

## Aperture a cambiamenti nel discorso: il caso di Dario

### Openings to changes in discourse: the case of Dario

Chiara Bonadiman\* e Elena Macchioni°

\*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Firenze – Italia

°Dipartimento di Matematica, Università di Pisa – Italia

✉ [chiara.bonadiman@unifi.it](mailto:chiara.bonadiman@unifi.it), [elena.macchioni@phd.unipi.it](mailto:elena.macchioni@phd.unipi.it)

**Sunto** / Usando la prospettiva comognitiva, l'articolo presenta la nozione di *profilo di apprendimento matematico* e mostra come possa essere identificato attraverso l'analisi di un'intervista. Inoltre, viene esplorata l'ipotesi della modificabilità di tale profilo, nel caso di identità di fallimento, tramite l'implementazione di un percorso di introduzione al pensiero algebrico, progettato per il recupero di difficoltà in matematica. Nello specifico, analizzeremo il caso di Dario, uno studente con una storia di persistenti difficoltà in matematica, frequentante la seconda classe della scuola secondaria di secondo grado.

**Parole chiave:** difficoltà; algebra; comognizione; routine; profilo di apprendimento matematico.

**Abstract** / This paper presents, in the commognitive framework, the construct of *mathematics learning profile* and illustrates how this profile can be identified through the analysis of an interview. Moreover, the hypothesis of the modifiability of this profile, in the case of a failure identity, is explored by implementing a sequence of activity to introduce algebraic thinking, designed to recover difficulties in mathematics. More specifically, we analyze the case of Dario, a tenth-grade student with a history of low achievement in mathematics.

**Keywords:** low achievement; algebra; commognition; routine; mathematics learning profile.

# 1 Introduzione

---

Da decenni la ricerca in didattica della matematica sta mostrando un crescente interesse per il tema delle difficoltà di apprendimento nel contesto scolastico (Heyd-Metzuyanim, 2013); un filone di ricerca si sta concentrando sulla scuola secondaria di secondo grado,<sup>1</sup> in particolare sull'apprendimento mediato dalla tecnologia (Baccaglioni-Frank, 2021). Inoltre, alcuni studi hanno messo in luce come sia necessario tenere presente non solo gli aspetti cognitivi ma anche quelli affettivi quando si parla di difficoltà in matematica (Zan & Di Martino, 2007). Trattare il tema delle difficoltà vuol dire dunque inserirsi in un quadro complesso, in cui è necessario esplicitare i termini a cui si fa riferimento. Basti pensare che in letteratura vi sono molteplici interpretazioni della sola locuzione *difficoltà in matematica*; come scrive Zan (2007):

«come spesso succede per nozioni apparentemente semplici e immediate è estremamente difficile riuscire a formulare una definizione esplicita di *difficoltà in matematica* in grado di coglierne tutti gli aspetti, che vengono invece immediatamente evocati dall'espressione stessa».

(Zan, 2007, p. 8)

Nello studio presentato in questo articolo, senza la pretesa di voler fornire in tale maniera una definizione onnicomprensiva, indicheremo con studenti con difficoltà quegli studenti che sono protagonisti di una storia di persistente fallimento o di basso rendimento in matematica.

## 1.1 Difficoltà in algebra

L'algebra gioca un ruolo delicato nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica, per questo molti studi si concentrano sui processi legati alla nascita del pensiero algebrico, per quanto questo costrutto ancora non abbia trovato una caratterizzazione comune (Kieran, 2022). Ad esempio, Sfard (2009) descrive l'algebra elementare come *meta-aritmetica*, ovvero come un'unione dell'aritmetica con il suo meta-discorso, ossia il discorso sulle relazioni e sui processi aritmetici. Seguendo questa prospettiva, appare evidente la complessità legata al passaggio dall'aritmetica all'algebra, e quindi al processo di nascita del pensiero algebrico. Da decenni la letteratura sottolinea come il tema risulti spinoso dal momento che coinvolge diversi e delicati aspetti fondamentali nell'attività matematica, a partire dall'idea di generalizzazione di relazioni numeriche per arrivare alla trattazione di espressioni simboliche e di relazioni tra le stesse (Kieran, 1992). In contesto scolastico, il senso del simbolo sembra essere messo in secondo piano per lasciare spazio a manipolazioni e memorizzazioni di procedure che spesso sono motivo di persistenti difficoltà per gli studenti (Arcavi, 1994). La recente ricerca ha messo in evidenza come, per molti studenti, l'algebra rimanga esclusivamente una manipolazione di simboli, risultando inaccessibile in particolare per studenti in difficoltà che spesso si rifiutano (o non riescono) di imparare a memoria e ripetere procedure a cui non assegnano alcun significato (Baccaglioni-Frank, 2021; Xin et al., 2022).

In questo articolo ci concentreremo sul ruolo che possono ricoprire le tecnologie nella formazione e nell'evoluzione dei processi legati al pensiero algebrico, in particolare per studenti con una storia di difficoltà alle spalle. Infatti, l'uso delle tecnologie è risultato incisivo sia per promuovere diverse modalità di interazione, sia per incentivare l'uso di diverse rappresentazioni di oggetti matematici (Lisarelli, 2023). Più nello specifico, nel contesto dell'algebra, l'utilizzo di ambienti digitali si è rivelato efficace per favorire la costruzione del senso di concetti algebrici complessi anche per studenti con difficoltà (Robotti, 2017).

## 1.2 Profili di apprendimento matematico

In letteratura sono, e sono stati, utilizzati diversi costrutti per trattare il tema delle difficoltà di apprendi-

---

1. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

mento in matematica, come *discalculia*, *arithmetical learning disabilities*, *mathematical learning disability/difficulty*. Lewis e Fisher (2016), in un'attenta revisione della letteratura, hanno messo in luce alcuni aspetti critici nell'uso di tali costrutti. Tra questi ricordiamo l'assenza di una definizione univocamente riconosciuta dalla comunità scientifica, la grande varietà di test diagnostici utilizzati nei differenti paesi, gli argomenti oggetto di questi test (in particolare il ruolo chiave ricoperto esclusivamente dall'aritmetica), ed anche l'assenza di un'indagine riguardo aspetti affettivi e socioculturali. Altri studi hanno sottolineato il ruolo che le "buone" pratiche didattiche hanno nel prevenire l'emergere di diffuse difficoltà in matematica (e sul lungo periodo anche di falsi positivi in discalculia), sollevando dunque alcune perplessità in merito agli attuali test diagnostici utilizzati. Commentano a tal proposito Baccaglioni-Frank e Bartolini Bussi (2015):

«Ma se si può ridurre il numero dei bambini positivi ai test per la discalculia in modo così importante soltanto con una didattica attenta, c'è da chiedersi che cosa ci dicano davvero le prove che si usano quotidianamente per la diagnosi, e più in generale che cosa sia la discalculia. Queste sono questioni ancora aperte in diversi ambiti della ricerca. Poiché il raggiungimento di risposte certe è ancora lontano, in ambito didattico sembra che possa essere più fruttuoso smettere di cercare di scoprire chi siano i discalculici, per etichettarli e concentrare invece l'attenzione sul perché alcuni studenti falliscano in certi ambiti (quali?) della matematica e ricercare che cosa è possibile fare per evitare tale fallimento».

(Baccaglioni-Frank & Bartolini Bussi, 2015, p. 180)

In linea con queste considerazioni si è sviluppato un filone di ricerca che si propone di identificare "profili di difficoltà" individuando gruppi di studenti con caratteristiche simili in differenti ambiti dell'apprendimento matematico. Gli studi portati avanti in questa direzione hanno consentito di sviluppare uno strumento (chiamato *MathPro Test*) per delineare profili multidimensionali di difficoltà, a partire da un modello teorico (il *modello dei quattro domini*) nato dalla revisione delle ricerche svolte in ambito cognitivo sul tema delle difficoltà (Baccaglioni-Frank et al., 2020). Tale test, pur indagando in dettaglio i singoli processi cognitivi, non considera esplicitamente le componenti appartenenti alla sfera affettiva ed all'atteggiamento, che sappiamo invece essere fondamentali nell'apprendimento matematico (Zan & Di Martino, 2007). Dunque, per promuovere una didattica inclusiva che parta dai bisogni educativi degli studenti, è necessario sviluppare uno strumento che consenta la caratterizzazione di profili di apprendimento matematico, includendo anche aspetti affettivi e socioculturali. L'analisi condotta con tale strumento permetterebbe anche di progettare materiali specifici per ciascun profilo.

### 1.3 Progetto DynaMat

Per contribuire alla costruzione di un'educazione inclusiva e di qualità nel campo della matematica il Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca ha finanziato il progetto triennale Prin DynaMat (2020BKWEXR), avviato nel 2022, che coinvolge studenti frequentanti il secondo anno di scuola secondaria di secondo grado. Il progetto si rivolge a studenti che dichiarano di avere una storia di difficoltà e fallimenti in matematica, o che vengono riconosciuti come tali dai loro insegnanti. Tra gli obiettivi che il progetto si prefigge di raggiungere vi è:

- La descrizione di *profili di apprendimento matematico* di studenti in difficoltà, che combinino aspetti cognitivi e affettivi.
- La progettazione e l'implementazione di attività nel campo dell'algebra che sfruttino le potenzialità offerte da ambienti digitali dinamici e interattivi.
- Lo studio dell'impatto che tali attività hanno sui profili precedentemente descritti.

In questo articolo presentiamo alcune riflessioni emerse dallo studio del caso di Dario,<sup>2</sup> uno studente

2. Per la tutela della privacy dello studente coinvolto, il nome è stato cambiato.

che ha partecipato al primo ciclo di sperimentazione del progetto. Discuteremo un'analisi del profilo di apprendimento matematico dello studente e alcuni episodi tratti dalla fase di implementazione delle attività, che ci sembrano identificare momenti di aperture a cambiamenti in tale profilo.

## 2 Quadro teorico

---

Abbiamo scelto di collocare la presente ricerca all'interno del quadro teorico della comognizione, la teoria socio-costruttivista elaborata da Sfard (2009). Il termine comognizione deriva dall'unione di comunicazione e cognizione, ed è stato coniato proprio per sottolineare l'assunzione di base della teoria, secondo cui processi comunicativi e cognitivi non sono processi distinti, bensì due facce della stessa medaglia.

