La misurazione nella ricerca sociale. Teorie, strategie, modelli

3. I MODELLI DI MISURAZIONE

Come si è detto, nel procedimento di misurazione che consente di associare un valore ad un oggetto/evento è centrale la definizione di un insieme di regole, esplicite ed implicite, che consentono di legare i dati alla corrispondente teoria. Per misurare ciascuna caratteristica è necessario individuare una strategia che tenga conto di due importanti elementi: il numero di indicatori da definire e la dimensionalità della caratteristica da misurare.

3.1 GLI INDICATORI

La strategia più semplice, e anche più vulnerabile, è quella che identifica un unico indicatore per ciascuna variabile, sottostante e non misurabile direttamente; tale strategia richiede l'adozione dell'assunto secondo il quale date due variabili teoriche, ciascuna delle quali misurata da un unico indicatore, la relazione tra i due indicatori è spiegabile solo attraverso la relazione esistente tra le corrispondenti variabili inosservabili. L'approccio degli indicatori singoli è molto utilizzato per la sua praticità e parsimonia in relazione a molte variabili teoriche.
L'organizzazione dei dati, nei casi in cui si assume una corrispondenza diretta tra *variabile non osservabile* e *indicatore*, richiede una matrice *two-way two-mode*; tale matrice si presenta come quella mostrata di seguito in cui ciascun indicatore misura un attributo diverso mentre le unità sono rappresentate da casi (individui, città, ecc.):

		ATTRIBUTI / VARIABILI					
		1	2	…	*j*	…	*k*
UNITA'	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1k}
	2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2k}
	…	…	…	…	…	…	…
	i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{ik}
	…	…	…	…	…	…	…
	n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nk}

L'adozione di tale approccio è comunque molto problematica e risulta limitata dalla qualità di molte variabili teoriche che difficilmente consentono l'utilizzo di un unico indicatore.
Infatti non è sempre definibile la corrispondenza diretta tra variabile non osservabile e indicatore; non sempre l'attributo è direttamente osservabile attraverso un unico indicatore; si pensi a tale proposito a variabili teoriche quali 'status socio-economico', 'mobilità sociale', ecc. In questi casi l'utilizzazione di una singola misura non consente una corretta misurazione dell'attributo. In altre parole la definizione e l'adozione di un singolo indicatore per la misurazione di una caratteristica può produrre una grossa componente di errore a causa dell'introduzione di problemi di:

a. *validità*, in quanto è molto improbabile che una singola misura possa riprodurre un concetto, specie se complesso e articolato;
b. *affidabilità*, in quanto la misura singola è molto influenzata dall'errore casuale;
c. *precisione* e *accuratezza*, in quanto la misura singola perde in precisione non consentendo di discriminare tra i diversi livelli di un attributo;
d. *legame* e *relazione* con altri attributi, diversi da quello misurato;
e. *specificità* e *individualità* posseduta dalla variabile che correla con altri attributi o fattori diversi da quello che si intende misurare;

f. *discriminazione* e *differenziazione* accurata degli oggetti osservati.

Per evitare tali problemi, o almeno per ridurne il peso, è necessario disporre per ciascuna variabile di più indicatori, ognuno dei quali corrispondente ad un aspetto del concetto generale[1]. L'insieme delle misure multiple, contribuendo a rilevare il maggior numero di aspetti dell'attributo, può consentire di coprire la variabilità dell'attributo studiato.

Le misure multiple possono essere tra loro omogenee o eterogenee rispetto al concetto e al livello di misurazione, secondo quanto indicato nel seguente schema:

MISURE MULTIPLE		Livello di misurazione	
		Uguale	Diverso
Espressioni del concetto da misurare	Confrontabili	**Omogenee**	**Eterogenee**
	Diversificate	**Eterogenee**	**Eterogenee**

3.2 LA DIMENSIONALITÀ

Finora abbiamo assunto che il costrutto, indipendentemente dal numero di indicatori definiti, sia chiaramente omogeneo. In realtà molte volte ci troviamo di fronte a concetti e costrutti complessi che non solo non sono misurabili direttamente ma non possono neanche essere definiti in maniera omogenea; in questi casi è necessario definire modelli di misurazione ancora più complessi che assumono l'esistenza di una proprietà inosservabile o latente, definita e composta da più aspetti detti «dimensioni»[2].

Quindi per poter definire un modello di misurazione è importante prendere in considerazione anche la natura dimensionale dei costrutti da misurare. Il concetto di dimensionalità è piuttosto complesso principalmente in quanto il suo significato sostanziale e tecnico è specifico del particolare modello di misurazione. In tale ottica è possibile distinguere tra modelli unidimensionali e modelli multidimensionale.

a. <u>Modelli unidimensionali</u>: tali modelli assumono che per la descrizione di una certa caratteristica sia sufficiente una singola, fondamentale dimensione sottostante. Quindi empiricamente deve essere dimostrata la corrispondenza tra la singola dimensione individuata e l'indicatore o gli indicatori selezionati e definiti.
b. <u>Modelli multidimensionali</u>: tali modelli assumono che per la descrizione di una certa caratteristica sia necessario definire più aspetti o dimensioni; in alcuni casi le dimensioni possono essere ipotizzate a priori, in altri esse possono emergere a livello di applicazione del modello e a livello di analisi dei dati, ovvero attraverso le procedure analitiche. Tali modelli sono certamente più complessi da trattare in quanto hanno l'obiettivo di classificare l'oggetto misurato secondo due o più aspetti di uno stesso costrutto, ovvero di collocarlo non su un semplice continuum ma in uno spazio multidimensionale.

