數

繪畫的數學

義大利文藝復興時期射影幾何的誕生

作者：堅逖立（Graziano Gentili）、
希摩努蒂（Luisa Simonutti）、
史楚帕（Daniele Struppa）
譯者：高玉齡

作者簡介

堅逖立是義大利翡冷翠大學迪尼數學與資訊科學系教授，研究的領域是單複變與多複變全純映射的幾何理論，他也是著名數學期刊 *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 的主編。

希摩努蒂是義大利國家研究委員會現代哲學科學思想史研究所（ISPF-CNR）米蘭分部的研究員，研究的領域有文藝復興時期和現代的哲學、道德和政治思想史和近代科學思想史。

史楚帕是義大利數學家，研究的領域是多複變函數論。他是位於美國加州橘郡的查普曼大學（Chapman University）校長和查普曼大學 Donald Bren 大學數學講座教授。

Porticus aequali quamvis est denique ductu	再者，一條柱廊可能從頭到尾都是平行的，
stansque in perpetuum paribus suffulta columnis,	並由相同高度的柱子支撐著，
longa tamen parte ab summa cum tota videtur,	然而，當從一端看著這柱廊的全景的時候，
paulatim trahit angusti fastigia coni,	它逐漸收縮成一個變窄錐體的頂點，
tecta solo iungens atque omnia dextera laevis	將屋頂和地板以及右邊和左邊完全連接起來，
donec in obscurum coni conduxit acumen.	直到它全部都聚集在圓錐體的消失點上。
Titus Lucretius Carus, De rerum natura, IV 426–431	**盧克來修《物性論》，第四卷，第 426 ～ 431 行**

摘要

我們在文中展示義大利文藝復興時期透視畫的誕生如何導致了一種詮釋空間的新方法，從而促成了射影幾何的創建。與其它這一主題的研究文章不同之處是我們明確的呈現畫家們的技藝如何意味著所引入新的點與線（無窮遠處的點與線）以及它們的射影坐標，將歐式空間完備成爲現今所謂的射影空間的過程。我們通過觀察文藝復興時期的原畫作，並進行對構成這些傑作的明確分析與計算來佐證這一觀點。

第一節、緒論

經由義大利文藝復興時期畫家的貢獻，誕生了射影幾何（projective geometry）的這一主題催生出了大量且非常有意思的參考文獻。其中有一些將會在本文中引用。大多現有的文獻著重在探討和理解畫家和藝術家們，如阿爾貝蒂（Leon Battista Alberti，1404 ～ 1472）和弗朗切斯卡（Piero della Francesca，1404 ～ 1472），所研發來協助他們自己和其他畫家們創作眞實呈現景象的技法之演變。當然，這些技法是構思的具體呈現，而且這些構思慢慢萌芽，後來才完整發展成幾何學的新分支——射影幾何。

然而，我們在本文中採取的觀點是在於鞏固圖像構思和數學基礎之間的聯繫。更重要的是，透視畫的整個架構在於認知到不能通過尋常的歐氏空間來

作者致謝：第一作者得到來自 INdAM 和查普曼大學的部分研究經費支持。第二作者得到來自 ISPF-CNR 和查普曼大學的部分研究經費支持。

呈現視覺空間，而是需要納入新的幾何物件，嚴格來說，這些物件不存在於歐氏空間之中。這裡，我們指的是數學家們所稱的瑕點（improper point）和瑕線（improper line），或更具啟發性的術語——無窮遠點（point at infinity）和無窮遠點線（line at infinity）。

與其他大多數的研究（例如 [4] 和 [12]）不同，我們通過引入射影坐標的概念，使用解析射影幾何的方法和術語，而不是歐氏幾何的比例理論。正如射影幾何的誕生是受到圖像需求的刺激，我們在這裡展示這種新的幾何語言如何應用於這些需求的。

採用這種方法有兩個主要的原因。一方面，我們相信射影術語提供一種更簡單的方法來處理手邊的技術性課題，亦即確認畫家所需呈現景象的技術過程。但是還有一個更深層次的原因：透視法不僅僅是一種技術；更確切的說，它是對「空間是什麼」看法的徹底改變 [1]。爲了能正確無誤的描述步驟，數學家們不得不引入新的物件：新的點、線和面。正是經由引入這些物件，數學家們才能建構邏輯上一致的圖像空間觀點，從而他們有了一個形式上無懈可擊的過程，通過這個過程，我們可以將所看到的轉化成我們所畫的東西。新的線、面和空間（就是現在的射影線、射影面和射影空間）類似於而且也包含古典的歐氏空間的線、面和空間，但是完善了它們的屬性。因此，例如，在歐氏平面上，我們說任何兩條不同的直線除非它們是平行的，則必會相交於一點；而在新的射影平面上，我們則可以說任何兩條不同的直線毫無例外的一定相交於一點。射影幾何不僅僅是一種新的實用技術，它還是一種完全不同的描繪我們周圍空間的方式。

我們應該爲讀者補充幾個說明。射影幾何是爲了要理解平行線之間看似相交現象的需求而誕生的，我們文章的大部分內容都是關於這方面的。然而，一旦數學清楚了，射影幾何就可以研究更複雜的情況了。例如，我們在文章中所說明的相同技術可用來判斷如何表現聖人的光環，或教堂牆壁上的燈影。這個話題超出了本文的目的，但是我們不希望讀者認爲射影幾何在點和線的研究上耗盡了它的角色。我們應該再補充一點，就像在數學中常發生的那樣，射影幾何理論和它的發展已經有了自己的生命，它是所有數學裡最豐富和最成功的領域之一。

爲了開始分析繪畫中透視法觀點的演變，我們將看看文藝復興早期的幾幅繪畫。特別是在第二節，我們將仔細評閱兩位托斯坎尼的畫家：喬托（Giotto），因他在帕多瓦的濕壁畫群（fresco cycle in Padova）的畫作（他在那裡描繪了耶穌和聖母瑪利亞的生平）和也許（歸屬有爭議）在阿西西的壁畫（他在那裡描繪了聖方濟〔San Francesco〕的生平）而聞名於世，和同樣重要的杜喬（Duccio di Buoninsegna），在西埃納聖母升天主座教堂（Duomo di Siena）可以看得到他的《聖母像》（*Maestà*）。

喬托在當時被認爲是最偉大的畫家，他常被譽爲是連結拜占庭風格和文藝復興風格，也是第一位採用更爲自然主義風格的畫家。通過觀察喬托畫中的人物和臉孔，可以看出他是一位細心的實物觀察

[1] **譯註**：在原文中透視法的英文是 perspective，而 perspective 亦有「看法」或「觀點」的意思，作者們刻意採用同一單詞的一語雙關。

者，但是因爲缺乏適切的技術，他對建築的處理方式顯得虛幻和古怪 ❷。在這節中，我們研究一些他和杜喬的畫作，來凸顯他們對新想法的早期理解，以及他們對那些想法的訴求認識並不夠清晰。

第三節專門介紹在畫布上忠實表達 3 維景象所需過程的數學描述。在這一節我們會介紹引領出射影空間的基本想法。阿爾貝蒂和弗朗切斯卡如何理解這些想法的是第四節的主題，我們將回到原始文檔和畫作，來說明射影幾何的理論是如何應用到文藝復興時期更進階的作品中的。準確的說，我們將說明，事實上阿爾貝蒂並沒有完全交代他的技術「合理的結構」（costruzione legittima）的合理性。因此儘管它的開發者還沒有完全意識到它理論上的合理性，我們有一個例子來說明這似乎是個行得通的過程。在最後一節我們給出最後的結論前，我們可以說是顚倒了上述的過程，我們不討論如何以幾何學來詮釋畫布上的景象，而是以一幅畫爲起點，來重建畫家心中的景象一定是怎樣的。不僅對數學家來說這是一個有意思的練習，對藝術歷史學家來說也是如此，因爲這種重建可以協助揭示一些詮釋的課題，我們將在這一節中更詳細的討論。

第二節、早期：喬托（1267 ～ 1337）和杜喬（1255/60 ～ 1318/19）

如果人們看一看任何一幅喬托的壁畫，首現映入眼簾的是畫面構圖元素對距離、位置和大小的極其扭曲感。正如我們在圖 1 中看到的一幅代表呈現聖方濟從阿雷佐（Arezzo）驅離惡魔的壁畫，建築物的角度很奇怪，人物太大了，看起來我們是從頂部和側面兩個角度看這個景象的（注意我們如何看到阿雷佐周圍牆壁的側面，以及牆壁內的建築物本身）。這到底是怎麼回事？

圖 1：喬托，〈從阿雷佐驅魔〉（*La cacciata dei diavoli da Arezzo*），在阿西西聖方濟上層聖殿（Basilica superiore di San Francesco d'Assisi）的《聖方濟的故事》（*Storie di San Francesco*）壁畫系列的 28 個場景中的第 10 個（1295 ～ 1299）。

這個問題的答案在於，喬托是那些發現自己處於一個劃時代轉變時刻的畫家之一。在這個時刻，畫家們明白我們看到物體的方式和物體實質的樣子並不一致。更具體的說，當我們想到一張桌子或當我們觸摸一張桌子時，我們論及的是一個矩形。大多

