Dunque,  $P_1$  e  $P_2$  rappresentano un'orbita di periodo 2 per la  $f$ . Infatti, applicando la  $f$ , si va da  $P_1$  a  $P_2$  e ripetendo l'iterazione si procede da  $P_2$  a  $P_1$ . Essendo  $P_1$  e  $P_2$  stabili, l'orbita viene raggiunta anche se si parte da punti vicini a  $P_1$  e  $P_2$ . In definitiva, dall'unico equilibrio stabile per  $\mu < 0$  si passa a un equilibrio bistabile per  $\mu > 0$ . Proprio per questo motivo, tale biforcazione viene anche chiamata del "raddoppio". La differenza tra le biforcazioni *pitchfork* e *flip* consiste nel fatto che nella prima i punti di equilibrio non nulli sono per la  $f$ , mentre nella seconda sono della  $f^2$ . Per cui per la *pitchfork* essendo  $P_1$  e  $P_2$  punti di equilibrio stabile ( $\mu > 0$ ), si parte da  $P_1$  e ivi si rimane, così per  $P_2$ ; pertanto, non si avrà l'orbita che parte da  $P_1$  e giunge a  $P_2$  e viceversa, come accade, invece, per la biforcazione *flip*.

**Fig. 13 – Biforcazione *flip***



Nel piano (dimensione 2), il flusso con un solo parametro può obbedire alla nota biforcazione di Hopf (fig. 14). I punti di equilibrio al variare di  $\mu$  sono indicati dal diagramma di biforcazione. Per  $\mu < 0$ , il punto tende, seguendo una spirale, all'equilibrio stabile nell'origine degli assi  $x, y$ . Poi per  $\mu > 0$  quest'equilibrio diventa instabile ed in più si forma un ciclo limite al quale tendono le traiettorie esterne e interne.

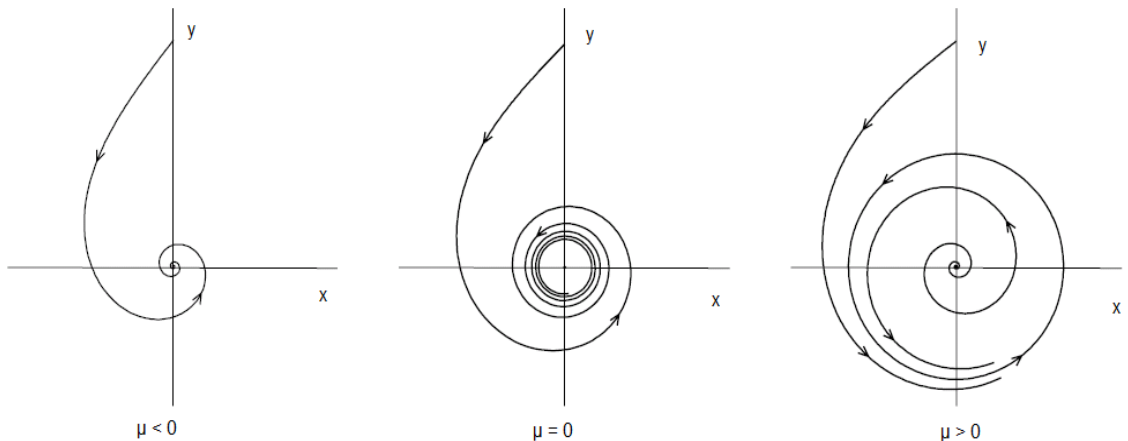
**Fig. 14 – Biforcazione di Hopf**



Fonte: Kuznetsov, 2004, p. 88

Questa configurazione viene meglio evidenziata raffigurando le sezioni del diagramma di biforcazione per  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$  e  $\mu > 0$  (fig.15). La biforcazione si ha a  $\mu = 0$  che separa il punto stabile dai cicli limite.

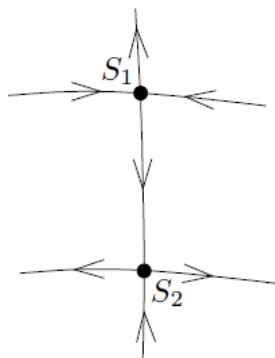
**Fig. 15 – Sezioni diagramma di biforcazione per  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$  e  $\mu > 0$**



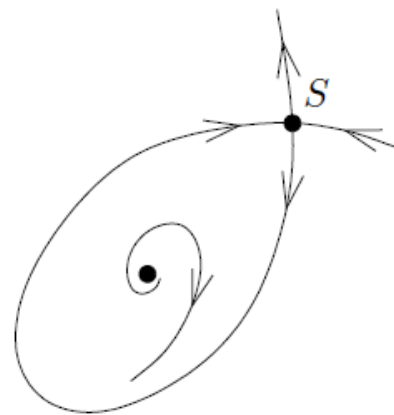
Fonte: Kuznetsov, 2004, p. 108

Si ricordano infine le due biforcazioni globali: eteroclinica ed omoclinica. Nella prima un ramo della varietà instabile del punto  $S_1$  confluisce nel ramo stabile di  $S_2$  per un dato valore del parametro (fig.16). Nella seconda un ramo della varietà instabile di  $S$  termina nella varietà stabile dello stesso punto per un certo valore del parametro (fig. 17).

**Fig. 16 – Biforcazione eteroclinica**



**Fig. 17 – Biforcazione omoclinica**

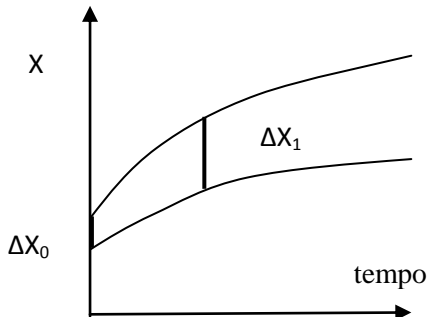


## 5. Gli esponenti di Lyapunov

Una delle caratteristiche fondamentali di un regime dinamico caotico è la dipendenza sensibile alle condizioni iniziali, cioè piccole differenze sulle condizioni iniziali si amplificano enormemente fino a produrre traiettorie completamente distanti tra loro. La divergenza esponenziale di traiettorie vicine è rilevata attraverso gli esponenti di Lyapunov e rappresenta la caratteristica più spesso ricordata e più facilmente riscontrabile nello studio dei modelli di sistemi reali (Ott *et al.*, 1994; Brown, 1995b; Alligood *et al.*, 1997). Nello specifico, gli esponenti di Lyapunov possono essere

considerati come una stima delle velocità medie di convergenza o divergenza esponenziali delle traiettorie di un generico sistema dinamico (fig. 18) (Sprott, 2003).

**Fig. 18 – Divergenza traiettorie**



La distanza  $\Delta X_0$  tra due punti vicini nell'istante 0, moltiplicata per il fattore esponenziale  $e^\lambda$ , raggiunge il valore  $\Delta X_1$  dopo un'iterazione, cioè  $|\Delta X_1| = |\Delta X_0| e^\lambda$  dove  $\lambda$  si chiama esponente locale di Lyapunov.

Quindi, consegue che:  $\lambda = \log |\Delta X_1 / \Delta X_0|$

Il rapporto  $\left| \frac{\Delta X_1}{\Delta X_0} \right|$  misura l'amplificazione o l'attenuazione delle variazioni di  $X$  dopo un

passo della mappa<sup>5</sup>. Per ottenere un'informazione complessiva della sensibilità del sistema, si calcola l'esponente di Lyapunov globale, eseguendo una media di quelli locali su molte iterazioni<sup>6</sup> (Wolf, 1986; Abarbanel, 1992). Naturalmente, se l'orbita è periodica basta mediare su un periodo.

La distanza iniziale viene moltiplicata dopo un'iterazione per  $e^\lambda$ , dopo due iterazioni per  $e^\lambda e^\lambda = e^{2\lambda}$  e dopo  $n$  iterazioni per  $e^{n\lambda}$ . Pertanto deriva che al trascorrere del tempo per:

- $\lambda < 0$ , le orbite si avvicinano in quanto  $e^{n\lambda}$  diminuisce, tendendo a 0;
- $\lambda = 0$ , le orbite sono a distanza costante perché  $e^{n\lambda}$  è uguale a 1;
- $\lambda > 0$ , le orbite si allontanano poiché  $e^{n\lambda}$  è crescente, tendendo all'infinito.

L'ultima condizione è tipica dei sistemi caotici.

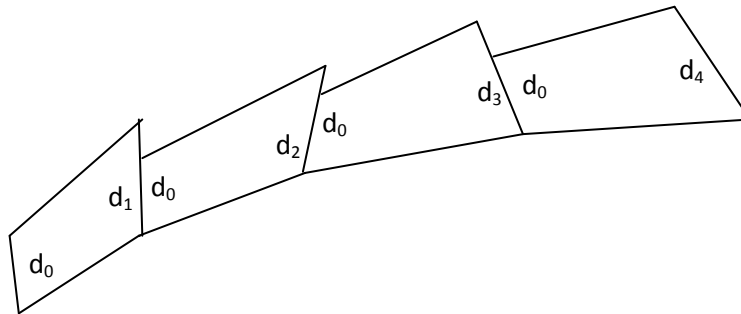
Inoltre, il numero degli esponenti di Lyapunov è uguale al numero delle variabili del sistema dinamico. Tuttavia, per conoscere la massima sensibilità di un sistema caotico, basta calcolare il maggiore esponente di Lyapunov. Nel caso di un sistema

<sup>5</sup> Dato che  $X_1 = f(X_0)$  risulta:  $\Delta X_1 = \Delta f$ , quindi  $\Delta X_1 / \Delta X_0$  tende alla derivata di  $f$  per  $\Delta X_0$  infinitesimo, per cui  $\lambda = \log |f'(X_0)|$ . Il valore assoluto è necessario perché  $e^\lambda$  è positivo.

<sup>6</sup>  $\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \log |f'(X_n)|$

bidimensionale si applica il seguente procedimento (fig. 19) (Brown, 1996a; Sprott, 2003), facilmente estendibile alle dimensioni più elevate:

**Fig. 19 - Massimo esponente di Lyapunov**



- 1) si scelgono due posizioni iniziali vicine in qualsiasi direzione e distanti  $d_0$ ;
- 2) si iterano le due posizioni e sia  $d_1$  la distanza tra i due nuovi punti;
- 3) si calcola il  $\log(d_1/d_0)$ , ovvero l'esponente di Lyapunov provvisorio;
- 4) si riporta  $d_0$  nella direzione di  $d_1$ ;
- 5) si determinano i punti iterati degli estremi della nuova  $d_0$  che si trovano a distanza  $d_2$ ;
- 6) si calcola il  $\log(d_2/d_0)$ ;
- 7) si esegue la media aritmetica dei risultati dei punti 3) e 6);
- 8) si calcola analogamente il  $\log(d_3/d_0)$ ;
- 9) si effettua la media dei risultati dei punti 3), 6), 8);
- 10) si ripete il procedimento più volte, fermandosi quando la media tende a stabilizzarsi.

Lo *step 4* è cruciale per due motivi:

- il punto iniziale viene avvicinato alla stessa distanza dal punto corrispondente dell'orbita imperturbata prima di ogni iterazione, in modo da evitare che la posizione perturbata si allontani troppo dall'orbita;
- la direzione tra i due punti si conserva durante l'evoluzione del sistema in modo che dopo molte iterazioni, prevalendo la direzione di massima espansione sulle altre, si ottenga al punto 10 il maggiore esponente di Lyapunov. Se all'inizio di ogni iterazione  $d_0$  avesse direzione casuale, la dinamica non riuscirebbe a seguire la massima espansione.

Nei sistemi continui il calcolo degli esponenti di Lyapunov si ottiene trasformando le equazioni del flusso in mappe. Per esempio, dal flusso unidimensionale  $\dot{x} = f(x)$  cioè

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \text{ si ha } dx = f dt .$$



Approssimando il  $dx$  nella variazione della mappa dopo un tempo  $\Delta t$ , si ottiene:  
 $x_{n+1} - x_n = f(x_n) \Delta t$  ; pertanto, si ricava l'equazione della mappa  
 $x_{n+1} = x_n + f(x_n) \Delta t$  che lega il valore successivo della  $x$  a quello precedente e  
 permette il calcolo dell'esponente di Lyapunov.

## 6. Gli attrattori

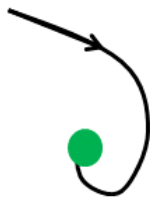
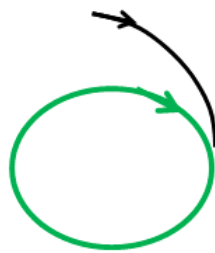
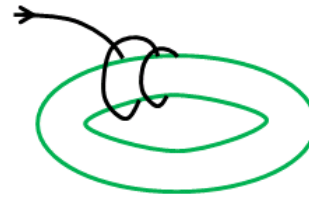
Uno dei concetti cardine per lo studio dei sistemi caotici è l'attrattore che può essere considerato la manifestazione più evidente dell'ordine nascosto e più precisamente del determinismo di un sistema caotico. In linea generale, esso si definisce come un insieme nel quale convergono le traiettorie del sistema. Una volta che la traiettoria raggiunge l'attrattore, non lo abbandona più, almeno fino a quando non intervengono fattori esterni (Ruelle e Takens, 1971). Un attrattore si sviluppa da un bacino di attrazione, cioè una regione dello spazio, caratterizzata dal fatto che, a partire da un punto qualsiasi appartenente a quella regione, il sistema dinamico evolve dirigendosi sempre verso l'attrattore.

Sul piano tecnico, esempi semplici di attrattori sono il punto fisso, l'orbita e il toro.

Per il punto fisso, si considera il caso di un pendolo oscillante nell'aria: l'ampiezza di oscillazione si smorza progressivamente e tutte le traiettorie, indipendentemente dalle condizioni iniziali, si avvicinano al punto fisso stabile, cioè l'attrattore del sistema (fig. 20a). In altri sistemi dinamici, l'attrattore può consistere in un'orbita chiusa (fig. 20b). Ad esempio, un'altalena che viene spinta regolarmente con oscillazioni costanti si stabilizza su un'orbita periodica, dando vita a un attrattore detto ciclo limite<sup>7</sup>. Un sistema caratterizzato da due frequenze di oscillazione incommensurabili<sup>8</sup> avrà come attrattore la figura geometrica costituita dalla composizione diretta dei due cicli, ottenendo la cosiddetta superficie di un toro che può essere immaginata come una molla curvata su una circonferenza (fig. 20c): il punto, nel seguire la molla contemporaneamente, ruoterà intorno a essa e percorrerà la circonferenza con due frequenze.

<sup>7</sup> Si visualizza nel piano  $x-v$ , dove  $x$  è l'ascissa dal punto di equilibrio e  $v$  è la velocità dell'altalena.

<sup>8</sup> Cioè con rapporto non esprimibile da un numero frazionario; se invece fosse razionale la traiettoria si ripeterebbe, diventando un ciclo.

**Fig. 20a - Punto fisso****Fig. 20b - Orbita****Fig.20c -Toro**

Fino a pochi decenni fa i punti fissi, i cicli limite e i tori erano gli unici attrattori che si conoscevano, poi il 1963, anno della scoperta dell'attrattore di Lorenz, ha segnato l'inizio dello studio di un nuovo tipo di attrattori, quelli caotici. Questi si distinguono per la forte dipendenza dalle condizioni iniziali, per cui due traiettorie inizialmente vicine si separano esponenzialmente, innescando così un meccanismo di allontanamento e riavvicinamento detto *stretching* e *folding* che ricorda il modo in cui un fornaio lavora la pasta del pane: le parti di impasto, che si trovano vicine ad un certo istante, saranno lontane dopo un numero finito di iterazioni. Similmente, poiché l'attrattore occupa una regione limitata, le traiettorie divergeranno per un certo tempo ma poi tenderanno ad avvicinarsi senza mai ripetersi. Dunque, questi sistemi ritornano aperiodicamente nei pressi di posizioni già occupate, percorrendo orbite che non si incontrano mai.

Un altro aspetto importante degli attrattori caotici è rappresentato dalla loro possibilità di essere anche attrattori strani e viceversa (Grebogi *et al.*, 1984). Tuttavia, è importante precisare che questi tipi di attrattori rimandano a delle proprietà diverse. Infatti, un attrattore caotico si caratterizza per la sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali (con almeno un esponente di Lyapunov positivo) e la presenza di orbite confinate in una regione limitata dello spazio delle fasi. L'attrattore strano, invece, ha una forma geometrica frattale (Mandelbrot 1987, tr. it. 2000; Peitgen *et al.*, 2004), cioè è un oggetto di dimensione non intera che mostra autosomiglianza, ovvero ha la stessa struttura a tutte le scale. In natura ci sono numerosi esempi di oggetti frattali: uno dei più citati è la foglia di felce che possiede la stessa forma a varie scale.

Secondo Ruelle (1989) un attrattore  $A$  è un insieme chiuso e limitato di punti con le seguenti caratteristiche:

- è invariante, cioè partendo da  $A$  si rimane sempre in  $A$ ;
- è attrattivo, per cui partendo da un punto vicino ad  $A$  si tende ad  $A$ ;
- è minimo o indecomponibile, in quanto non esiste nessun sottoinsieme di  $A$  che soddisfa le condizioni precedenti.

Oltre a queste proprietà, come ricorda Sprott (2003), l'attrattore caotico:

- è un insieme limite a cui tende il sistema dopo un tempo adeguato;
- può essere frattale;
- è denso in orbite periodiche instabili;
- è transitivo, cioè partendo da un punto dell'attrattore (non appartenente alle orbite periodiche) ci si può avvicinare sufficientemente a qualsiasi altro punto di A;
- è sensibile alle condizioni iniziali;
- è esteticamente attraente.

Inoltre, un attrattore è strutturalmente stabile se conserva le sue proprietà in presenza di piccole perturbazioni alla forma delle equazioni del sistema. Invece, sistemi che preservano le loro proprietà per piccole perturbazioni ai loro parametri si dicono robusti. Un altro aspetto cruciale di natura tecnica riguarda il tipo di sistema che può produrre attrattori caotici. In un sistema dinamico di tipo continuo descritto da due variabili non si possono formare attrattori caotici che invece si possono generare negli spazi che hanno dimensioni maggiori di 2 (Strogatz, 2004). Il motivo di questo limite è il seguente: in una regione della superficie a 2 dimensioni, l'orbita è una curva chiusa oppure sfocia verso un punto attrattore o un ciclo limite. Altrimenti, l'orbita dovendo evolversi in una regione per ipotesi limitata, finirebbe per incrociare sé stessa, violando il teorema di unicità delle equazioni differenziali, secondo il quale un sistema continuo ha un'unica soluzione, qualora siano soddisfatte specifiche condizioni. Infatti dal punto di intersezione, il sistema potrebbe seguire più percorsi. Pertanto, occorrono almeno tre variabili per generare un attrattore caotico. In tre variabili, il sistema evita l'incrocio, utilizzando la terza dimensione. Quanto alle mappe, esse possono essere caotiche anche a una sola dimensione perché, essendo le traiettorie un insieme di punti discreti, non sorge il problema della loro intersezione.

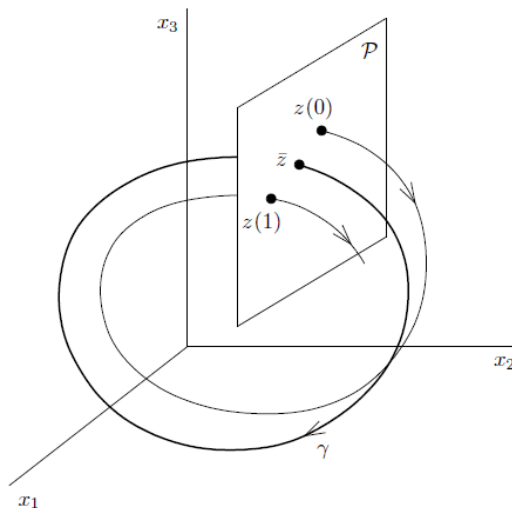
Alcuni aspetti fondamentali dell'attrattore vengono rilevati mediante la sua visualizzazione. Se, infatti, l'attrattore ha due dimensioni, esso può essere rappresentato in un diagramma bidimensionale, ma se il numero delle dimensioni è maggiore di due occorrono altre procedure.

Ad esempio, si può proiettare l'attrattore su vari piani per riconoscerne il contorno oppure si può limitare il numero di iterazioni per rivelare la densità dei punti per la mappa o la forma della traiettoria per il flusso. Scendendo un po' più nel dettaglio, la struttura di un flusso può essere visualizzata con la sezione di Poincaré che riduce la

dimensione dell'attrattore di un'unità (fig. 21). Per tale scopo si considerano le intersezioni successive della traiettoria con una superficie trasversale al flusso, detta sezione di Poincarè che riproduce la stessa dinamica (esponenti di Lyapunov, biforcazioni...) dell'attrattore, eccetto quella nella direzione del flusso, ma ridotta di una dimensione.

Le mappe invece, essendo formate da punti discreti, non hanno sezioni di Poincarè; queste, prive di spessore, non riescono in genere a intercettare le traiettorie, ma si può ovviare a tale difficoltà, sostituendo alla sezione uno strato sottile. In tal modo, ci saranno punti della traiettoria che capiteranno nello strato.

**Fig.21 – Sezione di Poincarè**



Nell'ambito delle scienze sociali tra le varie applicazioni che utilizzano gli attrattori si ricordano quelle di Dendrinos (1996) nello studio delle dinamiche urbane e di Saari (2001) per l'analisi delle preferenze elettorali.

## **7. Cos'è il caos deterministico?**

Una definizione generale di caos deterministico non esiste ancora, tuttavia la maggior parte degli studiosi condivide la presenza di alcune caratteristiche fondamentali. Il caos infatti viene considerato come un comportamento aperiodico a lungo termine in un sistema deterministico limitato che mostra una sensibile dipendenza alle condizioni iniziali (Sprott, 2003).

In particolare, l'aperiodicità indica che le traiettorie del sistema, seppur vicine, non ripassano mai per uno stato già visitato, quindi non convergono in punti fissi o orbite. Un sistema poi si definisce deterministico se non presenta parametri o ingressi casuali,

per cui lo stato precedente determina quello successivo. In aggiunta, il sistema è limitato se le traiettorie sono contenute in uno spazio finito. Infine, la sensibilità alle condizioni iniziali significa che una piccola variazione delle stesse, anche apparentemente irrilevante, si amplifica nel tempo e modifica l'evoluzione del sistema, portando a situazioni totalmente imprevedibili.

Alla luce di queste caratteristiche, ci si trova dinanzi a un fenomeno, di cui si conosce la legge che ne governa l'evoluzione nel tempo ma che mostra evoluzioni temporali notevolmente differenti a partire da una piccolissima variazione delle condizioni iniziali. In tal modo, stati iniziali arbitrariamente vicini danno luogo nel tempo a traiettorie, la cui distanza aumenta esponenzialmente in opportuni lassi di tempo. Poiché la dipendenza sensibile alle condizioni iniziali si manifesta nel caso in cui le traiettorie sull'attrattore esibiscano almeno una direzione di divergenza esponenziale, qualsiasi sistema dinamico (deterministico, aperiodico e limitato), che presenti almeno un esponente di Lyapunov positivo è definito caotico.

Per rendere il discorso più concreto, si esaminano le traiettorie caotiche di un semplice sistema.

Si tratta della *shiftmap* (fig. 22) che è definita dalla formula:

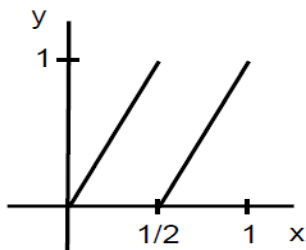
$$f(X) = 2X \pmod{1}$$

Ovvero, dato un valore  $X$  nell'intervallo  $[0, 1]$ , esso viene raddoppiato; ma se il risultato è maggiore o uguale a 1, si sottrae 1.

$$\text{In termini di funzioni: } f = \begin{cases} 2X & \text{se } 0 \leq X < \frac{1}{2} \\ 2X - 1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq X \leq 1 \end{cases}$$

Si nota che anche i valori assunti da  $f(X)$  appartengono all'intervallo  $[0, 1]$ .

**Fig. 22 – Shiftmap**



Il calcolo dell'esponente di Lyapunov per una iterazione e in media per tutte le iterazioni fornisce il seguente risultato:  $\lambda = \log |f'(X)| = \log 2 = 0,693$ .

Quindi l'orbita, che non contiene il punto  $X=1/2$  dove la derivata è indefinita e non è asintoticamente periodica<sup>9</sup>, è caotica avendo l'esponente di Lyapunov positivo ed essendo il sistema deterministico e limitato. Tuttavia, bisogna essere cauti nello stabilire il tipo di evoluzione di un sistema, perché alcune funzioni sembrano caotiche ma in realtà non lo sono, in quanto non posseggono tutte le proprietà del caos.

Si consideri, ad esempio, la mappa  $g=2X$ , che si presenta per diversi aspetti simile alla *shiftmap*.

Essa è deterministica, aperiodica (per  $X$  diverso da 0) ed è anche sensibile alle condizioni iniziali, avendo l'esponente di Lyapunov maggiore di 0 ( $g'(X)=2$  e  $\lambda=\log 2$ ). Tuttavia, è illimitata perché nelle sue iterazioni può tendere all'infinito; pertanto, la funzione non è caotica perché non gode di tutti i requisiti richiesti dalla definizione di caos.

In particolare, la serie  $g$  dopo  $n$  iterazioni diventa  $g^n = 2^n X$  (vedi par. 3) e la variazione di  $g^n$  per due punti iniziali  $X_a$  e  $X_b$  risulta:

$$\Delta g^n = g^n(X_b) - g^n(X_a) = 2^n X_b - 2^n X_a = 2^n (X_b - X_a) = 2^n \Delta X$$

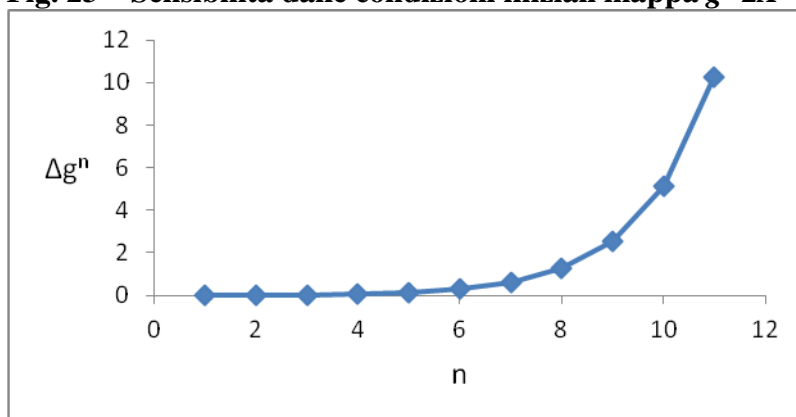
Pertanto, sia  $\Delta X$  che  $X$  subiscono la stessa legge di evoluzione di raddoppio. Per cui, a partire da  $\Delta X=0,01$  si ottiene la sequenza delle variazioni in tab.1.

**Tab. 1 – Variazioni mappa  $g=2X$**

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| 0,01 | 0,02 | 0,04 | 0,08 | 0,16 | 0,32 | 0,64 | 1,28 | 2,56 | ... |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|

Si verifica che la variazione di  $g$  a ogni iterazione raddoppia, come evidenzia anche il grafico (fig. 23).

**Fig. 23 – Sensibilità dalle condizioni iniziali mappa  $g=2X$**



<sup>9</sup> Inoltre, si può dimostrare che se il punto iniziale è un numero irrazionale (non esprimibile come frazione), come  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , l'orbita è aperiodica.

Il sistema quindi è sensibile alle condizioni iniziali ma non è caotico, in quanto le sue variazioni sono crescenti e tendono all'infinito.

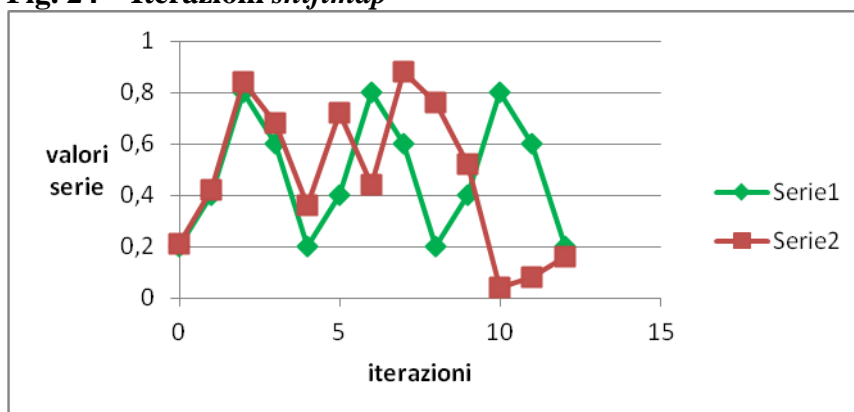
Invece, la *shiftmap*  $2X(mod 1)$ , per punti iniziali irrazionali<sup>10</sup>, è caotica perché non solo è aperiodica, deterministica, sensibile alle condizioni iniziali (anche in questo caso l'esponente di Lyapunov è pari a  $\log 2$ ) ma è anche limitata in quanto si sviluppa nell'intervallo  $[0,1]$ .

Si considerano ora per la *shiftmap* i due valori iniziali 0,2 e 0,21 in modo che differiscano di 0,01 come per la mappa lineare  $g$ . Si calcolano le iterazioni per 0,2 e 0,21 e il valore assoluto della loro differenza come in tab. 2 e in fig. 24, da cui si nota che le traiettorie inizialmente vicine, tendono a divergere per un certo tempo e in seguito mostrano un comportamento irregolare.

**Tab. 2 – Calcolo iterazioni *shiftmap***

| iterazioni | serie 1  | serie 2  | differenze |
|------------|----------|----------|------------|
| 0          | 0,2      | 0,21     | 0,0100     |
| 1          | 0,400000 | 0,420000 | 0,0200     |
| 2          | 0,799999 | 0,839999 | 0,0400     |
| 3          | 0,599998 | 0,679997 | 0,0800     |
| 4          | 0,199995 | 0,359994 | 0,1600     |
| 5          | 0,399989 | 0,719988 | 0,3200     |
| 6          | 0,799978 | 0,439976 | 0,3600     |
| 7          | 0,599954 | 0,879951 | 0,2800     |
| 8          | 0,199908 | 0,759901 | 0,5600     |
| 9          | 0,399816 | 0,519801 | 0,1200     |
| 10         | 0,799632 | 0,039602 | 0,7600     |
| 11         | 0,599263 | 0,079204 | 0,5201     |

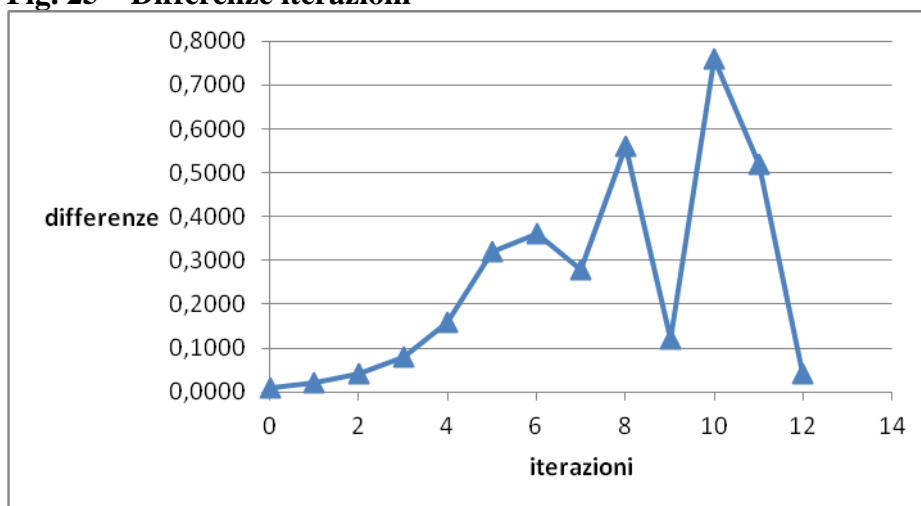
**Fig. 24 – Iterazioni *shiftmap***



<sup>10</sup> Ogni numero irrazionale (cioè decimale, aperiodico come  $\sqrt{2}/2$ ) viene approssimato dal computer con un numero finito di cifre decimali; quindi, la *shiftmap*, elaborata dal computer a partire da qualsiasi punto iniziale, non può essere caotica. Per ovviare a questo problema, si è usato lo stratagemma di trasformare la mappa  $2X(mod 1)$  in  $1,999999 X (mod 1)$ . In tal modo, ci saranno tanti numeri decimali iniziali che renderanno la mappa caotica.

Questo aspetto è più evidente, osservando il diagramma delle differenze in valore assoluto (fig. 25), le quali rispettano la legge del (quasi) raddoppio per un certo tempo e poi formano oscillazioni irregolari. Ciò accade perché due punti vicinissimi tendono a seguire la stessa legge di iterazione (cioè  $1,999999X$  oppure  $1,999999X-1$ )<sup>11</sup> e le variazioni per ogni *step* vengono moltiplicate solo per 1,999999. Infatti, i valori delle differenze in tab. 2 raddoppiano (quasi) fino al passo 5.

**Fig. 25 – Differenze iterazioni**



Appena le differenze cominciano a crescere sufficientemente, si presentano dei casi in cui le due serie seguono relazioni diverse e producono uno sconvolgimento delle variazioni nel tempo, come avviene dallo *step* 6 in poi.

In definitiva, i due sistemi esaminati, entrambi sensibili alle condizioni iniziali, presentano una divergenza che nella mappa lineare continua all'infinito, mentre nella serie caotica dura per un tempo finito. Tale conclusione mette in luce la differenza tra la prevedibilità a lungo termine dei sistemi lineari e quella a breve termine per i sistemi non lineari.

## 8. La teoria del caos nelle serie storiche: concetti preliminari

Dopo aver studiato semplici equazioni che danno luogo a comportamenti caotici, adesso si cercherà di risalire all'andamento caotico di un sistema a partire dai dati che lo descrivono. In particolare, si rivolgerà l'attenzione all'analisi di serie storiche che rappresenta uno dei settori di maggiore applicazione della teoria del caos. Esempi di analisi di serie storiche, studiate con tecniche non lineari, provengono da diversi ambiti:

<sup>11</sup>In particolare:  $1,999999 X_b - 1,999999 X_a = 1,999999(X_b - X_a)$  oppure  $(1,999999 X_b - 1) - (1,999999 X_a - 1) = 1,999999(X_b - X_a)$ .



fisica (Chirikov 1979; Matsumoto *et al.* 1984; Moon, 1992; Madan, 1993), matematica (May 1976; Rössler 1976 e 1979; Devaney 1989), chimica (Roux *et al.* 1980), meteorologia (Lorenz, 1963; Nicolis *et al.*, 1987; K. Fraedrich, 1986; Essex *et al.*, 1987), astronomia (Wisdom, 1987), finanza (Peters, 1991; DeCoster *et al.*, 1992), biologia (Beddington *et al.* 1975), medicina (Babloyantz, 1985; Chialvo e Jalife, 1987;), e scienze sociali (Berry e Kim, 1996; McBurnett 1996a, 1996b; Guastello 1998, 2005, 2011).

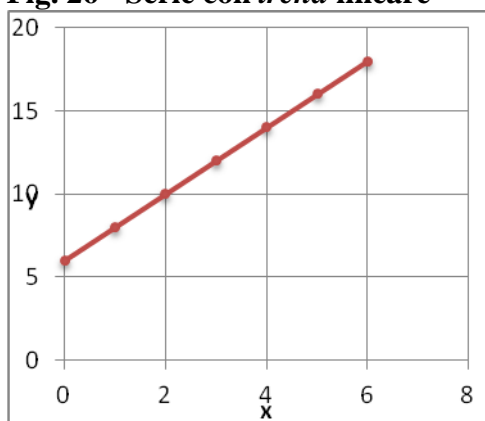
In generale, l'utilizzo di tecniche di analisi non lineare è finalizzato a:

- comprendere la dinamica del sistema;
- rilevare l'eventuale presenza di determinismo tra numerosi dati;
- fornire previsioni a breve termine;
- capire in quali casi non è possibile fare previsioni di lungo termine;
- estrarre il determinismo tra dati rumorosi.

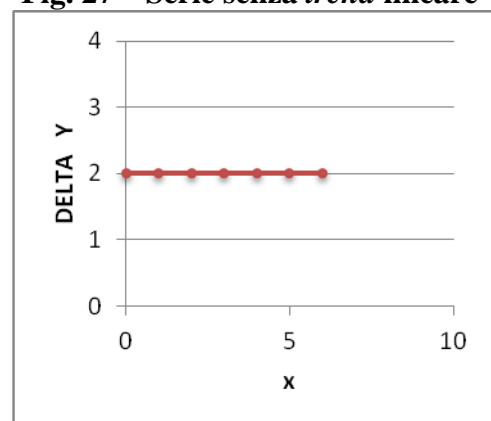
### 8.1 Stazionarietà di una serie storica e analisi di Fourier

Per usare alcune tecniche di analisi è necessario avvalersi di serie stazionarie, cioè serie in cui media e deviazione standard sono costanti in uguali intervalli di tempo. Questa stazionarietà è detta debole ma sufficiente per utilizzare le tecniche di tipo caotico (Sprott, 2003). Una serie non stazionaria può diventare stazionaria, eliminando il *trend* che rappresenta l'andamento medio dei dati (*ibidem*). Se il *trend* è lineare, per sopprimerlo, basta sottrarre da ogni dato il precedente. In fig. 26 si rappresenta, ad esempio, una successione dei valori (y) 6, 8, 10, 12... in funzione del tempo (X). Sottraendo da ogni valore il precedente (8-6; 10-8...) si ottiene una serie stazionaria con ordinata pari a 2 (fig. 27).

**Fig. 26 - Serie con *trend* lineare**



**Fig. 27 – Serie senza *trend* lineare**

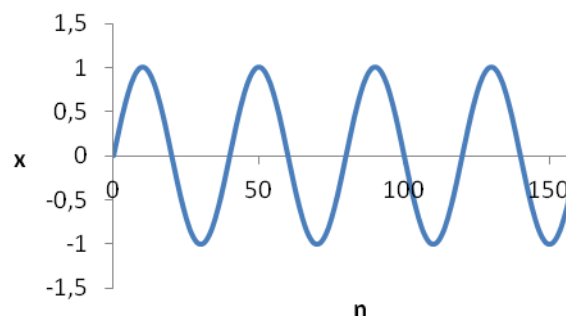


Un altro metodo per detrendizzare consiste nel rimuovere la retta dei minimi quadrati dai dati, mentre per un *trend* polinomiale (cioè espresso da un polinomio) si può eliminare dalla serie il *fit* polinomiale corrispondente dei minimi quadrati.

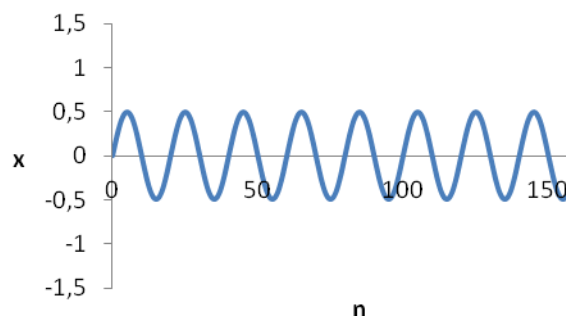
Inoltre, le serie stazionarie si prestano bene all'analisi di Fourier che costituisce uno strumento utile per distinguere il caos dalla periodicità (Newland, 1993).

Con questa tecnica un segnale periodico può essere scomposto in componenti di Fourier (sinusoidali e cosinusoidali) le cui frequenze sono multiple di quella del segnale. In figg. 28 e 29 si rappresentano, per esempio, due funzioni *seno* di periodi 40 e 20 e frequenze  $1/40$  e  $1/20$ , perchè il periodo, cioè durata di un'oscillazione, è l'inverso della frequenza ovvero il numero di oscillazioni per unità di tempo. In fig. 30 è riportato il grafico della somma delle suddette funzioni, anch'essa periodica.

