Bollettino U. M. I.
(6) 5-B (1986), 421-440

Geometria riemanniana delle CR-sottovarietà di varietà kähleriane.

DONATO PERTICI

Summary. – *CR-submanifolds of kählerian manifolds geometrical properties are studied, giving a particular attention to those submanifolds whose Levi-distribution is integrable.*

Introduzione.

In questo lavoro che è la naturale prosecuzione di [3], si studiano le proprietà metriche di una CR-sottovarietà S di una varietà Kähleriana (M, g), in rapporto alla sua CR-struttura.

La definizione di CR-sottovarietà che adottiamo è quella classica dell'Analisi Complessa ([5]): S è una CR-sottovarietà di una varietà kähleriana M (o più in generale complessa) se la dimensione del CR-spazio tangente $H_p(S)$ a S in p è costante al variare di p. Bejancu ha dato una definizione più restrittiva di CR-sottovarietà S di una varietà kähleriana imponendo l'ulteriore condizione che l'operatore J (di « moltiplicazione per i ») mandi l'ortogonale di $H_p(S)$ rispetto allo spazio tangente $T_p(S)$ a S in p, nell'ortogonale a $T_p(S)$.

Per i lavori riguardanti le proprietà geometrico-differenziali di questa classe di CR-sottovarietà rimandiamo ai due libri di K. Yano e M. Kon ([6], [7]).

Il primo e secondo paragrafo del lavoro sono dedicati allo studio delle proprietà delle varie curvature delle CR-sottovarietà Levi-piatte.

Il terzo paragrafo è dedicato allo studio delle CR-sottovarietà Levi-piatte, aventi curvatura sezionale complessa uguale a quella dell'ambiente. In tale ambito, si prova, tra l'altro, che le foglie della distribuzione di Levi sono totalmente geodetiche sia in S che in M: si vedano, in particolare, le proposizioni 11 e 12.

Nel quarto e ultimo paragrafo si studia infine una classe ancor più particolare di CR-sottovarietà Levi-piatte, la cui distribuzione di Levi è invariante per il gruppo di olonomia (cfr. prop. 13). I risultati più significativi che si ottengono sono contenuti nelle proposizioni 14 e 15.

I. – Preliminari.

1. – Indichiamo con (M, g) una varietà kähleriana di dimensione complessa n, dotata di una struttura quasi-complessa J, e con S una CR-sottovarietà di M, avente dimensione reale $k \leqslant 2n$ e CR-dimensione uguale ad r. Dato un punto $p \in S$ notiamo con $H_p(S) = T_p(S) \cap JT_p(S)$ il CR-spazio tangente a S in p e con $H(S)$ il fibrato dei CR-spazi tangenti.

Intendendo S dotata della metrica indotta dalla metrica di M (indicata ancora con g), indichiamo con R, ϱ, τ rispettivamente il tensore di Riemann, il tensore di Ricci e la curvatura scalare di Ricci di S. Con i simboli, $\bar{R}$, $\bar{\varrho}$, $\bar{\tau}$ denotiamo invece le restrizioni ad S delle analoghe quantità di (M, g); il simbolo h indica la seconda forma fondamentale di S in M. Si ha inoltre una decomposizione canonica del fibrato tangente $T(M)$ di M:

$$T(M) = H(S) \oplus O(S) \oplus T(S)^{\perp}$$

$O(S)$ essendo l'ortogonale di $H(S)$ in $T(S)$.

In particolare, se p è un punto di S, ogni vettore v di $T_p(M)$ si può esprimere in modo unico nel modo seguente:

$$v = v^H + v^0 + v^{\perp}$$

con $v^H \in H_p(S)$, $v^0 \in O_p(S)$, $v^{\perp} \in T_p(S)^{\perp}$.

Se T è un tensore di tipo $(0, q)$ su S, definiamo altri due tensori dello stesso tipo ponendo:

$$\mathrm{pr}_H T(X_1, \ldots, X_q) = T(X_1^H, \ldots, X_q^H)$$
$$\mathrm{pr}_0 T(X_1, \ldots, X_q) = T(X_1^0, \ldots, X_q^0)\,.$$

In particolare poniamo:

$$R^C = R - \mathrm{pr}_0 R; \qquad \bar{R}^C = \bar{R} - \mathrm{pr}_0 \bar{R}\,.$$

OSSERVAZIONE 1. – Se p è un punto di S le proprietà che seguono sono equivalenti:

a) $R_p^C = \bar{R}_p^C$

b) $R_p(X_1, X_2, X_3, X_4) = \bar{R}_p(X_1, X_2, X_3, X_4)$ ogni volta che un X_i sta in $H_p(S)$.

OSSERVAZIONE 2. – Se $k \leq 2r+1$ (ossia se $\dim O_p(S) \leq 1$) si ha

$$R_p^C = R_p \quad \text{e} \quad \bar{R}_p^C = \bar{R}_p .$$

Consideriamo ora un punto p di S ed una base reale ortonormale $V_1, \ldots, V_{2r}$ di $H_p(S)$.

Definiamo:

$$\varrho_p^C(X, Y) = \sum_{i=1}^{2r} R_p(X, V_i, Y, V_i) \qquad \text{per } X, Y \in T_p(S) .$$

Si verifica immediatamente che la definizione è indipendente dalla scelta della base ortonormale di $H_p(S)$ e che quindi ϱ^C è un tensore simmetrico di tipo $(0, 2)$ definito su S.

Se $\mu_1, \ldots, \mu_{k-2r}$ è una base ortonormale di $O_p(S)$ si ha:

$$\varrho_p^C(X, Y) = \varrho_p(X, Y) - \sum_{s=1}^{k-2r} R_p(X, \mu_s, Y, \mu_s) , \qquad \forall X, Y \in T_p(S) .$$

Definiamo infine

$$\tau^C(p) = \sum_{i=1}^{2r} \varrho_p^C(V_i, V_i) + 2 \sum_{s=1}^{k-2r} \varrho_p^C(\mu_s, \mu_s) =$$
$$= \tau(p) - \sum_{s,h=1}^{k-2r} R_p(\mu_s, \mu_h, \mu_s, \mu_h) .$$

Anche τ^C è indipendente dalla scelta delle basi ortonormali e definisce quindi una funzione di classe C^∞ su S.

OSSERVAZIONE 3. – Se $k \leq 2r+1$ (cioè se $\dim O_p(S) \leq 1$) si ha

$$\tau^C(p) = \tau(p) .$$

Le connessioni riemanniane di M ed S saranno indicate rispettivamente con $\bar{\nabla}$ e ∇.

