Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Alberto Saracco, Giorgio Saracco

Matematica ed elezioni, paradossie problemi elettorali

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (2020), n.1, p. 17–31.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2020_1_5_1_17_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2020.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 5, N. 1, aprile 2020, 17-31

Matematica ed elezioni, paradossi e problemi elettorali

Alberto Saracco
Università di Parma
E-mail: alberto.saracco@unipr.it

Giorgio Saracco
Università di Pavia
E-mail: giorgio.saracco@unipv.it

Sommario: *La matematica ha notevoli applicazioni, non solo nelle scienze naturali, come ben noto, ma anche nelle scienze sociali. In questo articolo esamineremo i sistemi elettorali e di scelta sociale e li analizzeremo dal punto di vista matematico, prestando particolare attenzione agli aspetti paradossali ma inevitabili dei problemi di scelta, che vengono messi in evidenza dall'uso della matematica. In passato queste applicazioni della matematica nelle scienze sociali hanno portato a premi Nobel per l'economia. Questi studi sono un'area attiva di ricerca ancora oggi.*

Abstract: *Mathematics has remarkable applications, not only in natural sciences, as well known, but also in social sciences. In this paper we shall analyze electoral and social choice systems from a mathematical point of view, paying particular attention to the paradoxical and inevitable aspects appearing in choice problems, which are emphasized by the use of mathematics. In the past these applications of mathematics in social sciences have led to Nobel prizes in economy. These subjects are an area of research which is nowadays still alive.*

1. – Introduzione

In questo articolo divulgativo presentiamo un'applicazione della matematica nelle scienze sociali. Daremo una formalizzazione matematica di alcuni aspetti dei sistemi elettorali e dei problemi di scelta o di votazione in generale, rispondendo ad alcune domande e/o curiosità che in un qualche momento hanno sicuramente attraversato la vostra mente: come mai i candidati politici cambiano posizioni e vedute tra le primarie del partito e le nazionali?; esiste la democrazia?; è da preferirsi un sistema di tipo maggioritario o proporzionale, o entrambi hanno dei problemi intrinseci?

Accettato: l'8 aprile 2020.

Come spesso accade in matematica, ad una formalizzazione o ad un modello corrispondono più situazioni diverse della vita reale, appartenenti ad ambiti all'apparenza completamente scorrelati. Un'astrazione rende però possibile trattarli allo stesso modo e quindi i risultati ottenuti possono essere interpretati in più contesti diversi. Quindi, qualora possibile, partiremo da situazioni distanti dalla politica per fissare le idee con esempi più godibili e quotidiani. A titolo d'esempio, un'elezione ed un campionato mondiale di Formula 1 possono essere schematizzati allo stesso modo. Ci sono i candidati all'elezione (i piloti partecipanti al campionato) e i votanti (le gare del campionato). Ogni elettore ha una propria lista di preferenza dei candidati (così come ogni gara ha una propria classifica dei piloti) e – note queste liste (le classifiche) – un sistema elettorale determina il vincitore delle elezioni (le regole del mondiale determinano il vincitore). Pensare ad analogie del genere può essere utile, per non fossilizzarsi su un'unica interpretazione di quanto scritto in questo testo.

Il primo autore ha tenuto per la prima volta un seminario divulgativo su questo tema nel 2005 per gli studenti della Scuola Normale Superiore di Pisa. Da allora si sono succeduti vari articoli, inizialmente ispirati da [14, Capitolo 7] e da [15], la cui prima versione è [19], e seminari divulgativi su questo tema. Inoltre, da alcuni anni tiene un laboratorio PLS su matematica ed elezioni per gli studenti delle classi quarte superiori, e per maggiori informazioni sul PLS rimandiamo al sito web [1].

Il secondo autore fa ricerca nel campo del Calcolo delle Variazioni e si è invece avvicinato a questi temi in quanto esperto di metodi isoperimetrici. Infatti, il cosiddetto fenomeno di gerrymandering, di cui parleremo nel dettaglio nelle Sezioni 6.1 e 6.2, si può riconoscere (e a priori evitare) con tecniche di tipo isoperimetrico.

Recentemente abbiamo iniziato una collaborazione e ci occupiamo attivamente di questi temi per ricerca [20].

Dato che l'iniziale interesse per questi temi è stato di natura divulgativa, il tono dell'esposizione sarà principalmente divulgativo, anche se non mancheranno approfondimenti più tecnici e riferimenti bibliografici ad articoli di ricerca.

2. – Decisioni su un singolo argomento: il paradosso del gelataio

Immaginiamo che ci sia un'elezione con solamente due candidati a concorrere, diciamo un rappresentante di destra ed uno di sinistra. In questo scenario, la decisione verte su una singola scelta: quale dei due preferisco. I due candidati ovviamente hanno l'obbiettivo di farsi eleggere, raccogliendo più voti possibili. Quale strategia dovrebbero adottare a questo scopo?

Come detto nell'introduzione, ad un modello matematico possono corrispondere più situazioni. Lasciamo momentaneamente da parte questo scenario politico, e dedichiamoci ad un'attività che riteniamo possa essere più dilettevole: mangiare del gelato, durante le vacanze estive in riva al mare.

Agosto, spiaggia della costa Smeralda, affollata di bagnanti in vacanza. Senza perdere di generalità possiamo supporre che questa spiaggia senza nome sia lunga esattamente un chilometro. Due gelatai hanno il permesso di vendere i loro prodotti sulla spiaggia, hanno lo stesso assortimento e praticano gli stessi prezzi. È allora ragionevole supporre che ogniqualvolta qualcuno voglia un gelato si diriga al chiosco più vicino. Per semplicità descrittiva supponiamo per il momento che i bagnanti siano disposti uniformemente lungo la spiaggia. La domanda è la seguente:

dove è meglio che si posizionino i due gelatai?

Il problema, così come formulato, non è ben posto. In effetti la risposta dipende dalla connotazione che si dà alla parola *meglio*: meglio *per chi?*

Per il singolo bagnante (pigro) della spiaggia, la posizione ottimale dei gelatai (o almeno di uno tra questi) è immediatamente dietro alla propria sdraio, affinché ogni volta che ne abbia voglia possa prendere un gelato senza neppure alzarsi dalla sdraio.

Per l'insieme di tutti i bagnanti, *la comunità*, si può pensare che la posizione ottimale sia quella che minimizza lo spostamento medio dei bagnanti tra la sdraio ed il chiosco di gelati. Allora, l'ideale è che i due gelatai si posizionino a 250 metri rispettivamente dall'inizio e dalla fine della spiaggia. In questo modo ogni bagnante deve compiere al più 250 metri per raggiungere il chiosco a lui più vicino e soprattutto ogni bagnante compie in media 125 metri.

Un tale problema di minimizzazione è comune in analisi matematica, e precisamente nel Calcolo delle Variazioni. Il ragionamento può essere facilmente generalizzato considerando una qualsiasi densità di distribuzione di bagnanti lungo la spiaggia $\lambda(x)$ e una qualsiasi funzione *costo di spostamento* $C(a,b,x) = f(\min\{\,|x-a|; |x-b|\,\})$, dove a e b sono le posizioni dei gelatai sulla spiaggia ed f è una funzione continua, crescente e concava. Quello che si minimizza è il costo medio per bagnante, dato da

$$C_m(a,b) = \frac{\int_0^1 C(a,b,x)\lambda(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 \lambda(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Il punto (a,b) che realizza il minimo (che esiste, ma non è necessariamente unico) descrive la posizione migliore dei gelatai per minimizzare il costo medio per la comunità. Il caso descritto a parole ad inizio paragrafo corrisponde alle scelte $\lambda(x)$ costante e $f(y) = y$.