I modelli multidimensionali possono essere considerati una generalizzazione e un'estensione, più o meno diretta, delle nozioni sottostanti ai modelli unidimensionali a quelle situazioni in cui gli oggetti possono variare simultaneamente rispetto a molti aspetti; in altre parole in quest'ottica si può dire che i modelli multidimensionali rappresentano una risposta all'insufficienza teorica ed empirica dei modelli e dei metodi di misurazione unidimensionale e comprendono quello unidimensionale come caso particolare; per questo l'applicazione dei metodi per la verifica dei

[1] La necessità di disporre di più misurazioni è un aspetto che è alla base, come abbiamo visto, della teoria della generalizzabilità.

[2] La maggior parte dei termini usati in riferimento alle tecniche e ai metodi di analisi dei modelli di misurazione multidimensionale è di natura *spaziale* (dimensione, prossimità, origine, rotazione, ecc.).

modelli multidimensionali può essere fatta anche per verificare l'esistenza di una singola dimensione latente (ipotizzata all'interno del modello di aggregazione) sottostante l'insieme delle osservazioni ottenute.
Anche se in teoria ogni fenomeno può essere osservato in termini multidimensionali[3] e nonostante la forza e la flessibilità dei modelli multidimensionali, nella pratica i modelli unidimensionali sono i più utilizzati; ciò avviene per diversi motivi:

- i modelli unidimensionali sono più semplici da comprendere e le relative tecniche più facili da applicare rispetto a quelli multidimensionali;
- i modelli multidimensionali si riferiscono a costrutti molto complessi difficili da definire in termini dimensionali;
- in determinate condizioni il modello di aggregazione unidimensionale rappresenta un primo necessario passaggio verso quello multidimensionale;
- la conoscenza dei modelli unidimensionali consente una migliore comprensione dei più complessi modelli multidimensionali; si può dire che il rapporto logico esistente tra i due modelli è lo stesso che esiste tra le tecniche statistiche univariate e quelle multivariate: la comprensione delle prime è necessaria per la comprensione delle seconde;
- i modelli e i concetti unidimensionali essendo più semplici da definire sono più verificabili; la complessità dei modelli multidimensionali è data principalmente dalla loro difficile identificazione e definizione; ne consegue una certa difficoltà nella costruzione dello strumento di misurazione.

3.2.1 Interpretazione del concetto di dimensionalità

Di per sé le dimensioni non hanno una realtà sostanziale; la loro individuazione consente di semplificare le caratteristiche di un insieme di oggetti, per renderle più comprensibili a fini analitici; in questo senso una rappresentazione dimensionale di un insieme di oggetti è sempre un modello interpretativo degli oggetti e non una proprietà immutabile degli oggetti.

Variazione tra oggetti

Il concetto di dimensionalità può essere definito e chiarito facendo riferimento al concetto di "fonti di variazione"; in altre parole la dimensionalità di un gruppo di oggetti può essere definita come il *numero di fonti, separate e apprezzabili, di variazione che spiegano le differenze tra gli oggetti*; ciò richiede alcune puntualizzazioni:

a. la dimensionalità di un insieme di oggetti è legata alle reali caratteristiche degli oggetti stessi; in alcuni casi la natura di tali caratteristiche è immediatamente visibile, in altri lo è meno;
b. anche se in molte situazioni le fonti di variabilità tra gli oggetti sono note, la specificazione della dimensionalità spetta al ricercatore che deve specificare la struttura dimensionale (in termini di definizione e di numero delle dimensioni) prima del procedimento di misurazione; ciò succede ogni volta che gli oggetti sono confrontati sulla base di criteri noti;
c. nell'ipotizzare il numero di fonti di variazione, se per ciascun punto si utilizza un numero di dimensioni
   - troppo piccolo, allora parte della variabilità tra gli oggetti non può essere rappresentata ovvero incorporata nel modello,
   - troppo grande, allora il modello risulta ridondante;
d. la dimensionalità è di solito specifica di un contesto; il numero di dimensioni, assunte tra gli oggetti, dipende dai modi in cui gli oggetti sono esaminati; rispetto agli stessi oggetti un

[3] La distinzione tra modelli unidimensionali e modelli multidimensionali non è presente solo nelle scienze sociali ma anche in altre scienze; si pensi ad attributi unidimensionali quali la lunghezza o il peso e ad attributi multidimensionali quali il colore o lo spazio.

ricercatore può, per alcuni obiettivi, considerarli unidimensionali, per altri può ritenere più appropriata una rappresentazione multidimensionale; ciò può essere fatto fino a quando si ritiene che la dimensionalità selezionata corrisponda a tutte le fonti rilevanti di variazione tra gli oggetti; è però sempre il ricercatore che decide ciò che è rilevante.