È noto che se X ed Y sono campi vettoriali tangenti su S si ha ([2], pag. 10)

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) . \tag{1}$$

2. – Per ogni $p \in S$ indichiamo col simbolo $O_p(S)^C$ il complessificato di $O_p(S)$.

Definiamo la *forma di Levi*

$$L_p \colon H_p(S) \times H_p(S) \to O_p(S)^C$$

ponendo, per X_p, $Y_p \in H_p(S)$

$$L_p(X_p, Y_p) = [X, -JY]_p^0 + i[X, Y]_p^0 = \operatorname{Re} L_p + i \operatorname{Im} L_p ,$$

dove X, Y sono campi tangenti in un intorno U di p, che estendono X_p ed Y_p e che in ogni punto di U hanno valori nel CR-spazio tangente ad S.

La CR-sottovarietà S si dice *Levi-piatta* se $L_p = 0$, per ogni $p \in S$. È chiaro che S è Levi-piatta se e solo se la *distribuzione di Levi* $p \mapsto H_p(S)$ è involutiva e quindi integrabile.

Diremo invece che S è *strettamente Levi-convessa* se, per ogni $p \in S$, si ha $L_p(X_p, X_p) = 0$ se e solo se $X_p = 0$.

3. – Siano U e V campi tangenti definiti su M. Poichè (M, g) è una varietà kähleriana valgono le due seguenti formule:

$$\bar{\nabla}_U JV = J\bar{\nabla}_U V , \tag{2}$$

$$\bar{\nabla}_{JU} V = J\bar{\nabla}_U V + [JU, V] - J[U, V] . \tag{3}$$

Se X ed Y sono campi tangenti su S a valori nel fibrato $H(S)$ dalle formule (1), (2), (3) si ricava allora:

$$J\nabla_X Y - \nabla_X JY = h(X, JY) - Jh(X, Y) , \tag{4}$$

$$J\nabla_X Y - \nabla_{JX} Y = J[X, Y] - [JX, Y] - Jh(X, Y) + h(JX, Y) . \tag{5}$$

Sottraendo la (4) dalla (5) si ottiene

$$\nabla_X JY - \nabla_{JX} Y = J[X, Y] - [JX, Y] + h(JX, Y) - h(X, JY) .$$

Tenendo conto che:

$$\nabla_{JX} Y = \nabla_Y JX + [JX, Y]$$

si ottiene

$$\nabla_X JY - \nabla_Y JX = J[X, Y] + h(JX, Y) - h(X, JY) . \tag{6}$$

Proiettando la (6) sullo spazio ortogonale ad S si ottiene infine

$$\{J[X, Y]\}^\perp = h(X, JY) - h(JX, Y) . \tag{7}$$

Poichè

$$\{J[X, Y]\}^{\perp} = \{J([X, Y]^H)\}^{\perp} + \{J([X, Y]^0)\}^{\perp} = \\ = \{J([X, Y]^0)\}^{\perp} = \{J \operatorname{Im} L(X, Y)\}^{\perp},$$

si conclude che

$$\{J \operatorname{Im} L(X, Y)\}^{\perp} = h(X, JY) - h(JX, Y).$$

Sostituendo Y con $-JY$ si ottiene infine la formula

$$\{J \operatorname{Re} L(X, Y)\}^{\perp} = h(X, Y) + h(JX, JY).$$

Abbiamo quindi dimostrato la

PROPOSIZIONE 1. – *Sia S una CR-sottovarietà di una varietà kähleriana (M, g) e sia $p \in S$.*

Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\{J \operatorname{Re} L_p(X_p, Y_p)\}^{\perp} = h_p(X_p, Y_p) + h_p(JX_p, JY_p),$$

$$\{J \operatorname{Im} L_p(X_p, Y_p)\}^{\perp} = h_p(X_p, JY_p) - h_p(JX_p, Y_p),$$

per ogni coppia X_p, Y_p di vettori di $H_p(S)$.

In particolare, S è Levi-piatta se e solo se la restrizione della seconda forma fondamentale ad ogni CR-spazio tangente è anti-J-invariante.

2. – Curvature di una CR-sottovarietà Levi-piatta.

1. – Sia p un punto di S e sia π una retta complessa contenuta in $H_p(S)$. Indichiamo con $K^{\mathbf{C}}(\pi)$ la curvatura sezionale della sezione π in S e con $\bar{K}^{\mathbf{C}}(\pi)$ la curvatura sezionale di π in M. $K^{\mathbf{C}}(\pi)$ si chiama la *curvatura sezionale complessa* di S in p, secondo la sezione π.

La notazione $K_p^{\mathbf{C}} \leqslant \bar{K}_p^{\mathbf{C}}$ indica che $K_p^{\mathbf{C}}(\pi) \leqslant \bar{K}_p^{\mathbf{C}}(\pi)$ per ogni retta complessa π di $H_p(S)$, mentre $K^{\mathbf{C}} \leqslant \bar{K}^{\mathbf{C}}$ indica che $K_p^{\mathbf{C}} \leqslant \bar{K}_p^{\mathbf{C}}$ per ogni $p \in S$.

PROPOSIZIONE 2. – *Sia S una CR-sottovarietà di una varietà kähleriana (M, g) e sia $p \in S$.*

Sia $X \in H_p(S) - \{0\}$ tale che $L_p(X, X) = 0$ e sia π la retta complessa generata da X.

Allora: $K^{\mathbf{C}}(\pi) \leqslant \bar{K}^{\mathbf{C}}(\pi)$ e vale l'uguaglianza se e solo se $h_{p|\pi \times \pi} = 0$.

DIMOSTRAZIONE. – Per la proposizione 1 si ha $-h_p(X,X) = h_p(JX,JX)$. Supponendo, come è lecito, X di norma 1, si ha, per la formula di Gauss ([2], pag. 23)

$$\begin{aligned}K^C(\pi) &= R(X,JX,X,JX) = \bar{R}(X,JX,X,JX) + \\ &+ g\big(h_p(X,X),h_p(JX,JX)\big) - g\big(h_p(X,JX),h_p(X,JX)\big) = \\ &= \bar{K}^C(\pi) - \big[g\big(h_p(X,X),h_p(X,X)\big) + g\big(h_p(X,JX),h_p(X,JX)\big)\big]\,.\end{aligned}$$

Ciò prova la proposizione.

COROLLARIO 1. – *Sia p un punto di una CR-sottovarietà S di una varietà kähleriana (M,g). Se la forma di Levi di S è nulla in p, allora è $K^C_p \leqslant \bar{K}^C_p$. Inoltre sono fatti equivalenti:*

a) $L_p = 0$ *e* $K^C_p = \bar{K}^C_p$

b) $(\mathrm{pr}_H h)_p = 0$.