Per il gelataio, si può ragionevolmente supporre che il meglio corrisponda alla posizione che massimizza il suo guadagno. Solitamente, non ha alcun interesse a minimizzare spostamento, fatica, costo o felicità del singolo bagnante o della comunità. La disposizione ottimale per la comunità dei bagnanti descritta precedentemente non è certo quella migliore per un gelataio mosso dal desiderio di guadagno. Infatti, il primo è sicuro di avere come clienti tutti coloro che stanno tra lui e l'inizio della spiaggia, perché questi dovrebbero percorrere più strada per andare dal concorrente; analogamente il secondo è sicuro di essere scelto da coloro che stanno tra lui e la fine della spiaggia. Ma i bagnanti situati tra i due possono essere rubati al concorrente, semplicemente avvicinandosi al centro della spiaggia. Man mano i due gelatai si spostano verso il centro della spiaggia, cercando di rubarsi i clienti l'un con l'altro. L'unica posizione stabile, da cui nessuno dei gelatai cerca di spostarsi è quella in cui sono entrambi al centro della spiaggia. Così ogni singolo bagnante deve percorrere fino a 500 metri per ottenere un gelato e lo spostamento medio dei bagnanti è salito a 250 metri.

La situazione è simile nel caso generale: i due gelatai si posizionano a fianco a fianco, sulla mediana della distribuzione dei bagnanti nella spiaggia, ovvero in modo tale che entrambi abbiano il 50% dei bagnanti alla destra e il 50% dei bagnanti alla sinistra. Questo processo è noto come principio della minima differenziazione (o anche modello di Hotelling lineare, si veda [13]), ed è il motivo per cui, molto spesso, camminando per le strade si notano negozi adiacenti della stessa tipologia!

Si potrebbe scherzosamente – ma non troppo – osservare che lasciar fare al mercato e alla libera concorrenza non sia nell'interesse della comunità.

Torniamo ora allo scenario politico con i nostri due candidati, le cui posizioni possono essere viste come una *spiaggia elettorale* e variare dall'estrema destra (inizio spiaggia) all'estrema sinistra (fine spiaggia). I bagnanti diventano gli elettori ed i gelatai i candidati stessi. Supponendo che ogni elettore voti per il candidato con posizioni più vicine alle proprie e che ogni candidato abbia l'obbiettivo di farsi eleggere, allora assisteremmo allo stesso fenomeno visto prima: due candidati con posizioni molto simili, fianco a fianco nella mediana della spiaggia elettorale.

Questo fenomeno è tutto fuorché astratto: è esattamente quanto succede nelle elezioni americane. Durante le primarie il candidato democratico ha generalmente delle posizioni mediamente di sinistra, cercando di posizionarsi sulla mediana delle posizioni dell'elettorato democratico, per poi spostarsi verso il centro dopo aver ricevuto la nomina alla candidatura presidenziale per rubare voti di centro al candidato repubblicano, il quale ha adottato una strategia del tutto analoga.

Tuttavia la posizione mediana (o una qualsiasi posizione scelta dai due candidati) è facilmente attaccabile dall'entrata in gioco di altri candidati: un terzo candidato *minore* può sconvolgere il risultato finale, togliendo voti al candidato altrimenti vincente. La presenza di un terzo ed un quarto candidato *minori* opportunamente coalizzati può impedire ai primi due di vincere le elezioni. Questo spiega il grande utilizzo di liste civiche e liste civetta, volte a rubare voti all'avversario per ottenere la vittoria, a volte anche con metodi sul limite della legalità, che portano a lunghe lotte presso il TAR prima e dopo le elezioni. A questo proposito segnaliamo l'interessante guida interattiva [8] che permette di vedere come diversi sistemi elettorali funzionino e come l'ingresso di altri candidati influenzi l'esito finale.

Nel mondo reale non possiamo aspettarci che i bagnanti e gli elettori abbiano pazienza infinita e siano disposti a spostarsi troppo per prendere un gelato o per dare il proprio voto. Il fenomeno dell'alienazione dell'elettore e del non voto è molto frequente (e ancora di più negli ultimi tempi). Con metodi simili a quelli descritti in questa sezione si possono analizzare anche le elezioni in presenza di alienazione dell'elettorato, o l'effetto di posizioni politiche poco chiare (*fuzzy*), o il problema dei finanziamenti. Un'analisi dettagliata è reperibile in [7].

3. – Decisioni su più argomenti: il paradosso di Condorcet

Abbiamo appena visto come la situazione possa essere complicata già quando si discute su un solo argomento, ovvero quando il problema è 1-dimensionale. Aggiungendo più argomenti di discussione, ovvero più dimensioni allo spazio delle scelte, la patologia osservata rimane, ma se ne aggiungono altre nuove.

Per semplicità presentiamo un esempio discreto anziché uno continuo: la riunione del condominio dei Sith. In un condominio di tre piani abitano Aleena, Balosar e Chiss. Devono decidere se mettere o meno una parabola condominiale (P o $\neg P$) ed un ascensore (A o $\neg A$). Balosar vorrebbe avere entrambe le cose (dovendo accontentarsi di una sola, preferirebbe avere la parabola). Aleena è interessato alla parabola, ma non all'ascensore (e pur di non pagare per l'ascensore è disposto a rinunciare alla parabola), mentre Chiss è interessato solo all'ascensore (e pur di non pagare per la parabola, è disposto a rinunciare all'ascensore). Le preferenze dei tre sono rappresentate nella Tabella 1.

TABELLA 1 – Le preferenze di Aleena, Balosar e Chiss in ordine decrescente (1 è l'opzione preferita, 4 la meno).

	1	2	3	4
Aleena	$(P, \neg A)$	$(\neg P, \neg A)$	(P, A)	$(\neg P, A)$
Balosar	(P, A)	$(P, \neg A)$	$(\neg P, A)$	$(\neg P, \neg A)$
Chiss	$(\neg P, A)$	$(\neg P, \neg A)$	(P, A)	$(P, \neg A)$

Non ci sono due persone d'accordo su quale sia la scelta migliore, ma – due voti contro uno – vincono sia la parabola (voluta da Aleena e Balosar) sia l'ascensore (voluto da Balosar e Chiss). Il regolamento di condominio richiede di eleggere un amministratore che poi prenda le decisioni. L'accondiscendente amministratore Yoda decide di candidarsi promettendo di fare la parabola e l'ascensore, (P, A). Il conservatore amministratore Darth Vader si candida promettendo di non fare né l'una né l'altro, $(\neg P, \neg A)$. Per quanto incredibile possa sembrare, seguendo la Tabella 1, i sondaggi danno come vincente Darth Vader, sostenuto da Aleena e Chiss. La situazione prende una piega inaspettata quando Yoda ritira la candidatura in favore del pigro amministratore Jabba che promette di realizzare solo l'ascensore, ovvero $(\neg P, A)$. Presentandosi come unici due candidati Jabba e Darth Vader, è Jabba a spuntarla, con i voti di Balosar e Chiss. Se invece alle elezioni si fossero presentati Yoda e Jabba, avrebbe

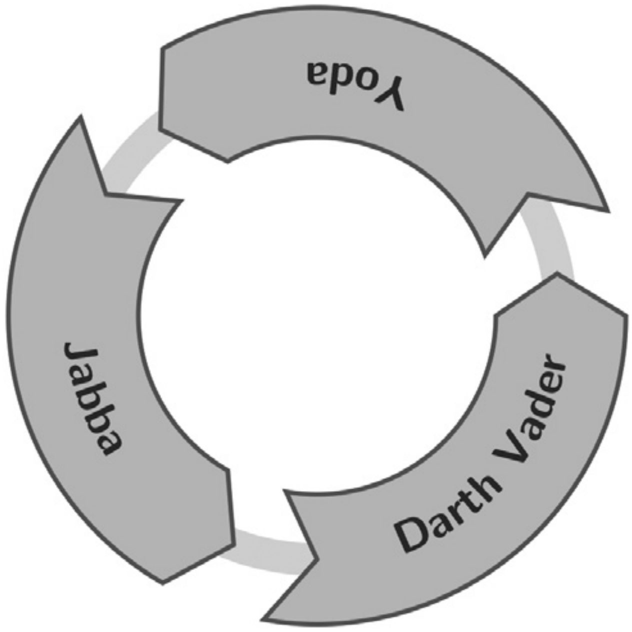


Fig. 1. – La situazione che si viene a creare durante l'elezione dell'amministratore del condominio dei Sith.

vinto Yoda, con i voti di Aleena e Balosar. Come illustrato in Figura 1, siamo in una situazione del tipo sasso-carta-forbice, in cui ognuno dei candidati vince contro uno, ma perde contro l'altro.