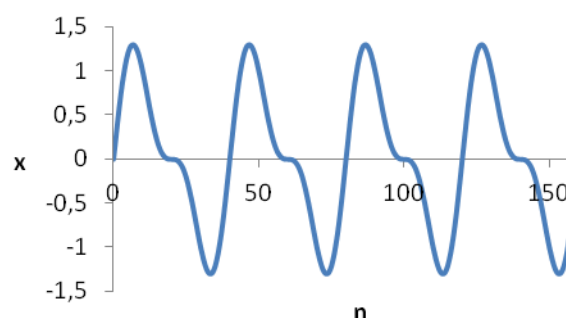
**Fig. 28 – Funzione seno freq. 1/40**



**Fig.29 – Funzione seno freq. 1/20**

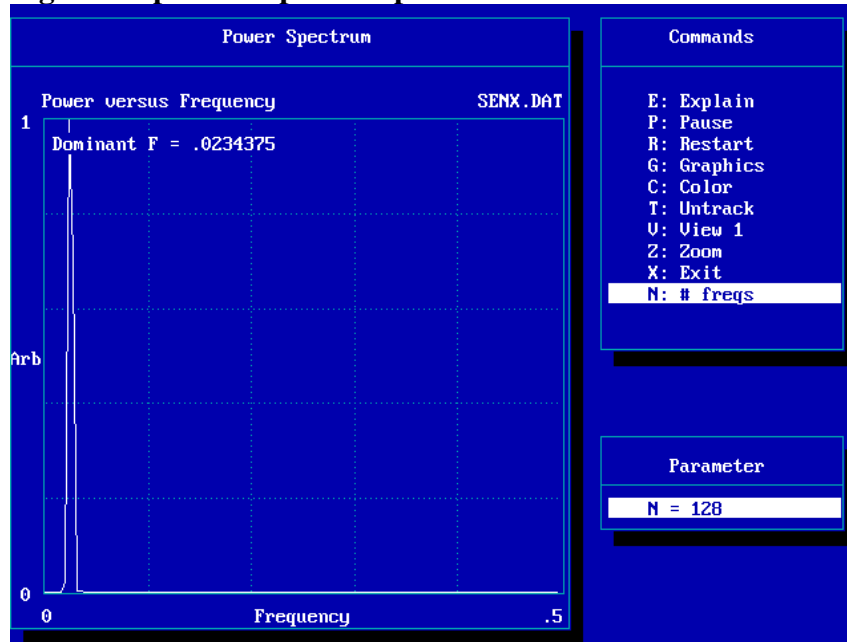


**Fig. 30 - Somma funzioni**

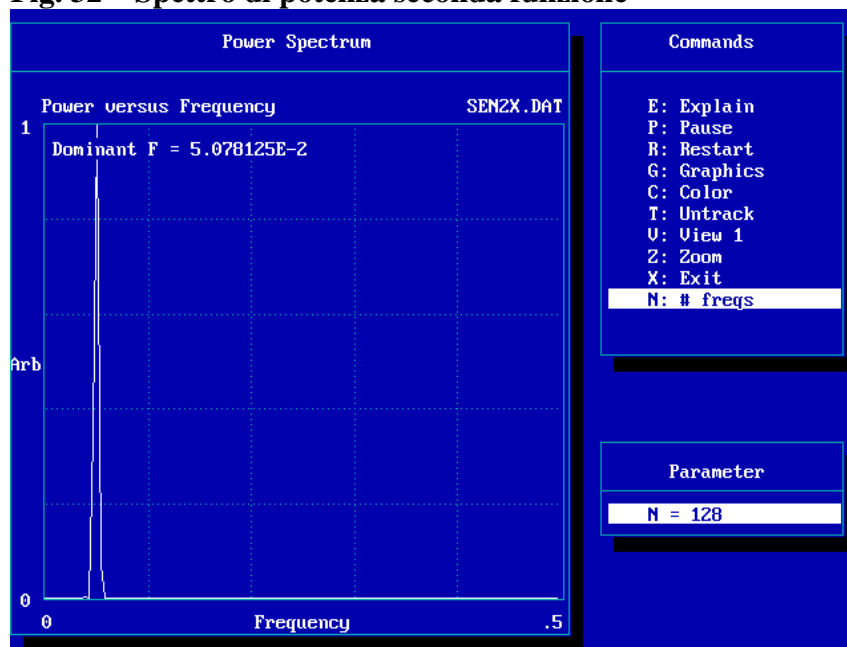


L'analisi di Fourier mostra che la prima funzione, essendo caratterizzata da una sola frequenza, ha un solo picco (fig. 31). Lo stesso vale per la seconda funzione con la differenza che il picco è contraddistinto da una frequenza doppia (fig.32).

**Fig. 31 – Spettro di potenza prima funzione**

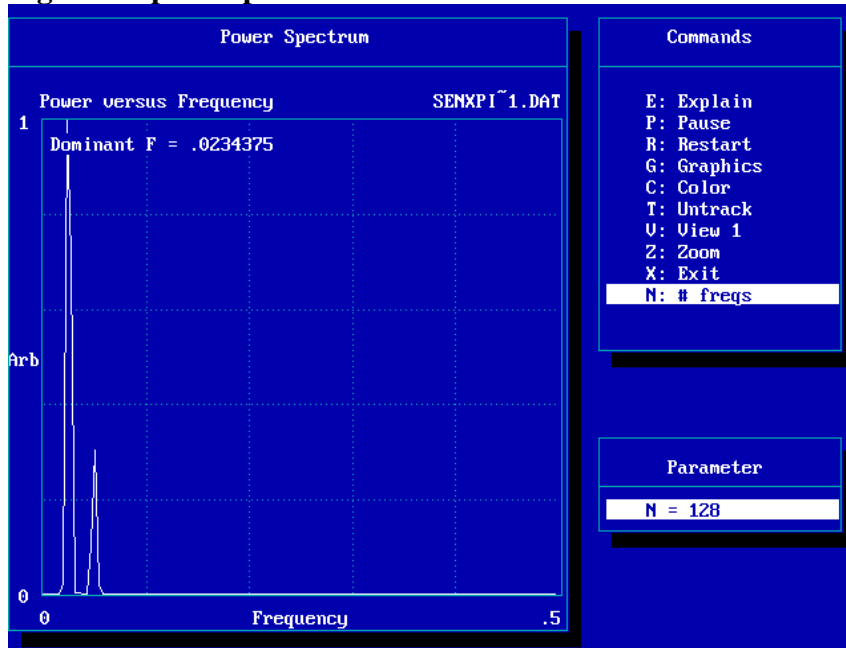


**Fig. 32 – Spettro di potenza seconda funzione**



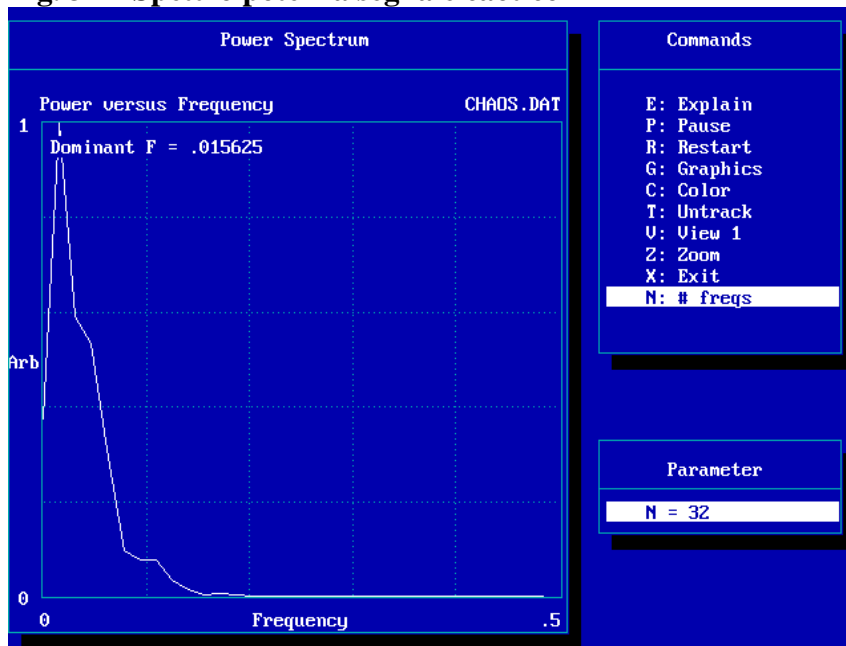
Lo spettro di potenza dell'ultimo segnale (fig.33), in corrispondenza di due picchi, rivela le frequenze delle sue due componenti.

**Fig. 33 – Spettro potenza somma funzioni**



In generale, l'analisi di Fourier permette di scorgere la periodicità di un sistema attraverso lo spettro di potenza che mostra picchi a una frequenza minima, detta fondamentale, e a frequenze multiple della fondamentale. Per ricavare il periodo del segnale, basta effettuare l'inverso della frequenza fondamentale. Mentre un segnale periodico, come si è detto, presenta picchi egualmente intervallati, lo spettro di potenza di una serie caotica, essendo aperiodica, mostra qualche picco su una base continua (fig. 34).

**Fig. 34 – Spettro potenza segnale caotico**



Infine, c'è da precisare che anche i segnali casuali mostrano uno spettro continuo per cui l'analisi di Fourier non è utile per distinguere il caos dal rumore.

Nell'ambito delle scienze sociali è nota la ricerca di McBurnett (1996a, 1996b) che ha utilizzato l'analisi di Fourier per uno studio dell'opinione pubblica americana durante il periodo elettorale, rintracciando le frequenze di oscillazione nella popolarità dei candidati politici.

## **8.2 La formazione dei vettori nell'analisi delle serie storiche**

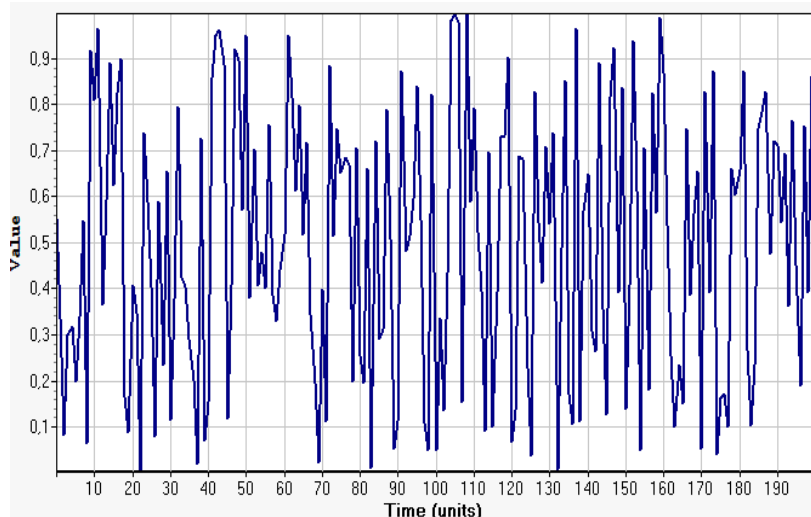
Generalmente l'analisi non lineare delle serie storiche avviene costruendo dei vettori, formati dai dati. Si utilizza questa procedura perché, come verrà approfondito in seguito, per riconoscere la struttura del sistema e identificare l'eventuale presenza di un attrattore, è necessario collocarsi nella giusta dimensione (Hilborn, 1994; Sprott, 2003). L'attrattore infatti, che mette in luce il determinismo nascosto dei dati, non emerge immediatamente e deve essere costruito. L'individuazione dei vettori dipende dalla dimensione di *embedding* e dal tempo di ritardo. La prima fornisce il numero di componenti che formano il vettore e si calcola con il metodo dei falsi vicini, mentre il tempo di ritardo indica dopo quanti elementi si seleziona la componente successiva e si calcola con la funzione di autocorrelazione o con la mutua informazione (Brock e Potter, 1992; Kantz e Schreiber, 1997; Sprott, 2003). Ad esempio, data la sequenza di valori che compongono la serie 3, 5, 6, 9, 4, 11, 15, 18, 23... con dimensione di *embedding* pari a 3 e tempo di ritardo uguale a 2, il primo vettore sarà formato da (3, 6, 4) il secondo da (5, 9, 11) e così via.

Si approfondiscono adesso i concetti appena descritti che rappresentano il fulcro dell'analisi delle serie caotiche.

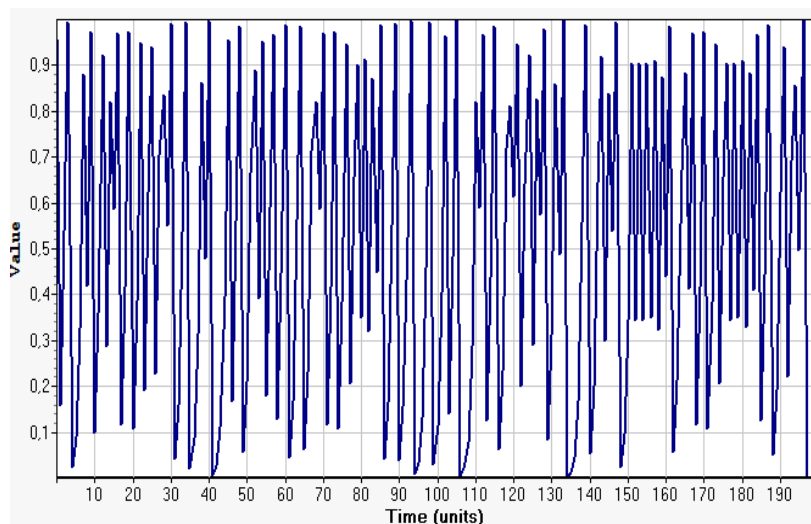
### **8.2.1 Spazio delle fasi e dimensione di *embedding***

Si considerino i diagrammi temporali di due serie in figg. 35 e 36: essi sembrano ambedue casuali.

**Fig. 35 – Diagramma temporale serie uno**



**Fig. 36 – Diagramma temporale serie due**

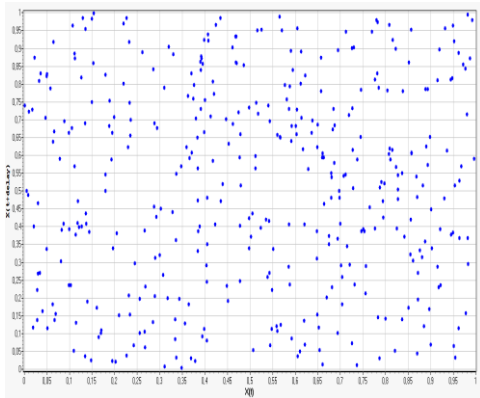


Tuttavia, se rappresentiamo un dato  $X_{n+1}$  di ciascuna serie in funzione del precedente  $X_n$ , si comprenderà la natura dei due sistemi. Infatti, il primo appare *random* (fig. 37), mentre il secondo ha una struttura regolare a forma parabolica<sup>12</sup> (fig. 38), che evidenzia una relazione tra un dato e il successivo e quindi la presenza di determinismo tra le coordinate dei punti  $(X_n, X_{n+1})$ , per cui i vettori della serie sono composti da due componenti.

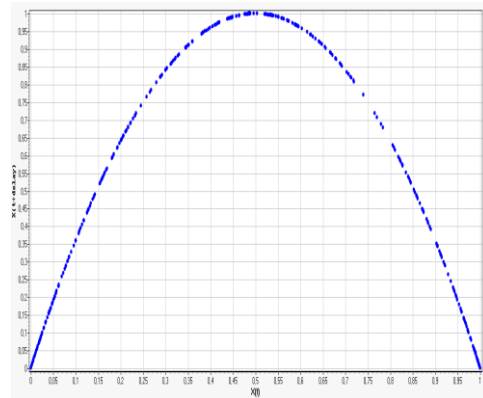
---

<sup>12</sup> Quest'ultimo è la rappresentazione nello spazio delle fasi della mappa  $X_{n+1} = 4 X_n (1 - X_n)$ .

**Fig.37 – Spazio fasi serie casuale**



**Fig.38 – Spazio fasi serie deterministica**



In altre situazioni il dato può essere legato, ad esempio, ai due precedenti, per cui i vettori saranno formati da tre componenti.

In generale, per riconoscere l'assetto del sistema e l'esistenza di un attrattore, bisogna immergere il sistema in uno spazio avente un numero adeguato  $m$  di componenti, detto spazio delle fasi o degli stati, dove  $m$  è la dimensione di *embedding*. Essa rappresenta quindi la giusta dimensione dello spazio da cui osservare l'immagine dell'attrattore che conserva le stesse proprietà geometriche e dinamiche dell'attrattore stesso<sup>13</sup>.

Ad esempio, il rettangolo in fig. 39a, se osservato da una linea non sarà visto nella sua reale dimensione e sembrerà un segmento; guardandolo dal piano, invece, apparirà nella sua dimensione esatta. Lo stesso procedimento vale per l'attrattore che chiaramente non ha una configurazione così semplice come quella del rettangolo.

**Fig. 39a – Dimensione reale**



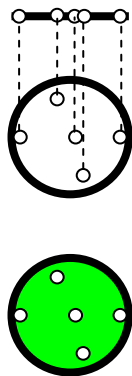
In realtà, la condizione sui valori di  $m$  è un po' più restrittiva, perché, secondo il teorema di Takens (1981),  $m$  deve essere non inferiore a  $2D+1$ , dove  $D$  è la dimensione dell'attrattore. Tuttavia, in diversi casi sono consentiti anche  $m > D$ .

E' importante precisare che non conviene aumentare la dimensione di *embedding* perché in tal modo crescerebbe anche la dispersione e il rumore dei dati. Inoltre, come si vedrà, la previsione richiede sufficienti punti con valori vicini a quello corrente e il

<sup>13</sup> Le proprietà geometriche e dinamiche dell'attrattore sono espresse rispettivamente dalla dimensione di correlazione e dagli esponenti di Lyapunov.

numero di tali punti decresce innalzando la dimensione di *embedding*, in quanto è più difficile avere vettori uguali incrementando il numero delle loro componenti. Pertanto, per vedere l'attrattore è necessaria la minima dimensione di *embedding* che si calcola con il metodo dei falsi vicini (Kennel *et al.*, 1992). Un esempio intuitivo del concetto dei falsi vicini si può avere osservando il cerchio in fig. 39b: i punti del cerchio, se proiettati sul segmento (dimensione=1), possono apparire più vicini, mentre dal piano (dimensione=2) e dallo spazio (dimensione=3) vengono considerati alla giusta distanza. Il più piccolo valore di  $m$  che minimizza i falsi vicini, in questo caso 2, è la minima dimensione di *embedding*.

**Fig. 39b – Punti falsi vicini di un cerchio**



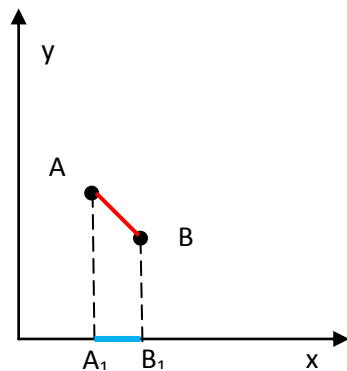
In modo più specifico, dati due punti, si calcolano le loro distanze  $A_1 B_1$  e  $AB$  osservandoli rispettivamente da una retta (dimensione 1) e dal piano (dimensione 2) (figg. 40-41). Si suppone che i punti siano vicini nella dimensione 1, cioè che la distanza  $A_1 B_1$  sia piccola. Essi saranno ancora vicini nella dimensione 2? Sicuramente  $AB$  è maggiore o uguale ad  $A_1 B_1$ , ma:

- se  $AB$  è leggermente maggiore di  $A_1 B_1$ , i punti si possono ancora ritenere vicini (fig. 40);
- se  $AB$  è sufficientemente<sup>14</sup> più grande di  $A_1 B_1$ , vuol dire che i punti non sono realmente vicini e alla dimensione 1 sono dei falsi vicini (fig. 41).

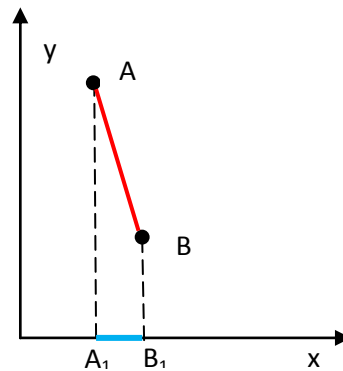
<sup>14</sup> In genere si assume  $AB > 15 A_1 B_1$  (Abarbanel, 1996).



**Fig. 40 – Punti realmente vicini**



**Fig. 41 – Falsi vicini**



Questo procedimento si applica a tutti i punti della serie e consente di calcolare la percentuale dei falsi vicini rispetto al totale. Si itera il procedimento andando dalla dimensione 2 a 3, da 3 a 4 e, così continuando, fino alla dimensione  $m$ , a cui corrisponde l'annullamento di tutti i falsi vicini. Replicando l'operazione, per dimensioni maggiori di  $m$ , i falsi vicini continueranno a essere nulli. Ciò indica che i punti considerati vicini nella dimensione  $m$ , sono tali anche nelle dimensioni di *embedding* successive e ciò garantisce che i punti siano realmente vicini. La dimensione  $m$  è detta dimensione minima di *embedding*. Se però con il procedimento delineato non si annullano o almeno non si minimizzano i falsi vicini, vuol dire che non si può individuare la dimensione da cui osservare l'attrattore.

### 8.2.2 La funzione di autocorrelazione e mutua informazione

Il tempo di ritardo si ottiene usando la funzione di autocorrelazione o la mutua informazione (Sprott, 2003).

La funzione di autocorrelazione  $C_l(k)$  è la misura dell'intensità media della correlazione di ogni punto della serie di valore medio  $\bar{x}$  con un altro  $k$  volte più avanti. Essa<sup>15</sup> diminuisce da 1 per  $k=0$  a 0 per  $k \gg 1$ . Quindi, la correlazione di un punto con sé stesso, cioè con  $k=0$ , sarà massima, cioè uguale a 1, mentre per punti distanti, cioè  $k \gg 1$ , la correlazione tende a svanire. In generale, il valore di  $k$  per cui la funzione diventa 0,37 è definito tempo di correlazione  $T_c$ . Per le serie periodiche la funzione è rappresentata da

---

<sup>15</sup> L'autocorrelazione si calcola con la formula: 
$$C_l(k) = \frac{\sum_n (x_{n+k} - \bar{x})(x_n - \bar{x})}{\sum_n (x_n - \bar{x})^2}$$
 da cui deriva che per  $k=0$ ,  $C_l(0) = 1$

oscillazioni il cui decadimento iniziale a 0,37 fornisce il tempo di correlazione. Questo tempo è utile per stabilire il ritardo tra due componenti della serie che offrono informazioni diverse ma ancora correlate. Dato che  $T_c$  riferisce fino a quanto tempo due dati sono correlati, il suo inverso  $1/T_c$  è legato al più grande esponente di Lyapunov; ovvero, se i dati sono legati per un tempo maggiore, il sistema sarà prevedibile per un tempo più lungo e la sensibilità dalle condizioni iniziali, espressa dall'esponente di Lyapunov, sarà minore.

Un altro modo per trovare il tempo di ritardo  $T$  delle componenti dei vettori che compongono la serie è il calcolo della mutua informazione<sup>16</sup> tra i dati. Il valore di  $T$  non deve essere né troppo piccolo, altrimenti due dati contigui fornirebbero contributi quasi identici, né troppo grande altrimenti tra i dati si perderebbe qualsiasi relazione e si rischia di lavorare su una serie casuale. Per cui si sceglie  $T$  che conserva il legame tra i dati in corrispondenza del primo minimo della mutua informazione media, in modo che l'informazione tra i vettori della serie non sia né massima né nulla. Per le serie caotiche si preferisce calcolare il tempo di ritardo con la mutua informazione, anziché con la funzione di autocorrelazione lineare perché è sconsigliabile valutare il caos generato da funzioni non lineari con una grandezza, come l'autocorrelazione, che ha natura lineare (Abarbanel, 1996).

### 8.3 Il massimo esponente di Lyapunov per le serie storiche

Il procedimento indicato per il calcolo del massimo esponente di Lyapunov dei sistemi teorici caotici a più variabili deve essere leggermente modificato per le serie storiche (Eckman *et al.*, 1986; Bryant *et al.*, 1990; Sprott, 2003).

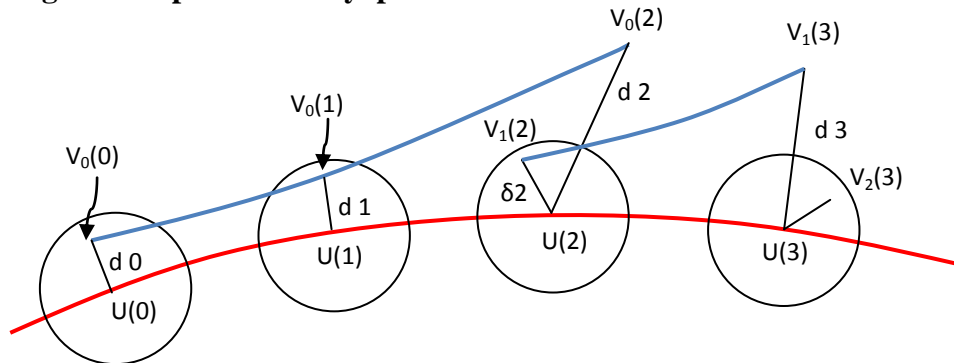
Dopo aver costruito i vettori della serie con la dimensione di *embedding* e il tempo di ritardo appropriati, si sceglie una traiettoria imperturbata rappresentata dai vettori  $U(0)$ ,  $U(1)$ ,  $U(2)$ ,  $U(3)$ ... nei tempi 0, 1, 2, 3... (fig. 42). In una sfera a più dimensioni, detta ipersfera, di raggio  $r$  piccolo e centrata su  $U(0)$ , si seleziona un punto perturbato  $V_0(0)$ ,

---

<sup>16</sup> La mutua informazione media è:  $i(T) = \sum_n P(x_n, x_{n+T}) \log_2 \frac{P(x_n, x_{n+T})}{P(x_n) P(x_{n+T})}$  dove  $P(x_n)$  è la probabilità della misura  $x_n$ ,  $P(x_{n+T})$  è la probabilità della misura  $x_{n+T}$  e  $P(x_n, x_{n+T})$  è la probabilità congiunta di  $(x_n, x_{n+T})$ . Quando  $x_n$  e  $x_{n+T}$  sono indipendenti, la probabilità congiunta è il prodotto delle probabilità dei due eventi, per cui l'argomento del logaritmo diventa 1 e  $i(T)$  si annulla, comprovando che non c'è mutua informazione tra i dati. D'altra parte quando  $x_n$  e  $x_{n+T}$  sono uguali, il valore di  $i(T)$  diventa massimo, rilevando, quindi, la più grande mutua informazione tra i dati.

a distanza  $d_0$  da  $U(0)$ , e sia  $V_0(1)$  il successivo, distante  $d_1$  da  $U(1)$ . Si calcola l'esponente di Lyapunov provvisorio con la procedura già illustrata:  $\lambda_1 = \log(d_1/d_0)$ .

**Fig. 42 – Esponente di Lyapunov serie storiche**



Si deve ora mantenere la direzione di  $d_1$  per consentire l'orientamento verso la massima espansione e contenere  $d_1$  per evitare vistosi effetti non lineari. Non si può imporre di partire sempre da  $d_0$  nella direzione di  $d_1$ , come si è proceduto per le mappe teoriche (par. 5), perché i punti iniziali dell'iterazione sono soltanto quelli della serie che non sempre sono disponibili nella posizione voluta. Se  $d_1$  è contenuta nell'ipersfera, si può continuare con un'altra iterazione sull'orbita perturbata  $V_0$ , spostandosi a  $V_0(2)$ , distante  $d_2$  da  $U(2)$ . Si ricava il successivo valore  $\lambda_2 = \log(d_2/d_1)$ . Poiché  $V_0(2)$  non appartiene all'ipersfera, si sceglie un altro punto interno o vicinissimo ad essa, nella direzione più prossima a  $d_2$ . Sia  $V_1(2)$  il vettore perturbato della nuova orbita  $V_1$  distante  $\delta_2$  da  $U(2)$ ; dopo un altro *step* si giunge  $V_1(3)$ , distante  $d_3$  da  $U(3)$ . Si calcola  $\lambda_3 = \log(d_3/\delta_2)$ . Si prosegue allo stesso modo su tutta la traiettoria e si calcola la media dei  $\lambda_i$  per ottenere gli esponenti di Lyapunov su quel percorso. Occorre tener presente che i punti nell'ipersfera non devono essere vicinissimi all'orbita imperturbata in presenza di dati rumorosi, per evitare che gli esponenti riflettano soprattutto il contributo degli effetti casuali (Wolf *et al.*, 1985).

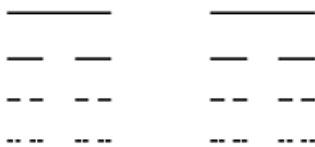
#### 8.4 La dimensione dell'attrattore

La presenza di un attrattore caotico viene rivelata stimando la sua dimensione con opportuni procedimenti. La dimensione di Kaplan-Yorke (Kaplan e Yorke, 1979) è una misura della dimensione dell'attrattore, però il suo calcolo richiede lo spettro di tutti gli

esponenti di Lyapunov della serie che è difficile determinare<sup>17</sup>. Si indicano, quindi, altri modi per calcolare la dimensione dell'attrattore per serie storiche (Sprott, 2003):

- **dimensione di similarità:** spesso l'attrattore caotico (almeno un esponente di Lyapunov positivo) è anche strano, cioè ha struttura frattale ovvero ha dimensione non intera (Peitgen *et al.*, 2004). Un frattale ha una configurazione somigliante a tutte le scale, per cui la forma presente in una sua certa parte si ripete al suo interno infinite volte. Uno dei frattali più conosciuti è quello di Cantor che si costruisce dividendo un segmento in tre parti uguali e sopprimendo quella centrale (fig. 43). Quest'operazione viene ripetuta per tutti i segmenti successivi, ottenendo quella che si chiama polvere di Cantor.

**Fig. 43 – Polvere di Cantor**



La dimensione di similarità si calcola seguendo il procedimento costruttivo, cioè ad ogni *step* ciascun segmento viene diviso in tre parti uguali, prendendo soltanto le due laterali. Per ottenere le parti  $N=2$  che restano sul totale  $R=3$ , si può scrivere  $2 = 3^{\log_3 2}$ .

Poiché la dimensione di similarità  $D_s$  è definita dalla relazione  $N=R^{D_s}$ , cioè

$$2=3^{D_s}, \text{ si ha } D_s = \log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,63. \text{ La dimensione } D_s \text{ è l'esponente da}$$

da 3, numero di divisioni, per ottenere 2, numero di parti. Dunque  $D_s$  risulta

<sup>17</sup> Per calcolare la dimensione di Kaplan-Yorke dell'attrattore, si ordinano gli esponenti di Lyapunov in senso decrescente:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Il più grande indice  $D$  per cui  $S = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_D \geq 0$  è la dimensione topologica dell'insieme. La dimensione di Kaplan-Yorke è:  $D_{KY} = D + \frac{S}{|\lambda_{D+1}|}$ . Ad esempio:

- nello spazio un punto di equilibrio stabile ha i tre esponenti di Lyapunov negativi e quindi, non esistendo  $S$ , si pone  $D=0$  e  $D_{KY}=0$ ;
- un ciclo limite ha  $\lambda_1=0$  lungo il flusso, perché in questa direzione il sistema non si espande e non si contrae, invece  $\lambda_2<0$  e  $\lambda_3<0$ , perché nelle direzioni ortogonali alla curva il sistema si contrae, quindi  $S = \lambda_1=0$  da cui  $D=1$  e  $D_{KY} = 1$ ;
- un attrattore caotico continua ad avere  $D$  intera, ma  $D_{KY}$  risulta non intera a causa del termine

$$\frac{S}{|\lambda_{D+1}|}. \text{ L'attrattore di Lorenz ha } \lambda_1 = 0,9056, \lambda_2=0, \lambda_3 = -14,5723 \text{ e pertanto } S = \lambda_1 + \lambda_2 = 0,9056$$

$$\text{da cui } D=2 \text{ e } D_{KY} = 2 + \frac{S}{|\lambda_3|} = 2,06215.$$

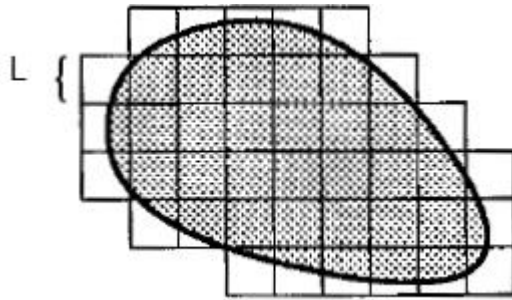
non intera per cui l'insieme è frattale ed è compresa tra 0 e 1 perché la polvere di Cantor è intermedia tra il punto (dimensione 0) e la linea (dimensione 1).

Generalizzando la formula, si ha  $D_s = \frac{\log N}{\log R}$  dove vengono acquisite  $N$  parti su

$R$  porzioni lineari;

- **dimensione di capacità:** se l'oggetto non è autosimilare si può calcolare la dimensione di capacità  $D_c$ ; per esempio, un insieme nel piano si può coprire con un numero minimo di quadratini  $N$  di lato  $L$  (fig. 44). Prendendo  $L$  sempre più piccolo, si ricava<sup>18</sup>  $D_c$  con la formula  $D_c = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log (1/L)}$  simile alla precedente. Per uno spazio a  $m$  dimensioni, invece dei quadratini il sistema viene incluso in ipercubi a  $m$  dimensioni;

**Fig. 44 – Numero minimo di quadratini**

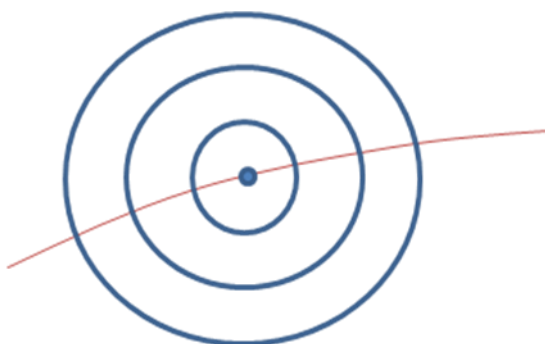


- **dimensione di correlazione:** la dimensione di correlazione (Grasseberger e Procaccia, 1983), che sarà usata nell'applicazione del terzo capitolo, è più facile da calcolare e fornisce valori più accurati della dimensione di capacità. Nello specifico, data una sfera di raggio  $r$  (sufficientemente piccolo) in uno spazio a più dimensioni, la frazione dei punti dell'attrattore nella sfera è proporzionale ad  $r$  elevato alla dimensione dell'attrattore, dove  $A$  è una costante, cioè:  $C(r) = Ar^D$ .

Ad esempio, in una successione  $F$  lineare, uniforme e densa di punti, il numero dei punti di  $F$  entro i cerchi disegnati è proporzionale alla lunghezza del raggio, per cui  $C(r) = Ar$  e dunque la dimensione di  $F$  è pari a 1 (fig. 45).

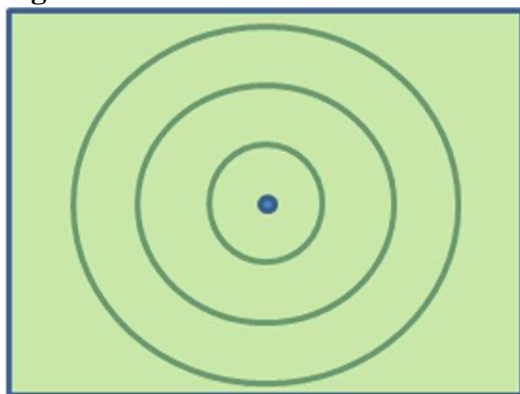
<sup>18</sup> Dato che il numero dei quadratini  $N$  deve essere inversamente proporzionale a  $L^{D_c}$  (cioè  $N$  aumenta quando diminuisce il lato), si ha  $N = \text{Costante}(1/L)^{D_c}$ . Per cui  $\log N - \log(\text{Costante}) = D_c \log(1/L)$  e con  $N$  molto grande, il  $\log(\text{Costante})$ , essendo trascurabile rispetto a  $\log N$ , si elimina.

**Fig. 45 – Insieme di dimensione 1**



Invece, il numero dei punti uniformemente distribuiti nel piano, che capitano entro il cerchio, sarà proporzionale all'area del cerchio, da cui  $C(r) = Ar^2$  e perciò la dimensione dell'attrattore è pari a 2 (fig. 46).

**Fig. 46 – Insieme di dimensione 2**



In generale, per un'orbita  $S$  di molti valori  $V_i$ , si determina la funzione di correlazione  $C(r)$  come il numero di coppie di punti entro la distanza  $r$  rispetto al numero di coppie totali che si traduce in:

$$C(r) = \frac{\text{numero coppie } (V_i; V_j) \text{ in } S \text{ con distanza minore di } r}{\text{numero coppie in } S}$$

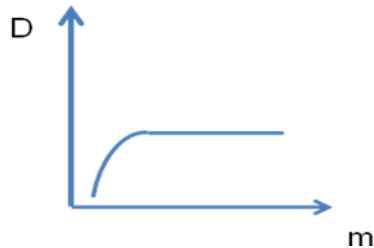
L'insieme ha dimensione  $D_2$  se, per  $r$  esiguo,  $C(r)$  varia secondo la legge di potenza

$C(r) = Ar^{D_2}$  e quindi  $\log C = \log A + D_2 \log r$  rappresenta una relazione di linearità. Il coefficiente angolare  $D_2$  della retta  $\log C$  in funzione del  $\log r$  fornisce la dimensione di correlazione. Il pedice 2 in  $D_2$  ricorda che il calcolo viene effettuato su coppie di valori.

Poi, la dimensione di correlazione viene calcolata per dimensioni di *embedding* crescenti. L'eventuale stabilizzazione della dimensione di correlazione

all'aumentare della dimensione di *embedding*, indica la presenza di un attrattore (fig. 47).

**Fig. 47 – Saturazione della dimensione di correlazione**



### **8.5 La previsione a breve termine**

Una volta rilevata la presenza dell'attrattore e calcolati la minima dimensione di *embedding* e il tempo di ritardo, si possono formare i vettori ritardati e tentare la previsione di breve periodo. Un aspetto importante riguarda la distinzione tra previsione lineare e quella non lineare. Con la prima si calcolano i valori delle serie attraverso una combinazione lineare di valori precedenti e di rumori ma, se applicata a una serie caotica, fornisce dei risultati che tendono al valore medio dei dati. La conseguenza è che le previsioni lineari sono inadatte per i dati caotici poiché le equazioni lineari non producono caos. Invece, con una procedura non lineare si cercano valori quasi uguali all'ultimo della serie per replicare i successivi, in quanto, data la presenza di determinismo, le evoluzioni di valori quasi identici differiscono poco in tempi sufficientemente brevi (Brock e Potter, 1992; Sprott, 2003). La previsione può essere poi migliorata, mediando su *clusters* di valori vicini. Per controllare la bontà dei risultati, si confrontano gli ultimi dati della serie con quelli previsti.

Con questo metodo per i sistemi caotici si ottengono risultati più adeguati delle previsioni lineari. Le previsioni, essendo sensibili alle condizioni iniziali, sono possibili a breve termine a seconda del valore dell'esponente di Lyapunov. I risultati sono più scadenti nei sistemi a più alta dimensione, perché in questo caso diventa difficile trovare dei vettori uguali. Infine, la natura caotica di una serie, se da una parte permette la previsione nel breve periodo, dall'altra indica l'impossibilità di poterla attuare in tempi più lunghi.

## 9. La non linearità nella elaborazione di modelli matematici

Oltre all'analisi delle serie storiche, un altro uso della teoria del caos e, più in generale della non linearità, riguarda la formulazione di modelli matematici. Alcune applicazioni si basano su modelli di tipo discreto elaborati con le nozioni già approfondite all'inizio di questo capitolo; altre adottano modelli di tipo continuo che descrivono la dinamica di un fenomeno e i suoi cambiamenti in un tempo continuo, avvalendosi principalmente di alcuni concetti fondamentali per la determinazione del caos, cioè gli equilibri stabile e instabile. Nella parte conclusiva di questo capitolo si affrontano dunque alcune nozioni teoriche di non linearità<sup>19</sup>, necessarie per lo sviluppo di modelli matematici di sistemi dinamici continui che sono impiegati in diversi ambiti, incluse le scienze sociali (Kiel e Elliott, 1996; Grebogi e Yorke, 1997; Enns, 2011), di cui si esaminerà qualche applicazione nel quarto capitolo.

Naturalmente la trasposizione di concetti propri della matematica in altri campi assume una valenza diversa rispetto al significato originario, perché ci si sposta da un piano ideale a uno reale. Tale passaggio è più diretto per le scienze fisiche e naturali mentre è più difficile per quelle meno formalizzate come le scienze sociali. Ecco perché è importante essere consapevoli che l'uso di modelli matematici nelle scienze sociali, prevalentemente finalizzati a tradurre delle proposizioni teoriche di un determinato fenomeno in linguaggio matematico, è un'operazione complessa, a volte infruttuosa, che comporta semplificazioni e approssimazioni.