Modello spaziale

La differenziazione tra gli oggetti rispetto a ciascuna fonte di variabilità può essere rappresentata geometricamente individuando uno spazio definito da un numero d'assi corrispondente al numero di dimensioni rilevate. Gli oggetti misurati sono rappresentati da punti la cui posizione in tale spazio è determinata dalle loro posizioni lungo ciascuno degli assi (coordinate). Se gli oggetti variano solo rispetto ad una fonte di variazione, la rappresentazione richiede un unico asse e un'unica coordinata per ciascun oggetto; se gli oggetti differiscono rispetto a due fonti di variazione, la rappresentazione richiede due assi e due coordinate per ciascun oggetto; e così via. In questo senso la dimensionalità di un gruppo di oggetti fa riferimento al numero minimo di coordinate richieste per posizionare in modo unico l'insieme dei punti che rappresentano gli oggetti.
La rappresentazione geometrica risulta conveniente in quanto fornisce un semplice strumento per la visualizzazione delle differenze tra gli oggetti. Tale rappresentazione diviene però problematica se le rette identificate definiscono uno spazio con un numero di dimensioni superiore a tre. In questi casi è comunque possibile costruire un modello geometrico che mostri parte dello spazio multidimensionale; tale procedura, però, fornirà una rappresentazione incompleta degli oggetti. A tale proposito occorre però dire che la rappresentazione reale del modello geometrico non è necessaria: per il corretto posizionamento reciproco degli oggetti nello spazio individuato sarà sufficiente la definizione delle coordinate per ciascun punto; in questo senso la raffigurazione fisica delle posizioni dei punti rappresenta un'informazione ridondante.
E' per questo necessario distinguere tra dimensioni fisiche e loro esistenza concettuale. Non esiste alcuna ragione per limitare la definizione del numero delle fonti di variabilità a tre solo per l'impossibilità di rappresentare fisicamente più di tre dimensioni. Vincolarsi alla rappresentazione geometrica delle dimensioni limita la comprensione della dimensionalità e quindi della variabilità[4].

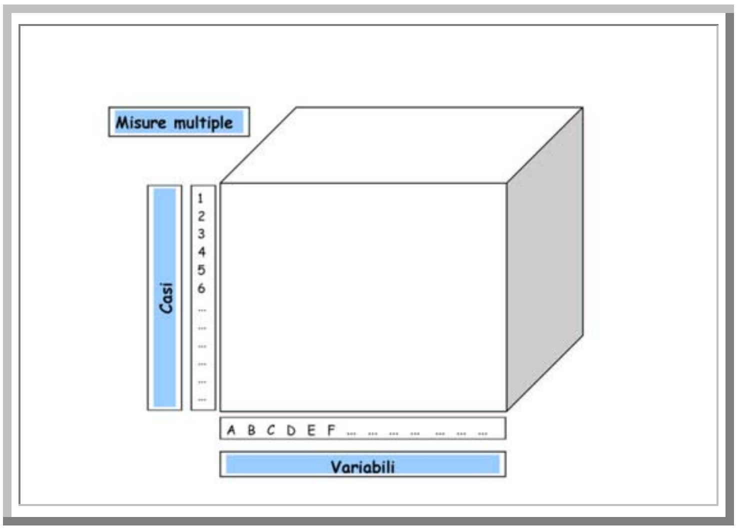
3.3 APPROCCI ALLA MISURAZIONE COMPLESSA: MODELLI DI SCALING E MODELLI FATTORIALI

Il modello di misurazione, definibile a questo punto, è piuttosto complesso; in particolare gli elementi che lo definiscono sono:

- più *costrutti* definiti,
- più *misure multiple* definite per ciascun costrutto,
- più *oggetti/casi* da misurare,

tra loro legati nella seguente matrice logica dei dati:

[4] A tale proposito può essere interessante, e piacevole, leggere *Flatlandia* di Abbott; in tale divertente libro si mette in evidenza come l'incapacità di comprendere pienamente le basi della geometria limita la comprensione della varietà delle forme dimensionali.



Notare che tale rappresentazione non tiene conto del fatto che ciascun costrutto, definito operativamente in termini di variabile, possa trovare una descrizione uni/multidimensionale.
La complessità applicativa della matrice può essere affrontata attraverso diversi approcci riconducibili a due diversi modelli: *modelli di scaling* e *modelli fattoriali*.
I modelli di *scaling* (trattati in modo più ampio nel quaderno ASTRIS-2) consentono di ridurre la complessità della misurazione e ricomporre l'unità del concetto da misurare attraverso la definizione e l'adozione di particolari assunti. Tali modelli, formulati nell'ambito della tradizione psicometria, richiedono indicatori omogenei e sono concepiti, nella maggior parte dei casi, nell'ambito della misurazione di caratteristiche soggettive. Tali modelli consentono di semplificare la misurazione e di associare a ciascun oggetto misurato i valori della misurazione. Nel caso in cui il costrutto sia

- o *unidimensionale*, a ciascun oggetto viene assegnato un valore che corrisponde geometricamente alla sua collocazione su una retta corrispondente all'attributo (spazio unidimensionale); ciò consente di valutare la relazione tra i punti/oggetti e tra questi e l'origine (quando presente e significativa)[5];
- o *multidimensionale*, a ciascun oggetto viene assegnato un numero di valori corrispondente alla dimensionalità del carattere; tale procedimento geometricamente equivale alla collocazione degli oggetti misurati in uno spazio multidimensionale, in cui ciascuna dimensione corrisponde ad un aspetto; ciascun valore assegnato all'oggetto corrisponde alla proiezione del punto su uno degli assi (dimensioni) dello spazio.