Questa situazione circolare, nota come *paradosso di Condorcet*, si è realmente verificata nelle elezioni presidenziali USA del 1976, quando il democratico Jimmy Carter vinse su Gerald Ford, che aveva ottenuto la nomina repubblicana vincendo su Ronald Reagan. I sondaggi dell'epoca davano Reagan vincente su Carter – come poi successe effettivamente, anche se con un diverso elettorato, alla tornata successiva del 1980.

Ma quindi, cosa vuole la maggioranza? Può accadere che la volontà della maggioranza non sia ben definita e dipenda dal metodo elettorale? In primis, bisogna specificare cosa significhi che "la volontà della maggioranza è ben definita", ovvero darne una definizione in termini matematici. Nella letteratura in teoria della scelta, si utilizza la seguente.

DEFINIZIONE 3.1. – Sia K l'insieme delle alternative. L'alternativa $x \in K$ è un'*alternativa maggioritaria* se per ogni altra alternativa $y \in K$, in una scelta degli elettori tra x e y vince x. Diremo che *la volontà della maggioranza è ben definita* se esiste l'alternativa maggioritaria (la quale, se esiste, si può dimostrare essere unica).

Nel caso precedente (con candidati Yoda, Darth Vader e Jabba) l'alternativa maggioritaria non esiste. Un semplice metodo per analizzare l'esistenza dell'alternativa maggioritaria in un'elezione con tre votanti (come nel caso dell'elezione dell'amministratore) è esposta in [19]. Un'analisi molto più dettagliata dove si prendono in considerazione anche un'infinità continua di alternative è effettuata in [6].

Dall'esempio dell'elezione di condominio si capisce che può essere particolarmente difficile definire la volontà degli elettori e l'esito di un'elezione può essere determinata più che dalla reale volontà degli elettori (che molto probabilmente non esiste) dai candidati presenti e/o dal metodo elettorale scelto.

Pertanto l'accento deve essere posto sui requisiti minimi che vogliamo che un sistema elettorale soddisfi, per cercare di capire quali siano i metodi elettorali più adatti.

4. – La legge di benessere sociale

Una *legge di benessere sociale*, detto in maniera spicciola, è una regola per associare alle preferenze dei cittadini un risultato delle elezioni. Ne consegue che un sistema elettorale è dato da una legge di benessere sociale. Per poter trattare l'argomento con metodi matematici, iniziamo col definire in maniera precisa cosa sia una preferenza.

DEFINIZIONE 4.1. – Sia K l'insieme delle alternative. Una preferenza tra le alternative in K, $\geq$, è un *ordinamento totale* di K. Diremo che x e y sono indifferenti rispetto alla preferenza ($x = y$) se $x \geq y$ e $y \geq x$. Inoltre diremo che x è preferito ad y ($x > y$) se $x \geq y$ e $x \neq y$.

Le proprietà soddisfatte da un ordinamento totale sono:

1) (transitività) $\forall x, y, z \in K$ se $x \geq y$ e $y \geq z$, allora $x \geq z$ (ovvero una preferenza non può essere schizofrenica, preferendo x a y e y a z, ma non preferendo x a z);
2) (tricotomia) $\forall x, y \in K$ vale una delle tre possibilità: $x > y$ oppure $x < y$ oppure $x = y$ (ovvero tutte le coppie di alternative sono confrontabili tra loro da una preferenza).

La definizione precedentemente data vale qualsiasi cardinalità abbia K. Ci restringiamo a supporre che ci sia un numero finito k di alternative, ovvero $\#K = k$, caso che risulta essere quello di interesse nelle elezioni dove il numero di candidati/scelte è finito. Chiamiamo $\mathcal{P}$ l'insieme degli ordinamenti di K, ovvero l'insieme di tutte le possibili preferenze.

Una legge di benessere sociale è una funzione Φ, che assegnate le preferenze individuali dei cittadini aventi diritto di voto, C, identifica una preferenza sociale (o dell'insieme dei cittadini), ovvero

$$\Phi\colon \mathcal{P}^n \longrightarrow \mathcal{P},$$

dove $n = \#C$. Osserviamo che una tale funzione garantisce l'esistenza di una preferenza sociale

$$\geq_\Phi := \Phi(\geq_1, \ldots, \geq_n)$$

qualunque siano le preferenze individuali $\geq_1, \ldots, \geq_n$ dei cittadini, ovvero ogni cittadino ha libertà di voto, purché rispetti la transitività nella sua preferenza. Osserviamo che per ora non abbiamo imposto nessuna richiesta a questa funzione di benessere sociale.

4.1 – *Una parentesi su elezioni e gare sportive.* La maggior parte dei sistemi elettorali ricava la preferenza sociale non da tutta la lista delle preferenze dei singoli cittadini, ma soltanto dal voto dell'alternativa preferita. Esistono alcuni stati, come in Australia ed Irlanda dove per alcuni votazioni si utilizza il voto singolo trasferibile (vedi la pagina web [23]), in cui viene effettivamente utilizzato tutta la lista delle preferenze dei singoli elettori per determinare il risultato. In questo senso la definizione data di legge di benessere sociale è addirittura più generale della maggior parte dei sistemi elettorali, ma si applica anche ai (pochi) casi in cui si fa ricorso al voto singolo trasferibile.

Una schematizzazione di questo tipo di un'elezione, come sottolineato nell'introduzione, può essere utilizzata anche per matematizzare altri eventi, come ad esempio le competizioni sportive che si svolgono su più gare. Ogni singola gara è un cittadino, e la sua lista di preferenze è la classifica di quella gara. Dati i risultati delle gare, la legge di benessere sociale fornisce la classifica finale del campionato.

Per contro, non tutti i metodi elettorali (o regole per la formazione di una classifica finale) sono matematizzabili nel modo precedente. Sistemi in cui i vari cittadini possono assegnare punteggi a loro scelta per stabilire di quanto preferiscano un candidato ad un altro non sono presi in considerazione. Tali sistemi elettorali possono sembrare molto strani, ma è così che funzionano ad esempio le corse a tappe di ciclismo, in cui si sommano i tempi, e non si tiene conto solo delle classifiche delle singole tappe o addirittura solo dei vincitori delle singole tappe. A volte può succedere che un corridore riceva una penalità e questa si può tradurre in una sorta di punteggio negativo. In effetti, esistono sistemi di votazione in cui si possono assegnare punteggi sia positivi sia negativi: un esempio è fornito dalle elezioni degli steward in Wikipedia. Da qui il pregio di una definizione il più ampia e adattabile possibile.

4.2 – *L'assiomatica della democrazia.* Ribadiamo che al momento non abbiamo posto alcuna condizione alla funzione che rappresenta la legge di benessere sociale. Affinché siano rispettate le più elementari norme della democrazia, faremo ora alcune richieste sulla funzione Φ. Vogliamo che la legge di benessere sociale soddisfi le seguenti proprietà, di cui ci limitiamo ad una descrizione; per la formalizzazione matematica delle condizioni seguenti rimandiamo a [19].

- **A1** (Sovranità dei cittadini) Per ogni coppia ordinata di elementi x, y di K esistono delle preferenze individuali tali che la legge di benessere sociale faccia preferire x ad y, ovvero se tutti cittadini si mettono d'accordo possono ottenere una qualunque preferenza sociale;
- **A2** (Correlazione positiva) Date due alternative qualsiasi $x, y \in K$, se ad una certa n-pla di preferenze individuali la legge di benessere sociale fa preferire x ad y, allora in un'altra n-pla di preferenze individuali differente dalla prima solo perché x ha migliorato la sua posizione, la legge di benessere sociale fa preferire x ad y;
- **A3** (Invarianza per le alternative irrilevanti) Date due alternative qualsiasi $x, y \in K$, se ad una certa n-pla di preferenze individuali la legge di benessere sociale fa preferire x ad y, allora in un'altra n-pla di preferenze individuali con le stesse posizioni relative di x ed y, la legge di benessere sociale fa preferire x ad y;
- **A4** (Non dittatorialità) La legge di benessere sociale non associa ad ogni n-pla di preferenze sempre la preferenza di un determinato cittadino, detto dittatore.

Le quattro condizioni **A1**-**A4** dovrebbero apparire a tutti il minimo indispensabile per poter conferire ad un sistema elettorale l'etichetta di *democratico*. In effetti, utilizziamo queste quattro per definire matematicamente la parola democratico, come segue.

