

Dottorato di Ricerca in Matematica
Sede: Università di Firenze
Università consorziate: Cagliari, Modena, Perugia, Siena

**UN MODELLO MATEMATICO
PER IL TRASPORTO DI RADIAZIONE
IN MEZZI ALEATORI**

Luigi Barletti

Tesi di Dottorato in Matematica
(IX ciclo: 1993-1997)

Coordinatore del Dottorato
Prof. Paolo Marcellini

Direttore della Ricerca
Prof. Aldo Belleni-Morante

Regardez le ciel. Demandez-vous: Le mouton oui ou non a-t-il mangé la fleur? Et vous verrez comme tout change... Et aucune grande personne ne comprendra jamais que ça a tellement d'importance.

A. de Saint Exupéry, *Le Petit Prince*

Prefazione

La presente tesi esamina con metodi dell'analisi funzionale un modello di trasporto di radiazione attraverso un mezzo aleatorio

Essa si inserisce in un progetto di ricerca che unisce da alcuni anni un gruppo di matematici e astrofisici dell'Università di Firenze. L'interesse per la materia, infatti, è duplice. Da una parte, una migliore comprensione del trasporto di radiazione attraverso *backgrounds* di incerta conformazione ha notevoli applicazioni allo studio del mezzo interstellare (uno dei maggiori settori dell'astrofisica contemporanea, nonostante la sua origine recente). Dall'altra parte, la teoria matematica del "trasporto stocastico" appare oggi in notevole sviluppo ma non sembra aver raggiunto ancora la piena maturità (sezione 1.1).

Per quanto la nostra trattazione sia costantemente ispirata dal problema del trasporto di radiazione in una nube aleatoria (e, in particolare, in una nube in cui zone più dense, dette *clumps*, sono distribuite in modo casuale), tuttavia si è cercato di mantenere una certa generalità che permetta di applicare i risultati ottenuti a una più vasta categoria di problemi di evoluzione condizionati da parametri aleatori. Pertanto il contenuto della tesi si suddivide in una parte generale, che riguarda un problema di evoluzione astratto in uno spazio di Banach, e in un'altra parte (continuamente interagente con la prima) in cui ci si occupa più specificatamente del trasporto di radiazione.

Nel capitolo 1 vengono introdotti in modo descrittivo i concetti fondamentali della teoria del trasporto stocastico. Poi si introduce brevemente lo scenario astrofisico. Segue una discussione su due possibili descrizioni probabilistiche dell'aleatorietà del mezzo, la prima basata su processi stocastici, la seconda su una funzione indicatrice dipendente da parametri aleatori. Questo secondo tipo di descrizione è poi assunto come modello di riferimento per lo svolgimento successivo.

Nel capitolo 2 vengono richiamati alcuni concetti e risultati noti di analisi in spazi di Banach, con particolare riguardo alla teoria dei problemi di evoluzione lineari. Si introduce anche l'estensione della teoria lineare al caso affine, secondo un'impostazione che appare originale rispetto alla letteratura di nostra conoscenza (sezione 2.4).

Nel capitolo 3 è studiato un problema di evoluzione aleatorio in uno spazio di Banach separabile \mathcal{X} . Si discutono le condizioni che permettono di "immergere" detto problema in uno spazio di variabili aleatorie integrabili, $L^p_{\mathcal{X}}$, associando

all'originario problema aleatorio nello spazio \mathcal{X} un problema deterministico nello spazio più grande $L_{\mathcal{X}}^p$. Questa impostazione ha una certa analogia con quella che, nel caso a dimensione finita, viene adottata per le cosiddette “equazioni aleatorie regolari”, [55], ma (sempre per quanto a nostra conoscenza) viene qui sviluppata in modo originale. Il risultato principale è rappresentato dal teorema 3.34, poi esteso al caso affine dal teorema 3.40.