COROLLARIO 2. – *Sia S una CR-sottovarietà di una varietà kähleriana e sia $K^C > \bar{K}^C$. Allora S è strettamente Levi-convessa.*

La proposizione seguente verrà utilizzata più avanti:

PROPOSIZIONE 3. – *Sia S una CR-sottovarietà di una varietà kähleriana e sia $p \in S$ tale che $L_p = 0$. Le proprietà:*

1) $R^C_p = \bar{R}^C_p$

2) $h_p(X,U) = 0$, *per ogni* $X \in H_p(S)$, *e per ogni* $U \in T_p(S)$, *sono equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. – Per l'osservazione 1 del § 1 è sufficiente provare che 2) equivale alla *b)* dell'osservazione stessa. Indichiamo con T il tensore di tipo $(0,4)$ definito dalla seguente uguaglianza:

$$T(X,Y,Z,W) = g\big(h(X,Z),h(Y,W)\big) - g\big(h(X,W),h(Y,Z)\big)\,,$$

essendo X, Y, Z, W campi tangenti ad S.

Per la formula di Gauss si ha

$$R_p = \bar{R}_p + T_p\,.$$

Se vale la 2) si ha $T_p(X_1,X_2,X_3,X_4) = 0$ ogni volta che un X_i sta in $H_p(S)$ e quindi

$$R_p(X_1,X_2,X_3,X_4) = \bar{R}_p(X_1,X_2,X_3,X_4);$$

vale cioè la b) dell'osservazione 1, § 1. Viceversa supponiamo valga quest'ultima e siano $X \in H_p(S)$, $U \in T_p(S)$.

Dovrà quindi essere

$$g(h(X, X), h(U, U)) = g(h(X, U), h(X, U)) \geq 0\,,$$
$$g(h(JX, JX), h(U, U)) = g(h(JX, U), h(JX, U)) \geq 0\,.$$

Poichè $L_p = 0$ si ha $h(JX, JX) = -h(X, X)$.

Dal confronto delle due uguaglianze segue $h(X, U) = 0$; cioè vale la 2). q.e.d.

2. – Proseguiamo ora nello studio delle proprietà metriche delle CR-sottovarietà Levi-piatte.

Se p è un punto di una CR-sottovarietà S di M scriviamo $\bar{K}_p \leq 0$ per indicare che ogni sezione di $T_p(M)$ ha curvatura sezionale non positiva in M. Nel resto del paragrafo denotiamo con $V_1, \ldots, V_r$, $JV_1, \ldots, JV_r$ una base reale ortonormale di $H_p(S)$, $\mu_1, \ldots, \mu_{k-2r}$ una base ortonormale di $O_p(S)$.

PROPOSIZIONE 4. – *Sia p un punto di una CR-sottovarietà S di una varietà kähleriana. Supponiamo $L_p = 0$ e $\bar{K}_p \leq 0$. Allora ϱ_p^C è semidefinito negativo. Se, inoltre, è $\bar{K}_p = 0$, allora ϱ_p^C è identicamente zero se e solo se $R_p^C = \bar{R}_p^C$.*

DIMOSTRAZIONE. – Se $X \in T_p(S)$ si ha:

$$\begin{aligned}
\varrho_p^C(X, X) &= \sum_{i=1}^{r} [R(X, V_i, X, V_i) + R(X, JV_i, X, JV_i)] = \\
&= \sum_{i=1}^{r} [\bar{R}(X, V_i, X, V_i) + \bar{R}(X, JV_i, X, JV_i)] + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r} [g(h(X, X), h(V_i, V_i)) + g(h(X, X), h(JV_i, JV_i))] + \\
&\quad - \sum_{i=1}^{r} [g(h(X, V_i), h(X, V_i)) + g(h(X, JV_i), h(X, JV_i))]\,.
\end{aligned}$$

Poichè h_p è anti-J-invariante su $H_p(S)$ si ha

$$\begin{aligned}
\varrho_p^C(X, X) &= \sum_{i=1}^{r} [\bar{R}(X, V_i, X, V_i) + \bar{R}(X, JV_i, X, JV_i)] + \\
&\quad - \sum_{i=1}^{r} [g(h(X, V_i), h(X, V_i)) + g(h(X, JV_i), h(X, JV_i))]\,.
\end{aligned}$$

Tenendo conto della proposizione 3, si ottiene la proposizione 4.

La proposizione seguente offre un risultato simile in altro ambito.

PROPOSIZIONE 5. – *Sia S una CR-sottovarietà di CR-dimensione uguale ad r di una varietà kähleriana (M, g) a curvatura sezionale olomorfa costante c. Sia p un punto di S tale che $L_p = 0$. Allora:*

1) $(\mathrm{pr}_H \varrho^{\boldsymbol{C}})_p \leqslant ((r+1)/2)c(\mathrm{pr}_H g)_p$ e vale l'uguaglianza se e solo se $K_p^{\boldsymbol{C}} = c$;

2) se S non è una sottovarietà complessa di M e se $c > 0$ si ha

$$\varrho_p^{\boldsymbol{C}} < \frac{(r+1)}{2} c g_p .$$

DIMOSTRAZIONE. – Poichè (M, g) è a curvatura sezionale olomorfa costante c si ha (cfr. [2], pagg. 167-168)

$$\bar{R}(X, Y, X, Y) = \frac{c}{4}\{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2 + 3g(X, JY)^2\} .$$

Quindi se Y ha norma 1

$$\bar{R}(X, Y, X, Y) + \bar{R}(X, JY, X, JY) = \\ = \frac{c}{2}\{g(X, X) + g(X, JY)^2 + g(X, Y)^2\} .$$

Tenendo presente che $L_p = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} \varrho_p^{\boldsymbol{C}}(X, X) &= \sum_{i=1}^{r} [\bar{R}(X, V_i, X, V_i) + \bar{R}(X, JV_i, X, JV_i)] + \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r} [g(h(X, V_i), h(X, V_i)) + g(h(X, JV_i), h(X, JV_i))] = \\ &= \frac{c}{2} \sum_{i=1}^{r} [g(X, X) + g(X, V_i)^2 + g(X, JV_i)^2] - \sum_{i=1}^{r} [\ldots] . \end{aligned}$$

Se $X \in H_p(S)$ si ha

$$\varrho_p^{\boldsymbol{C}}(X, X) = \frac{(r+1)}{2} c g(X, X) - \sum_{i=1}^{r} [\ldots] .$$

La quantità $\sum_{i=1}^{r} [\ldots]$ è $\geqslant 0$ ed è zero, per ogni $X \in H_p(S)$, se e solo se $K_p^{\boldsymbol{C}} = \bar{K}_p^{\boldsymbol{C}} = c$ (cor. 1, prop. 2). Ciò prova la 1).