❷ **註**：讀者可以參考 [18]、[26]，那裡仔細的重構中世紀和文藝復興時期從自然透視到虛幻透視的路徑。另見參考文獻 [19]、[21]、[25]。

數桌子都是這樣的，如果我們閉上眼睛，簡單的觸摸桌子，我們就會感受到一個矩形。對邊是平行的，相鄰邊之間的角度是直角（90 度）。但是當我們看一張桌子，或者當我們試圖畫一張桌子時，就會出現完全不同的東西。現在取決於我們看的地方，角度變成銳角或鈍角，而且平行的邊可能不再平行。

因此，畫家必須認識到一個複雜的轉變：如果桌子要看起來正確，它就必須畫錯。為了欺騙觀眾的大腦識別一張擺放適當位置的桌子，必須畫成其他形狀取代矩形。如果畫家是一位數學家，他會認識到有兩種相互衝突的幾何：觸覺的幾何（雕塑的幾何）和視覺的幾何（繪畫的幾何）。但這對於活在 14 世紀的喬托和他的同時代人來說，一定是極其困難的。這個困難解釋了為什麼他的壁畫看起來如此奇怪，以及為什麼他所描繪的建築物的角度如此的不真實。這是因為喬托明白，直角並不總是以直角的形式呈現，事實上，它們需要被描繪成銳角或鈍角。但他沒有掌握到，例如，平行線並不總看起來是平行的。他壁畫中人物的不切實際大小是類似認知失調的結果。喬托意識到離我們較近的物體看起來比遠處的物體大。但他缺乏計算出應該使用的精確比例的數學知識。正如我們將在第四節中看到的，只有到了阿爾貝蒂才開發出解決此問題的精確方法。

這種牴觸在與喬托同一時代另一位偉大的人物，即杜喬，身上體現得非常明顯。在他的《聖母像》的一部分杜喬畫了〈最後的晚餐〉（*Last Supper*，圖 2）

任何這類的畫作中心對象都是桌子，當我們看到

圖 2：杜喬，〈最後的晚餐〉（*L'ultima Cena*），在西埃那大教堂歌劇院博物館（Museo dell'Opera del Duomo）《聖母像》背面的一個場景，木板上的蛋彩畫。

們稍後會詳細討論更多細節），平行線必須以收縮到一點來呈現。但是，正如我們在下面修改後的圖片中看到的，雖然杜喬明白這一點，但他似乎並不知道所有相互平行的線都必須收縮在同一個點上。相反的，正如我們所見（圖 3），內側的橫樑收縮到基督的像上，而外側的橫樑收縮到桌子上。這結果是一個明顯錯誤的天花板。

提供的這兩個例子並不是為了貶低這些偉大的畫家，而是為了說明對於生活在 13 和 14 世紀的人來說，要認識到如何從歐幾里得幾何到射影幾何是多麼複雜的事情。正如我們在接下來的文章中所看到的，這個過程將使我們理解，一個基本的數學真理隱藏在某個地方。也正是因為一些有著深厚數學背景的藝術家，方才得以雲開見月。然而，在我們談到那一點之前，我們將進行一段簡短的數學迂迴。

圖 3

第三節、透視畫法的數學

以現代的術語來說明理解視覺和繪畫的成就如何導致一種新的幾何（現在數學家們稱之爲「射影幾何」）是一個有意思的挑戰。

首先，請注意，畫家解決這個問題的主要方法不是討論眼睛和大腦如何讓我們看到周遭的世界，而只是討論光線和顏色如何到達眼睛：事實上，這是畫家可以主要干預的環境。因此，我們可以合理的將眼睛視爲 3 維空間的一個點，並將其設定爲笛卡爾坐標系統 (x,y,z) 中的原點 O [3] 。

然後，就可以將我們的研究建立在光線基本上在空間中沿直線傳播的實驗事實之上，並因此假設視覺則是依賴於所有無限條光線帶進入眼睛 O 的東西 [4] 。每條進入 O 的光線都會帶來一個顏色的點，它來自被觀察的物體（可能是天空）。因此，每條進入原點的光線都會爲視覺帶來一個顏色的點。當然，O 並沒有給視覺帶來任何貢獻。

現在讓我們想像能夠在觀察者和被觀察的對象之間插入一塊畫布，這畫布可能是透明的。那麼，連接物體和觀測者的光線很明顯將與畫布相交於一點，而且僅此一點。這個點，加上物體自身在此點所具有的顏色，就像畫布上的一個像素（pixel），而以這種方式生成的全部像素，就是物體本身的忠實呈現。請注意，如果我們要插入兩幅不同位置的畫布，眼睛將無法區分圖像的差異（我們希望讀者原諒我們使用如像素相對現代的術語）。

我們剛剛描述的這個非常簡單，卻一點也不容易的數學想法可以這樣表達：每一條空間光線 r 進入 O 僅通過所選定的畫布上的唯一一點，以 $P(r)$ 表示，它包含了光線帶給眼睛的所有資訊。當然，如果我們沿著光線 r 移動點 $P(r)$（以及其所攜帶的所有信息），（換句話說，我們改變了畫布，結果圖像將不會受到任何影響。原則上，光線的代表點可以選擇光線上的任何一點。實際上，它通常被選擇待在同一個平面上 —— 繪畫的平面，亦即畫布，或者，在不同的、更數學的內涵下，在一個球面上（我們不會在文中討論這種更複雜的表達型式）。

爲了幫助讀者理解下面的內容，我們建議進行一個簡單的實驗。當你閱讀接下來的幾行時，我們會

[3] **註**：這顯然是一種沒有依視覺的解剖學觀點建構的簡化建模。

[4] **註**：這種對視覺的解釋是文藝復興時期的革命性解釋，主要歸功於海什木（ibn Al-Haytham，也被稱爲 Alhazen），他是 11 世紀的著名權威。事實上，這種視覺理論是基於他的書《光學》（*Kitāb al-Manāẓir*）[3]。關於此主題，請參閱 [5]、[6]、[7]。

請求你坐在窗前，看著你面前的任何東西 5 。現在，當你坐下時，想像你的眼睛是一個坐標系統的原點 O（圖 4）。坐標系統的 x 軸將從你的眼睛（原點）出來，指向你的右邊，y 軸從 O 點出來，向前指向窗口，最後 z 軸是 O 點向上的垂直線。使用如此建立的笛卡爾坐標，我們將稱窗戶所在的平面爲 π（我們假設你是坐得挺直的，因此窗戶是垂直於 y 軸的）。如果我們假設從讀者到窗戶的距離是 1 個單位，我們將在數學上把這個平面的方程式表示爲 $y=1$（數學符號在後面我們寫變換〔transformation〕的方程組時將是有用的，但對理解基本想法不是必要的）。我們還將用 $z=1$ 的平面方程式來表示爲房間的天花板，也就是位於在讀者的頭上離眼睛 1 個單位距離的水平面。

現在，如果笛卡爾坐標 (x,y,z) 和 (u,v,w) 的兩個點屬於進入原點（眼睛所在的位置）的同一條光線 r，則對視覺有相同的貢獻 $P(r)$（像素）6 。因此，我們將以符號 (x,y,z) 來表示包含點 (x,y,z) 並進入原點的光線 r 對視覺的貢獻 $P(r)$（像素），而且，對所有非零實數 t，等式 $[x,y,z]=[tx,ty,tz]$ 成立。這裡的想法是，$[x,y,z]$ 和 $[tx,ty,tz]$ 將表示位於不同的畫布上的同一個像素。

由於我們以 $y=1$ 的方程式表示窗戶，由 (x,y,z) 產生的像素 $[x,y,z]$ 在窗戶上將對應於 $y=1$ 的點；這只能通過取 $t=1/y$ 得到，因此窗戶上像素的坐標將是 $(x/y,1,z/y)$。（圖 5）。

5 **註**：窗戶的比喻被阿爾貝蒂用來解釋他的「合理的結構」。 根據西蒙（Gérard Simon）的說法，如果沒有海什木在視覺上的新想法，阿爾貝蒂的「窗戶」將是不可想像的：這是西方文化和阿拉伯文化之間歷史交流的眾多例子之一 [20]。