Nel prossimo paragrafo verranno presentati brevemente i modelli fattoriali.

3.4 I MODELLI FATTORIALI

La definizione dei modelli fattoriali è avvenuta nell'ambito della psicometria e della psicologia sperimentale. Alla base di tale modello vi era l'ipotesi secondo la quale esistono concetti ipotetici, quali l'intelligenza, la qualità della vita, ecc., non osservabili e misurabili direttamente, e che quindi rappresentano *fattori* o *dimensioni latenti*, misurati attraverso una o più variabili rilevate a loro volta tramite misure multiple. L'applicazione del modello, riducendo la complessità, consente di chiarire e verificare definizioni teoriche costituendo in questo senso uno strumento di verifica del significato di una o più variabili (valore euristico)[6].

[5] Ricordiamo che non sempre si può parlare di misurazione lungo un continuum come nel caso delle variabili discrete.
[6] Spearman, uno dei primi a formulare un modello di misurazione multifattoriale all'inizio del '900, ha definito e postulato i concetti di "fattore generale" e "fattore specifico" per poter misurare l'intelligenza; in particolare egli ha teorizzato un modello che mirava a descrivere l'intelligenza di un individuo mediante il minor numero possibile di caratteri risultati maggiormente significativi; secondo tale teoria l'attività mentale può essere considerata come l'effetto

Tale approccio ha trovato, in seguito, nuovi sviluppi sia in ambito sociologico (con i lavori di Lazarsfeld e Rosemberg negli anni 50) che in ambito psicometrico (con i lavori di Heise e Bohrnstedt negli anni 70). Tale sviluppo ha condotto alla definizione di modelli che considerano contemporaneamente più variabili di interesse teorico non direttamente osservabili (*variabili latenti/fattori*) ciascuna delle quali misurata da più variabili osservate (*indicatori*). Ciascuna variabile latente può rappresentare anche un aspetto (dimensione) di un concetto più ampio.
L'obiettivo è quello di "registrare" gli effetti che le variabili latenti (variabili) hanno sugli indicatori che le misurano o, meglio, di stimare la relazione tra variabili latenti e tra queste e le variabili osservate (*relazioni strutturali*). Statisticamente ciò può essere studiato analizzando la covariazione esistente tra gli indicatori definiti per ciascuna variabile latente. La stima dei parametri strutturali richiede l'analisi della covariazione tra gli indicatori osservati e, conseguentemente, l'applicazione dei modelli ad equazioni strutturali applicati alle covarianze osservate; in altre parole, gli indicatori consentono di risolvere specifiche incognite presenti nelle equazioni simultanee che descrivono il modello. Quindi la semplificazione realizzata da tali modelli non coinvolge l'eliminazione di una delle dimensioni ma è rivolta alla stima dei parametri strutturali che legano le variabili latenti;
In generale, il modello ad indicatori multipli risulta di complessa e problematica applicazione in quanto:
- richiede per la sua analisi un'esplicita definizione di una relazione causa-effetto tra variabili misurate e non misurate; tale definizione non è sempre facile da stabilire soprattutto quando l'indicatore è solo 'un aspetto di', 'una parte di', 'correlato con';
- all'aumentare del numero degli indicatori misurati e delle variabili strutturali, diviene estremamente difficile, se non impossibile, prendere in considerazione tutte le logiche combinazioni di relazioni;
- se il modello è sovrastimato, diviene difficile capire in che modo procedere nella selezione di una stima tra quelle possibili.

3.4.1 Gli assunti

3.4.1.1 Additività della varianza

Uno dei principali assunti sui quali si basa il modello fattoriale riguarda il concetto di additività della varianza; secondo questo concetto la varianza totale di ciascun indicatore x_i rappresenta la somma di tre componenti tra loro non correlate:
- varianza comune, che rappresenta quella porzione di varianza che è spiegata dalla presenza della variabile latente[7] (ξ) ed è misurata dalla correlazione che l'indicatore registra con altri indicatori della stessa variabile latente;
- varianza specifica, che rappresenta quella porzione di varianza non spiegata dalla presenza della variabile latente; essa non correla con nessun altro indicatore; insieme alla precedente componente va a comporre la *varianza attendibile*
- errore, che rappresenta quella porzione di varianza, non correlata con le precedenti; tale componente definisce la *varianza* detta *non attendibile*.

Essendo ciascun tipo di varianza espresso come porzione della varianza totale possiamo scrivere, per l'indicatore x_i:

dell'azione di un fattore generale, rappresentabile lungo un continuum lineare, e di un insieme di altri fattori particolari (memoria, conoscenza, ecc.).

