ATENEO DI BRESCIA

Questo volume viene pubblicato
con il contributo delle famiglie
di Luisa, Ambrogio, Alberto e Giovanni Viganò,
in memoria del padre ing. Carlo Viganò.

COMMENTARI DELL'ATENEO DI BRESCIA

Direttore Responsabile: GIUSEPPE VIANI

Autorizzazione del Tribunale di Brescia n. 64 in data 21 gennaio 1953

SUPPLEMENTO AI COMMENTARI DELL'ATENEO DI BRESCIA PER IL 2007

ATENEO DI BRESCIA

ATTI
DELLA
GIORNATA DI STUDIO
IN MEMORIA DI
NICCOLÒ TARTAGLIA

nel 450° anniversario della sua morte

13 dicembre 1557 – 2007

Editi a cura di
PIERLUIGI PIZZAMIGLIO

BRESCIA

SOMMARIO

FRANCESCO LECHI, *Presentazione*	pag.	11
MARIO MARCHI, *L'insegnamento di Euclide in N.Tartaglia: analisi di una scelta*	»	13
Tavole fuori testo	»	21
PIERLUIGI PIZZAMIGLIO, *Lettura del "General trattato di numeri et misure" di N. Tartaglia da parte di Arnaldo Masotti*	»	37
VERONICA GAVAGNA, *L'insegnamento dell'aritmetica nel "General trattato" di N. Tartaglia*	»	101
ANTONIO CARLO GARIBALDI, *L'insegnamento della geometria nel "General trattato" di N.Tartaglia*	»	139
ENRICO GIUSTI, *L'insegnamento dell'algebra nel "General trattato" di N.Tartaglia*	»	155

VERONICA GAVAGNA*

L'INSEGNAMENTO DELL'ARITMETICA NEL "GENERAL TRATTATO" DI NICCOLÒ TARTAGLIA

1. L'EREDITÀ DELLA *SUMMA* DI LUCA PACIOLI

La grande diffusione dell'aritmetica mercantile e della geometria pratica nell'Italia del Trecento e del Quattrocento, si deve in larga parte all'attività delle cosiddette "botteghe d'abaco", luoghi deputati alla formazione di mercanti, architetti, ingegneri, militari e artigiani, membri cioè di quel ceto sociale che fu indiscusso protagonista della cultura del periodo[1]. Gli studenti entravano nelle

---

* Università di Salerno, Dipartimento di Matematica e Informatica, indirizzo email: vgavagna@unisa.it.

[1] La letteratura sulle botteghe d'abaco in questi ultimi anni si è arricchita di numerosi titoli e non è possibile in questo contesto darne conto in maniera esauriente. Ci limiteremo a segnalare i contributi di R. FRANCI, *L'insegnamento della matematica in Italia nel Tre-Quattrocento*, «Archimede» (4) 1988, pp.182-193; *La trattatistica d'Abaco nel Quattrocento*, in E. Giusti (cur.), *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento*, Città di Castello, Petruzzi 1998, pp. 61-76; E. GAMBA, V. MONTEBELLI *La matematica abachistica tra recupero della tradizione e rinnovamento scientifico*, in *Cultura, scienze e tecniche nella Venezie del Cinquecento*, Venezia, Istituto Veneto di scienze, lettere e arti, 1987, pp. 169-202; E. ULIVI, *Le Scuole d'abaco a Firenze (seconda metà del sec. XIII – prima metà del sec. XVI)*, in E. Giusti (cur.), *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento*, cit. pp. 41-60; *Benedetto da Firenze (1429-1479) un maestro d'abaco del XV secolo*, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa-Roma 2002; *Maestri e scuole d'abaco a Firenze: la Bottega di Santa Trinita*, in *Leonardo Fibonacci. Matematica e società nel Mediterraneo nel secolo XIII*, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa-Roma 2005, vol. 2 pp. 43-91.

botteghe d'abaco all'età di 10-11 anni per imparare a padroneggiare le operazioni fondamentali, le più diffuse tecniche di calcolo commerciale, la geometria pratica e, talvolta, i rudimenti dell'algebra. Testimoni fondamentali di questo ambiente culturale sono i cosiddetti "trattati d'abaco", molti dei quali sono sopravvissuti fino ai giorni nostri. Il principale modello a cui si ispiravano era il ponderoso *Liber abaci* (1202) di Leonardo Fibonacci, da cui si differenziavano tuttavia per alcune caratteristiche essenziali: l'uso del volgare piuttosto che del latino, una maggiore semplicità nella trattazione e, infine, una minore estensione per renderne più agevole l'utilizzo quotidiano[2]. Non si tratta, come si potrebbe supporre, di manuali a uso degli studenti – il libro era un oggetto troppo prezioso per essere lasciato nelle mani di un bambino – quanto piuttosto di testi di riferimento per gli insegnanti (i "maestri d'abaco") o di consultazione per i clienti della bottega. Ciononostante, tali trattati ci forniscono importanti informazioni sui programmi e sui metodi di insegnamento adottati in queste scuole. Per esempio, il fatto di essere essenzialmente delle raccolte di problemi raggruppati per argomenti (compagnie, leghe, cambi, interessi e sconti ecc.) riflette il tipo di insegnamento impartito, che era basato su un metodo mnemonico-analogico-operativo piuttosto che logico-deduttivo.

Nel 1494 Luca Pacioli, frate minore di Sansepolcro, pubblicò la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, una vera e propria enciclopedia della matematica pratica che raccoglieva l'eredità del *Liber abaci* ricomponendo e aggiornando un

---

[2] Il rapporto fra *Liber abaci* e trattati d'abaco è in realtà un problema ancora aperto, come testimoniano i recenti studi di Jens Høyrup, fra cui segnaliamo *Leonardo Fibonacci and* abbaco *culture. A proposal to invert the roles*, «Revue d'histoire des mathématiques», 11 (2005), pp. 23-56. Su Fibonacci si vedano alcuni contributi raccolti negli atti del convegno tenutosi a Pisa-Firenze nel 2002 e pubblicati in *Leonardo Fibonacci. Matematica e società nel Mediterraneo nel secolo XIII*, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa-Roma 2005; recentemente è apparsa la traduzione inglese *Fibonacci's* Liber abaci curata da E. Siegler, Springer, 2003.

sapere – quello della matematica pratica – ormai del tutto frammentato. Il tentativo di rifondere la tradizione pratico-abachistica con le opere di autori quali Euclide, Boezio, Nemorario, Sacrobosco, Biagio da Parma, per citare solo i più noti, connota tuttavia l'opera di Pacioli come un'operazione culturale più profonda di quanto non appaia a prima vista[3]. Nella sua monumentale opera, infatti, accanto ai temi tipici della matematica mercantile[4], si trovano anche discussioni su argomenti più teorici quali, per esempio, la classificazione dei numeri e dei numeri figurati di derivazione rispettivamente euclidea e boeziana, nonché letture in chiave aritmetica dei libri II e X degli *Elementi*.

La *Summa* conobbe una notevole fortuna editoriale e diventò un termine di confronto ineludibile, che costrinse i matematici successivi a presentare i propri lavori di aritmetica pratica come superamento o miglioramento dell'opera pacioliana. È il caso, per esempio, di Girolamo Cardano, che pubblicò nel 1539 la *Practica arithmetice*[5], insistendo sulla novità dei suoi contenuti rispetto a quelli della *Summa* e su una più snella organizzazione del volume. L'architettura della *Practica*, in effetti, è assai più familiare al lettore moderno di quella della *Summa*, in cui ancora non esiste un

---

[3] Sulla figura di Pacioli si veda il volume curato da E. Giusti *Luca Pacioli e la matematica*... che raccoglie i contributi presentati all'omonimo convegno tenutosi a Sansepolcro nel 1994 e il lavoro di A. CIOCCI, *Luca Pacioli e la matematizzazione del sapere nel Rinascimento*, Bari, Cacucci 2003. La prima parte della *Summa* è stata pubblicata e commentata in S. TONIATO, *La Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita di Luca Pacioli*, Università degli Studi di Torino, Tesi di laurea, A. A. 2001-02.

[4] La *Summa* è articolata in cinque parti principali dedicate rispettivamente al sistema di numerazione decimale posizionale, alle operazioni elementari e alle applicazioni in ambito mercantile nonché all'algebra (parte I), alla computisteria (parti II e III), ai sistemi di pesi e misure in uso (parte IV) e alla geometria pratica (parte V).

[5] *Hieronimi Cardani medici mediolanensis, practica arithmetice & mensurandi singularis. In quaque preter alias continentur, versa pagina demonstrabit*, anno a virgineo partu M.D.XXXIX Io. Antonius Castellioneus Mediolani Imprimebat.

confine netto fra l'aspetto più specificatamente teorico e quello applicativo; nella prima parte della *Practica*, Cardano enuncia brevemente le regole, corredandole di qualche esempio esplicativo, mentre nella seconda raccoglie una miscellanea di problemi in cui tali regole trovano applicazione. Per evidenziare il distacco dall'opera di Pacioli, Cardano non si limita a sottolineare i frequenti errori presenti nella *Summa*, ma riserva l'ultimo capitolo della *Practica* a un vero e proprio elenco ragionato degli errori più rilevanti[6]. Ancora più significativa la scelta della lingua: al volgare rozzo, ibrido toscano-veneziano del frate di Sansepolcro, Cardano contrappone la lingua latina, pur fortemente contaminata da echi volgari[7]. Le scelte editoriali di Cardano, dunque, suggeriscono che il pubblico d'elezione della *Practica* non fosse tanto il ceto mercantile, ovvero quello strato intermedio che era stato il naturale destinario della trattatistica d'abaco, quanto piuttosto un pubblico più colto e geograficamente più ampio: l'opera di Cardano, infatti, fu uno dei veicoli di diffusione dell'aritmetica pratica italiana in tutta l'Europa[8].

---

[6] Su questo argomento si veda, per esempio, V. GAVAGNA, *Alcune osservazioni sulla* Practica Arithmetice *di Cardano e la tradizione abachistica quattrocentesca*, in M.L. Baldi, G. Canziani (eds.) *Girolamo Cardano. Le opere, le fonti, la vita*, Milano, Franco Angeli 1999, pp. 273-312; *Medieval Heritage and New Perspectives in Cardano's* Practica arithmetice, «Bollettino di storia delle scienze matematiche» XXIX, (2010) n. 1, pp. 61-80.