6 **註**：在數學上，這意味著存在一個非零實數 t 使得 $(u,v,w)=t(x,y,z)=(tx,ty,tz)$。

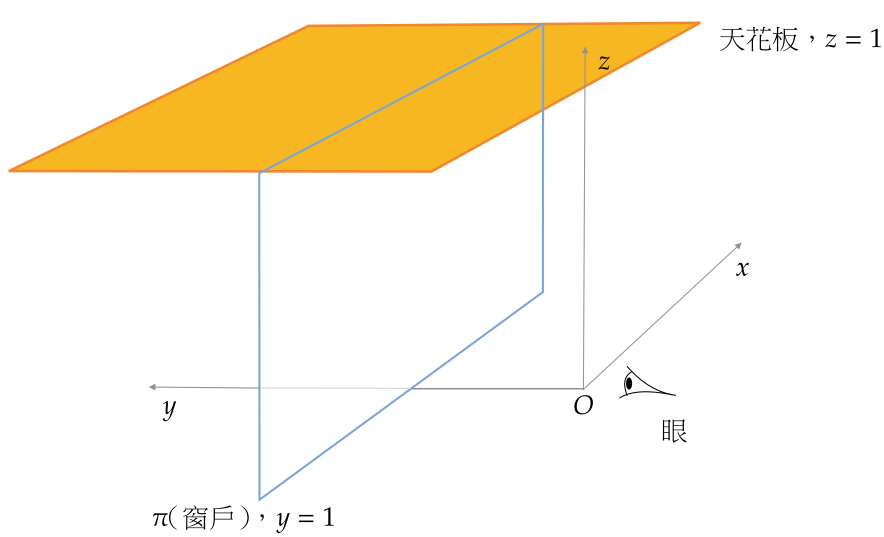

圖 4

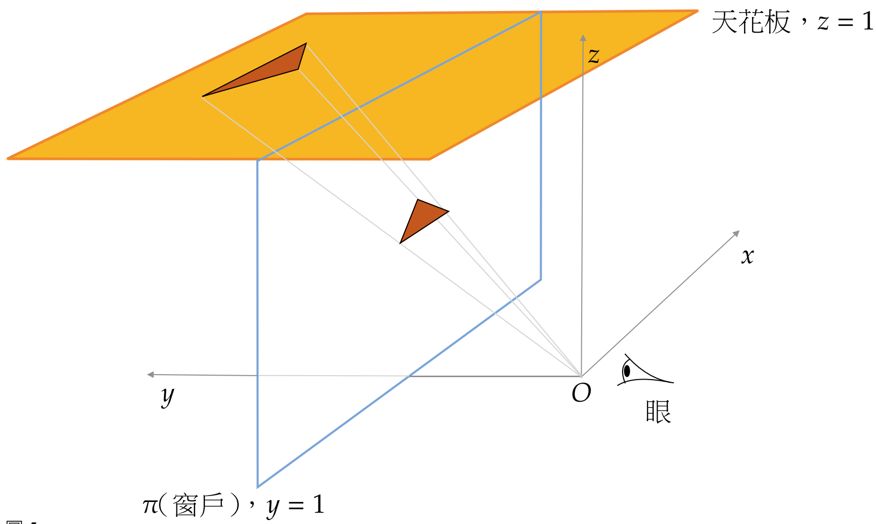

圖 5

進入眼睛 O 處的光線將與平面 π 相交（就像你在家中觀看窗外的鄉景時，進入的光線將全部與大窗戶的玻璃相交）。如果對於所有光線 r，我們將代表點 $P(r)$ 放置在平面 π 上，那麼我們就已經完成了一幅完美的理論上的繪畫，它描繪了眼睛正在觀看的風景。

這裡還有一些意外的收穫。所觀察風景中的一條直線 s，通過包含 O 和直線 s 的平面 L 上的所有光線，將會被眼睛看到。然後我們可以用 s 來表述爲在繪畫 π 上以 L 和 π 的交集。這證明了（以經驗爲依據的方式）射影幾何的最初結果之一。也就是說，一條直線被（通過投影）轉換爲另一條直線的事實（然而，請讀者想想如果這直線是其中一條光線會發生什麼）。

考慮到這一點，如果我們得悉我們房間中天花板是幾根橫樑的 3 維方程式，舉例來說，我們可以計算這些橫樑的方程式，以及它們將如何在繪畫 π 中呈現的。正如我們在上一節杜喬的例子中所看到的，呈現天花板的橫樑的問題其實是最難弄懂的問題之一。

在我們的笛卡爾環境中，讓我們考慮天花板 $z = 1$ 中的 3 根平行樑，方程式分別爲 [7]

	$x = -1$	和	$z = 1$；
	$x = 0$	和	$z = 1$；
以及	$x = 1$	和	$z = 1$。

如圖 6 所示，這 3 根橫樑都平行於 y 軸。

請注意，第一根橫樑（方程式爲 $x = -1$ 和 $z = 1$ 的那一根）的點坐標爲 $(-1, y, 1)$。這裡因爲點落在平面上，x 和 z 的分量坐標是固定的，而 y 的分量

[7] **註**：讀者會注意到，我們用兩個方程式來表示一條直線。這是因爲我們可以把一條線看作是兩個平面的交集，每個平面都有自己的方程式。在這個特殊的例子中，我們正在看的是在天花板上的線（因此它們的所有點都有 $z = 1$），但也是垂直於 x 軸的線，因此有一個固定的 x 值（在這三種情況下，分別是 $x = 1$，$x = 0$ 和 $x = -1$）。

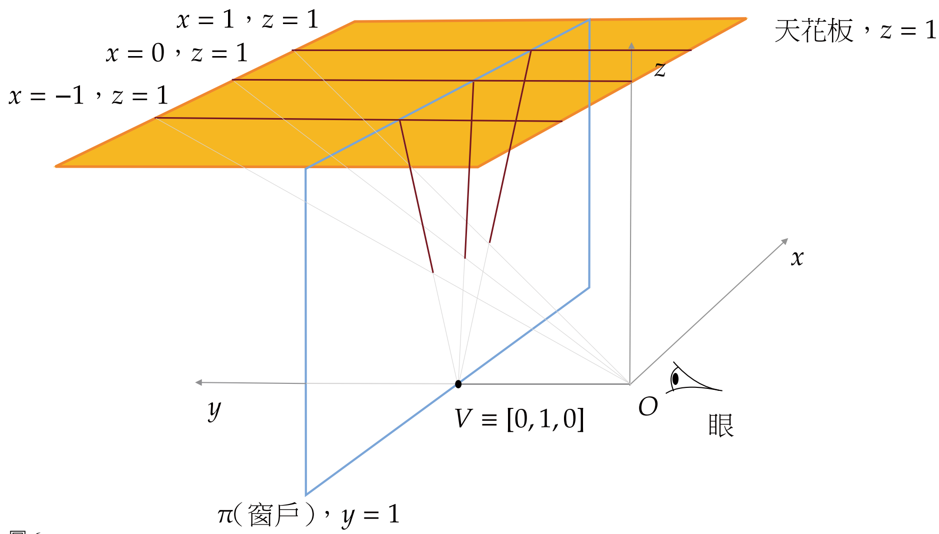

圖 6

坐標則可以以任何方式自由調整範圍。

如果我們尋求 3 根橫樑對視覺（像素）的 3 組貢獻，我們得到，y 是任意的，

$$[-1, y, 1]$$
$$[0, y, 1]$$
$$[1, y, 1] \text{。}$$

就如我們之前所提出的，爲了將它們放在方程式是 $y = 1$ 的繪畫 π 上，我們只要將（所謂的齊次〔homogeneous〕）坐標除以任意非零的 y 並使用以建立的符號得到

$$\begin{array}{l}[-1/y, 1, 1/y]\\ [0, 1, 1/y]\\ [1/y, 1, 1/y]\text{，}\end{array} \tag{1}$$

即通過令 $u = 1/y$ 得

$$\begin{array}{l}[-u, 1, u]\\ [0, 1, u]\\ [u, 1, u]\text{。}\end{array} \tag{2}$$

這些是在繪畫 π 上的三條直線的方程式，它們不僅僅不平行，而且都相交於 $V = (0, 1, 0)$ 點[8]。見圖 6。

如果讀者有領會到這個步驟，應該會注意到這個步驟在天花板和畫布之間建立了某種對應關係。天花板上的每個點在畫布上都有對應的點，但畫布上的每個點並不是都來自天花板上的一個點。事實上，很明顯畫布 $y = 1$ 上的點坐標 $z < 0$ 的點不能來自天花板：讀者會立即看到這些點來自所觀察到的景觀的地板（或地面）。地板的方程式，例如，$z = -1$。好吧，現在一切似乎都很好理解了……，但是 V 點來自哪裡？如果有人試圖重建我們剛剛描述的步驟，就會意識到實際上點 V 既不是來自天花板上的任何一點，也不是來自地板上的任何一

[8] **註**：嚴格來說，無法得到點 V，因爲 u 永遠不會爲零，但我們認爲我們在這裡描述得很清楚。

點，這會在我們的作圖帶來麻煩。怎樣才能解決這顯而易見的不規則現象呢？這個異乎尋常的困難是什麼意思呢？

如果我們仔細分析我們到目前爲止所做的，我們會注意到，繪畫 π 上的點 V 是由來自三根橫樑中離原點很遠的的任何一個點的光線所貢獻的像素所逼近的：當 y 在 1 式中變得任意大時， $1/y=u$ 逼近 0（見 2 式）。如果我們現在考慮地板上的幾條平行於 y 軸的線，並對地板 $z=-1$ 重複用於天花板的程序，我們將看到，點 V 是由來自地板上任何一條線上離原點非常遠的點的光線在繪畫 π 上所貢獻的像素。