Il *discorso* è un particolare tipo di comunicazione centrale nella teoria della comognizione. In quest'ottica, la *matematizzazione*, ovvero il "fare" matematica, consiste nella partecipazione al discorso matematico (il discorso riguardante gli oggetti matematici).

Sfard (2009) descrive i quattro aspetti caratteristici del discorso e in particolare del discorso matematico: le *parole specifiche e il loro uso* (per esempio equazione, o variabile), i *mediatori visivi* (oggetti visibili su cui opera il processo comunicativo), le *narrazioni approvate* (come enunciati di teoremi, o descrizioni di oggetti matematici) e le *routine* (pattern discorsivi, su cui ci soffermeremo con maggiori dettagli nel seguito). Gli oggetti matematici sono definiti come oggetti discorsivi, costituiti dal *significante* e dall'*insieme di tutte le sue realizzazioni*. Per esempio, una bilancia a due piatti in equilibrio e l'uguaglianza tra due espressioni algebriche possono essere due realizzazioni diverse della stessa equazione. L'esperto è in grado di compiere delle transizioni tra le diverse realizzazioni di uno stesso significante, ossia è in grado di costruire un discorso matematico sulla bilancia e di tradurlo in un discorso matematico sull'equazione. Dall'altra parte, per uno studente, una bilancia può non essere inizialmente una realizzazione di un'equazione, ma essere semplicemente un mediatore visivo.

Le realizzazioni ci consentono di distinguere *oggetti concreti* da *oggetti astratti*. L'uguaglianza tra due espressioni algebriche può dunque essere vista dagli studenti come un *oggetto concreto*, cioè come una stringa di simboli su cui compiere delle manipolazioni. In questo caso la scrittura non ha realizzazioni, non può essere "scritta in modi diversi" (in diversi contesti): è un oggetto concreto che rappresenta solo sé stesso e può essere manipolato esclusivamente in modi ben definiti. D'altra parte, la medesima uguaglianza tra espressioni algebriche può invece essere vista dagli studenti come (un significante di) un oggetto astratto. Questo accade quando, per uno studente specifico, l'equazione ha molte realizzazioni, ed in determinati contesti ci sono altre realizzazioni che possono essere considerate equivalenti a questa (Baccaglini-Frank, 2021).

Per comprendere cosa si intende con routine nel quadro della comognizione, è necessario fornire alcune definizioni preliminari. Da Lavie et al. (2019) *task situation* è una qualsiasi situazione in cui il soggetto sente di dover compiere delle azioni. Rientrano ovviamente in questa categoria tutte le situazioni in cui l'insegnante pone domande agli studenti in classe; non risulta sorprendente il fatto che studenti diversi agiscano in modo diverso davanti alla medesima *task situation* e che possa accadere che nessuna delle azioni effettuate corrisponda a quella che l'esperto aveva previsto. Uno studente, infatti, interpreta una data *task situation* e produce una routine definita come la coppia di task interpretata (sulla base di esperienze precedenti) e procedura (ciò che viene fatto, o detto, per risolvere la task interpretata). La routine messa in atto da un dato studente, dunque, è strettamente personale. Durante l'implementazione di una routine uno studente può sforzarsi, o meno, di dare senso alla *task situation* e ai processi che mette in atto. In particolare, si parla del *processo di attribuzione di senso* agli oggetti matematici esemplificandolo con la capacità di costruire una narrazione significativa su

tali oggetti (Baccaglini-Frank, 2021; Sfard, 2021). Il termine narrazione si riferisce a «una serie di enunciati, scritti o proferiti a voce, formulata come una descrizione di oggetti, di relazioni tra oggetti o di processi che si svolgono con o attraverso oggetti, e passibile di approvazione o rifiuto, cioè giudicabile vera o falsa» (Sfard, 2009, pp. 340–341) secondo le regole che guidano la produzione del discorso dalla comunità presa a riferimento. Una routine matematica può essere così collocata in un continuum alle cui estremità troviamo routine definite *rituali* e routine definite *esplorazioni*. Le prime sono implementazioni di procedure memorizzate, in cui chi le esegue non ha nessuna aspettativa rispetto al prodotto ottenuto ma è focalizzato esclusivamente sul processo, e sono spesso implementate per compiacere qualcuno (nel contesto classe, l'insegnante). Nelle esplorazioni l'attenzione è focalizzata sul prodotto: la domanda che le guida è *cosa voglio ottenere?* Secondo Baccaglini-Frank (2021) gli studenti che partecipano al discorso matematico in modo esplorativo tendono ad agire come risolutori di problemi, ingaggiandosi nella costruzione di narrazioni significative. In termini di *autonomia* gli studenti tendono cioè a prendere decisioni e proporre nuovi modi di agire. Recenti ricerche in didattica della matematica (Baccaglini-Frank, 2021; Cooper & Lavie, 2021) mostrano come studenti con una persistente storia di fallimento, incapaci di memorizzare procedure fini a sé stesse, o che semplicemente si rifiutano di farlo, possono essere ingaggiati nel discorso proponendo loro situazioni in cui possano dare significato agli oggetti matematici, ed avviare routine esplorative.

Istanze di attribuzione di senso possono essere rintracciate quando le routine sono vicine a quelle esplorative, e tra le caratteristiche che suggeriscono tale *processo di de-ritualizzazione*, definite da Lavie e colleghi (2019), vi sono: flessibilità, applicabilità e sostanzialità.<sup>3</sup> In particolare, si fa riferimento alla flessibilità quando diverse procedure possono essere utilizzate per affrontare la medesima *task situation*; all'applicabilità quando una specifica routine può essere messa in atto per rispondere a una varietà di *task situation* e infine alla sostanzialità quando l'attenzione del solutore è focalizzata sul prodotto, egli può dunque valutare autonomamente la propria performance senza dover necessariamente ricorrere al parere di altri (per esempio, l'insegnante). La presenza (o l'assenza) di questi aspetti può essere interpretata come un indicatore chiave del tentativo dello studente di dare senso alla *task situation*. Le routine, in quanto pattern discorsivi, sono inoltre il risultato di complessi processi discorsivi guidati da regole. Sfard (2009) distingue due macro-categorie di regole discorsive: le *regole a livello oggetto* e le *meta-regole*. Le prime sono «narrazioni a proposito delle regolarità riscontrabili nel comportamento degli oggetti del discorso» (p. 238) e possono dunque anche avere la forma di narrazioni approvate su di essi come, per esempio, l'affermazione *in un triangolo isoscele gli angoli adiacenti alla base sono congruenti*. Le meta-regole invece riguardano le azioni dei partecipanti al discorso ed intervengono «quando ci occupiamo dell'attività ordinata di formulazione e convalida di queste regole a livello oggetto» (p. 237). L'evoluzione del discorso in matematica prevede cioè un'evoluzione anche delle meta-regole, che stabiliscono cosa sia accettabile in un dato contesto. Per esempio, nel passaggio dai numeri naturali ai numeri razionali non solo alcune regole di livello oggetto cessano di essere vere (*il prodotto di due numeri è sempre maggiore di ciascuno di essi*), ma è anche necessario un cambio nelle meta-regole che stabiliscono che cosa sia un numero (non più limitato a quantità che possono essere contate) (Cooper & Lavie, 2021). Nel complesso sistema delle regole che guidano il discorso matematico, vi sono tuttavia anche delle meta-regole che potrebbero non essere modificate durante tutto il percorso di apprendimento dello studente; ci riferiamo, per esempio, alle regole che codificano le norme socio-culturali ed i *beliefs* delle persone (Sfard, 2001). Queste specifiche meta-regole, come per esempio *in matematica è necessario avere una buona memoria*, influenzano fortemente le identità dei partecipanti al discorso. Per esempio, la meta-regola *in matematica bisogna essere molto veloci* unita alla percezione di uno studente di essere molto lento, potrebbe contribuire a consolidare un'identità di fallimento (Heyd-Metzuyanin, 2011).

3. Traduzione delle autrici dei termini *flexibility*, *applicability* e *substantiability*.

La teoria della comognizione fornisce strumenti per analizzare anche aspetti affettivi, attraverso il costrutto di *identità* (in questo caso parleremo di *individuazione*). L'identità è definita come una collezione di storie, costruite attraverso l'attività di *soggettivazione* (Sfard & Prusak, 2005). Si parla di soggettivazione quando il focus del discorso non è più sugli oggetti e sulle loro azioni ma sui partecipanti alla comunicazione. Le istanze di soggettivazione possono essere classificate in tre livelli principali, a seconda di quanto sia generale il messaggio che veicolano. Il primo livello riguarda una specifica performance (ad esempio, *non si ricordarmi ricordo come trovare gli zeri di questa funzione*), il secondo livello riguarda la performance di una routine (ad esempio, *non salso risolvere le equazioni*), mentre il terzo livello riguarda una proprietà di una persona (ad esempio, *non è/sono bravo in matematica*) (Heyd-Metzuyanin & Sfard, 2012).

Sfard e Prusak (2005) hanno definito il concetto di identità in modo operativo, come una collezione di storie che sono *reificate*, *approvate* e *significative*. Una storia ha carattere reificato quando attribuisce proprietà stabili ad una persona. Questo può essere ottenuto con istanze di terzo livello di soggettivazione, ad esempio *non capisce* (indicheremo queste istanze come individuazione diretta), con istanze di primo o secondo livello di soggettivazione molto ricorrenti, ad esempio *non so risolvere questa equazione... non lo so ... forse, no non so*, o con istanze di terzo livello seguite da avverbi come *sempre* o *mai*, ad esempio *non ho mai capito come risolvere le equazioni* (indicheremo questi ultimi due casi come individuazione indiretta). Una storia è approvata quando colui che ha costruito la narrazione vi riconosce un quadro rappresentativo della realtà. Una storia è significativa se ogni suo cambiamento non lascia indifferente colui che ha costruito l'identità.

Sfard e Prusak (2005) hanno inoltre caratterizzato le identità tramite una terna dove A è la persona di cui è costruita l'identità, B è il costruttore di identità e C è colui che ascolta. Le storie in cui B coincide con A sono dette identità di prima persona, e sono quelle di cui ci occuperemo in questa ricerca. Utilizzeremo semplicemente il termine *identità* per indicare le identità di prima persona, ossia le storie che si riferiscono alla situazione attuale, così come è percepita dal costruttore di identità. Queste storie sono pertanto raccontate generalmente al tempo presente, come asserzioni. Nel seguito ci concentreremo sul carattere di successo o di fallimento di tali identità, costruite attraverso individuazione diretta e indiretta. Analizzare la matematizzazione e la soggettivazione degli studenti consente dunque di rintracciare elementi inerenti aspetti cognitivi ed affettivi dei profili di apprendimento matematico oggetto della presente ricerca.