Supponiamo di essere ora nelle ipotesi della 2) e sia $X \in T_p(S)$. Si ha allora

$$\varrho_p^{\boldsymbol{C}}(X, X) = \frac{(r+1)}{2} c g(X, X) - \frac{c}{2} \sum_{i=1}^{k-2r} g(X, \mu_i)^2 - \sum_{i=1}^{r} [\ldots] .$$

Poichè S non è una sottovarietà complessa di M è $\dim O_p(S) \geqslant 1$; da ciò e dal fatto che $c > 0$ segue la 2).

3. – Risultati analoghi si ottengono per la curvatura $\tau^{\mathbf{C}}$. I risultati seguenti sono tutte generalizzazioni della proposizione 7 dimostrata in [3].

PROPOSIZIONE 6. – *Sia S una CR-sottovarietà di una varietà kähleriana (M, g) e sia $p \in S$ tale che $L_p = 0$. Sia $k = \dim S$ e $r = CR\text{-}\dim S$. Allora:*

a) Se $\bar{K}_p \leqslant 0$ si ha $\tau^{\mathbf{C}}(p) \leqslant 0$; inoltre se $\bar{K}_p = 0$, è $\tau^{\mathbf{C}}(p) = 0$ se e solo se $R^{\mathbf{C}}_p = \bar{R}^{\mathbf{C}}_p$.

b) Se (M, g) ha curvatura sezionale olomorfa costante c si ha $\tau^{\mathbf{C}}(p) \leqslant cr(k + 1 - r)$ e vale l'uguaglianza se e solo se $R^{\mathbf{C}}_p = \bar{R}^{\mathbf{C}}_p$.

c) Se S è una ipersuperficie di M e se $\bar{\varrho}_p$ è semidefinito positivo si ha $\tau(p) \leqslant \bar{\tau}(p)$. Se vale l'uguaglianza è $R_p = \bar{R}_p$. Inoltre se $\bar{\varrho}_p$ è definito positivo è necessariamente $\tau(p) < \bar{\tau}(p)$.

DIMOSTRAZIONE. – La $a)$ è conseguenza immediata della proposizione 4 e della definizione di $\tau^{\mathbf{C}}$.

L'espressione di $\tau^{\mathbf{C}}(p)$ è comunque la seguente:

$$\begin{aligned}\tau^{\mathbf{C}}(p) = 2\Big\{&\sum_{i,j=1}^{r}[\bar{R}(V_i, V_j, V_i, V_j) + \bar{R}(V_i, JV_j, V_i, JV_j)] + \\ &+ \sum_{i=1}^{r}\sum_{s=1}^{k-2r}[\bar{R}(V_i, \mu_s, V_i, \mu_s) + \bar{R}(JV_i, \mu_s, JV_i, \mu_s)]\Big\} + \\ &-2\Big\{\sum_{i,j=1}^{r}[\|h(V_i, V_j)\|^2 + \|h(V_i, JV_j)\|^2] + \\ &+ \sum_{i=1}^{r}\sum_{s=1}^{k-2r}[\|h(JV_i, \mu_s)\|^2 + \|h(V_i, \mu_s)\|^2]\Big\},\end{aligned}$$

ove si è posto $g(X, X) = \|X\|^2$.

Tale espressione si ricava tenendo conto della formula di Gauss e della anti-J-invarianza di h_p.

Se valgono le ipotesi della $b)$ si ha:

$$\bar{R}(X, Y, X, Y) = \frac{c}{4}\{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2 + 3g(X, JY)^2\}.$$

Sostituendo nell'espressione di $\tau^{\mathbf{C}}(p)$ si trova

$$\tau^{\mathbf{C}}(p) = cr\{k + 1 - r\} - 2\{\ldots\},$$

dove la quantità $\{...\}$ è $\geqslant 0$ ed è zero se e solo se $R_p^{\mathbf{C}} = \bar{R}_p^{\mathbf{C}}$ (per la prop. 3).

Ciò prova la b).

Nel caso che S sia una ipersuperficie di M, sempre sfruttando la formula di Gauss e l'anti-J-invarianza di h_p, si prova che

$$\tau(p) = \bar{\tau}(p) - 2\bar{\varrho}_p(\mu, \mu) - 2\Big\{\sum_{i=1}^{n-1}[\|h(\mu, V_i)\|^2 + \|h(\mu, JV_i)\|^2] + \sum_{i,j=1}^{n-1}[\|h(V_i, V_j)\|^2 + \|h(V_i, JV_j)\|^2]\Big\},$$

essendo μ un vettore unitario di $O_p(S)$.

La c) segue allora dalla proposizione 3 e dall'osservazione 2 del § 1.

Corollario. – *Sia (M, g) una varietà kähleriana e sia S una CR-sottovarietà di CR-dimensione* 1. *Allora S è strettamente Levi-convessa se vale una qualsiasi delle seguenti proprietà*:

a) *(M, g) è a curvatura sezionale $\leqslant 0$ e $\tau^{\mathbf{C}} > 0$ in ogni punto di S.*

b) *(M, g) è a curvatura sezionale olomorfa costante c e $\tau^{\mathbf{C}} > ck$ in ogni punto di S ($k = \dim_{\mathbf{R}} S$).*

c) $\dim_{\mathbf{C}} M = 2$, $\dim_{\mathbf{R}} S = 3$, *il tensore di Ricci di M è semi-definito positivo (definito positivo) e $\tau > \bar{\tau}$ (risp. $\tau \geqslant \bar{\tau}$) in ogni punto di S.*

4. – In quest'ultima parte del paragrafo descriviamo alcune proprietà puntuali delle CR-sottovarietà Levi-piatte a curvatura sezionale complessa uguale a quella dell'ambiente. Uno studio globale di tali varietà sarà fatto nel paragrafo successivo.

La dimostrazione della proposizione seguente è sostanzialmente identica a quella della proposizione 5 di [3], a cui si rimanda.