DEFINIZIONE 4.2. – Chiameremo *democratica* una legge di benessere sociale Φ che soddisfa le quattro condizioni **A1**-**A4**.

Come sempre in matematica, prima di andare ad esplorare tutte le proprietà che possiede una legge di benessere sociale democratica ed iniziare a dimostrare svariati teoremi su questa, siamo portati a rispondere ad una fondamentale questione. *Esiste* una tale legge di benessere sociale?

5. – Il Teorema di Arrow

Ci sono due notizie; una buona ed una cattiva. La buona è che se le alternative da votare sono solo due, il buon vecchio sistema di voto per alzata di mano (ovvero si conta quanti preferiscono A a B e quanti B ad A) soddisfa tutti gli assiomi, e quindi la votazione a maggioranza è una legge di benessere sociale democratica. Di più, si può anche dimostrare che è l'unica legge di benessere sociale democratica.

La cattiva è che non appena le alternative di voto sono almeno tre, non esiste nessuna legge di benessere sociale democratica. Questo è stato dimostrato da Kenneth Arrow in [3], lavoro che gli è valso il premio Nobel 1972 per l'economia.

TEOREMA 5.1. – (Arrow, 1951). *Se $\#K \geq 3$, ovvero ci sono almeno tre alternative, non esiste nessuna legge di benessere sociale Φ che sia democratica, ovvero che soddisfi contemporaneamente le quattro condizioni **A1-A4**.*

Il teorema si può riformulare in termini più preoccupanti, come segue.

TEOREMA 5.2. – (Arrow, 1951). *Se $\#K \geq 3$, ovvero ci sono almeno tre alternative, le uniche leggi di benessere sociale Φ che soddisfano contemporaneamente le tre condizioni **A1-A3** sono quelle dittatoriali.*

Un'ottima esemplificazione del teorema precedente, è la citazione [1] da [18], il libro *Morty l'apprendista* di Terry Pratchett "Ankh-Morpork aveva perso tempo con una gran quantità di forme di governo ed era finita con quella specie di democrazia conosciuta come Un Uomo, Un Voto. Il Patrizio era l'Uomo: egli aveva il Voto.".

I sistemi elettorali abitualmente usati non soddisfano la proprietà **A3**, ed è proprio perché le alternative irrilevanti non sono affatto irrilevanti ai fini del risultato: è il motivo per cui si vedono tanti litigi sul permettere di presentarsi alle piccole liste. Come abbiamo accennato nella discussione seguente il paradosso del gelataio nella Sezione 2, candidati con posizioni minoritarie possono rosicchiare voti ad uno dei candidati favoriti, facendo vincere l'altro. Il Teorema di Arrow ci dice che questo è necessario e non è semplicemente causato dallo specifico sistema elettorale che abbiamo scelto. Il Teorema di Arrow per i sistemi elettorali reali può essere riscritto nel seguente (equivalente) modo.

TEOREMA 5.3. – (Arrow, 1951). *Se $\#K \geq 3$, ovvero ci sono almeno tre alternative, le leggi di benessere sociale Φ che soddisfano contemporaneamente gli assiomi **A1**, **A2** e **A4** sono tali che le alternative irrilevanti risultano determinanti per l'esito delle elezioni.*

5.1 – *La dimostrazione del Teorema di Arrow.* In questa sezione, diamo la dimostrazione del Teorema di Arrow. Chi non volesse seguirne i tecnicismi, può saltarla senza perdere nulla di fondamentale per proseguire la lettura. È d'obbligo però dire che la dimostrazione è elementare ed alla portata di tutti, ed è una lettura istruttiva.

Per procedere con la dimostrazione, enunciamo un'altra proprietà, detta di Pareto o dell'unanimità, ed anteponiamo alcuni lemmi preliminari.

P (Unanimità) Date due alternative qualsiasi $x, y \in K$, se tutti i cittadini sono d'accordo a preferire x ad y, allora la legge di benessere sociale preferisce x ad y.

[1] In originale "Ankh-Morpork had dallied with many forms of government and had ended up with that form of democracy known as One Man, One Vote. The Patrician was the Man; he had the Vote", da [17].

LEMMA 5.4. – *Se la legge di benessere sociale Φ soddisfa le tre condizioni **A1**-**A3**, allora gode anche della proprietà **P**.*

Dimostrazione. Per l'assioma ***A3***, se esiste una n-pla di preferenze $P = (\geq_1, \dots, \geq_n)$ tale che

$$x \geq_i y\,, \quad \forall i = 1, \dots, n \qquad\qquad x \geq_{\Phi(P)} y\,,$$

allora per ogni altra n-pla di preferenze $P^* = (\geq_1^*, \dots, \geq_n^*)$ tale che per ogni $i = 1, \dots, n$ si abbia $x \geq_i^* y$ si ha necessariamente $x \geq_{\Phi(P^*)} y$. Questo implica immediatamente la proprietà **P**, non appena si dimostri che una tale n-pla esiste.

Per l'assioma **A1** c'è una n-pla di preferenze tale per cui x è preferito ad y. Da questa possiamo generare una nuova n-pla di preferenze, spostando x in prima posizione nella lista di preferenze di ogni cittadino. Per **A2**, in questa n-pla (in cui ogni cittadino preferisce x ad y), la legge di benessere sociale preferisce x ad y e la tesi è dimostrata. □

DEFINIZIONE 5.5. – Sia $S \subset C$ un sottoinsieme non vuoto di cittadini, e sia Φ una legge di benessere sociale. Diremo che S (rispetto a Φ) è

i) decisivo per x rispetto ad y se tutte le volte che gli individui di S preferiscono x ad y, la legge di benessere sociale Φ preferisce x ad y;
ii) decisivo se è decisivo per x rispetto ad y, per ogni $x, y \in K$;
iii) un dittatore se è decisivo e costituito da un solo elemento.

OSSERVAZIONE 5.6. – *Alla luce della precedente definizione, l'assioma **A4** afferma che non esiste un dittatore, mentre la proprietà **P** afferma che l'insieme C di tutti i cittadini è decisivo.*

LEMMA 5.7. – *Sia data una legge di benessere sociale Φ che verifica **A2**. Il sottoinsieme $S \subset C$ è decisivo per x rispetto ad y se e solo se per ogni n-pla di preferenze $P = (\geq_i)_i$ tale che*

$$x >_i y, \quad \forall i \in S,$$
$$y >_j x, \quad \forall j \notin S,$$

si ha $x >_{\Phi(P)} y$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Ovvio.

($\Leftarrow$) Consideriamo una qualsiasi n-pla di preferenze per cui x è preferito ad y da tutti i cittadini in S.

Consideriamo un'altra n-pla di preferenze coincidente con la precedente tranne per il fatto che x è all'ultimo posto nelle preferenze dei cittadini non in S. Per ipotesi, la legge di benessere sociale preferisce x ad y. Per **A2**, questo vale anche per la n-pla originaria. $\square$

Il prossimo lemma stabilisce che, se Φ soddisfa le condizioni **A1-A3**, allora per S essere decisivo per un'alternativa rispetto ad un'altra è equivalente all'essere decisivo.

LEMMA 5.8. – *Sia data una legge di benessere sociale Φ che verifica le tre condizioni **A1-A3**. Se esistono due alternative x, y tali che $S \subset C$ è decisivo per x rispetto ad y, allora S è decisivo.*

Dimostrazione. Se $K = \{x, y\}$ allora non c'è nulla da dimostrare. Sia $z \in K \setminus \{x, y\}$ una terza alternativa. Consideriamo una n-pla di preferenze $P = (\geq_i)_i$ tale che

1) $\forall i \in S, x >_i y >_i z$;
2) $\forall i \notin S, y >_i z >_i x$.

Poiché S è decisivo per x rispetto ad y, abbiamo $x >_{\Phi(P)} y$. Inoltre, poiché C è decisivo, abbiamo anche $y >_{\Phi(P)} z$, e per transitività $x >_{\Phi(P)} z$. Per l'assioma **A3** questo vale tutte le volte che i cittadini in S preferiscono x a z e gli altri preferiscono z ad x. Per il Lemma 5.7, S è decisivo per x rispetto a z, qualunque sia $z \neq x$.