## 2.1 Formulazione delle domande di ricerca

Alla luce di questa lente teorica, gli obiettivi di ricerca possono essere riformulati come domande di ricerca come segue:

1. a. Quali sono le caratteristiche della matematizzazione di Dario all'inizio del percorso?
- b. Quali sono le caratteristiche dell'individuazione di Dario all'inizio del percorso?
- c. Quali sono le meta-regole che governano il discorso di Dario all'inizio del percorso?
2. a. Cambia e come cambia, durante le attività proposte, la matematizzazione di Dario?
- b. Cambia e come cambia, durante le attività proposte, l'individuazione di Dario?
- c. Cambiano e come cambiano, durante le attività proposte, le meta-regole che governano il discorso di Dario?

## 3 Metodologia

---

In questo paragrafo viene descritto il contesto generale in cui si muove questa ricerca, a partire dal progetto DynaMat. Sono quindi illustrate l'intervista sottoposta agli studenti a inizio del percorso e le



attività progettate all'interno di alcuni ambienti digitali. In conclusione, si presenta lo schema analitico implementato per l'analisi dei dati.

### 3.1 Partecipanti e contesto della ricerca

La sperimentazione a cui ha partecipato Dario, la prima per il progetto DynaMat, si è svolta nell'autunno del 2022 e ha coinvolto dodici studenti di seconda superiore (14-15 anni), provenienti da istituti di tipo diverso (sia dal liceo che da istituti professionali). Tutti i partecipanti sono studenti con una storia di persistente fallimento in matematica riconosciuta da loro e dai loro insegnanti. Gli studenti, invitati dai propri docenti, hanno aderito come volontari, recandosi presso il centro di ricerca CARME (<https://www.carme.center/>) nel pomeriggio (al di fuori dell'orario scolastico). Ciascuno ha sostenuto un'intervista individuale iniziale e ha poi partecipato a cinque incontri di due ore, svolti, a seconda delle loro disponibilità, a coppie o individualmente (come nel caso di Dario). Sia le interviste sia la sequenza delle attività sono state condotte da ricercatori che gli studenti non avevano mai incontrato prima, in una stanza silenziosa con dispositivi di registrazione video e audio non invasivi.

Il processo di analisi dei dati raccolti è ancora in una fase preliminare e, fino ad ora, abbiamo affrontato solamente alcuni casi studio (circa il 25% dei partecipanti). Inizialmente il caso di Dario ha colpito la nostra attenzione per la sua partecipazione, durante l'intervista iniziale, caratterizzata da routine estremamente rituali e l'identità di fallimento chiaramente emergente. Inoltre, dalle prime analisi delle attività svolte da questo studente non sembravano emergere risultati particolarmente incoraggianti, tuttavia, la combinazione di tali analisi con l'individuazione del profilo di apprendimento matematico in entrata ci ha consentito di osservare interessanti aperture di Dario verso la partecipazione all'attività matematica. In particolare, abbiamo potuto osservare come il design delle attività abbia permesso a Dario di sfruttare i "punti di forza" individuati nel suo profilo, dandogli dunque la possibilità di avviare una diversa partecipazione al discorso matematico.

### 3.2 Intervista iniziale

L'intervista iniziale è stata costruita con l'obiettivo di ottenere informazioni sia sulle identità di prima persona degli studenti, sia sulla loro matematizzazione. Per questo motivo l'intervista è stata organizzata in due parti: la prima consisteva in quattro domande incentrate sul rapporto dello studente con la matematica, mentre la seconda prevedeva delle *task situation* inerenti all'ambito delle equazioni e delle funzioni. Durante questa intervista iniziale la ricercatrice leggeva ad alta voce le consegne, mostrandole contemporaneamente su uno schermo, stando in piedi dietro lo studente, rimanendo così fuori dal campo visivo dell'intervistato, per cercare di ridurre la sua influenza sull'interpretazione delle *task situation*. Per lo stesso motivo non ha fornito riscontro sulla correttezza o meno delle procedure attuate.

### 3.3 Progettazione delle attività

Le attività sono state progettate con l'obiettivo di promuovere il pensiero algebrico, con particolare focus sul tema delle equazioni e sugli aspetti che ad esse si legano, quali l'idea di incognita, di variabile, del segno uguale, di soluzione di un'equazione e del primo principio di equivalenza per le equazioni. Abbiamo progettato degli artefatti dinamici e interattivi all'interno della piattaforma online Desmos, elaborandoli a partire dal modello bilancia, una metafora già utilizzata in letteratura per parlare di equazioni lineari, che consente di trattare quantità note e non note, relazioni tra esse (maggiore, minore, uguale) e il segno uguale come relazione tra quantità e non come operatore (Otten et al., 2019). Il nostro obiettivo è promuovere la nascita e l'espansione di un discorso legato all'ambiente bilancia che possa essere un punto di partenza per un discorso algebrico.

Il lavoro di design ha portato all'elaborazione di due diverse tipologie di artefatto-bilancia. Il primo

coinvolge una bilancia a due piatti e un riquadro blu dove gli studenti hanno a loro disposizione pesi di forme e colori diversi, alcuni dei quali con valore noto, corrispondente al numero inserito all'interno, altri con valore non noto (Figura 1). La bilancia in questione assume o meno una posizione di equilibrio in relazione agli oggetti che vengono posti sui due piatti. L'utilizzatore ha la possibilità di agire trascinando gli oggetti sulla bilancia o al di fuori di essa, ricevendo un feedback immediato in risposta alla sua azione. Ad esempio, in Figura 1 possiamo vedere sulla sinistra una bilancia in equilibrio e sulla destra una bilancia non in equilibrio a seguito del sollevamento di un peso dal piatto di sinistra. Da esperti vediamo questa bilancia come realizzazione della relazione di uguaglianza o disuguaglianza tra somme di valori noti ed eventualmente non noti. Inoltre, il peso di valore non noto, è una realizzazione dell'oggetto matematico incognita, dove con incognita intendiamo un valore specifico e non noto che rende uguali due espressioni algebriche.

Le *task situation* proposte in relazione a questo artefatto sono state formulate come segue:

La bilancia che vedi è in equilibrio. Se possibile, aggiungi/togli 3 oggetti tra quelli a disposizione in modo che alla fine sia ancora in equilibrio. Se non è possibile, spiega perché.

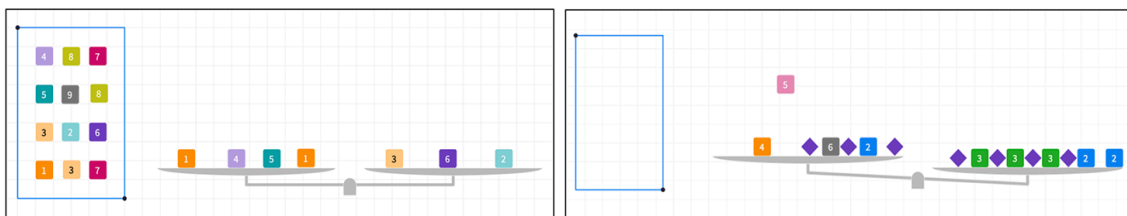


Figura 1. Il primo artefatto-bilancia.

La ricercatrice, durante l'attività, è intervenuta per chiedere di motivare le proprie scelte e azioni, e anche per modificare la *task situation* (p.e. variando il numero di oggetti da aggiungere/togliere, chiedendo di scoprire il valore del peso non noto quando presente). Queste *task situation* sono state progettate con l'obiettivo di promuovere la nascita di narrazioni significative sull'artefatto bilancia, che possono poi essere messe in relazione con le procedure risolutive delle equazioni (in particolare con il primo principio di equivalenza per le equazioni).

Il secondo artefatto (Figura 2) è costituito da due bilance affiancate. A destra è presente quella che abbiamo chiamato "bilancia-test", una bilancia bloccata con un lucchetto, sulle cui braccia si trovano dei pesi noti colorati e dei pesi non noti, di colore bianco. La bilancia-test è corredata da un campo di inserimento, in questo caso denominato "peso del quadrato", dove l'utilizzatore può inserire il valore numerico che vuole assegnare al peso non noto (in questo caso il quadrato). Con il pulsante "Proviamo/Riproviamo" la bilancia-test si muove pendendo a destra o a sinistra, oppure assumendo la posizione di equilibrio, in base al peso assegnato dall'utilizzatore ed al posto del lucchetto compare una X rossa (disequilibrio) oppure una spunta verde (equilibrio). A sinistra è presente quella che abbiamo chiamato "bilancia fissa": l'immagine di una bilancia in equilibrio, con gli stessi pesi di quella di destra, ed i cui pesi non noti sono colorati. L'utilizzatore può interagire con questa bilancia fissa scrivendo sopra l'immagine. La *task situation* è riportata in alto a sinistra e corrisponde alla richiesta di trovare il valore del peso non noto che consente alla bilancia di stare in equilibrio.



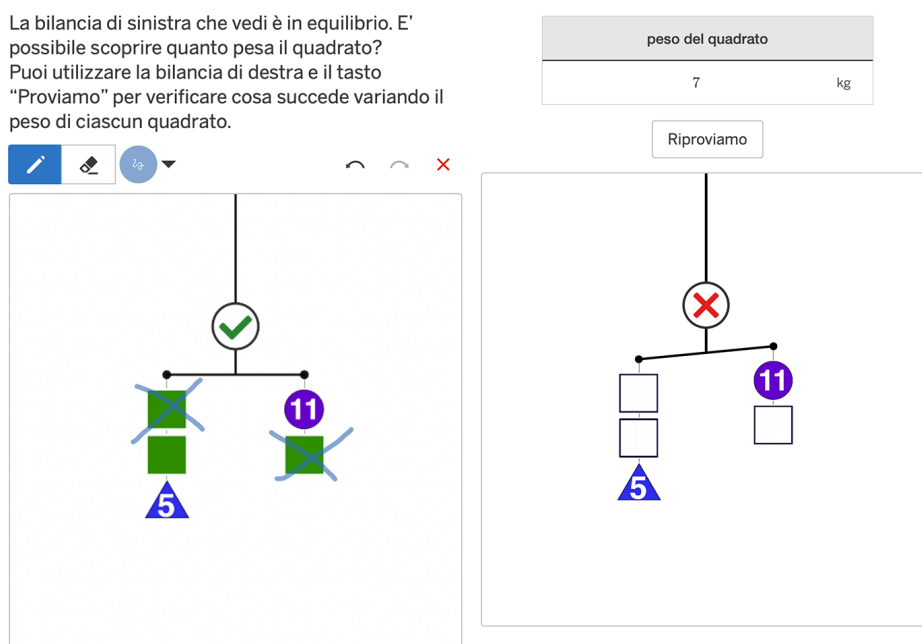


Figura 2. Il secondo artefatto-bilancia.