Proposizione 7. – *Sia p un punto di una CR-sottovarietà S di una varietà kähleriana (M, g). Supponiamo* $\dim_{\mathbf{R}} S = 2 \cdot CR\text{-}\dim S + 1$, *$L_p = 0$ e $K_p^{\mathbf{C}} = \bar{K}_p^{\mathbf{C}}$. Allora per ogni coppia di vettori X, Y di $T_p(S)$ si ha*

$$R_p(X, Y, X, Y) \leqslant \bar{R}_p(X, Y, X, Y)\,.$$

Proposizione 8. – *Sia p un punto di una CR-sottovarietà S di una varietà kähleriana (M, g), tale che $L_p = 0$, $K_p^{\mathbf{C}} = \bar{K}_p^{\mathbf{C}}$. Allora*:

a) *Se* $\bar{K}_p \geq 0$ *si ha* $(\mathrm{pr}_H\,\varrho)_p \leq (\mathrm{pr}_H\,\bar{\varrho})_p$ *e se* $\bar{K}_p = 0$ *l'uguaglianza è valida se e solo se* $R_p^{\mathbf{C}} = \bar{R}_p^{\mathbf{C}}$.

b) *Se* (M, g) *ha curvatura sezionale olomorfa costante* c *si ha*:

$$(\mathrm{pr}_H\,\varrho)_p \leq \frac{(k+2)}{4}\,c(\mathrm{pr}_H\,g)_p\,,$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $R_p^{\mathbf{C}} = \bar{R}_p^{\mathbf{C}}$ $(k = \dim_{\mathbf{R}} S)$.

DIMOSTRAZIONE. – Sia $\nu_1, \ldots, \nu_{2n-k}$ una base ortonormale di $T_p(S)^{\perp}$. Sfruttando, come al solito, la formula di Gauss ed il corollario 1 della proposizione 2 si ottiene facilmente

$$\varrho_p(X, X) = \bar{\varrho}_p(X, X) - \sum_{q=1}^{2n-k} \bar{R}_p(X, \nu_q, X, \nu_q) - \sum_{s=1}^{k-2r} \|h(X, \mu_s)\|^2\,,$$

per ogni $X \in H_p(S)$. Vale quindi la *a*) (per la prop. 3). Se (M, g) ha curvatura sezionale olomorfa costante c si ha, per ogni $X \in H_p(S)$,

$$\bar{R}(X, \nu_q, X, \nu_q) = \frac{c}{4}\,g(X, X)\,, \qquad q = 1, \ldots, 2n-k\,.$$

Inoltre (cfr. [2], pag. 168)

$$\bar{\varrho}(X, X) = \frac{(n+1)}{2}\,cg(X, X) \qquad (n = \dim_{\mathbf{C}} M)\,.$$

È immediato verificare allora che:

$$\varrho_p(X, X) = \frac{(k+2)}{4}\,cg(X, X) - \sum_{s=1}^{k-2r} \|h(X, \mu_s)\|^2\,,$$

per ogni $X \in H_p(S)$.

Ancora per la proposizione 3, segue la *b*).

3. – Proprietà delle CR-sottovarietà Levi-piatte tali che $\bar{K}^{\mathbf{C}} = K^{\mathbf{C}}$.

In questo paragrafo e nel seguente vengono studiate le CR-sottovarietà Levi-piatte tali che $K^{\mathbf{C}} = \bar{K}^{\mathbf{C}}$ e $R^{\mathbf{C}} = \bar{R}^{\mathbf{C}}$ rispettivamente.

PROPOSIZIONE 9. – *Sia* S *una* CR-*sottovarietà Levi-piatta di una varietà kähleriana* (M, g), *tale che* $K^{\mathbf{C}} = \bar{K}^{\mathbf{C}}$. *Le foglie della distribuzione di Levi di* S *sono totalmente geodetiche in* M *ed in* S. *Inoltre, se* S *è completa, anche le foglie massimali di tale distribuzione lo sono.*

DIMOSTRAZIONE. – Sia F una foglia della distribuzione di Levi di S. Indichiamo con h' ed h'' le seconde forme fondamentali di F in S ed M rispettivamente.

Poichè $h'' = h + h'$ e poichè h è identicamente nulla sui CR-spazi tangenti di S (corollario 1 della prop. 2) si ottiene $h'' = h'$.

F è una sottovarietà complessa di M e dunque per l'uguaglianza (4) del § 1 si ha

$$h''(X, JY) = Jh''(X, Y)\,,$$

per ogni coppia X, Y di campi tangenti ad F.

Quindi $h'(X, Y)$ e $Jh'(X, Y)$ appartengono, in ogni punto p di S, allo spazio $O_p(S) \subseteq T_p(S)$. Ne segue che $h'(X, Y) \in H_p(S)$, per ogni $p \in S$, e quindi che $h'(X, Y) = 0$. Si ha dunque $h' = h'' = 0$.

Ciò conclude la prima parte della dimostrazione (cfr. [2], pag. 59). Supponendo ora che S sia completa, sia F una foglia massimale.

La seconda parte della proposizione discende allora dal fatto che ogni geodetica di F è geodetica anche in S (cfr. [1], pag. 181).

q.e.d.

Indichiamo ora con $\boldsymbol{P}_c^r(\boldsymbol{C})$ lo spazio proiettivo complesso con la metrica di Fubini-Study che ha curvatura sezionale olomorfa costante $c > 0$.

Vale la seguente

PROPOSIZIONE 10. – *Sia S una CR-sottovarietà di una varietà kähleriana (M, g) a curvatura sezionale olomorfa costante $c > 0$. Supponiamo S Levi-piatta, completa e tale che $K^{\boldsymbol{C}} = c$. Allora S è unione disgiunta di sottovarietà complesse di M, isometricamente biolomorfe a $\boldsymbol{P}_c^r(\boldsymbol{C})$ ($r = CR$-dim S).*

DIMOSTRAZIONE. – S è unione disgiunta delle foglie massimali della distribuzione di Levi. Ognuna di queste foglie è una varietà kähleriana, completa (per la prop. 9), a curvatura sezionale olomorfa costante $c > 0$ (per la prop. 9 e la formula di Gauss); ogni foglia è quindi semplicemente connessa (cfr. [4]) e perciò è isometricamente biolomorfa a $\boldsymbol{P}_c^r(\boldsymbol{C})$ (cfr. [2], pag. 170-171). q.e.d.

Dal teorema di Abe (cfr. [6], pag. 37) e dalla relazione di Grassmann si deduce la seguente

PROPOSIZIONE 11. – *Le uniche CR-sottovarietà complete, Levi-piatte di $\boldsymbol{P}_c^n(\boldsymbol{C})$, di CR-dimensione $\geqslant n/2$, aventi curvatura sezionale complessa identicamente uguale a c ($c > 0$), sono i sottospazi proiettivi complessi.*

Poichè le sottovarietà complesse, complete e totalmente geodetiche di C^n sono le varietà complesse affini, si ha la seguente

PROPOSIZIONE 12. – *Ogni CR-sottovarietà di C^n, di CR-dimensione r, Levi-piatta, completa, a curvatura sezionale complessa identicamente nulla, è unione di varietà complesse affini di dimensione r.*

Si confronti quest'ultimo risultato con la proposizione 9 di [3].