### 9.1 Dai sistemi dinamici continui lineari a quelli non lineari

Per comprendere i sistemi non lineari continui è necessario conoscere la teoria dei sistemi lineari (Strogatz, 1994; Borgioli, 1996; Alligood *et al.*, 1997; Nicholson, 2006; Bertuglia e Vaio, 2007). Infatti, diversi risultati dei sistemi lineari valgono anche per quelli non lineari intorno agli equilibri.

Per una sola variabile si può avere un'equazione differenziale<sup>20</sup> lineare del tipo:

$$\dot{x} = \lambda x$$

dove  $\lambda$  è una costante e il punto sulla variabile  $x$  indica la derivata di  $x$  rispetto al tempo. La posizione di equilibrio per l'equazione si ha quando  $\dot{x} = 0$  e cioè per  $x = 0$ .

---

<sup>19</sup> Non viene sviluppato il caos vero e proprio, bensì solo le fasi preliminari, perché nei sistemi continui sono necessarie almeno tre variabili e il formalismo, in tal sede, diventerebbe particolarmente arduo.

<sup>20</sup> L'equazione è differenziale perché la variabile  $x$  compare anche come derivata.



La suddetta equazione può essere facilmente risolta nel seguente modo:

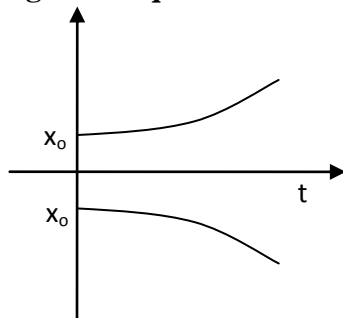
$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \lambda dt \Rightarrow$$

$$\int_0^x \frac{dx}{x} = \lambda \int_0^t dt \Rightarrow [\lg|x|]_{x_0}^x = \lambda [t]_0^t \Rightarrow \lg|x| - \lg|x_0| = \lambda t \Rightarrow \lg\left|\frac{x}{x_0}\right| = \lambda t \Rightarrow \left|\frac{x}{x_0}\right| = e^{\lambda t}$$

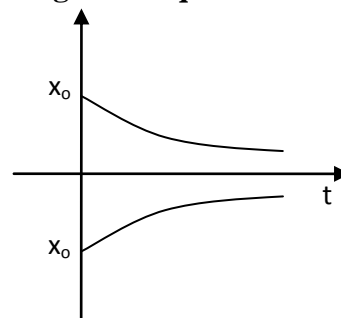
Il risultato finale è dunque  $x = x_0 e^{\lambda t}$ ; quindi:

- se  $\lambda > 0$ ,  $x$  si allontana dall'origine in modo esponenziale al trascorrere del tempo, per qualsiasi valore iniziale  $x_0$ ; dunque, il punto di equilibrio  $x=0$  è instabile (fig. 48);
- se  $\lambda < 0$ ,  $x$  converge a zero al trascorrere del tempo (fig. 49) e l'equilibrio  $x = 0$  è stabile.

**Fig. 48 – Equilibrio instabile**



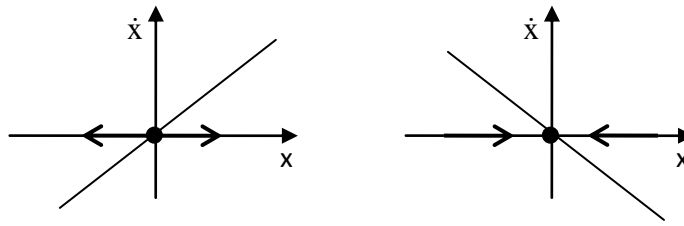
**Fig. 49 – Equilibrio stabile**



Senza risolvere l'equazione, si può rilevare direttamente la natura stabile o instabile dell'equilibrio, esaminando il segno di  $\dot{x}$ , mediante il grafico di  $\dot{x}$  in funzione di  $x$ , che in questo caso è formato dalla retta  $\dot{x} = \lambda x$  passante per l'origine. Perciò si desume che:

- quando  $\lambda > 0$ , la derivata è positiva per  $x > 0$  e negativa per  $x < 0$ . Quindi, la  $x$  è crescente per  $x > 0$  e decrescente per  $x < 0$ , come indicano le frecce sull'asse delle ascisse rispettivamente concorde e discorde al verso di  $x$  (fig. 50). Allora l'equilibrio è instabile, dato che le frecce si allontanano dall'origine;
- quando  $\lambda < 0$ , avviene una situazione inversa. Le frecce infatti sono orientate verso l'origine che, pertanto, è un punto di equilibrio stabile (fig. 51).

**Fig. 50 – Equilibrio instabile**      **Fig. 51 – Equilibrio stabile**



Si consideri ora il sistema dinamico lineare a due variabili, in cui i primi membri delle equazioni sono le derivate delle variabili rispetto al tempo e i secondi membri sono combinazioni lineari<sup>21</sup> di  $x$  ed  $y$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (1)$$

Come si è già ribadito, il punto di equilibrio si ricava imponendo l'annullamento delle derivate, cioè  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} = 0$ , che equivale a:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema si ha per  $x = 0$  e  $y = 0$  e quindi coincide con l'origine degli assi. Oltre al punto di equilibrio nel punto (0,0), si vogliono trovare le soluzioni del sistema dinamico in funzione del tempo. Come per l'equazione a una sola variabile, si cercano delle soluzioni esponenziali del tipo:

$$\begin{cases} x = ue^{\lambda t} \\ y = ve^{\lambda t} \end{cases}$$

dove  $u$  e  $v$  sono costanti. Derivando tali funzioni e sostituendole poi nel sistema iniziale (1), si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x} = u\lambda e^{\lambda t} \\ \dot{y} = v\lambda e^{\lambda t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u\lambda e^{\lambda t} = a ue^{\lambda t} + b ve^{\lambda t} \\ v\lambda e^{\lambda t} = c ue^{\lambda t} + d ve^{\lambda t} \end{cases}$$

Dividendo per  $e^{\lambda t}$  si perviene a:

$$\begin{cases} u\lambda = a u + b v \\ v\lambda = c u + d v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(a - \lambda) + b v = 0 \\ c u + v(d - \lambda) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

<sup>21</sup> I termini in  $x$  e in  $y$  sono di primo grado.

E' possibile una soluzione di tipo esponenziale se  $u$  e  $v$  soddisfano il precedente sistema. Esso ammette una soluzione "banale"  $u = v = 0$ , da cui segue che  $x = 0$  e  $y = 0$ , che è di scarso interesse.

Invece un'ulteriore soluzione si ottiene, ricavando la  $v$  dalla prima equazione e sostituendola nella seconda:  $u [(a - \lambda)(d - \lambda) - cb] = 0$

In questo caso,  $u$  è diverso da zero, se  $(a - \lambda)(d - \lambda) - cb = 0$ . (3)

Questa condizione si può ricavare direttamente dalla matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sottraendo  $\lambda$  lungo la diagonale principale e calcolando il determinante della nuova matrice

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

da cui si ha  $ad - a\lambda - \lambda d + \lambda^2 - bc = 0$ , ovvero  $\lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc = 0$

Nella matrice dei coefficienti la somma dei due elementi diagonali  $a + d$  si chiama traccia  $T$ , mentre la differenza dei prodotti degli elementi delle diagonali  $ad - bc$  è il determinante  $D$ . Per cui l'equazione appena ricavata si può scrivere in termini di traccia e determinante in questo modo

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0$$

che è la cosiddetta equazione agli autovalori, denominata così perché le due soluzioni,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , si chiamano "autovalori". Essi sono di fondamentale importanza perché, a seconda del loro valore, si determina il tipo di equilibrio.

Una volta individuati  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , il sistema (2) si può scrivere semplicemente usando il prodotto tra matrici:

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

Ponendo al posto di  $\lambda$  l'autovalore  $\lambda_1$ , si ricava a meno di un fattore la coppia  $(u_1, v_1)$ , detta autovettore, associata alla soluzione particolare. Ovvero:

$$\begin{cases} x = u_1 e^{\lambda_1 t} \\ y = v_1 e^{\lambda_1 t} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}$$

Al trascorrere del tempo si ha  $y/x = v_1/u_1$ ; perciò il punto  $(x, y)$  scorre, se  $\lambda$  è reale, lungo la retta passante per l'origine e per il punto  $(u_1, v_1)$ . Lo stesso risultato vale per  $\lambda_2$ , con l'autovettore  $(u_2, v_2)$ . Quindi

$$\begin{cases} x = u_2 e^{\lambda_2 t} \\ y = v_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

e il punto  $(x, y)$  si sposta, se  $\lambda$  è reale, sulla retta passante per l'origine e il punto di coordinate  $(u_2, v_2)$ .

In sintesi, a partire da un sistema di equazioni differenziali, gli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , calcolati attraverso l'equazione degli autovalori, rivelano la natura dell'equilibrio.

Inoltre, ci sono dei punti, le cui coordinate iniziali  $(u, v)$  sono dette autovettori, che si avvicinano o si allontanano dall'equilibrio in modo rettilineo, se  $\lambda$  è reale. Tali rette rappresentano una guida per comprendere la forma delle altre traiettorie e, più in generale, la configurazione del sistema dinamico.

Si elencano adesso i diversi tipi di equilibrio di un sistema dinamico lineare a due variabili, a partire dai valori di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  (tab. 1). La loro comprensione permette di interpretare le dinamiche di cambiamento delle variabili incluse in un modello. Naturalmente la classificazione che segue è esaustiva sul piano matematico, ma il suo effettivo uso nelle scienze sociali dipende dal modello che si adopera.

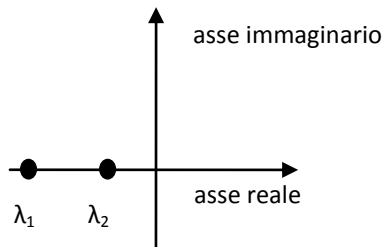
**Tab. 1- Equilibri**

| Valori di $\lambda_1$ e $\lambda_2$          | Tipo di equilibrio                |
|----------------------------------------------|-----------------------------------|
| Entrambi negativi                            | Nodo stabile                      |
| Entrambi positivi                            | Nodo instabile                    |
| Discordi                                     | Punto sella                       |
| Immaginari opposti                           | Centro                            |
| Complessi coniugati con parte reale negativa | Spirale stabile                   |
| Complessi coniugati con parte reale positiva | Spirale instabile                 |
| Entrambi uguali e minori di zero             | Stella o nodo improprio stabili   |
| Entrambi uguali e maggiori di zero           | Stella o nodo improprio instabili |

Si illustra ora ciascun caso, riprendendo l'equazione agli autovalori  $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$ , caratterizzata dal discriminante  $\Delta$  uguale a  $T^2 - 4D$ , dalla somma delle soluzioni  $\lambda_1 + \lambda_2$  uguale alla traccia T e dal loro prodotto  $\lambda_1 \lambda_2$  pari al determinante D.

- Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono entrambi negativi significa che  $T = \lambda_1 + \lambda_2$  è minore di zero, il determinante  $D = \lambda_1 * \lambda_2$  è maggiore di zero e il discriminante  $\Delta$  è positivo, essendo le soluzioni reali e distinte. Sul piano di Gauss, in cui si rappresentano i numeri complessi, riportando sull'asse delle  $x$  la parte reale e sull'asse  $y$  la parte immaginaria, gli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  trovano la seguente collocazione (fig. 52).

**Fig. 52 -  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  negativi**



Le autosoluzioni del tipo  $e^{\lambda_i t}$  tendono a zero per  $t \rightarrow \infty$  per cui l'origine è un nodo di tipo stabile.

Ai fini di una maggiore comprensione, si propone un semplice esempio:

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 3y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è:  $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

da cui si ricava la traccia  $T = -5 - 3 = -8$  e il determinante  $D = (-5)(-3) - (3)(1) = 12$ .

Quindi, l'equazione agli autovalori  $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$  diventa  $\lambda^2 + 8\lambda + 12 = 0$ . Risolvendo l'equazione di secondo grado, si ricavano i due valori entrambi negativi di  $\lambda$ , cioè:  $\lambda_1 = -6$  e  $\lambda_2 = -2$ . Poi, si procede al calcolo delle componenti  $u$  e  $v$  degli autovettori:

$$\begin{pmatrix} -5 - \lambda & 3 \\ 1 & -3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

In particolare, per  $\lambda_1 = -6$  si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = 0 \text{ da cui } u_1 + 3v_1 = 0;$$

quindi  $v_1 = 1$ ,  $u_1 = -3$  sono le coordinate del primo autovettore (a meno di un fattore). Poiché le soluzioni esponenziali risultano

$$\begin{cases} x = ue^{\lambda t} \\ y = ve^{\lambda t} \end{cases}$$

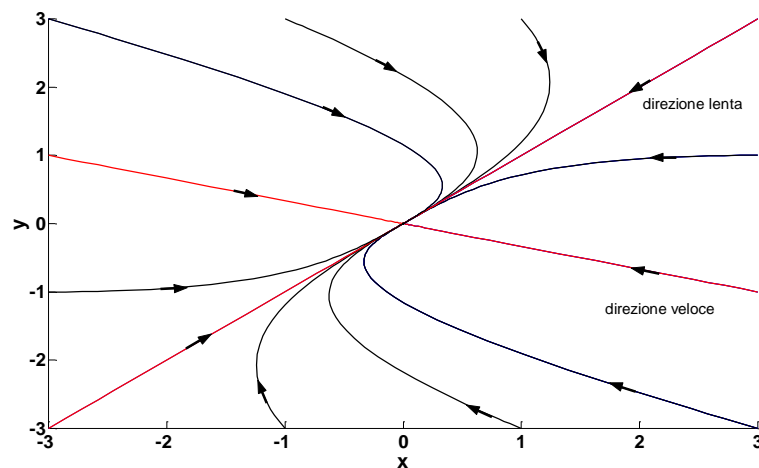
si ha in questo caso  $x_1 = -3e^{-6t}$  e  $y_1 = 1e^{-6t}$ .

Per  $\lambda_2 = -2$ , il prodotto delle matrici

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

conduce a  $v_2 = 1$  e  $u_2 = 1$ , che sono le coordinate del secondo autovettore da cui si ricava  $x_2 = e^{-2t}$  e  $y_2 = e^{-2t}$ . La traiettoria rettilinea caratterizzata da  $|\lambda|$  minore si dice lenta, mentre l'altra è veloce (Strogatz, 1994, p.133). Le traiettorie curvilinee provengono da direzioni quasi parallele a quella veloce e si avvicinano al punto di equilibrio in modo tangente alla direzione lenta. Quindi, per  $t \rightarrow -\infty$  prevale la direzione veloce, mentre per  $t \rightarrow \infty$  prevale quella lenta<sup>22</sup> (fig. 53).

**Fig. 53 – Nodo stabile**

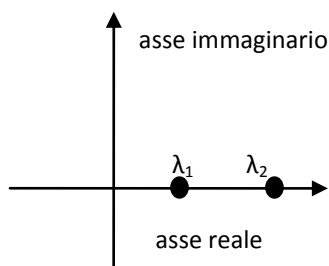


- Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono entrambi positivi vuol dire che la traccia  $T$  e il determinante  $D$  sono maggiori di zero così come lo è il discriminante  $\Delta$ , essendo le soluzioni reali. Sul piano di Gauss,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  si posizionano sul semiasse positivo delle  $x$  (fig. 54). Gli esponenziali divergono per  $t \rightarrow \infty$  e l'origine degli assi del piano

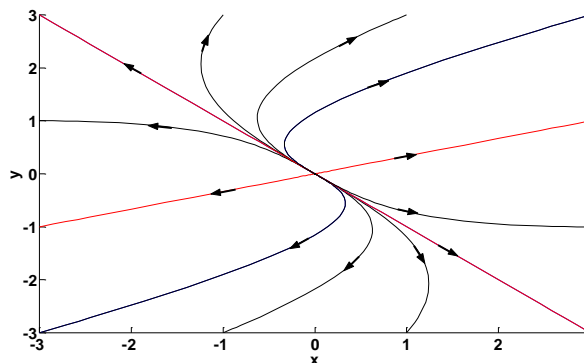
<sup>22</sup> I diagrammi di fase di questo paragrafo sono stati ottenuti con il programma MATLAB, usando i sistemi degli esempi specificati.

cartesiano rappresenta un nodo instabile da cui si allontanano le traiettorie (fig. 55).

**Fig. 54-  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  positivi**



**Fig. 55- Nodo instabile**



Anche in questo caso, si fornisce un esempio:

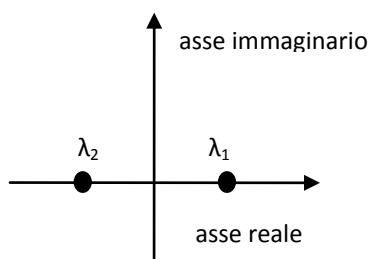
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$$

Usando le procedure di calcolo già illustrate, si ricavano gli autovalori  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 6$  che sono entrambi positivi e gli autovettori di coordinate  $(1, -1)$  e  $(3, 1)$ .

Quindi:  $x_1 = e^{2t}$ ,  $y_1 = -e^{2t}$  e  $x_2 = 3e^{6t}$  e  $y_2 = e^{6t}$

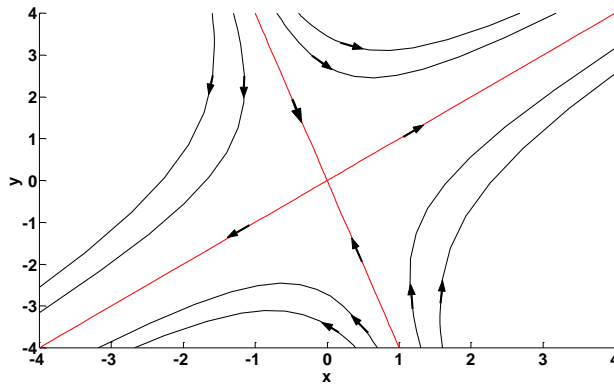
- Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono discordi (fig. 56), il determinante D è negativo e il discriminante  $\Delta$  è maggiore di zero, essendo le soluzioni reali.

**Fig. 56 -  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  discordi**



L'equilibrio che si genera è un punto sella (fig. 57), in quanto vi è attrazione nella direzione con autovalore negativo e repulsione in quella con autovalore positivo; dagli altri punti del piano le traiettorie tendono verso le suddette direzioni nei rispettivi versi.

**Fig. 57 - Punto sella**



Per esempio, il sistema

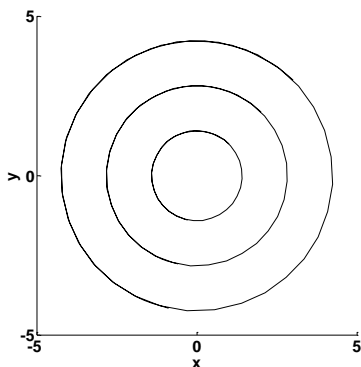
$$\begin{cases} \bullet \\ x = 2x + y \\ \bullet \\ y = 4x - y \end{cases}$$

fornisce gli autovalori  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -2$  e gli autovettori  $(1,1)$  e  $(1,-4)$ . Per cui:

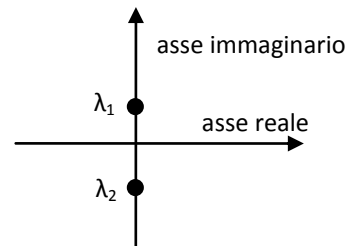
$$x_1 = e^{3t}, y_1 = e^{3t} \text{ e } x_2 = e^{-2t} \text{ e } y_2 = -4 e^{-2t}.$$

- Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono immaginari opposti si generano orbite chiuse dette centri (fig. 58). In particolare, la traccia  $T$  è uguale a zero, il discriminante  $\Delta$  è minore di zero, mentre il determinante  $D$  è positivo. Sul piano di Gauss, quindi,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  si collocano sull'asse delle  $y$  (fig. 59).

**Fig. 58 - Centro**



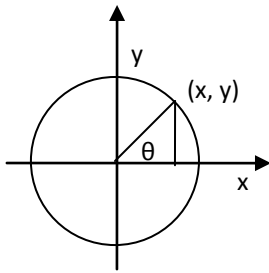
**Fig. 59 -  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  immaginari opposti**



Ad esempio, si consideri un'orbita circolare di raggio  $r$ , concentrica all'origine che viene percorsa con velocità angolare costante  $\omega = \dot{\theta}$  in senso antiorario (fig. 60).



**Fig. 60 – Esempio orbita circolare**



Derivando le coordinate del punto

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = r \dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\omega y \\ \dot{y} = \omega x \end{cases}$$

che ammette gli autovalori immaginari opposti  $\lambda_1 = i\omega$  e  $\lambda_2 = -i\omega$ .

Un'indicazione dell'orbita chiusa traspare dal segno di  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ .

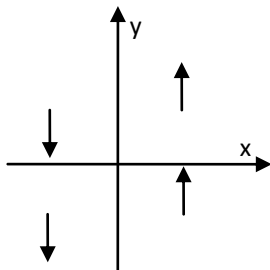
Infatti, consegue dal sistema che:

1) per  $x > 0$ ,  $y$  aumenta e per  $x < 0$ ,  $y$  diminuisce come indicato dalle frecce (fig. 61);

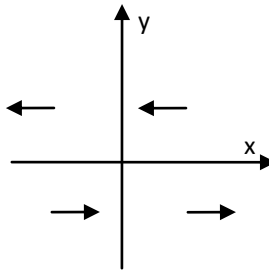
2) per  $y > 0$ ,  $x$  decresce e per  $y < 0$ ,  $x$  cresce come evidenziano le frecce (fig. 62).

Sovrapponendo i due grafici e riportando la risultante dei due vettori, si osserva che la traiettoria ruota intorno al centro (fig. 63).

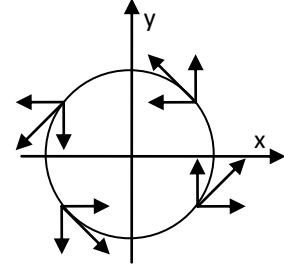
**Fig. 61 – Flusso y**



**Fig. 62 – Flusso x**



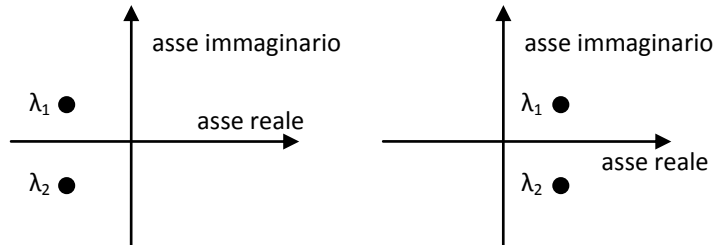
**Fig. 63 - Formazione del centro**



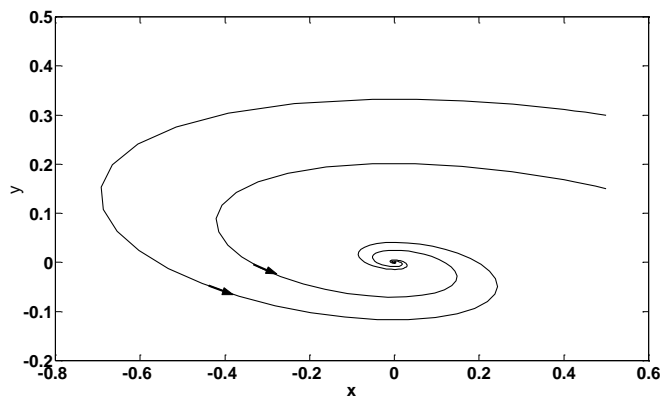
- Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono complessi coniugati della forma  $a \pm i\omega$ , ovvero hanno la stessa parte reale ma quella immaginaria è opposta (fig. 64), si determina un'orbita a spirale che risulta stabile per  $a < 0$  (fig. 65) e instabile per  $a > 0$ . Infatti, la parte

immaginaria costringe il punto a ruotare, mentre quella reale se negativa lo avvicina all'origine, se positiva lo allontana dall'origine come nel caso dei nodi.

**Fig. 64 -  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  complessi coniugati**



**Fig. 65 - Spirale stabile**

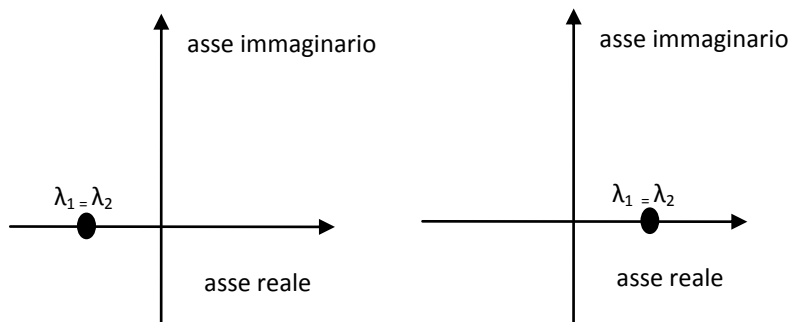


Il sistema che segue, ad esempio, fornisce  $\lambda_1 = (-1+3i)/2$  e  $\lambda_2 = (-1-3i)/2$  e da' luogo a una spirale stabile:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = 1/2x \end{cases}$$

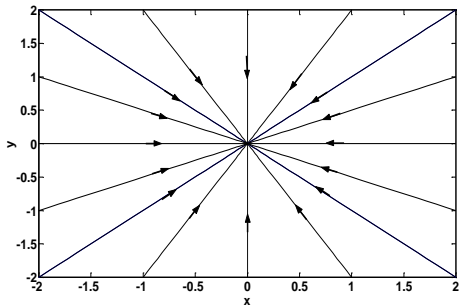
- L'ultima situazione avviene quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono uguali (fig. 66) e produce un nodo stabile per  $\lambda < 0$  e uno instabile per  $\lambda > 0$ .

**Fig. 66 -  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  uguali**

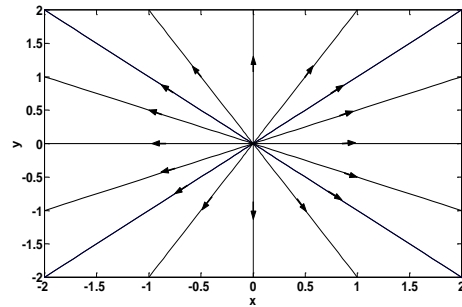


In particolare, se la matrice è diagonale, cioè sono diversi da 0 soltanto gli elementi della diagonale principale, si forma una stella in cui le traiettorie entrano (fig. 67) o escono in modo rettilineo dall'origine (fig. 68).

**Fig. 67 – Stella stabile**



**Fig. 68 – Stella instabile**



Ad esempio il seguente sistema

$$\begin{cases} \bullet \\ x = ax \\ \bullet \\ y = ay \end{cases}$$

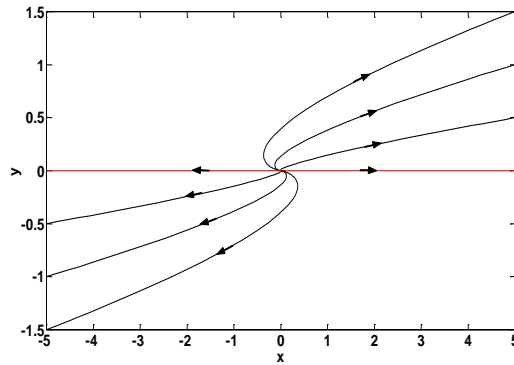
fornisce  $\lambda_1 = \lambda_2 = a$  e le autosoluzioni esponenziali  $x = ue^{at}$  ed  $y = ve^{at}$  per qualsiasi coppia  $(u,v)$ . Questo vuol dire che, partendo da qualsiasi punto, si formano traiettorie rettilinee verso l'origine. Inoltre, si constata che esse tendono a zero per  $\lambda$  negativo e a infinito per  $\lambda$  positivo rispettivamente, allo scorrere del tempo. Se la matrice non è diagonale, la situazione è più complessa. Comunque si ha un solo autovettore rettilineo e le altre traiettorie tendono alla direzione dell'autovettore. Si forma così un nodo improprio (dato che non ci sono due autodirezioni distinte che si incontrano) stabile o instabile (fig. 69) per  $\lambda$  negativo o positivo rispettivamente.

Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} \bullet \\ x = 2x + 5y \\ \bullet \\ y = 2y \end{cases}$$

ha  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  e l'autovettore  $(u, 0)$  diretto lungo l'asse x. Dato che  $\lambda > 0$ , il nodo improprio sarà instabile.

**Fig. 69 – Nodo improprio instabile**



Per risolvere i sistemi non lineari si ricorre alle proprietà di quelli lineari. Pertanto, è necessario un procedimento che permette di approssimare le funzioni non lineari con adeguate funzioni lineari.

Data una funzione  $f(x)$ , la sua derivata vale  $f'(x) = \frac{df}{dx}$  per cui  $df = f'(x)dx$ , dove  $dx$  e  $df$  sono i differenziali di  $x$  e di  $f$ , cioè le variazioni  $\Delta x$  e quella corrispondente  $\Delta f$  quando esse tendono a zero. Quindi per  $\Delta x$  trascurabile, si può usare l'approssimazione  $\Delta f = f'(x)\Delta x$  che, applicata nel punto  $x_0$ , equivale a:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x \text{ ovvero } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Tale approssimazione si può estendere anche a funzioni con più variabili. In particolare con due variabili si ottiene:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

in cui le derivate sono parziali rispetto a  $x$  (con  $y$  costante) e  $y$  (con  $x$  costante) e calcolate nel punto  $x_0, y_0$ . Il sistema non lineare del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

si approssima a:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \\ \dot{y} = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y \end{cases}$$

Se  $(x_0, y_0)$  è un punto di equilibrio, in accordo con il sistema (4), si ha che  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ .

Ponendo poi  $X = x - x_0 = \Delta x$  e  $Y = y - y_0 = \Delta y$ , si ottiene il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y \\ \dot{Y} = \frac{\partial g}{\partial x} X + \frac{\partial g}{\partial y} Y \end{cases}$$

Si tratta perciò di trovare gli autovalori della matrice jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

dove le derivate parziali sono calcolate nei punti di equilibrio.

In pratica, questa trasformazione consente di applicare ai sistemi non lineari, in cui le funzioni  $f$  e  $g$  obbediscono ad alcune condizioni, le procedure già descritte per i sistemi lineari. Infatti, se il sistema linearizzato presenta una sella, un nodo o una spirale, allora il punto fisso avrà la stessa connotazione anche per il sistema non lineare originario (Strogatz, 1994, p. 151). Questo risultato non vale, invece, per i punti di frontiera, come centri, stelle e nodi impropri (*ibidem*). In tal caso, per stabilire i punti di equilibrio si ricorre ad altre tecniche.

## TERZO CAPITOLO

### Analisi delle serie storiche del sito web de “Il Corriere della Sera”

#### 1. Introduzione

In questo capitolo saranno analizzate alcune serie temporali giornaliere relative al comportamento di visita al sito web del quotidiano italiano “Il Corriere della Sera” per il periodo che va dal 12 aprile 2008 all’11 settembre 2011<sup>23</sup>. Le considerazioni emerse da questa ricerca e le tecniche impiegate sono state usate anche per lo studio di serie storiche di siti web di altri quotidiani in cui sono stati ottenuti risultati analoghi (Catone, in stampa).

Le serie studiate sono:

- il numero di visite dal lunedì alla domenica;
- il numero di visite dal lunedì al venerdì;
- il tempo medio per pagina;
- il tempo medio per visita;
- il numero di pagine viste.

I dati, disponibili sul sito dell’*Audiweb*, sono stati esaminati, utilizzando due *software*: il *Visual Recurrence Analysis* (VRA) e il *Chaos Data Analyzer* (CDA). In linea generale, lo studio di ciascuna serie si compone di vari *steps*: si inizierà con una fase di descrizione caratterizzata prevalentemente dall’osservazione del diagramma temporale, del diagramma di ricorrenza, dello spazio delle fasi e dello spettro di potenza; poi si procederà con l’analisi usando alcuni parametri come la dimensione di correlazione, la dimensione di *embedding*, gli esponenti di Lyapunov e, ove possibile, seguirà una fase di previsione nel breve periodo dei valori successivi delle serie.

#### 2. Il numero di visite giornaliere: diagramma temporale e spazio delle fasi

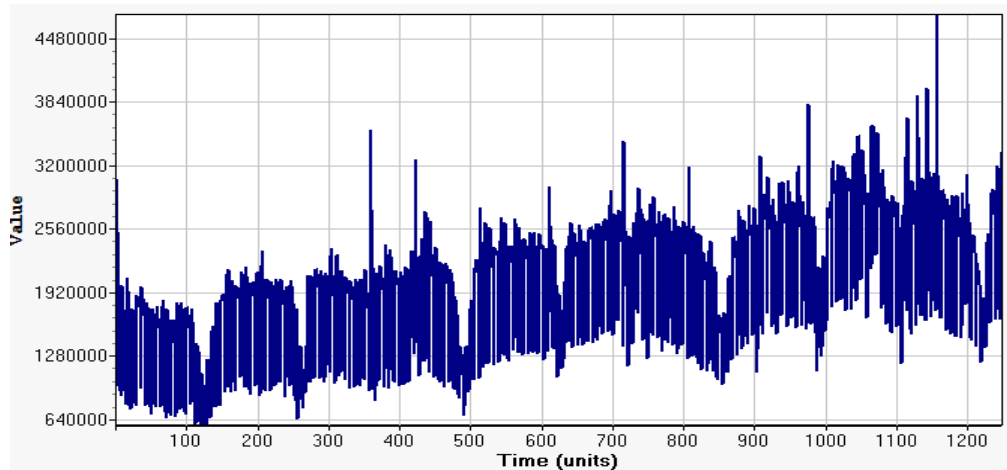
Per comprendere l’andamento globale della serie, si osservi il diagramma temporale (fig.1), che mette in relazione il numero delle visite in funzione del tempo; esso è contraddistinto dalla presenza di una striscia blu crescente indicante un *trend*, da segmenti verticali bianchi, da “avvallamenti” più o meno larghi e da picchi verso l’alto.

---

<sup>23</sup> La ricerca che segue è stata presentata durante la “5th International Non Linear Science Conference” (Barcellona, 15-17 marzo 2012) con l’intervento “*Chaos investigation on the visits to an Italian daily newspaper website*” e durante la “European Conference on Complex Systems” (Bruxelles, 3-7 settembre 2012) con il paper “*Chaos and non-linear tools in website visits*”.

A un'osservazione più attenta, i picchi corrispondono alle visite che si hanno durante eventi "eccezionali" della vita quotidiana (ad es. la caduta di un governo, i risultati elettorali etc.); i minimi, invece, accadono durante i periodi di ferragosto e di Natale.

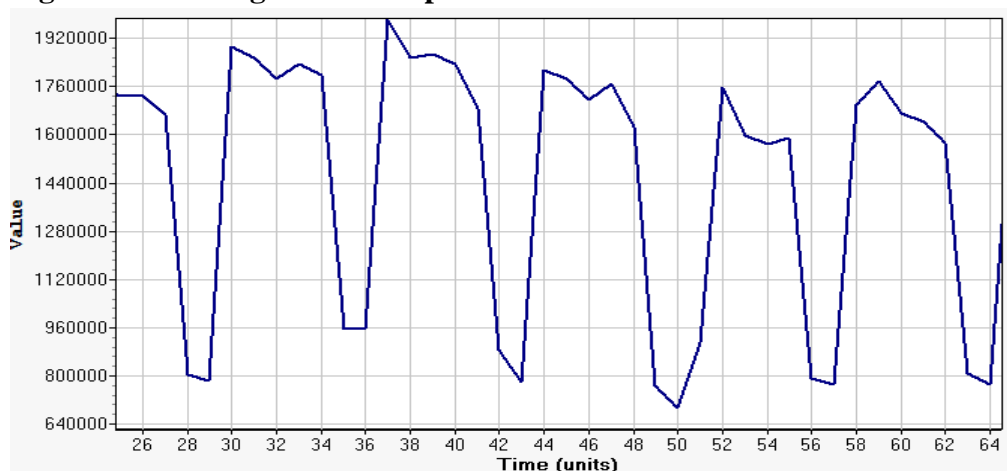
**Fig.1- Diagramma temporale**



asse x: tempo in giorni  
asse y: numero visite

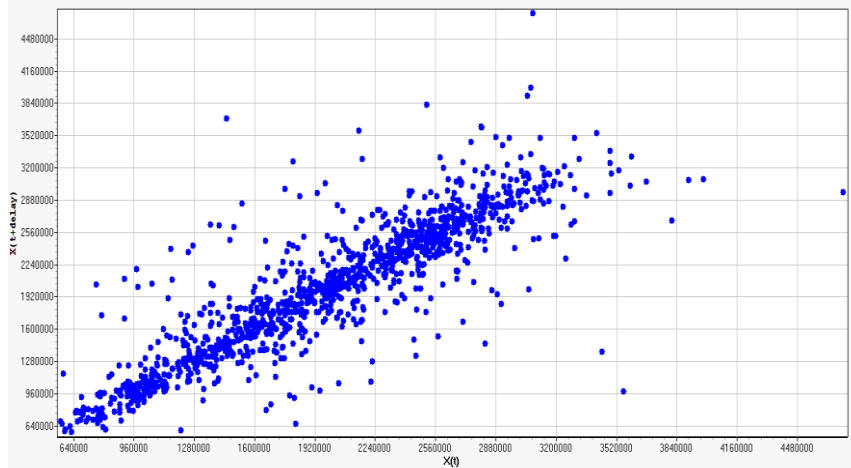
Ingrandendo una parte del diagramma (fig. 2), si scorge una periodicità di 7 giorni: si registra, infatti, che il numero delle visite è maggiore dal lunedì al venerdì ed è minore il sabato e la domenica; ulteriori minimi si hanno in altri giorni festivi.

**Fig. 2 – Zoom diagramma temporale**



Successivamente si è osservato l'andamento delle visite ogni settimana nello spazio delle fasi. La figura 3 infatti mostra il numero di visite di un giorno della settimana in funzione di quelle del medesimo giorno della settimana precedente.

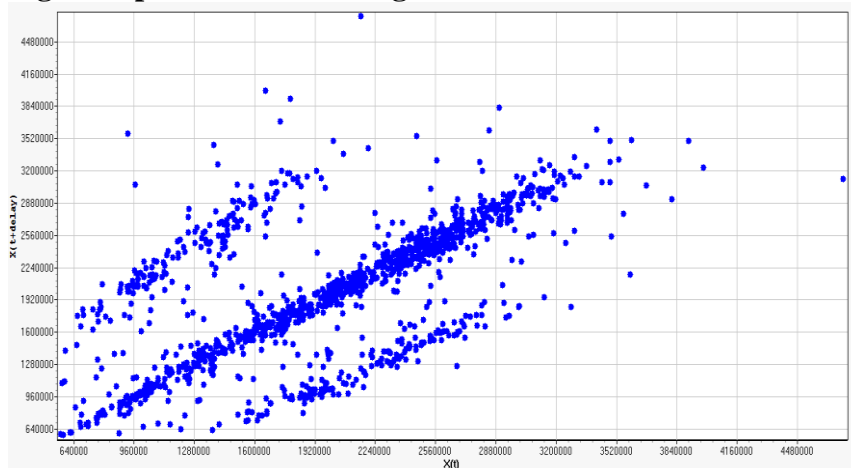
**Fig. 3 – Spazio delle fasi a 7 giorni**



Asse y: numero di visite di un giorno della settimana  
Asse x: numero visite dello stesso giorno della settimana precedente

La rappresentazione evidenzia un forte addensamento dei punti intorno alla bisettrice, che si estende da 640000 a oltre 3500000 visite. La distribuzione diventa più sfumata quando ci si allontana dalla diagonale principale. La concentrazione dei punti sulla diagonale significa che i valori delle visite dopo una settimana tendono a essere poco diversi. La configurazione nello spazio delle fasi cambia quando il tempo di ritardo è pari a 1 giorno; in tal caso si è cercato di capire cosa succede tra un giorno e il successivo. Come si mostra in fig. 4, i punti si accumulano perlopiù sulla bisettrice e lungo due sue parallele di lunghezza minore.

**Fig. 4 – Spazio delle fasi a 1 giorno**



Asse x: numero di visite di un giorno; Asse y: numero di visite del giorno successivo

Consegue che:

- sulla bisettrice, ove i valori del giorno successivo non si discostano molto da quelli del giorno precedente, si collocano le visite che durante la settimana tendono a conservarsi. Tale andamento corrisponde alle transizioni: lunedì-martedì, martedì-mercoledì, mercoledì-giovedì, giovedì-venerdì e sabato-domenica.