從某種意義上說，點 V（在畫家的術語中稱爲繪畫的消失點〔the vanishing point of the painting〕 ⑨）是天花板上屬於每根樑的點的圖像，如果它們可以延續到無窮遠的話 ⑩。以同樣的方式，如果它們可以繼續到無限遠，點 V 是地板上屬於每條選定的平行線上的點的圖像。但當然，這三根樑和地板上所選的線是平行的，它們沒有共同點。這到底是怎麼回事？答案是（我們將在待會兒描述其數學形式），爲了使畫布和天花板／地板系統之間的對應關係完整，我們需要添加一個點（既不屬於天花板也不屬於地板），它是天花板的平行樑和地板的選定平行線的交點。事實上，我們很快就會發現，即使是這樣的添加也是不夠的。事實上，我們需要在系統中加入一整條線，以便重建一個完美的對應關係。

爲了理解最後一點，現在考慮天花板上不平行於 y 軸的一系列平行樑。例如，考慮三個方程式（見圖 7）

3
$$\begin{array}{lll} x=y & \text{和} & z=1 \\ x=y-1 & \text{和} & z=1 \\ x=y-2 & \text{和} & z=1， \end{array}$$

這三根橫樑對視覺的貢獻是，對於任意的 y ，像素表示爲

4
$$\begin{array}{l} [y,y,1] \\ [y-1,y,1] \\ [y-2,y,1]， \end{array}$$

放置在繪畫上 π （方程式 $y=1$ ），對於任意非零 y，成爲

5
$$\begin{array}{l} [y/y,y/y,1/y]=[1,1,1/y] \\ [(y-1)/y,y/y,1/y]=[1-1/y,1,1/y] \\ [(y-2)/y,y/y,1/y]=[1-2/y,1,1/y]， \end{array}$$

即，對於任意非零 u

6
$$\begin{array}{l} [1,1,u] \\ [1-u,1,u] \\ [1-2u,1,u]。 \end{array}$$

這些是三條在 π 上的直線的方程式，同樣，它們不僅不平行，而且都在 $W=(1,1,0)$ 點相交（見圖 7）。同樣，點 W 並沒有對來自天花板的像素做出貢獻，而且無論如何都是屬於繪畫 π 的。 W 被稱爲給定平行樑族的消失點（vanishing point for the given family of parallel beams）。點 W 是由來自 3 中列出的三根樑中的任何一個離原點很遠點的光線所貢獻的像素在繪畫 π 上接近的：當 y 在 5

⑨ **註：**盧克萊修（Lucretius）在他的《物性論》（*De rerum natura*）中描述了柱廊的景象，這些柱廊延伸到了我們的面前，用作本文開頭的序言中 [17，IV，第 426 ～ 431 行]。這首引人入勝的詩篇成爲了我們對消失點的第一次描述。

⑩ **註：** 有關詳細說明，請參見例如 [11]。

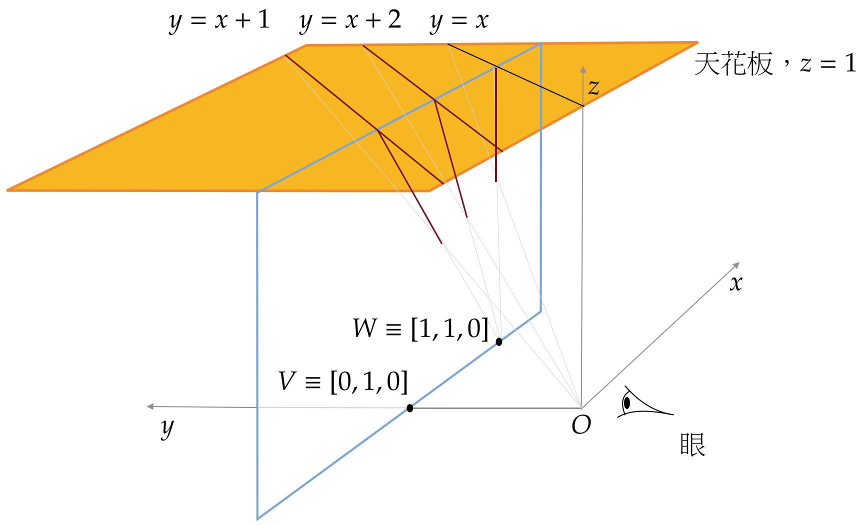

圖 7

中變得任意大時，$1/y = u$ 在 6 中趨近 0。如果我們現在考慮地板的幾條線，通過重複用於天花板的過程，並以 $z = -1$ 代替 3 式中的 $z = 1$ 可得到，我們將看到點 W 是由來自於任何這些地板上的直線中離原點很遠的點的光線在繪畫 π 上所貢獻的像素。

我們在 3 式中所考慮的平行線族事實上是平行於方程式 $z = 1$（天花板）的 xy 平面的第一和第三象限的平分線：這些線可以是天花板上正方形鑲嵌的對角線。在這種情況下，我們看到繪畫的消失點 $V = (0\ 1\ 0)$ 和消失點 $W = (1,1,0)$ 之間的距離與觀察者的眼睛與繪畫的平面 π 間的距離一致（！！）。畫家的眼睛與他的畫的距離可以被編碼到畫中。這就是爲什麼阿爾貝蒂和弗朗切斯卡將 W 稱爲**距離點**（distance point）的原因。請注意，投影的方法能立即辨識出點 W。

我們上面描述的現象並不局限於特定的平行線族。更一般的說，我們將展示天花板上的每一組平行線在畫布上都由一組收斂到一個點的線表示，而該點既不是來自於天花板的點，也不是來自於地板的點，爲了讓畫布與天花板／地板系統之間對應關係的完備，需要添加這個點。所有這些我們將添加的新點（我們稱之爲瑕點或無窮遠點）最終將在一條線上（瑕線或無窮遠線），我們將在接下來的幾頁中描述其圖形含義。

因此，讓我們考慮天花板（方程式爲 $z = 1$）上的任意平行線族。對於任何非零 m，這個族中的三根樑都有方程式

$$\begin{array}{lll} x = (y-1)/m & \text{和} & z = 1 \\ x = (y-2)/m & \text{和} & z = 1 \\ x = (y-3)/m & \text{和} & z = 1， \end{array} \tag{7}$$

這三根樑對視覺的貢獻像素，對於任意的 y ，是表示爲

$$\begin{aligned}&[(y-1)/m, y, 1]\\&[(y-2)/m, y, 1]\\&[(y-3)/m, y, 1]，\end{aligned} \tag{8}$$

對於任意非零 y ，在繪畫 π（方程式是 $y=1$）上記成

$$\begin{aligned}&[(y-1)/my, 1, 1/y]=[1/m-1/my, 1, 1/y]\\&[(y-2)/my, 1, 1/y]=[1/m-2/my, 1, 1/y]\\&[(y-3)/my, 1, 1/y]=[1/m-3/my, 1, 1/y]，\end{aligned} \tag{9}$$

即，對於任意非零 $u=1/y$

$$\begin{aligned}&[1/m-u, 1, u]\\&[1/m-u, 1, u]\\&[1/m-2u, 1, u]。\end{aligned} \tag{10}$$

這些是 π 上的三條直線的方程式，它們不僅不平行，而且都相交於點 $U=(1/m, 1, 0)$ 。同樣，雖不是來自於天花板貢獻的像素，無論如何點 U 仍屬於繪畫 π。我們稱點 U 爲**給定平行線族的消失點**（vanishing point for the given family of parallel lines）。

如果我們現在考慮在地板 $z=-1$ 上的線族，類似於 $\boxed{7}$ 中描述的線族，我們仍然在繪畫 π 上找到點 U ，但是它不是來自地板的像素的貢獻。

由於 m 是任意的，現在很清楚的是：天花板或地板的平行線族的所有消失點的集合，對視覺貢獻的所有像素在繪畫 π（方程式 $y=1$ ）上的形式是

$$[u, 1, 0]$$

也就是說，在繪畫 π（ $y=1$ ）上滿足方程式 $y=1$ 和 $z=0$ 上是一條直線。基於顯而易見和迷人的原因，這條線被稱爲**地平線**（horizon）！見圖 8。

這種結構在吉蘭達約（Domenico Ghirlandaio）的以下畫作中得到了很好的演示（圖 9），我們在其中強調了（圖 10）三組平行線，以及相應的消失點和由此產生的地平線（建議讀者在參觀藝術博物館時不可以強光突出這些線！）。