4. – *CR*-sottovarietà Levi-piatte con $\bar{R}^C = R^C$.

La prima parte di quest'ultimo capitolo si ispira, in larga misura, ai paragrafi 5 e 6 del capitolo IV di [1]. Nella seconda parte vengono, invece, generalizzati alcuni risultati del § 4 di [3].

1. – Se $\gamma: [a, b] \to S$ è una curva in S, indicheremo con $\theta_t: T_{\gamma(a)}(S) \to T_{\gamma(t)}(S)$ il trasporto parallelo lungo γ.

PROPOSIZIONE 13. – *Sia S una CR-sottovarietà Levi-piatta di una varietà kähleriana (M, g), tale che $R^C = \bar{R}^C$.*
Valgono le seguenti affermazioni:

I) *Se $\gamma: [a, b] \to S$ è una curva in S, si ha:*

$$\theta_t(H_{\gamma(a)}(S)) = H_{\gamma(t)}(S)$$

e $J \circ \theta_t = \theta_t \circ J$ per ogni $t \in [a, b]$.

II) *La distribuzione ortogonale $p \mapsto O_p(S)$ è integrabile e le foglie di tale distribuzione sono totalmente geodetiche in S.*

DIMOSTRAZIONE. – Siano

$\mathfrak{X}(S)$ l'algebra dei campi vettoriali tangenti ad S,

$$\mathfrak{X}^H(S) = \{X \in \mathfrak{X}(S) : X(q) \in H_q(S), \forall q \in S\},$$

$$\mathfrak{X}^O(S) = \{X \in \mathfrak{X}(S) : X(q) \in O_q(S), \forall q \in S\}.$$

Siano $X \in \mathfrak{X}^H(S)$, $U \in \mathfrak{X}(S)$: per la prop. 3 si ha $h(X, U) = 0$ e quindi $\bar{\nabla}_U X = \nabla_U X$.

In modo analogo si vede che

$$\bar{\nabla}_U JX = \nabla_U JX.$$

Poichè (M, g) è kähleriana si ha $\overline{\nabla}_U JX = J\overline{\nabla}_U X$ e quindi

$$(*) \qquad \nabla_U JX = J\nabla_U X .$$

In particolare

$$\nabla_U X \in \mathfrak{X}^H(S) .$$

Sia ora $\mu \in \mathfrak{X}^0(S)$. Allora

$$g(\nabla_U \mu, X) = g(\nabla_U \mu, X) + g(\mu, \nabla_U X) = U(g(\mu, X)) = 0 ,$$

e quindi

$$(**) \qquad \nabla_U \mu \in \mathfrak{X}^0(S) .$$

Se allora $\mu, \eta \in \mathfrak{X}^0(S)$, per $(**)$, si ha

$$[\mu, \eta] = \nabla_\mu \eta - \nabla_\eta \mu \in \mathfrak{X}^0(S) .$$

La distribuzione ortogonale è dunque involutiva.

Sia ora $\gamma\colon [a, b] \to S$ una curva in S e sia $\nabla_{d/dt}$ la derivazione covariante lungo γ.

Sia $X \in H_{\gamma(a)}S$. Si ha

$$\nabla_{d/dt} J(\theta_t X)^H = \qquad \text{(per } (*))$$
$$= J\nabla_{d/dt}(\theta_t X)^H = J\nabla_{d/dt}\theta_t X - J\nabla_{d/dt}(\theta_t X)^0 = -J\nabla_{d/dt}(\theta_t X)^0 .$$

Per $(**)$, $\nabla_{d/dt}(\theta_t X)^0$ appartiene a $O_p(S)$, per ogni punto p di γ; d'altra parte, per l'uguaglianza precedente, $\nabla_{d/dt}(\theta_t X)^0$ sta anche in $H_p(S)$, quindi $\nabla_{d/dt}(\theta_t X)^0 = 0$. Da ciò segue $\nabla_{d/dt} J(\theta_t X)^H = 0$ e quindi

$$(\alpha) \qquad \theta_t JX = J(\theta_t X)^H .$$

Per l'arbitrarietà di $X \in H_{\gamma(a)}(S)$, da (α) si deduce che $\theta_t X$ appartiene a $H_{\gamma(t)}(S)$ e che quindi $\theta_t JX = J\theta_t X$. Ciò prova la I).

θ_t è una isometria, quindi manda $O_{\gamma(a)}(S)$ in $O_{\gamma(t)}(S)$. Ciò significa che le foglie della distribuzione ortogonale sono auto-parallele e quindi totalmente geodetiche in S (cfr. [2], pag. 59).

È quindi provata anche la II).

Siano S, S' CR-sottovarietà di due varietà hermitiane (M, g) e (M', g') rispettivamente.

Un'isometria $f\colon S \to S'$ la cui applicazione tangente sia $\mathbf{C}$-lineare su ogni CR-spazio tangente, si dice una *CR-isometria*, e S ed S' si dicono allora *CR-isometriche*.

PROPOSIZIONE 14. – *Siano (M, g) una varietà kähleriana e S una CR-sottovarietà Levi-piatta tale che $R^C = \bar{R}^C$. Sia $p \in S$ e siano F e G rispettivamente, le foglie della distribuzione di Levi e della distribuzione ortogonale di S passanti per p. Allora esiste un intorno di p in S CR-isometrico ad un aperto di $F \times G$.*

DIMOSTRAZIONE. – $F \times G$ è una CR-sottovarietà di $(M \times M, g \times g)$ di CR-dimensione uguale alla CR-dimensione r di S. Poichè la distribuzione di Levi e la distribuzione ortogonale sono complementari in ogni punto di S, esiste un sistema di coordinate $(X^1, \dots, X^k)$ $(|X^1|, \dots, |X^k| < \varepsilon)$ definite su un intorno U di p, centrate in p, e tali che:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial X^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X^{2r}} \right\rangle = H_q(S);$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial X^{2r+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial X^k} \right\rangle = O_q(S);$$

in ogni punto q di U (cfr. [1], pag. 182).