Il capitolo 4 è dedicato al “problema della media”, di fondamentale importanza nelle applicazioni. Si tratta di trovare un'equazione che permetta di ricavare con buona approssimazione il valore atteso, o media, della soluzione del problema di evoluzione aleatorio. L'apparato formale del capitolo 3 permette di trattare con un certo rigore la cosiddetta “approssimazione *atomic-mix*” e la cosiddetta “tecnica dello *smoothing*”. Viene dimostrata anche una disuguaglianza di tipo Jensen che mostra come, sotto opportune ipotesi, l'approssimazione *atomic-mix* costituisca un limite inferiore per la soluzione esatta (teorema 4.17 e corollari). Nelle due sezioni conclusive si introduce un metodo inedito per il problema della media, basato su una decomposizione di tipo Fourier dello spazio $L_{\mathcal{X}}^2$ in cui il problema aleatorio è immerso (teoremi 4.26 e 4.31).

Nel capitolo 5, infine, torniamo al problema specifico del trasporto di radiazione. Introdotta la teoria formale standard del trasporto deterministico, si passa poi alla versione aleatoria applicando le tecniche dei capitoli 3 e 4. In particolare, si dà la dimostrazione che le ipotesi necessarie per poter immergere il problema nello spazio di variabili aleatorie integrabili, sono soddisfatte nel caso in cui il mezzo è costituito da un numero finito di *clumps* disposti in modo casuale all'interno della regione occupata dalla nube. I termini di sorgente superficiale (anche aleatori) sono trattati con le tecniche degli operatori affini.

Parte dei risultati originali della ricerca sono stati presentati nella sessione poster del 178° simposio dell'Unione Astronomica Internazionale *Molecules in Astrophysics*, tenutosi a Leiden (NL) nel luglio 1996 e in una comunicazione al XV Congresso Internazionale di Teoria del Trasporto, tenutasi a Göteborg (SW) nel Giugno 1997. Risultati sull'applicazione degli operatori affini ai problemi di trasporto sono stati pubblicati in [6].

Ringraziamenti

Vorrei esprimere la mia affettuosa riconoscenza per tutti coloro che mi hanno seguito e incoraggiato durante gli anni del dottorato e la preparazione della tesi. In particolare ringrazio il Prof. Aldo Belleni-Morante e il Prof. Giorgio Busoni per la loro costante e piena disponibilità nei miei confronti. Ringrazio poi il Prof. Santi Aiello e il Dott. Cesare Cecchi-Pestellini del Dipartimento di Astronomia dell'Università di Firenze, il Prof. Antonio Moro del Dipartimento di Statistica, il Prof. Adam McBride, per la sua ospitalità nel periodo che ho trascorso all'Università di Strathclyde a Glasgow, i coordinatori del Dottorato, Prof. Mario Primicerio, Prof. Carlo Pucci e Prof. Paolo Marcellini, tutti gli amici del Dottorato e tutto il personale del Dipartimento "Ulisse Dini".

Dedico la tesi ai miei genitori.

Luigi Barletti

Firenze, Febbraio 1998

Indice

Prefazione	v
1 Trasporto di radiazione in una nube aleatoria	1
1.1 Introduzione	1
1.2 I termini collisionali nell'equazione del trasporto	4
1.3 Cenni sulla struttura di una nube molecolare	8
1.4 La descrizione "line process"	10
1.5 La descrizione tramite funzione indicatrice aleatoria	13
1.6 Confronto tra le due descrizioni	16
2 Alcuni richiami di analisi in spazi di Banach	21
2.1 Spazi e algebre di Banach	21
2.2 Operatori lineari	26
2.3 Problemi di evoluzione e semigrupp di operatori	28
2.4 Operatori affini	34
2.5 Variabili aleatorie in spazi di Banach	38
2.6 L'integrale di Bochner	43
2.7 Prodotto tensoriale di spazi di Banach	47
3 Un problema di evoluzione aleatorio	53
3.1 Problemi di evoluzione con parametri aleatori	53
3.2 Lo spazio $L^p_{\mathcal{X}}$ come prodotto tensoriale	56
3.3 Operatori deterministici in $L^p_{\mathcal{X}}$	61
3.4 Semigrupp di deterministici	64
3.5 Perturbazioni aleatorie	69
3.6 Semigrupp generato dalla perturbazione aleatoria	73
3.7 Problemi di evoluzione affini aleatori	78
4 Il problema della media	85
4.1 L'approssimazione "atomic-mix"	86
4.2 Reticoli di Banach e operatori positivi	90
4.3 Disuguaglianza di Jensen per il semigrupp aleatorio	94
4.4 Il metodo dello "smoothing"	98
4.5 Una decomposizione di tipo Fourier dello spazio $L^2_{\mathcal{X}}$	104