[7] Il fatto di scrivere in latino un tipo di manuale che appartiene tipicamente alla tradizione volgare pone Cardano di fronte a problemi di traduzione e di costituzione di uno specifico lessico abachistico, che spesso lo costringono a inventare neologismi che associano il significato del termine volgare a un "suono latino". Per esempio, l'operazione denominata "schisar i rotti" si trasforma in "schisatio" nella *Practica arithmetice*. Sul linguaggio di Cardano si veda anche G. KOUSKOFF, *Quelques aspects du vocabulaire mathématique de Jérome Cardan*, in J.C. Margolin (ed.) *Acta conventus neo-latini Turonensis*, II, Paris, Vrin 1980, pp. 661-674.

[8] Si veda a questo proposito G. CIFOLETTI, *Cardano's algebra in the manual of Peletier and Gosselin*, in E. Keßler (ed.), *Girolamo Cardano: Philosoph, Naturforscher, Arzt*, Wiesbaden, Harrassowitz 1994, pp. 243-264.

2. IL PROGETTO EDITORIALE DEL *GENERAL TRATTATO*

Negli anni in cui Cardano stava redigendo la *Practica*, anche Tartaglia aveva in animo di scrivere un trattato di aritmetica mercantile e di algebra in cui rendere noti i propri risultati ed emendare gli errori della *Summa* pacioliana[9]. Nel marzo del 1539, infatti, a fronte delle ripetute richieste di metterlo al corrente della formula risolutiva dell'equazione di III grado, Tartaglia scriveva a Cardano di non voler divulgare il risultato, avendo "designato di componere un'opera di pratica & insieme con quella, una nuova Algebra"[10] non appena conclusa la traduzione in volgare degli *Elementi* di Euclide. Fu dunque il desiderio di poter pubblicare questo importantissimo risultato a proprio nome, che suggerì a Tartaglia di comunicare prudenzialmente la formula in forma "criptata" a Cardano, che intanto aveva già dato alle stampe la sua *Practica*. In seguito, nella lettera indirizzata a Riccardo Wentworth[11] del 1541, giunte ormai a compimento la traduzione di Euclide e l'edizione di Archimede, Tartaglia ribadiva di voler porre mano a un'"opera in la pratica di Arithmetica et Geometria et insieme con quella una nuova Algebra" e, a conferma delle proprie intenzioni, chiese al Senato Veneto la concessione del privilegio di stampa, che gli venne accordato l'11 dicembre 1542 per le seguenti opere:

---

[9] Sulla figura e la biografia di Tartaglia si rimanda ai lavori di P. FREGUGLIA, *Niccolò Tartaglia e il rinnovamento delle matematiche nel '500*, in *Cultura, scienze e tecniche nella Venezia del Cinquecento*. Atti del convegno, Venezia, Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti, 1987 pp. 203-216; G.B. GABRIELI, *Nicolò Tartaglia. Invenzioni, disfide e sfortune*, «Centro Studi della Matematica medievale. Bibliografie e Saggi», Collana diretta da L. Toti Rigatelli e R. Franci, n. 2, 1986; A. MASOTTI, *Niccolò Tartaglia e suoi "Quesiti"* in A. Masotti (cur.) *Atti del Convegno in onore del IV Centenario della morte di Niccolò Tartaglia*, supplemento ai «Commentari dell'Ateneo di Brescia», 1962, pp. 17-57.

[10] *Quesiti et invenzioni diverse*, Capitolo IX, Quesito XXXIIII datato 25 marzo 1539, c. 120r.

[11] *Quesiti et invenzioni diverse*, Quesito XLII, c. 126v.

> *Euclide, et horone philosopho per lui tradotti et comentati, et Archimede, et la correttione sopra la summa di Arithemetica et geometria de fra luca pacciolo* (Senato, Terra, Registro 32, 1542 marzo-1543 agosto, f. 94-94v).

Tuttavia, mentre nel 1543 apparvero la traduzione degli *Elementi* di Euclide e l'edizione di parte del *corpus* archimedeo[12], non videro la luce né alcun trattato su Erone ("horone philosopho") né la "correttione" della *Summa* di Pacioli. È plausibile che i programmi di Tartaglia siano stati sconvolti dalla pubblicazione dell'*Ars Magna* di Cardano (1545), nella quale veniva resa pubblica la formula risolutiva dell'equazione cubica. Anche se lo stesso matematico milanese ne attribuiva la paternità a Scipione del Ferro e a Tartaglia, di fatto privò quest'ultimo della possibilità di pubblicare personalmente il primo vero risultato rinascimentale non ascrivibile alla matematica classica. Venuta meno una delle ragioni principali della pubblicazione dell'opera di matematica pratica e di algebra, Tartaglia presumibilmente accantonò questo progetto editoriale, preferendo la pubblicazione dei *Quesiti et invenzioni diverse* (1546), nei quali, fra le altre cose, spiegava come Cardano avesse ottenuto la formula per poi tradire la riservatezza alla quale si era impegnato. Secondo quanto Tartaglia racconta nella dedicatoria della Prima Parte del *General Trattato*, indirizzata a Riccardo Wentworth e datata 23 marzo 1556, il progetto di "componere a comun beneficio un general trattato di numeri & misure, si secondo la consideratione naturale, come Mathematica e non solamente nella pratica di Arithmetica, & di Geometria, & delle proportioni & proportionalita [...] ma anchor nella pratica speculativa dell'arte Magna detta in Arabo Algebra & Almucabala, over regola della cosa" venne ripreso nel 1546 e quasi subito nuovamente abbandonato a causa di alcune vicissitudini personali e del coinvolgimento nella nota *querelle* con

---

[12] L'edizione latina di Tartaglia comprendeva infatti *La quadratura della parabola, l'Equilibrio dei piani*, la *Misura del cerchio* e il primo libro dei *Galleggianti*.

Ludovico Ferrari[13]. Sebbene le disavventure occorsegli l'avessero quasi dissuaso "di tal proposito, cioe di proseguire così longa impresa", finì per prevalere "il gran desiderio, che ho sempre havuto di giovar altrui" e in capo a due anni portò a termine la sua opera, il *General Trattato di numeri e misure* del quale, sfortunatamente, riuscì a vedere pubblicate nel 1556 solo le prime due delle complessive sei parti.

3. LE PRIME DUE PARTI DEL *GENERAL TRATTATO*

Mentre nella dedicatoria Tartaglia si limita a presentare il *General Trattato* come un ampliamento della *Summa*, è nel secondo paragrafo del Libro I che l'autore esprime un giudizio, profondamente negativo, nei confronti di Luca Pacioli e della sua opera.

Tartaglia afferma infatti di aver saputo "da più persone" che "un Lonardo Pisano", dopo aver appreso l'aritmetica, la geometria e l'algebra arabe, aveva composto "una degna opera in la pratica di tai Discipline" ma quest'opera non era mai stata pubblicata "perche Frate Luca Patiolo [...] ne riccolse tutti li fiori, & li interpose

[13] Sulla notissima polemica intercorsa fra Cardano e Tartaglia circa la paternità della formula risolutiva dell'equazione cubica e sugli altrettanto noti Cartelli di matematica disfida segnaliamo solo alcuni fra i numerosi titoli; fra questi E. BORTOLOTTI *I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari e della scuola matematica bolognese alla teoria algebrica delle equazioni cubiche*, Imola 1926; *La storia della matematica nell'Università di Bologna*, Bologna, Zanichelli 1947; S. MARACCHIA, *Da Cardano a Galois. Momenti di storia dell'algebra*, Milano, Feltrinelli 1979; N. TARTAGLIA, L. FERRARI, *Cartelli di sfida matematica*, (rist. an. a cura di A. Masotti), Brescia, La Nuova Cartografica 1974, G. VACCA, *L'opera matematica di Gerolamo Cardano nel IV centenario del suo insegnamento in Milano*, in «Rendiconti del seminario matematico e fisico di Milano», IX (1937) pp.1-19; le ulteriori disavventure professionali bresciane si trovano descritte da Tartaglia nella *Travagliata inventione* del 1551 (cc. 41r-42r) e nel *General Trattato*, Parte Seconda, Libro II.

nell'opra sua, ma per quanto ho visto, & discorso quella lui ve li interpose senza ordine alcuno"[14].

Il primo obiettivo del matematico bresciano è dunque quello di riorganizzare la materia, avendo cura, contrariamente a quanto fatto da Pacioli, di presentare i casi secondo un criterio di difficoltà crescente e di non risolvere alcun tipo di problemi usando strumenti algebrici "avanti la dechiaratione delli primi principij di detta Algebra" (c. 1v). Lo schema espositivo a cui si ispira Tartaglia è quello "dato dal maistro di color che sanno", il quale non è Aristotele, come indurrebbe a pensare la citazione dantesca, ma Euclide "Megarense"[15]. Gli *Elementi*, che agli occhi del matematico bresciano costituiscono un esemplare modello di chiarezza, sono infatti strutturati in modo che non si parli "di alcuna cosa avanti alla definittione di quella, et de tutti li suoi termini, ne mai dimostra alcuna sua propositione salvo, che per le propositione passate (lequale sono note)". Mentre questa è l'architettura logica che sottende tutto il *General Trattato*, la *ratio* sulla quale si fonda la suddivisione della matematica pratica nelle sue Parti, si ispira a un criterio di astrazione progressiva, come spiega l'autore nelle pagine introduttive:

> [...] tal Trattato sia in piu parti distinto, le quai parti siano in tal modo assettate, & ordinate, che la prima cominci (naturalmente parlando) dalle questioni mercantile (come materie piu basse) le altre poi vadino di mano in mano piu speculativamente ascendendo talmente, che ogni principiante de mediocre ingegno possa per se stesso caminare dalla prima alla ultima di dette parti e ascendere con facilita, dal piede alla sommita del monte della Pratica di queste tai Scientie, over Discipline, con lo aggiutto di quel che il tutto, regge, e governa. (Parte Prima, Libro I, c. 1v)

---

[14] *General Trattato*, Parte Prima, Libro I, c. 1v.

[15] Fino alla fine del Cinquecento, quando Federico Commandino e successivamente Cristoforo Clavio chiarirono l'equivoco, era opinione comune che l'autore degli *Elementi* fosse il filosofo Euclide di Megara, vissuto prima di Aristotele. Sulla questione si veda A. DE PACE, *Le matematiche e il mondo*, Milano, Franco Angeli 1993, pp. 202-204.