[7] Qui viene utilizzata la notazione tipica del Lisrel (v. Appendice *C*)

varianza totale	=	varianza comune	+	varianza specifica	+	errore
		varianza attendibile				
$\sigma^2_{x_i}$	=	$\sigma^2_{x_{ic}}$	+	$\sigma^2_{x_{is}}$	+	$\sigma^2_{x_{ie}}$

Inoltre, sapendo che, con dati standardizzati, la *varianza totale* è uguale a 1, possiamo scrivere:

varianza totale	=	varianza comune	+	varianza specifica	+	errore
		varianza attendibile				
1	=	$\sigma^2_{x_{ic}}$	+	$\sigma^2_{x_{is}}$	+	$\sigma^2_{x_{ie}}$

Nel modello fattoriale, e in termini di modello di misurazione, l'interesse è rivolto essenzialmente alla stima della varianza comune e non della varianza specifica che per questo viene considerata unitariamente all'errore in quella che viene detta varianza unica (o *unicità*, δ^2):

$$\delta^2_{x_i} = \sigma^2_{x_{is}} + \sigma^2_{x_{ie}}$$

3.4.1.2 I fattori comuni

La varianza comune di un indicatore solo raramente può spiegata da un'unica variabile latente; questo vuol dire che ciascun indicatore può essere descritto attraverso la combinazione di variabili latenti (dette *fattori comuni*):

indicatore = combinazione lineare di fattori comuni + errore

Riprendendo tale assunto in termini di varianza è possibile affermare che la varianza comune rappresenta la porzione di varianza che è spiegata dalla presenza di più variabili latenti (ξ_j) ed è per questo detta *comunanza* ($h^2_{x_i}$); a questo punto possiamo rappresentare la varianza totale nel modo seguente:

varianza totale	=	comunanza	+	varianza specifica	+	errore
		varianza attendibile				
$\sigma^2_{x_i}$	=	$h^2_{x_i}$	+	$\sigma^2_{x_{is}}$	+	$\sigma^2_{x_{ie}}$
1	=	$h^2_{x_i}$	+	$\sigma^2_{x_{is}}$	+	$\sigma^2_{x_{ie}}$

L'obiettivo del modello fattoriale è non solo quello di stimare la *comunanza* di ciascun indicatore ma anche di stimare quanto della comunanza è attribuibile alle diverse variabili latenti comuni al gruppo di indicatori. Ciò corrisponde alla stima per ciascun indicatore dei *factor loading* che lo legano ai fattori ($\lambda_{x_i\xi_j}$, dell'indicatore x_i rispetto alla variabile latente ξ_j). In particolare ciascun factor loading rappresenta la valutazione del contributo di ciascun fattore alla comunanza dell'indicatore, ovvero la valutazione dell'influenza della variabile latente su ciascun indicatore; esso può essere definito anche come peso che l'indicatore ha nel definire il fattore o come la misura della *saturazione* di ciascun indicatore rispetto al fattore. I *factor loading* vengono espressi con valori che vanno da

+1 massima saturazione di un indicatore in un determinato fattore, a

-1 massima saturazione di un indicatore in un determinato fattore ma in senso inverso.

Un valore di saturazione uguale a 0 indica che quel determinato indicatore non ha alcuna rilevanza rispetto al fattore. In pratica, i *factor loading* sono interpretati in termini di correlazione tra ciascun indicatore ed il fattore. Sapendo che il quadrato della correlazione (coefficiente di determinazione) indica la porzione di varianza spiegata, il quadrato del *factor loading* indica la quantità della variabilità di un particolare indicatore spiegata dal corrispondente fattore.

Conseguentemente si può dire che la *comunanza* è data dalla somma dei *loading* al quadrato di un indicatore:

$$h_{x_i}^2 = \lambda_{x_i\xi_1}^2 + \lambda_{x_i\xi_2}^2 + \ldots + \lambda_{x_i\xi_m}^2$$

dove *m* rappresenta il numero di variabili latenti.
Di seguito proviamo a rappresentare l'assunto additivo della varianza appena visto:

<table>
<tr><td colspan="6">varianza totale</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\left(\sigma_{x_i}^2\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">varianza comune</td><td>varianza specifica</td><td>errore</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\sigma_{x_{ic}}^2$</td><td>$\sigma_{x_{is}}^2$</td><td>$\sigma_{x_{ie}}^2$</td></tr>
<tr><td colspan="4">communality (comunanza)</td><td colspan="2">unicità</td></tr>
<tr><td colspan="4">$h_{x_i}^2$</td><td colspan="2">$\delta_{x_i}^2$</td></tr>
<tr><td>$\lambda_{x_i\xi_1}^2$</td><td>$\lambda_{x_i\xi_2}^2$</td><td>.......</td><td>$\lambda_{x_i\xi_m}^2$</td><td colspan="2">$1 - h_{x_i}^2$</td></tr>
<tr><td colspan="5">varianza attendibile</td><td>errore</td></tr>
<tr><td colspan="5">$h_{x_i}^2 + \sigma_{x_{is}}^2$</td><td>$1 - \left(h_{x_i}^2 + \sigma_{x_{is}}^2\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\sigma_{x_i}^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{x_i\xi_j}^2 + \delta_{x_i}^2$
(equazione fondamentale del modello dei fattori comuni)</td></tr>
</table>