Allora

$$F \cap U = \{(X^1, \dots, X^{2r}, 0, \dots, 0) : |X^1|, \dots, |X^{2r}| < \varepsilon\},$$

$$G \cap U = \{(0, 0, \dots, 0, X^{2r+1}, \dots, X^k) : |X^{2r+1}|, \dots, |X^k| < \varepsilon\}.$$

Posto $g_{ij} = g(\partial/\partial X^i, \partial/\partial X^j)$ si ha:

a) $g_{ij} = 0$ se $i = 1, \dots, 2r$; $j = 2r + 1, \dots, k$,

b) g_{ij} è indipendente da X^m se $i, j = 1, \dots, 2r$ e $m = 2r + 1, \dots, k$ oppure se $i, j = 2r + 1, \dots, k$ e $m = 1, \dots, 2r$.

La *a)* è ovviamente vera. Proviamo *b)*.

Siano ad esempio $m = 2r + 1, \dots, k$; $i, j = 1, \dots, 2r$. Si ha

$$\nabla_{\partial/\partial X^m} \frac{\partial}{\partial X^i} = \nabla_{\partial/\partial X^i} \frac{\partial}{\partial X^m} \quad \left(\text{poichè } \left[\frac{\partial}{\partial X^i}, \frac{\partial}{\partial X^m}\right] = 0\right).$$

Ma

$$\left(\nabla_{\partial/\partial X^m} \frac{\partial}{\partial X^i}\right)_q \in H_q(S); \qquad \left(\nabla_{\partial/\partial X^i} \frac{\partial}{\partial X^m}\right)_q \in O_q(S),$$

per ogni $q \in U$ (vedi dim. prop. 13). Ne segue

$$\nabla_{\partial/\partial X^m} \frac{\partial}{\partial X^i} = \nabla_{\partial/\partial X^i} \frac{\partial}{\partial X^m} = 0$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial X^m} g_{ij} = g\left(\nabla_{\partial/\partial X^m} \frac{\partial}{\partial X^i}, \frac{\partial}{\partial X^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial X^i}, \nabla_{\partial/\partial X^m} \frac{\partial}{\partial X^j}\right) = 0 .$$

Dunque è vera anche la *b*).

La metrica g, in tali coordinate, si esprime perciò nel modo seguente

$$g = \sum_{i,j=1}^{2r} g_{ij}(X^1, \ldots, X^{2r})\, dx^i dx^j + \sum_{m,h=2r+1}^{k} g_{mh}(X^{2r+1}, \ldots, X^k)\, dx^m dx^h .$$

L'applicazione

$$f\colon U \to (F \cap U) \times (G \cap U)$$

definita da

$$f(X^1, \ldots, X^k) = [(X^1, \ldots, X^{2r}, 0, \ldots, 0), (0, \ldots, 0, X^{2r+1}, \ldots, X^k)]$$

è allora una CR-isometria. q.e.d.

È facilmente dimostrabile la seguente:

OSSERVAZIONE. – Se F e G sono come nella proposizione 14, allora $F \times G$ gode della proprietà I) della proposizione 13.

Possiamo ora enunciare la

PROPOSIZIONE 15. – *Sia S una CR-sottovarietà di una varietà kähleriana (M, g) e sia $p \in S$. Supponiamo S Levi-piatta, completa, semplicemente connessa e tale che $R^{\mathbf{C}} = \bar{R}^{\mathbf{C}}$. Se F e G sono le varietà integrali massimali passanti per p, rispettivamente della distribuzione di Levi e della distribuzione ortogonale di S, allora S è CR-isometrica a $F \times G$.*

DIMOSTRAZIONE. – Diamo una traccia della dimostrazione.

Sappiamo già che F è completa (cfr. prop. 9). In modo analogo si prova che anche G è completa (tenendo conto della II) della prop. 13). Sappiamo inoltre che F e G sono totalmente geodetiche in S. Costruiamo ora la CR-isometria fra S e $F \times G$.

Sia $\gamma\colon [0, 1] \to S$ tale che $\gamma(0) = p$, e $\forall t \in [0, 1]$, sia $X(t)$ il risultato del trasporto parallelo di $\dot{\gamma}(t)^H$ da $\gamma(t)$ a p.

Si può definire una unica curva $\gamma_1\colon [0, 1] \to F$ tale che $\gamma_1(0) = p$ e tale che il risultato del trasporto parallelo di $\dot{\gamma}_1(t)$ da $\gamma_1(t)$ a p sia uguale a $X(t)$, $\forall t \in [0, 1]$.

Poichè M è semplicemente connessa, si prova che $\gamma_1(1)$ dipende solo da $\gamma(1) = q$ e non da γ. Si pone allora $f'(q) = \gamma_1(1)$.

Resta quindi definita $f': S \to F$.

In modo analogo si definisce $f'': S \to G$.

Si dimostra poi che F e G sono semplicemente connesse e che $f = (f', f''): S \to F \times G$ è una isometria.

Tutto ciò è svolto, nei minimi dettagli, nel § 6 del capitolo IV di [1]. (Si tenga in proposito conto della proposizione 13, punto I)).

Dalla definizione di f è evidente che essa manda ogni punto q di $F \subseteq S$ nel punto $(q, p) \in F \times G$.

Ne segue che l'applicazione tangente di f è $\boldsymbol{C}$-lineare sui CR-spazi tangenti dei punti di F. Con un semplice calcolo si vede che, tenendo conto del punto I) della prop. 13 e dell'osservazione precedente, ciò è sufficiente per dire che f è una CR-isometria. (Si veda ad esempio la dimostrazione della proposizione 11 di [3]).

2. – Dedichiamo quest'ultima parte del paragrafo allo studio delle CR-sottovarietà Levi-piatte di $\boldsymbol{C}^n$, tali che $R^{\boldsymbol{C}} = 0$. Vale anzitutto la seguente

PROPOSIZIONE 16. – *Sia S una CR-sottovarietà connessa di $\boldsymbol{C}^n$. Sono fatti equivalenti:*

1) *I CR-spazi tangenti $H_p(S)$ sono tutti paralleli.*

2) *S è Levi-piatta ed è $R^{\boldsymbol{C}} = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. – Per provare che la 2) è conseguenza della 1) ci si può rifare alla dimostrazione della proposizione 12 di [3]. Viceversa supponiamo S Levi-piatta e $R^{\boldsymbol{C}} = 0$.

Poichè S è connessa, basta provare che i CR-spazi tangenti sono paralleli in un intorno di ogni punto di S. Sia $k = \dim S$, $r = CR\text{-}\dim S$.