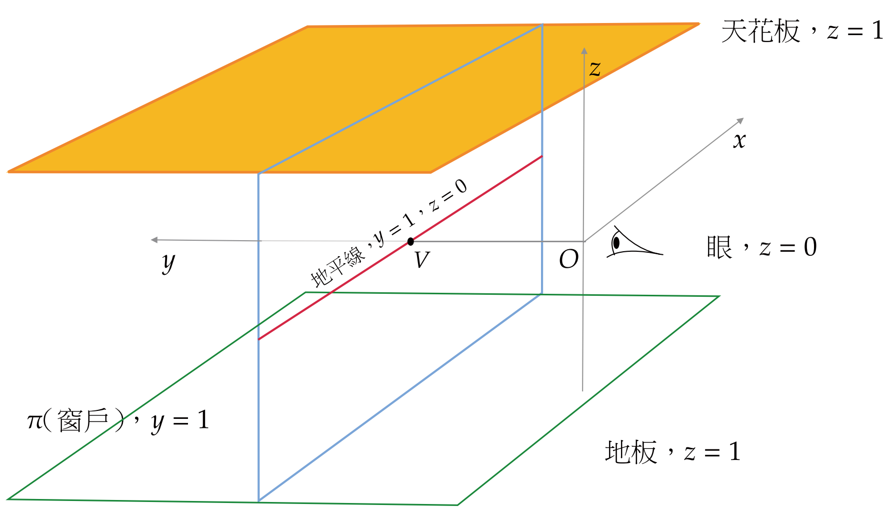

圖 8

圖 9：吉蘭達約，〈最後的晚餐〉（*Ultima cena*），（～1476），壁畫，《巴迪亞 · 迪帕西尼亞諾的最後晚餐》（*Cenacolo della Badia di Passignano*），位於翡冷翠區的佩薩河谷塔瓦內萊（Tavarnelle Val di Pesa）帕西尼諾的聖米歇爾阿爾坎蓋羅修道院（Abbazia di San Michele Arcangelo a Passignano）。

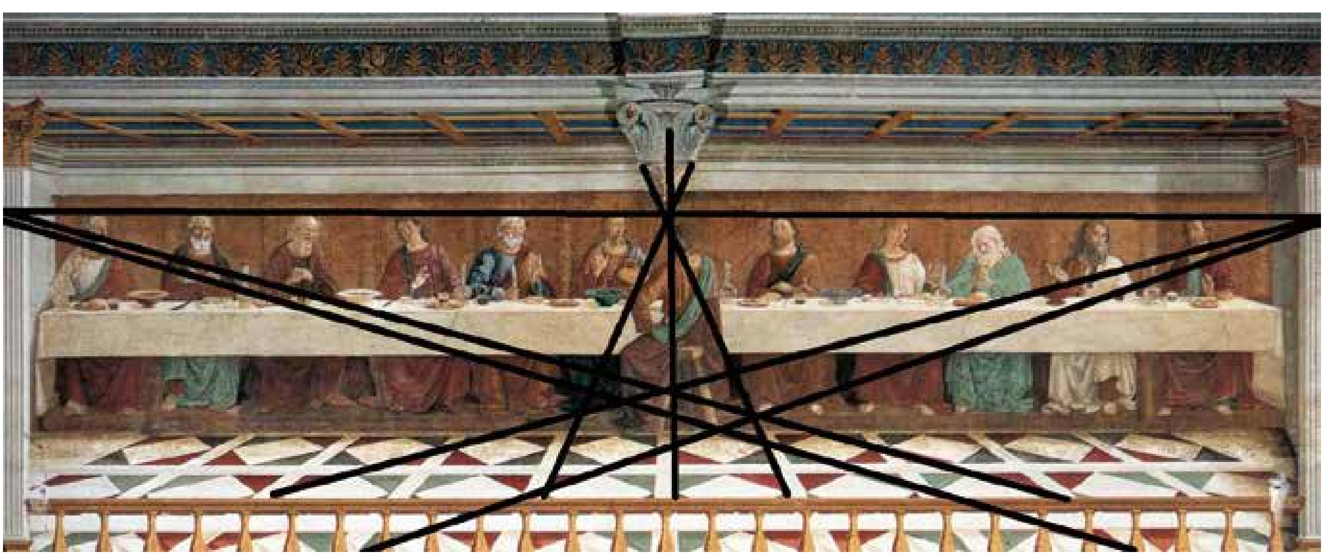

圖 10

為了使我們描述的對應關係適用於每個點，我們需要為線的每個方向添加一個瑕點。因此，我們現在在天花板／地板系統上有一整條線的瑕點，通常稱為瑕線。因此，我們所描述的對應關係下的瑕線的圖像就是畫中的地平線。

通過這種方式，我們提出了一種正式的數學方法，移動每條光線的代表點（發自天花板或地板）到繪畫 π 上。

讀者將欣賞到正在浮現的美麗的對稱性。就像兩條平行線(無論是在天花板上還是在地板上)的圖像相交於一個點,即消失點,我們把它想像成平行線共享的瑕點的圖像,所以兩個平行平面(天花板和地板)的圖像相交於一條線,即地平線,它是天花板和地板共享的瑕線的圖像。這的確是一種奇妙的對稱性!

然而,細心的讀者會注意到,雖然我們在天花板/地板系統上添加了一條線(一條瑕線),但完整的對應關係將需要在(無限)畫布上也添加一條線。事實上,如果我們現在試圖用 $y=0$ 表示(在畫布上)描述在天花板 $z=1$ 上的那條線,我們很容易看出這是不可能的。在繪畫上,這是因爲畫家無法在繪畫中表現出垂直於他頭頂的點。就數學而言,這是平面 $y=0$ 不與 $y=1$ 所給定的平面 π 相交的結果。最後,如果我們看一下天花板上一個點的坐標 $(x,y,1)$,並讓 y 變成零,就會得到不屬於畫的點 $(x,0,1)$。就像我們之前所做的那樣,我們現在需要將所有這些點(對於所有 x 的值)添加到畫布上,從而用一條瑕線完善繪畫的平面。

在這個新的對應關係中,會有以下的情況:

- 天花板和地板上的每一個點(除了那些 $y=0$ 的點)都由畫布上的一個點代表。
- 畫布上的每一個點(除了地平線上的點)都是天花板或地板上的一個點的代表。
- 地平線上的點可以被認爲是我們添加到天花板/地板系統上的瑕線的圖像。
- 天花板上 $y=0$ 的點以我們添加到畫布的瑕線表示。

第四節、阿爾貝蒂(1404 ~ 1472)和弗朗切斯卡(1416/17 ~ 1492)

第二節描述了困擾文藝復興早期畫家的一些不確定因素。儘管存在這些不確定因素,這些畫家還是感到有強烈的需要改變他們作品的性質和主題。興趣慢慢從中世紀經院教師苦行僧的身體轉移到 3 維人物、哥德式教堂中神聖的聖像、或者可以找到一個有效表現有強大的士兵和戰馬的活力暗示性的戰鬥背景上。哲學的發展迫使畫家們對他們的藝術有了新的認識,這在烏切洛(Paolo Uccello)(圖 13)、曼特尼亞(Andrea Mantegna)(圖 11)、馬薩喬(Masaccio)和貝里尼(Giovanni Bellini)(圖 12)等藝術家的作品中得到了印證。

當中,阿爾貝蒂在 1435 年寫了專著《繪畫書》(*De pictura praestantissima*)[1],提供了一個實用的透視畫指南,和偉大的畫家兼數學家弗朗切斯卡,在歐幾里德和阿爾貝蒂的知識基礎上,他在 15 世紀末寫了《論繪畫的透視法》(*De prospectiva pingendi*)[15],可能是關於繪畫中前景的終極必讀書目 [11]。

> 對於理論來說,當脫離實作時,通常是沒有什麼用處的。但是當這二者機緣偶遇結合在一起的時候,沒有什麼比這更有助於我們的生活。這是因爲在科學的

[11] **註**:菲爾德(Judith Field)的文章 [10]—— 對阿爾貝蒂的《繪畫書》[1] 和弗朗切斯卡的《論繪畫的透視法》[15] 中透視法的廣泛比較 —— 包含對透視法理論和實踐所仰賴的主要數學工具的歷史背景介紹(以及射影幾何的最初基礎)。另見 [8]。

圖 11：曼特尼亞，〈基督的哀歌〉（*Cristo morto*），（1475 ～ 1478），畫布上的蛋彩畫，收藏於米蘭的布雷拉畫廊（Pinacoteca di Brera）。

圖 12：貝里尼，〈基督之血〉（*The Blood of the Redeemer*），（1460 ～ 1465），收藏於倫敦國家美術館。

圖 13：烏切洛，〈被褻瀆聖靈的奇蹟〉（*Predella del Miracolo dell'ostia profanata*），（1467 ～ 1468），木板上的蛋彩畫，收藏於義大利烏爾比諾（Urbino）的馬爾凱國家美術館（Galleria Nazionale delle Marche）。

> 扶持下，也因爲博學的巧匠的建議和著作本身就比那些僅知道單純實踐的人的言行更有效力和信用（無論他們做得好還是不好），藝術變得更加豐富和完美。因爲我們在現代的工匠中沒有一個能夠以書面形式闡述這些事情，所有這一切都在阿爾貝蒂身上具體呈現，他學習了拉丁語，關注了建築、透視和繪畫，在他身後留下了以這種方式寫成的專書，儘管在他自己的國家裡，有人們普遍認爲非常多的人在工作上超過了他。但這就是他的著作對博學之士的筆和言論的影響；他比所有在工作上實際比他優越的人都出色 ⑫。