L'accostamento di queste due bilance permette di coinvolgere simultaneamente realizzazioni di oggetti matematici diversi. Nello specifico, la bilancia di sinistra identifica la condizione di uguaglianza tra due espressioni algebriche  $e$ , e quindi, per l'esperto può essere la realizzazione di un'equazione, dove il peso non noto è una possibile realizzazione di incognita, avendo un valore specifico ma appunto non noto. Nella bilancia di destra, invece, il peso non noto è una possibile realizzazione di variabile (assume un valore che cambia a seconda delle scelte dell'utilizzatore); in questo modo, la bilancia e la sua posizione realizzano la relazione tra le due espressioni algebriche in funzione del valore scelto.

### 3.4 Schema analitico

Di seguito riportiamo lo schema analitico che è stato elaborato in accordo con i costrutti presentati nel quadro teorico. Esso è stato sviluppato a partire da alcune domande guida in relazione agli aspetti che ci interessava analizzare, per ognuno dei quali abbiamo individuato anche dei possibili indicatori.

Aspetti da analizzare	Domande guida	Indicatori
Tipo di identità sviluppata (di successo o di fallimento)	<p>Quali espressioni di individuazione sono utilizzate nell'intervista iniziale?</p> <p>E durante lo svolgimento delle attività?</p>	<p>Espressioni di terzo livello di soggettivazione.</p> <p>Espressioni di secondo livello di soggettivazione seguite da avverbi come "sempre" e "mai".</p> <p>Espressioni di primo livello e secondo livello di soggettivazione molto ricorrenti.</p> <p>Uso di tempi presenti.</p>

Aspetti da analizzare	Domande guida	Indicatori
Oggetti matematici	<p>Il discorso è incentrato su oggetti e loro proprietà o su simboli non realizzati e azioni su essi?</p> <p>Sono emerse realizzazioni dello stesso significante?</p> <p>Ci sono transizioni tra diverse realizzazioni?</p>	<p>Significanti menzionati: riguardo il risultato di una routine o riguardo step procedurali memorizzati.</p> <p>Realizzazioni diverse di uno stesso significante e transizioni tra realizzazioni.</p>
Task interpretata (dallo studente)	<p>La procedura implementata a quale <i>task situation</i> potrebbe rispondere (secondo l'esperto)?</p>	<p>Riformulazioni esplicite della <i>task situation</i>.</p> <p>Riferimento a procedure memorizzate.</p>
Processi di de-ritualizzazione	<p>Quali caratteristiche ha la routine eseguita? È esclusivamente manipolativa e fine a sé stessa oppure è orientata alla costruzione di una narrazione?</p>	<p>Sono utilizzate procedure diverse per affrontare la stessa <i>task situation</i> (flessibilità).</p> <p>La procedura svolta per una specifica <i>task situation</i> è utilizzabile in un'altra <i>task situation</i> (applicabilità).</p> <p>Alla fine della procedura il prodotto è utilizzato per tornare alla <i>task situation</i>; c'è un passaggio di attenzione dal processo al prodotto ottenuto (sostanzialità).</p>
Autonomia	<p>Sono prese delle decisioni indipendenti?</p> <p>Quali?</p>	<p>Proposte (anche nuove) per la risoluzione.</p> <p>Riferimenti alla memoria o a procedure memorizzate in precedenza.</p> <p>Tentativi di costruire narrazioni e non solo di ripetere procedure memorizzate.</p> <p>Come sono raccontate le procedure (in prima persona o in terza, prevalgono verbi passivi, utilizzo del verbo "dovere" o del verbo "potere").</p>
Meta-regole	<p>Cosa può essere formulato/fatto in un particolare dominio matematico?</p> <p>Quali meta-regole descrittive sono esplicitamente formulate dallo studente? Quali possono essere inferite dal suo discorso?</p>	<p>Forme impersonali e in terza persona (ad esempio, "in matematica si usa la calcolatrice").</p> <p>Pattern discorsivi ricorrenti messi in atto dallo studente.</p>

Tabella 1. Schema analitico.

## 4 Analisi del profilo in ingresso

Dario (D.) durante l'intervista iniziale costruisce un'identità di fallimento, come emerge dal seguente estratto (l. indica l'intervistatrice):<sup>4</sup>

1. l.: «C'è una cosa che ti piace della matematica?»
2. D.: «[sospira] Mmm la matematica fino alle elementari mi garbava, più che altro per i calcoli. Mmm insomma ero bravo, poi vabbè negli anni poi è diventato [sorride] un problema e tutto... [...] Fino alle elementari mi garbava però, cioè cercavo di farne anche a meno sinceramente. Quel poco che sapevo mi bastava, ecco».
3. l.: «C'è invece una cosa che proprio non ti piace?»
4. D.: «La geometria [...] La geometria in generale, anche le formule, tutte quelle robe là... mi sembrano complicate sinceramente per come sono io».
5. l.: «Ti senti bravo in matematica?»
6. D.: «No, no, no. Ora come ora no. [...] Sono una frana in matematica».

L'identità di fallimento è costruita attraverso un'individuazione diretta (interventi 2 e 4, ma anche 6). Nell'intervento 4 vi è anche una soggettivazione di terzo livello, riconoscibile dall'uso del verbo essere: Dario sembra riconoscere un'incompatibilità tra ciò che secondo lui caratterizza una parte della matematica (ossia le formule) e la sua persona («mi sembrano complicate per come sono io»). Vi è però un'eccezione, un dominio in cui Dario si riconosce competente, che è quello relativo al calcolo (intervento 2: «ero bravo»).

Più avanti l'identità di fallimento è confermata anche dall'individuazione indiretta, che si sviluppa mentre Dario affronta le *task situation* proposte. Nell'estratto seguente, mentre risolve la *task situation* relativa alla risoluzione di  $13 - a = 13 + 11$ , troviamo infatti una soggettivazione ricorrente di primo livello (sottolineato nell'estratto successivo):

7. l.: «Hai mai visto scritto così?» [l'intervistatrice mostra l'equazione  $13 - a = 13 + 11$ ]
8. D.: «Mmm vabbè una somma ed una sottrazione, quindi mmm a penso che sia il risul[tato], cioè...non lo so. Penso che sia il risultato, penso. Quindi boh... Cioè devo calcolarlo, o ...? [...] Vista così mi verrebbe in mente di fare 13 a uguale 13 più 11, però... [ride imbarazzato]. 13 più 11 mi sembra fa lo stesso 24, 13 meno a mmm... non lo so, forse sposto il risultato dall'altra parte con la a [...] Si boh, penso insomma... eh...eeeh... Non sto ragionando, ma sto cercando insomma di pensare ad... un metodo del tipo, boh insomma se sposto lo stesso la a di là, 13 più 11 fa 24, meno 13... no non mi tornerebbe. Mmm, boh non lo so».
9. l.: «La domanda è se 13 meno a uguale 13 più 11, ha delle soluzioni. Se ci sono se sai trovarle, o eventualmente spiegare perché secondo te non ci possono essere».
10. D.: «[ride] Mmm... Un calcolo del genere, boh, cioè... non penso proprio niente [ride]. È quello il problema... eh... di sicuro 13 meno a, cioè non saprei come spiegarlo, cioè... o è un monomio, quindi si fa 13 a, però... 13 più 11 mmm... cioè 13 meno a è uguale a 13 più 11. Bisogna scoprire che cosa è a. [...] Eh secondo me la a è il risultato di 13 più 11, secondo me è... quindi... penso, poi...»
11. l.: «Ok, quindi ti verrebbe da dire che questa cosa ha delle soluzioni?»
12. D.: «Cioè... mmm... eh si, penso che sia... vabbè, a parte 13 più 11 che fa 24... secon-

4. L'intervistatrice è la ricercatrice E. Macchioni.

do me andrebbe fatto, cioè... [...] Sto pensando ad un calcolo [...] Eh non mi viene in mente nessun calcolo... eh... mm... che faccio 24 eh... secondo me, 24 più 13... però, cioè 24 più 13 che fa 37, quindi se si fa 13 meno 37 dà 24. Penso è... [...] lo penso che andrebbe fatto così, poi non lo so. Posso sapere se ho fatto bene, o no?»

In questo estratto l'individuazione si intreccia fortemente con la matematizzazione, ed il continuo riferimento ad un «calcolo» (interventi 8 e 10, ma anche 12) nel discorso matematico può essere collegato con le meta-regole discorsive sviluppate da Dario. In particolare, possiamo inferire una meta-regola discorsiva sulla partecipazione al discorso matematico simile a *per partecipare al discorso matematico è necessario svolgere dei calcoli*. Le meta-regole sono sviluppate a partire dalle interazioni sociali e dalle esperienze passate, possiamo dunque ipotizzare anche che la persistenza di questa specifica meta-regola sia legata a quella che Dario riconosce come una (delle poche, se non uniche) esperienze di successo sperimentate in matematica. Abbiamo già infatti osservato come fin da subito il dominio del calcolo sembra sfuggire alla sua identità di fallimento (intervento 2), ma ne troviamo traccia anche in altri passaggi dell'intervista (come «Nella vita reale, cioè nella vita fuori della scuola, se devo fare i calcoli, del tipo sono al supermercato, compro qualcosa e devo fare il resto e tutto, riesco»). In altre parole, senza padroneggiare le routine legate alle equazioni – non solo il *come* ma anche il *quando* applicare queste routine (Sfard, 2009) –, Dario è costretto a provare ad impiegare al meglio le sole routine con cui sente di riuscire a costruire narrazioni significative, ovvero quelle legate al calcolo.