4.6	Il metodo delle proiezioni	109
5	Applicazioni alla teoria del trasporto	115
5.1	Il trasporto di radiazione come problema di evoluzione astratto . . .	115
5.2	Condizioni al contorno non omogenee	120
5.3	L'operatore collisionale aleatorio	126
5.4	Sorgenti aleatorie	130
5.5	Formulazione completa del modello e risultati conclusivi	134
	Bibliografia	137
	Indice dei simboli	143

1

Trasporto di radiazione in una nube aleatoria

1.1 Introduzione

Il passaggio della radiazione attraverso un mezzo materiale dal quale la radiazione stessa può venire assorbita e dispersa è descritto con una certa generalità da un'equazione di Boltzmann linearizzata, detta *equazione del trasporto*:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t) = -c\vec{u} \cdot \nabla f(t) - c(\sigma^a + \sigma^s)f(t) + \int c\sigma^s K f(t) + q(t) \quad (1.1.1)$$

Tale equazione, che qui abbiamo presentato in forma schematica nella versione non stazionaria, esprime il bilancio statistico del numero di fotoni in un volume infinitesimo dello spazio delle fasi e in un intervallo infinitesimo di tempo, [22], [42]. Senza alterare di molto la struttura formale dell'equazione, questo tipo di descrizione è applicabile a una larga gamma di sistemi fisici, chimici, biologici e altri ancora. Tra gli altri, citiamo la distribuzione di neutroni in un reattore nucleare, la dinamica di una popolazione, il traffico di automezzi su strade a molte corsie, la formazione e l'accrescimento di macromolecole, [26]. Si chiama *teoria del trasporto* la teoria matematica generale sotto la quale tutti questi fenomeni sono accomunati.

La teoria del trasporto, in quanto fondata su un'equazione di tipo Boltzmann è *già* una teoria di tipo statistico. Non è perciò a questo aspetto statistico della teoria che ci si riferisce quando si parla di “trasporto stocastico” e di “trasporto deterministico”. Con il termine *trasporto stocastico* si intende riferirsi ad una situazione in cui le proprietà fisiche del mezzo di *background*, che vanno a determinare l'operatore collisionale

$$J_c f := -c(\sigma^a + \sigma^s)f + \int c\sigma^s K f \quad (1.1.2)$$

o il termine di sorgente q nell'eq. (1.1.1), non sono conosciute con certezza ma solo in senso statistico. Ad esempio, supponiamo di voler descrivere la radiazione che attraversa una miscela turbolenta di due fluidi con differenti proprietà ottiche. Non è ragionevole pensare che, dato un punto dello spazio e fissato un istante di tempo, si possa conoscere con certezza quale dei due fluidi sia presente. Si può però tentare una descrizione statistica in termini della *probabilità* che l'uno o l'altro fluido sia

presente. I parametri dell'interazione materia-radiazione, σ^a , σ^s , K , come funzioni dello spazio, del tempo, della frequenza e della direzione della radiazione, saranno allora variabili aleatorie o processi stocastici.

Un importante campo di ricerca in cui la teoria del trasporto stocastico trova applicazione è la fisica del mezzo interstellare. Le osservazioni danno prova evidente di una struttura *non omogenea* delle grandi nubi molecolari e dipingono piuttosto una situazione in cui una grande distesa di materiale (atomi, molecole, grani di polvere) a bassissima densità è popolata di piccole “nuvolette”, dette *clumps*, in cui la densità aumenta fino a un fattore 10^3 - 10^4 . L'eccessiva lontananza e l'opacità del mezzo impediscono di determinare esattamente la struttura *clumpy* della nube, della quale si hanno solo prove indirette. Ci si trova perciò nella necessità di adottare un approccio statistico. D'altra parte, una corretta stima del campo di radiazione a certe frequenze nelle nubi molecolari è di grande interesse per formulare modelli di evoluzione chimica delle nubi stesse. Da questo scenario astrofisico, che sarà descritto nella sezione 1.3, la nostra ricerca ha preso le mosse ed esso costituirà perciò il modello di riferimento della presente tesi. Tuttavia, essendo la nostra attenzione rivolta agli aspetti più propriamente matematici e formali della questione, la trattazione che svolgeremo ha una validità che non è legata strettamente a un modello in particolare, ma si rivolge a una certa categoria, più o meno vasta, di problemi di evoluzione stocastica.