瓦薩里在他的《藝苑名人傳》[22]（*Vite*，基本上是畫家、雕塑家和建築師的傳記集）中就是這樣描述建築師、數學家、人文主義者、音樂家的阿爾貝蒂多面特質，出生於熱那亞，但一生在羅馬教廷、費拉拉（Ferrara）的埃斯特（Este）家族、里米尼（Rimimi）的馬拉泰斯塔（Malatesta）家族和莫德納（Modena）的岡札加（Gonzaga）家族的宮廷之間度過，他屬於翡冷翠人文主義者的圈子。値得注意的是，他對繪畫和雕塑的思考不僅僅是他對繪畫技巧和如何前瞻性的表現人體感興趣的副產品，而是更深入的智力研究的結果。

阿爾貝蒂在他的專著《繪畫書》[1] 的開篇就明確宣稱，他不是以數學家的身份寫作，而是以畫家的身份寫作。事實上，他專著的目的很顯然是爲畫家提供一個使用透視法的實用指南，而不是詳細研究和討論該主題的理論方面和特點，正如他明確指出的那樣，這肯定是相當困難，而且尚未有任何作者對其進行充分的討論 ⑬。

> 但在這整篇專著中，我必須懇求我的讀者注意，我不是以數學家的身份，而是以畫家的身份來談論這些事情的；因爲數學家只以心靈來思考事物的性質和形式，與所有種類的物質絕對不同；而我的意圖是將事物以一種方式呈現在眼前，所以我有必要以一種不太精緻的方式來考慮它們。事實上，如果畫家們在閱讀我的文章時能在這個困難的主題上獲得一些信息，我將認爲我已經做得夠多了，據我所知，到目前爲止還沒有任何作者討論過這個問題。

用現代的話來說，我們可以說阿爾貝蒂所做的實際上是合乎科學的提出了一種演算法，任何畫家都可以以透視法的角度來看，並用它來正確設定他繪畫的基本要素。更具體的說，阿爾貝蒂想提供一種實用的工具來正確設定繪畫的地面、消失點和地平線（見第三節）。一旦做到這一點，畫家就能更容易的將畫中的其他部分以合理的方式塡滿。這個觀點也解釋了爲什麼阿爾貝蒂實際上是在教授大家如何以透視法呈現方磚地板的原因：即使在終究相同的地面的情境下，隱藏的精細方形網格也會對熟練

⑫ **註：**〈阿爾貝蒂的生平〉收錄在瓦薩里（Giorgio Vasari）的《藝苑名人傳》[23]（譯註：英文翻譯網路版）中，或見 [22, vol. III, pp. 283 ～ 284]（譯註：義大利原文網路版）及 [24, “Leon Battista Alberti”, pp.178 ～ 184]（譯註：英文翻譯紙版書）。

⑬ **註：**阿爾貝蒂，《建築》[2，第 241 頁]。另見阿爾貝蒂，《論繪畫》[2，第 37 頁]。

的畫家在桌子上正確和按比例的擺放物體和人物很有幫助。

研究阿爾貝蒂提出的以透視法繪製方磚地板的演算法的三個步驟是非常有意義的。在他的專著《繪畫書》中，阿爾貝蒂考慮了一幅方形畫作 π ，其邊長爲 6 翡冷翠臂（braccia fiorentine，以現代術語約爲 348 ～ 354 厘米）。由於那些年畫家既定的人體標準身高是 3 翡冷翠臂，實踐中，阿爾貝蒂選擇了：

- 畫作的水平基底在地板上。
- 畫家的視點在與畫作 π 中心正交的直線上。
- 消失點在畫作本身的中心。

另一個資料是要畫的地板上的方磚兩個邊平行、兩個邊垂直於畫作 π 。最後，這是阿爾貝蒂的「合理的結構」⑭。

步驟 1. 設計地板的「垂直」直線在繪畫 π 上的投影。這一步驟可以按照第三節中的說明正確的完成。實際上可以按如下方式執行：將地板的直線與畫作基底的每個交點與消失點連接起來就足夠了（圖 14）。

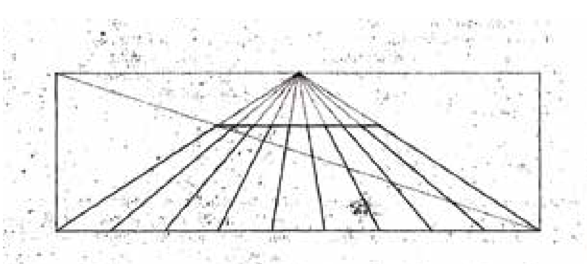
圖 14：阿爾貝蒂，《論繪畫》第一冊 [2]。

步驟 2. 設計地板上的「平行」直線在繪畫 π 上的投影高度。畫家的視點與消失點的距離必須在這一步驟中進行干預。考慮停留在畫作 π 平面上從右邊的人看到的畫家／畫作／地板之佈景。圖 15 顯示了如何建構這些高度。

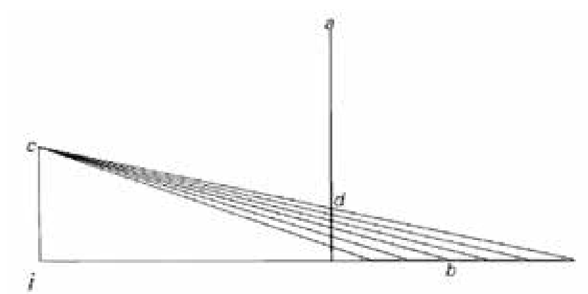

圖 15。

步驟 3. 結合步驟 1 和 2，設計整個方磚地板在畫作 π 上的投影。如圖 16 所示，只需在步驟 1 中得到的畫作上，在步驟 2 中構建的每一個高度上添加一條水平線即可。

正如讀者所見，阿爾貝蒂說明的演算法結構非常簡單，不需要任何複雜的數學理論知識：這一點在當時的確具有創新性。

阿爾貝蒂在他的專著《繪畫書》[1] 中，爲他那個時代的畫家們提供了其他幾種有意思而且有用的技術，其中一些是他「合理的結構」的應用。我們下面描述的過程是爲了幫助畫家確定在方磚地板上不同位置的人物的適當尺寸，這正是喬托爲了正確表現我們在第二節中描述的壁畫中的聖方濟人像所需要的。

⑭ **註**：〈文藝復興時期關於透視法的書籍通常是教學手冊，作者們理所當然的認爲透視法是一門「眞正的科學」（vera scientia）。阿爾貝蒂提到但沒有給出他的「合理的結構」的證明。埃爾金斯（James Elkins）在他的文章 [9] 中，引用了弗朗切斯卡的《論繪畫的透視法》的兩個命題，提出一個附帶註釋（不完整的）阿爾貝蒂的「合理的結構」的證明。

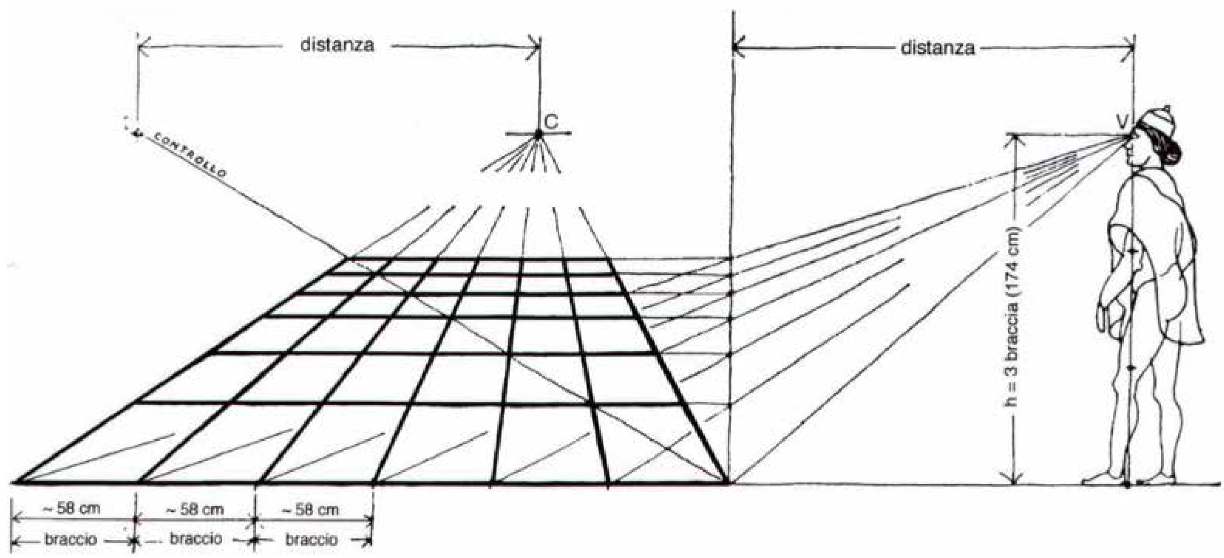

圖 16。

請注意，將畫布放在地板上的決定意味著只有沿著畫作基底放置在地板上的物體和人物以一比一的比例表示。然後，可以使用與畫作平行的方磚之一側的投影作爲單位，精確的求出在這一側放置在畫作中的任何物體的尺寸（圖 17）。