Il presente contributo è dedicato allo studio delle prime due Parti del *General Trattato*, che riguardano rispettivamente l'aritmetica pratica e speculativa. La Prima Parte, articolata in 17 libri (ognuno dei quali diviso in un numero variabile di capitoli), tratta argomenti di aritmetica mercantile secondo una sequenza che non si discosta troppo da quella dei trattati d'abaco: si comincia descrivendo le quattro operazioni fondamentali con i numeri interi (Libro I) e con pesi, misure e monete (Libro II), mentre l'estensione ai numeri frazionari (Libro VII) è preceduta da una miscellanea di problemi mercantili di compravendita (Libri IV-VI); conclusa la parte dedicata alle operazioni elementari, si passa a illustrare la regola del tre e le sue applicazioni (Libri VIII e IX) e la regola del tre inversa (Libro X); seguono infine problemi di interesse e sconto, di compagnie, di baratti, di cambi e di leghe (Libri XI-XV) e le regole di falsa posizione e di doppia falsa posizione (Libri XVI e XVII).

La Seconda Parte, suddivisa in 11 libri, si apre con la classificazione dei numeri secondo Euclide e Boezio, a cui segue la trattazione delle progressioni aritmetiche e geometriche (Libro I) e una lunga esposizione degli algoritmi di estrazione della radice *n*-sima di un numero (Libro II e III) che preludono, dopo una breve digressione sulle regole dei segni (Libro IV) alle operazioni fra binomi e residui (Libro V e Libro X); concludono il volume una sezione dedicata alle proporzioni e alla corrispondenza fra proporzionalità geometrica e aritmetica (Libro VII e VIII), una trattazione dei numeri quadrati (Libro IX) e infine un'interpretazione aritmetica del libro II e del libro X degli *Elementi* (Libro VI e Libro XI).

3.1 La Prima Parte del *General Trattato*

Nella Prima Parte troviamo, come si è detto, tutta l'aritmetica necessaria a risolvere problemi di natura mercantile.

Già a partire dalle primissime pagine emergono chiaramente gli elementi di continuità e quelli di rottura con la Prima Parte Principale della *Summa*, dedicata anch'essa alle "ragioni e regole mercantesche". Sia l'esposizione di Pacioli sia quella di Tartaglia sono profondamente influenzate dalla lunga pratica d'insegnamento, che li induce a trattare con particolare attenzione le criticità – emerse in anni di esperienza didattica – del processo di apprendimento di alcuni argomenti. Anche le frequenti esortazioni alla memorizzazione di calcoli elementari, prerequisito essenziale a un'indispensabile padronanza del calcolo mentale rapido, sono certamente frutto delle tecniche d'insegnamento adottate nelle scuole d'abaco.

Sono così da "saper a mente" tutte le addizioni e sottrazioni con numeri a una cifra ("li numeri digiti"), le tabelline e le divisioni con divisore e quoziente a una cifra[16], nonché le successioni dei numeri quadrati, dei cubi, delle potenze quarte ecc.[17]. L'autore consiglia poi di mandare a mente anche alcuni fondamentali algoritmi, come la regola del tre semplice, memorizzata attraverso frasi evocative[18]. La memorizzazione è tuttavia solo un supporto all'apprendimento, per-

---

[16] Più precisamente, si tratta di divisioni, con o senza resto, del tipo $m : n = q$ con $m < 90$, n, $q < 10$. E dunque l'espressione "7 in 24 intra 3 e avanza 3" significa 24: 7 = 3 col resto di 3. Tartaglia suggerisce di imparare tutto l'elenco delle divisioni possibili nel caso di $n = 1, 2, 3$ e una selezione di casi successivi.

[17] Una buona conoscenza delle successioni $\{n^p\}$, con p numero naturale fissato, permetteva di estrarre più velocemente la radice p-sima di un numero. Spiega infatti Tartaglia: "Per intendere la pratica, overo la regola di saper cavare, overo estraere la radice quadrata (laquale e la prima di tutte le specie di radici) eglie necessario di sapere a mente le multiplicationi di tutti li numeri digiti dutti in se medesimi [...] insieme con alcune altre, le quai non per necessita si debbono imparare a mente, ma perche fanno l'huomo pronto & presto & massime nel maneggiare delle radici, & altre quantita irrationali [...]" Prima Parte, c. 24v

[18] "tal regola in piu modi, & sotto diverse parole (ma con la medesima sententia) si costuma farla mandar a memoria delli quali modi l'uno dice in questa forma. La regola del tre vol che si multiplichi la cosa, che l'huomo vol saper per quella, che non è a lei simigliante, & il produtto partirlo per l'altre a lei simigliante, & e lo avenimento sara quello che si cerca, cioe il valor di quella cosa, che si vol sapere, & tal valore sara della natura di quella, che non è simigliante" (Prima Parte, c. 127r) e più avanti "La regola del tre sono tre cose la prima, che si mette debbe esser sempre simile a quella, che sta di drio, & di drio debbe

ché non può in nessun caso sostituire l'effettiva comprensione di una regola e se questo dovesse succedere, spiega Tartaglia, ben presto "in memoria non sarà rimasto nulla". Un tipico esempio riguarda le operazioni con le frazioni proprie o numeri "rotti":

> "Tutti quelli (per quanto ho visto) che fin hora hanno dato regola al summar, sottrar & partir de rotti, la hanno data di sorte, che l'huomo presto la intende, & presto se la scorda, il che non procede da altro salvo che per ignorar la causa di tal sua regola, over di tal suo operare, volendo adunque rimediare a questo inconveniente, bisogna intendere il modo di ridurre duoi, over piu rotti de diverse denominationi, a una medesima denominatione, il qual atto è al contrario del schisare." (Prima Parte, Libro VII, c. 110v)

"Tutti li nostri antichi & moderni pratici" – osserva Tartaglia –, applicano la regola della "moltiplicazione in croce" per sommare due frazioni: in termini moderni, date due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, la loro somma è data dalla frazione $\frac{ad + bc}{bd}$ dove i due addendi del numeratore si ottengono moltiplicando in croce rispettivamente il numeratore della prima frazione con il denominatore della seconda e il denominatore della prima con il numeratore della seconda. Tale regola, tuttavia, presenta il duplice svantaggio di non essere immediatamente giustificabile da un punto di vista matematico – perché si deve proprio moltiplicare in croce? – e deve essere iterata $n - 1$ volte per la somma di n frazioni. Questi inconvenienti, conclude Tartaglia, si superano non appena si calcoli il minimo comune multiplo fra i denominatori, si riducano ("accatti") a quello stesso denominatore tutte le frazioni e infine si sommino le frazioni simili così ottenute. In questo modo, ogni passo dell'algoritmo ha una semplice giustificazione matematica che ne permette una memorizzazione duratura.

La pratica dell'insegnamento e l'attività di traduzione dei classici matematici dal latino al volgare caratterizzano fortemente lo stile

---

star la cosa, che si vol saper, & multiplicarla contra quella, che sta di mezzo, & quel produtto partirlo per la prima, & sara fatta la ragione, & nota che quello, che venira sara sempre simile alla cosa, che sta di mezzo" (Prima Parte, c. 129r).

del *General Trattato*, riflettendosi anche in un'estrema attenzione all'uso dei vocaboli e alle ambiguità semantiche che derivano dalla commistione fra linguaggio comune e linguaggio matematico. Un esempio emblematico è rappresentato dal termine "multiplicare", che nell'accezione comune sottintende un significato di accrescimento[19].

Mentre il risultato della moltiplicazione fra numeri naturali è coerente col significato comune del termine, quello della moltiplicazione fra frazioni proprie sembra contraddirlo, perché il prodotto è minore dei fattori; e infatti, osserva Tartaglia, molti aritmetici si sono

> maravigliati del atto di multiplicar di rotti, perche in quello sempre si vede riuscire al contrario di quello che dinota tal vocabulo, qual non dinota altro che crescere, overo augumentare, & nel detto multiplicare de rotti sempre seguita (come è detto) tutto al contrario, cioe che il produtto è sempre menore di qual si voglia di duoi precedenti... (Parte Prima, Libro VII, c. 119)

L'origine del paradosso viene attribuita alla pessima traduzione latina di Campano[20], in cui non si distingue l'operazione di "mul-

---

[19] Basti pensare al celebre versetto biblico "Crescete e moltiplicatevi" (*Genesi*, 1, 28).

[20] Nel XIII secolo Campano da Novara fu autore di una fortunata *recensio* degli *Elementi* di Euclide, che costituì il testo della prima edizione a stampa dell'opera euclidea, edita a Venezia nel 1482 da Erhard Ratdolt; nel 1505, sempre a Venezia, venne pubblicata una nuova traduzione latina basata su un codice greco a cura dell'umanista Bartolomeo Zamberti. Le due edizioni presentano caratteristiche e lacune assai diverse e, sotto certi aspetti, complementari; esse costituirono di fatto le edizioni euclidee di riferimento fino alla seconda metà del Cinquecento, quando venne pubblicata l'edizione curata da Federico Commandino (1572), sintesi di una raggiunta maturità filologica e matematica. Nella propria traduzione volgare degli *Elementi*, Tartaglia dichiara esplicitamente di aver utilizzato tanto la traduzione di Campano quanto quella di Zamberti, cercando di cogliere il meglio da entrambe. Sull'*Euclide* di Campano e di Tartaglia si vedano H.L.L. BUSARD, *Campanus of Novara and Euclid's* Elements, Franz Steiner Verlag 2005; P. PIZZAMIGLIO, *Introduzione* a N. Tartaglia, L'«*Euclide Megarense*», Supplemento ai «Commentari dell'Ateneo di Brescia», 2007.

tiplicare", che riguarda solo i numeri naturali ("numeri semplici") da quella di "ducere (che significa menare)" che attiene invece alle grandezze continue, come per esempio le grandezze geometriche. Tartaglia dedica un intero capitolo a spiegare la differenza fra le due operazioni e a mostrare come nella traduzione di Campano si usino i due verbi come se fossero sinonimi[21].

La moltiplicazione fra numeri naturali è mutuata dal Libro VII degli *Elementi*: "Moltiplicare non è altro, che un modo, over atto di sapere di duoi numeri proposti trovarne, over componerne un terzo, il qual contenga tante volte in se l'uno di duoi proposti numeri, quante unita sara nell'altro [...]" (Prima Parte, Libro II, c. 17v)[22]; il verbo "ducere", invece, si deve attribuire "alle linee, cioe a ducere una linea in'un altra linea, dal qual atto si causa, superficie, & anchora a ducere una linea in una superficie, del qual atto si causa Corpo [...] (c. 17v)[23]. Questa distinzione – ben presente, secondo Tartaglia, nell'originale greco e mantenuta nella traduzione latina di Zamberti – non rappresenta quindi una raffinatezza linguistica, ma l'unico modo per indicare due operazioni differenti e, se si tiene presente che i "rotti" sono "per natura, di quantita continua, laqual è divisibile in infinito" risulta evidente che, per evitare la nascita di convinzioni errate, il verbo più opportuno da usare sia in questo caso "ducere o menare" e non "multiplicare".