Non è immediato capire quale sia la task interpretata da Dario tuttavia, alcune descrizioni verbali come «bisogna scoprire cosa è  $a$ » e «la  $a$  è il risultato di 13 più 11» (intervento 10), ci portano ad inferire non solo che non sia coerente con la *task situation* proposta dell'esperto, ma anche che questa non coerenza sia dovuta ad una non attribuzione di valore relazionale al simbolo uguale. Nonostante la *task situation* sia in contesto algebrico, ogni riferimento nel discorso di Dario è legato esclusivamente al contesto aritmetico, facendoci ipotizzare che il delicato cambio di meta-regole previsto nel passaggio dall'aritmetica all'algebra non sia avvenuto.

Il discorso di Dario sembra inoltre essere puramente ritualistico, concentrato sulle procedure (in questo caso calcoli), senza riferirsi in alcun modo al prodotto che si desidera ottenere al termine della procedura. Gli oggetti del discorso sono principalmente numeri e lettere (intervento 10), ma non c'è alcun riferimento ad altre realizzazioni di questi oggetti (concreti) che rimangono dunque simboli non realizzati. Alcune esplicite dichiarazioni come «non sto ragionando, sto cercando di pensare ad un metodo» (intervento 8), o «non mi viene in mente» (intervento 12) ci portano ad ipotizzare che anche la memoria giochi un ruolo chiave nelle meta-regole discorsive sviluppate da Dario. Questo può essere messo in relazione con il fatto che molte routine (come quelle relative al calcolo letterale) non siano mai state de-ritualizzate, avendo infatti scarsa applicabilità. Per Dario, ogni *task situation* può essere vista come un caso isolato in cui è necessario ricordare come operare, e se questo non avviene non è possibile proseguire. Per esempio, nell'intervento 10 affermazioni quali «13 meno  $a$ , cioè non saprei come spiegarlo, cioè... o è un monomio, quindi si fa  $13a$ , però...» o anche «forse spostato il risultato dall'altra parte con la  $a$ » sembrano poter trovare riscontro solo in procedure memorizzate. Osserviamo inoltre che, poiché Dario interpreta la *task situation* come l'esecuzione di una sequenza memorizzata, non vi è spazio per prendere decisioni. La strada da intraprendere è, in larga misura, già stabilita («devo calcolarlo?»), e non vi è alcun tentativo di costruzione di narrazioni significative. Questa interpretazione trova conferma anche nel fatto che Dario non prova nemmeno a controllare l'adeguatezza della procedura (nuovamente l'attenzione è sul processo, non sul prodotto). Dario sembra dunque non avere strumenti per stabilire la validità delle sue affermazioni (indice di scarsa sostanzialità). Infatti, conclude la risoluzione della *task situation* con «posso sapere se ho fatto bene?» (intervento 12). Possiamo dunque inferire un'altra meta-regola discorsiva che guida la matematizzazione di Dario, simile a: *per partecipare al discorso matematico è necessario ricordare molte cose a memoria. Quando questo non accade non ci sono alternative per procedere*. Tale meta-regola trova riscontro anche in altri momenti

dell'intervista, in cui la procedura implementata viene interrotta: in una *task situation* successiva, nel calcolare cinque alla seconda Dario afferma «Di sicuro deve essere... no boh... eh... però non mi ricordo se era moltiplicato per 2, o per lo stesso numeratore... cioè non me le ricordo, aspetta... cioè se era 5 alla seconda era 5 per 5, o 5 per 2» o ancora nel calcolare tre per zero «Non... cioè... come ho detto, non so se.. o torna 0 per 3 uguale 3, però con lo zero non... ad esempio con il diviso appunto, se fosse 0 per 3 farebbe sempre 0. Perché non si potrebbe dividere mi ricordo. Però non mi ricordo se questa regola era anche con il per... mmm... ». Questi dubbi bloccano Dario che sembra incapace di procedere oltre, nonostante gli sia anche stata messa esplicitamente a disposizione una calcolatrice: l'unica possibilità sembra essere fermarsi e guardare l'intervistatrice, attendendo da lei una risposta. Avendo analizzato separatamente la matematizzazione e l'individuazione di Dario si possono mettere ulteriormente in luce alcuni elementi chiave che riguardano l'interazione di queste due dimensioni, mostrandone una visione più olistica (Figura 3). Il ciclo in grigio, sulla sinistra, rappresenta ciò che possiamo inferire sia accaduto in passato. Il ciclo in blu, più grande, rappresenta invece il profilo di apprendimento matematico di Dario alla luce dell'intervista iniziale.

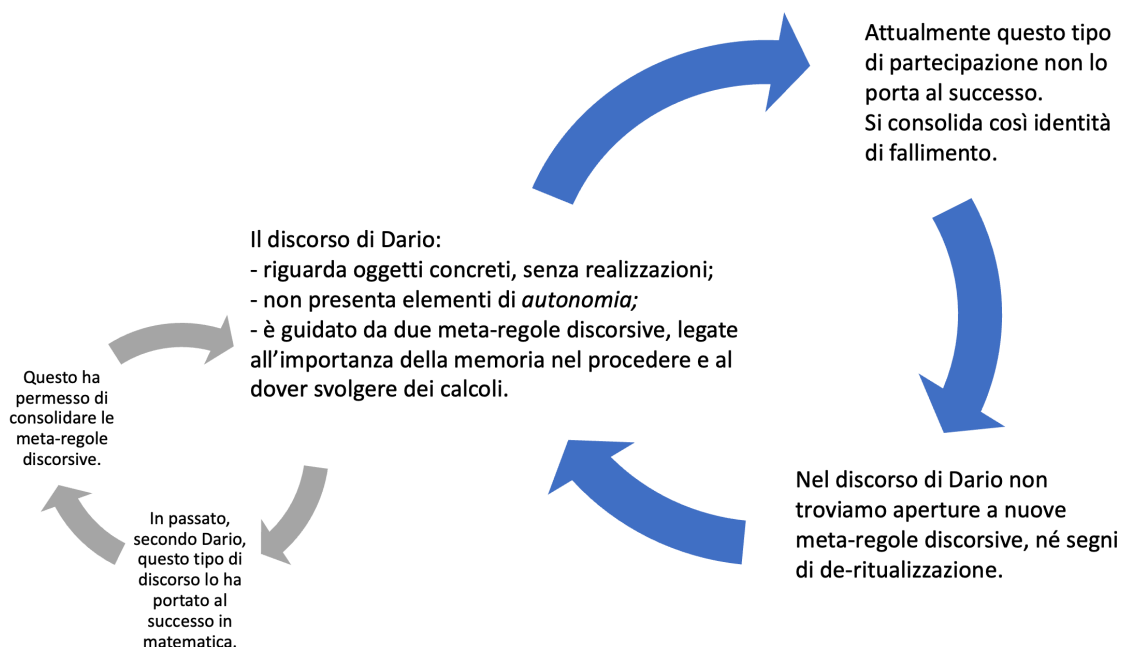


Figura 3. Profilo di apprendimento matematico di Dario.

Al cuore di questo doppio ciclo troviamo il discorso matematico di Dario, un discorso che riguarda oggetti concreti, senza realizzazioni, caratterizzato da routine estremamente rituali. Tale discorso è guidato da (almeno) due meta-regole discorsive riguardanti il ruolo centrale rivestito dal calcolo e dalla memoria. In relazione a ciò osserviamo nel discorso di Dario una scarsa autonomia: non vi è spazio per prendere decisioni su come procedere, tutto è demandato alla memoria.

Dalle parole di Dario possiamo inferire che almeno una delle due meta-regole discorsive (ci riferiamo in dettaglio a quella relativa al calcolo) sia stata sviluppata e consolidata già durante i primi anni di scuola, anni in cui Dario racconta di aver avuto esperienze di successo. Attualmente però questo tipo di discorso non lo porta al successo in matematica, anzi, e questi risultati consolidano la sua identità di fallimento. Dario dichiara di essere «una frana» e che parte della matematica è troppo complicata «per come sono io», e queste affermazioni sembrano risuonare come una dichiarazione di resa, un desistere da ogni tentativo. Nel suo discorso non troviamo dunque nessuna apertura a nuove meta-regole, né elementi di de-ritualizzazione, che potrebbero invece (a nostro avviso) portarlo a speri-

mentare nuovamente esperienze di successo.

Alla luce delle analisi svolte è possibile rispondere alla prima domanda di ricerca. Possiamo affermare che Dario ha sviluppato un'identità di fallimento in matematica. Inoltre, il suo discorso è caratterizzato dalla manipolazione di *simboli irrealizzati*, non ci sono riferimenti a realizzazioni degli oggetti manipolati, né a transizioni tra realizzazioni. Le analisi hanno inoltre mostrato come la matematizzazione di Dario sia guidata dalle seguenti meta-regole discorsive:

- per partecipare al discorso matematico è necessario svolgere dei calcoli;
- per partecipare al discorso matematico è necessario ricordare molte cose a memoria: quando questo non accade non ci sono alternative per procedere.

## 5 Analisi degli estratti delle attività

All'inizio del percorso Dario lavora con le bilance a due piatti. Le prime attività riguardano bilance con soli pesi noti e le richieste che gli vengono fatte consistono nell'aggiungere o togliere un numero specifico di oggetti dai piatti in modo che la bilancia si mantenga in equilibrio. In queste prime *task situation*, in cui il calcolo numerico gioca un ruolo rilevante, Dario agisce in maniera autonoma, accompagnando le procedure attuate con una narrazione volta a giustificare le sue azioni («Perché appunto qui mi sembra che era il 7, quindi ho fatto togli il 7, 5 e 2 fa 7 e li ho tolti tutti e due appunto ed era in equilibrio, togliendo tre numeri, tre oggetti»). Si osserva come, il dover svolgere dei calcoli non blocchi Dario, come è accaduto invece per altri studenti che hanno partecipato alla sperimentazione, bensì sembra coinvolgerlo e stimolarlo. Sembrano dunque essere stati raggiunti gli obiettivi di queste prime attività, ovvero prendere familiarità con l'ambiente digitale e costruire routine costituite dalla *task situation*:

Aggiungi/togli degli oggetti in modo che la bilancia sia ancora in equilibrio

e dalla procedura aggiungere/togliere lo stesso peso a destra e a sinistra, anche sommando più pesi, per mantenere la bilancia in equilibrio.