Ripetendo il ragionamento per $t \in K \setminus \{x, z\}$, si dimostra che S è decisivo per t rispetto a z, qualunque siano $t, z \in K \setminus \{x\}$ e infine che S è decisivo per t rispetto a z, qualunque siano $t, z \in K$. Pertanto S è decisivo. $\square$

COROLLARIO 5.9. – *Sia data una legge di benessere sociale Φ che verifica le tre condizioni **A1-A3**. Se esistono due alternative x, y tali che un individuo c è decisivo per x rispetto a y, allora c è un dittatore.*

Dimostrazione del Teorema di Arrow 5.1. Siano $x, y \in K$ alternative. Per il Lemma 5.4 e l'Osservazione 5.6, C è decisivo per x rispetto ad y. Consideriamo un insieme decisivo per x rispetto ad y minimale (ovvero non avente sottoinsiemi propri decisivi), D. Ragioniamo per assurdo, e supponiamo che Φ verifichi la condizione **A4**. Tale condizione, insieme al Lemma 5.8, garantisce che D abbia almeno due elementi. Allora, possiamo scriverlo come unione di due sottoinsiemi propri, non vuoti e disgiunti:

$$D = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \neq \emptyset, \quad D_2 \neq \emptyset, \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

Poiché per ipotesi ci sono almeno tre alternative, consideriamo una terza alternativa $z \in K \setminus \{x, y\}$ ed una qualsiasi n-pla di preferenze $P = (\geq_i)_i$ tale che:

1) $\forall i \in D_1, x >_i y >_i z$;
2) $\forall i \in D_2, z >_i x >_i y$;
3) $\forall i \notin D, y >_i z >_i x$.

Poiché per ogni $i \in D$ si ha $x >_i y$, avremo $x >_{\Phi(P)} y$. Inoltre, per la tricotomia, si avrà $y >_{\Phi(P)} z$, $y =_{\Phi(P)} z$ oppure $y <_{\Phi(P)} z$.

Se fosse $y >_{\Phi(P)} z$ o $y =_{\Phi(P)} z$, allora per transitività $x >_{\Phi(P)} z$. Per l'assioma **A3** questa conclusione continua a valere per tutte le n-ple di preferenze $P^* = (\geq_i^*)_i$ tali che

$$x >_i^* z, \quad \forall i \in D_1,$$

$$z >_j^* x, \quad \forall j \notin D_1,$$

e pertanto D_1 sarebbe decisivo per x rispetto a z. Per il Lemma 5.7, D_1 sarebbe decisivo contro la minimalità di D.

Se viceversa fosse $z >_{\Phi(P)} y$, per l'assioma **A3** sarebbe così per tutte le n-ple di preferenze $P^* = (\geq_i^*)_i$ tali che

$$z >_i^* y, \quad \forall i \in D_2,$$

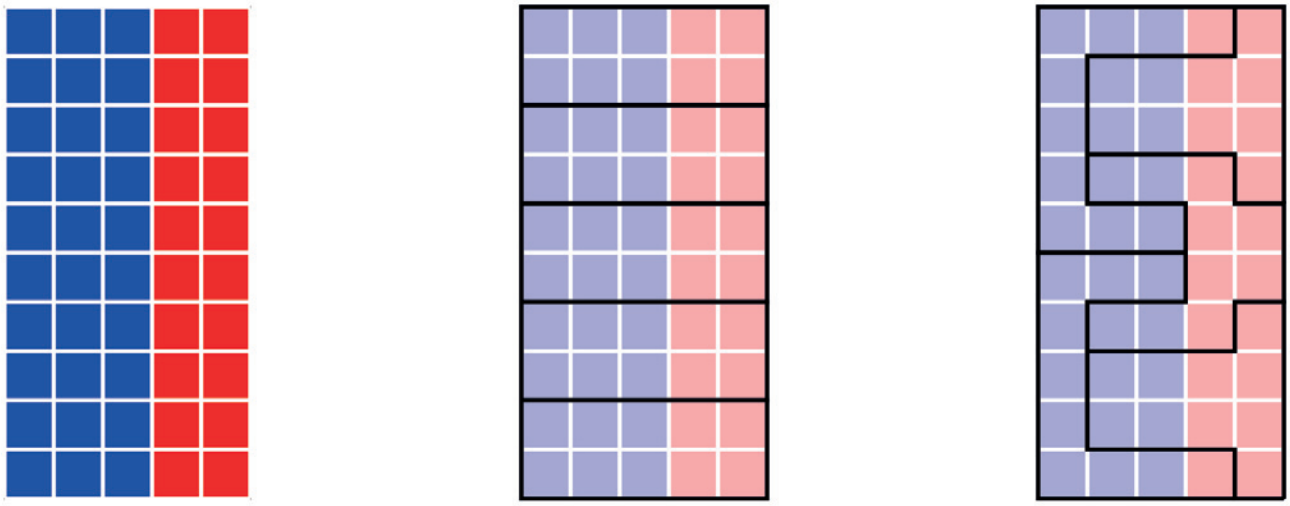
$$y >_j^* z, \quad \forall j \notin D_2,$$

e pertanto D_2 sarebbe decisivo per z rispetto ad y. Per il Lemma 5.7, D_2 sarebbe decisivo contro la minimalità di D. $\square$

Osserviamo che l'argomento chiave nella dimostrazione è il paradosso di Condorcet, illustrato nella Sezione 3 tramite l'esempio del condominio dei Sith.

6. – Seggi e collegi elettorali

Appurato che la democrazia non esiste, passiamo ora a occuparci di seggi e collegi elettorali, passando al vaglio i due metodi di elezione per un parlamento: il maggioritario e proporzionale. In realtà sia del si-



(A) Voto degli elettori (B) Vittoria del partito blu (C) Vittoria del partito rosso

Fig. 2. – La forma dei distretti incide sul risultato dell'elezione.

stema proporzionale sia del maggioritario esistono molte varianti, così come esistono sistemi misti.

6.1 – *Il sistema maggioritario e il gerrymandering.* I sistemi elettorali maggioritari si basano sulla suddivisione del territorio in collegi uninominali su base geografica. In ogni singolo collegio si vota per eleggere un singolo candidato: chi ottiene più voti, viene eletto. Quindi la formazione del parlamento avviene su base locale.

Un evidente problema del sistema maggioritario è che un partito che su base nazionale raccoglie quasi il 50% dei voti potrebbe restare senza neppure un rappresentante in parlamento, perdendo tutti gli scontri nei collegi uninominali contro piccoli partiti ultralocalistici, che avrebbero rappresentanti in parlamento nonostante la loro insignificanza a livello nazionale.

Un problema ancora più singolare è che il risultato di un'elezione dipende dalla *forma* dei collegi elettorali! Possiamo facilmente mostrare questo fenomeno, esibendo un esempio. Supponiamo di essere in presenza di due partiti, rosso e blu; che la popolazione votante sia formata da 50 elettori che rappresentiamo tramite i 50 quadratini 1×1 che formano il rettangolo $(0, 5) \times (0, 10)$. Mettiamoci nella situazione delineata in Figura 2A, ovverosia gli elettori corrispondenti ai quadratini contenuti nel rettangolo $(0, 3) \times (0, 10)$ votano blu, mentre quelli corrispondenti al rettangolo $(3, 5) \times (0, 10)$ rosso. Ovviamente, se ogni elettore votasse per sé, il partito blu vincerebbe. Cosa succede se invece raggruppiamo gli elettori in 5 collegi elettorali (con lo stesso numero di votanti), e decretiamo come eletto il partito che vince in almeno 3 di questi?

Per quanto sia ragionevole aspettarsi che vinca ancora il blu, come accade per la suddivisione in Figura 2B, ci sono alcune partizioni in collegi che portano il rosso alla vittoria, come per la suddivisione in Figura 2C. In effetti, in questo caso, l'elezione può terminare con un qualsiasi risultato compreso fra 5 a 0 per il blu, fino a 2 a 3 in favore del rosso.