Gli assunti alla base di tale modello possono essere a questo punto così riassunti:

a. le relazioni tra gli indicatori sono lineari;
b. la varianza totale negli indicatori è una funzione:
    - dei fattori (*comunanza*),
    - dei *disturbi* caratteristici di ciascun indicatore e degli errori di misurazione (*unicità*);
c. gli errori e i disturbi non sono correlati tra loro né con i fattori;
d. gli indicatori non sono casualmente correlati tra loro se non attraverso la reciproca relazione con i tratti latenti;
e. la struttura dei fattori osservati riproduce fedelmente la struttura delle dimensioni sottostanti.

3.4.1.3 Modello esplorativo e modello confermativo

A seconda dei vincoli che si pongono nella definizione del modello, è possibile individuare due approcci: il modello esplorativo e il modello confermativo.
Si parla di <u>modello esplorativo</u> quando nella definizione del modello si specifica il numero dei fattori comuni e si individuano gli indicatori ma non si specifica la struttura delle relazioni tra le variabili latenti e gli indicatori. Tale modello assume in particolare che:

- tutti i fattori comuni sono (o non sono) tra loro correlati,
- tutte le variabili osservate sono direttamente influenzate da tutti i fattori comuni,
- le unicità non sono tra loro correlate,
- le variabili latenti (fattori comuni) non sono correlate con i le unicità (fattori unici).

La stima dei parametri del modello richiede la definizione di altri assunti, generalmente arbitrari. Tali caratteristiche rendono il modello esplorativo limitato nelle sue reali applicazioni a livello di modello di misurazione.
Si parla di <u>modello confermativo</u> quando la definizione del modello pone dei vincoli, sostanzialmente motivati, relativi al numero delle variabili latenti e degli indicatori e alle relazioni che legano fattori e variabili osservate. Le ipotesi sulla struttura possono derivare da particolari

impostazioni teoriche, da precedenti ricerche, dalle caratteristiche del disegno sperimentale o dopo aver esaminato la matrice di correlazione. Tale approccio consente la verifica statistica di una struttura fattoriale ipotizzata al fine di determinare se il livello di adattamento del modello ai dati è statisticamente significativo, ovvero se i dati confermano il modello definito.

Nella forma più semplice l'ipotesi comporta la specificazione del solo numero di fattori comuni, in modo non molto diverso da quello che viene fatto nell'approccio esplorativo, senza alcun riferimento alla relazione esistente (ortogonale o obliqua); in questi casi l'applicazione di un test di significatività o di altri criteri (come un coefficiente di affidabilità) è sufficiente per valutare l'adeguatezza della soluzione fattoriale.[8]

La verifica può però riguardare anche ipotesi più complesse che specificano a priori i vincoli che possono riguardare:

- il numero di fattori,
- la struttura fattoriale (quali indicatori definiscono ciascuno dei fattori e quindi quali variabili osservate sono influenzate da quali fattori comuni),
- la natura delle relazioni tra i fattori (ortogonali o obliqui),
- la dimensione dei valori dei *factor loading*,
- la presenza di correlazione tra determinati termini di errore.

La definizione di tali vincoli consiste nel decidere quali sono i parametri determinati (fissi) e quali quelli da determinare (liberi). Ciò porta alla distinzione tra:

- valori incogniti da risolvere, rappresentati dai parametri da stimare;
- valori noti, rappresentati da quelli che possono essere calcolati direttamente dai dati (medie, varianze, covarianze, correlazioni).

Successivamente alla definizione del modello occorre verificare se vi sono abbastanza quantità note per poter risolvere i parametri ignoti ovvero se il modello ha una soluzione per i valori incogniti dei parametri. L'*identificazione del modello* consiste appunto nel verificare la corrispondenza tra l'informazione che deve essere stimata (parametri liberi) e l'informazione utilizzata per tale stima (varianze e covarianze osservate relativamente alle ipotesi riguardanti la struttura del modello.

La differenza tra il numero di correlazioni/covarianze osservate e il numero di coefficienti proposti nel modello rappresenta i *gradi di libertà* (*gdl*), calcolati nel modo seguente:

$$gdl = \frac{(p)\cdot(p+1)-t}{2}$$

dove

p numero di indicatori

t numero di parametri liberi.

La prima parte dell'equazione calcola la dimensione non-ridondante della matrice di correlazione/covarianza (metà della matrice più la diagonale).

In questo caso, contrariamente ad altre definizioni di gradi di libertà utilizzate in altri ambiti dell'analisi statistica, non si utilizza il valore corrispondente alla dimensione del campione.

Tenendo presente il concetto di gradi di libertà, un modello (o sistema di equazioni) può essere *identificato*, *sottoidentificato*, *sovraidentificato*.