Ogni punto p di S, per la proposizione 14, possiede un intorno connesso $U \subseteq S$, parametrizzato da $X(u_1, \ldots, u_k)$, in modo che valgano

$$(*) \qquad \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial u_{2r}} \right\rangle = H_q(S)\,, \qquad \forall q \in U$$

$$(**) \qquad \begin{cases} g\left(\dfrac{\partial X}{\partial u_i}, \dfrac{\partial X}{\partial u_j}\right) = \delta_{ij} & \text{se } i, j = 1, \ldots, 2r \\ g\left(\dfrac{\partial X}{\partial u_i}, \dfrac{\partial X}{\partial u_h}\right) = 0 & \text{se } i = 1, \ldots, 2r;\ h = 2r+1, \ldots, k \\ g\left(\dfrac{\partial X}{\partial u_h}, \dfrac{\partial X}{\partial u_m}\right) & \text{indipendente da } u_i \text{ se } i = 1, \ldots, 2r; \\ & \qquad h, m = 2r+1, \ldots, k \end{cases}$$

(g essendo la metrica euclidea su $\boldsymbol{C}^n$).

Poichè vale ($*$) ed è $R^{\boldsymbol{C}} = 0$, si ha:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{h=1}^{k} \Gamma_{ij}^h \frac{\partial X}{\partial u_h} \qquad \text{se } i = 1, \dots, 2r;\ j = 1, \dots, k\,.$$

Sfruttando ($**$), si prova immediatamente che i simboli di Christoffel Γ_{ij}^h sono nulli, nella parametrizzazione data, se $i = 1, \dots, 2r$; $h, j = 1, \dots, k$.

In conclusione

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} = 0 \qquad \text{se } i = 1, \dots, 2r; \quad j = 1, \dots, k\,.$$

Quindi

$$\frac{\partial X}{\partial u_i} = a_i \text{ costante}, \qquad \text{se } i = 1, \dots, 2r\,.$$

Per ($*$) si ha $H_q(S) = \langle a_1, \dots, a_{2r} \rangle$, per ogni $q \in U$ e ciò prova la proposizione.

Una CR-sottovarietà Γ di una varietà complessa si dice *totalmente reale* se CR-dim $\Gamma = 0$.

Consideriamo una CR-sottovarietà connessa S di $\boldsymbol{C}^n$, Levi-piatta, tale che $R^{\boldsymbol{C}} = 0$, di CR-dimensione r e di dimensione reale k.

Per le proposizioni 9 e 16, S è unione disgiunta di pezzi di varietà complesse affini parallele di dimensione complessa r. A meno di operare su S con una isometria olomorfa di $\boldsymbol{C}^n$, si può supporre che tali varietà siano parallele a

$$\boldsymbol{C}^r = \{(z_1, \dots, z_n) \in \boldsymbol{C}^n \colon z_{r+1} = \dots = z_n = 0\}\,.$$

Quindi

$$S = \bigcup_{(c_{r+1}, \dots, c_n) \in \Gamma} A_{(c_{r+1}, \dots, c_n)}$$

dove ogni $A_{(c_{r+1}, \dots, c_n)}$ è un aperto della varietà affine $\pi_{(c_{r+1}, \dots, c_n)}$ di equazioni

$$z_{r+1} = c_{r+1}, \dots, z_n = c_n\,,$$

e Γ è una sottovarietà connessa e totalmente reale di

$$\boldsymbol{C}^{n-r} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \boldsymbol{C}^n \colon z_1 = \dots = z_r = 0\}\,.$$

S è quindi un aperto di

$$S' = \bigcup_{(c_{r+1},\dots,c_n)\in\Gamma} \pi_{(c_{r+1},\dots,c_n)} = \boldsymbol{C}^r \times \Gamma .$$

Se S è completa, si ha $S = S'$ ed anche Γ è completa. Possiamo riassumere tutto questo nella seguente

PROPOSIZIONE 17. – *Sia S una CR-sottovarietà connessa, Levi-piatta di $\boldsymbol{C}^n$ tale che $R^{\boldsymbol{C}} = 0$. Se $r = CR$-dim S, esiste una isometria olomorfa di $\boldsymbol{C}^n$ che trasforma S in un aperto A di $\boldsymbol{C}^r \times \Gamma$, dove Γ è una sottovarietà connessa e totalmente reale di $\boldsymbol{C}^{n-r}$. Se S è completa, si ha $A = \boldsymbol{C}^r \times \Gamma$, ed anche Γ è completa.*

Se S è a curvatura sezionale identicamente nulla, anche la Γ della precedente proposizione lo è. Quindi Γ è localmente isometrica a $\boldsymbol{R}^{k-2r}$

Se S è anche completa e semplicemente connessa pure Γ lo è; perciò Γ è, in tal caso, globalmente isometrica a $\boldsymbol{R}^{k-2r}$

Posto

$$\boldsymbol{C}^r \times \boldsymbol{R}^{k-2r} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \boldsymbol{C}^n \colon \operatorname{Im} z_{r+1} = \dots = \operatorname{Im} z_{k-r} = 0 ,\ z_{k-r+1} = \dots = z_n = 0\} ,$$

si deduce quindi il seguente

COROLLARIO. – *Sia S una CR-sottovarietà Levi-piatta di $\boldsymbol{C}^n$ a curvatura sezionale identicamente nulla. Se $r = CR$-dim S, $k =$ dim S, allora ogni punto di S possiede un intorno CR-isometrico ad un aperto di $\boldsymbol{C}^r \times \boldsymbol{R}^{k-2r}$. Se S è anche completa e semplicemente connessa essa è globalmente CR-isometrica a $\boldsymbol{C}^r \times \boldsymbol{R}^{k-2r}$.*

BIBLIOGRAFIA

[1] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Volume I, Interscience tracts in pure and applied Mathematics, n. 15, 1963, Wiley.

[2] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Volume II, Interscience tracts in pure and applied Mathematics, 1969, Wiley.

[3] D. PERTICI, *CR-struttura e geometria riemanniana delle ipersuperficie di $\boldsymbol{C}^n$*, (di prossima pubblicazione sui Rend. Cir. Mat. Palermo).

[4] J. L. SYNGE, *On the connectivity of spaces of positive curvature,* Quart. J. Math. Oxford Ser., **7** (1936), 316-320.

[5] R. O. WELLS Jr., *Function theory on differentiable submanifolds,* Contributions to Analysis. A collection of Papers Dedicated to Lipman Bers, 1974, Academic Press, 407-441.

[6] K. YANO - M. KON., *Anti-invariant submanifolds,* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 21 (1976). Marcel Dekker, Inc. New York and Basel.

[7] K. YANO - M. KON, *CR-submanifolds of Kaehlerian and Sasakian manifolds,* Prog. Math., **30** (1983). Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart.

Istituto Matematico « U. Dini », Università di Firenze

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
l'8 agosto 1984