In particolare, i valori più elevati delle visite si trovano nella parte medio-alta della bisettrice. La zona inferiore della medesima linea è costituita dai valori di sabato-domenica;

- la linea superiore è associata fondamentalmente al passaggio domenica-lunedì, perché i valori del giorno successivo sono più alti di quelli del giorno precedente (l'aumento è di circa 1120000 visite);
- la linea inferiore indica il passaggio venerdì-sabato, in quanto i valori del giorno successivo sono più bassi rispetto a quelli del giorno precedente (la diminuzione è pari a circa 960000 visite).

La lieve divergenza della linea superiore rispetto alla diagonale denota che l'incremento tende ad aumentare al crescere di  $x(t)$ .

## 2.1 Ipotesi di modelli

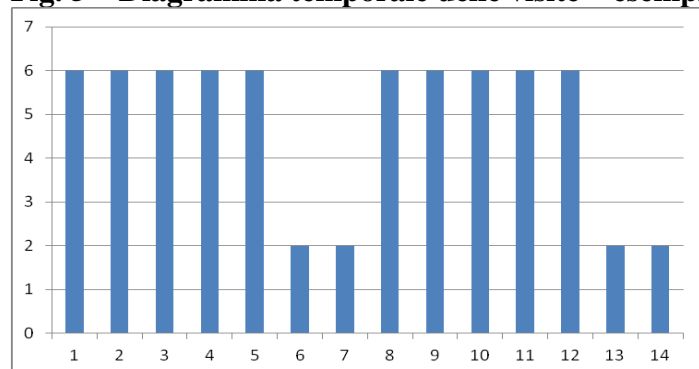
Per spiegare il flusso delle visite che è maggiore dal lunedì al venerdì, diminuisce il sabato e la domenica per aumentare nuovamente il lunedì successivo e così via, si propongono due semplici modelli.

Inizialmente si ipotizzi che dal lunedì al venerdì il numero delle visite sia pari a 6 unità, mentre il sabato e la domenica sia di 2 unità (tab. 1 e fig. 5). Pertanto, le visite subiscono un decremento di 4 unità dal venerdì al sabato e un incremento ancora di 4 dalla domenica al lunedì.

**Tab. 1 Numero di visite per giorno – esempio 1**

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | M | M | G | V | S | D | L | M | M | G | V | S | D | L | M | M | G | V | S | D |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 2 | 2 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 2 | 2 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 2 | 2 |

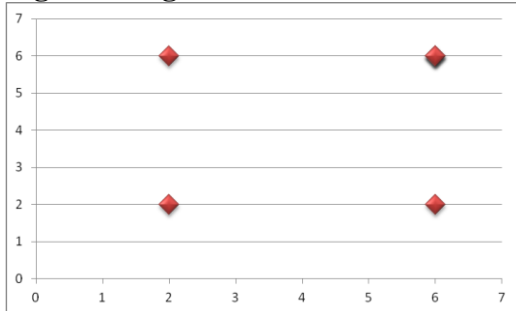
**Fig. 5 – Diagramma temporale delle visite – esempio 1**



Le visite in tab. 1 vengono rappresentate sul piano delle fasi (fig. 6), in cui le ascisse e le ordinate sono formate rispettivamente dai valori del giorno precedente e del giorno

successivo: si ottengono soltanto 4 punti in quanto la sequenza dei 6 e dei 2 si ripete ogni settimana.

**Fig. 6 – Diagramma di fase delle visite – esempio 1**



I due diagrammi precedenti colgono soltanto la variabilità settimanale della serie de “Il Corriere”, ma, aggiungendo una crescita settimanale lineare ai dati, si ha un netto miglioramento interpretativo.

Per esempio, supponendo che il numero di visite subisca un decremento di 3 unità dal venerdì al sabato e un aumento di 4 unità dalla domenica al lunedì (tab. 2), le visite in un giorno della settimana aumentano di 1 unità nello stesso giorno della settimana successiva.

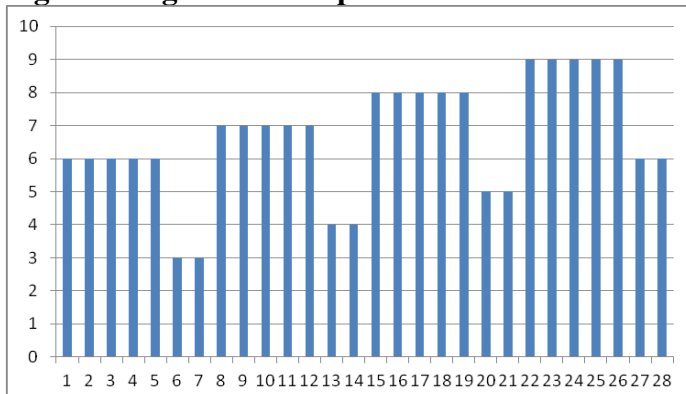
**Tab. 2 – Numero di visite per giorno – esempio 2**

| L | M | M | G | V | S | D | L | M | M | G | V | S | D | L | M | M | G | V | S | D | L | M | M | G | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 3 | 3 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 4 | 4 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 5 | 5 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 6 | 6 |

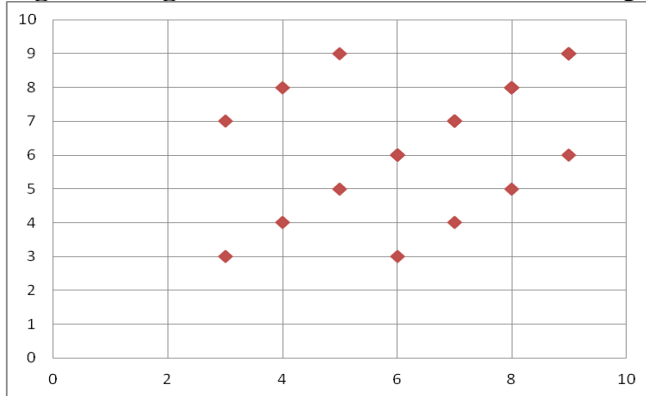
Come evidenzia la figura 7, i valori massimi (quelli che vanno dal lunedì al venerdì) e minimi (che vanno dal sabato alla domenica) aumentano di 1 unità ogni settimana.

Nello spazio delle fasi (fig. 8) con tempo di ritardo di 1 giorno, i punti si dispongono su linee parallele: il segmento superiore è più alto di 4 unità rispetto a quello centrale, mentre il segmento inferiore è più piccolo di 3 unità.

**Fig. 7 – Diagramma temporale numero visite - esempio 2**



**Fig. 8 – Diagramma di fase delle visite – esempio 2**



Poiché l'incremento è maggiore del decremento, si ha un aumento dei valori minimi e massimi ogni settimana, per cui si desume la presenza di un *trend* nella serie.

Constatato che i due diagrammi precedenti (figg. 7, 8) riproducono il quadro generale della serie de "Il Corriere", l'esempio 2, con opportuni adattamenti dei dati, può rappresentare un modello ideale delle visite al sito del quotidiano.

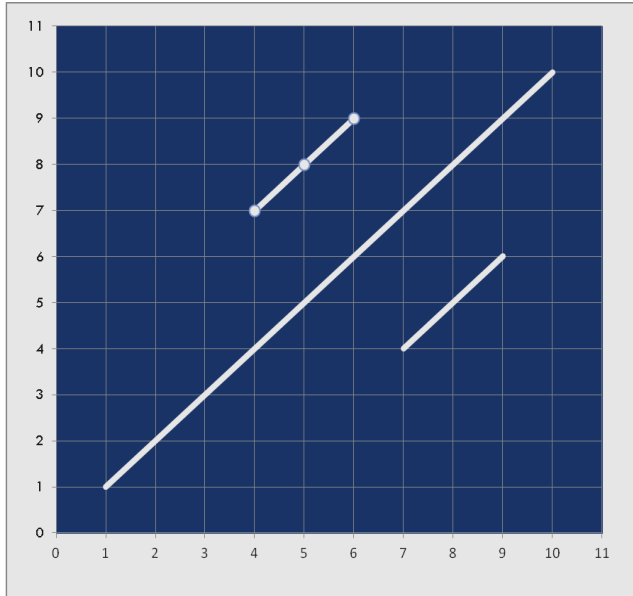
## 2.2 Il diagramma di ricorrenza

Il diagramma di ricorrenza è uno strumento interessante per analizzare le serie storiche proposto da Eckman *et al.* (1987) che permette di scorgere la presenza di elementi ricorrenti (Zbilut e Webber, 1992; Belaire-Franch e Contreras, 2002; Marwan *et al.*, 2007; Faggini, 2007). Tale diagramma rappresenta anche una delle funzioni fondamentali del programma *Visual Recurrence Analysis* ideato da Eugene Konokov. Il *software* analizza i dati della serie storica considerando dei vettori, costituiti dai valori della serie. L'individuazione dei vettori, come si è già illustrato nel secondo capitolo, dipende dalla dimensione di *embedding* e dal tempo di ritardo. La prima è il numero di componenti che formano il vettore e si calcola con il metodo dei falsi vicini, mentre il tempo di ritardo indica dopo quanti elementi si seleziona la componente successiva e viene determinata con la mutua informazione.

Il diagramma di ricorrenza pone in ascissa e in ordinata gli indici (1, 2, 3...) dei vettori ritardati, di cui si rappresentano le distanze euclidee, usando uno schema di colore. Distanze piccole vengono indicate con colori chiari, distanze maggiori con colori scuri. La diagonale *D* del diagramma ovviamente sarà chiara perché la distanza di ogni vettore da sé stesso è nulla. Quando si rileva una diagonale bianca parallela a *D*, ci sono parti della serie che si ripetono perché i vettori  $z_i$  e  $z_j$ ,  $z_{i+1}$  e  $z_{j+1}$ ,  $z_{i+2}$  e  $z_{j+2}$ ,...sono quasi uguali.

In fig. 9, ad esempio, si rilevano due segmenti chiari paralleli a  $D$ , per cui i valori ai tempi 4, 5 e 6 si ripetono ai tempi 7, 8 e 9.

**Fig. 9 – Diagramma di ricorrenza**

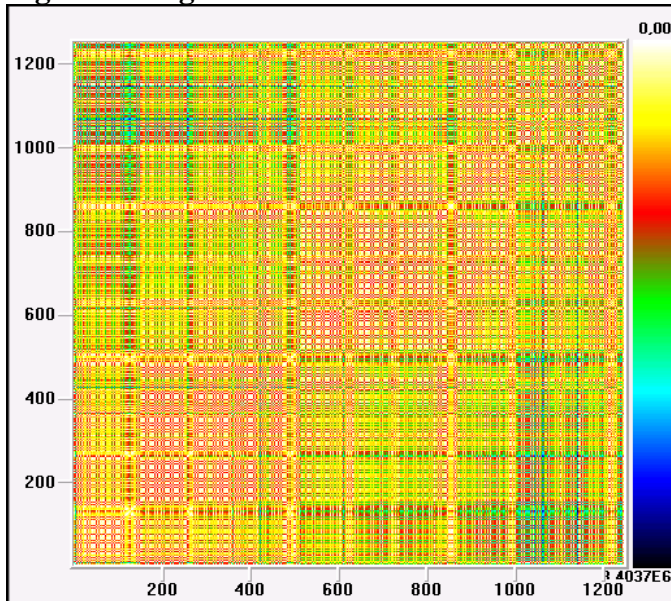


Il diagramma di ricorrenza della serie delle visite al sito web de “Il Corriere della Sera” (fig. 10) è costituito da zone quadrate bianco/rosse attorno alla diagonale in un contesto di colore giallo/verde<sup>24</sup>. La non omogeneità del diagramma e la presenza di zone bianche intorno alla diagonale designano la presenza di un processo non stazionario (media e varianza tendono a cambiare). Inoltre, si distinguono linee bianche diagonali che denotano elementi di determinismo, e linee chiare orizzontali e verticali che sono segni di laminarità tra i punti di ricorrenza<sup>25</sup>.

<sup>24</sup> Alcune riflessioni sui *recurrence plots* sono state presentate nel corso della “Young Researchers Network on Complex Systems Meeting” tenutasi il 1° settembre 2012 a Bruxelles, con l’intervento “*Investigation on some properties of the recurrence plots*”.

<sup>25</sup> La ricorrenza è la percentuale dei punti vicini rispetto a tutti i punti (esclusa diagonale principale); il determinismo è la percentuale dei punti ricorrenti che formano linee diagonali; la laminarità è la percentuale dei punti ricorrenti che formano linee verticali.

**Fig. 10 – Diagramma di ricorrenza – Visite**



### 2.3 I quantificatori

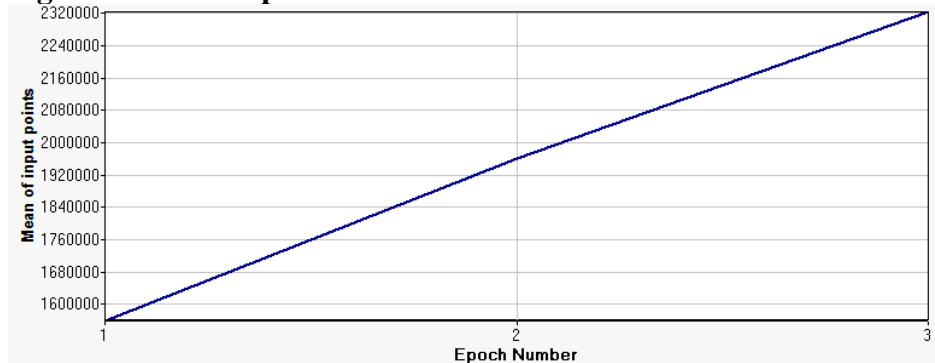
Una parte interessante dell'analisi consiste nell'esaminare i valori di alcuni parametri forniti dal *VRA* come media, deviazione standard, percentuali di ricorrenza, determinismo e laminarità. Alcuni di essi sono fondamentali per comprendere la stazionarietà del sistema e la presenza di elementi non lineari.

Inizialmente la serie è stata divisa in 3 epoche di durata annuale per ricavare delle informazioni di natura più generale. La media e la deviazione standard, come risulta in tab. 3 e in figg. 11 e 12, crescono in modo quasi lineare. Ricorrenza, determinismo e laminarità diminuiscono, mettendo in luce la presenza nella serie di tratti irregolari.

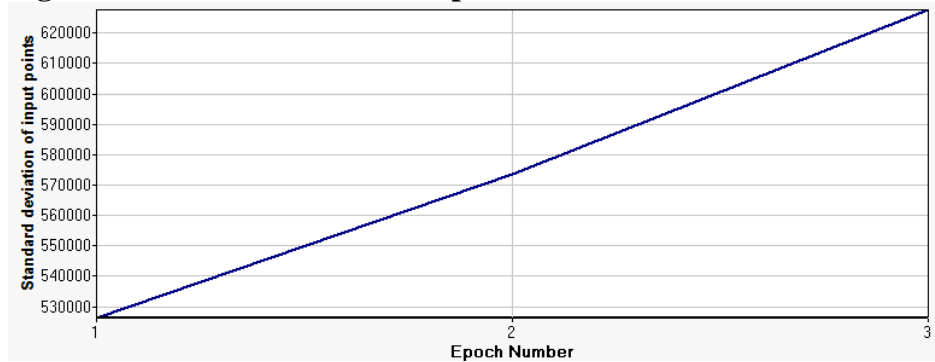
**Tab. 3 – Quantificatori a 365 giorni**

| Epoch number        | 1         | 2         | 3         |
|---------------------|-----------|-----------|-----------|
| Start point         | 1         | 366       | 731       |
| Mean                | 1559086.2 | 1961359.0 | 2323902.2 |
| Standard deviation  | 526280.31 | 573423.62 | 627631.18 |
| Mean rescaled dist  | 100,000   | 100,000   | 100,000   |
| Percent recurrence  | 1,523     | 1,298     | 1,105     |
| Percent determinism | 11,561    | 8,237     | 7,629     |
| Percent laminarity  | 19,071    | 15,197    | 11,444    |

**Fig. 11 - Media 3 epoche**

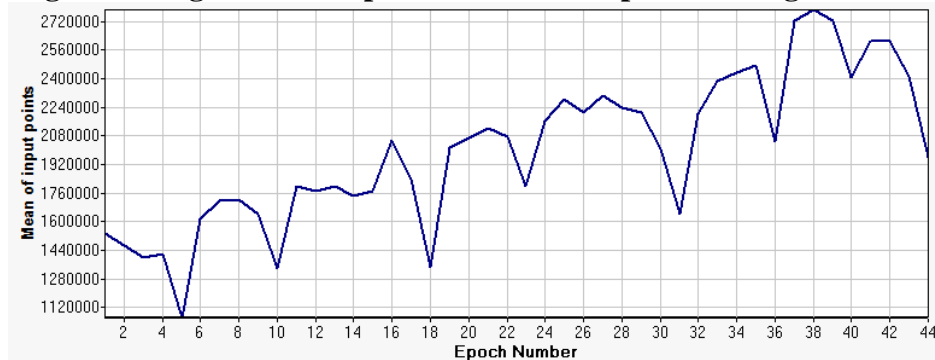


**Fig.12 – Deviazione standard 3 epoche**



In seguito, per avere più dettagli sull'andamento della media nella serie, si scelgono epoche più brevi (28 giorni).

**Fig. 13 – Diagramma temporale media con epoche di 28 giorni**



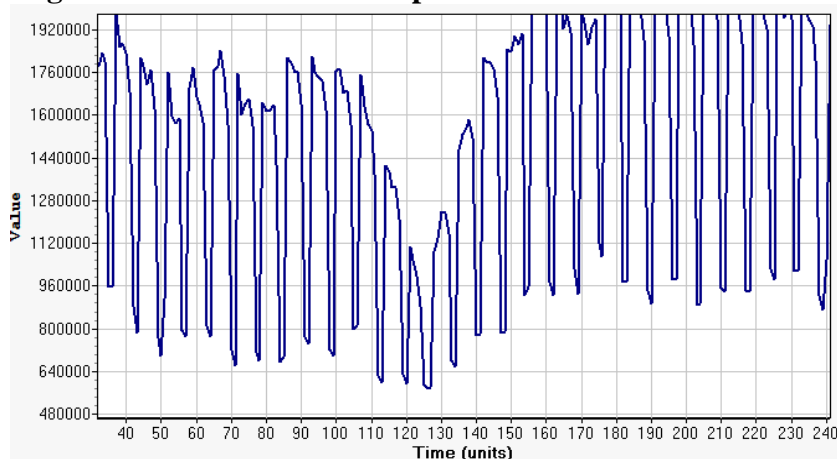
In fig. 13 si notano dei minimi più pronunciati nella 5<sup>a</sup>, 18<sup>a</sup>, 31<sup>a</sup> e 44<sup>a</sup> epoca. Essi avvengono ogni 13 epoche, cioè quasi ogni anno (364 giorni = 13\*28) e corrispondono ai periodi della tabella 4.

**Tab. 4 – Epoche di 28 giorni e relativi periodi**

| Epoche          | Periodi                      |
|-----------------|------------------------------|
| 5 <sup>a</sup>  | tra il 113° e il 140° giorno |
| 18 <sup>a</sup> | tra il 447° e il 504° giorno |
| 31 <sup>a</sup> | tra il 481° e l'868° giorno  |
| 44 <sup>a</sup> | dal 1205° giorno in poi      |

Osservando i valori delle diverse epoche sul diagramma temporale, come per la 5<sup>a</sup> epoca in figura 14, si riscontra che i minimi delle medie corrispondono agli avvallamenti che avvengono durante il periodo di ferragosto.

**Fig. 14 – Visualizzazione 5<sup>a</sup> epoca**



Anche i minimi delle medie di profondità minore avvengono ogni 13 epoche (tab. 5) e si riferiscono al periodo natalizio.

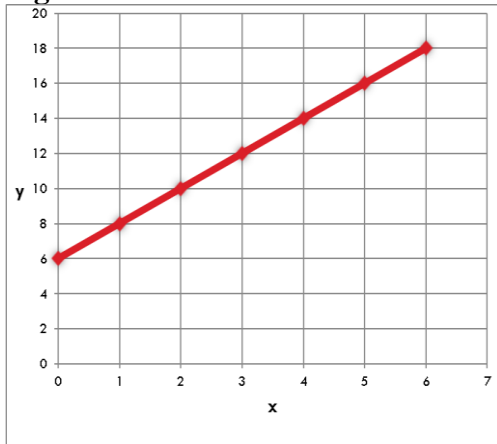
**Tab. 5 – Epoche e periodi natalizi**

| Epoche          | Periodi                       |
|-----------------|-------------------------------|
| 10 <sup>a</sup> | tra il 243° e il 280° giorno  |
| 23 <sup>a</sup> | tra il 617° e il 644° giorno  |
| 36 <sup>a</sup> | tra il 981° e il 1009° giorno |

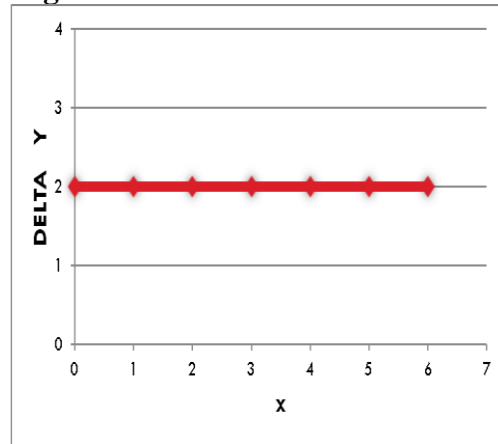
## 2.4 Serie delle visite senza *trend* lineare

Come si è descritto nel precedente capitolo, per applicare alcuni strumenti di analisi è necessario avvalersi di serie stazionarie, ovvero serie in cui media e varianza sono costanti in tempi consecutivi. Se la serie storica presenta un *trend* lineare (fig. 15), si procede alla sua eliminazione, sottraendo da ogni valore il precedente (fig.16).

**Fig. 15 – Serie con *trend* lineare**

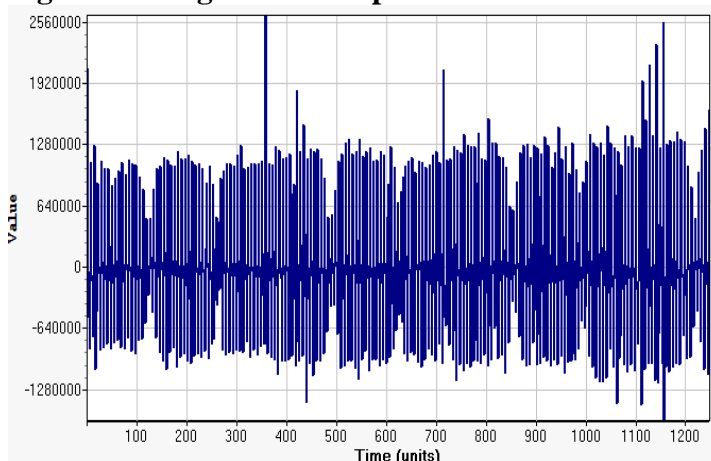


**Fig. 16 – Serie senza *trend* lineare**

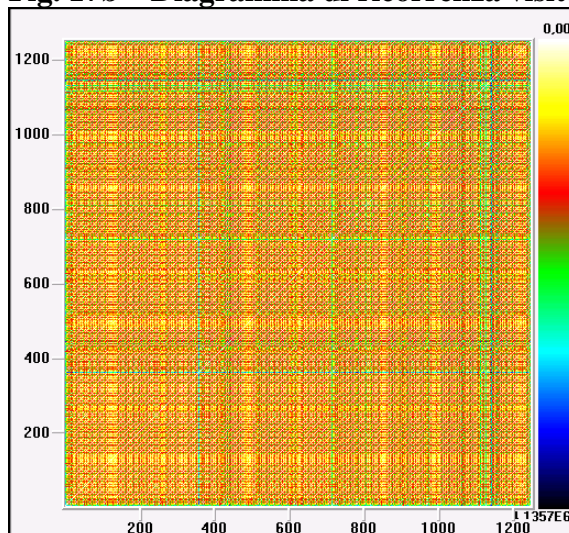


Quanto alla serie del Corriere, essa è caratterizzata da *trend* lineare, che è stato rimosso con il suddetto procedimento. Una volta soppresso il trend, la stazionarietà della serie è evidente dal diagramma temporale (fig. 17a) e dal diagramma di ricorrenza (fig. 17b) che risulta abbastanza uniforme.

**Fig. 17a – Diagramma temporale visite senza *trend***



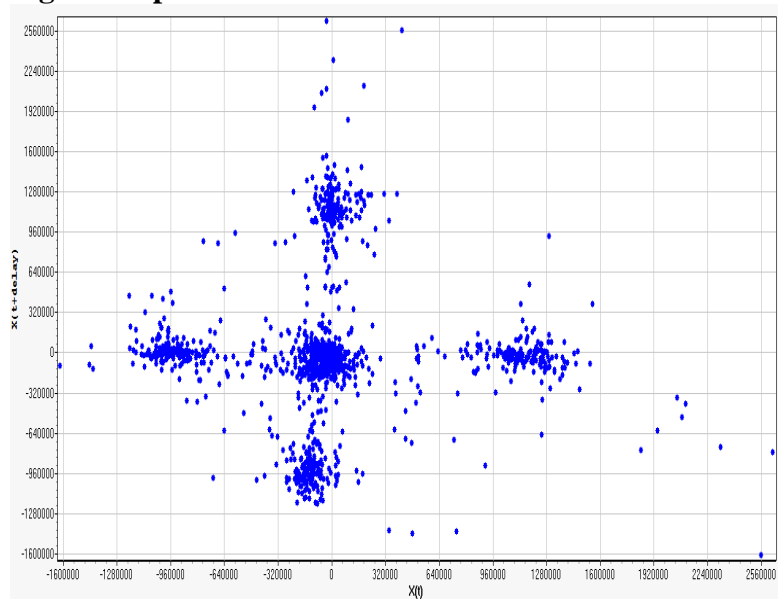
**Fig. 17b – Diagramma di ricorrenza visite senza *trend***





Lo spazio delle fasi con tempo di ritardo pari a 1 giorno presenta una configurazione (fig.18) completamente diversa da quella della serie con *trend* (fig. 4).

**Fig. 18 – Spazio delle fasi delle visite senza *trend***



I valori, infatti, si concentrano essenzialmente intorno a cinque punti, che specificano in modo diretto le variazioni delle visite che si hanno durante la settimana. Unendo progressivamente tali punti, si ottiene un itinerario chiuso.

Per capire meglio tale struttura, viene qui applicata la detrendizzazione ai modelli formulati nel par. 2.1.

Nel primo modello si verificava l'andamento stazionario della tabella 9:

**Tab. 9 – Modello 1 par. 2.1**

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | M | M | G | V | S | D | L | M | M | G | V | S | D | L | M | M | G | V | S | D |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 2 | 2 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 2 | 2 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 2 | 2 |

Sottraendo il valore precedente dal successivo, si ottiene il risultato della tabella 10, in cui le variazioni delle visite oscillano tra i valori opposti di -4 e 4, passando per lo 0;

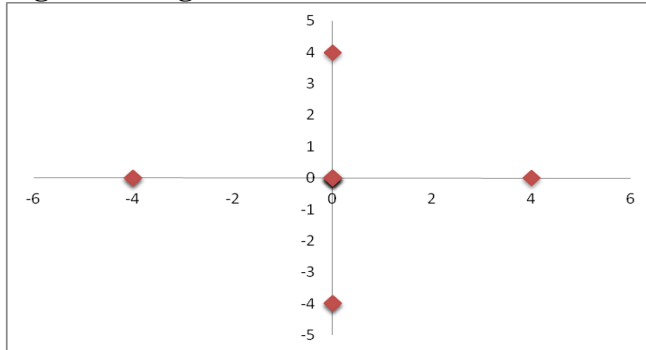
**Tab. 10 – Modello 1 variazioni giornaliere**

|   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |    |   |
|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|---|----|---|
| L | M | M | G | V | S  | D | L | M | M | G | V | S  | D |
|   | 0 | 0 | 0 | 0 | -4 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | -4 | 0 |

La serie, stazionaria in partenza, resta tale anche dopo la detrendizzazione. Ponendo sul piano cartesiano i valori della tabella 10 ( $x$  = numero visite;  $y$  = numero visite giorno

successivo), si ricava un diagramma (fig. 19) in cui un punto O è collocato nell'origine e altri 4 sono posizionati sugli assi alla stessa distanza da O.

**Fig. 19 – Diagramma di fase *detrend* – modello 1**



Questo diagramma ricorda la serie reale per la disposizione dei 5 punti, ma ne differisce per la loro simmetria rispetto all'origine.

Nel secondo modello proposto nel par. 2.1, il numero delle visite presentava la seguente distribuzione:

**Tab. 11 – Modello 2 par. 2.1**

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | M | M | G | V | S | D | L | M | M | G | V | S | D | L | M | M | G | V | S | D | L | M | M | G | V |   |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 3 | 3 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 4 | 4 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 5 | 5 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

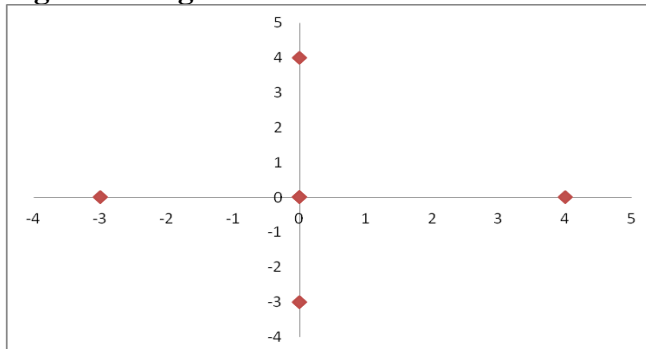
Anche in questo caso dal valore successivo si sottrae il precedente e si ricava una serie stazionaria oscillante tra i valori discordi (non opposti) di -3 e 4, transitante per lo 0:

**Tab. 12 – Modello 2 detrendizzato**

|   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |    |   |
|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|---|---|----|---|
| L | M | M | G | V | S  | D | L | M | M | G | V | S  | D | L | M | M | G | V | S | D  |   |
|   | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 |

Ponendo sugli assi cartesiani i valori della tab. 12, si giunge al diagramma della figura 20, in cui emergono direttamente le variazioni in aumento e in diminuzione che si hanno durante la settimana.

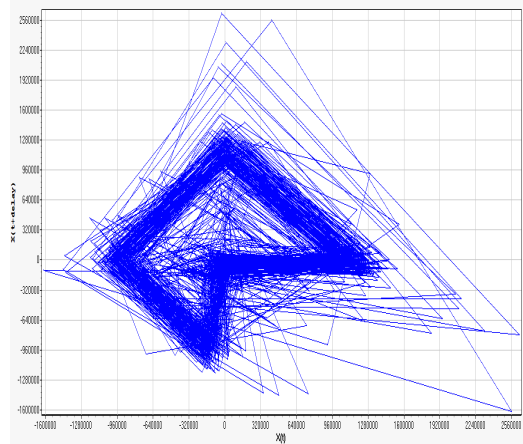
**Fig. 20 – Diagramma di fase modello 2 detrendizzato**



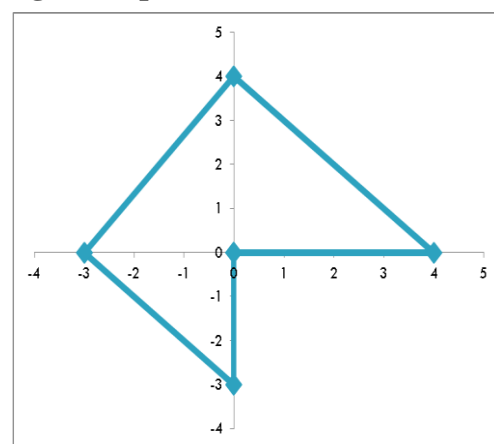
Il diagramma rispecchia la serie reale, sia per la posizione dei punti sia per la loro asimmetria rispetto agli assi. Anche l'unione dei punti nello spazio delle fasi della serie de "Il Corriere della Sera" e del modello appena illustrato, fornisce grafici simili (figg. 21 e 22).

Questi risultati confermano la bontà del modello avanzato per la descrizione dell'andamento generale della serie. Naturalmente, il fatto che gli agglomerati non siano puntiformi nella serie reale significa che le variazioni delle visite settimanali non sono costanti, in quanto risentono di cambiamenti vari, compresi quelli stagionali e occasionali.

**Fig. 21 – Spazio fasi visite senza trend**

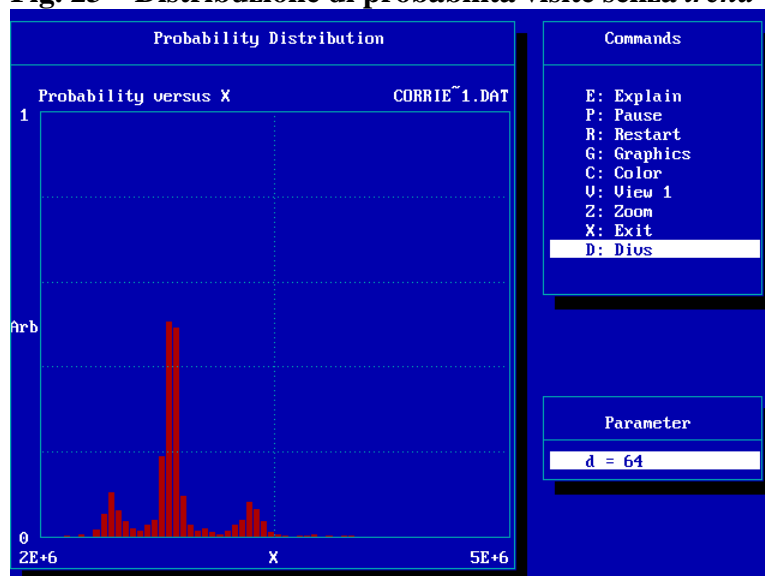


**Fig. 22 - Spazio fasi modello 2 senza trend**



Per comprendere la concentrazione dei dati nella serie reale, si esegue una distribuzione di probabilità degli stessi (fig. 23) che riporta sull'asse delle ascisse le variazioni delle visite e sulle ordinate la loro frequenza in un dato intervallo.

**Fig. 23 – Distribuzione di probabilità visite senza trend**



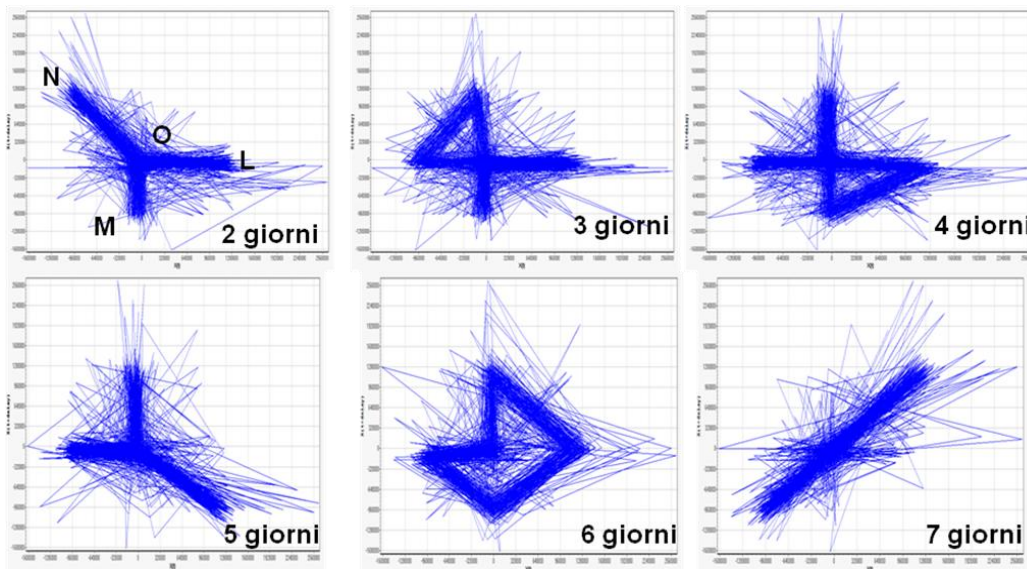
x: da  $-2E+6$  a  $5E+6$

La distribuzione di frequenza della serie è centrata su 3 punti con ascissa:  $-B$  (negativa),  $X$  (quasi zero),  $A$  (positiva e maggiore di  $B$ ).

In un modello in cui le visite settimanali si attestano su due livelli (con *trend* di crescita lineare), cioè superiore (dal lunedì al venerdì) ed inferiore (il sabato e la domenica), le loro variazioni fra giorni consecutivi, procedendo dal lunedì alla domenica, formano una sequenza del tipo:  $A, X, X, X, X, -B, X$ . Deriva che le visite di un giorno rispetto al precedente sono identificate da coordinate della forma  $(A, X), (X, X), (X, X), (X, X), (X, -B), (-B, X), (X, A)$ . Questo risultato interpreta l'origine dei cinque *cluster* di punti nello spazio delle fasi con ritardo di un giorno, sopra descritti. Rappresentando i dati nello spazio delle fasi con un ritardo di 2, 3, 4, 5, 6 e 7 giorni, si ricavano altri diagrammi ciclici (fig. 24) che si possono illustrare con la suddetta sequenza  $A, X, X, X, X, -B, X$ . Per esempio, con un ritardo 2 (primo grafico a sinistra) le coordinate nello spazio delle fasi sono:

$(A, X), (X, X), (X, X), (X, -B), (X, X), (-B, A), (X, X)$ . Chiamando con  $L, O, M, N$  gli agglomerati di punti di coordinate rispettive  $(A, X), (X, X), (X, -B), (-B, A)$ , la precedente sequenza è rappresentata dal percorso  $L, O, O, M, O, N, O$ .

**Fig. 24 - Spazio delle fasi visite senza *trend* con un ritardo di 2, 3, 4, 5, 6 e 7 giorni**

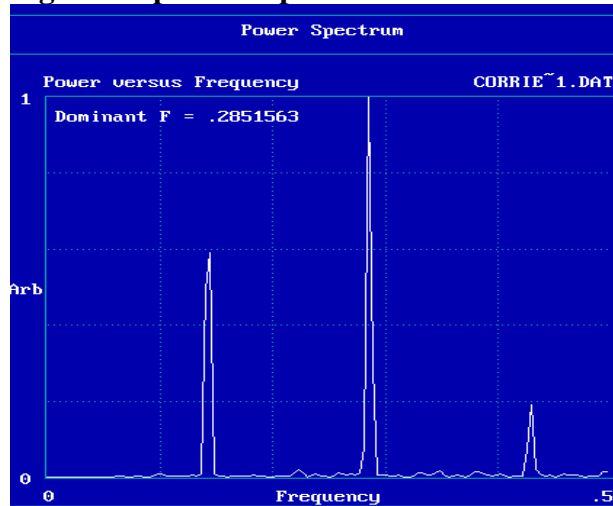


### 2.5 Lo spettro di potenza

Tra le varie funzionalità del CDA è incluso lo spettro di potenza che permette di identificare la presenza di periodicità all'interno della serie. A tal fine, si riportano su un piano cartesiano le frequenze (asse  $x$ ) e lo spettro di potenza (asse  $y$ ), ovvero la somma dei quadrati delle ampiezze delle funzioni seno e coseno che compongono la serie.

La figura 25 mostra dei picchi di frequenze multiple della fondamentale: in particolare si trova una frequenza dominante pari a 0,2852 1/giorno che risulta doppia della fondamentale di 0,1426 1/giorno. Il periodo, che è l'inverso della frequenza, è quindi uguale a 7 giorni.