- Sistema identificato (zero gradi di libertà): è quello che contiene sufficienti informazioni per derivare una singola stima per ciascuna incognita; in altre parole, il numero delle quantità osservate è uguale al numero dei parametri incogniti. In questi casi per ciascun parametro libero è possibile ottener un valore attraverso una sola manipolazione (*just identified model*). Anche se fornisce un perfetto adattamento del modello, tale sistema non è interessante in quanto non è generalizzabile.
- Sistema sovraidentificato (numero di gradi di libertà positivo): è quello che presenta più informazioni di quelle necessarie per risolvere le incognite; in altre parole, il numero delle quantità osservate è superiore a quello dei parametri incogniti. In questi casi per ciascun

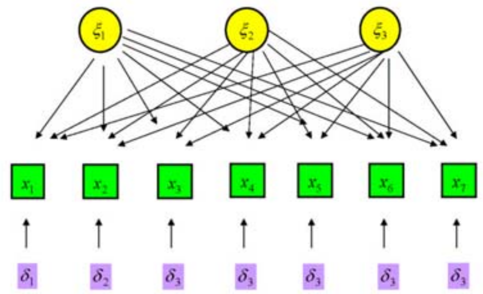
[8] Per una trattazione tecnica dell'approccio fattoriale sia esplorativo che confermativo si rimanda ad altre pubblicazioni.

parametro libero è possibile ottenere un valore corrispondente in molti modi (*overidentified model*). Tali modelli sono detti *confermativi* in quanto la loro applicazione è possibile quando è possibile definire un modello fattoriale.

- Sistema sottoidentificato (numero di gradi di libertà negativo) è quello che non presenta abbastanza informazioni per derivare stime non ambigue per le incognite. In altre parole, il numero di parametri incogniti è superiore a quello dei valori osservati. In un sistema *underidentified* non è possibile ottenere alcun valore per i parametri liberi, ovvero il modello non può essere stimato se non facendo nuovi assunti arbitrari. Tali modelli necessitano di un approccio fattoriale esplorativo al fine di comprendere meglio la struttura fattoriale sottostante e rendere il modello confermativo.

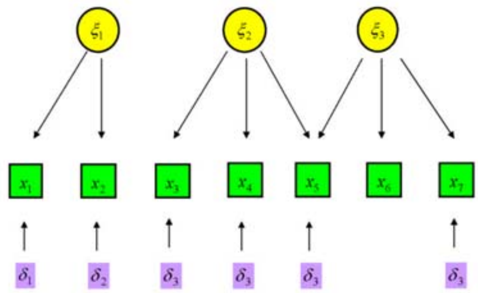
Con il seguente esempio proviamo a descrivere la differenza tra i due approcci. Poniamo di avere tre variabili latenti ξ_1, ξ_2, ξ_3 tra loro non correlate. Ciascuna di tali variabili influenza casualmente ciascuno degli indicatori x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. Le tre variabili latenti vengono definite *fattori comuni* in quanto condividono l'influenza su uno o più indicatori. E' possibile quindi identificare altri fattori, detti *unici*, ciascuno dei quali influenza una sola variabile osservata (δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, δ_5, δ_6, δ_7).

modello fattoriale esplorativo



- ✓ tutti gli indicatori (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) sono influenzati da tutte le variabili latenti;
- ✓ ciascun indicatore è influenzato da un fattore unico;
- ✓ i fattori unici non sono tra loro correlati.

modello fattoriale confermativo



- ✓ ciascun indicatore (eccetto x_5) è influenzato da un'unica variabile latente;
- ✓ non tutti gli indicatori sono influenzati da un fattore unico;
- ✓ i fattori unici non sono tra loro correlati ma è possibile definire tali correlazioni.

In entrambi gli esempi i fattori comuni (ξ_1, ξ_2, ξ_3) non sono tra loro correlati; nel caso confermativo sarebbe stato possibile anche assumere correlati due fattori comuni (per esempio ξ_1 e ξ_3), mentre nel caso esplorativo, l'alternativa sarebbe stata quella di definire tutti i fattori comuni correlati.

Nel procedere alla valutazione del modello fattoriale è necessario tenere presenti alcuni importanti elementi:

- *il livello di correlazione tra gli indicatori*: un alto livello di correlazione tra indicatori rappresenta un indice di buon livello di consistenza interna;
- *la dimensione del campione*: sono molti i suggerimenti che vengono dati per stabilire qualche criterio per definire la dimensione campionaria ottimale anche se nessuno di tali suggerimenti può assumere valore normativo generale;

- *la presenza di errori di misurazione correlati*: se gli indicatori condividono una varianza che va oltre quella spiegata dai fattori o l'esistenza di livelli non omogenei nelle correlazioni può essere spiegata con la presenza di errori di misurazione correlati, considerabili all'interno dell'approccio confermativo.

In generale la valutazione del modello utilizza gli approcci visti in precedenza ai quali si può aggiungere un importante metodo di verifica che coinvolge *factor loading*, varianza dei fattori e covarianza tra fattori, errore. In genere, tale verifica è fatta attraverso un approccio gerarchico finalizzato alla verifica, in successione,: dell'adattamento del modello più restrittivo e dell'invarianza dei *factor loading* e delle covarianze tra campioni diversi.