Quando Dario si trova di fronte alla prima bilancia con pesi non noti (Figura 4) il suo discorso cambia.

La bilancia che vedi è in equilibrio. Se possibile, aggiungi 3 oggetti tra quelli a disposizione in modo che alla fine sia ancora in equilibrio. Se non è possibile, spiega perché.

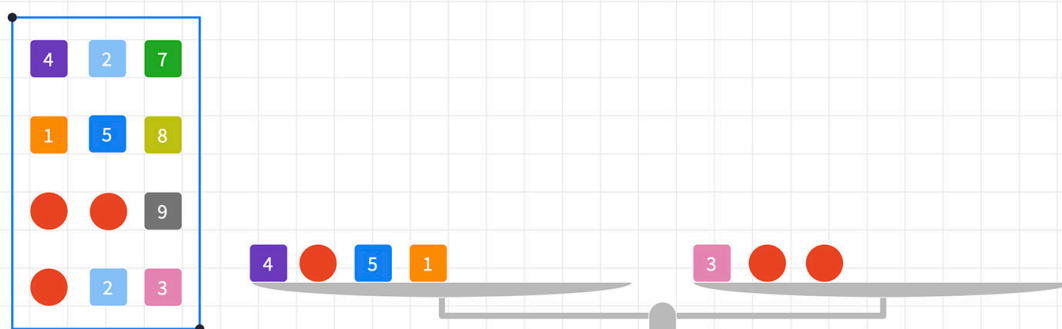


Figura 4. Prima *task situation* con pesi non noti.

13. D.: «Allora... mmm... aggiungi tre oggetti. A parte che andrebbe capito le palline che peso hanno».
14. T.: «Ok. Quindi vorresti sapere che peso hanno queste palline rosse?»
15. D.: «Sì allora... [...] c'è non lo so, provare a capire perché qui c'è un 3 e due palline, cioè soprattutto capire cosa fanno queste due palline».

Come si nota dall'estratto (in cui T. indica la tutor),<sup>5</sup> subito dopo aver letto la richiesta (aggiungere 3 oggetti tra quelli a disposizione in modo che la bilancia alla fine sia in equilibrio), Dario afferma «Andrebbe capito le palline che peso hanno» (intervento 13, ma anche 15). In questo caso la task interpretata da Dario è costituita da due parti, dove la prima è funzionale alla seconda: inizialmente scoprire il valore dei pesi non noti e solo in un secondo momento aggiungere gli oggetti (come richiesto dalla *task situation*). Dopo qualche minuto in cui Dario rimane in silenzio senza compiere azioni, la tutor cerca di ritornare alla richiesta iniziale. A questo punto, anche se Dario è ancora concentrato sulla necessità di scoprire il peso della pallina rossa, aggiunge degli oggetti utilizzando la strategia già messa in atto precedentemente e risponde dunque alla richiesta. Dopo che Dario ha esplorato diverse procedure per rispondere alla *task situation*, la tutor ritorna sull'esigenza dello studente di scoprire il valore del peso non noto. Alla richiesta di una possibile strategia per determinare tale peso, Dario decide di provare a sostituire dei valori numerici (prima dieci nell'intervento 16, poi sei nell'intervento 21).

16. D.: «Boh io ho provato a fare, che ne so, forse è 10, 10, che ne so, una pallina vale 10... [...] 10 e 10, 23... 10, 15, 20...»
17. T.: «Ok, quindi assegnando valore 20, 10 scusami, al peso della pallina rossa, cosa succederebbe?»
18. D.: «Cioè non tornerebbe in equilibrio».
19. T.: «Ok».
20. D.: «Perché da una parte farebbe 20 e dall'altra 23».  
[...]
21. D.: «Oppure provando a fare 6 e 6, 12 più 3, 15 però pur sempre non tornerebbe perché qui farebbe 16, cioè...»

Pur riflettendo sulla relazione tra i due piatti (per esempio negli interventi 18 e 21), Dario non procede con ulteriori tentativi, tenendo in considerazione quelli già fatti, che potrebbero portarlo alla soluzione del suo problema.

Nell'estratto successivo, poco dopo quello appena presentato, Dario si trova di fronte alla *task situation* in Figura 5.

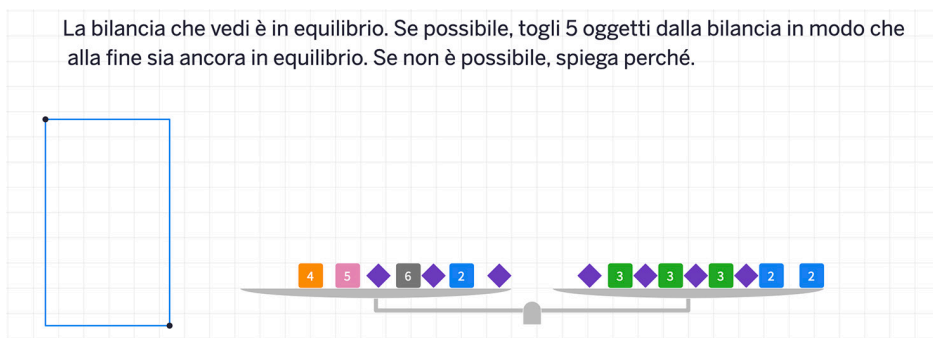


Figura 5. Seconda *task situation* con pesi non noti.

5. Indichiamo con tutor la persona che ha condotto i cinque incontri. La tutor è la ricercatrice C. Bonadiman. Come già specificato, l'intervistatrice cerca di interferire il meno possibile con la matematizzazione dello studente. La tutor invece prende parte al discorso matematico.



Lo studente soddisfa la richiesta proponendo diverse combinazioni di pesi. Tornando a riflettere sugli oggetti di peso non noto, Dario inizialmente dice che non riesce a scoprirne il valore, poi afferma «Boh proverei a fare... questa cosa qui» (intervento 22) e inizia a sollevare tutti i pesi dai piatti. A questo punto procede “pesando” il peso non noto: posiziona il quadrato viola sul piatto di sinistra e aggiunge o toglie pesi nel piatto di destra.

22. D.: «Boh proverei a fare... Questa cosa qui» [toglie tutti i pesi da entrambi i piatti].
23. T.: «Quindi stai togliendo tutto...»
24. D.: «Cioè allora proverei a, per capire [posiziona il peso non noto sul piatto di sinistra] va be insomma questo è normale, che la parte sinistra sia più bassa, provo a mettere il 3...» [posiziona un peso di valore 3 nel piatto di destra].
25. T.: «E che succede?»
26. D.: «Che è maggiore di 3... Rispetto al lato destro. Proviamo a metterci un altro 3 [aggiunge un altro peso di valore 3 nel piatto di destra]... ed è maggiore anche di 6... [...] Col 2... anzi no aspetta proviamo col 3 [aggiunge un altro peso di valore 3 nel piatto di destra]... è anche maggiore di 9... [aggiunge un peso di valore 2 nel piatto di destra] Eh! [esclama]».
27. T.: «Che è successo?»
28. D.: «Che... che la somma di 3, 6, 9... c'è 3, 3 e 3 e 2 che fa 11 è, cioè 11 uguale a rombo che è insomma...»
29. T.: «Ok, cioè quindi, perché dici che è uguale?»
30. D.: «Perché appunto è in equilibrio, la bilancia, soltanto con nel lato sinistro la forma viola e nel lato destro invece undici pesi».
31. T.: «Ok».
32. D.: «Cioè 11... quattro oggetti che formano 11».

In questo estratto la task interpretata da Dario è, come nel caso precedente, scoprire il valore del peso dell'oggetto viola. Diversamente da prima però trova dei modi per agire. Usa il verbo “provare” in diverse occasioni (interventi 22, 24, 26) mostrando autonomia nel risolvere la *task situation*.

La procedura messa in atto coinvolge aspetti numerici, questo sembra dargli fiducia, ed infatti procede in modo autonomo senza cercare alcuna conferma da parte della tutor.

A questo punto Dario torna all'attività precedente (Figura 4), e svuota la bilancia lasciando il peso non noto sul piatto di destra.

33. T.: «Ok allora vediamo... che cosa succede? Che mi dici?»
34. D.: «Che vabbè allora [posiziona un peso di valore 4 sul piatto di sinistra], la pallina rossa è maggiore di 4... oppure proviamo a fare 6 [toglie il peso di valore 4 e posiziona un peso di valore 5 e un peso di valore 1 sul piatto di sinistra], è maggiore di 6».
35. T.: «Ok».
36. D.: [aggiunge un peso di valore 3 sul piatto di sinistra] «Però minore di 9... Andiamo a rubare di qua un numero...» [toglie il peso di valore 3 e aggiunge un peso di valore 2 sul piatto di sinistra]. [...]
37. D.: «5, 1, 6 e 2, 8 e si può notare che 8 è maggiore della pallina rossa, quindi secondo me il numero è 7 [toglie il peso di valore 2 e aggiunge un peso di valore 1 sul piatto di sinistra]... il numero è 7 appunto, quindi una pallina è 7».

Nell'estratto, Dario prende decisioni indipendenti su come procedere e le accompagna con una narrazione significativa sui numeri. Questo continuo monitorare il prodotto della procedura in relazione alla *task situation* è indice di sostanzialità.

Successivamente, Dario affronta l'attività riportata in Figura 6, in cui per rispondere alla *task situation* è necessario sollevare anche oggetti non noti.