Dal punto di vista delle applicazioni, uno degli scopi fondamentali della teoria del trasporto stocastico è quello di trovare il *valore medio* (o *valore atteso*), e magari anche momenti di ordine superiore, della soluzione di problemi ai valori al contorno e ai valori iniziali per l'equazione (1.1.1). Per “valore medio” si intende, naturalmente, la media $\langle f \rangle$ della soluzione f di (1.1.1) rispetto alle diverse configurazioni del mezzo di background che si realizzano con la legge di probabilità assegnata.

Supponiamo ad esempio di voler stimare l'affidabilità di lastre metalliche o di cemento usate nella schermatura da radiazioni o da neutroni. Supponiamo che il processo di produzione delle lastre lasci all'interno di queste delle imperfezioni, delle fratture, o delle “bollicine” (degli “*anticlumps*”), disposte in modo casuale. Il trasporto della radiazione in lastre siffatte è dunque un problema di trasporto stocastico, in cui il valore medio della soluzione ci dà una stima dell'affidabilità della schermatura.

Parlando molto intuitivamente, $\langle f \rangle$ è ciò che in linea di principio si troverebbe calcolando prima la soluzione di (1.1.1) per tutte le realizzazioni del background contemplate dalla descrizione probabilistica e poi mediando tutta questa collezione di soluzioni, tenendo conto della probabilità del verificarsi di ciascuna realizzazione.

Se volessimo trasformare in effettiva procedura di calcolo questa idea intuitiva dovremmo seguire i seguenti passi:

- si genera una possibile configurazione del background;
- si esegue il calcolo della soluzione dell'equazione di trasporto deterministica così ottenuta;
- si ripetono i primi due passi per diverse configurazioni, fino ad ottenere un campione sufficientemente rappresentativo;
- si calcola la media pesata fra tutte le soluzioni ottenute.

L'approccio appena descritto richiede una notevole mole di calcolo, spesso proibitiva. Quello che si fa, allora, è percorrere una via alternativa che consiste nel cercare un sistema di equazioni deterministiche che abbiano la media stessa $\langle f \rangle$ come incognita. In altre parole, dall'equazione stocastica (1.1.1) per f si cerca di dedurre una o più equazioni deterministiche per $\langle f \rangle$, eventualmente da chiudere o da approssimare in maniera opportuna, che ci permettano di ricavare $\langle f \rangle$ in modo relativamente semplice. Ci riferiremo a tutta la problematica relativa alla deduzione delle equazioni per $\langle f \rangle$, la loro approssimazione o chiusura, la loro convergenza al valore esatto di $\langle f \rangle$, eccetera, parlando di *problema della media*. Al problema della media è dedicato il capitolo 4 della tesi.

L'idea di studiare il trasporto in ambienti aleatori nasce probabilmente per la prima volta negli anni '40, nell'ambito del "*Progetto Manhattan*". Diverse pubblicazioni (si veda [63], anche per ulteriori riferimenti bibliografici) offrono un resoconto di tali studi iniziali, che hanno a che fare con una notevole varietà di aspetti aleatori nel contesto della fisica dei reattori.

Un rinnovato interesse per il trasporto stocastico si ha però solo a partire dalla metà degli anni '80. In particolare, il problema di descrivere il trasporto di particelle attraverso una miscela caotica di due fluidi incompenetrabili viene proposto per la prima volta al IX Congresso Internazionale di Teoria del Trasporto, tenutosi a Montecatini nel 1985. Di questo primo approccio si può trovare un resoconto negli atti del congresso, [43]. Negli anni immediatamente successivi tutta l'area di ricerca del trasporto stocastico ha progredito in modo sostanziale. I risultati salienti sono raccolti in una monografia, [45], nella quale il problema è trattato con una certa generalità per descrizioni statistiche di tipo *line process* (si veda la sezione 1.4). A questa rimandiamo anche per avere ulteriori riferimenti bibliografici sul periodo 1985-1991.