L'affidabilità delle scale fattoriali

Per ciascun fattore individuato è possibile definire punteggi individuali sommando i valori dei singoli indicatori considerati. Per i punteggi fattoriali così determinati è possibile stabilire il livello di affidabilità. Il procedimento non è semplice in quanto occorre tenere presenti alcuni elementi. Poniamo che il modello identificato presenti:

- un solo fattore (F) e
- tre indicatori (X_1, X_2, X_3) con uguali *loading*.

In questo caso le correlazioni riprodotte tra variabili sono uguali alla comunza: sapendo che le correlazioni tra gli indicatori possono essere riprodotte attraverso il prodotto dei rispettivi *factor loading*, e che, nel nostro esempio, tutti i *loading* sono uguali tra loro, la correlazione tra indicatori risulta essere equivalente alla comunanza dell'indicatore:

$$r_{x_1x_2} = a_{x_1}a_{x_2} = a_{x_1}^2 = a_{x_2}^2 = h^2$$

Data questa situazione il punteggio sarà dato dalla semplice combinazione dei punteggi degli indicatori che presentano lo stesso peso:

$$Fs = X_1 + X_2 + X_3$$

Questo vuol dire che l'indice *Fs* è composto da:

- un fattore comune F (rappresentato dalla somma delle tre variabili),
- tre fattori unici U_1, U_2 e U_3.

La varianza della scala *Fs* può essere espressa attraverso le varianze delle variabili:

$$\sigma_{Fs}^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_3}^2 + 2\left(Cov_{x_1x_2} + Cov_{x_1x_3} + Cov_{x_2x_3}\right)$$

La semplificazione è dovuta al fatto che nell'esempio i pesi sono uguali a 1 e le covarianze non sono solo uguali alle correlazioni ma anche tra di loro:

$$\sigma_{Fs}^2 = n + 2\left(r_{x_1x_2} + r_{x_1x_3} + r_{x_2x_3}\right) = n + n(n-1)r \quad [9]$$
$$= n\left[1 + (n-1)r\right] = n\left[1 + (n-1)h^2\right]$$

essendo $r_{12} = r_{13} = r_{23} = r = h_i^2$

La parte di varianza di *Fs* dovuta ai fattori unici è data da:

$$\sum\left(1 - h_i^2\right) = n\left(1 - h^2\right)$$

in quanto tutte le comunanze sono uguali.

Quindi la porzione di varianza di *Fs* spiegata dal fattore comune F è data da:

$$r_{(F,Fs)}^2 = \frac{\sigma_{Fs}^2 - n\left(1-h^2\right)}{\sigma_{Fs}^2} = \frac{n\left[1+(n-1)h^2\right] - n\left(1-h^2\right)}{n\left[1+(n-1)h^2\right]} = \frac{nh^2}{1+(n-1)h^2} = \frac{nr}{1+(n-1)r}$$

(equivalente alla affidabilità stimata con il coefficiente *Spearman-Brown*, come caso particolare dell'*alfa* di Cronbach).

Finora abbiamo assunto un modello con un unico fattore comune con *factor loading* uniformi e indicatori esenti da errore. Assumiamo ora un modello con un unico fattore comune in cui i *loading* non siano uniformi. La matrice di correlazione che si osserva in questi casi presenta valori di dimensioni diverse. L'affidabilità della scala fattoriale, costruita sommando semplicemente le

[9] Ricordiamo che ciò corrisponde alla somma di tutti i valori in una matrice di correlazione.

variabili osservate, è data dal rapporto tra la *somma degli elementi della matrice di correlazione corretta*[10] e *somma degli elementi della matrice di correlazione*:

$$\alpha = \frac{\sigma_{Fs}^2 - \sum\left(1 - h_i^2\right)}{\sigma_{Fs}^2}$$

Quando tutte le comunanze sono uguali, questa equazione è equivalente alla precedente. In generale a parità di comunanza (o correlazione) media, l'affidabilità risulterà maggiore in presenza di *loading* uniformi.

In presenza di *factor loading* differenti, e non uniformi, il punteggio individuale per ciascun fattoree deve essere calcolando sommando i punteggi degli indicatori, ciascuno dei quali deve essere pesato per mezzo del *factor score* che rappresenta il contributo originale di ciascun indicatore nella definizione di ciascun fattore. Tale peso presenta valori diversi dal *factor loading*. In questi casi l'affidabilità sarà data dalla seguente equazione

$$\alpha = \frac{\sigma_{Fs}^2 - \sum\left(1 - h_i^2\right)w_i^2}{\sigma_{Fs}^2} = \textit{affidabilità generalizzata}$$

dove

w_i peso fattoriale per ciascun indicatore

σ^2_{Fs} varianza totale della scala costruita.

La varianza totale è data da:

$$\sigma_{Fs}^2 = \sum\sum w_i w_j r_{ij}$$

che è equivalente alla somma degli elementi nella matrice di correlazione corretta in cui ciascun elemento è moltiplicato per i rispettivi due pesi w_i e w_j.

---

[10] Per matrice di correlazione corretta si intende quella in cui i valori in diagonale sono rappresentati dai quadrati di ciascun peso per un dato indicatore.