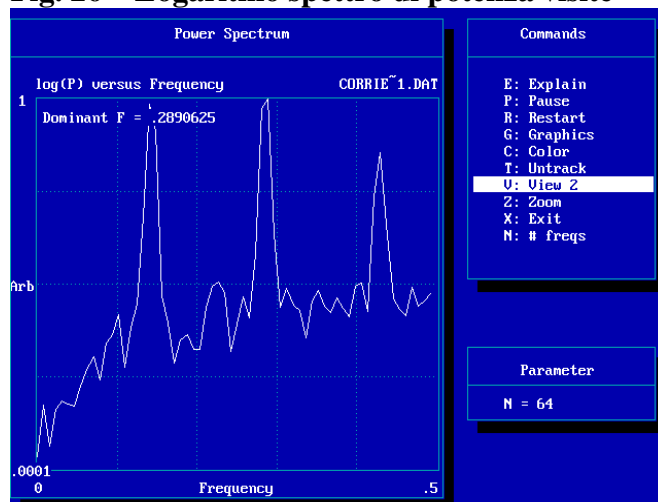
**Fig. 25 – Spettro di potenza visite senza trend**



## 2.6 Analisi non lineare e previsione a breve termine

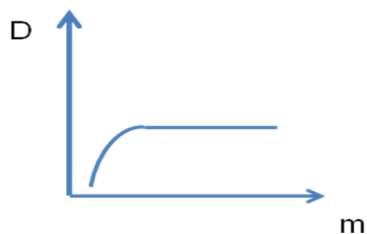
Successivamente la serie è stata studiata usando strumenti non lineari, allo scopo di estrarre eventuali comportamenti caotici, che si manifestano a lungo termine in modo aperiodico in un sistema deterministico sensibile alle condizioni iniziali. La serie considerata appare priva del requisito di aperiodicità, tuttavia la sua periodicità non è esatta nel senso che il segnale non si ripete perfettamente, come si evince dalla larghezza della zona in cui passano le traiettorie (fig. 21) e dalla presenza di diverse altre frequenze nel diagramma del logaritmo dello spettro di potenza (fig. 26). Per tale motivo, si è proceduto con delle indagini finalizzate alla ricerca del caos.

**Fig. 26 – Logaritmo spettro di potenza visite**



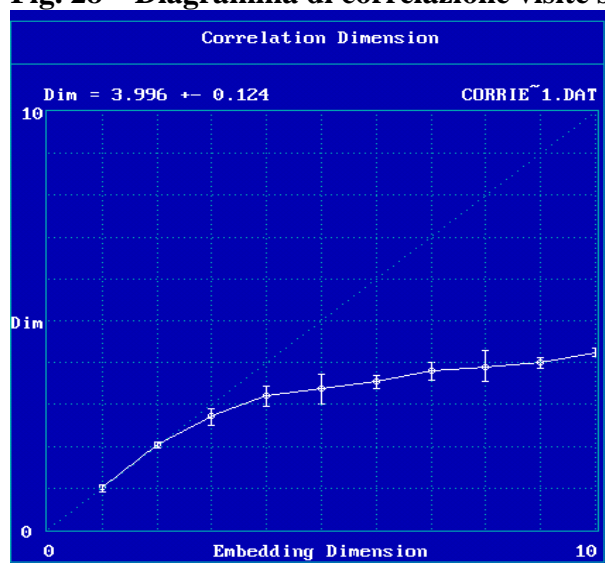
L'analisi viene condotta attraverso il calcolo della dimensione di correlazione, della dimensione di *embedding* e degli esponenti di Lyapunov. Essi sono fondamentali per l'eventuale individuazione di un attrattore; infatti, se un sistema possiede un attrattore, il suo stato successivo può essere previsto esaminando l'evoluzione degli stati vicini, perché tra essi vige una regola di aggregazione. Come si è già visto, la dimensione di correlazione è uno dei modi per stabilire la dimensione dell'attrattore, mentre la dimensione di *embedding* rappresenta la giusta dimensione dello spazio da cui osservare l'attrattore. Si ricorda poi che la dimensione di correlazione viene calcolata per dimensioni di *embedding* crescenti e quindi l'eventuale stabilizzazione della dimensione di correlazione indica la presenza di un attrattore (fig. 27).

**Fig. 27 – Saturazione correlazione**



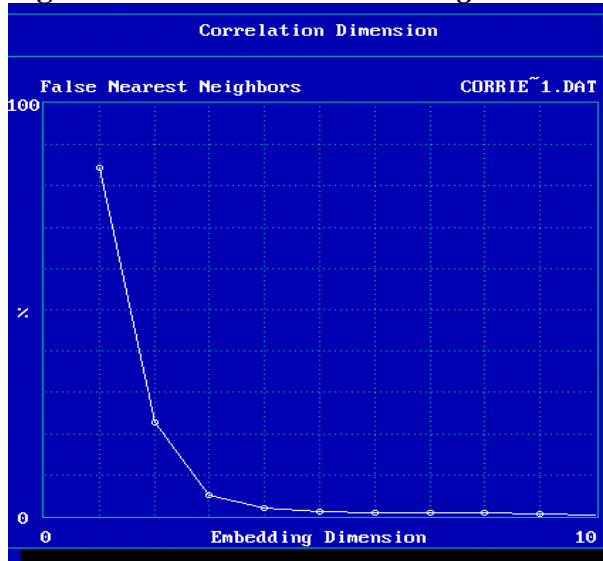
Per le visite de “Il Corriere della Sera”, la dimensione di correlazione si livella adeguatamente già nella serie di partenza, anche per la presenza del *trend* lineare. Nella serie senza *trend*, essa tende a stabilizzarsi intorno al valore di 4, suggerendo l'esistenza di un attrattore (fig. 28).

**Fig. 28 – Diagramma di correlazione visite senza *trend***



La dimensione minima di *embedding* si può ritenere uguale a 3 o 4 (fig. 29) perché in corrispondenza di questi valori la percentuale dei falsi vicini è trascurabile.

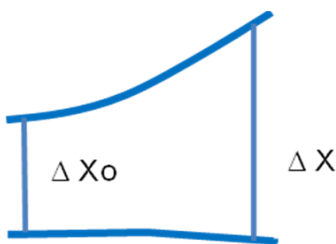
**Fig. 29 - Dimensione di *embedding* visite senza trend**



Per determinare la sensibilità del sistema alle condizioni iniziali, si adoperano gli esponenti  $L$  di Lyapunov che permettono di misurare la distanza delle traiettorie del sistema, calcolando la variazione del valore della serie  $X$  al tempo  $t$ , a partire da una piccola differenza iniziale  $\Delta X_0$ , con la formula:

$$|\Delta X| = |\Delta X_0| e^{Lt} \quad \text{dove } e = 2,718... \text{ è il numero di Nepero (fig. 30).}$$

**Fig. 30 – Evoluzione della distanza tra due punti**



Se  $L > 0$ , tale variazione cresce esponenzialmente, indicando una sensibilità alle condizioni di partenza.

Nella serie delle visite del Corriere, gli esponenti di Lyapunov, al variare delle iterazioni  $n$  e con una dimensione di *embedding* di 3, risultano positivi<sup>26</sup> come segue:

$L=0,395$  per  $n=1$ ;

$L=0,332$  per  $n=2$ ;

$L=0,280$  per  $n=3$ .

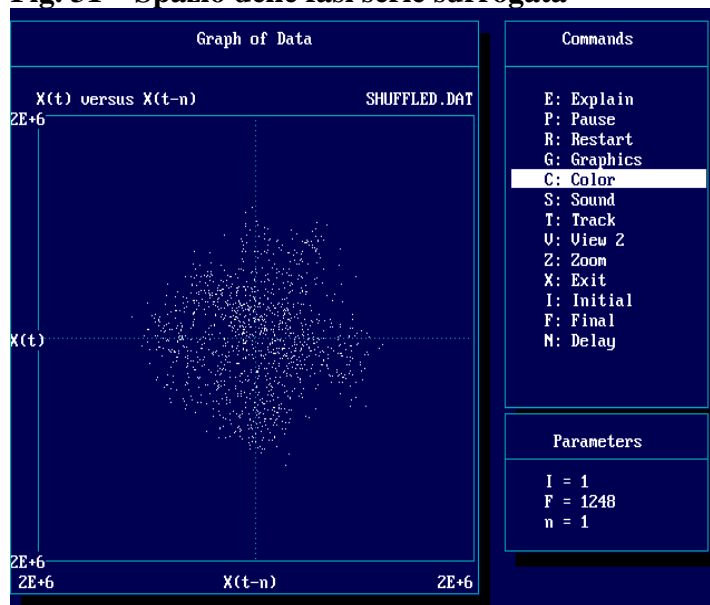
Alla luce di questi risultati, deriva che la serie delle visite manifesta segni di caoticità.

<sup>26</sup> Per  $m=4$ , gli esponenti di Lyapunov, pur essendo positivi, sono affetti da maggiori errori di calcolo.

Dopo, per convalidare la presenza di determinismo nella sequenza dei dati, la serie è stata surrogata nella fase. Con questo metodo si sovrappongono le componenti di Fourier del segnale, dopo averne cambiato le fasi in modo casuale (Osborne *et al.*, 1986).

Nella nuova serie la dimensione di correlazione tende ad aumentare senza livellarsi, gli esponenti di Lyapunov crescono e i punti nello spazio delle fasi formano un'unica nuvola (fig. 31) in cui risultano rimosse le regolarità iniziali. Poiché il solo mescolamento delle componenti di Fourier del segnale produce una successione molto diversa dei dati, viene confermata l'ipotesi che la serie del numero di visite de "Il Corriere della Sera" contiene tratti di determinismo. Surrogando invece una serie casuale, si otterrebbe una successione ancora casuale.

**Fig. 31 – Spazio delle fasi serie surrogata**

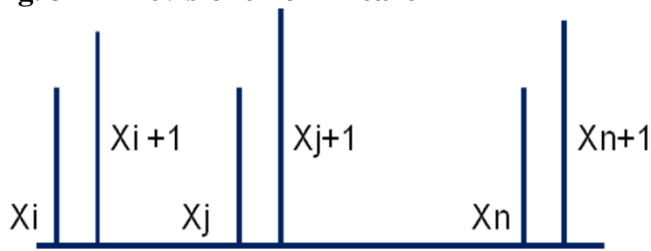


Poi per estrapolare la serie, si è proceduto alla previsione di 18 valori successivi, usando la dimensione di *embedding* già calcolata. Per ricordare come funziona la previsione non lineare, si consideri l'ultimo dato della serie  $X_n$  e si trovino i dati  $X_i, X_j$  che hanno un valore quasi uguale<sup>27</sup> a  $X_n$  e le loro successive iterazioni  $X_{i+1}$  e  $X_{j+1}$ . La media di tali iterazioni, dato il determinismo del sistema, rappresenta il valore predetto  $X_{n+1}$  (fig. 32). Questo procedimento viene ripetuto per i valori consecutivi.

<sup>27</sup> La vicinanza di tali valori è effettiva perché, lavorando con vettori con dimensioni di *embedding*, si escludono i falsi vicini. Naturalmente, i dati quasi identici possono essere più di 2.



**Fig. 32 – Previsione non lineare**

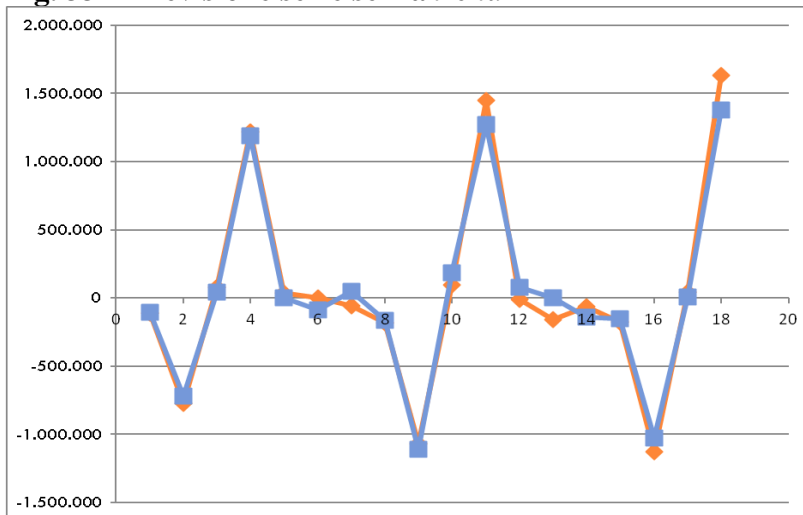


$$X_i \cong X_n \cong X_j$$

$$X_{n+1} = \frac{X_{i+1} + X_{j+1}}{2}$$

Come emerge dalla figura 33, i valori delle visite, predetti con il suddetto procedimento e rappresentati dal colore azzurro, non si discostano molto da quelli reali contrassegnati dalla linea arancione.

**Fig. 33 – Previsione serie senza trend**

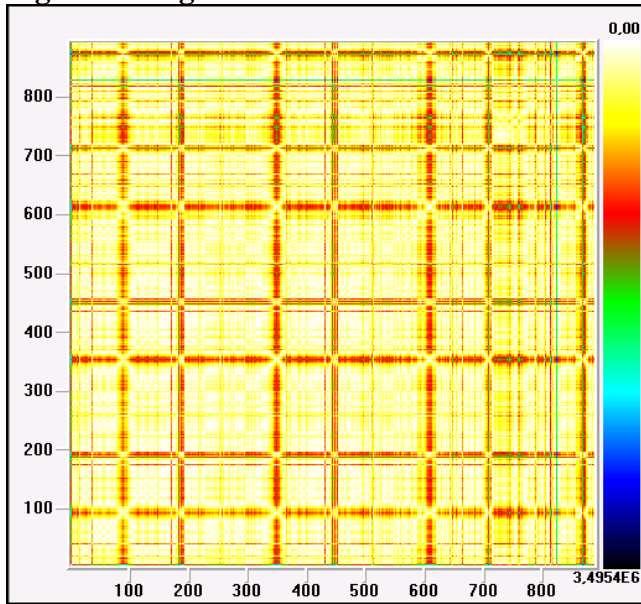


Da questa previsione per  $X_{n+1}$  della serie senza *trend*, si può passare facilmente al valore corrispondente  $Y_{n+1}$  di quella iniziale con *trend*, il cui ultimo valore noto è  $Y_n$ , ricordando che  $X_{n+1} = Y_{n+1} - Y_n$ . Analogamente, si procede con i valori successivi.

### 3. Serie delle visite *detrend* dal lunedì al venerdì

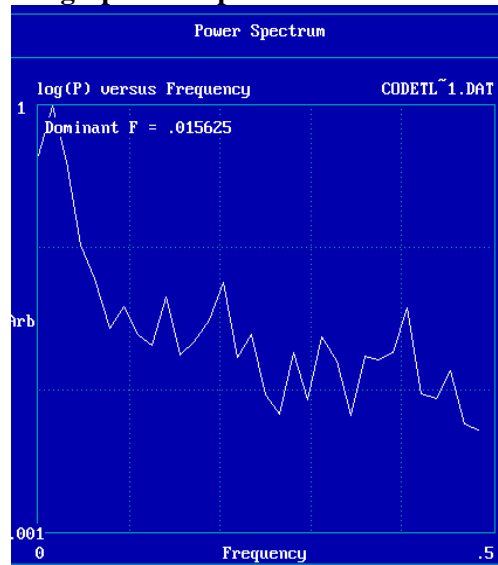
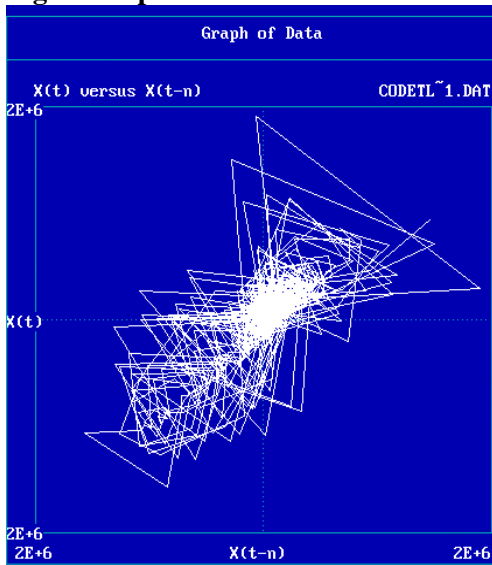
In aggiunta è stata investigata la serie del Corriere della Sera nei giorni della settimana in cui le visite sono maggiori, cioè dal lunedì al venerdì. Nel diagramma di ricorrenza (fig.34) compaiono linee rosse parallele agli assi, derivanti dal calo delle visite durante le vacanze e segmenti bianchi paralleli alla bisettrice che implicano l'esistenza di determinismo.

**Fig. 34 – Diagramma di ricorrenza visite lunedì-venerdì**



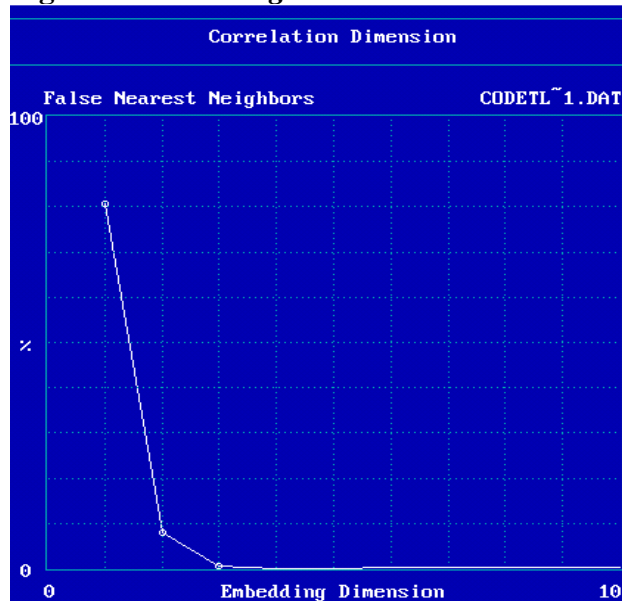
La serie risulta poco periodica come scaturisce dallo spazio delle fasi (fig. 35) e dal logaritmo dello spettro di potenza (fig. 36).

**Fig. 35 – Spazio delle fasi lunedì-venerdì**      **Fig. 36 – Log. spettro di potenza lunedì-venerdì**

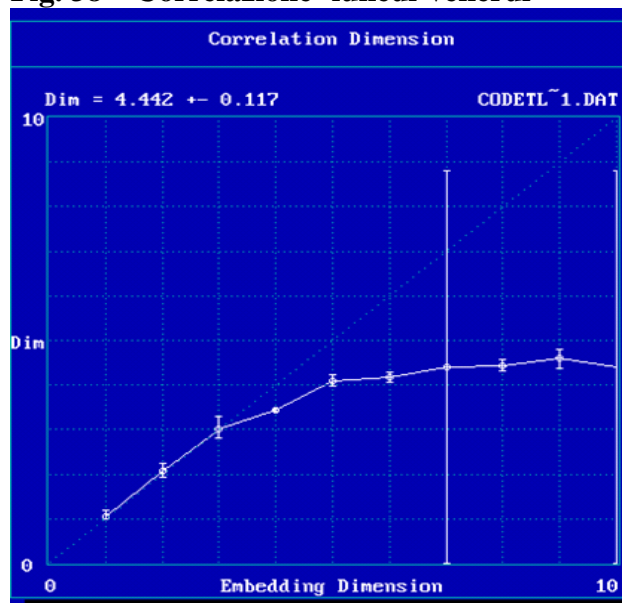


La serie è sensibile alle condizioni iniziali perché gli esponenti di Lyapunov risultano positivi al variare delle iterazioni. Inoltre, la minima dimensione di *embedding* pari 3 (fig. 37) e la saturazione della dimensione di correlazione intorno al valore 4 (fig. 38) mettono in luce dei segni di caoticità.

**Fig. 37 – Embedding- lunedì-venerdì**



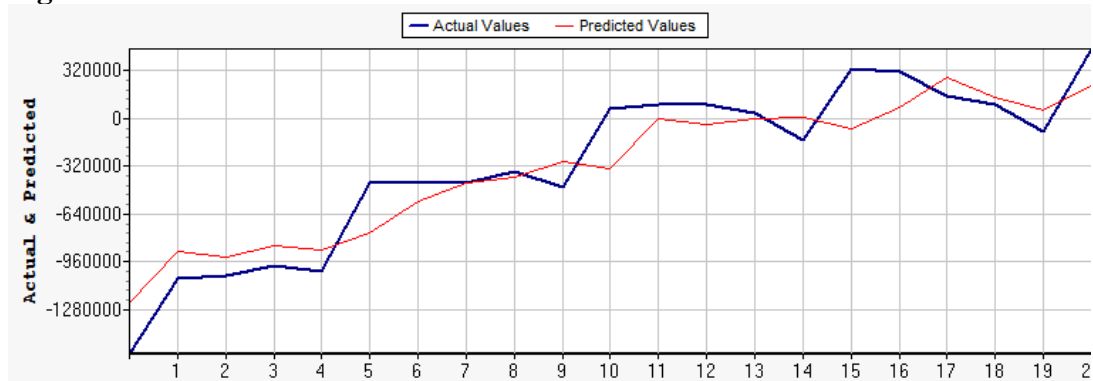
**Fig. 38 – Correlazione- lunedì-venerdì**



Anche in questo caso, in base alla dimensione di *embedding* si conduce la previsione non lineare (fig. 39) dei successivi 20 valori che riprende a grandi linee l'andamento reale della serie<sup>28</sup>.

<sup>28</sup> La previsione di questa serie è meno accurata perché alcune barre degli errori della dimensione di correlazione (fig. 38) sono accentuate.

**Fig. 39 – Previsione visite lunedì-venerdì**



#### 4. Esempio di una serie in media periodica con componente caotica

Si è visto finora che alcune serie del Corriere sono periodiche in media, ma contengono anche segni di caoticità. Per capire tale struttura sul piano teorico, si è ideata ed esplorata la funzione

$Z_n = Y_n + X_n$  in media periodica, avente una componente caotica.

La  $Y_n$  assume il valore costante 4 ed ha quindi un periodo 1; la  $X_n$  è stata estratta dalla mappa  $X_{n+1} = (1.2 X_n) \bmod 1$ , che ha un comportamento caotico (quando non è periodica), essendo l'esponente di Lyapunov ( $\log 1.2$ ) positivo.

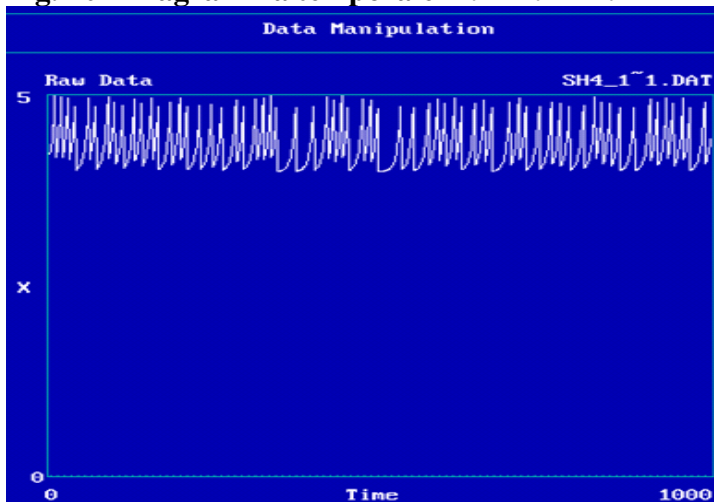
Quindi a una serie costante  $Y_1$  è stata aggiunta una componente caotica<sup>29</sup>:

$$X_1 = 1.2X \bmod 1 = \begin{cases} 1.2X & \text{se } 0 \leq X < 5/6 \\ 1.2X - 1 & \text{se } 5/6 \leq X \leq 1 \end{cases}$$

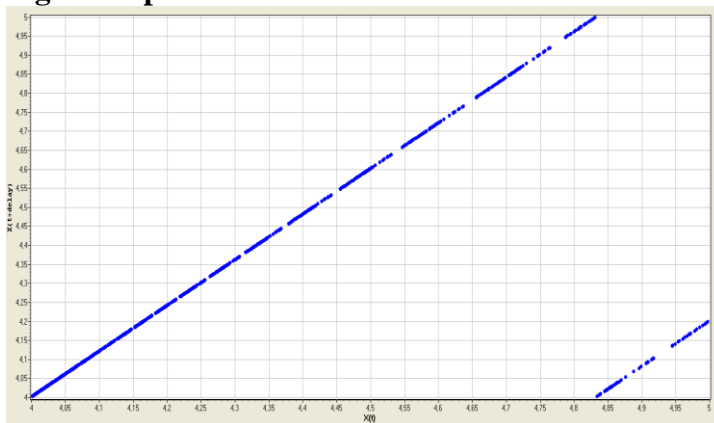
Nelle figure 40 e 41 vengono mostrati i diagrammi della  $Z_n$  rispettivamente nel tempo e nello spazio delle fasi con un ritardo di 1. E' interessante osservare che quest'ultimo è lineare a tratti, dovendo obbedire alle precedenti condizioni lineari con lo stesso coefficiente angolare.

<sup>29</sup> Per alleggerire la scrittura delle formule è stato omissso il pedice  $n$  e i valori successivi di  $x$ ,  $y$  e  $z$  sono stati denotati con l'indice 1.

**Fig. 40 - Diagramma temporale  $Z_n = Y_n + X_n$**



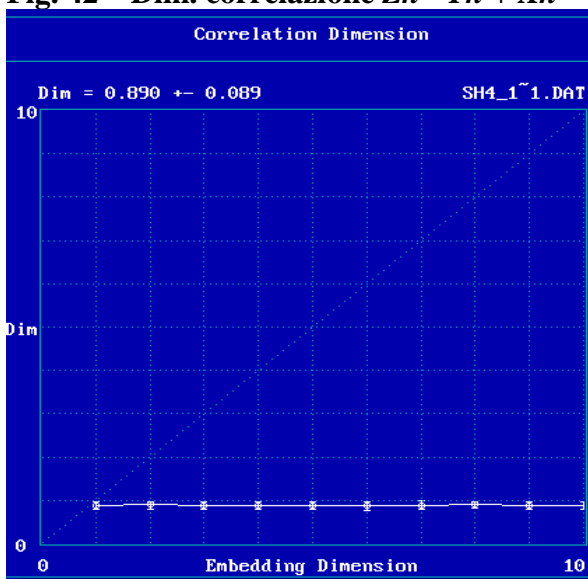
**Fig. 41 - Spazio delle fasi  $Z_n = Y_n + X_n$**



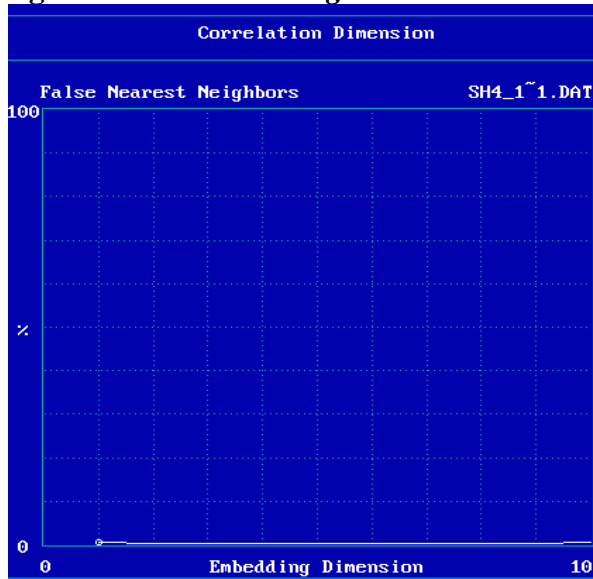
Z e  $Z_i$ : da 4 a 5

L'esame della  $Z_n$  col CDA ha fornito una dimensione di correlazione di 0,89 (fig. 42) e di *embedding* (minima) pari a 1 (fig. 43).

**Fig. 42 – Dim. correlazione  $Z_n = Y_n + X_n$**



**Fig. 43 – Dim. embedding  $Z_n = Y_n + X_n$**



L'esponente di Lyapunov di  $Z_n$  eguaglia quello della  $X_n$ .

Infatti si ha

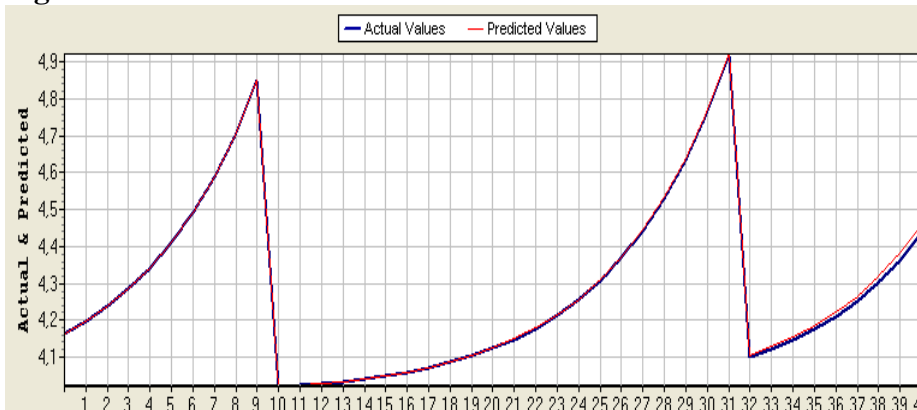
$$\begin{aligned} Z &= 4 + X & \Delta Z &= \Delta X \\ Z_1 &= 4 + X_1 & \Delta Z_1 &= \Delta X_1 = 1.2 \Delta X \end{aligned}$$

e quindi l'esponente di Lyapunov locale e globale risulta

$$L = \log \left| \frac{\Delta Z_1}{\Delta Z} \right| = \log \left| \frac{\Delta X_1}{\Delta X} \right| = \log 1.2 = 0.1823$$

Perciò, la  $Z_n$  è mediamente periodica, ma anche caotica perché  $L$  è positivo. Pertanto, si possono eseguire previsioni ripetendo la funzione media in un periodo o applicando criteri non lineari. In definitiva si osserva che, mentre l'utilizzo della periodicità fornisce soltanto dei valori medi, l'analisi non lineare della serie, riprendendo il determinismo del sistema, può offrire delle previsioni più dettagliate e precise (fig. 44).

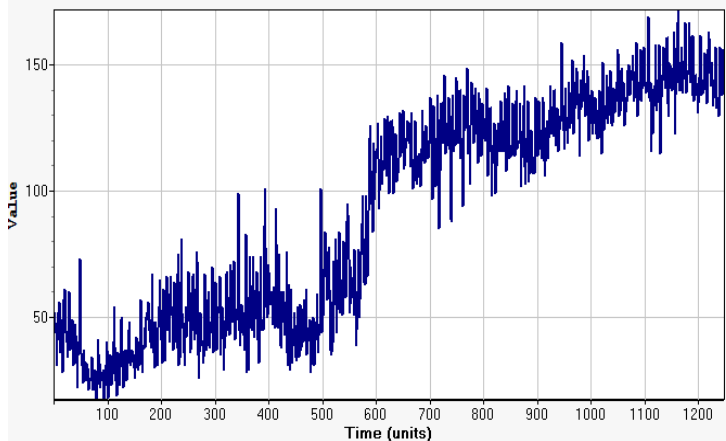
**Fig. 44 – Previsione  $Z_n = Y_n + X_n$**



## 5. Il tempo medio per pagina

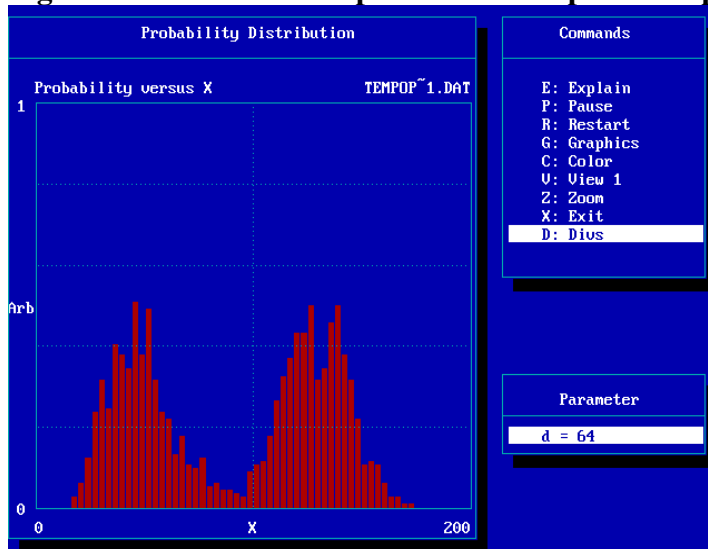
Viene ora investigata la serie storica del tempo medio per pagina del sito web de “Il Corriere della Sera”. Il diagramma temporale (fig. 45) mostra la presenza di due livelli, con oscillazioni e *trend*, su cui si concentra il tempo medio per pagina: le visite dal 12 aprile 2008 al 17 novembre 2009 durano generalmente meno di 80 secondi, mentre dal 18 novembre in poi subiscono un incremento.

**Fig. 45 – Diagramma temporale tempo medio per pagina**

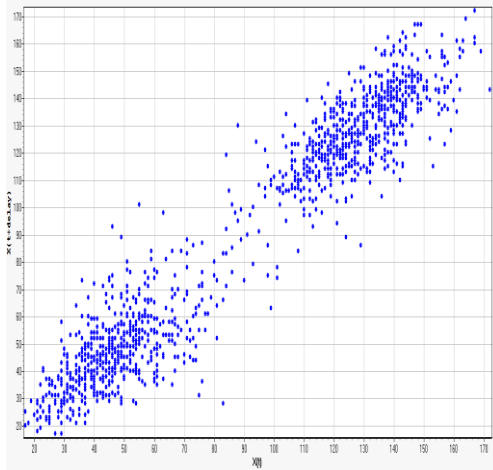


La formazione di tali livelli è evidente anche nella distribuzione di probabilità (fig. 46) e nello spazio delle fasi con tempo di ritardo di un giorno (figg. 47 e 48).

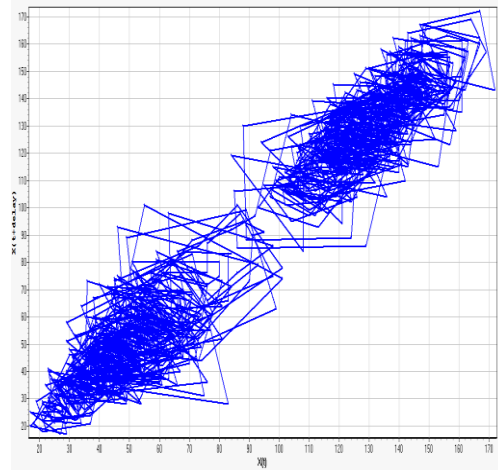
**Fig. 46 - Distribuzione di probabilità tempo medio per pagina**



**Fig.47 –Spazio fasi tempo medio p.**

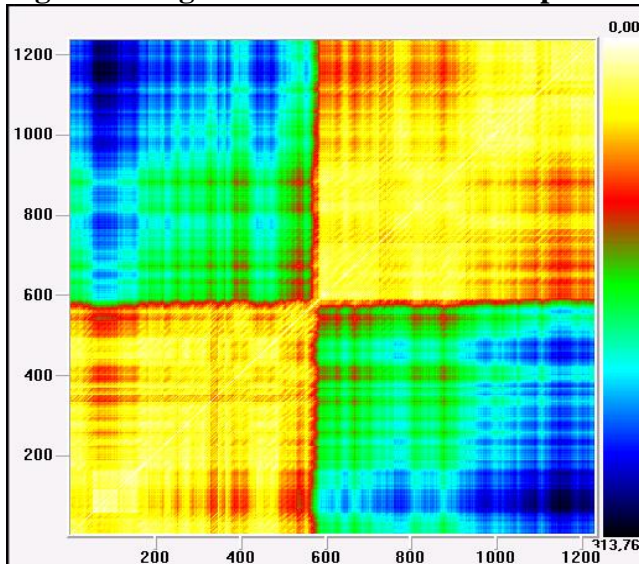


**Fig.48 -Spazio fasi traiettorie tempo medio p.**



Quanto al diagramma di ricorrenza (fig. 49), esso si compone di quattro parti: due quadrati chiari lungo la bisettrice e due rettangoli scuri. I vettori, formati dai dati, si possono dividere in due gruppi: dal 1° al 570° e dal 571° in poi. Se due vettori, appartengono entrambi al primo o al secondo gruppo, sono vicini (zone chiare), invece se un vettore è del primo gruppo e l'altro è del secondo, significa che sono lontani (zone scure). Si tratta di un'ulteriore conferma della distinzione dei due livelli. Inoltre, la predominanza del giallo nei quadrati anziché del bianco denota che i dati, entro un livello, variano.

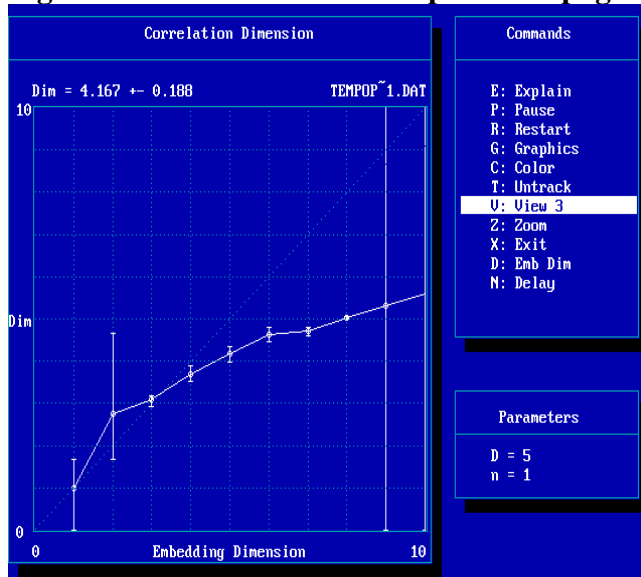
**Fig. 49 – Diagramma di ricorrenza tempo medio per pagina**



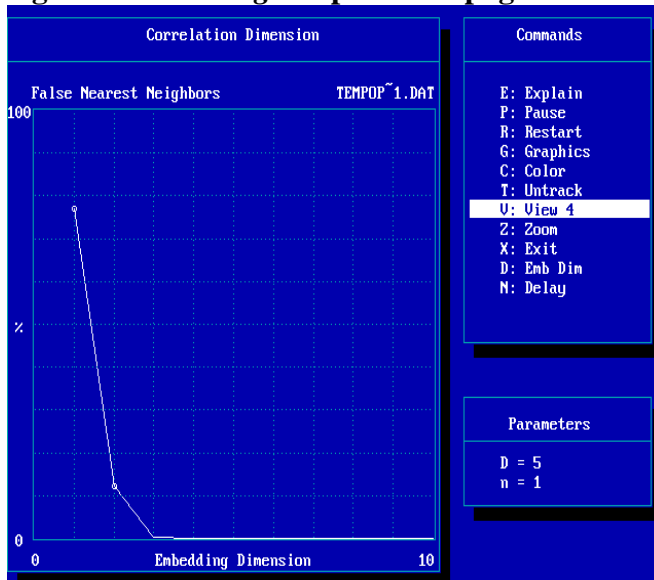
La dimensione di correlazione (fig. 50) non si satura, invece i falsi vicini (fig. 51) si azzerano in modo quasi preciso a partire da una dimensione di *embedding* pari a 3. Secondo questi risultati, la serie non è dotata di attrattore; l'annullamento drastico dei falsi vicini potrebbe essere attribuibile all'esistenza dei due livelli.



**Fig. 50 – Dim.correlazione tempo medio pagina**

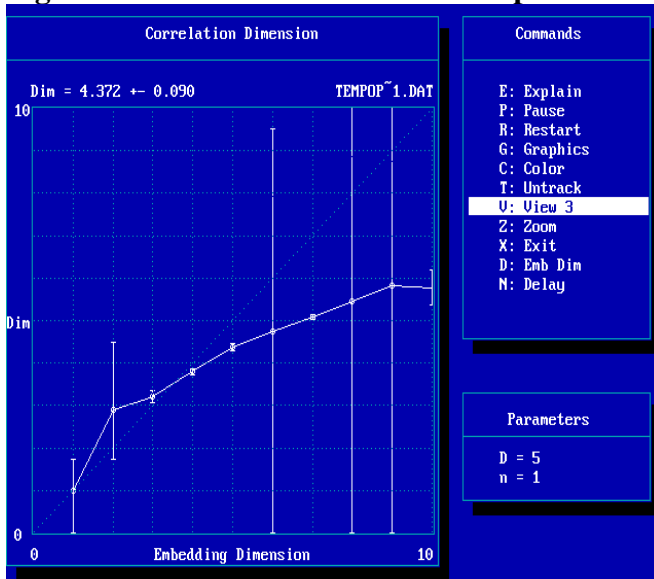


**Fig. 51– Embedding tempo medio pagina**

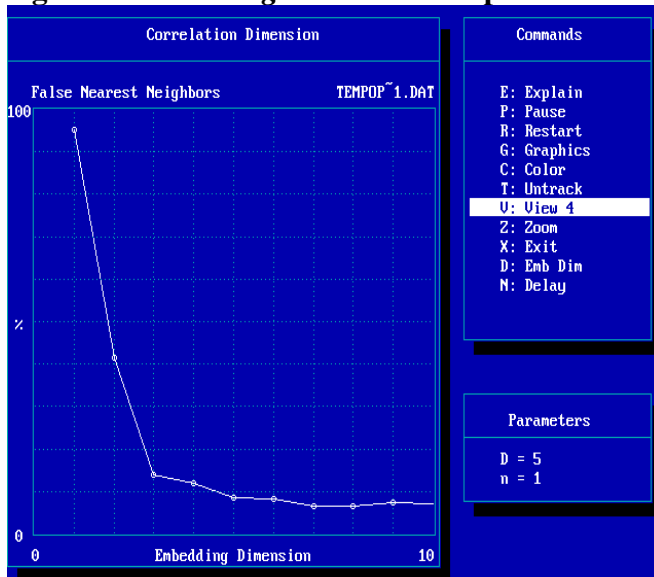


Si prova la detrendizzazione e si ottiene la serie delle variazioni dei tempi per pagina che risulta rumorosa, centrata su un solo valore e non periodica; poiché la dimensione di correlazione non si stabilizza (fig. 52) e i falsi vicini non si azzerano (fig. 53), non si procede alla previsione con il *CDA*.