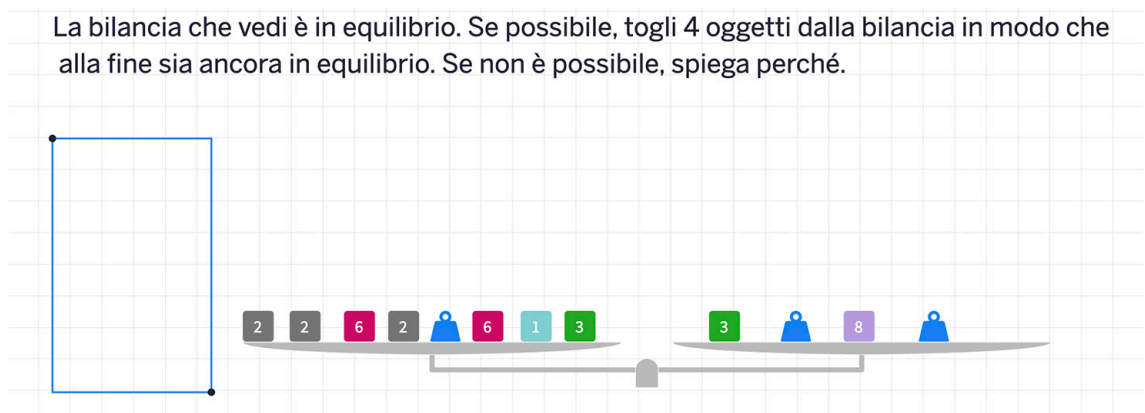


Figura 6. *Task situation* in cui Dario è costretto a interagire con i pesi non noti.

Dopo un primo momento in cui la richiesta sembra metterlo in difficoltà, procede come segue:

38. D.: «Oppure si aspetta... Potrei provare a fare una cosa».
39. T.: «Cosa faresti?»
40. D.: «Togliere questo... cioè insomma la forma blu di qua e di qua [solleva un peso non noto da entrambi i piatti], tornerebbe uguale, poi toglierei sia il 3 di qua che il 3 di qua [solleva un peso di valore 3 da entrambi i piatti], pur sempre ho tolto quattro oggetti togliendo lo stesso, le stesse forme, gli stessi...»
41. T.: «Ok, perché la richiesta era togli quattro oggetti... quindi tu ne hai sollevati effettivamente quattro, ok e perché funziona?»
42. D.: «Perché pur sempre la forma blu è uguale all'altra forma blu e il 3 è uguale, c'è il peso 3 è uguale al peso 3».

Questa *task situation* forza Dario a interagire con i pesi non noti: mentre nelle *task situation* precedenti i pesi non noti non venivano spostati, in questo caso è necessario farlo per soddisfare la richiesta. Dario sembra dunque aver introdotto una nuova routine nel suo discorso e dall'intervento 42 possiamo notare che la accompagna con una narrazione significativa. Inoltre, questa nuova routine viene subito reinvestita per scoprire il valore del peso non noto (mostrando flessibilità):

43. T.: «Sappiamo quanto vale il peso blu?»
44. D.: «No però si potrebbe capire adesso dal fatto che qui c'è un 8 e qui c'è un peso blu, quindi qua c'è 2, 4, 6, anzi, no, facciamo 6 e 2 e quindi questi due [...] E quindi fa 8, è come se tornasse questo... invece 6 e 1, 7, 9 e 11 e il peso tornerebbe 11».

Il discorso di Dario, combinando le parole con le azioni che compie sulla bilancia ci permette di osservare un cambio di routine spontaneo che lo avvicina alla routine che un esperto attua nel risolvere un'equazione.

Successivamente Dario affronta la prima *task situation* con il secondo artefatto-bilancia, in Figura 7.

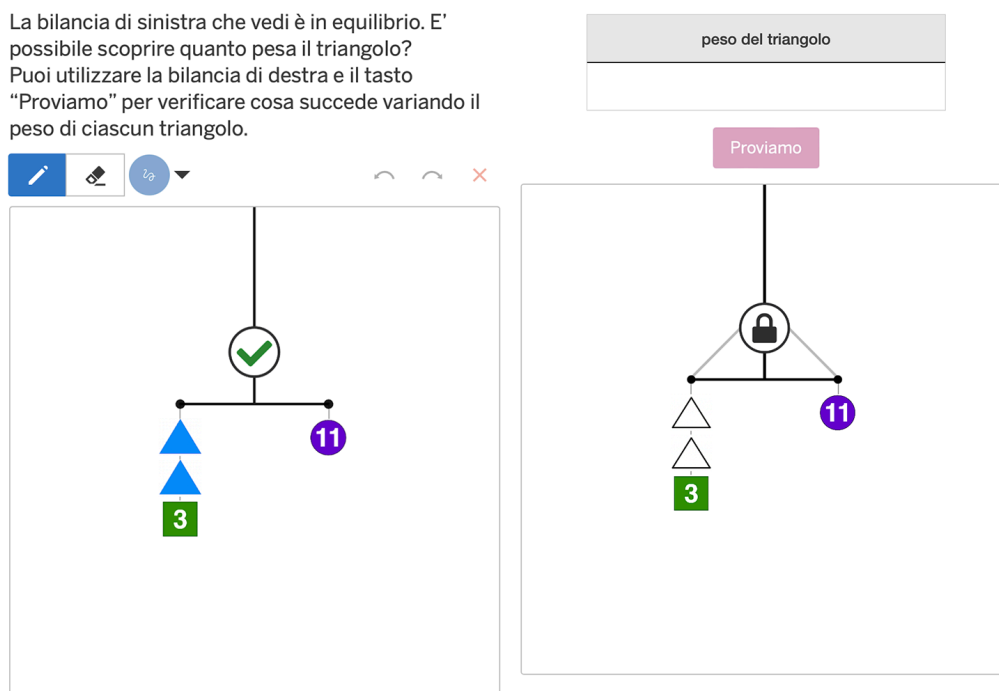


Figura 7. Prima task situation con il secondo artefatto-bilancia.

45. D.: «Quindi mi sarei già fatto un'idea».
46. T.: «Ok, che idea ti sei fatto?»
47. D.: «E allora posso dire che ho provato a fare  $11 - 3$ , i due numeri che si vedono. E, appunto, fa 8. E appunto che sono due triangoli. eh.. diviso, 4 e 4. 4 e 4, 8, +3, 11 e 11 dall'altra parte appunto è equilibrio, è in equilibrio».
48. T.: «OK, perfetto. Quindi hai fatto 11 meno 3».
49. D.: «Sì».
50. T.: «Come mai?».
51. D.: «Eh, perché appunto secondo me essendo che sono gli unici due numeri è come fare, non lo so, proprio per dire,  $x + x + 3$  uguale 11».

In questo primo scambio, Dario racconta quanto ha «provato a fare» che lo ha effettivamente portato alla soluzione corretta per la task situation. Quando arriva a dire che i due triangoli hanno valore 4, fa una verifica arrivando a concludere che con tale valore la bilancia starebbe in equilibrio. Alla richiesta di motivare alcune scelte, Dario utilizza parole appartenenti al discorso algebrico, che nella sperimentazione non erano state introdotte, ma che evidentemente Dario ha utilizzato a scuola. Alla richiesta di ulteriori chiarimenti da parte della tutor prosegue:

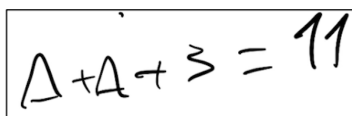
52. D.: «Vabbè, io pensavo che ne so... I triangoli, quindi, che ne so...  $x$  alla seconda più 3 è uguale, cioè  $x$  più  $x$  intendo... aspetta perché  $x$  alla seconda non mi ricordo se era  $x$  per  $x$  o  $x$  più  $x$ . Eh vabbè» [scrive come in Figura 8].

$$x^2 + 3 =$$

Figura 8. Mediatore visivo che Dario produce per supportare il suo discorso.

I mediatori visivi che introduce, così come le parole, appartengono al discorso algebrico anche se il suo uso del termine  $x^2$  non è in linea con il discorso matematico dell'esperto. Dario, nell'introdurre questo mediatore, si blocca: non ricorda se  $x^2$  «era  $x$  per  $x$  oppure  $x$  più  $x$ ». In questo estratto emerge nuovamente una delle meta-regole evidenziate nell'intervista iniziale: *la memoria sembra necessaria per poter partecipare al discorso*. Dario, in questo caso, si mostra in grado di trovare un'alternativa per procedere, mostrando quello che potremmo interpretare come un cambiamento della sua meta-regola legata alla memoria (intervento 53):

53. D.: «Cioè... Facciamo prima, a fare così, allora facciamo triangolo più triangolo più 3»  
[scrive come in Figura 9].
54. T.: «Ok e qui stai scrivendo, cioè, rispetto alla tua bilancia?»
55. D.: «Che triangolo più triangolo più 3 è in equilibrio con 11, quindi è uguale a 11».
56. T.: «Ok».
57. D.: «Perciò ho pensato di fare... 11, ovvero i due numeri che si vedono,  $-3$  uguale, si scopre cosa sono questi due triangoli».  
[...]
58. D.: «A me mi torna 4».



The image shows a handwritten mathematical equation enclosed in a rectangular box. The equation is written in black ink on a white background. It consists of two triangles, each with a small dot above its top vertex, followed by a plus sign, another triangle with a dot above its top vertex, another plus sign, and the number 3. This is followed by an equals sign and the number 11. The triangles are drawn with simple lines and are not filled.

Figura 9. Mediatori visivi che Dario produce come supporto al suo discorso.

Inizialmente, Dario manipola simboli algebrici concreti, privi di realizzazioni; sceglie di tornare a mediatori visivi che per lui sono realizzazioni di componenti dell'artefatto-bilancia. Probabilmente questi per Dario non sono ancora realizzazioni dell'oggetto matematico incognita, ma possono diventarlo. Egli, dunque, produce una narrazione significativa e mostra di mettere in relazione l'equilibrio della bilancia con l'uguaglianza tra due espressioni in cui compaiono termini non noti (intervento 55), utilizzando anche un mediatore visivo (Figura 9) come supporto alla sua narrazione. Prosegue mettendo in atto una procedura che riconosciamo coerente con la procedura risolutiva per le equazioni lineari e conclude «A me mi torna 4». La narrazione prodotta mette in relazione la procedura con il prodotto, indicando ancora una volta sostanzialità (intervento 57).