In generale, in un'elezione con due soli candidati, potendo modellare i distretti a proprio piacimento è possibile vincere un'elezione di tipo maggioritario avendo poco più del 25% del totale dei voti. In effetti, se abbiamo un'elezione con $2m + 1$ distretti e $2n + 1$ elettori per distretto, per vincere è sufficiente vincere in $m + 1$ distretti con almeno $n + 1$ voti, senza raccogliere nessun voto nei restanti m distretti. Pertanto, è possibile vincere avendo anche solo $(m + 1)(n + 1)$ voti sul totale di $(2m + 1)(2n + 1)$ voti disponibili. All'aumentare di m ed n il rapporto tra voti necessari ad essere eletti e voti totali tende a $1/4$. In Tabella 2 si vedono alcuni esempi che mostrano come la percentuale minima necessaria sia molto bassa anche in caso di pochi distretti e pochi elettori, per poi diminuire rapidamente al crescere di m ed n.

TABELLA 2 – Percentuale minima di voti necessari per vincere un'elezione con due candidati sfruttando il gerrymandering, sulla base del numero di distretti e del numero di elettori per distretto. I dati dell'ultima riga si riferiscono all'elezione regionale in Emilia-Romagna del 2020, per dare un'idea dell'entità teorica del fenomeno (NB: tali elezioni non si sono svolte con metodo maggioritario).

Nr. distretti	Elettori/distretto	%minima per vincere
5	20	33,00%
11	1001	27,30%
21	2001	26,21%
31	10 001	25,81%
9	390 615	25,64%

La pratica del ridisegnare i confini dei collegi elettorali nel sistema maggioritario, nota come *gerrymandering*, è antica, e la prima testimonianza scritta di cui disponiamo risale al 1812. L'allora governatore del Massachusetts Elbridge Gerry, sapendo che, all'interno di una certa regione (dipartimento o stato), ci possono essere parti della popolazione (ben localizzabili) favorevoli al proprio partito o meno, ridisegnò i distretti condensando molti voti a lui sfavorevoli in pochi distretti (*packing*) e disperdendo i restanti su molti (*cracking*), in maniera da garantirsi così un'ipotetica rielezione. La nuova mappa aveva confini particolarmente tortuosi e non passò certo inosservata: sul Boston Centinel apparve una vignetta satirica, riportata in Figura 3, nella quale si ravvisa una somiglianza tra la nuova mappa dei collegi ed una salamandra. Lì compare per la prima volta il termine "gerrymander" quale fusione del nome del governatore "Gerry" e di "salamander".

Come abbiamo visto nell'esempio di Figura 2 si possono modificare i collegi elettorali giungendo anche a ribaltare i risultati percentuali. L'esempio funziona molto bene perché si dispone di un'informazione perfetta sulla distribuzione geografica dei voti dei singoli individui, cosa che nella realtà non accade. Potendo comunque contare sui sondaggi elettorali e su delle analisi della composizione degli elettori delle varie zone (ad esempio giovani/anziani, centro/periferie), si può riuscire a sfruttare il fenomeno anche se con risultati un po' meno sicuri. L'obbligo di mantenere la contiguità geografica dei collegi ha ben poco effetto contro questo fenomeno.

La sola esistenza del fenomeno spesso induce chi è al potere a cambiare la conformazione dei collegi sulla base dei sondaggi elettorali, per assicurarsi così la vittoria. Questo accade in molti Paesi con sistema elettorale maggioritario con collegi uninominali, come si può notare dalle strane forme dei collegi. Una minima contromisura che si potrebbe prendere sarebbe il divieto di cambiare la conformazione dei collegi uninominali nelle vicinanze delle elezioni per ridurre le informazioni a disposizione per ridisegnare i collegi. Ovviamente l'analisi generale delle tendenze di voto continuerebbe ad influenzare le scelte dei politici, ma non avrebbero più in mano l'asso dei sondaggi elettorali per manipolare troppo l'esito delle votazioni.

6.2 – *La matematica del gerrymandering.* Nell'ambito della forma dei collegi elettorali, la matematica può venire utilizzata sostanzialmente per due scopi: 1) determinare se un collegio elettorale sia stato sottoposto ad una pratica di gerrymandering, subendo quindi influenze politiche di stampo opportunistico; 2) creare una partizione in collegi oggettiva, spuria da conflitti d'interesse.

Un requisito che viene sempre richiesto ad un collegio elettorale è quello di essere *contiguo*, con la dovuta eccezione di stampo geografico, data dalla presenza di isole. Matematicamente, possiamo tradurlo in una richiesta topologica di connessione per archi. Il secondo requisito è che i distretti elettorali siano *il più compatti possibile*, dove l'aggettivo compatto è spesso utilizzato in maniera molto vaga – e soprattutto non ha nulla a che fare con la compattezza topologica. Quello che comunemente si vuole è di evitare forme molto strane, elongate e con bordi particolarmente convoluti come quelli di Figura 3 – essendo l'idea di base che persone che vivono vicine condividono spesso alcune caratteristiche (cultura, tradizione, religione, etnia, ecc.) e sarebbe corretto far votare loro insieme piuttosto che disperderne i voti, o far votare insieme gruppi che vivono distanti fra loro e nulla condividono. Da questa richiesta piuttosto ambigua sono nati molti *indici* di compattezza che, andando al nocciolo del loro funzionamento, guardano a due caratteristiche geometriche delle forme dei distretti: area e perimetro. È ben noto che ad area fissata, la palla è la forma ad avere minimo perimetro (disuguaglianza isoperimetrica), ed uno degli indici più utilizzati per un distretto Ω è quello di Polsby–Popper, dato da

$$\mathrm{PP}(\Omega) = \frac{4\pi|\Omega|}{\mathrm{Per}(\Omega)^2},$$

Fig. 3. – La vignetta satirica ai danni del governatore Gerry da parte del Boston Centinel. – Di Elkanah Tisdale, pubblicato in origine sul Boston Centinel, 1812. Immagine di dominio pubblico disponibile a [21].

dove $|\Omega|$ denota l'area e $\mathrm{Per}(\Omega)$ il perimetro. La disuguglianza isoperimetrica implica che per qualsiasi forma Ω l'indice $\mathrm{PP}(\Omega)$ sia compreso fra 0 ed 1, ed in particolare vale 1 se e solo se Ω è una palla. Pertanto, più un distretto ha indice basso, più è ragionevole supporre che ci sia stata qualche manipolazione politica nella sua creazione. Non stiamo qui a dettagliare i molteplici altri indici solitamente in uso, e ci limitiamo al citare quello di Reock (paragone fra area del distretto ed area della palla circoscritta) e quello del minimo poligono convesso (paragone fra area del distretto ed area del suo inviluppo convesso) e a fare riferimento a [12, Part III Designing Electoral Disticts]. Un altro valido approccio è di stampo probabilistico tramite le catene di Markov, per il quale rimandiamo a [2] per una breve discussione divulgativa ed a [9] per una più formale.

Per quanto concerne il creare la mappa dei collegi elettorali in maniera obbiettiva, il problema da affrontare è il partizionare la nazione, Ω, in un certo numero di distretti $\{\Omega_j\}_{j=1}^n$ a due a due disgiunti e tali che coprano l'intero Ω con il vincolo che ogni distretto abbia lo stesso "peso elettorale". Nella pratica, questo si traduce nel chiedere che in ogni distretto Ω_j ci sia lo stesso numero di aventi diritto al voto. Come effettuare la suddivisione? Prendendo spunto dal problema isoperimetrico, un'idea è di minimizzare il perimetro delle partizioni, ovvero studiare

$$\min_{\{\Omega_j\}_j}\left\{\sum_{j=1}^n \mathrm{Per}(\Omega_j)\colon \int_{\Omega_j} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad \forall j\colon 1\le j\le n\right\},$$

dove $f(x)$ rappresenta la densità della popolazione. Tale modello, si può raffinare, pesando tramite la densità anche il perimetro (e quindi minimizzando la somma $\int_{\partial^*\Omega_j} f(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^1(x)$) in maniera tale da penalizzare quelle partizioni che dividono zone densamente popolate, sempre con la ratio che gli abitanti di tali zone hanno plausibilmente background ed interessi comuni. Si potrebbe anche utilizzare un peso *diverso* sul perimetro, non dato direttamente dalla densità di popolazione, ma che tenga conto anche di altri fattori.