**Fig. 52 – Correlazione variazioni tempo medio**



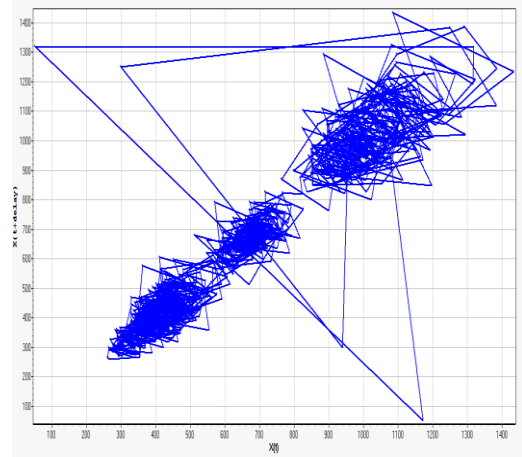
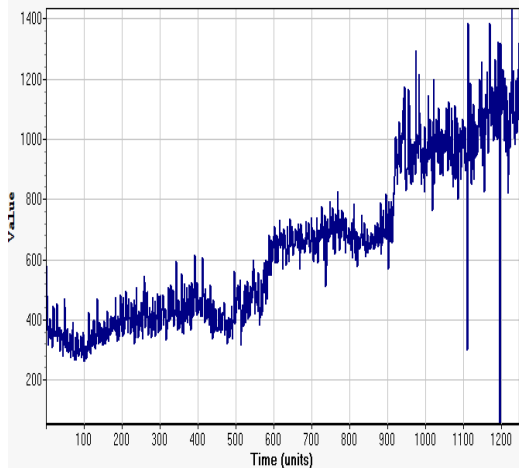
**Fig. 53 – Embedding variazioni tempo medio**



## 6. Il tempo medio per visita

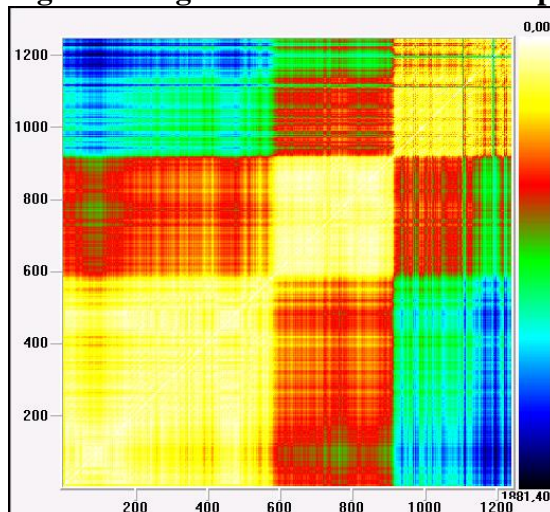
Adesso viene ispezionata la serie storica del tempo medio per visita. Il diagramma temporale (fig. 54) evidenzia tre livelli con *trend* e oscillazioni.

**Fig. 54 – D.temporale tempo medio visita Fig. 55 – Spazio fasi tempo medio visita**



Tali livelli si riscontrano anche nello spazio delle fasi con tempo di ritardo di un giorno (fig. 55) e in particolare sul diagramma di ricorrenza (fig. 56). Questo consta di nove aree: tre chiare lungo la bisettrice, altre quattro rosse con sfumature verdi e le restanti di colore predominante blu. I vettori si possono ripartire in tre gruppi: dal  $1^\circ$  al  $578^\circ$ , dal  $579^\circ$  al  $910^\circ$  e dal  $911^\circ$  in poi. Se due vettori, appartengono entrambi al primo o al secondo o al terzo gruppo, sono vicini (zone gialle); se i vettori sono inclusi in gruppi contigui, cioè nel primo e secondo o nel secondo e terzo, si trovano a una distanza maggiore (zone rosse); se i due vettori sono contenuti nel primo e nel terzo gruppo, allora sono lontani (zone blu).

**Fig. 56 - Diagramma di ricorrenza tempo medio per visita**

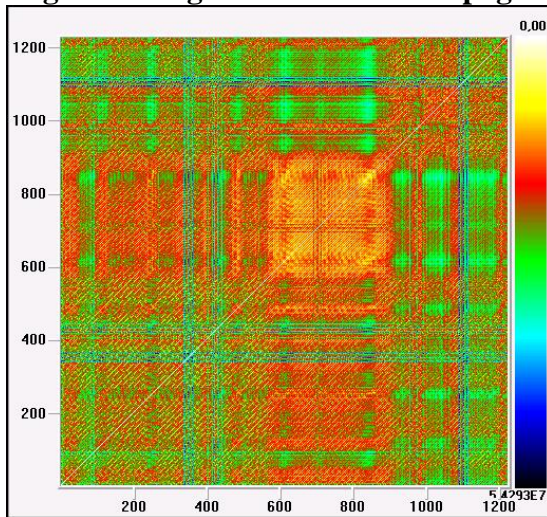


Poiché gli altri parametri (correlazione, *embedding*...) si comportano come quelli del tempo medio per pagina, si possono trarre le stesse conclusioni della serie precedente.

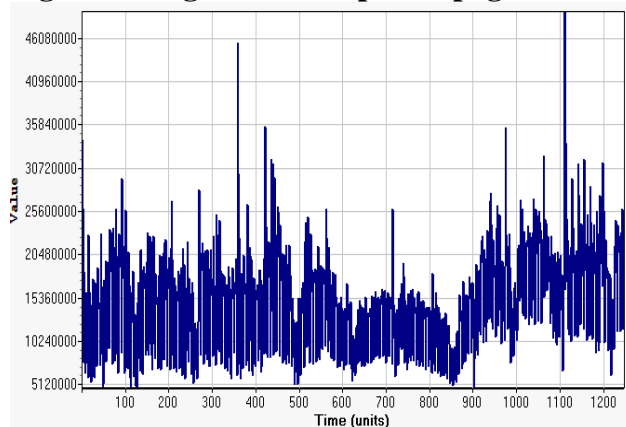
## 7. Il numero di pagine viste

L'ultima serie presa in esame, cioè il numero di pagine viste al giorno, ha un diagramma di ricorrenza (fig. 57) in cui si rileva un quadrato rosso e giallo, collocato tra il  $560^\circ$  e il  $903^\circ$  vettore, che dimostra la maggiore vicinanza dei dati in quell'intervallo e un diagramma temporale (fig. 58) che si può ritenere quasi stazionario.

**Fig. 57 – Diagramma ricorrenza pagine**

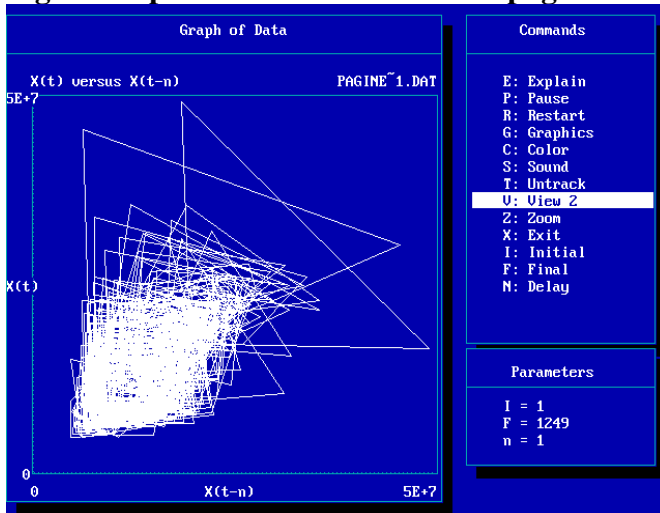


**Fig. 58 – Diagramma temporale pagine**



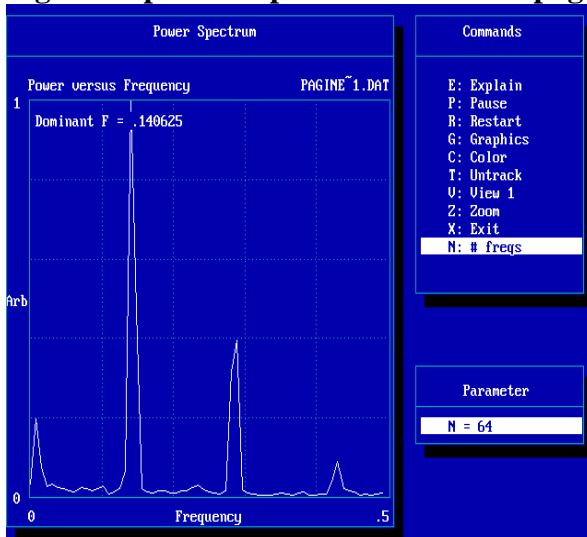
Lo spazio delle fasi (fig. 59) con ritardo di 1 giorno riempie una zona quadrangolare, circondata da punti esterni, da cui si può affermare che nella serie ci sono oscillazioni con ampiezze variabili.

**Fig. 59 – Spazio delle fasi numero di pagine**

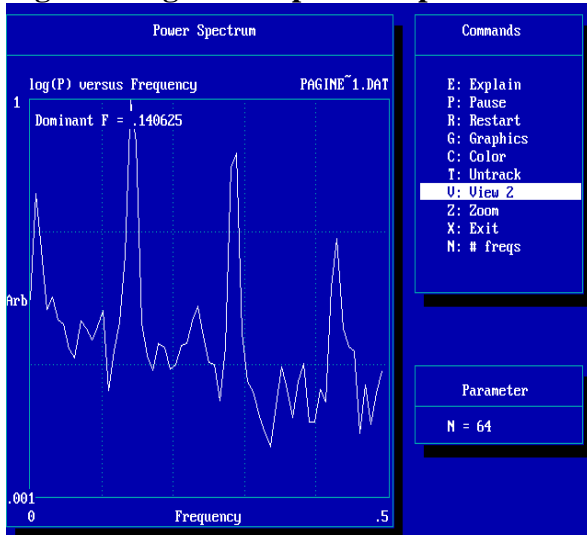


Come nella serie delle visite, anche in questo caso si rileva una periodicità di 7 giorni (fig. 60), ma il segnale non si replica esattamente (figg. 59 e 61).

**Fig. 60 - Spettro di potenza numero di pagine**

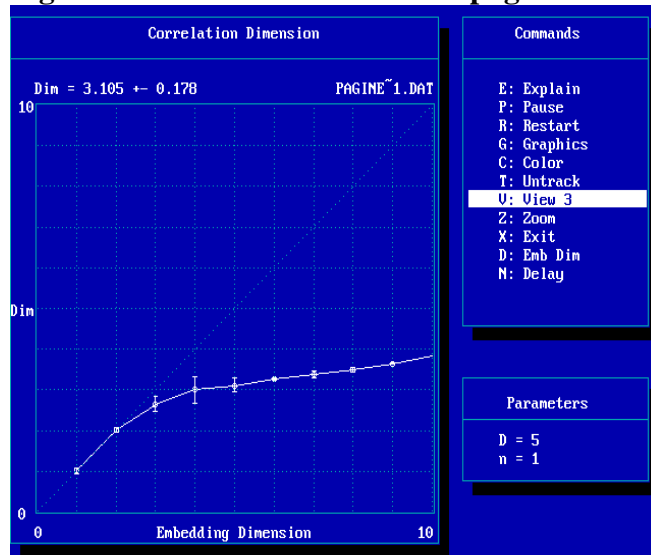


**Fig. 61 - Logaritmo spettro di potenza numero di pagine**

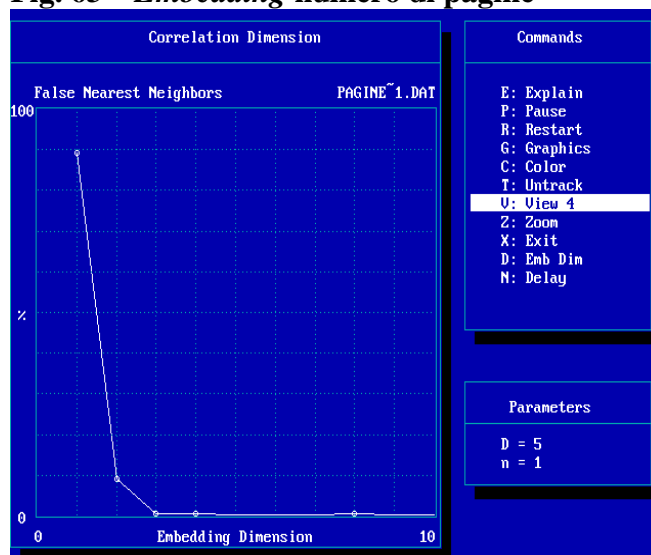


Per le pagine de “Il Corriere della Sera”, la dimensione di correlazione tende a saturarsi<sup>30</sup> (fig. 62), da cui si deduce l’esistenza di un attrattore, formato da punti che, uniti nello spazio delle fasi in dimensione 2, appaiono come in figura 59. La dimensione minima di *embedding*<sup>31</sup> è pari a 3 (fig. 63) e gli esponenti di Lyapunov risultano positivi.

**Fig. 62 – Correlazione numero di pagine**



**Fig. 63 – Embedding numero di pagine**

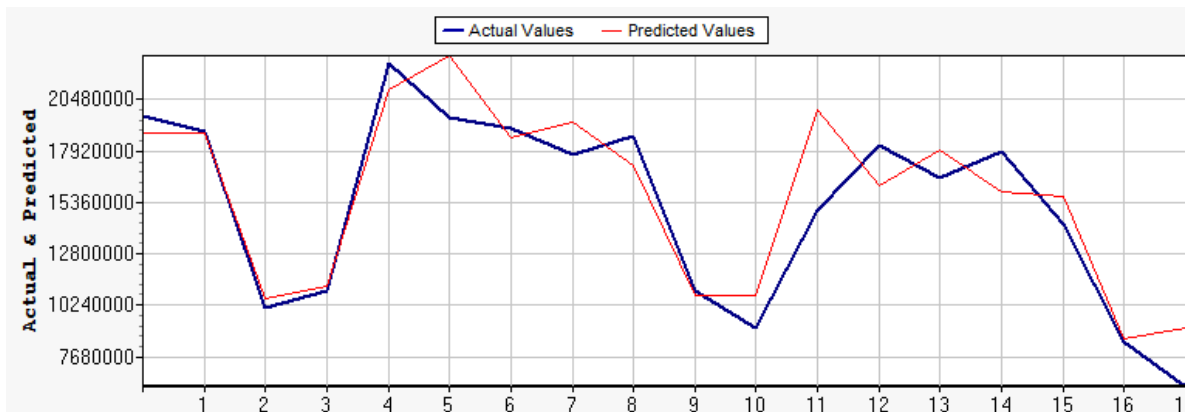


La predizione, effettuata con il VRA, dal 1203° al 1220° valore, riproduce tendenzialmente l’andamento dei dati reali (fig. 64).

<sup>30</sup> Nella serie senza trend, la dimensione di correlazione si stabilizza maggiormente.

<sup>31</sup> La dimensione di *embedding* è stata determinata con la procedura “smooth” che permette di sopprimere alcuni valori anomali (outliers) della serie.

**Fig. 64 – Previsione non lineare numero di pagine**



### **8. Considerazioni sulla caoticità delle serie**

Con lo studio delle serie del sito web del “Il Corriere della Sera” si è cercato di mettere in pratica i principali concetti della teoria del caos e di scorgere la natura delle serie, determinando la sensibilità alle condizioni iniziali con gli esponenti di Lyapunov e la presenza di un attrattore, attraverso l’individuazione della sua dimensione. Dopo una fase preliminare di descrizione, che ha visto l’uso di diversi strumenti, come il diagramma di ricorrenza, lo spazio delle fasi e lo spettro di Fourier, e di analisi non lineare, a seconda delle situazioni e dei risultati ottenuti, si è tentata una previsione di breve termine che coincideva tendenzialmente con l’andamento dei dati reali. Un aspetto fondamentale emerso da questo studio riguarda la natura delle serie esaminate. Infatti si è visto che, a differenza dei sistemi ideali che possono essere perfettamente caotici (o periodici o casuali), quando si lavora con i dati reali ci si può trovare di fronte a situazioni “intermedie”, a volte difficilmente classificabili. Tale difficoltà si amplifica se i dati provengono dalle scienze sociali, per le quali è dunque meno frequente scorgere il caos in senso pieno. Pertanto, per le serie esplorate, non si è parlato di caos “perfetto” ma piuttosto di “segni” di caoticità che comunque sollevano un certo interesse per comprendere la natura dei dati, fornire una loro descrizione e un tentativo di previsione.

## QUARTO CAPITOLO

### Alcune applicazioni nelle scienze sociali

#### 1. Introduzione

Dopo aver esplorato l'uso della teoria del caos nelle serie storiche del sito web de "Il Corriere della Sera", si continuano a esaminare ulteriori utilizzi delle dinamiche non lineari nelle scienze sociali sulla base degli aspetti teorici affrontati nel secondo capitolo. L'impiego di strumenti matematici non lineari e caotici nelle scienze della società ha prodotto diversi risultati nella formulazione di modelli: si ricordano quelli applicati alla mortalità infantile (Priesmeyer, 1995), alla criminalità (Condorelli, 2007), alla corruzione nelle società democratiche (Rinaldi *et al.*, 1998), alle dinamiche di interazione tra i partiti politici (Brown, 1994 e 1995a; Colombo e Rinaldi, 2008), ai processi di diffusione delle informazioni (West, 1997), alla produzione di *know-how* tra professioni creative (Rinaldi *et al.*, 2000) e perfino alle relazioni d'amore (Strogatz, 1988; Gragnani *et al.*, 1997b; Rinaldi e Gragnani, 1998; Sprott, 1988 e 2005).

In questo capitolo si descrivono due modelli: il primo, di tipo discreto, è stato ipotizzato dal fisico americano Alvin Saperstein (1984) e affronta le condizioni che conducono allo scoppio della guerra tra due paesi; il secondo, di tipo continuo, è il famoso studio del biologo americano Alfred Lotka (1925) e del matematico italiano Vito Volterra (1926) sulle dinamiche delle popolazioni. Si sviluppa poi una variante del modello Lotka-Volterra, attuata da Dimitrios Dendrinos (1980), relativa alle interazioni tra la popolazione di una città e il suo reddito, con un'applicazione alle città statunitensi di New York e Los Angeles (Dendrinos e Mullally 1981, 1985; Dendrinos 1992b). Per quanto riguarda i modelli del tipo preda-predatore, è bene precisare che essi fanno uso delle tecniche non lineari ma non sfociano nel caos vero e proprio, dato che quest'ultimo nei sistemi continui necessita di almeno tre variabili<sup>32</sup>. Tuttavia lo studio di tali situazioni è essenziale in quanto si avvale delle problematiche di equilibrio, nonché di aspetti preliminari al caos. Nel paragrafo 4, si esprimono alcune considerazioni sui modelli esaminati.

---

<sup>32</sup> In realtà un modello continuo si può trasformare in discreto; in tal caso il caos può apparire a partire da una sola variabile (Sprott, 2003).



In conclusione, si presenta la ricerca di McBurnett (1996a, 1996b) che si è avvalso delle tecniche di analisi non lineari per studiare i dati longitudinali raccolti durante il sondaggio elettorale della *nomination* democratica americana del 1984.

## 2. Guerra e caos

La storia è ricca di esempi di ostilità in cui piccole perturbazioni o incidenti hanno acceso guerre o conflitti armati. Il tentativo di comprendere le dinamiche di passaggio da uno stato di pace a uno di guerra ha condotto Alvin Saperstein (1984, 1996, 1999) a formulare diversi modelli non lineari sulla corsa agli armamenti, supponendo che lo scoppio di conflitti armati è, da un punto di vista matematico, analogo agli eventi che si verificano all'insorgere di un fenomeno di turbolenza. Saperstein ha infatti mostrato come alcuni strumenti matematici, che descrivono la transizione in un getto d'acqua dallo stato laminare a quello turbolento, potessero essere impiegati per interpretare lo scoppio di conflitti tra nazioni. In particolare, lo studioso americano ha ipotizzato che il passaggio dalla pace alla guerra, momento in cui la predicibilità di lungo termine e il controllo sono difficilmente attuabili, corrisponde alla formazione di elementi di caos, rilevabile dalle equazioni dei modelli che propone.

Si esamina adesso il primo modello non lineare di Saperstein (1984) che riguarda la corsa alle armi tra coppie di nazioni, adoperando un sistema discreto. La variabile usata per ciascuna nazione è il rapporto tra le spese di approvvigionamento di armi e il prodotto nazionale lordo di quella nazione in un dato ciclo di bilancio. Tale quantità viene definita "devozione" della nazione verso le spese militari e assume un valore tra 0 e 1. In tab. 1 si mostra la "devozione" di alcuni paesi europei durante gli anni '30, che hanno poi subito il passaggio dalla pace alla seconda guerra mondiale.

**Tab. 1- Devozione alle spese militari**

| Year | France | Germany | Italy  | United Kingdom | USSR   |
|------|--------|---------|--------|----------------|--------|
| 1934 | 0.0276 | 0.0104  | 0.0443 | 0.0202         | 0.0501 |
| 1935 | 0.0293 | 0.0125  | 0.0461 | 0.0240         | 0.0552 |
| 1936 | 0.0194 |         | 0.0298 | 0.0296         | 0.0781 |
| 1937 | 0.0248 |         | 0.0359 | 0.0454         | 0.0947 |

Fonte: Enns, 2011, p. 327

Si considerano due nazioni  $x$  ed  $y$  in competizione, coinvolte nella corsa alle armi e le loro devozioni  $x_n$  e  $y_n$  nell'anno  $n$ . E' ragionevole assumere che la devozione di una nazione alle armi al tempo  $n+1$  sia proporzionale alla devozione dell'altra nazione nell'anno precedente (Enns, 2011), cioè:

$$\begin{cases} x_{n+1} \text{ proporzionale } y_n \\ y_{n+1} \text{ proporzionale } x_n \end{cases}$$

Tuttavia, Saperstein modifica questa proporzionalità assumendo che la devozione massima di una nazione, per esempio  $y$  non induce nuovi armamenti nell'altra  $x$  per l'anno successivo, in quanto  $y$  non potrà aumentare le spese belliche, avendo già investito il massimo l'anno precedente, cioè  $y_n = 1$ . Tali ipotesi sono esplicitate in un sistema di equazioni che assumono la forma

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4ay_n(1 - y_n) = F_a(y_n) \\ y_{n+1} = 4bx_n(1 - x_n) = F_b(x_n) \end{cases} \quad \text{con } a, b \in [0,1] \quad (1)$$

dove  $a$  e  $b$  sono dei coefficienti di proporzionalità che indicano il livello, compreso tra 0 e 1, di spese belliche di un paese, data la devozione dell'altro paese nell'anno precedente. Tali coefficienti vengono ricavati dalle devozioni delle coppie di nazioni in anni consecutivi. Si considerano per esempio, la Francia ( $x$ ) e la Germania ( $y$ ) negli anni 1934-35 e si indicano il 1934 con  $n=0$  e l'anno successivo con  $n=1$ . Dai valori della devozione in tab.1, cioè  $x_0 = 0,0276$ ,  $y_0 = 0,0104$ ,  $x_1 = 0,0293$ ,  $y_1 = 0,0125$ , si calcolano  $a$  e  $b$ :

$$a = \frac{x_1}{4y_0(1 - y_0)} = 0,712; \quad b = \frac{y_1}{4x_0(1 - x_0)} = 0,116$$

In questo caso, la Francia ha un livello di spese belliche maggiore rispetto alla Germania. I valori dei due coefficienti per le altre coppie di nazioni sono riportati in tab. 2.

**Tab. 2 - Coefficienti  $a$  e  $b$**

| Countries      | Years Used in Estimate | $a$   | $b$    |
|----------------|------------------------|-------|--------|
| France–Germany | 1934–35                | 0.712 | 0.116  |
| France–Italy   | 1936–37                | 0.214 | 0.472  |
| UK–Germany     | 1934–35                | 0.582 | 0.158  |
| UK–Italy       | 1934–35                | 0.142 | 0.582  |
| USSR–Germany   | 1934–35                | 1.34  | 0.0657 |
| USSR–Italy     | 1936–37                | 0.819 | 0.125  |

Fonte: Enns, 2011, p.329

Il sistema a due variabili (1) può essere facilmente trasformato in una sola variabile nel seguente modo:  $x_{n+2} = F_a(y_{n+1}) = F_a(F_b(x_n)) = F_{ab}(x_n)$

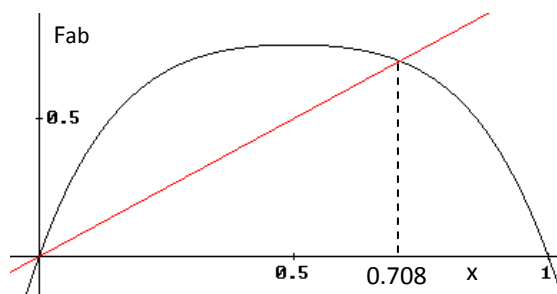
Quest'equazione esplicitata diventa:

$$x_{n+2} = 4ay_{n+1}(1 - y_{n+1}) \text{ ovvero } x_{n+2} = 16abx_n(1 - x_n)[1 - 4bx_n(1 - x_n)]$$

Essa è una semplice formula di ricorsione a una sola variabile da cui si ricava  $x_{n+2}$  a partire da  $x_n$ . Analogamente, si può procedere per la  $y$ .

Si esaminano ora le proprietà della funzione  $F_{ab}$ , iniziando dai punti fissi che si ottengono dall'equazione  $F_{ab}(x) = x$ . Per esempio se  $a = 0,8$  e  $b = 0,4$ , i punti di equilibrio sono  $x = 0$  e  $x = 0,708$  come risulta anche dall'intersezione della funzione con la bisettrice  $y = x$  (fig. 1).

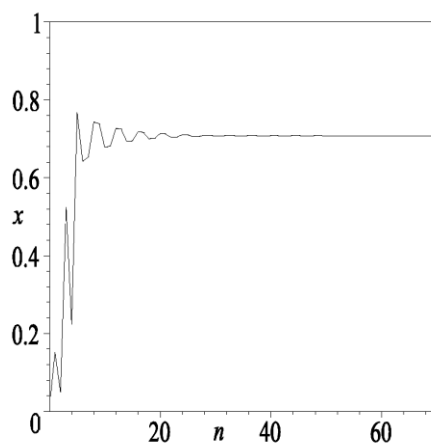
**Fig. 1 - Intersezione della funzione con la bisettrice**



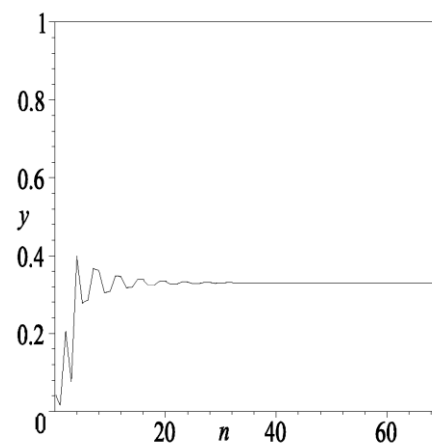
Si può anche confermare che i due punti sono di equilibrio, verificando che  $F_{ab}(0) = 0$  e  $F_{ab}(0,708) = 0,708$ . Quanto alla natura degli equilibri, il punto 0 è instabile perché la

derivata di  $F_{ab}$  in 0, valendo 5,12, è maggiore di 1; invece il punto 0,708 è stabile in quanto la derivata corrispondente, risultando -0,722, è in valore assoluto minore di 1. Questi risultati emergono anche confrontando la pendenza della curva nei due punti con quella della bisettrice. Tale conclusione viene inoltre convalidata iterando le equazioni di  $F_a$  ed  $F_b$ , cioè  $x_{n+1} = F_a(y_n)$  e  $y_{n+1} = F_b(x_n)$  a partire, per esempio, dai punti iniziali  $x_0 = 0,01$  e  $y_0 = 0,05$ ; si riscontra che la deviazione  $x$  in funzione di  $n$  raggiunge l'equilibrio a 0,708 (fig. 2) e analogamente, la  $y$  tende al valore di equilibrio di 0,331 (fig. 3).

**Fig. 2 – Equilibrio della x**



**Fig. 3 – Equilibrio della y**



Fonte: Enns, 2011, p. 330

Se  $b$  da 0,4 viene portato a 0,86 a parità di  $a$ , la  $F_{ab}$  avrà due punti fissi instabili in  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0,427$  dato che le rispettive derivate pari a 11 e -1,1 in valore assoluto, sono entrambe maggiori di 1. Nel passaggio di  $b$  da 0,4 a 0,86 l'equilibrio  $x_1 = 0$  rimane invariato come valore e instabilità, invece il punto di equilibrio 0,708 diventerà 0,427, cambiando il valore e transitando da stabile a instabile. Replicando la funzione, si ottiene la seconda iterata  $F_{ab}^{(2)}$  i cui punti fissi, riportati in tab. 3, si calcolano dall'equazione:  $F_{ab}^{(2)}(x) = F_{ab}(F_{ab}(x)) = x$  con  $a=0,8$  e  $b=0,86$ .

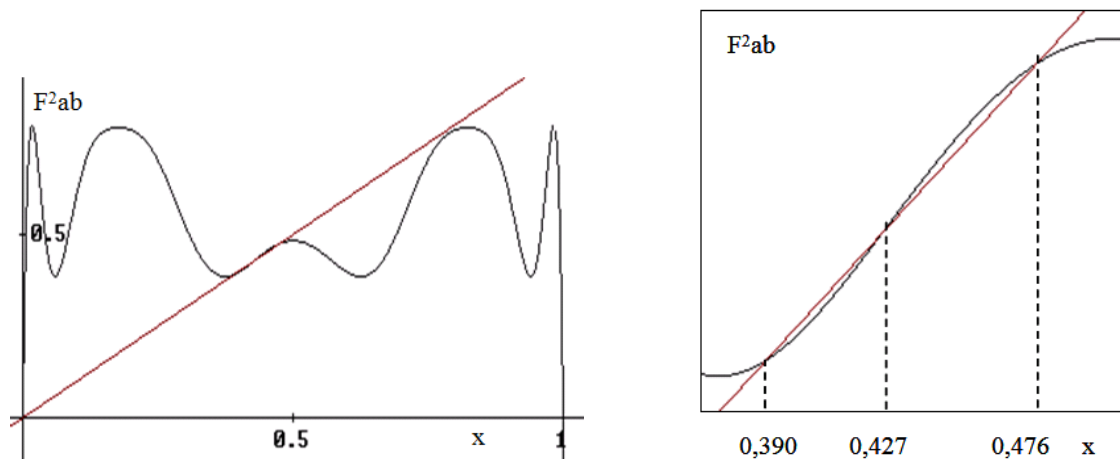
**Tab. 3 – Stabilità dei punti fissi**

| Fixed point ( $\bar{x}$ ) | Slope | Stability |
|---------------------------|-------|-----------|
| 0                         | 121.2 | unstable  |
| 0.390                     | 0.590 | stable    |
| 0.427                     | 1.21  | unstable  |
| 0.476                     | 0.590 | stable    |

Fonte: Enns, 2011, p.331

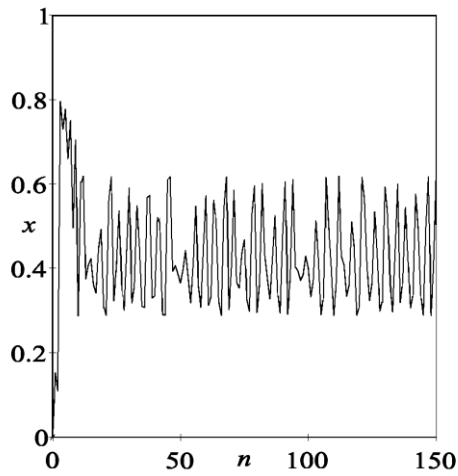
Essi possono essere determinati anche graficamente dall'intersezione della funzione  $F_{ab}^{(2)}$  con la bisettrice (fig. 4). Evidentemente i valori 0 e 0,427 erano di equilibrio instabile per  $F_{ab}$  e lo sono anche per  $F_{ab}^{(2)}$ . In più si individuano due punti fissi stabili a 0,390 e 0,476 di  $F_{ab}^{(2)}$ , per cui si può verificare che  $F_{ab}(0,39) = 0,476$  e  $F_{ab}(0,476) = 0,39$ . Quindi, questi due punti per  $F_{ab}$  rappresentano un'orbita stabile di periodo 2. La natura degli equilibri emerge dal calcolo delle derivate (tab. 3), ma anche graficamente (figg. 4 e 5) in cui si vede che la pendenza della funzione in 0,39 e in 0,476 è minore di quella della bisettrice, mentre in 0 e in 0,427 essa è maggiore.

**Fig. 4 – Intersezione  $F_{ab}^{(2)}$  con la bisettrice**    **Fig. 5 – Zoom  $F_{ab}^{(2)}$  con la bisettrice**

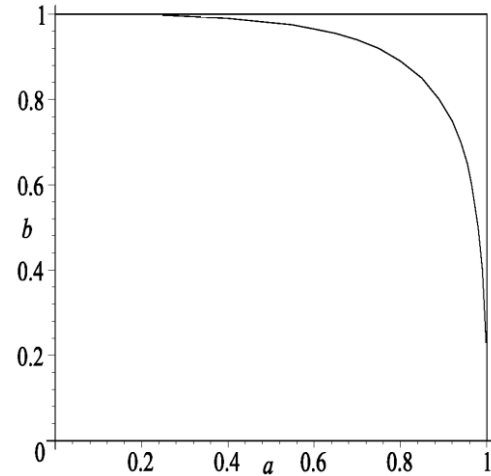


Se  $b$  cresce ulteriormente fino a raggiungere il valore di 0,90, continua la trasformazione dell'orbita stabile in instabile e la nascita di un'orbita stabile di periodo doppio rispetto al precedente. In seguito, tutte le orbite diventano instabili e si entra in un regime caotico. A partire dalle condizioni iniziali precedenti, cioè  $x_0 = 0,01$  e  $y_0 = 0,05$ , sempre con  $a=0,8$  e  $b$  incrementato a 0,9, si ottiene il diagramma temporale in fig. 6 che non mostra periodicità anche per  $n$  maggiori; ciò è un'indicazione della presenza di caos. Ripetendo il diagramma per la variabile  $y$ , si può osservare che anch'essa esibisce un andamento aperiodico e quindi caotico. A questo punto, Saperstein ha ripetuto il calcolo di  $b$  da cui incomincia il caos per vari valori di  $a$ , ottenendo la curva di  $b$  in funzione di  $a$  (fig. 7).

**Fig. 6 - Diagramma temporale di  $x$**



**Fig. 7 – Diagramma  $b$  in funzione di  $a$**



Fonte: Enns, 2011, p.332-33

Si giunge alla conclusione che il sistema è caotico, se i punti sono al di sopra della curva. L'inizio del caos viene confermato anche dagli esponenti di Lyapunov che da negativi diventano positivi. Sulla base dell'ipotesi di Saperstein, per stabilire se le coppie di nazioni indicate in tab. 2 sono alle soglie della guerra, bisogna verificare che i coefficienti  $b$  ed  $a$  si trovano in regime caotico ovvero siano le coordinate di punti appartenenti alla suddetta area.

Consegue così che la Russia e la Germania sono alle soglie della guerra, come è effettivamente avvenuto dal 1941 al 1945, mentre la Francia e la Germania, l'Unione Sovietica e l'Italia con i valori alti di  $a$  possono sviluppare facilmente azioni che portano  $a$  e  $b$  in uno stato caotico.

### **3. Il modello preda-predatore**

Intorno agli anni '20 il biologo americano Alfred James Lotka e il matematico italiano Vito Volterra proposero indipendentemente uno dei modelli più noti di dinamiche non lineari applicato all'interazione tra popolazioni, seguendo uno schema preda-predatore. Volterra, stimolato dal genero e biologo Umberto D'Ancona che studiava le fluttuazioni di alcune popolazioni di pesci dell'Adriatico, intendeva spiegare l'aumento di una specie di predatori (squali) a fronte della diminuzione del numero di prede (sardine). Questa ricerca non ha solo valore storico, ma costituisce ancora oggi il fondamentale punto di partenza di una numerosissima serie di altri modelli preda-predatore più raffinati e più ricchi di elementi utilizzati per la descrizione della dinamica in tempo continuo di

popolazioni in reciproca interazione (Bertuglia e Vaio, 2007). Il modello è descritto dalla coppia di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx) \end{cases}$$

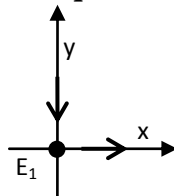
dove  $x$  è la popolazione delle prede e  $y$  quella dei predatori;  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ , cioè le derivate rispetto al tempo delle due variabili, rappresentano le velocità di variazione di  $x$  e di  $y$ . Quanto ai coefficienti, tutti positivi,  $a$  rappresenta il tasso di natalità delle prede,  $b$  è il tasso di mortalità delle prede per predazione,  $d$  indica il tasso di riproduzione dei predatori per predazione ed infine  $c$  fornisce il tasso di mortalità dei predatori. La non linearità del modello emerge dalla presenza dei prodotti  $xy$ , ossia dalla frequenza degli incontri tra prede e predatori.

Per studiare il comportamento del modello, si inizia dalla ricerca di eventuali soluzioni di equilibrio del sistema di equazioni differenziali. Quindi, basta imporre che si annullino contemporaneamente le due derivate rispetto al tempo.

Ponendo  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} = 0$ , si ottengono i punti di equilibrio  $E_1(0,0)$  ed  $E_2\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  da cui è possibile esprimere una serie di considerazioni.

Se  $y=0$  (asse  $x$ ), la prima equazione del sistema suggerisce che  $x$  cresce nel tempo, come indica anche la direzione della freccia sull'asse  $x$  in fig.8, confermando che in assenza di predatori, le prede aumentano esponenzialmente. Se  $x=0$  (asse  $y$ ), la seconda equazione fornisce una decrescita di  $y$ , convalidando che in assenza di prede il numero dei predatori diminuisce esponenzialmente, come denota il verso della freccia in direzione negativa sull'asse  $y$  (fig.8). Dunque, l'equilibrio  $E_1$ , cioè l'estinzione sia di prede che di predatori, è stabile nella direzione  $y$  e instabile nella direzione  $x$ .

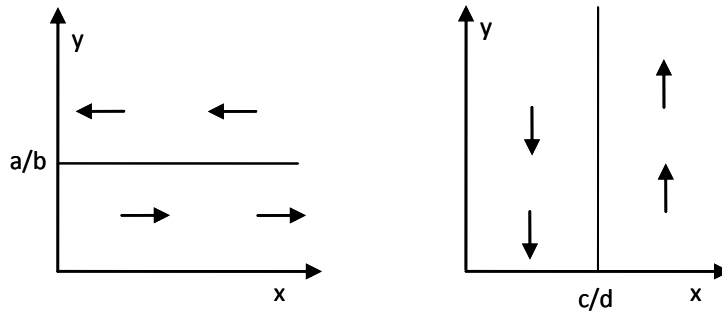
**Fig.8 – Equilibrio  $E_1$**



Per quanto concerne l'equilibrio  $E_2$ , per  $y < a/b$ , si verifica l'incremento di  $x$  nel tempo, come indica l'orientamento delle frecce verso destra in fig.9. Analogamente per  $y > a/b$  si ottiene una diminuzione di  $x$ , come mostrano anche le frecce orientate verso

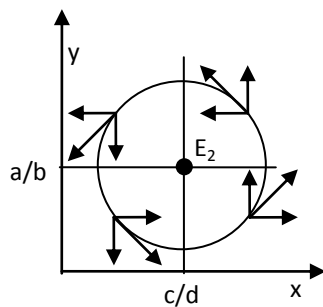
sinistra (fig. 9). Ripetendo il ragionamento per l'ordinata, si ricava che per  $x > c/d$  la  $y$  cresce, mentre per  $x < c/d$  diminuisce, come mostrano le frecce rivolte verso l'alto e verso il basso rispettivamente (fig. 10).