Un'ambiguità dello stesso genere si ritrova anche nell'operazione della divisione, alla quale Campano associa indifferentemente i

---

[21] Capitolo VIIII *Del quarto atto della pratica detto moltiplicare* Libro II, cc. 17v-18r.

[22] Tartaglia indica questa come definizione 5 del libro VII, ma tale numerazione trova riscontro solo nell'edizione tartaleana degli *Elementi*; nelle edizioni di Campano e di Zamberti, si tratta rispettivamente della definizione 9 e della definizione 16 del libro VII.

[23] Si noti che la moltiplicazione fra numeri è chiusa rispetto all'insieme dei numeri naturali mentre non è chiusa la moltiplicazione fra grandezze geometriche, dato che, per esempio, la moltiplicazione fra due segmenti è una superficie e non un segmento.

verbi “partire”, “misurare” e “numerare”, mentre “dividere over partire” ha il significato di dimezzare ed è riferibile alle sole quantità continue, dal momento che, nei numeri naturali, solo i numeri pari possono essere dimezzati; i termini “numerare” e “misurare” indicano invece quante volte una certa quantità è contenuta in un’altra e si riferiscono rispettivamente alle quantità discrete e continue. Questa ambiguità in alcuni autori viene superata dall’uso indiscriminato del verbo “partire”, al quale si adatta a malincuore lo stesso Tartaglia[24], nonostante questo produca incongruità speculari all’uso acritico del verbo “multiplicare”: la divisione di due numeri rotti produce, infatti, un quoziente maggiore del dividendo e del divisore.

Il carattere enciclopedico, l’influenza dell’ambiente abachistico, la scelta della lingua volgare, sono dunque elementi che accomunano il *General Trattato* alla *Summa* pacioliana ma che, allo stesso tempo, le differenziano marcatamente dalla *Practica arithmetice* di Cardano[25]. Come abbiamo detto, la *Practica*, che si fonda su un’architettura snella ed essenziale e si rivolge a un pubblico colto ed europeo, è un’opera che consuma una decisa rottura nei confronti della *Summa*. Inoltre, diversamente da quanto avviene nelle opere di Pacioli e Tartaglia, l’influenza diretta dell’ambiente abachistico è assai modesta, dato che, per quanto ne sappiamo, Cardano non sembra aver frequentato una scuola d’abaco né in veste di discente né in quella di docente e l’unico legame che possiamo documentare è l’amicizia con il maestro Gabriel de Aratoribus[26]. Gli echi abachistici che si avvertono nella *Practica*

---

[24] “li nostri antichi, & moderni Pratici non hanno fatto alcuna distintione di nome a questi tre Atti [...] e perche dubito, volendo io star a delucidar, & dispurar della varieta di tai avenimenti, che a molti veneria in fastidio, mene passo con silentio” (Prima Parte, Libro II, c. 27r).

[25] Sul linguaggio di Tartaglia si veda M. Piotti, *La lingua di Niccolò Tartaglia*: *la* Nova scientia *e i* Quesiti et inventioni diverse, Milano, LED 1998.

[26] Nella *Practica*, e in altri testi del *corpus* cardaniano, è citato più volte il Maestro Gabriel de Aratoribus, che sembra aver incoraggiato Cardano nella stesura della *Practica* e che avrebbe fornito al medico milanese alcuni metodi algebrici per la soluzione di problemi.

si devono probabilmente imputare alla conoscenza di certa trattatistica, che ancora nel primo Cinquecento godeva di una buona diffusione. Ci riferiamo in particolare al *Libro de abacho* di Pietro Borghi e al *Nuovo Lume* di Giovanni Sfortunati, che costituiscono per Cardano una miniera di problemi di aritmetica pratica e che possiamo annoverare anche fra le principali fonti usate da Tartaglia nella Prima Parte del *General Trattato* oltre alla *Summa* e alla *Practica*[27]. Così come Cardano sottolinea alcuni errori commessi dai suoi predecessori e addirittura riserva l'intero capitolo finale a elencare le sviste più gravi di Pacioli, anche Tartaglia cerca di enfatizzare – con dei titoletti a margine – gli errori in cui sono incorsi altri matematici, soprattutto Pacioli, Borghi, Sfortunati e, naturalmente, Cardano e Ferrari.

Al di là di errori banali imputabili a calcoli sbagliati, a Tartaglia preme mettere in rilievo le conseguenze che derivano da interpretazioni matematicamente non corrette di problemi concreti. Nella Prima Parte del *General Trattato*, i temi verso i quali l'autore registra divergenze più frequenti di interpretazione riguardano il calcolo dell'interesse composto, la ripartizione degli utili fra i soci di una compagnia e il problema dei baratti.

Nell'esempio seguente, si mette in luce la difficoltà di individuare le vere relazioni matematiche che soggiacciono a un patto di natura commerciale, quando gli accordi sono espressi in forma ambigua.

> Duoi fanno compagnia, il primo mette ducati 80 & il secondo mette ducati 20 e perche il secondo è molto piu ispertissimo, & pratico in tal mercantia, dacordo determinorno che il primo dovesse tirare del guadagno solamente li ⅔, & il secondo per la sua suficientia

[27] G. SFORTUNATI, *Nuovo Lume. Libro di arithmetica. Intitulato Nuovo Lume imperoche molte propositioni che per altri autori sono falsamente concluse in questo si emendano e & castigano con chiare & lucide & aperte dimostrationi molto bene discusse & ventillate [...] composto per lo acutissimo prescrutatore delle Archimediane & Euclidiane dottrine Giovanni Sfortunati da Siena*, Venezia 1534 (6 successive edizioni fino al 1568); P. BORGHI, *Libro de abacho*, Venezia 1484 (16 edizioni fino al 1577).

> dovesse tirar ⅓ del detto guadagno, & fatto l'acordo venne un'altro, & e disse se voleti accettarme in compagnia io mettero ducati 120 & voglio stare alla ratta del guadagno secondo il patto, & convention fatte fra voi, & costor lo accettorno, accade che in fin della compagnia si trovorno un guadagno di ducati 500. se adimanda che toccara per uno del detto guadagno (Prima Parte, Libro XII, cc. 207r-208r).

La tradizionale ripartizione dei guadagni secondo quote proporzionali ai capitali versati – che corrisponde, dal punto di vista matematico, all'applicazione della regola del tre semplice – viene qui alterata concordemente dai soci della compagnia: il secondo "piu ispertissimo" socio riesce a ottenere la metà del guadagno del primo, pur avendo versato solo un quarto del suo capitale. Nel patto si inserisce un terzo contraente, che dichiara di esigere una quota di guadagno calcolata secondo il patto stabilito fra i primi due soci. Il punto cruciale del problema è proprio stabilire la *ratio* matematica dell'accordo ed è su questa che le interpretazioni divergono[28]. Giovanni Sfortunati ritiene che il punto chiave dell'accordo risieda nel rapporto 2:1 fra i guadagni dei due soci; se indichiamo, in termini moderni, con x il guadagno del secondo socio, al primo spetta una cifra pari a $2x$ e al terzo, di conseguenza, una cifra $3x$ quarta proporzionale fra i termini, 80, $2x$ e 120:

$$80 : 2x = 120 : 3x$$

Dunque 500 ducati vengono così ripartiti: $166\frac{2}{3}$ al primo, $83\frac{1}{3}$ al secondo e 250 al terzo. Sebbene questa regola fosse stata "laudata (come dice) & approvata da tutti li Mathematici", Tartaglia la reputa "falsissima", perché anche se è corretto che il primo e il terzo socio ottengano meno di quanto riceverebbero da una ripartizione equa

[28] Analizzeremo qui la soluzione di Sfortunati, ma il problema è anche presente nella *Summa*, Distinctio Nona, Tractatus Primus, Problema 58.

e il secondo invece di più, non è detto che i difetti e l'eccesso stiano nel rapporto stabilito da Sfortunati[29].

Se non fosse intervenuto il terzo socio e se il guadagno fosse stato di 100 ducati, osserva Tartaglia, il primo socio, a fronte di un versamento di 80 ducati, ne avrebbe invece ricevuti $66\frac{2}{3}$, rinunciando così a $13\frac{1}{3}$ ducati, ovvero a $\frac{1}{6}$ del proprio legittimo guadagno[30]. È questa dunque, conclude Tartaglia, la vera *ratio* del patto: tutti i nuovi soci che subentrano nella compagnia devono rinunciare a $\frac{1}{6}$ del proprio legittimo guadagno in favore del socio che ha versato i 20 ducati iniziali. Dunque, nel caso in esame, i 500 ducati devono essere ripartiti in questo modo: $151\frac{17}{33}$ al primo socio, $121\frac{7}{33}$ al secondo e $227\frac{7}{11}$ al terzo, "cosi sara risolta iustamente tal questione" (c. 208).

Al di là del caso specifico, ciò che emerge in generale è che l'interpretazione di un problema commerciale non è sempre univoca, ma dipende da chi la propone: in genere, infatti, colui che stipula un accordo cerca sempre di trarre il massimo profitto ed è basandosi su questo criterio che si possono talvolta dirimere questioni ambigue. Un tipico esempio è dato dal calcolo dell'interesse composto ("merito a capo d'anno") per tempi non interi, tema al quale Tartaglia dedica un apposito paragrafo[31]:

> Poniamo che'l se habbia da meritare Lire 100 per 6 mesi a ragion del 20 per 100 all'anno a far capo d'anno.

---

[29] Secondo una ripartizione equa, cioè proporzionale al capitale versato, il primo socio riceverebbe $181\frac{9}{11}$ ducati, il secondo $45\frac{5}{11}$ e il terzo $272\frac{8}{11}$.

[30] Secondo una ripartizione equa, i due soci avrebbero rispettivamente diritto ai $\frac{4}{5}$ e a $\frac{1}{5}$ del guadagno avendo versato 80 e 20 ducati; nel caso di un guadagno di 100 ducati, il primo ne dovrebbe trattenere 80 e il secondo 20. Tuttavia, dato che il patto reale stabilisce quote di $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$, il guadagno di 100 ducati si ripartisce in $66\frac{2}{3}$ ducati al primo e $33\frac{1}{3}$ al secondo. Per il primo socio, la differenza fra il "guadagno equo" e quello concordato è appunto di $13\frac{1}{3}$ ducati.