Un'obiezione che si può porre a questi approcci è il loro carattere continuo, in quanto il numero di elettori è finito e quindi sarebbe appropriato l'utilizzo di modelli discreti, si veda ad esempio [11] per alcune lacune che i modelli continui presentano. Con le dovute precauzioni, un approccio discreto è possibile, trasportando il problema su dei grafi pesati (anche detti network). È ovvio, ad esempio, che sul discreto il vincolo di volume sul problema di minimizzazione di cui sopra non può essere imposto, ma va rilassato e trasformato in un opportuno termine di penalizzazione. Per maggiori informazioni, rimandiamo al nostro recente articolo [20].

6.3 – *Il sistema proporzionale e i seggi frazionari.* I sistemi proporzionali si basano sul conteggio dei voti ricevuti dai singoli partiti e sulla suddivisione dei seggi a disposizione in proporzione ai voti ricevuti.

Un evidente problema del metodo proporzionale sta nel problema opposto a quello del maggioritario: partiti con un grande seguito locale ma con poco seguito nazionale rischiano di non aver rappresentanti. Questi problemi del proporzionale secco sono di solito ammorbiditi utilizzando una qualche forma di proporzionale locale, ovvero dividendo l'intero territorio in collegi multinominali più piccoli e applicando la suddivisione dei seggi tra i partiti in modo proporzionale all'interno dei collegi. Anche l'assegnazione del numero di seggi ai vari collegi viene fatto proporzionalmente alla popolazione del collegio. Questo è quanto accade ad esempio per suddividere il numero di senatori tra le varie regioni italiane, con qualche correzione, altrimenti alla Valle d'Aosta non ne spetterebbe nessuno.

In Italia, per le elezioni regionali, è in vigore un sistema di doppio proporzionale locale-regionale, che vorrebbe fare in modo che vengano rispettate le proporzionalità sia a livello locale sia a livello regionale. *Vorrebbe* perché in realtà è noto che l'algoritmo non sempre funziona: sotto alcune condizioni di distribuzione dei voti non termina e non dà un risultato. Il fatto è noto da anni ed è stato studiato da vari economisti sia universitari sia dipendenti del Ministero dell'Economia (a titolo di esempio, si veda [16]). Le soluzioni per ora utilizzate non sembrano aver risolto il problema.

Iniziamo con il definire cosa intendiamo per distribuire i seggi in maniera proporzionale ai voti ottenuti. Tralasciamo nella discussione seguente le varianti in cui per ottenere dei seggi bisogna superare una soglia di sbarramento, ovvero raggiungere una minima percentuale di voti (come ad esempio *Porcellum*, *Italicum* o *Rosatellum bis*). Ci restringiamo al proporzionale che segue la cosiddetta *regola della quota*: se la percentuale di voti ottenuta da un partito corrisponde in maniera proporzionale ad $r \in \mathbb{R}_+$ seggi, allora quel partito riceverà $\lfloor r \rfloor$ o $\lceil r \rceil$ seggi. A titolo di esempio, supponiamo ci siano 100 elettori e 10 seggi. Se il partito blu ottiene 30 voti e il partito rosso 70, è facile: 3 seggi al partito blu e 7 seggi al partito rosso. Se i voti sono 36 e 64, allora il blu ha diritto a 3,6 seggi, mentre il rosso a 6,4. Non potendo frazionare i senatori, la regola della quota garantisce che il partito blu avrà o 3 o 4 seggi, mentre quello rosso o 6 o 7. Rimane da stabilire un criterio per determinare come scegliere chi avrà diritto ad arrotondare per difetto e chi per eccesso.

Ci sono vari metodi e tutti, pur sembrando ragionevoli, presentano delle problematiche. Qui trattiamo uno dei più utilizzati, il cosiddetto metodo dei maggiori resti, o metodo Hare (anche conosciuto come metodo Hamilton). Dopo aver assegnato la parte intera dei seggi spettanti ad ogni partito o collegio ($\lfloor r \rfloor$), si assegnano gli n seggi non assegnati uno ciascuno agli n partiti o collegi con resto (ovvero frazione di seggio non assegnato) maggiore. In questo modo si minimizza la somma degli scarti assoluti tra seggi assegnati e seggi a cui si avrebbe avuto diritto secondo la proporzione. Nel nostro esempio, i partiti blu e rosso avevano diritto a 3,6 e 6,4 seggi. Ne assegnamo rispettivamente 3 e 6 e il seggio rimanente va al partito blu, che ha il resto maggiore (0,6 contro 0,4).

Per quanto ragionevole, questo metodo dà luogo ad alcune situazioni paradossali, come mostriamo con esempi tratti dalle elezioni americane.

6.3.1 – *Il paradosso dell'Alabama.* Nel 1880 il funzionario capo dell'ufficio del censimento USA C. W. Seaton calcolò quanti seggi sarebbero stati assegnati ai vari Stati dell'Unione in un Congresso formato da un numero di deputati variabile da 275 a 350. È naturale aspettarsi che, aggiungendo 1 seggio per volta, il numero di seggi rimanga invariato per tutti gli Stati, tranne uno che ne avrebbe avuto uno in più. Seaton si accorse di uno strano fenomeno che occorse nell'aumentare i seggi da 299 a 300. Contrariamente al senso comune, due Stati guadagnarono un seggio, mentre l'Alabama ne perse uno! Un simile conto è stato fatto nel 1900 per un Congresso con un numero di deputati variabile fra 350 e 400. Lo Stato del Colorado avrebbe sempre avuto 3 seggi, tranne che per un Congresso di 357 deputati, nel quale ne avrebbe ricevuti soltanto 2.

Questo accade perché, aumentando il numero dei seggi totali, i resti aumentano in maniera diversa tra i vari Stati o collegi. È facile notare che i resti aumentano in maniera proporzionale alla popolazione votante dello Stato, e quindi più velocemente per gli Stati più popolosi. Pertanto può capitare che due Stati ne superino un terzo. Un esempio del fenomeno è mostrato nella Tabella 3.

TABELLA 3 – Esempio del paradosso dell'Alabama. Tratto da [22].

Stato	Popolazione	Seggi virtuali (10)	Seggi (10)	Seggi virtuali (11)	Seggi (11)
A	600	4,285...	4	4,714...	5
B	600	4,285...	4	4,714...	5
C	200	1,428...	2	1,571...	1

6.3.2 – *Il paradosso del nuovo Stato*. Nel 1907 l'Oklahoma entrò a far parte degli Stati Uniti, e per fargli posto al Congresso, vennero aggiunti i 5 nuovi seggi che gli sarebbero spettati. Nel far questo, per lo stesso motivo di prima, New York perse un seggio a favore del Maine. Un esempio del fenomeno è mostrato nella Tabella 4. Ci sono inizialmente tre Stati e 13 seggi. Si aggiunge un quarto Stato D, con la stessa popolazione di C. Aggiungendo il seggio che spetterebbe allo Stato D (ovvero quello che aveva lo Stato C) si osserva che A e B perdono un seggio e C e D ne ottengono 2 anziché 1.

TABELLA 4 – Esempio del paradosso del nuovo Stato. Adattato da uno simile in [10].

Stato	Popolazione	Seggi virtuali (13)	Seggi (13)	Seggi virtuali (14)	Seggi (14)
A	114	5,678...	6	5,428...	5
B	114	5,678...	6	5,428...	5
C	33	1,643...	1	1,571...	2
D	33	–	–	1,571...	2

6.3.3 – *Il paradosso della popolazione*. Può anche accadere un terzo tipo di paradosso. La popolazione dei singoli Stati ovviamente varia col tempo. Quindi le quote di seggi spettanti ai singoli Stati va ricalcolata per ogni elezione (o ogni volta che viene fatto un censimento). E in questo si nasconde un altro paradosso: può accadere che uno Stato aumenti la propria popolazione percentualmente più di tutti gli altri, ma perda un seggio.

Nel 1900, la Virginia perse un seggio a favore del Maine, nonostante la crescita della popolazione della Virginia fosse stata maggiore di quella del Maine. Un esempio del fenomeno è mostrato nella Tabella 5, in cui lo Stato con il massimo incremento percentuale di popolazione C, vede diminuire i propri seggi.