**Fig. 9 – Flusso orizzontale per  $E_2$**       **Fig. 10 – Flusso verticale per  $E_2$**



Sovrapponendo i due grafici precedenti e costruendo la risultante dei vettori che agiscono nel medesimo punto, si ottiene la rappresentazione in fig. 11.

**Fig. 11 – Equilibrio  $E_2$**



Questa configurazione suggerisce che l'orbita possa essere chiusa, cioè un centro. Per stabilire il tipo di equilibrio, si calcola la matrice jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

che nel punto di equilibrio  $E_2$ , diventa:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo la traccia  $T=0$  e il determinante  $D=ca$ , l'equazione agli autovalori è  $\lambda^2 + ca = 0$  da cui  $\lambda = \pm i\sqrt{ca}$ . Quindi, il sistema linearizzato prevede che l'orbita sia un centro con velocità angolare  $\omega = \sqrt{ac}$ . Dato che la velocità angolare è l'angolo giro



$2\pi$  diviso il periodo  $P$ , si ricava  $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}$  che indica la durata del ciclo. In

particolare,  $P$  indica il tempo impiegato dal numero di prede e predatori per compiere un'oscillazione completa, cioè il tempo affinché ciascuna popolazione aumenti dal valore minimo a quello massimo e ritorni nuovamente al valore minimo. Il periodo  $P$  è inversamente proporzionale alle radici del tasso di natalità delle prede ( $a$ ) e di mortalità dei predatori ( $c$ ). Come si è già detto alla fine del secondo capitolo, purtroppo, in presenza di  $\lambda$  immaginari e opposti, le conseguenze dedotte dal sistema linearizzato non sono sufficienti per stabilire l'esistenza del centro, perché l'orbita potrebbe essere anche una spirale.

Per un centro, ciascuna popolazione oscilla tra due valori, mentre per una spirale le popolazioni tendono o si allontanano dall'equilibrio a seconda che essa sia rispettivamente stabile o instabile. Per sciogliere il dilemma si possono usare funzioni appositamente costruite dette funzioni di Lyapunov (Alligood *et al.*, 1997, pp. 304-5) oppure, per questo modello, si può trovare la funzione implicita dell'orbita, essendo l'equazione differenziale integrabile:

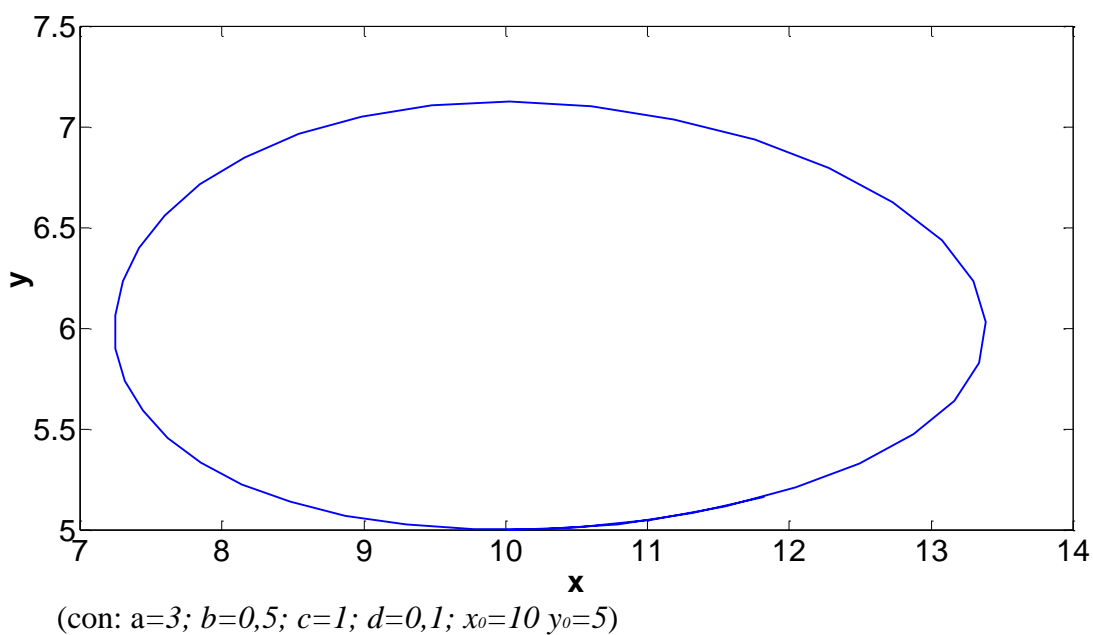
$$\begin{aligned} & \bullet \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)} \\ & \bullet \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

E' così possibile verificare che le intersezioni della curva con la retta  $x=c/d$ , cioè passante per  $E_2$ , sono al più due. Questo ci garantisce che l'orbita sia chiusa, altrimenti in presenza di spirale la traiettoria dovrebbe incontrare la retta in numerosi punti. I due metodi citati portano alla conclusione che le orbite possibili sono dei centri. Fissando i coefficienti e le condizioni iniziali, si ottengono un particolare centro che esprime la relazione tra le prede e i predatori (fig. 12) e le evoluzioni temporali delle due specie<sup>33</sup> (fig. 13). Si nota dai diagrammi che le popolazioni dopo un periodo si ripetono e che quando una specie assume il valore massimo o minimo, l'altra occupa il punto-equilibrio.

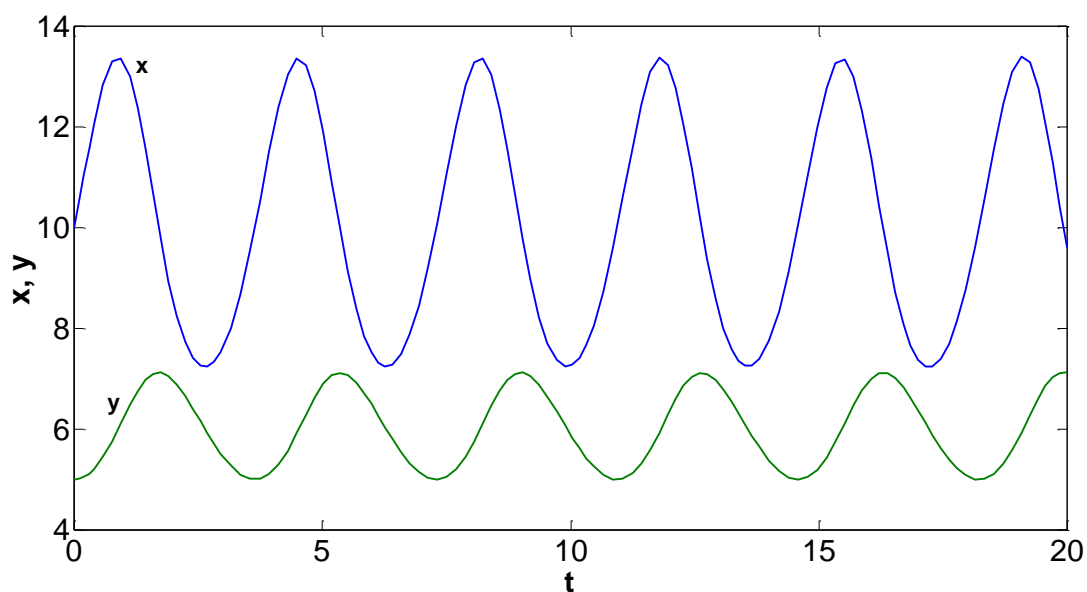
---

<sup>33</sup> Le simulazioni sono state effettuate con il software MATLAB.

**Fig. 12 – Diagramma di fase preda predatore**



**Fig. 13 – Diagramma temporale preda-predatore**

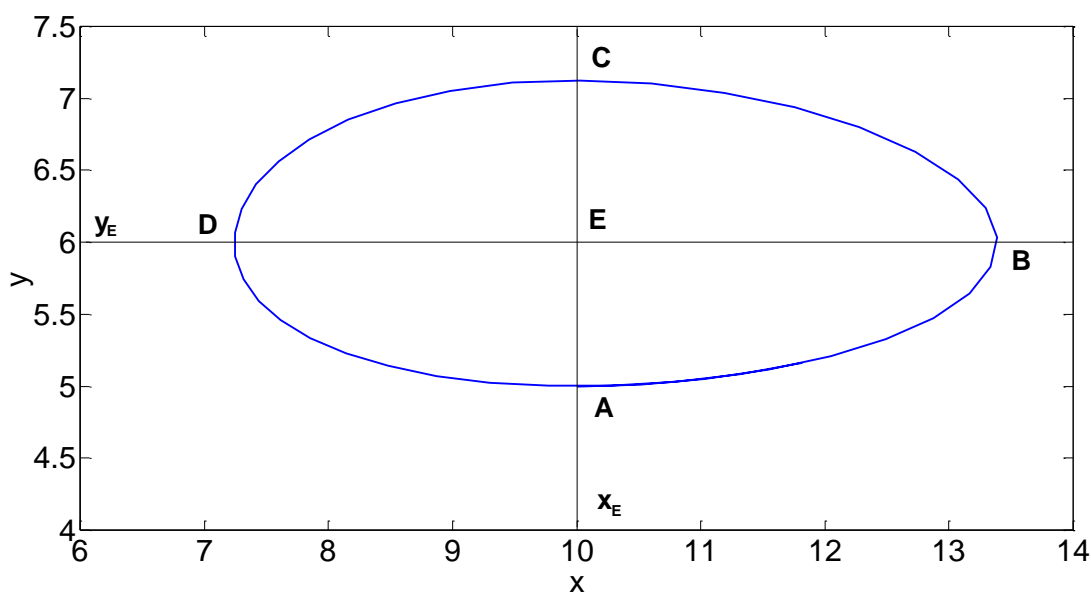


Considerando le coordinate dell'equilibrio  $E_2$ , cioè  $x_E = \frac{c}{d}$  ed  $y_E = \frac{a}{b}$ , le equazioni del sistema si possono scrivere come

$$\begin{cases} \dot{x} = bx(y_E - y) \\ \dot{y} = dy(x - x_E) \end{cases}$$

da cui è possibile estrarre interpretazioni intuitive sulla relazione ciclica tra prede e predatori (fig. 14).

**Fig. 14 – Diagramma di fase preda-predatore ABCDA**



Infatti:

- Tra A e B:  $x > x_E$  e  $y < y_E$  e ciò implica che  $\dot{y} > 0$  e  $\dot{x} > 0$  per cui  $x$  e  $y$  sono crescenti. Cioè, le prede ( $x$ ) che sono maggiori del valore di equilibrio ( $x_E$ ), fanno aumentare i predatori ( $y$ ), data l'abbondanza di cibo. Tuttavia questi ultimi, essendo minori rispetto al valore di equilibrio ( $y_E$ ), determinano così l'aumento delle prede a causa della carenza dei predatori.
- Tra B e C:  $x > x_E$  e  $y > y_E$ , così  $\dot{y} > 0$  e  $\dot{x} < 0$  da cui  $x$  è decrescente e  $y$  è crescente. Infatti le prede ( $x$ ), che sono maggiori del valore di equilibrio ( $x_E$ ), incrementano i predatori ( $y$ ). Però questi sono maggiori del valore di equilibrio ( $y_E$ ) per cui mangiano più prede, le quali diminuiscono.
- Tra C e D:  $x < x_E$  e  $y > y_E$ , per cui  $\dot{y} < 0$  e  $\dot{x} < 0$  cioè  $x$  ed  $y$  sono decrescenti. Dunque, le prede ( $x$ ), essendo inferiori al valore di equilibrio ( $x_E$ ), svantaggiano i predatori ( $y$ ) che diminuiscono; ma questi, essendo maggiori del valore di equilibrio ( $y_E$ ), divorano più prede che si riducono.
- Tra D ed A:  $x < x_E$  e  $y < y_E$ , quindi  $\dot{y} < 0$  e  $\dot{x} > 0$ , cioè  $x$  è crescente, mentre  $y$  è decrescente. Ovvero le prede ( $x$ ), sono inferiori al valore di equilibrio ( $x_E$ ), per cui si riduce il numero di predatori ( $y$ ). Questi ultimi, essendo minori del valore all'equilibrio ( $y_E$ ), favoriscono l'aumento delle prede.

### 3.1 Il modello popolazione-reddito

Le equazioni di Lotka-Volterra con opportune modifiche sono state utilizzate in varie situazioni di competizione. Sono stati elaborati infatti modelli relativi alle dinamiche di cambiamento del mercato del lavoro (Nijkamp e Reggiani, 1990), allo sviluppo di centri urbani e periferia (Orishimo, 1987), alla diffusione dell'innovazione tecnologica (Sonis, 1995). Molti contributi provengono dall'ambito dei sistemi urbani e alcuni di essi, oltre a basarsi su tecniche non lineari, sfociano nel caos; si menzionano, a tal proposito, i modelli di interazione spaziale a livello urbano e regionale (Nijkamp e Reggiani, 1992) e le ricerche di Dendrinos e Sonis (1987, 1988, 1989, 1990) che hanno mostrato come le variabili relative ai redditi delle regioni possano generare dinamiche caotiche. Sempre relative allo studio delle dinamiche delle popolazioni delle città, secondo un'ottica preda-predatore, sono le ricerche fornite da Demitrios Dendrinos (1980, 1984, 1992b) e da Dendrinos e Henry Mullally (1981, 1985) che hanno descritto le aree urbane, attraverso due variabili: la popolazione della città, normalizzata rispetto a quella nazionale, e il reddito medio procapite dei suoi abitanti.

Si presenta ora il modello elaborato da Dendrinos (1980), che investiga le dinamiche di interazione tra la popolazione  $x$  che funge da predatore e il reddito  $y$  che rappresenta la preda da inseguire, riprendendo così il meccanismo evolutivo già formulato da Lotka e Volterra. Si ipotizza, infatti, che un reddito più elevato in una data zona attrae popolazione, ma il conseguente aumento del numero di persone produce un abbassamento del reddito, che riduce così l'attrazione dell'area. Dendrinos si avvale del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax(y - 1 - bx) \\ \dot{y} = cy(x^* - x) \end{cases} \quad \text{con } (a, b, c, x^* > 0)$$

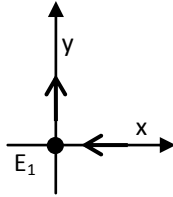
Rispetto al modello Lotka-Volterra, nella parentesi della prima equazione è presente il termine aggiuntivo  $-bx$ , il cui segno negativo rappresenta un freno all'incremento della popolazione dovuto all'affollamento ( $x$ ) e al tipo di città ( $b$ ). I coefficienti  $a$  e  $c$  designano rispettivamente le velocità di crescita della popolazione e del reddito procapite, quando le restanti parti dei secondi membri delle equazioni sono unitarie.

I punti di equilibrio del modello si ottengono al solito dal sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

che ammette la soluzione banale in  $x=0$  e  $y=0$ . In assenza di reddito, cioè  $y=0$ , la popolazione tende a estinguersi in quanto  $\dot{x} < 0$ . Per  $x=0$ , si ha un aumento del reddito perché  $\dot{y} > 0$ . L'equilibrio che si genera, quindi, è stabile rispetto alla  $x$  ed instabile rispetto alla  $y$ , formando così un punto sella (fig. 15).

**Fig. 15 – Equilibrio (0,0)**



Il punto di equilibrio non banale  $E$  si ha per  $x_E = x^*$  e  $y_E = 1 + bx^*$ . Per avere l'equilibrio del reddito  $y$ , la popolazione  $x$  deve raggiungere la capacità di carico  $x^*$ , intendendo per quest'ultima la popolazione con reddito stazionario. Dunque:

- per  $x < x^*$ , allora  $\dot{y} > 0$ , per il cui il reddito aumenta;
- per  $x > x^*$ , allora  $\dot{y} < 0$ , quindi il reddito diminuisce;
- quando  $x = x^*$ , il reddito è stazionario.

Per quanto concerne la popolazione  $x$ , essa è in equilibrio, cioè né aumenta né diminuisce, quando il reddito procapite eguaglia  $1 + bx$ , ossia la somma tra il reddito medio della popolazione nazionale posto uguale a 1 e il contrasto  $bx$  causato dall'affollamento dell'area urbana. Quindi:

- se  $y < 1 + bx$ , allora  $\dot{x} < 0$ , per cui la popolazione decresce, in quanto scoraggiata dall'effetto combinato del reddito nazionale (1) e del tipo di città ( $bx$ );
- se  $y > 1 + bx$ , allora  $\dot{x} > 0$ , per cui la popolazione aumenta.

Infine, se la popolazione è uguale alla capacità di carico  $x^*$  e il reddito è uguale a  $1 + bx^*$ , si forma l'equilibrio del sistema sia per  $x$  che per  $y$ . La matrice jacobiana è:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay - a - 2abx & ax \\ -cy & c(x^* - x) \end{pmatrix}$$

Essa, nel punto di equilibrio  $E(x^*; 1 + bx^*)$ , vale:

$$\begin{pmatrix} -abx^* & ax^* \\ -cy_E & 0 \end{pmatrix}$$

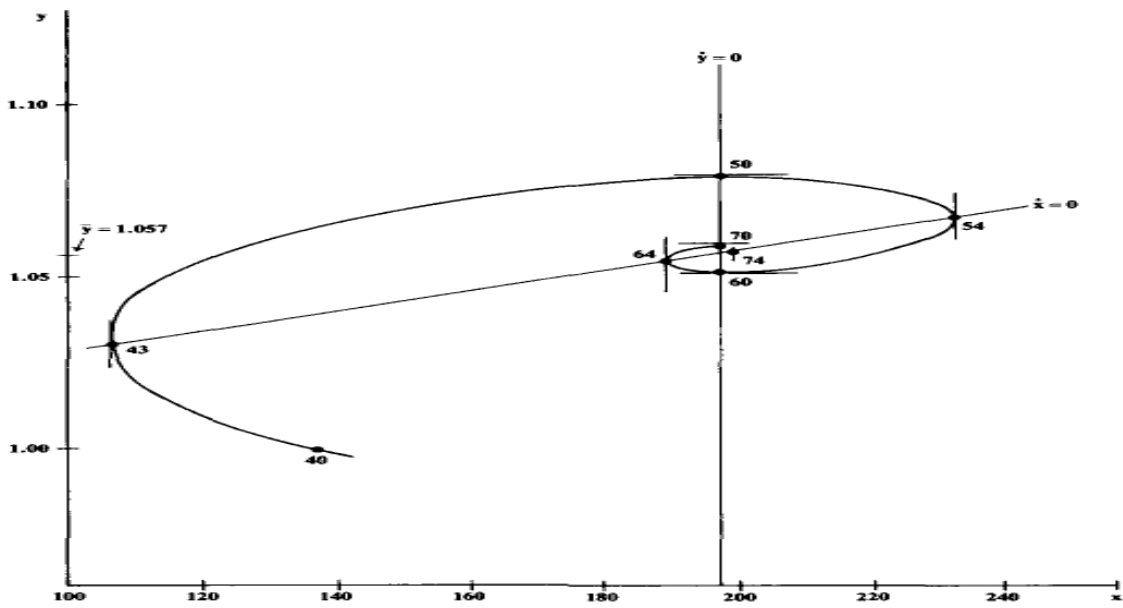
Si ricava in seguito l'equazione agli autovalori  $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$  dalla traccia  $T = -abx^*$  e dal determinante  $D = acx^*y_E$ . Poiché la somma delle radici della suddetta equazione, cioè la traccia, è negativa, e il loro prodotto, ovvero il determinante, è positivo, le soluzioni  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono entrambe reali e negative se il discriminante  $\Delta$  è positivo. Se quest'ultimo è negativo le soluzioni sono complesse coniugate con parte reale negativa. Comunque, in entrambi i casi, il punto nello spazio delle fasi tende all'equilibrio stabile  $(x_E, y_E)$  (Dendrinos e Mullally, 1981; Barkley Rosser, 2011)

### 3.1.1 Applicazione alle città di Los Angeles e New York

Il modello appena descritto è stata impiegato da Dendrinos e Mullally (1981, 1985) nello studio del comportamento di 90 città statunitensi nel periodo 1940-1977. I due ricercatori, rappresentando le popolazioni  $x$  in funzione del tempo, hanno trovato una varietà di situazioni (Barkley Rosser, 2011): 64 casi in cui la  $x$  oscilla intorno a un valore di equilibrio; 3 stati stazionari per cui la  $x$  rimane invariata; 21 perturbazioni, in cui la  $x$  subisce delle variazioni improvvise e 2 casi non classificabili. Nel piano delle fasi (reddito-popolazione) numerose oscillazioni e perturbazioni provenivano da spirali stabili, mostrando così che la maggior parte delle città tendeva verso uno stato di equilibrio.

Si riporta, per esempio, la simulazione nello spazio delle fasi del reddito medio pro-capite in funzione della popolazione normalizzata rispetto al valore nazionale (moltiplicata poi per  $10^5$ ), effettuata per Tacoma, una città nelle vicinanze di Washington, in cui si mostra la formazione di una spirale stabile che confluisce in un punto di equilibrio (fig. 16).

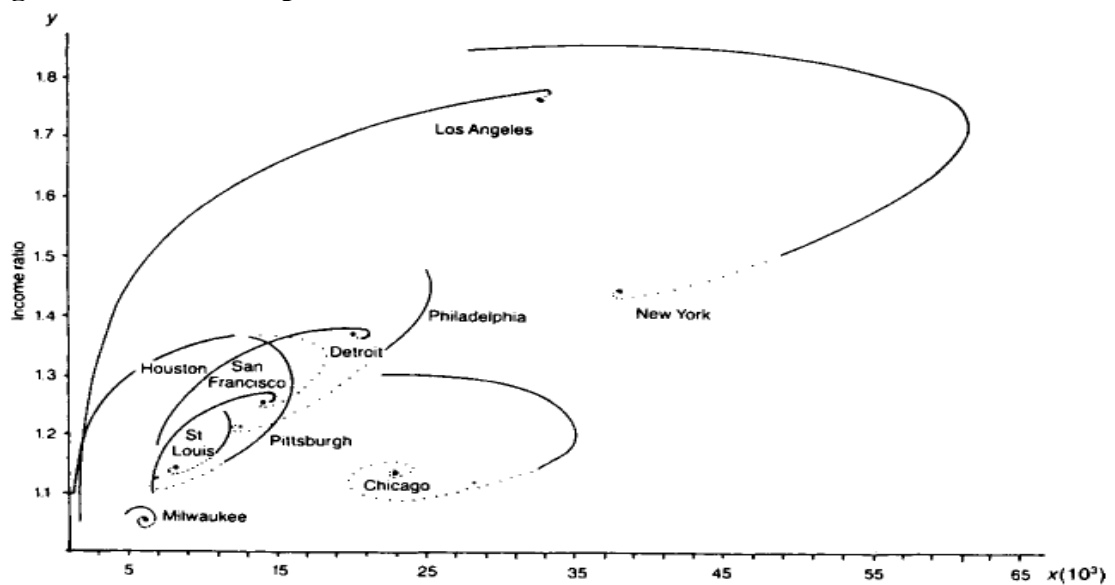
**Fig. 16 – Spirale stabile, città di Tacoma**



Fonte: Dendrinos e Mullally, 1981 p.341

In una ricerca successiva, Dendrinos (1992) si è occupato degli sviluppi di diverse città statunitensi tra il 1890 e il 1980. Si tratta di un periodo storico importante che ha visto, soprattutto dopo il secondo dopoguerra, significativi cambiamenti economici e sociali come fenomeni di migrazione interna e di suburbanizzazione, l'aumento dell'età media della popolazione, la nascita e lo sviluppo del settore dei servizi. In fig. 17 è riportata la simulazione effettuata per dieci aree metropolitane, in cui le linee tratteggiate indicano le proiezioni future orientate verso l'equilibrio finale.

**Fig. 17 – Simulazione per dieci città statunitensi**



Fonte: Dendrinos, 1992, p.120

Trasformazioni interessanti hanno riguardato le metropoli di New York e Los Angeles, in cui si è spostata l'attrazione della popolazione dalla prima verso la seconda più giovane e con ampie possibilità di crescita. Dal diagramma di fase si osserva che inizialmente New York presenta maggiore popolazione e reddito procapite di Los Angeles; in seguito, Los Angeles aumenta popolazione e reddito mentre New York presenta una popolazione prima crescente e poi decrescente. Verso la fine, le due città tendono ad avere popolazioni poco diverse e il reddito di Los Angeles supera quello di New York. Questo comportamento emerge facilmente analizzando le equazioni del modello di Dendrinos.

Per l'area di Los Angeles, si tracciano le rette  $x = x_L^*$  e  $y = 1 + b_L x$  passanti per il punto di equilibrio (fig. 18). Dato che i punti sulla curva hanno ascissa minore di  $x_L^*$  e ordinata maggiore di  $1 + b_L x$ , il reddito  $y$  e la popolazione  $x$  devono aumentare<sup>34</sup>. Sostanzialmente il reddito aumenta perché la popolazione è minore del valore di equilibrio e questa a sua volta cresce, perché la città offre un reddito maggiore di una certa soglia. Anche per l'area di New York (fig.19), si tracciano le rette  $x = x_N^*$  e  $y = 1 + b_N x$  passanti per il punto di equilibrio. Quando  $x > x_N^*$ , cioè la popolazione è maggiore del valore di equilibrio, il reddito decresce; fino al punto A, si ha che  $y > 1 + b_N x$  ovvero il reddito è maggiore di un dato livello, per cui la popolazione aumenta; da A in poi risulta che  $y < 1 + b_N x$  per cui la popolazione<sup>35</sup> diminuisce. Il fatto che la pendenza  $b_L$  sia maggiore di  $b_N$  significa che, a parità di popolazione, è necessario più reddito per convogliare le persone nella città di Los Angeles.

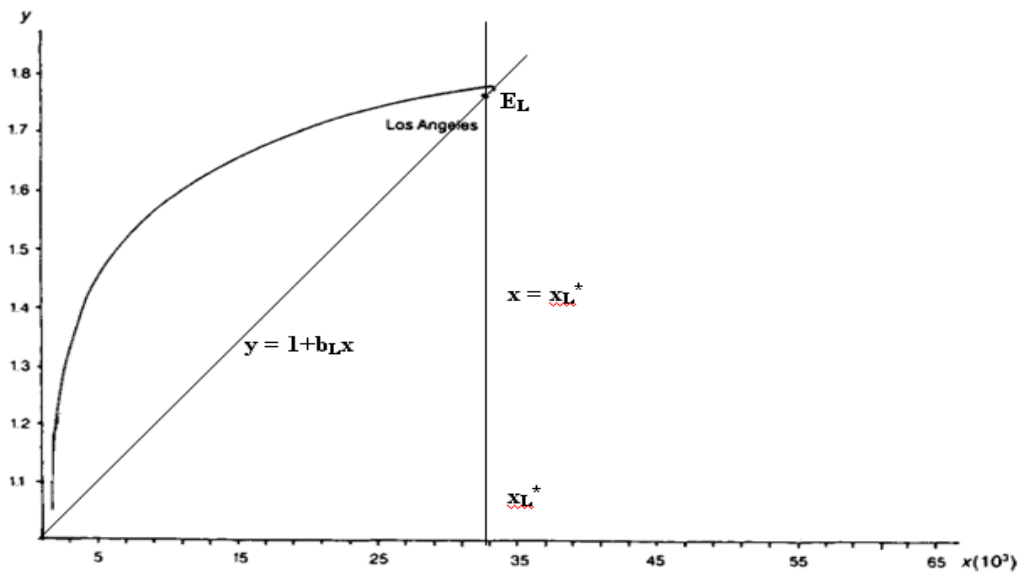
---

<sup>34</sup> Si escludono i punti intorno all'equilibrio stabile.

<sup>35</sup> Anche per New York si escludono i punti intorno all'equilibrio stabile.

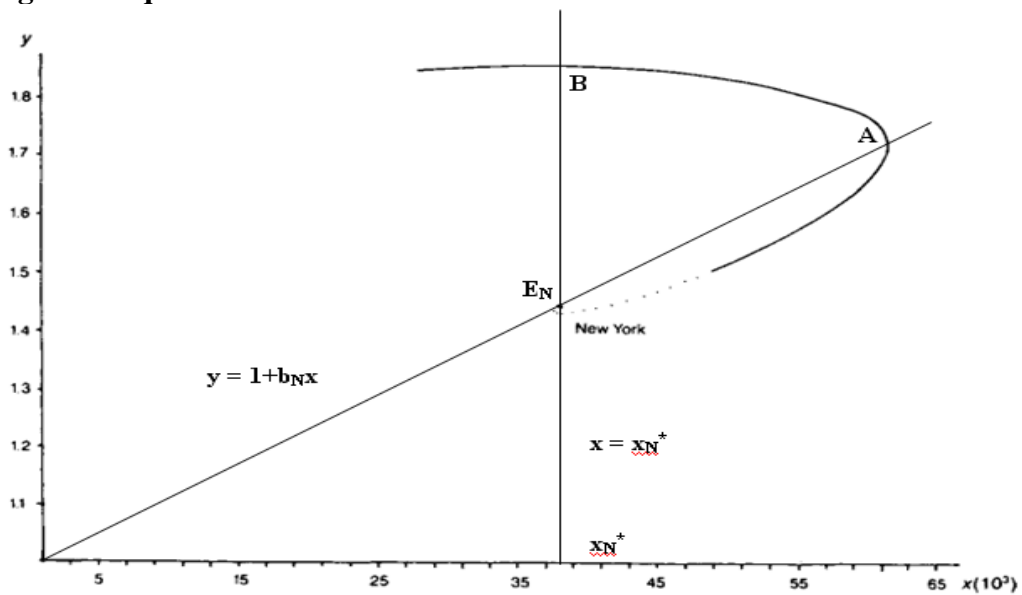


**Fig. 18 – Equilibrio città di Los Angeles**



Fonte: Dendrinos, 1992, p.120 con modifiche

**Fig. 19 – Equilibrio città di New York**



Fonte: Dendrinos, 1992, p.120 con modifiche

#### 4. Limiti dei modelli

I modelli presentati si rivelano interessanti sul piano concettuale e formale per il loro tentativo di inquadrare dei fenomeni sociali. E' evidente che il modello della guerra e il modello preda-predatore con le sue varianti si pongono su un livello diverso, sia da un punto di vista analitico-formale che per le finalità che provano a perseguire. Il modello di Saperstein è un puro esempio di applicazione di un sistema non lineare discreto tendente al caos, che ha il pregio di prevedere quali sono le nazioni più esposte a entrare in guerra sulla base degli investimenti bellici e, anche se esso è stato elaborato col senno

del poi, per testare la bontà dei risultati, potrebbe essere utilizzato per altre nazioni che vivono situazioni di tensione. Il modello Lotka-Volterra e le applicazioni di Dendrinòs intendono fornire un quadro esplicativo delle dinamiche di interazione tra prede e predatori attraverso un'analisi semplice di un sistema a tempo continuo, individuando con chiarezza le regolarità principali. A differenza di molti modelli matematici applicati alle scienze sociali, che includono delle variabili qualitative trattate alla stregua di grandezze misurabili, entrambi i lavori sono espressi da variabili quantitative che sono più adatte all'elaborazione di un modello matematico. Tuttavia, all'attenzione di un ricercatore sociale emergono diversi limiti che sollevano alcuni spunti di riflessione sull'uso dei modelli matematici nelle scienze sociali.

Nel lavoro di Saperstein si colloca sullo stesso piano di analisi un fenomeno tipico delle scienze naturali, cioè la transizione in un getto d'acqua dallo stato laminare a quello turbolento, e uno politico, economico e sociale, cioè il passaggio dalla pace alla guerra e si fa così coincidere il concetto matematico di caos, cioè di un sistema deterministico aperiodico a lungo termine sensibile alle condizioni iniziali, con il significato che esso assume nel senso comune, inteso cioè come stato di disordine e, in questo caso, di guerra tra paesi. Si adotta quindi un approccio di tipo meccanicista secondo cui "è necessario determinare un isomorfismo tra gli elementi del fenomeno da spiegare e le entità matematiche e rappresentare la struttura delle relazioni tra elementi tramite un insieme di equazioni" (Moretti, 2005, p. 48), rischiando così di far corrispondere situazioni differenti per adattarle al modello matematico. Anche l'ipotesi di partenza, per cui si esprime che la devozione massima di una nazione  $y$  non induce nuovi armamenti nell'altra  $x$  per l'anno successivo, in quanto  $y$  non potrà aumentare le spese belliche, avendo già investito il massimo l'anno precedente, appare alquanto drastica e per certi versi poco realistica. Come nella gran parte dei modelli matematici applicati alle scienze sociali, anche in questo caso si opera un'eccessiva semplificazione di problematiche articolate. Il problema deriva dal fatto che molti aspetti dei fenomeni sociali, a causa della loro complessità, sono difficilmente riconducibili a coefficienti o parametri matematici ed è per questo motivo che bisogna essere ben consapevoli che in molti casi il modello matematico è troppo rigido per essere usato nello studio delle scienze sociali. Nel modello di Saperstein, si riduce infatti la possibilità che un paese entri in guerra solo sulla base delle spese di approvvigionamento militare, escludendo le numerose cause politiche, economiche e sociali che rendono la guerra una situazione altamente complessa.

Il modello di Lotka e Volterra, “presenta vari limiti riguardo alla sua efficacia come descrittore delle interazioni tra specie sul piano operativo” (Bertuglia e Vaio, 2007, p. 113). In primo luogo, la ciclicità che rappresenta l’aspetto più importante del modello non è invece la situazione più frequente (*ibidem*); poi, la popolazione di predatori tende a morire in assenza di prede e non si considera invece la possibilità, ad esempio, di introdurre un’altra specie di prede. Non si contemplan inoltre la complessità ambientale, la possibilità dei predatori di saziarsi, la competizione all’interno della popolazione preda, né l’estinzione contemporanea delle popolazioni che invece è stata ottenuta nelle verifiche in laboratorio svolte dal biologo Gause (1934, 1935). Nel modello di Dendrinos, ci si limita e include solo due variabili, la popolazione e il reddito procapite e, in qualche applicazione, si sottolinea la carenza dei dati disponibili, che non garantisce una buona base empirica (Pumain, 1997). Tuttavia, l’uso di poche variabili è una scelta necessaria per chi impiega un modello matematico, data l’estrema difficoltà risolutiva di contemplare sistemi di equazioni con molte variabili. Per tali motivi, la sua formulazione comporta l’assunzione di ipotesi semplificative, in cui si trascurano alcuni aspetti, considerati secondari, per esaltare quelli ritenuti centrali. Se da un lato quindi il modello matematico si mostra come uno strumento rigido e poco flessibile, dall’altro, se ben costruito, permette di osservare un fenomeno a un livello macroscopico. Naturalmente, è importante che il ricercatore adotti un’elevata dose di cautela per decidere cosa approssimare e come realizzare le semplificazioni onde evitare di snaturare il fenomeno oggetto di studio. Inoltre, i modelli sono suscettibili di miglioramenti e spesso vengono ampliati, anche ricorrendo ad altre tecniche, introducendo quelle variabili in precedenza trascurate.

## **5. Il caos nel sondaggio elettorale per la *nomination* democratica americana del 1984**

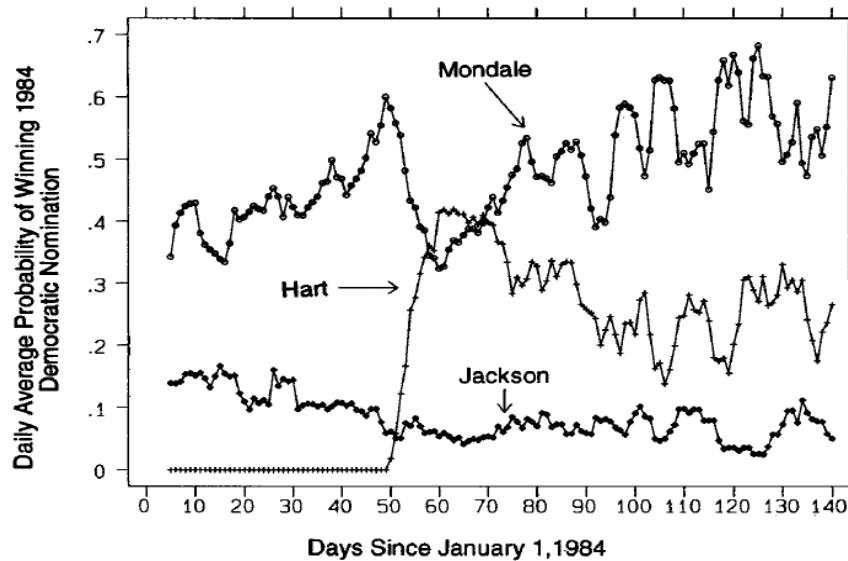
Nel 1984 il Centro per gli Studi Politici degli Stati Uniti, conduceva un sondaggio telefonico, noto come il “*Rolling Cross Section*”, rivolto all’elettorato nazionale, usando un campione probabilistico. Nelle interviste, svolte quotidianamente durante tutte le attività delle primarie e dei *Caucuses*<sup>36</sup>, si chiedeva chi tra i candidati democratici avrebbe vinto la *nomination* del partito per poi competere con l’avversario repubblicano alla carica di Presidente della Repubblica.

---

<sup>36</sup> Il *Caucus* è l’assemblea di un partito politico o di un sottogruppo in cui si nominano i candidati a una carica.

Il sociologo McBurnett (1996a, 1996b), dai dati ottenuti dal campione dall'11 gennaio 1984 al 12 giugno dello stesso anno, ricavò le serie storiche delle percentuali di successo dei candidati democratici e, per ridurre l'influenza dei valori casuali, effettuò una media mobile delle serie su 5 giorni. I risultati dell'indagine mostrarono che secondo gli intervistati la possibilità dei candidati Mondale, Hart e Jackson di conseguire la *nomination* democratica variava nel tempo come in fig. 20. In particolare, nel diagramma temporale è evidente che Mondale prevaleva sugli altri due candidati, anche se durante il sessantesimo e settantesimo giorno circa veniva superato da Hart.

**Fig. 20 – Diagramma temporale vincita della *nomination* democratica**

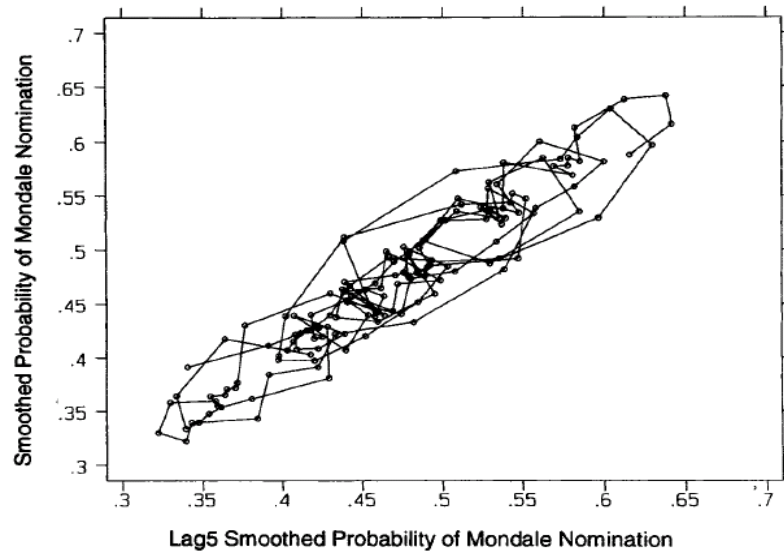


Fonte: McBurnett, 1996b, p. 177

McBurnett intendeva studiare le caratteristiche delle serie mediante l'uso delle tecniche di analisi non lineare e, per raggiungere tale obiettivo, si avvalse dei dati del candidato Mondale.

Per comprendere la natura della serie, il ricercatore americano ne costruì il ritratto di fase con un ritardo di 5 giorni e notò che esso era contenuto in una regione ristretta dello spazio delle fasi e manifestava un andamento irregolare e aperiodico (fig. 21).