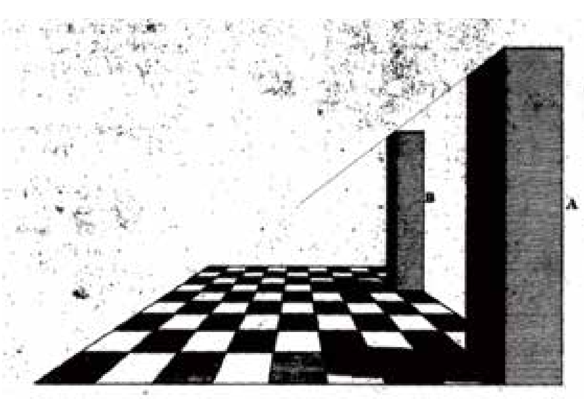

圖 17：阿爾貝蒂，《論繪畫》第二冊 [2]。

我們現在展示如何使用此表示來計算畫家的眼睛與畫作的距離（圖 18）。請注意，一條水平直線 L 離開眼睛並與畫作平面成 45 度角，平行於方磚的對角線之一。因此，直線 L 和所有平行對角線在同一點 A 處與畫作的地平線相遇（見第三節）。因此，將畫中瓷磚的對角線延伸到地平線，就可以找到 A 點。現在，由於頂點爲眼睛、消失點和點 A 的三角形是等腰的（它的角等於 45 度），那麼 A 和消失點之間的距離等於距離畫中的眼睛。因此，通過數方磚側面的邊數，可以找到所需的距離。

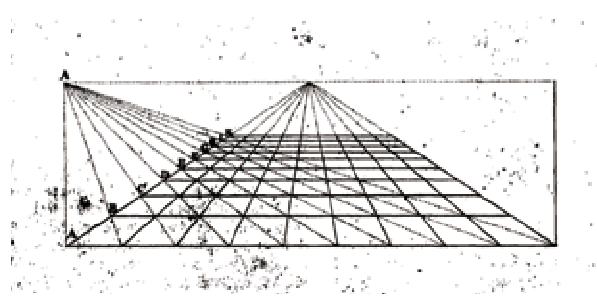

圖 18：阿爾貝蒂，《論繪畫》第一冊 [2]。

但阿爾貝蒂忠於他的承諾，提供了一本實用的手冊，而不是一本數學手冊，他只是對畫家說：把地板上的一塊方磚的對角線延伸到 A 處遇到畫作的地平線。測量 A 和消失點之間的距離。這個距離等於畫家的眼睛與畫作本身的距離。

第五節、從繪畫中重建場景

正如我們在前面的章節中所展示的，透視法的整個目的是將一個 3 維場景，以一種欺騙觀衆的方式轉化爲一個 2 維場景（繪畫），讓觀衆相信自己實際上是在看原來的場景。

但人們可以反過來問。我們能不能通過看它的繪畫來重建一個眞實的生活場景？我們應該立刻能知道，答案是否定的。事實上，當我們從 3 維空間下降到 2 維空間時，很明顯的我們必須失去一些信息：說服自己的最簡單方法是閉上一隻眼睛並開始走動。我們會很容易發現，單眼提供的深度不足，可能會使一些日常的瑣事變得困難。這基本上是因爲眼睛的作用就像一個投影機制，3 維物體的圖像在那裡被表示爲視網膜底部的平坦圖像。爲了彌補這一困難，大多數動物都發展了一個有兩隻眼睛的系統。

我們可以說，一幅經過適當設計的繪畫就像是 3 維場景資料的 2 維壓縮。而且，至少在特殊情況下，可以適當的重建原始場景。

第一種可能重建的情況是一幅畫有地板的情況。如果是這種情況，並且如果知道視點 O（眼睛）與平面繪畫 π 的距離 D 以及眼睛與地板的高度 H，然後所有站在地板上的垂直圖形和物體都可以很好地放置在 3 維空間中。以下泰勒斯風格 [15] 的繪圖（圖 19、20）清楚的表明了這一點：

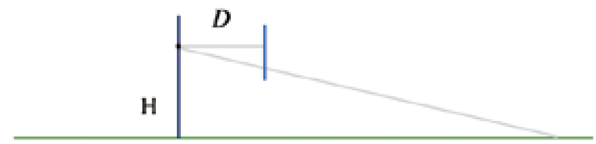

圖 19。

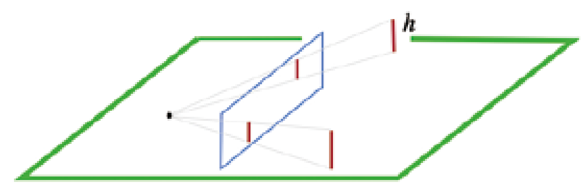

圖 20。

對於那些觸地的物體和人物，重建起來非常容易：人們只需要從眼睛穿過畫作，投射到達畫作的另一側的地面。因此每個垂直人物／物體的高度將變得清晰。

但是，如何才能恢復 H 和 D 的度量，而這些度量 —— 很明顯是重建的根本？這些關鍵度量屬於畫作繪製時的外部世界：幾個世紀後，外部世界和參與其中的人物都已消失了。唯一的希望是找到關於那個世界的信息碎片，這些信息被編碼在畫裡。

[15] 註：我們指的是利用通常被稱爲泰勒斯定理（Thales' theorem）的圖形，即初級幾何學中關於不同線段的比率的一個重要結果：如果兩條相交線被兩條平行線攔截，就會產生被截線段間的不同比率。

這就像在一個新的《愛・滿人間》褓母瑪莉包萍一樣 ⑯，我們需要進入這幅畫。

現在讓我們來看看這是如何在一個具體的案例中完成的 [16]，例如，弗朗切斯卡的〈被鞭打的基督〉（*Flagellazione di Cristo*）（圖 21），這是在他的《論繪畫的透視法》書中的數學上構建良適的透視法理論的第一個例子 ⑰ —— 我們應該說它是**最重要的**例子。

第一個注意到畫中有幾個人物，他們的膝蓋都觸及地平線（圖 22）；因爲，在文藝復興初期，正如我們之前在討論阿爾貝蒂時提到的那樣，所繪人

⑯ **譯註**：《愛 · 滿人間》（*Mary Poppins returns*）是 2018 年的迪士尼電影，這是 1964 年《歡樂滿人間》（*Mary Poppins*）的續集。讀者可在以下網址看到其中的片段，這段影片就如上文中所描述的人物進入畫中一樣。參見 https://www.youtube.com/watch?v=cjPmDywk4LE

⑰ **註**：在專門討論〈被鞭打的基督〉的大量文獻中，維特考爾（Rudolf Wittkower）和卡特（Bernard Carter）的文章 [27] 提供了一個特別關注了透視的技術方面和使用的歷史語言的分析。在這篇文章中，作者還追溯了畫家的透視法對眞實建築的影響。