[31] *Della openione havuta generalmente da nostri pratici Arithmetici circa al meritar una quantita de danari, a far capo d'anno per una parte, over piu parte de un'anno, & cosi de ogni altro termine*, Parte Prima, Libro XI, c. 191v.

Supponiamo dunque che uno prenda in prestito 100 lire concordando un interesse composto annuo del 20% e che decida poi di restituire capitale e interesse maturato dopo soli 6 mesi. Il punto critico è determinare la formula più corretta per il calcolo dell'interesse. La maggior parte degli "aritmetici" risolve banalmente la questione osservando che l'interesse di 20 lire su 100 all'anno significa $\frac{20}{12 \times 100} = \frac{5}{3 \times 100}$ lira al mese. Dato che 1 lira = 240 denari, l'interesse mensile per lira è pari a $\frac{5}{3 \times 100} \times 240 = 4$ denari per lira. Dunque, se l'interesse è di 4 denari per lira al mese, 100 lire in un mese fruttano 400 denari e in 6 mesi fruttano 2400 denari, cioè $2400 : 240 = 10$ lire.

Tale soluzione viene vivacemente contestata da Pacioli e da Sfortunati, perché se il patto è di riscuotere l'interesse a capo d'anno, cioè di calcolare l'interesse composto, non si può ragionare come se l'interesse fosse semplice[32]. Bisogna calcolare di quale cifra il creditore dovrà accontentarsi se il capitale+interesse gli viene restituito dopo 6 mesi anziché dopo un anno: si tratta dunque di un problema di sconto, che, in un certo senso inverte il problema del "meritare".

Il primo passo della strategia alternativa proposta da Pacioli è quello di calcolare – come nel caso precedente – l'interesse mensile, che è pari a 4 denari per lira. Questo significa che in 6 mesi 1 lira (ovvero 20 soldi) frutta 24 denari, cioè 2 soldi: dopo i primi 6 mesi, dunque, 20 soldi sono diventati 22. Se il creditore ritira il capitale+interesse 6 mesi prima della scadenza, significa che non potrà "beneficiare" di quell'accrescimento e quindi dovrà "accontentarsi" di 20 soldi anziché riceverne 22. A questo punto basta applicare la regola del tre semplice che traduce la seguente domanda: "se invece di 22 soldi ritiro subito la somma accontentandomi di 20 soldi, quanto dovrò accettare invece delle 120 lire pattuite?" La risposta si ottiene impostando una semplice proporzione

[32] "... alla qual conclusione il detto frate Luca & Giovanni Sfortunati caloniando rispondono che salva loro inteligentia, la cosa non va cosi, digando che tal openione saria vera nelli meriti fatti simplicemente, ma non in quelli meriti fatti a capo d'anno".

$$22 : 20 = 120 : x$$

da cui $x = \frac{1200}{11}$ lire, ovvero $x = 109$ lire 1 soldo $9\,\frac{9}{11}$ denari. Dunque, concludono Pacioli e Sfortunati, dopo 6 mesi il creditore non dovrebbe ricevere 110 lire ma 109 lire, 1 soldo e $9\,\frac{9}{11}$ denari[33].

Tartaglia si schiera a favore della prima soluzione, ottenuta calcolando l'interesse semplice, "per tanto dico che la sopradetta openione de frate Luca tanto laudata & seguitata da tutti li altri autori essere in tutto falsa & quella prima openione dal detto frate Luca, et da tutti li altri autori tanto biasimata, & caloniata esser la ottima, & buona".

Si noti che la sua posizione non si giustifica in base a criteri strettamente matematici, ma trova le sue ragioni nel principio "etico" secondo cui chi presta dei soldi lo fa per propria esclusiva convenienza e quindi non potrà mai sottoscrivere un patto in cui invece di ricevere 110 lire (calcolate con interesse semplice) ne riceve $109\,\frac{1}{11}$

> il che non è da credere che uno sottogiongesse (in un contratto) una conditione che fusse contra di lui, & con suo danno [...] tal nostra openione (da tutti li autori biasimata) esser ottima, e buona, per esser confirmata da colui che piglia tai danari a interesso, com'è detto alcun dira che io favorisco li usurari, ma per dire la verita, ma perche tal passo è piu presto giuditiale che rationale ne mathematico, & le cose giuditiale ogn'un le piglia secondo il suo parere, e pero pigliala come ti pare.

La frequenza con cui compaiono problemi e considerazioni di questo tipo testimonia il grande rilievo che Tartaglia dà all'interpretazione matematica di un problema. Peraltro, egli è ben consapevole di come in molti casi non sia possibile sovrapporre perfettamente un modello matematico a una situazione reale, ma ci si

---

[33] Anche Cardano, nella sua *Practica arithmetice*, dovendo calcolare l'interesse composto maturato da 100 lire in 2 anni e 6 mesi, segue l'impostazione pacioliana e traduce il problema di interesse in un problema di sconto.

debba accontentare di una approssimazione più o meno soddisfacente. Si tratta, comunque, di una consapevolezza spesso condivisa, che emerge in particolare quando un matematico si trova a dover "ingabbiare" in formule qualcosa di così sfuggente come la casualità; non avendo a disposizione strumenti matematici adeguati, si cerca di adattare al meglio quello di cui si dispone.

Un caso emblematico è il cosiddetto "problema delle parti", ritenuto comunemente uno dei problemi che hanno dato significativo impulso alla nascita del moderno calcolo della probabilità[34].

A dispetto della complessità della soluzione, l'enunciazione del problema è molto semplice: supponiamo che due giocatori di pari abilità disputino una serie di partite di un gioco qualsiasi, con l'accordo che vince chi riesce a raggiungere un numero prefissato di punti. La partita viene però interrotta prima della sua naturale conclusione. In base a quale criterio verrà distribuita la posta in gioco?

A partire dalla fine del XIV secolo vennero proposte diverse possibili soluzioni – fra le quali almeno un paio esatte[35] – che possiamo trovare in vari trattati d'abaco e anche nelle opere di Pacioli, Cardano e Tartaglia, ma la soluzione definitiva venne illustrata in un celebre scambio epistolare intercorso fra Pascal e Fermat nel

---

[34] Sul tema si vedano, per esempio, i contributi di M. Barra, *Il "problema della divisione della posta in gioco" e delle valutazioni di probabilità: 500 anni di storia – Soluzione bayesiana*, in *Il pensiero matematico nella ricerca storica italiana*, G. Frosali, M. Ottaviani (a cura di), Ancona, Tipolitografia Trifogli, 1993, pp. 143-174; P. Dupont, C.S. Roero, *Il trattato "De ratiociniis in ludo aleae" di Christian Huygens con le "Annotationes" di Jakob Bernoulli*, Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, serie V, vol. 8, 1984, pp. 79-122.

[35] R. Franci, *Una soluzione esatta del problema delle parti in un manoscritto della prima metà del Quattrocento*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 2 (2002) pp. 253-259; L. Toti Rigatelli, *Il problema delle parti in manoscritti del XIV e XV secolo*, in M. Folkerts, U. Lindgren (eds.) *Mathemata*, Steiner Verlag, Stuttgart 1985, pp. 229-236.

1654[36]. I procedimenti risolutivi antecedenti a Pascal si ispiravano sostanzialmente a due criteri complementari: secondo il primo, la posta veniva ripartita in base al punteggio già totalizzato dai giocatori; altrimenti, si prendevano in esame i punti che ancora mancavano alla vittoria e si cercava, in qualche modo, di quantificare le diverse possibilità di vittoria dei due contendenti. In genere gli algoritmi proposti erano del tutto insoddisfacenti e si esponevano a critiche feroci. È il caso della soluzione proposta nella *Summa* da Luca Pacioli[37], che tratta la questione come se fosse un problema di compagnie, cioè di ripartizione degli utili fra due soci sulla base del capitale versato. Secondo il frate di Sansepolcro, infatti, se P è la posta in gioco, a e b il punteggio totalizzato rispettivamente dai giocatori A e B, la posta viene suddivisa in modo che il primo abbia $P\frac{a}{a+b}$ e il secondo $P\frac{b}{a+b}$.

L'immediata critica, espressa prima da Cardano e raccolta poi da Tartaglia è che non si può ignorare l'esito delle partite ancora da disputare, per non incorrere in evidenti paradossi. Si supponga infatti, osserva Tartaglia, che i due giocatori debbano totalizzare 60 punti per vincere, guadagnando 10 punti per ogni partita vinta; il gioco si interrompe dopo una sola partita, quando un giocatore ha 10 punti e l'altro nessuno. In questa situazione i giocatori hanno sostanzialmente le stesse possibilità di vittoria, dal momento che sono entrambi molto lontani dal traguardo finale, eppure il modello proposto da Pacioli assegnerebbe al primo giocatore l'intera posta. Tartaglia commenta così l'evidente mancanza di equità della proposta pacioliana:

> Laqual sua regola a me non pare, ne bella, ne buona, perche se per sorte una delle parti havesse 10 & l'altra havesse nulla, procedendo per tal sua regola seguiria, che quella parte, che havesse il detto

---

[36] Il carteggio si trova pubblicato in P. de Fermat, *Œuvres* (a cura di P. Tannery e C. Henry), vol. 2, Paris 1894, pp. 288-314.

[37] *Summa*, Distinctio nona, Tractatus Decimus, *De extraordinariis*, cc. 197r-197v.

> 10 doveria tirar il tutto, & l'altra non doveria tirar cosa alcuna, che saria in tutto fuora di ragione, che per haver 10 dovesse tirar il tutto. (c. 265v, Prima Parte).

Anche se ritiene che "la risolutione di una tal questione è piu presto giudiciale, che per ragione, tal che in qual si voglia modo la sara risolta vi si trovara da litigar", nondimeno il matematico bresciano cerca di elaborare un sistema "men litigioso" che, pur basandosi sempre sui punteggi già totalizzati, cerca di compensare eventuali iniquità. Se i giocatori A e B hanno totalizzato rispettivamente a e b punti ($a > b$), il primo ha diritto alla quota versata all'inizio della sfida (che corrisponde a metà della posta in gioco P) a cui si aggiunge un'ulteriore somma proporzionale al vantaggio sul secondo giocatore, ovvero

$$\frac{P}{2} + \frac{a-b}{T}\frac{P}{2}$$

dove T è il punteggio da totalizzare per vincere[38].