L'analisi proposta ci permette di rispondere alla seconda domanda di ricerca. Infatti, dall'analisi degli estratti sembra emergere una nuova partecipazione al discorso matematico da parte di Dario. Il discorso matematico è caratterizzato da oggetti che non sono puramente concreti e su cui Dario compie delle manipolazioni accompagnate da narrazioni significative. Nelle routine che lo studente produce abbiamo individuato diversi episodi in cui emergono le caratteristiche del processo di de-ritualizzazione quali flessibilità, autonomia del solutore e sostanzialità, tutte istanze di attribuzione di senso. Dario quindi sembra aperto, almeno nel contesto delle nostre *task situation*, alla possibilità di cambiare la sua matematizzazione. Inoltre, possiamo notare nell'estratto (intervento 45), un episodio in cui Dario si mostra sicuro di poter rispondere al quesito; durante l'intervento vi sono anche altre istanze di soggettivazione di questo tipo, che seppur non siano abbastanza ricorrenti da poter essere considerate come istanze di individuazione, mostrano possibili aperture al cambiamento anche in questa direzione. Tutto ciò concorre all'apertura verso un cambio delle meta-regole che Dario potrebbe avere; in particolare, i diversi episodi in cui prende decisioni coerenti con la *task situation* e non deve ricorrere alla memoria potrebbero essere il punto di partenza per passare dalla meta-regola *per partecipare al discorso matematico è necessario ricordare molte cose a memoria: quando questo*

*non accade non ci sono alternative per procedere* a una nuova meta-regola in cui il soggetto non ha bisogno di ricordare a memoria ma può egli stesso agire e costruire narrazioni significative.

## 6 Discussione e conclusioni

---

L'analisi dell'intervista iniziale di Dario rivela un profilo matematico di apprendimento fortemente caratterizzato da un'identità di fallimento. La matematizzazione di Dario è guidata da due principali meta-regole discorsive: da un lato l'esigenza di "fare dei conti", dall'altro la necessità di ricordare a memoria regole e procedure. Questa centralità della memoria pare inibire l'autonomia dello studente, che non sembra produrre narrazioni significative. Abbiamo messo in luce dei cambiamenti in questo profilo, osservati mentre Dario affronta le *task situation* all'interno degli ambienti digitali. Anche se inizialmente incontra delle difficoltà, vi sono numerose istanze di autonomia (Dario propone nuovi modi per procedere) ed assistiamo anche alla costruzione di narrazioni significative, grazie alle quali il prodotto del processo è messo in relazione con la *task (situation* o interpretata). Questo, in particolare, è un risultato che sembra aprire le porte a nuove ricerche. Infatti, l'interazione con l'ambiente digitale appropriatamente progettato, ha fornito a Dario mediatori visivi grazie ai quali ha potuto mettere in atto routine in cui rintracciamo elementi di de-ritualizzazione. Alla luce di ciò possiamo dunque avanzare l'ipotesi, in linea con altri studi in ambito comognitivo (Baccaglioni-Frank, 2021; Cooper & Lavie, 2021) che studenti con difficoltà possano sviluppare un discorso matematico che sia fin da subito caratterizzato da routine esplorative.

L'analisi degli estratti proposti sembra dunque mostrare un'apertura di Dario alla possibilità di abbracciare una nuova e diversa partecipazione al discorso matematico caratterizzata da istanze di de-ritualizzazione, con un particolare focus sull'autonomia. Mettere in luce come il profilo di apprendimento di uno studente possa cambiare, anche in un periodo di tempo relativamente piccolo (come durante le nostre attività), contribuisce a evitare un discorso sui deficit (parlare cioè di ciò che uno studente non sa fare, o non è). Ci consente inoltre di aprire nuove direzioni rispetto alla personalizzazione delle attività (Baccaglioni-Frank & Di Martino, 2021; Xin et al., 2022).

Seppur le aperture ai cambiamenti che la nostra analisi ha evidenziato siano particolarmente significative, viste le difficoltà dello studente, certamente occorre sottolineare che per quanto riguarda l'identità dello studente si tratta di piccoli cambiamenti. Questo non deve sorprendere: il percorso è stato relativamente breve mentre l'identità di fallimento descritta è invece stata costruita (e co-costruita) in molti anni di (non) partecipazione al discorso matematico. Per questo motivo, in questo specifico contesto, le sole istanze di soggettivazione "positiva" osservate, in cui lo studente risponde con tono sicuro, producendo narrazioni coerenti con il discorso dell'esperto, ci sembrano un'apertura importante a futuri e più consistenti cambiamenti.

Siamo consapevoli che quanto qui mostrato sia solo un primo passo: il discorso di Dario ha effettivamente mostrato aperture verso il discorso algebrico, ma, durante l'intero percorso di 10 ore, è rimasto fortemente legato agli artefatti digitali con cui ha interagito. Ulteriori ricerche sono quindi necessarie per comprendere come queste prime aperture possano essere ulteriormente reinvestite per la costruzione di un discorso matematico non legato al contesto specifico dell'artefatto.

Quella presentata è inoltre una ricerca di base, svolta in un contesto particolare e diverso rispetto a quello scolastico, risulterà dunque necessario approfondire e delineare l'azione didattica in riferimento a questi primi risultati. Riteniamo tuttavia che il caso di Dario metta in luce alcuni aspetti che possono essere ritenuti interessanti anche dal punto di vista della pratica didattica. Infatti, le attività con gli ambienti digitali sono risultate essenziali nel fornire a Dario strumenti con i quali supportare

la costruzione di narrazioni significative, come mostrato nell'episodio riguardante l'artefatto-bilancia in **Figura 7**. Questo può dare indicazioni in merito alla necessità, soprattutto di studenti con difficoltà, di trovare dei protagonisti delle proprie narrazioni che, almeno inizialmente, possano essere legati ad ambienti digitali.

A conclusione di questo studio, una domanda sorge spontanea: quale caratteristica del percorso ha permesso le aperture al cambiamento descritte sia in termini di matematizzazione, sia di individuazione. Abbiamo un'ipotesi di lavoro, che trova risposta nella relazione tra il tipo di attività proposto ed il profilo di apprendimento iniziale. Crediamo infatti che il design delle attività abbia permesso a Dario di partecipare al discorso sfruttando nuovamente con successo le routine legate al calcolo; è proprio il poter risolvere le prime *task situation* reinvestendo queste routine che sembra dargli fiducia, e renderlo progressivamente disponibile a costruirne di nuove. Come già accennato questa è ancora un'ipotesi, che intendiamo approfondire confrontando il percorso di Dario con quello di altri studenti il cui profilo matematico in entrata presenta meta-regole discorsive analoghe.

### Ringraziamenti

Ringraziamo di cuore Anna Baccaglioni-Frank e Samuele Antonini per la loro guida.

Lo studio condotto è parte del progetto Prin DynaMat (2020BKWEXR) finanziato dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. La raccolta dati è stata condotta a CARME ([www.carme.center](http://www.carme.center)), UNISER Pistoia Srl, Italia.

Riconosciamo il supporto del MIUR tramite il Progetto Dipartimento di Eccellenza assegnato al Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, CUP I57G22000700001.

Questa ricerca è stata supportata dal Gruppo GNSAGA dell'INdAM-2023.

---

### Bibliografia

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24–35.
- Baccaglioni-Frank, A. (2021). To tell a story, you need a protagonist: How dynamic interactive mediators can fulfill this role and foster explorative participation to mathematical discourse. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 291–312. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10009-w>
- Baccaglioni-Frank, A., & Bartolini Bussi, M. G. (2015). Buone pratiche didattiche per prevenire falsi positivi nelle diagnosi di discalculia: Il progetto "PerContare". *Form@re - Open Journal Per La Formazione in Rete*, 15(3), 170–184. <https://doi.org/10.13128/formare-17182>
- Baccaglioni-Frank, A., & Di Martino, P. (2021). Socio-cultural differences and sensitivities in the mathematics classroom. In D. Lucangeli (Ed.), *Understanding dyscalculia* (pp. 120–149). Routledge.
- Baccaglioni-Frank, A., Karagiannakis, G., Pini, C., Terme, C., & Girelli, L. (2020). Identificare profili di apprendimento matematico di bambini tra 6 e 12 anni: La standardizzazione italiana della batteria MathPro. *RicercaAzione*, 12(1), 19–51. <https://doi.org/10.32076/RA12109>
- Cooper, J., & Lavie, I. (2021). Bridging incommensurable discourses: A commognitive look at instructional design in the zone of proximal development. *The Journal of Mathematical Behavior*, 61, 100822. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100822>

- Heyd-Metzuyanım, E. (2011). *Emotional aspects of learning mathematics - how the interaction between identifying and mathematizing influences the effectiveness of learning* [Doctoral dissertation]. Technion - Israel Institute of Technology. <https://doi.org/10.13140/2.1.2879.2649>
- Heyd-Metzuyanım, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics – teacher-student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 341–368. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9457-z>
- Heyd-Metzuyanım, E., & Sfard, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom: on learning mathematics as an interplay of mathematizing and identifying. *International Journal of Educational Research*, 51–52, 128–145. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.015>
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390–419). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 54(6), 1131–1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>
- Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 101, 153–176. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4>
- Lewis, K. E., & Fisher, M. B. (2016). Taking stock of 40 years of research on mathematical learning disability: Methodological issues and future directions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(4), 338–371. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.47.4.0338>
- Lisarelli, G. (2023). Transition tasks for building bridges between dynamic digital representations and cartesian graphs of functions. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 9, 31–55. <https://doi.org/10.1007/s40751-022-00121-2>
- Otten, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (2019). The balance model for teaching linear equations: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, 6(1), 1–21. <https://doi.org/10.1186/s40594-019-0183-2>
- Robotti, E. (2017). Designing innovative learning activities to face difficulties in algebra of dyscalculic students: Exploiting the functionalities of *ANuSet*. In A. Leung & A. Baccaglini-Frank (Eds.), *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks. Mathematics Education in the Digital Era* (vol. 8, pp. 193–214). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_10)
- Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1/3), 13–57. <https://doi.org/10.1023/A:1014097416157>
- Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico: il ruolo della comunicazione nello sviluppo cognitivo*. Erickson. (Titolo originale: *Thinking as Communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing* pubblicato nel 2008).



Sfard, A. (2021). Taming fantastic beasts of mathematics: Struggling with incommensurability. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1–33. <https://doi.org/10.1007/s40753-021-00156-7>

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, 34(4), 14–22. <https://doi.org/10.3102/0013189X034004014>

Xin, Y. P., Thur, R., & Thouless, H. (2022). *Enabling mathematics learning of struggling students*. Springer.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire*. Springer.

Zan, R., & Di Martino, P. (2007). Attitude toward mathematics: Overcoming the positive/negative dichotomy. In B. Sriraman (Ed.), *The Montana Mathematics Enthusiast* (Monograph 3, pp. 157–168). The Montana Council of Teachers of Mathematics.