圖 21：弗朗切斯卡，〈被鞭打的基督〉，（1444 ～ 1470），木板上的蛋彩畫，收藏於義大利烏爾比諾的馬爾凱國家美術館。

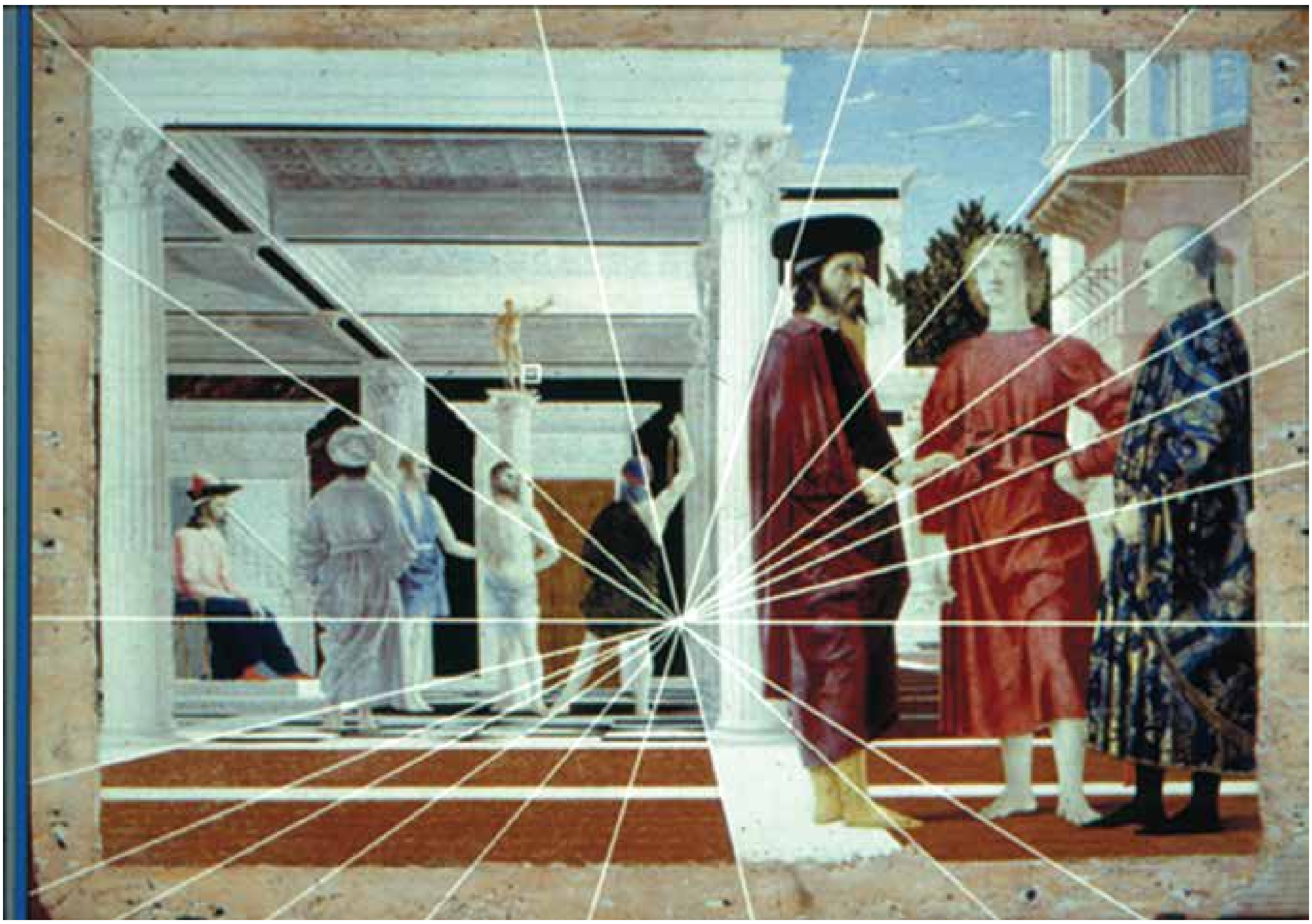

圖 22。

物的高度被嚴格固定為 3 翡冷翠臂，因此可以立即推斷出膝蓋的高度、地平線的高度、消失點 V ，最後畫家的視點 O 高度大約是 60 厘米。

距離 D 的確認更具挑戰性。這是在〈被鞭打的的基督〉的例子中是如何執行的。

如圖 23 所示，正好有一條直線 L 從視點 O（畫家的眼睛）出來，與繪畫的地平線相交於一點 PD（距離點，見第三節）在消失點 PV 的右側，並且使得由眼睛 O 、消失點 PV 和點 PD 組成在 PV 成直角的等腰三角形 O 、PV、PD。

正如我們在第三節中看到的那樣，所有平行於 L 的空間直線，當在繪畫中表示時，將具有相同的消失點 PD 。因此，如果我們在繪畫 π 中找到一條線 K，它是空間的一條直線平行於 L 的投影，那麼我們就可以解決問題：我們把 K 的延長線與地平線相交，並找到點 PD，然後我們嘗試計算出 PV 和 PD 之間的「眞實」距離，這將是畫家的眼睛 O 與畫作之間的眞實距離。

請注意，〈被鞭打的基督〉中地板鋪排的是矩形瓷磚，它們眞實的邊分別與繪畫（橫的）平行和正交。如果地板的瓷磚是方形的，那麼瓷磚的對角線之一就是我們正在搜索的一條可能的直線 K。

此外，我們還看到地板上的黑色裝飾，它被刻在基督的柱子附近的矩形瓷磚上，在畫作中呈現爲橢圓形。當然，這種裝飾實際上可以是橢圓形或圓形。如果它是一個圓，那麼我們可以推斷出瓷磚是一個正方形，並且它的對角線可能是一條直線 K 。然後我們可以將它的延伸與地平線相交並找到 PD，這又將反過來表明 PV 和 PD 之間的距離，從而表明畫家的眼睛 O 和繪畫 π 之間的距離。

但現在藝術史來幫我們了。似乎在 14 世紀末期，瓷磚地板上沒有使用橢圓裝飾，因此現在可以證明視點 O （畫家的眼睛）和繪畫 π 之間的距離約爲 145 厘米 [16]。

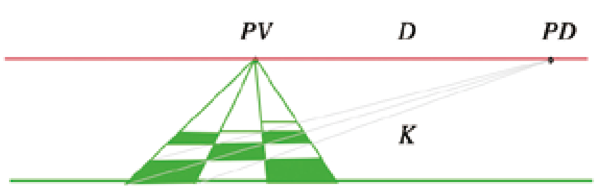

圖 23。

在本節的最後，我們評註：透視法的使用不僅是爲了呈現現實，而且還爲現實賦予了額外的意義。我們相信，上述對弗朗切斯卡的〈被鞭打的基督〉的 3 維場景進行的數學分析和重建，可以爲歷史的圖像學（historical iconology）與詮釋學（hermeneutics）問題的關聯，在過去 50 年來所提出的這問題對這幅畫的主要解讀，做出技術貢獻[18]。

對這幅畫中人物的識別，尤其是對出現在前景中的三個人物的識別，依賴於如此匱乏的文獻資料，因此隱藏在〈被鞭打的基督〉中的圖像學之謎似乎仍未解開。特別是，出現在繪畫右側[19]、身穿藍色錦緞束腰外衣的人物的身份 —— 可能是高貴的蒙特費爾特羅（Montefeltro）家族的代表人物，也可能是繪畫的贊助人 —— 仍然不確定，[13，第 62 頁和後面的內容]。

出現贊助人的畫像並不令人驚訝（類似於我們在世界各地校園中看到的建築物的命名），但它通常與繪畫本身有些無關。例如，我們可以提醒讀者帕多瓦（Padua）的斯克羅維尼禮拜堂（Scrovegni Chapel），喬托在那裡描繪了贊助人斯克羅維尼（Enrico Scrovegni）將禮拜堂捐贈給聖母行爲的繪畫（圖 24）。

然而，在弗朗切斯卡的案例中，我們相信我們可以讀出畫家通過使用透視技術，將贊助人準確的置於繪畫中場景的嘗試，事實上，右邊三位先生的膝蓋高度與耶穌和拷問他的人的膝蓋高度是一樣的，這特別表明畫面的兩邊被畫家畫成在同一地點、同一時間發生的樣子。因此，我們看到透視法不僅僅是作爲一種幾何手段，而且是作爲一種敘事工具：畫家在這裡做了一個非常具體的選擇，以一種將他們置於歷史事件背景中的方式插入當代人物。

---

[18] 註：關於辯論的綜述，例如，見 [13，第 54 頁和後面的內容]。
[19] 註：出於好奇，我們指出，[14] 中所轉載的繪畫實際上是原繪畫的鏡像，這是一個小錯誤，並沒有改變該文章的趣味性。

圖 24：喬托，〈最後的審判〉（*Last Judgment*），（～ 1305），細節：斯克羅維尼將斯克羅維尼禮拜堂的模型送給聖母瑪利亞，壁畫，存於義大利帕多瓦的斯克羅威尼禮拜堂。

第六、結論

正如我們在導言中所指出的，這篇文章致力於研究透視法的線性層面。我們利用文藝復興時期畫家們對忠實呈現桌子、天花板橫樑和方形地板裝飾的渴望，創造了數學家稱之爲射影平面的新課題。這個課題（它將描繪地板和天花板）只不過是典型的平面，人們必須在這個平面上添加新的（瑕）點，以代表眼睛在場景中看到的消失點，以及一條新的線，這是所有瑕點都屬於的線，它被表示爲地平線。但透視法和射影幾何的故事並沒有就此結束。至少對數學家來說，下一個自然步驟是研究二次方程式，如圓、橢圓和其他圓錐截面。從畫家的角度來看，這也是一個緊迫的問題，因爲它關係到重要的日常物品的表現，如盤子、馬車車輪和窗戶，以及不那麼日常的物品（但在宗教繪畫中非常重要），如聖環。射影幾何的思想可以追溯到古希臘數學家，它爲這個問題提供了一個美麗的、非常優雅的解決方案，但這將是後續文章的目標。∞

本文出處

本文譯自 Graziano Gentili, Luisa Simonutti and Daniele C. Struppa, “The Mathematics of Painting: The Birth of Projective Geometry in the Italian Renaissance”, *Notices of the International Consortium of Chinese Mathematicians* Vol. 10 (2022) 2, 11 ～ 29。同本的義大利語翻譯將在義大利翡冷翠刊登於 “Quaderni della Accademia Toscana di Scienze e Lettere La Colombaria - Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali ”
(https://www.polistampa.com/scheda_collana.php?id=418)。
本刊感謝作者們同意授權轉載翻譯，翻譯之文則由本刊自負。

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉
https://jupiter.math.nycu.edu.tw/~mshc/

延伸閱讀

- ▶李賢輝，《西方藝術風格》課程網站，
http://vr.theatre.ntu.edu.tw/fineart/th9_1000/。
其中的第 19 講到第 24 講有對義大利文藝復興時期藝術史的簡短介紹。
- ▶丘成桐，〈從古代到黎曼 —— 幾何學二講〉，本刊第 23 期，第 6 ～ 25 頁，在文中作者對文藝復興時期的透視學是如何激發射影幾何的復興有精闢的數學講評，讀者們可參照本文閱讀。