**Fig. 21 – Ritratto di fase della serie di Mondale**

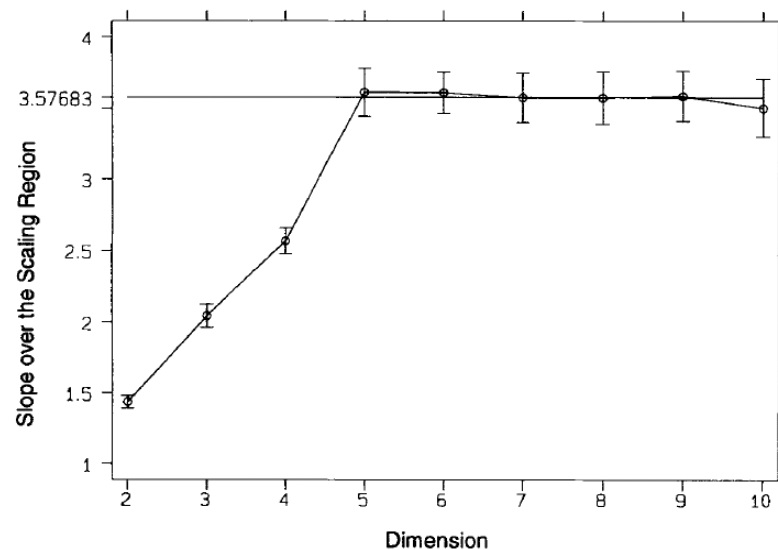


Fonte: McBurnett, 1996a, p. 48

Questi elementi fornirono i primi indizi che fecero intuire la natura caotica della serie, ma per confermare questa ipotesi, occorre stabilire che i rispettivi ritratti di fase fossero attrattori strani (dimensione non intera) con esponenti di Lyapunov positivi (sensibilità alle condizioni iniziali).

McBurnett rappresentò la dimensione di correlazione  $D_c$  in funzione della dimensione  $m$  dello spazio dei vettori ritardati e osservò che il relativo grafico entro le barre degli errori raggiungeva un valore costante non intero con  $D_c = 3,58$  (fig. 22). La saturazione della dimensione di correlazione all'aumentare della dimensione di *embedding* metteva in luce che la dinamica della serie era descritta da un attrattore strano di dimensione  $D_c = 3,58$ .

**Fig. 22 – Determinazione della dimensione di correlazione**



Fonte: McBurnett, 1996b, p. 182

Dal momento che la dimensione dell'attrattore era compresa tra 3 e 4, furono calcolati gli esponenti di Lyapunov (in base 2) della serie per gli spazi dei vettori ritardati, aventi le suddette dimensioni. I valori per i tempi di evoluzioni da 2 a 10 si rivelarono tutti positivi <sup>37</sup> (tab. 4). Alla luce di questi risultati, McBurnett confermò la caoticità della serie. Ciò indicava che l'evoluzione dell'opinione pubblica durante le primarie presidenziali del 1984 era sensibile alle condizioni iniziali, in quanto piccole incertezze si propagavano nel tempo, divergendo esponenzialmente.

**Tab. 4 – Esponenti di Lyapunov**

| Evolution Time | Lyapunov Exponent (3) | Lyapunov Exponent (4) |
|----------------|-----------------------|-----------------------|
| 2              | 0.1739                | 0.1255                |
| 3              | 0.1722                | 0.1350                |
| 4              | 0.1837                | 0.1202                |
| 5              | 0.1150                | 0.0871                |
| 6              | 0.1096                | 0.0833                |
| 7              | 0.0633                | 0.0826                |
| 8              | 0.0549                | 0.0493                |
| 9              | 0.0806                | 0.0445                |
| 10             | 0.0683                | 0.0862                |

Fonte: McBurnett, 1996b, p. 191

Secondo McBurnett, a causa della caoticità della serie, le previsioni sono possibili per tempi brevi come quelle che si ottengono alle soglie delle elezioni in un campione ben costruito, ma non sono realizzabili nel lungo periodo. Se aumenta l'esponente di Lyapunov al passare del tempo le incertezze crescono più velocemente e la possibilità di avanzare delle previsioni a lungo termine diminuisce. In questo studio e in altre ricerche simili come quella avanzata da Hammond e Fraser (1984), la teoria del caos viene quindi impiegata in un intento diverso dalla previsione di breve periodo e rappresenta un test utile per la non predicibilità della serie nel lungo termine.

<sup>37</sup> Gli esponenti variano con il tempo di evoluzione perché la serie contiene un'inevitabile componente casuale residua.

## Conclusioni

In questo lavoro sono stati tracciati i principali fondamenti della teoria del caos e si è cercato di comprendere i suoi usi nelle scienze sociali. Dopo aver illustrato i concetti basilari di carattere generale, si è circoscritta l'attenzione agli aspetti teorici dei due scenari di ricerca in cui sfocia lo studio del caos, cioè l'analisi di serie storiche e l'elaborazione di modelli matematici.

Sul piano empirico il primo ambito viene sviluppato nello studio delle serie temporali del sito web de "Il Corriere della Sera" e nella ricerca di McBurnett, mentre nel secondo si propongono alcune ricerche tradizionalmente incluse nello studio del caos e della non linearità nelle scienze sociali, quali i lavori di Saperstein e di Dendrinis.

Benchè la procedura sia la stessa, i risultati conseguiti da tali applicazioni sono chiaramente diversi da quelli che si ottengono nelle discipline fisico-naturali, in cui originariamente si è studiato il caos. Nel caso delle serie temporali ci si è imbattuti in alcune situazioni non assimilabili al caos vero e proprio ma comunque contenenti tracce di caoticità. Quanto all'utilizzo dei modelli matematici nelle scienze sociali, rispetto alla situazione nel campo fisico-naturale, si incontrano maggiori difficoltà a causa della scarsa flessibilità del linguaggio matematico nel descrivere la poliedricità e la complessità dei fenomeni sociali. Ovviamente la bontà dei risultati varia a seconda del modello adottato e del fenomeno da indagare. Al di là delle differenze, si è compreso che quando un sistema è caotico, è possibile scorgere delle regolarità tra i dati e ipotizzare una previsione di breve termine, mentre non si può avanzare una previsione nel lungo periodo. Inoltre, le applicazioni del caos e della non linearità nelle scienze sociali, includendo l'evoluzione temporale delle variabili, permettono di vedere un fenomeno da un punto di vista dinamico. Tale prospettiva ha una funzione particolarmente interessante nei modelli matematici in cui si osserva l'interazione nel tempo di più variabili. Altri aspetti importanti riscontrati in questo percorso di ricerca sono lo studio di numerose tecniche, poco conosciute e adottate dalle scienze sociali, che descrivono alcune caratteristiche dei dati e l'uso di *software* specifici, quali il *Visual Recurrence Analysis* e il *Chaos Data Analyzer*, che sono rivelati validi supporti per condurre le analisi.

Infine, questo lavoro di tesi si inserisce anche nel tentativo di rendere familiari i principali concetti della teoria matematica del caos nelle scienze sociali. Gran parte degli studi sul caos e sulla non linearità, e più in generale sull'uso della matematica nelle scienze sociali, sono infatti portati avanti prevalentemente da fisici, ingegneri e matematici ma, affinché la ricerca scientifica in questo settore realizzi degli effettivi sviluppi, è necessario l'intervento importante dei ricercatori sociali. D'altro canto le osservazioni, i miglioramenti, le critiche sono costruttive nel momento in cui si acquisisce un'effettiva consapevolezza delle questioni in gioco. E' chiaro che il matematico e il ricercatore sociale ricoprono dei ruoli distinti con competenze differenti, ma se esistono dei punti di incontro, seppur labili, tra matematica e scienze sociali, affinché si generi valore sul piano conoscitivo, è importante sviluppare e condividere un codice che favorisca la loro comunicazione.



## Ringraziamenti

E' mio desiderio esprimere un sentito ringraziamento al Prof. Graziano Gentili, per avermi seguita e per i consigli ricevuti. A lui devo il mio riavvicinamento alla matematica che avevo abbandonato tra i banchi del liceo e l'introduzione dei primi concetti di matematica per le scienze sociali, durante il suo corso nel primo anno di dottorato. Esprimo la mia gratitudine al Dott. Gianni Ciolli per i suggerimenti e la sua disponibilità. Un profondo ringraziamento va al Prof. Alessandro Bruschi per gli spunti di riflessione e per avermi costantemente incoraggiata durante il mio percorso di ricerca. Inoltre, colgo l'occasione per esternare una riflessione su questo periodo di dottorato. Questi anni di studio si sono rivelati un'esperienza preziosa sul piano professionale e umano. Le lezioni, i seminari, le occasioni di confronto mi hanno profondamente arricchita, stimolando continuamente la mia curiosità. Anche se l'Università italiana sta vivendo un periodo difficile, è grazie a questo dottorato che ho avuto la possibilità di poter frequentare dei corsi utilissimi per l'elaborazione della tesi ("Modelli e Simulazione" del CNR, "International scientific course in paradigmatic models in social sciences" del Politecnico di Milano, "La matematica del tempo: sistemi dinamici, interdisciplinarietà e complessità" dell'Università Bocconi) e di partecipare a delle occasioni di confronto e apprendimento come le due conferenze internazionali (la *5th International Non Linear Science Conference* tenutasi all'Università di Barcellona e la *European Conference on Complex Systems* presso l'Università di Bruxelles) in cui ho presentato la parte empirica della tesi. Ringrazio dunque coloro che si interessano a questo dottorato – la Dott.ssa Ivana Acocella, il Dott. Sandro Landucci e gli altri docenti – e i colleghi - Katia in particolare - che hanno contribuito a rendere questi anni un importante momento di crescita.

## Bibliografia

- Abarbanel H.D.I. (1992), Local and global Lyapunov exponents on a strange attractor, in M. Casdagli e S. Eubank (a cura di), *Nonlinear Modeling and Forecasting*, Santa Fe Institute, Addison-Wesley, pp. 229-247.
- Abarbanel H.D.I. (1996), *Analysis of observed Chaotic data*, Springer-Verlag, New York.
- Abbott A. (2001), *Chaos of Disciplines*, University of Chicago Press, Chicago.
- Abraham N.B., Albano A.M., Das B., Deguzman G., Young S., Goggia R.S., Puccioni G.P. e Tredicce J.R (1986), Calculating the Dimension of Attractors from Small Data Sets, *Physics Letters A*, 114, pp. 217-224.
- Abrams P. A. (2000), The evolution of predator-prey interactions: Theory and evidence, *Annual Review of Ecology and Systematics*, 31, pp. 79-105.
- Albano A.M., Mees A.I., De Guzman G.C., Rapp P.E. (1987), Data Requirements for Reliable Estimation of Correlation Dimension, in H. Degn, A.V. Holden, L. Olsen (a cura di), *Chaos in Biological Systems*, Plenum, New York, pp. 207-220.
- Alligood K.T., Sauer T.D. e Yorke J.A. (1997), *Chaos - An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York.
- Babloyantz A. (1985), Strange attractors in the dynamics of brain activity, in H. Haken (a cura di.), *Complex Systems*, Springer, Berlino, pp. 116-22.
- Bak P. (1999), *How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality*, Copernicus, Springer-Verlag, New York.
- Bar-Yam Y. (1997), *Dynamics of complex systems*, Westview press, Perseus books group.
- Beddington J.R, Free C.A. e Lawton J.H. (1975), Dynamic complexity in predator-prey models framed in difference equations. *Nature*, 255, pp. 58-60.
- Belaire-Franch J. e Contreras D. (2002), Recurrence plots in nonlinear time series analysis: free software, *Journal of Statistical Software*, 7(9), pp. 1-18.
- Berry J.L. e Kim H. (1996), Long waves 1790-1990: intermittency, chaos, and control, in L.D. Kiel e E. Elliott (a cura di.), *Chaos theory in the social sciences: foundations and Applications*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, pp. 215-236.
- Bertuglia C.S. e Vaio F. (2007), *Non linearità, caos, complessità*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Bertuglia C.S. e Vaio F. (2009), La prospettiva della complessità nello studio dei sistemi urbani e regionali e nell'economia in generale, *Econom. italiana* 2, pp. 307-55.

- Bertuglia C.S. e Vaio F. (2011), *Complessità e modelli. Un nuovo quadro interpretativo per la modellizzazione nelle scienze della natura e della società*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Bird R.J. (1997), Chaos and social reality: An emergent perspective, E. Raymond, S. Horfshall e M. Lee Mary (a cura di.), *Chaos, complexity and sociology*, Sage, Londra, pp. 141-152
- Bischi G.I., Carini R., Gardini L. e Tenti P. (2004), *Sulle orme del caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici*, Mondadori, Milano.
- Bocchi G. e Ceruti M. (a cura di) (2007), *La sfida della complessità*, Bruno Mondadori, Milano.
- Borgioli G. (1996), *Modelli matematici di evoluzione ed equazioni differenziali*, Celid editore.
- Braun M. (1993), *Differential equations and their applications. An Introduction to Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York.
- Brock W. e Potter S. (1992), Diagnostic testing for nonlinearity, chaos and general dependence in time series data, in M. Casdagli and S. Eubank (a cura di), *Nonlinear Modeling and Forecasting*, Reading MA, Addison-Wesley, pp. 137-61.
- Brown C. (1994), Politics and the environment: Nonlinear instabilities dominate, *American Political Science Review*, 88 (2), pp. 292-303.
- Brown C. (1995a), *Serpents in the sand: Essays on the linear nature of politics and human destiny*, University of Michigan Press, Ann Arbor.
- Brown, C. (1995b), *Chaos and Catastrophe Theories – Sage Quantitative Applications in the Social Sciences 107*, Sage, Londra.
- Brown, T. A. (1996a), Measuring chaos using the Lyapunov exponent, in L.D. Kiel e E. Elliott (a cura di.), *Chaos theory in the social sciences: foundations and Applications*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, pp. 53–66.
- Brown T.A. (1996b), Nonlinear politics, in L. D. Kiel e E. Elliott (a cura di), *Chaos theory in the social sciences: foundations and Applications*, University of Michigan Press, Ann Arbor, pp. 119-137.
- Bruschi A. (1971), *La teoria dei modelli nelle scienze sociali*, Il Mulino, Bologna.
- Bruschi A. (1999), *Metodologia delle scienze sociali*, Laterza, Bari-Roma.
- Bryant P., Brown R. e Arbarbanel H.D.I. (1990), Lyapunov Exponents from Observed Time Series, *Physical Review Letters* 65, pp.1523-26.

Buchanan M. (2004), *Nexus. Perché la natura, la società, l'economia, la comunicazione funzionano allo stesso modo*, tr. it. di L. Serra, Mondadori, Milano.

Byeon J.H. (1999), Non-Equilibrium Thermodynamic Approach to Change in Political Systems, *System Research and Behavioural Science*, 16 (3), pp.283-291.

Byrne D. (1998), *Complexity Theory and the Social Sciences. An introduction*, Routledge, London.

Campbell D.K. e Mayer-Kress G. (1997), Chaos and Politics: applications of nonlinear dynamics to social-politic issues, in C. Grebogi e J.A. Yorke (a cura di), *The impact of chaos on science and society*, United Nations University, Tokyo, pp. 18-63.

Campelli E. (1999), *Da un luogo comune*, Carocci, Roma.

Capra F. (1996), *The Web of Life*, Anchor Books Doubleday, New York.

Capra F. (2002), *The Hidden Connections: Integrating the Biological, Cognitive, and Social Dimensions of Life into a Science of Sustainability*, Doubleday, New York.

Carnap R. (1966), *I fondamenti filosofici della fisica*, tr. it. Il Saggiatore, Milano 1971.

Casati G. (1991) (a cura di), *Il caos. Le leggi del disordine*, Le Monnier, Firenze.

Casdagli M. (1989), Nonlinear Prediction of Chaotic Time Series, *Physica D*, 35, pp.335-56.

Castellani B. e Hafferty F.W. (2008), *Sociology and Complexity Science: a new field of inquiry (understanding complexity systems)*, Springer-Verlag, Berlino.

Catone M.C. (in stampa), Chaos and non-linear tools in website visits, in T. Gilbert, M. Kirkilionis e G. Nicolis (a cura di), *Proceedings of the European Conference on Complex Systems 2012*, Springer.

Ceja L. e Navarro J. (2009), Dynamics of flow: a Nonlinear Perspective, *Journal of Happiness Studies*, 10 (6), pp. 665-84.

Ceruti M. (2007), La hybris dell'onniscienza e la sfida della complessità, in G. Bocchi e M. Ceruti (a cura di), *La sfida della complessità*, Bruno Mondadori, Milano, pp. 1-24.

Chialvo D.R e Jalife J. (1987), Non-linear dynamics in cardiac excitation and impulse propagation, *Nature*, 330, pp. 749-52.

Chirikov B.V. (1979), A universal instability of many-dimensional oscillator systems, *Physics reports* 52, pp.263-379.

Colombo A. e Rinaldi S. (2008), Chaos in two-party democracies, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(7), pp. 2133-2140.

Condorelli R. (2001), La teoria del caos in sociologia. Filosofia scientifica o scienza qualitativa?, *Quaderni Somess III*, Bonanno Editore, Catania, pp. 121-140.

- Condorelli R. (2007), *Complessità e controllo sociale*, Bonanno Editore, Catania.
- DeCoster G., Labys W. e Mitchell D. (1992), Evidence of chaos in commodity future prices, *Journal of Futures Markets*, 12, pp. 291-305.
- Dendrinos D. (1980), A Basic Model of Urban Dynamics Expressed as set of Volterra-Lotka Equations, *Catastrophe Theory in Urban and Transport Analysis*, Department of transportation, Washington.
- Dendrinos D. S. (1991), Quasi-Periodicity and Chaos in Spatial Population Dynamics. *Socio-Spatial Dynamics*, 2, pp. 31-60.
- Dendrinos D. (1992a), Evolution of a Ring-Attractor in Socio-Spatial Dynamics, *Mathematical and Computer Modelling*. 16, pp. 63-69.
- Dendrinos D. (1992b), *The dynamics of cities: ecological determinism, dualism and chaos*, Routledge, New York.
- Dendrinos D. (1996), Cities as spatial Chaotic Attractors, in L. D. Kiel e E. Elliott (a cura di), *Chaos Theory in the Social Sciences*, University of Michigan Press, Ann Arbor, pp. 237-79.
- Dendrinos D. e Mullally H. (1981), Evolutionary patterns of urban populations, *Geographical Analysis* , 13, pp.328-44.
- Dendrinos D. e Mullally H. (1985), *Urban evolution. Studies in the Mathematical Ecology of Cities*, Oxford University Press, Oxford.
- Dendrinos D. e Sonis M. (1987) “The Onset of Turbulence in Discrete Relative Multiple Spatial Dynamics”, *Applied Mathematics and Computation*, 22, pp. 25–44.
- Dendrinos D. e Sonis M. (1988) “Nonlinear Discrete Relative Population Dynamics of the U.S. Regions”, *Applied Mathematics and Computation* 25, pp. 265–285.
- Dendrinos D. e Sonis M. (1989), *Turbulence and Socio-Spatial Dynamics:Toward a Theory of Social Systems Evolution*, Springer, Berlino.
- Dendrinos D. e Sonis M. (1990), *Chaos and Socio-Spatial Dynamics*, Springer-Verlag, New York.
- Devaney R.L. (1989), *An Introduction to Chaotic Dynamical System*, seconda edizione. Addison-Wesley Publishing Company.
- Ding M., Grebogi C. e J.A. Yorke (1997), Chaos and Politics: applications of nonlinear dynamics to social-politic issues, in C. Grebogi e J.A. Yorke (a cura di), *The impact of chaos on science and society*, United Nations University, Tokyo, pp. 1-17.
- Eckmann, J. P. e Ruelle D. (1985), Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors. *Reviews of Modern Physics* 57 (3), pp. 617-56.

- Eckmann, J. P., Kamphorst S.O., Ruelle D. e Ciliberto S. (1986) Lyapunov Exponents from a Time Series. *Physical Review A*, 34, pp. 4971-79.
- Eckmann, J.P., Kampshort S.O. e Ruelle D. (1987), Recurrence Plots of Dynamical Systems, *Europhysics Letters* 4, pp. 973-977.
- Enders W. e Sandler T. (2002), Patterns of transnational terrorism, 1970-1999: Alternative time-series estimates, *International Studies Quarterly*, 46, pp. 145-165.
- Ennes R.H. (2011), *It's a nonlinear world*, Springer, New York.
- Essex C., Lockman T. e Nerenberg M.A.H., (1987), The climate attractor over short time scales, *Nature*, 326, pp. 64-6.
- Eve R.A., Horsfall S. e Lee M.E. (a cura di) (1997) *Chaos, Complexity and Sociology. Myths models and theories*, Sage Publications, Londra.
- Faggini M. (2007), Visual Recurrence Analysis: an Application to Economic Time Series, in M. Salzano e D. Colander (a cura di), *Complexity Hints for Economic Policy*, Springer, Berlino, pp. 69-92.
- Faggini M. (2012), The Failure of Economic Theory. Lessons from Chaos Theory, *Modern Economy*, 3, pp. 1-10.
- Farmer D. (1982), Chaotic Attractors of an Infinite-dimensional Dynamical System, *Physica D*, 4, pp. 366-93.
- Farmer D., Crutchfield J., Froehling H., Packard N. e Shaw R. (1980), Power Spectra and Mixing Properties of Strange Attractors., *Annals of the New York Academy of Sciences* 357, pp.453-72.
- Fisher, J. C. e Pry, R. H. (1971), A simple substitution model of technological change, *Technological Forecasting and Social Change*, 3, pp. 75-88.
- Fraedrich K (1986), Estimating the dimensions of weather and climate attractors, *Journal Atmos. Sci.*, 43, pp. 1607-23.
- Gandolfi A. (1999), *Formicai, imperi, cervelli. Introduzione alla scienza della complessità*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Gause G.F. (1934), *The Struggle for existence*, Williams and Wilkins, Baltimora.
- Gause G.F. (1935) Experimental Demonstrations of Volterra's Periodic Oscillations in the Number of Animals, *British Journal of Experimental Biology*, 12, pp. 44-48.
- Gell-Mann M. (1994), *Il quark e il giaguaro*, tr. it Bollati Boringhieri, Torino, 1996.
- Gennaro G. (2000), Verso l'impiego della teoria del caos in sociologia, *Una Facoltà nel Mediterraneo*, Giuffrè, Milano, pp. 307-404.

- Gleick, J. (1987), *Caos, la nascita di una nuova scienza*, trad. it Rizzoli, Milano, 2001.
- Gill J. (2006), *Essential Mathematics for Political and Social Research*, Cambridge University Press, New York.
- Goodwin R. (1990), *Chaotic Economic Dynamics*, Clarendon Press, Oxford.
- Gordon T. J. e D. Greenspan (1988), Chaos and Fractals: New Tools for Technological and Social Forecasting. *Technological Forecasting and Social Change* 34, pp. 1-25.
- Gragani A., Rinaldi S. e Feichtinger G. (1997a) Dynamics of drug consumption: a theoretical model, *Socio-Economic Planning Sciences*, 31(2), pp. 127-137.
- Gragani A., Rinaldi S. e Feichtinger G. (1997b), Cyclic Dynamics in Romantic Relationships, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 7(11), pp. 2611-2619.
- Grasseberger P. e Procaccia I. (1989), Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D*, 9, pp. 189-208.
- Grassberger P., Schreiber T. e Schaffrath C. (1991), Nonlinear time sequence analysis, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1(3), pp. 521-547.
- Grebogi C, Ott E., Pelikan S. e Yorke J.A., (1984). Strange Attractors That Are Not Chaotic. *Physica D*, 13, pp. 261-68.
- Grebogi C. e Yorke J.A. (1997) (a cura di), *The Impact of Chaos on Science and Society*, United Nations University Press, Tokyo.
- Gregersen H. e Sailer L. (1993), Chaos theory and Its Implications for Social Science Research, *Human Relations*, 46(7), pp. 777-802.
- Grossmann S. e Mayer-Kress G. (1989), Chaos in the International arms race, *Nature*, 337, pp.701-704.
- Guastello S.J. (1995), *Chaos, Catastrophe, and Human Affairs: Applications of Nonlinear Dynamics to Work Organizations and Social Evolution*, Lawrence Erlbaum Associates, New York.
- Guastello S. J. (1998), Creative problem solving groups at the edge of chaos, *Journal of Creative Behavior*, 32, pp. 38-57.
- Guastello S.J. (2005), Nonlinear methods for the social sciences, in S. Wheelan (a cura di), *The handbook of group research and practice*, Sage, Thousand Oaks, pp. 251-268.
- Guastello S.J. e Gregson R.A.M. (a cura di), (2011). *Nonlinear dynamical systems analysis for the behavioral sciences using real data*, Press/Taylor & Francis.
- Hammond T.H. e Fraser J.M. (1984), Studying Presidential Performance in Congress, *Political Methodology* 10, pp. 211-44.

- Harvey D. L. e Reed M. (1996), *Social Science as the Study of Complex Systems*, in L. D. Kiel e E. Elliott (a cura di), *Chaos Theory in the Social Sciences*, University of Michigan Press, Ann Arbor, pp. 295-324.
- Hempel C.G. (1952), *La formazione dei concetti e delle teorie nella scienza empirica*, tr. it Feltrinelli, Milano, 1976.
- Hilborn R.C. (1994), *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press, Oxford.
- Holland H. (1998), *Emergence from chaos to order*, Oxford University Press, Oxford.
- Huckfeldt R. (1990), Structure, Indeterminacy and Chaos: A Casa for Sociological Law, *Journal of Theoretical Politics*, 2, pp.413-33.
- Huckfeldt R., Kohfeld C.W. e Likens T.W. (1982) *Dynamic Modeling: An Introduction*. Sage.
- Izzo A. (1991), *Storia del pensiero sociologico*, Il Mulino, Bologna.
- Judd K. (1994), Estimating dimension from small samples, *Physica D*, 71, pp. 421-429.
- Kantz, H., Schreiber T. (1997), Nonlinear Time Series Analysis, *Nonlinear Science Series*, 7, Cambridge.
- Kaplan J. e Yorke J. (1979), Chaotic behavior of multidimensional difference equations, in H.O. Peitgen e H.O. Walther (a cura di), *Functional differential equations and approximation of fixed points*, Springer, Berlin, pp. 228-37.
- Kaplan D. e Glass L. (1995), *Understanding Nonlinear Dynamics*, Springer-Verlag, New York .
- Kauffman S. (1995), *A casa nell'universo. Le leggi del caos e della complessità*, trad. it Editori Riuniti, Roma 2001.
- Kennel M.B., Brown R. e Abarbanel H.D.I. (1992), Determining minimum embedding dimension using a geometric construction, *Physical Review A*, 45, pp.3403-11.
- Kiel L.D. (1989), Nonequilibrium theory and its implication for public administration, *Public Administration Review*, pp. 544-551.
- Kiel L. D. (2001), The evolution of nonlinear dynamics in political science and public administration: modeling and momentum, *Discrete Dynamics in nature and society*, 5(4), pp. 265-279,.
- Kiel L. D. e Elliott E. (a cura di) (1996), *Chaos theory and the social sciences: Foundations and applications*, The University of Michigan Press, Ann Arbor.
- Kuznetsov Y.A. (2004), *Elements of applied bifurcation theory*, Springer-Verlag, New York.



- Laplace P.S. (1814), Saggio filosofico sulla probabilità, in P.S. Laplace (a cura di O. Pesenti Cambursano), *Opere*, tr. it. UTET, Torino 1967, pp. 241-404.
- Lewin R. (1992), *Complexity: life at the edge of chaos*, MacMillan, New York.
- Li T.Y. e Yorke J.A. (1975), Period 3 implies chaos, *American Mathematical Monthly* 82, pp. 985–992.
- Lorenz E. N. (1963), Deterministic non-periodic flows, *Journal of Atmospheric Science*, 20 (2), pp. 134-41.
- Lotka A.J. (1925), *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins, Baltimora.
- Loye D. e Eisler R. (1987), Chaos and transformation: Implications of nonequilibrium theory for social science and society, *Behavioral Science*, 32(1), pp. 53–65.
- Madan R.N. (1993), *Chua's circuit: a paradigm for chaos*, World Scientific, Singapore.
- Marion R. (1999), *The edge of organization: chaos and complexity theories of formal social systems*, Sage.
- Matsumoto T., Chua L.O. e Tanaka S. (1984), Simplest chaotic nonautonomous circuit, *Physical Review*, A 30, pp.1155-7
- Mackenzie, A. (2005), The Problem of the Attractor: A Singular Generality Between Sciences and Social Theory, *Theory, Culture & Society*, 22(5), pp. 45-66.
- Mandelbrot B. (1983), *La geometria della natura. Sulla teoria dei frattali*, tr.it. Imago, Milano 1987.
- Mandelbrot B. (1987), *Gli oggetti frattali. Forma, caso e dimensione*, tr. it. Einaudi, 2000.
- Marwan N., Romano M.C, Thiel M. e Kurths J.(2007), Recurrence Plots for the Analysis of Complex Systems, *Physics Reports*, 438 (5-6), pp. 237-329.
- Marwan N., Donges J. F., Zou Y., Donner R. V. e Kurths J. (2009), Complex network approach for recurrence analysis of time series, *Physics Letters A*, 373(46), pp. 4246-4254.
- May R., (1976). Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics, *Nature*, 261, pp. 459-67.
- McBurnett, M. (1996a), Probing the Underlying Structure in Dynamical Systems: An Introduction to Spectral Analysis, in D. Kiel, and E. Elliott (a cura di), *Chaos Theory in the Social Sciences*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, pp. 31-52.
- McBurnett M.(1996b), Complexity in the Evolution of Public Opinion, in L. D. Kiel e E. Elliott (a cura di), *Chaos Theory in the Social Sciences*, University of Michigan Press, Ann Arbor, pp.165-96.

- Medio A. (1992), *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Moon F.C. (1992), *Chaotic and fractal dynamics: an introduction for applied scientists and engineers*, Wiley-Interscience, New York
- Moretti S. (2005), *Modelli e conoscenza scientifica: problemi di formalizzazione nella ricerca sociologica*, Guerini scientifica, Milano.
- Morin E. (1990) , *Introduzione al pensiero complesso*, tr. it. Sperling & Kupfer, Milano, 1993.
- Morin E. (2007) *Le vie della complessità*, in G. Bocchi e M. Ceruti (a cura di), *La sfida della complessità*, Feltrinelli, Milano, pp.25-36.
- Nagel E. (1961), *La struttura della scienza. Problemi di logica della spiegazione scientifica*, tr. it. Feltrinelli, Milano 1968.
- Navarro J. e Arieta, C. (2010), Chaos in human behaviour: the case of work motivation, *The Spanish Journal of human psychology*, pp.244-56.
- Newland D.E. (1993), *An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis*, Longman, Harlow.
- Nicholson K. (2006), *Linear algebra with applications*, Mcgraw Hill.
- Nicolis C. e Nicolis G. (1987), Is there a climatic attractor?, *Nature*, 326, p. 523.
- Nijkamp P. e Reggiani A. (1990), An evolutionary approach to the analysis of dynamic systems with special reference to spatial interaction model, *Sistemi urbani*, 12, pp. 95-112.
- Nijkamp P. e Reggiani A. (1992), *Interaction, evolution and chaos space*, Springer, Berlino.
- Orishimo I. (1987), An approach to urban dynamics, *Geographical Analysis*, 19, pp. 200-10
- Osborne A.R., Kirwin A.D., Provenzale A. e Bergamasco L. (1986), A search for chaotic behavior in large scale motions in the Pacific ocean, *Physica D*, 23, pp. 75-83.
- Ott E.(1993), *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press.
- Ott E., Sauer T. D.e Yorke J. A. (a cura di) (1994), *Coping with Chaos - Analysis of Chaotic Data and the Exploitation of Chaotic Systems*, Wiley-Interscience.
- Peitgen H.O., Jurgens H., Saupe D. (2004), *Chaos and Fractals - New frontiers of Science*, Springer,

- Peters E.E. (1991), A chaotic attractor for the S&P 500, *Financial Analysts Journal*, 3, pp.55-81.
- Piccolo D. (1990), *Introduzione all'Analisi delle Serie Storiche*, La Nuova Italia Scientifica, Roma.
- Poincaré J.H., *Science et méthode*, Flammarion, Paris (1908), tr. it. *Scienza e metodo*, a cura di C. Bartocci Einaudi, Torino 1997.
- Priesmeyer R.H. (1995), Logistic regression: a method for describing, interpreting and forecasting social phenomenon with nonlinear equations, in A.Albert (a cura di), *Chaos and Society*, Amsterdam, pp.329-338.
- Prigogine I (1992), *Le leggi del caos*, Laterza, Roma-Bari.
- Prigogine I. (1996), *La Fine delle certezze*, tr. it Bollati Boringhieri, Torino 1997.
- Prigogine I. e Stengers I. (1979), *La nuova alleanza. Metamorfosi della scienza*, tr. it 1999, Einaudi, Torino.
- Pumain D. (1997), Ricerca urbana e complessità, in C.S. Bertuglia e F. Vaio (a cura di), *La città e le sue scienze*, 2, Le scienze della città, Angeli, Milano, pp. 1-45.
- Ramsey J.B, Sayers C.I. e Rothman P. (1992), The statistical properties of Dimension Calculations Using Small Data Sets: Some Economic Applications, in Benhabib J. (a cura di), *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*, Princeton University Press, New Jersey, pp. 394-428.
- Rasband S.N (1990), *Chaotic Dynamic of Nonlinear Systems*, John Wiley & Sons, New York.
- Raymond E., Horsfall S. e Lee M.E. (1997), *Chaos, Complexity and Sociology: Myths, Models, and Theories*, Sage Publications, Thousand Oaks.
- Richards D. (1996), *From Individuals to Groups: The Aggregation of Votes and Chaotic Dynamics*, in L. D. Kiel e E. Elliott (a cura di), *Chaos Theory in the Social Science*, University of Michigan Press, Ann Arbor, pp.89-116.
- Rinaldi S. (1998), *Laura and Petrarch: An intriguing case of cyclical love dynamics in SIAM Journal on Applied Mathematics*, 58 (4), p.1205-21.
- Rinaldi S., Feichtinger G. e Wirl F. (1998), *Corruption dynamics in democratic societies in Complexity*, 3, pp.53-64.
- Rinaldi S., Gragnani A.(1998), *Love dynamics between secure individuals: a moreling approach in Nonlinear Dynamics, Psychology and Life Sciences*, 2, pp. 283-301.

- Rinaldi S., Amigoni F. (2000), *The role of extrinsic motivation in the dynamics of creative professions*, in E.J. Dockner, R.F. Hartl, M. Luptacik, e G. Sorger (a cura di); *Optimization, Dynamics, and Economic Analysis*, Physica-Verlag, pp. 170-80, 2000.
- Rinaldi S., Cordone R. e Casagrandi R. (2000), *Instabilities in creative professions: a minimal model in Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences* 4(3), p. 255-273.
- Rinaldi S., Della Rossa F. e Dercole F. (2000), *Love and appeal in standard couples*, in *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20 (8), pp. 2443-2451.
- Robertson R. e Combs, A. (a cura di) (1995), *Chaos theory in psychology and the life sciences*, Hillsdale, New Jersey.
- Rosser J. B. (2011), *Complex evolutionary dynamics in urban-regional and ecologic-economic systems. From Catastrophe to Chaos and Beyond*, Springer.
- Rössler, O. E. (1976), An Equation for Continuous Chaos, *Physics Letters* ,57A (5), pp. 397–398.
- Rössler, O. E. (1979), An Equation for Hyperchaos, *Physics Letters*, 71A (2,3), pp.155–157.
- Roux J.C, Rossi A, Bachelart S. e Vidal C. (1980), Representation of a strange attractor from an experimental study of chemical turbulence, *Physics Letters A*, 77, pp.391-3.
- Ruelle D. (1989), *Chaotic Evolution and Strange Attractors*, Cambridge University Press, New York.
- Ruelle D. (1991) *Caso e caos*, tr. it. Bollati Boringhieri, Torino 2003.
- Ruelle D. e Takens F. (1971), On the nature of turbulence, *Communication in Mathematical Physics*, 20 (3) pp. 167–192.
- Saari D.G. (2001), *Chaotic elections!*, American Mathematical Society, Providence.
- Saperstein A.M. (1984), Chaos – a model for the outbreak of war, *Nature*, 309, pp. 303-305.
- Saperstein A.M. e Mayer-Kress G. (1988), A Non-Linear Dynamical Model of the Impact of S.D.I, on the Arms Race, *Journal of Conflict Resolution*, 35, pp- 636-70.
- Saperstein A.M. (1996), The prediction of unpredictability: applications of the new paradigm of chaos in dynamical system to the old problem of the stability of a system of hostile nations, in L. D. Kiel e E. Elliott (a cura di), *Chaos Theory in the Social Sciences*, University of Michigan Press, Ann Arbor, pp.139-64.
- Saperstein A.M. (1999), *Dynamical modeling of the onset war*, World Scientific, Singapore.

- Saperstein A.M. e Mayer-Kress G. (1989), Chaos versus predictability in formulating National strategic policy, *American Journal of Physics*, 57, pp. 57-217
- Scheinkam J.A. e LeBaron B.(1989), Nonlinear dynamics and stock return, *Journal of Business*, 62, pp. 311-337.
- Serres M. (1999), *Lucrezio e l'origine della fisica*, Sellerio, Palermo.
- Sonis M. (1995), A territorial socio-ecological approach to innovation diffusion, Shumpeterian competition and dynamic choice, in C.S Bertuglia, M.M. Fischer e G. Presto (a cura di), *Technological change, economic development and space*, Springer, Berlino, pp.34-74.
- Sprott J. C. (2003), *Chaos and time-series analysis*, Oxford University Press, New York.
- Sprott J. C. (2004), Dynamical models of love, *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 8(3), pp. 303-14.
- Sprott J. C. (2005), Dynamical models of happiness, *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 9, pp. 23-36.
- Sprott J.C. e Rowlands G. (1995), *Chaos Data Analyzer*, American Institute of Physics, New York.
- Stewart I. (1989), *Dio gioca a dadi?*, trad.it. Bollati Boringhieri, Torino, 1993.
- Strogatz S.H. (1994), *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, New York.
- Strogatz S. H. (1988), *Love affairs and differential equations* in *Mathematics Magazine*, 61(1), pp.35-36.
- Swinney H.L. (1987), personal communication in A.M. Albano, A.I. Mees, G.C. De Guzman, P.E. Rapp, *Data Requirements for Reliable Estimation of Correlation Dimension*.
- Takens, F. (1981), Detecting Strange Attractors in Turbulence, in Rand, D., L. Young (a cura di), *Dynamical Systems and Turbulence*, 898, Springer, New York, pp.366-81.
- Theiler J. ,Galdrikian B., Longtin A., Eubank S. e Farmer J.D. (1992), Using surrogate data to detect nonlinearity in time series, in M. Casdagli e S.Eubank (a cura di), *Nonlinear Modeling and Forecasting*, Santa Fe Institute, Addison-Wesley.
- Tinti T. (1998), La sfida della complessità verso il Duemila, *Novecento*, 12, pp. 7-12.
- Trobia A. (2001), *La sociologia come scienza rigorosa. Modelli simulativi, intelligenza collettiva, forme del mutamento*, Franco Angeli, Milano.
- Vastano J. A e Kostelich E.J. (1986), Comparison of Algorithms for Determining Lyapunov Exponents from Experimental Data, in G . Mayer-Kress (a cura di), *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*, Springer-Verlag, Berlino.

- Volterra V. (1926), Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi, *Memorie della Regia Accademica nazionale dei Lincei*, 6 (2), pp. 31-113.
- Vulpiani A. (1994), *Determinismo e Caos*, La Nuova Italia Scientifica, Roma.
- Waldrop M. M. (1992), *Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos*, Simon & Schuster, New York.
- Webber C.L. e Zbilut J.P. (2007), Recurrence quantifications: Feature extractions from recurrence plots, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17, pp. 3467-75.
- Weisberg Herbert F. (1998), Nonlinear models of electoral change: The implications of political time and chaos theory for the study of mass political behaviour, *Electoral Studies*, 17 (3), pp. 369-382.
- West B.J. (1997), Chaos and related things: a tutorial, *The Journal of mind and Behaviour*, 18, pp. 103-26.
- Wiggins S. (1990), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, Berlino.
- Wisdom J. (1987), Urey prize lecture: chaotic dynamics in the solar system, *Icarus* 72, pp. 241-75.
- Wolf A. (1986), Quantifying Chaos with Lyapunov Exponents, in A . Holden. (a cura di), *Chaos*, Princeton University Press pp. 237-90.
- Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L. e Vastano J.A. (1985), Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica* 16(D), pp.285-317
- Wolff R. C . (1992), Local Lyapunov Exponents: Looking Closely at Chaos. *Journal of the Royal Statistical Society B* 54, pp. 353-71.
- Zbilut J.P. (2005), Use of recurrence quantification analysis in economic time series, in M. Salzano e A.Kirman (a cura di), *New economic windows: economics – complex windows*, Springer, Milano, pp.91-104.
- Zbilut, J.P. e Webber C. L. (1992), Embeddings and Delays as Derived from Quantification of Recurrence Plots, *Physics Letters A*, 171, pp. 199-203.