Anche il modello proposto da Tartaglia, tuttavia, non tiene veramente conto delle possibilità di vittoria dei due giocatori e, nel caso in cui il gioco venga interrotto quando uno dei partecipanti è prossimo alla vittoria e l'altro assai lontano, finisce per premiare più del dovuto il giocatore in svantaggio.

Sebbene il modello proposto da Tartaglia sia ancora molto lontano dall'essere soddisfacente, il nome del matematico bresciano è indirettamente legato alla soluzione del problema, dato che nella lettera indirizzata a Fermat il 29 luglio 1654, Pascal calcola le probabilità di vittoria dei singoli giocatori al momento dell'interruzione della partita basandosi su considerazioni di tipo combinatorio che rimandano all'uso del triangolo aritmetico, più noto come "triangolo di Tartaglia"[39], che verrà utilizzato nella Seconda Parte

---

[38] Naturalmente, la quota di B sarà invece $\frac{P}{2} - \frac{a-b}{T}\frac{P}{2}$.

[39] Per questo motivo, talvolta il triangolo aritmetico viene indicato come "triangolo di Pascal".

del *General Trattato* come strumento per il calcolo delle radici *n*-sime di un numero.

3.2 La Seconda Parte

La Seconda Parte del *General Trattato* riguarda l'aritmetica speculativa, che "considera le cause le Qualita, le Quantita, & le Proportion de Numeri con una Speculation di mente, & il suo fine, non e altro che la verita" (c. 1v, Prima Parte). La trattazione si inserisce nel quadro teorico dei libri aritmetici VII-IX degli *Elementi*, dai quali viene mutuata la classificazione dei numeri[40]; solo marginalmente si fa cenno ai numeri figurati e si invita il lettore ad approfondire il tema nelle opere di Boezio e di Giorgio Valla, che, assieme agli *Elementi* di Euclide e alla *Summa* di Pacioli, sono i testi più frequentemente citati in questa Seconda Parte[41].

Dopo questa breve introduzione di carattere tassonomico, l'autore passa a descrivere la penultima "passione del algorithmo, cioe della pratica di numeri": la progressione aritmetica e geometrica.

---

[40] Ci riferiamo alle definizioni poste all'inizio dei libri VII e IX degli *Elementi* che riguardano i "numeri pari, parimenti pari, parimenti dispari, disparimenti dispari, primi, composti, perfetti, abondanti e diminuti, lineali, superficiali, solidi etc."

[41] "... de gli altri [numeri figurati] poi solamente di alcuni sotto brevita ne parleremo, ma che per curiosita ne vorra abondantemente intendere, ricorra a Boetio severino, & a Georgio Valla, & altri che trovaranno cio che nel greco hanno trovato, & in latino tradotto sopra tal materia." (Parte Seconda, c. 2r) Le opere a cui si riferisce Tartaglia sono il *De institutione arithmetica libri duo* di Boezio (edita nell'*Opera omnia* del 1546 e pubblicata anche nel 1553 da Jacobus Faber Stapulensis con il titolo di *Arithmetica speculativa Boetii*) e il *De expetendis rebus opus* di Valla (Venezia, 1501). Per inciso, si noti che mentre Pacioli apre la *Summa* con una lunga digressione sulla classificazione dei numeri, prima secondo la tradizione euclidea e poi secondo quella boeziana, Tartaglia opta per una collocazione più adeguata della trattazione all'inizio della Seconda Parte del *General Trattato*, dedicata a questioni più speculative.

Anche se la progressione e l'estrazione di radice – ultima "passione" – appartengono al novero delle operazioni aritmetiche[42] e rientrano, virtualmente, nel contesto più applicativo caratteristico della Prima Parte del *General Trattato*, vengono collocate dall'autore in questa Seconda Parte "per non esser materia molto necessaria a mercanti" (c. 2v) anche se si rivela di una certa utilità nella "general pratica di numeri, & anchora in quella di misure".

Questa affermazione non deve indurre a pensare che il lettore ideale della Seconda Parte del *General Trattato* debba essere diverso da quello della Prima, che ha bisogno di "usare" la matematica nella pratica quotidiana. Lo sforzo che compie Tartaglia è proprio quello di avvicinare questo tipo di lettore a una matematica apparentemente più astratta e lontana dal concreto ed è probabilmente per questo che la Seconda Parte è disseminata di rassicurazioni circa l'effettiva utilità delle teorie illustrate.

Uno degli aspetti più interessanti della parte relativa alle progressioni è la continua commistione fra l'aspetto più puramente matematico e quello didattico. Innanzi tutto, Tartaglia evidenzia come il suo approccio si differenzi da quello di Pacioli o Sacrobosco. Nella *Summa*, per esempio, si trovano ben quattro regole di addizione, applicate a progressioni continue o discontinue (cioè che iniziano o meno con l'unità) e, in subordine, a progressioni che si arrestano a un numero pari o dispari. La proliferazione di casi e sottocasi è in parte imputabile alla mancanza di un efficace simbolismo che consenta di riconoscere la sostanziale equivalenza delle diverse formulazioni della somma di n termini di una progressione; non si tratta comunque di un ostacolo insormontabile, dato che Tartaglia propone una regola generale ancorché espressa in forma retorica:

> ... sempre aggiongi il primo termine (cioe la unita) con l'ultimo, & la mita di tal summa multiplica fia il numero delli termini di quella

---

[42] Le operazioni, come è noto, sono: numerazione, addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, progressione ed estrazione di radice.

> progressione, & il produtto di tal multiplicatione sara la summa di tutti li detti termini di tal progressione[43].

È immediato esprimere la regola generale con un simbolismo moderno

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

dove a_1 e a_n sono rispettivamente il primo e l'ultimo termine e n rappresenta il numero dei termini.

Anche per le progressioni geometriche si trova una regola generale

> Volendo adonque raccogliere, over trovar la summa di tutti li termini di qual si voglia specie di progression geometrica, non solamente principiante dalla unita, ma di qual altro numero si voglia. Sempre cava il primo termine da l'ultimo, & il restante sempre partirai per un manco del numero denominante tal progressione, & lo avenimento gionto con l'ultimo termine di tal progression, tal summa sara egual alla summa di tutti li termini di tal progression, essempio nella doppia (Seconda Parte, Libro I, c. 5v).

che si può scrivere altrettanto semplicemente in termini moderni, indicando con q la ragione della progressione (o "numero denominante")

$$S = a_n + \frac{a_n - a_1}{q - 1}$$

Si noti tuttavia che la generalità delle formule non deriva da alcuna dimostrazione o giustificazione, ma viene semplicemente

---

[43] Più precisamente, Tartaglia enuncia questa regola per le progressioni aritmetiche che cominciano con l'unità, ma riconosce in seguito che le altre progressioni aritmetiche "si summano, over raccoglieno per quella medesima regola" (Seconda Parte, Libro I, c. 3v).

enunciata da Tartaglia e applicata ad alcuni casi numerici a titolo di verifica. Mentre il "Tartaglia matematico" si compiace della generalità della propria regola, "il Tartaglia insegnante" suggerisce comunque di memorizzare alcuni casi particolari, in cui le formulazioni diventano particolarmente semplici. Infatti, nel caso di progressioni geometriche di ragione rispettivamente $\frac{3}{2}$ e $\frac{4}{3}$, la regola assume rispettivamente la forma $S = 3a_n - 2a_1$ ("cava sempre il doppio del primo termine del treppio de l'ultimo" c. 6r) e $S = 4a_n - 3a_1$ ("cava il treppio del primo termine [...] del quadruplo de l'ultimo termine" c. 6v). La costante attenzione verso la padronanza e la rapidità del calcolo mentale riemerge anche quando l'autore suggerisce l'uso di somme parziali per addizionare più rapidamente e con meno probabilità di errori un numero elevato di termini di una progressione.

Le progressioni – aritmetiche o geometriche che siano – trovano applicazione soprattutto in problemi di inseguimento che, modulo qualche variante, si possono sintenticamente riassumere in questi termini: due o più personaggi si muovono secondo una tabella di marcia quotidiana i cui termini costituiscono una progressione o una particolare successione; si chiede di determinare dopo quanti giorni i viaggiatori si incontrano. Se l'incognita è un numero naturale, non ci sono particolari ostacoli nella risoluzione dei problemi, che si riducono al calcolo della somma di un certo numero di elementi di una progressione e a qualche manipolazione algebrica. I problemi sorgono però non appena si abbia a che fare con numeri non interi, come nel caso del *General Trattato* già presente nella *Summa*[44]:

> Frate luca dal borgo mette questo caso, over questione dicendo: poniamo che la sfera terrena habbia di rivolutione 20.400 miglia, & che sopra l'equinottio da un ponto, & in un ponto si mova duoi ponti mobili, il primo va verso oriente il primo giorno un miglio, il secondo 2, il terzo 3 etc. Il secondo va verso occidente, il primo

[44] Nella *Summa* si trova alla c. 44r, 2ª distinzione, 5º trattato, 30ª questione.

giorno un miglio, il secondo 8, il terzo 27. Adimando in quanti giorni si trovaranno li due movimenti in un sol ponto (Parte Seconda, c. 12r).

Pacioli risolve il problema per via algebrica in un modo che si può sintetizzare come segue. Se si assume che l'incognita x rappresenti il numero di giorni richiesti, e si indichino con $P_x(A)$ e $P_x(B)$ i percorsi coperti dai due viaggiatori A e B dopo x giorni, l'equazione che traduce la richiesta del problema diventa

$$P_x(A) + P_x(B) = 20.400$$

dove $P_x(A)$ e $P_x(B)$ corrispondono rispettivamente alla somma dei primi x termini della progressione aritmetica naturale e della successione dei numeri cubici[45], ovvero

$$P_x(A) = \frac{1+x}{2}x$$

$$P_x(B) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$$

Si noti che questo ragionamento sottintende l'assunzione che x sia un numero naturale. Una volta sostituiti i termini ed eseguiti alcuni semplici calcoli, l'equazione risolutiva assume la forma:

$$(x^2 + x + 1)^2 = 81.601$$

A questo punto Pacioli risolve l'equazione e trova l'incognita:

$$x = \sqrt{\sqrt{81.601} - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$$

senza rendersi tuttavia conto che, per le limitazioni poste sopra, la soluzione non è accettabile perché è un numero irrazionale. Nella *Practica arithmetice*, Cardano aveva affrontato lo stesso problema,

[45] Questa e altre successioni particolari sono trattate nel *General Trattato*, Parte Seconda, Libro Primo, c. 7v.

criticando la soluzione del frate di Sansepolcro dato che "... in progressionibus Geometricis in quibus termini sunt ignoti, debent queri termini integri, Frater autem Lucas talia frustra solvit per la co"[46]. La soluzione alternativa proposta da Cardano si fonda su una sorta di interpolazione: dopo 16 giorni i due viaggiatori *A* e *B* hanno percorso 18.632 miglia, mentre il 17° giorno hanno coperto 23.562 miglia; devono quindi necessariamente incontrarsi fra il 16° e il 17° giorno. Il matematico milanese conclude allora che il numero di giorni richiesto è pari a $16\frac{1768}{4930}$, dove il "rotto" è dato da

$$\frac{1768}{4930} = \frac{20.400 - P_{16}(A + B)}{P_{17}(A + B) - P_{16}(A + B)}$$

Le critiche che Tartaglia muove al procedimento di Pacioli[47] e la soluzione alternativa proposta nel *General Trattato* sono perfettamente concordi con quelle espresse da Cardano ma, presumibilmente per i vecchi rancori, il matematico milanese non viene mai citato[48].