TABELLA 5 – Esempio del paradosso della popolazione. Tratto da [10].

Stato	Popolazione (149)	Seggi (25)	Nuova popolazione (154)	Variazione	Seggi (25)
A	92	15,436... (15)	97	+5,43%	15,746... (16)
B	42	7,046... (7)	41	−2,38%	6,655... (7)
C	15	2,516... (3)	16	+6,67%	2,597... (2)

6.4 – *Il teorema di Balinski e Young.* Si potrebbe sperare che questi paradossi siano figli del metodo di Hare di assegnazione dei resti, ma purtroppo non è così. Nel 1982 Balinski e Young [5] hanno dimostrato che ogni sistema di assegnazione dei seggi in maniera proporzionale che soddisfi la regola della quota è suscettibile ad uno dei precedenti paradossi. Il risultato è il seguente.

TEOREMA 6.1. – (Balinski & Young, 1982). *Non esiste alcun metodo elettorale, con $s \geq 3$ stati (collegi/distretti), che abbia le seguenti proprietà:*

i) *soddisfa la regola della quota;*
ii) *non presenta il paradosso dell'Alabama;*
iii) *non presenta il paradosso della popolazione.*

Esistono metodi elettorali che soddisfano sottoinsiemi delle proprietà i)-iii). A titolo d'esempio, ci sono metodi che non presentano né il paradosso dell'Alabama né quello della popolazione ma che non seguono la regola della quota (metodo Huntington–Hill). Interessante notare che, in presenza di $s \geq 4$ stati ed $h \geq s+3$ seggi, non esiste alcun metodo elettorale che soddisfi la regola della quota e non presenti il paradosso della popolazione, vedi [4, Theorem 6.1].

7. – Condannati ai paradossi

Siamo quindi condannati ai paradossi: se si discute di un singolo argomento, vedremo i candidati schierarsi su posizioni molto vicine, sulla mediana dell'elettorato; se sono in discussione più scelte allora siamo in balia del paradosso di Arrow che ci condanna o alla dittatura o alla schizofrenia dell'elettorato; se vogliamo utilizzare un metodo maggioritario uninominale chi governa può ritagliarsi i collegi della forma adatta per garantirsi la rielezione; se vogliamo utilizzare un proporzionale che segue la regola della quota siamo destinati ad incorrere in uno dei paradossi dell'Alabama o della popolazione.

Ringraziamenti Ringraziamo i referee per i suggerimenti volti a migliorare la leggibilità e la correttezza dell'articolo, e per la citazione di Pratchett.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Piano Lauree Scientifiche – *Offerta dei Laboratori di Matematica.* Università di Parma. [Online; in data 26-febbraio-2020]. https://smfi.unipr.it/it/pls-matematica-laboratori.

[2] Can Math solve the Gerrymandering Problem, 2018. [Online; in data 06-aprile-2020]. https://www.cmu.edu/news/stories/archives/2018/january/images/MATH-18-114_Math%20Newsletter_Gerrymandering.pdf.

[3] K. J. Arrow. *Social Choice and Individual Values*. Cowles Commission Monograph No. 12. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.

[4] M. L. Balinski and Young H. P. *The Theory of Apportionment*, 1980. http://pure.iiasa.ac.at/id/eprint/1338/1/WP-80-131.pdf.

[5] M. L. Balinski and Young H. P. *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. Yale University Press, New Haven, 1982. ISBN-13:9780300027242.

[6] D. Black and Newing R. A. *Committee Decisions with Complementary Valuation.* William Hodge and Company Limited, 1951. ISBN-13:9780852790052.

[7] S. J. Brams. *Spatial Models of Election Competition.* Birkhäuser, 1979. ISBN-13:9783764330149.

[8] N. Case. *To build a better ballot: an interactive guide to alternative voting systems*, 2016. [Online; in data 26-febbraio-2020]. https://ncase.me/ballot/.

[9] M. Chikina, A. Frieze, and Pegden W. *Assessing significance in a Markov chain without mixing.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **114**(11):2860–2864, 2017. doi:10.1073/pnas.1617540114.

[10] M. Codogno. *Dal paradosso dell'Alabama ai deputati frazionari.* Il Post, 2010. [Online; in data 26-febbraio-2020]. https://www.ilpost.it/mauriziocodogno/2010/07/20/dal-paradosso-dellalabama-ai-deputati-frazionari/.

[11] M. Duchin and Tenner B. E. *Discrete geometry for electoral geography.* arXiv:1808.05860.

[12] P. Grilli di Cortona, C. Manzi, A. Pennisi, F. Ricca, and Simeone B. *Evaluation and Optimization of Electoral Systems. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications*, 1999. doi:10.1137/1.9780898719819.

[13] H. Hotelling. *Stability in competition.* Econ. J., **153**(39):41–57, 1929. doi:10.2307/2224214.

[14] P. Odifreddi. *C'era una volta un paradosso. Storie di illusioni e verità rovesciate.* Einaudi, 2001. ISBN-13:9788806150907.

[15] D. Palladino. *Sistemi di scelte sociali. Il Teorema di Arrow.* [Online; in data 26-febbraio-2020]. http://www.dif.unige.it/epi/hp/pal/Votazioni86W8.pdf.

[16] A. Pennisi. *The Italian Bug: A Flawed Procedure for Bi-Proportional Seat Allocation.* In Simeone B. and Pukelsheim F., editors, Mathematics and Democracy. Studies in Choice and Welfare. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. doi:10.1007/3-540-35605-3_11.

[17] T. Pratchett. *Mort.* Orion Publishing Co, 1987. ISBN-13:9780575041714.

[18] T. Pratchett. *Morty l'apprendista.* collana Teadue 964. TEA, 2009. ISBN-13:9788850212330.

[19] A. Saracco. *Il paradosso del gelataio e altri problemi delle elezioni.* In Vighi P., editor, PLS Parma 2006-2010, pages 119–126. Univ. Parma, Parma, 2010. [Online; in data 26-febbraio-2020]. http://www2.unipr.it/~saralb74/divulgazione/Il%20Paradosso%20del%20Gelataio.pdf.

[20] A. Saracco and Saracco G. *A discrete districting plan.* Netw. Heterog. Media, **14**(4):771–788, 2019. doi:10.3934/nhm.2019031.

[21] E. Tisdale. *The Gerry-Mander* edit.png. Wikimedia Commons, 1812.
[Online; in data 26-febbraio-2020]. https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:The_Gerry-Mander_Edit.png&oldid=211180878.

[22] Wikipedia. *Paradosso dell'Alabama* – Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2016.
[Online; in data 26-febbraio-2020]. http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Paradosso_dell%27Alabama&oldid=83460950.

[23] Wikipedia. *Voto singolo trasferibile* – Wikipedia, l'enciclopedia libera, 2019.
[Online; in data 26-febbraio-2020]. http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Voto_singolo_trasferibile&oldid=106100890.


Alberto Saracco

Alberto Saracco è Professore Associato in Geometria presso l'Università di Parma. Si occupa di geometria complessa, ipercomplessa e differenziale. Ultimamente ha iniziato anche a interessarsi di didattica della matematica e, con il fratello Giorgio, di applicazioni della matematica alle elezioni. Si occupa di comunicazione della matematica dal 2005 e in questo ambito ha pubblicato decine di articoli su Madd:Maths! (di cui è editor dal 2017), riviste di comunicazione della matematica e quotidiani, ha contribuito alla realizzazione del fumetto "Paperino e i ponti di Quackenberg" e ha un'intensa attività divulgativa con seminari presso scuole, Università e luoghi pubblici. Organizza gare matematiche dal 2009. Dal 2014 è il responsabile del PLS di matematica per l'Università di Parma. Ha da poco iniziato a pubblicare video su youtube a tema "fumetto Disney e matematica".


Giorgio Saracco

Giorgio Saracco è Assegnista di ricerca presso l'Università di Pavia, e da giugno ricoprirà analoga posizione presso la SISSA. Fa ricerca nel campo del Calcolo delle Variazioni, con particolare attenzione a problemi di tipo isoperimetrico ed ottimizzazione di forma. In questo contesto si inserisce la recente collaborazione con il fratello Alberto su questioni legate alla matematica delle elezioni.