Uno dei motivi per i quali Tartaglia riserva un così ampio spazio allo studio delle progressioni, soprattutto geometriche, è la loro propedeuticità all'apprendimento dei fondamenti dell'algebra.

[46] *Practica arithmetice*, problema 14, cc. 182v-183r. Su questo problema si veda V. GAVAGNA, *Alcune osservazioni sulla* Practica Arithmetice *di Cardano...*, pp. 302-304.

[47] "La qual conclusione è falsa, perche non debbe accadere irrationalita alcuna" c. 12v.

[48] Si noti nel Libro primo della Sesta Parte del *General Trattato* (cc. 16v-17r), dedicata all'algebra, il secondo dei *Casi over quesiti posti per meglio instruire et ammaestrare* è esattamente lo stesso problema, ma questa volta la circonferenza terrestre non misura 20.400 miglia, bensì 29.412. Questo nuovo valore rende possibile risolvere il problema per via algebrica, perché in questo caso la soluzione è il numero naturale $x = 18$. Tartaglia non manca di sottolineare a più riprese, infatti, che la correttezza del procedimento è subordinata alla possibilità di ottenere una soluzione intera. Su questo secondo problema si veda anche il contributo di E. Giusti pubblicato in questo volume.

L'unità, l'incognita e le sue potenze (o dignità) – censo, cubo, censo censo, censo cubo, cubo cubo etc. – rappresentano infatti i termini di una progressione geometrica che ha come ragione l'incognita e questo rende possibile leggere in una prospettiva algebrica le proprietà delle progressioni. A questo proposito bisogna osservare che, con ogni probabilità, la fonte più diretta di queste osservazioni è l'*Arithmetica integra* di Stifel[49], in cui l'autore afferma

> "Eximiam vero laudem merentur Geometricae progressiones, vel ex hoc, quod Cossa seu ars Gebri, nihil aliud est quam calculatio per progressiones Geometricas: quae tum tanta est, ut omnium Arithmeticorum regulas calculandi complicet, immensum quoque usum habeat in Geometricis &c." (c. 30)

Di seguito, in poche e stringate pagine, Stifel spiega come la suddetta "calculatio" si fondi sulla peculiare corrispondenza fra progressioni geometriche e progressione aritmetica naturale. Se si dispongono su due linee la successione dei numeri naturali e la successione dei termini della progressione geometrica di ragione 2

0	1	2	3	4	5	...
1	2	4	8	16	32	...

si possono porre in relazione i termini corrispondenti osservando che

> Primo, numeri superioris ordinis significant multiplicationum species: scilicet 2 significat multiplicationem quadratam fieri, dum radix bis ponitur, atque ita multiplicatur, ut 2 2 facit 4. Sic 3 significat multiplicationem cubicam, qua radix ter ponitur...

In termini moderni diremo che nella riga superiore compaiono gli esponenti e in quella inferiore le rispettive potenze di base 2. L'interesse di questa relazione risiede però nel fatto che, a determinate operazioni che si possono eseguire fra i termini

---

[49] *Arithmetica Integra. Authore Michaele Stifelio. Cum praefatione Philippo Melanctonii*, Norimbergae apud Iohan. Petreium. Anno Christi MDXLIIII.

della progressione naturale, corrispondono particolari operazioni fra i termini della progressione geometrica. Ad esempio, all'addizione e sottrazione corrispondono rispettivamente moltiplicazione e divisione:

> Sicut enim in superiore ordine 2 a 3 faciunt 5: sic in inferiore ordine 4 in 8 faciunt 32 id est surdesolidum quinario designatum, seu numerum quinto loco post unitatem exclusam ponendum [...] Item sicut in superiore ordine 1 subtracta a 6 relinquit 5: sic in inferiore ordine 2 divisore dividente 64 producit numerum ponendum sub 5, id est surdesolidum progressionis illius & sic de aliis Sumpta est igitur hinc ratio Algorithmi peculiariter ad Algebram pertinentis.

Analogamente, "multiplicatio simplex (id est, numeri in numerum) quae sit in Arithmeticis respondet multiplicationi in se quae sit in Geometricis" e "divisio in Arithmeticis progressionibus respondet extractionibus radicum in progressionibus Geometricis". Il lettore moderno non esiterà a riconoscere in queste espressioni una formulazione delle ben note "proprietà delle potenze".

Gli argomenti presentati nell'*Arithmetica integra* vengono poi ripresi, ampliati e arricchiti di numerosi esempi nel *General Trattato*, ma né Stifel né Tartaglia intuiscono che la possibilità di compiere un'addizione al posto di una moltiplicazione o una sottrazione al posto di una divisione etc. può aiutare a eseguire più velocemente e più correttamente calcoli complessi con numeri a molte cifre. Pochi anni dopo sarà John Napier a sviluppare quest'intuizione nella sua opera *Myrifici logarithmorum canonis descriptio* (1614) in cui si sancisce la nascita, appunto, dei logaritmi.

4. L'ESTRAZIONE DELLA RADICE *N*-SIMA DI UN NUMERO E IL "TRIANGOLO DI TARTAGLIA"

Il libro II della Parte seconda del *General Trattato* è dedicato a un tema che sta particolarmente a cuore a Tartaglia: l'estrazione della radice di ordine *n* di un numero naturale o razionale positivo[50]. La comprensione delle dimostrazioni e l'applicazione dell'algoritmo richiedono un buon bagaglio matematico e una certa abilità di calcolo, tant'è vero che – come non manca di sottolineare Tartaglia – i quesiti 22-25 sottoposti a Cardano e Ferrari e da loro malamente risolti, trattano proprio questioni legate all'estrazione di radici cubiche[51]. Questo libro è uno dei più estesi del *General Trattato*: Tartaglia infatti spiega in dettaglio come estrarre la radice di ordine 2, 3 ecc. e solo dopo aver trattato per esteso 10 casi, presenta una regola generale per estrarre la radice di ordine *n* da un numero *N*.

L'algoritmo di estrazione fa uso del triangolo aritmetico ed è plausibile ipotizzare che Tartaglia si sia ispirato in questo all'*Arithmetica integra* di Stifel. Alla carta 44v dell'*Arithmetica integra*

---

[50] Per una rassegna degli algoritmi di estrazione delle radici quadrate e cubiche di un numero, si veda M.T. Rivolo, A. Simi, *Il calcolo delle radici quadrate e cubiche in Italia da Fibonacci a Bombelli*, «Archive for History of Exact Sciences» 52 (1998) pp. 161-193.

[51] "22. Ve adimando anchora che con regola generale me ritrovati, over cavati la radice relata propinqua de 9999999999 cioe con la regola generale de formar un rotto del residuo che avanzara di sopra a tal estrattione, la qual regola sia la sua propria, & generale la qual servi non solamente nelle estrattioni delle dette radice propinque nelli numeri sani, ma anchora nelli rotti, & e nelli sani & rotti essempi gratia con la medesima regola cavatime anchora la Radice relata propinqua de $\frac{5}{8}$ & similmente de $242\frac{1}{2}$.

23. Anchora ve adimando che con la sua propria regola generale come detto di sopra me cavati la radice cuba quadra propinqua de 9999999999 & simelmente de $\frac{7}{9}$ & anchora de $728\frac{2}{3}$.

24. Anchora adimando che me sia cavata con regola generale (come detto di sopra) la Radice propinqua, seconda relata de 9999999999 & simelmente de $\frac{5}{7}$ & simelmente de $2186\frac{1}{3}$.

25. Anchora ve adimando che me cavati con regola generale la Radice terza relata propinqua de 9999999999 & simelmente de $\frac{8}{9}$ e simelmente de $177.148\frac{1}{2}$ " (N. Tartaglia, L. Ferrari, *Cartelli di sfida matematica*, Seconda Risposta,... p. 58).

si trova infatti lo schema seguente, in cui non si può far a meno di notare una stretta parentela con il triangolo di Tartaglia, posto alle carte 69v e 71v della Seconda Parte del *General Trattato*.

1					
2					
3	3				
4	6				
5	10	10			
6	15	20			
7	21	35	35		
8	28	56	70		
9	36	84	126	126	
10	45	120	210	252	
11	55	165	330	462	462

Triangolo di Stifel

ce.	2	ce.							
cu.	3	3	cu.						
ce.ce.	4	6	4	ce.ce.					
p^{o} rel.	5	10	10	5	p^{o} rel.				
ce.cu.	6	15	20	15	6	ce.cu.			
2^{o} rel.	7	21	35	35	21	7	2^{o} rel.		
ce.ce.cu.	8	28	56	70	56	28	8	ce.ce.cu.	
3^{o} rel.	9	36	84	126	126	84	36	9	3^{o} rel.

Triangolo di Tartaglia

Prima di passare ai criteri di definizione di questi schemi, premettiamo che tanto Stifel quanto Tartaglia usano i rispettivi triangoli numerici per costruire i coefficienti binomiali e se ne servono nell'estrazione delle radici n-sime di numeri naturali e razionali positivi, ma in modo diverso. Nel caso di Stifel, l'estrazione della radice n-sima di un numero N si fonda sulla possibilità di trovare due interi positivi a e b tali che $N = (10a + b)^n$. Mentre il numero a è la radice che meglio approssima (per difetto) N, resta da determinare il numero b, la cui migliore approssimazione espressa in termini moderni è data, secondo Stifel, da

$$b_1 = \frac{N - 10^n a^n}{\binom{n}{1} 10^{n-1} a^{n-1}}$$

Dunque

$$\sqrt[n]{N} = 10a + b_1 = 10a + \frac{N - 10^n a^n}{\binom{n}{1} 10^{n-1} a^{n-1}}$$

L'uso dei coefficienti binomiali diventa a questo punto importante per la verifica del risultato, dal momento che bisogna sviluppare il binomio $(10a + b_1)^n$ per capire di quale grado sia l'approssimazione di $\sqrt[n]{N}$.

La trattazione di Stifel è estremamente stringata e accompagnata da un numero davvero esiguo di esempi (cc. 38v-46v di un volume in 4°), mentre Tartaglia dedica all'estrazione delle radici ben 50 carte (cc. 23v-73v). Come abbiamo detto, in questa dettagliatissima esposizione l'autore esamina l'estrazione della radice n-sima per $n = 2, ..., 10$, analizzando per ogni ordine il caso dell'estrazione di radice dei numeri naturali (distinguendo l'approssimazione per difetto dall'approssimazione per eccesso) e dei razionali positivi e dando, nel caso della radice quadrata e cubica, anche un'intepretazione geometrica dell'algoritmo usato.

Non entreremo qui nei dettagli, limitandoci a osservare che, in generale, per calcolare la radice n-sima di un numero N, si devono trovare due numeri a e b tali che $N = (a + b)^n$; ancora una volta, a è la radice intera che meglio approssima $\sqrt[n]{N}$ e il problema si riduce a dover dare una stima di b. L'approssimazione proposta da Tartaglia è, in termini moderni,

$$\sqrt[n]{N} = a + \frac{N - a^n}{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k}$$

La chiave di questo algoritmo di estrazione risiede nello sviluppo della potenza n-sima della somma di due segmenti[52], e il cosiddetto “triangolo di Tartaglia” – che nel *General Trattato* non ha un nome specifico – risponde all’esigenza di poter disporre, senza dover fare ogni volta tutti i calcoli, dei coefficienti binomiali che compaiono nella formula precedente.

Dopo aver illustrato con dovizia di particolari l’algoritmo di estrazione delle radici fino al decimo ordine, Tartaglia osserva che si può rintracciare un certo “ordine” nella costruzione dei termini che stanno al denominatore nella formula di approssimazione vista sopra[53].

> Da poi che habbiamo replicati, & ordinatamente notati in figura tutti quelli numeri che occorreno di mano in mano alla formatione di tutti quelli produtti, che intervengono in ciascuna di quelle 10 propositioni da noi adutte sopra di quelle 10 regole date nel precedente capo, per cavar quelle 10 specie di radice, accioche tal nostra repplicatione, & notatione non sia frusta, & vana ti voglio mostrare, donde tali numeri particolarmente si formino, con la qual notitia da te medesimo potrai piu oltra in infinito procedere nelle altre specie di radici. (Seconda Parte, Libro II, c. 71v).

Se si confronta il triangolo di Tartaglia con quello di Stifel si notano alcune differenze: nello schema del matematico bresciano,

---

[52] “Dico adunque che tutte le dette 10 propositioni (se ben ti aricordi) hanno per suo fondamento una linea, over una quantita divisa in due parti, come si voglia e la prima delle dette 10 propositioni narrata sopra la estrattione della radice quadra è la quarta del secondo di Euclide...”

[53] “Ma accioche in tal materia se ne habbia perfetta dottrina in questo ultimo capo intendo di mostrare un certo ordine, che naturalmente si vede osservare fra loro quelle 10 propositioni, notate nel precedente capo... con il qual ordine ogni commune ingegno da se medesimo (parendogli) sapra in infinito piu oltra procedere, & non solamente di saper cavare ogn’altra specie di radice, ma di sapere anchora formare il denominatore da ponere sotto a quella linea, dove sara stato posto, over dove che fido vera ponere quel avanzo, che restasse di sopra alla operatione, per dare tal radici irrationali propinque alla verita, come che in ciascuna di quelle 10 specie date nel precedente capo è stato fatto....” (Seconda Parte, Libro II, c. 69r).

la presenza dei nomi delle potenze disposte lungo i lati obliqui, ne sottolineano l'origine geometrica, che poggia sullo sviluppo delle potenze della somma di due segmenti[54]. L'autore inoltre si preoccupa di mettere in luce alcune proprietà che indicano come proseguire nella costruzione del triangolo:

1. le dignità (cioè le potenze) poste ai lati crescono secondo una progressione geometrica (censo, cubo, censo censo, primo relato, censo cubo etc.);
2. nella prima cornice disposta lungo i lati obliqui si trova la progressione aritmetica naturale (1, 2, 3, 4 ...);

Queste due caratteristiche consentono di scrivere i primi due e gli ultimi due termini della riga n-sima, supponendo noti gli elementi della riga $(n-1)$-sima. Si noti che, a differenza di Stifel, Tartaglia sceglie di disporre gli n termini della n-sima riga spostati di una posizione rispetto agli $n-1$ elementi della riga sovrastante, in modo da rendere immediatamente leggibile anche la successiva, importantissima, proprietà:

3. a esclusione dei primi due e degli ultimi due, i termini della riga n-sima, che indicheremo con a_k^n (k indica la posizione sulla riga) si ottengono sommando i due termini a_{k-1}^{n-1} e a_k^{n-1} della riga n–1-sima.

Se leggiamo il triangolo con occhi moderni, cioè interpretiamo gli elementi che lo compongono come coefficienti binomiali, la proprietà precedente si può facilmente riscrivere come la ben nota

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

---

[54] Nella figura originale, compare anche un segmento diviso dal vertice superiore del triangolo.

5. CONCLUSIONI

Ci sono affinità rilevanti fra le figure di Luca Pacioli e Niccolò Tartaglia: entrambi maestri d'abaco e interlocutori privilegiati del ceto medio, ambiscono a far parte di un mondo culturalmente più elevato, esibendo come lasciapassare le loro edizioni e traduzioni di alcuni classici matematici[55].

Questo duplice aspetto della loro personalità scientifica si ricompone rispettivamente nella *Summa* e nel *General Trattato*, vere e proprie enciclopedie della matematica pratica in cui l'evidente influenza dell'esperienza didattica si coniuga con il desiderio – reso possibile dall'uso del volgare – di avvicinare il tradizionale fruitore della matematica abachistica a una matematica più speculativa.

In questo progetto culturale si inquadra la scelta di suddividere l'aritmetica in due Parti, la prima delle quali contiene l'aritmetica "necessaria a mercanti" ed è un vero e proprio trattato d'abaco. È nella Seconda Parte, invece, che Tartaglia tenta di ampliare gli orizzonti matematici dei suoi lettori facendo convivere argomenti teorici, presentati da un punto di vista numerico, con temi propri della miglior trattatistica d'abaco, come le progressioni e l'estrazione di radici, riletti però alla luce di alcuni sviluppi della matematica contemporanea. Abbiamo visto, infatti, come Tartaglia si ispiri ad alcune idee dell'*Arithmetica integra* di Stifel per leggere in chiave algebrica la peculiare corrispondenza fra il comporta-

[55] Come è noto, Tartaglia diede alle stampe, nel 1543, la prima edizione degli *Elementi* euclidei in volgare e alcune opere di Archimede (cfr. nota 12); Pacioli invece curò nel 1509 un'edizione latina degli *Elementi* ma fu molto probabilmente autore anche di una traduzione volgare che non venne mai stampata. Secondo la convincente ipotesi sostenuta da Menso Folkerts, tuttavia, molti *excerpta* di questa traduzione confluirono pressoché letteralmente nella *Summa*. A questo proposito si veda il saggio *Luca Pacioli and Euclid*, in E. Giusti (cur.), *Luca Pacioli e la matematica...*, pp. 219-232.

mento della progressione aritmetica naturale e quello delle serie geometriche (§ 3.2) e per utilizzare il triangolo aritmetico nell'approssimazione delle radici *n*-sime di un numero (§ 4).

Il matematico bresciano non si limita quindi a raccogliere l'eredità pacioliana, ma la reinterpreta con una nuova sensibilità, che è più attenta alle potenzialità dell'algebra, ma al contempo più critica verso l'uso degli strumenti algebrici (§ 4). Questa maturità, che si riflette, per esempio, in una più piena consapevolezza dei limiti e delle questioni instrinsecamente connesse all'interpretazione matematica dei problemi reali (§ 3.1), pone il *General Trattato* in una prospettiva molto più moderna della *Summa*.

Non sono molte le notizie a disposizione degli storici circa l'insegnamento dell'aritmetica nel Cinquecento e le prime due parti del *General Trattato* si sono rivelate uno strumento indispensabile per comprendere le idee di Tartaglia su tale argomento. Poiché l'insegnamento dell'aritmetica pratica era indirizzato soprattutto a professionisti come commercianti, banchieri e ingegneri, è chiaro che una delle finalità prioritarie era la completa padronanza del calcolo mentale rapido. La condizione necessaria per raggiungere questo obiettivo è la memorizzazione di un gran numero di calcoli elementari e di algoritmi e tecniche di calcolo, ma non si tratta di una condizione sufficiente. Come abbiamo visto nel caso della somma di frazioni (§ 3.1) Tartaglia insiste molto sul fatto che la memorizzazione debba essere accompagnata dalla comprensione e per questo non esita a criticare la regola di moltiplicazione più diffusa – la "moltiplicazione in croce" – che focalizza l'attenzione sul risultato e non sul procedimento e rischia per questo di diventare una filastrocca priva di significato matematico destinata a essere facilmente scordata o malamente ricordata da uno studente.

Al servizio della didattica Tartaglia non pone solo la propria esperienza di insegnante, ma anche la sua attività di studioso. In particolare, la traduzione degli *Elementi* lo conduce ad alcune originali considerazioni sulle ambiguità semantiche insite nell'uso di termini matematici mutuati dal linguaggio comune (come il termine "multiplicare", § 3.1) che portano spesso a convinzioni errate difficili da correggere e che si possono prevenire solo con l'adozione di un linguaggio più rigoroso e univoco.

Se dal punto di vista strettamente matematico, il *General Trattato* è un'opera che sintetizza esemplarmente la tradizione abachistica pur contenendo in sé già molti elementi propri di una matematica più moderna, è forse dal punto di vista didattico che la lettura offre riflessioni particolarmente interessanti, che gettano nuova luce sia sull'insegnamento della matematica nel Cinquecento sia sulla personalità scientifica di Niccolò Tartaglia.