Negli ultimi anni si assiste ad un sempre crescente interesse per il trasporto stocastico da parte di numerosi autori di varia estrazione scientifica. Tenere conto di tutta la letteratura sull'argomento è impresa ardua. Rimandando a [46] per una bibliografia piuttosto dettagliata e aggiornata (almeno fino al 1996) vogliamo ora dare solo qualche esempio delle possibili applicazioni della teoria del trasporto stocastico.

Il campo di applicazione “principe”, che storicamente ha motivato le ricerche, è quello già citato dell’ingegneria nucleare. Anche il rinnovato interesse verso il trasporto stocastico trae origine dalle applicazioni all’ingegneria nucleare, e in particolare dalle problematiche relative ai processi di fusione. Nelle tecniche di fusione a confinamento inerziale, infatti, un corretto trattamento del trasporto di radiazione in mezzi turbolenti è cruciale nella predizione dell’efficienza del reattore, [32], [44].

Altro campo di applicazione “trainante” è quello della fisica dell’atmosfera, dove l’interazione con le nubi atmosferiche della radiazione proveniente dal sole e riflessa dalla superficie terrestre è di notevole importanza nei modelli di variazione del clima. Un’atmosfera parzialmente oscurata da nubi, può essere trattata come un mezzo aleatorio a due fasi, e di conseguenza la sua interazione con la radiazione può essere studiata con i metodi del trasporto stocastico, [56], [59], [65].

In astrofisica, oltre le già menzionate applicazioni allo studio del trasporto di radiazione nel mezzo interstellare, [15], [51], si hanno altri impieghi della teoria, come ad esempio in modelli di fisica solare, [3]. Molto interessanti sono anche le applicazioni in cosmologia, dove un adeguato trattamento del trasporto di radiazione e particelle attraverso un mezzo non omogeneo e di incerta distribuzione è di grande utilità per una corretta interpretazione delle informazioni provenienti dall’universo primordiale, [33].

Altri tipi di applicazione, ad esempio in campo medico, [60], sono stati suggeriti di recente.

1.2 I termini collisionali nell’equazione del trasporto

Gli aspetti aleatori nei problemi di trasporto sono molteplici e possono riguardare i fenomeni collisionali (assorbimento e *scattering*), le sorgenti, i dati al contorno e i dati iniziali.

Nella presente trattazione, l’attenzione viene rivolta principalmente all’aleatorietà del background. Questa si manifesta nell’equazione di trasporto come aleatorietà dell’operatore collisionale J_c , in quanto è attraverso tale operatore che nell’equazione di trasporto vengono considerate le interazioni radiazione-materia. Dedichiamo perciò questa sezione a richiamare il significato dei vari elementi che costituiscono l’operatore collisionale.

Consideriamo la radiazione trasportata da *fotoni*, ovvero particelle puntiformi e senza massa cui è associata una *frequenza* ν . A un fotone di frequenza ν è associata anche un’*energia* $E = h\nu$ (dove h è la costante di Planck) e un *momento* E/c (dove c è la velocità della luce nel vuoto. Pertanto lo spazio delle fasi di un fotone è parametrizzato dalle variabili

$$\vec{r} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{u} \in S^2, \quad \nu \in (0, +\infty), \quad (1.2.1)$$

dove con S^2 abbiamo indicato la sfera unitaria in \mathbb{R}^3 .

In teoria del trasporto di radiazione un possibile *stato* del sistema considerate è rappresentato da una funzione non negativa

$$f : \mathbb{R}^3 \times S^2 \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{r}, \vec{u}, \nu) \mapsto f(\vec{r}, \vec{u}, \nu) \geq 0 \quad (1.2.2)$$

col significato di *densità numerica* di fotoni nello spazio delle fasi. Si assume che f sia integrabile, in quanto l'integrale di f esteso a tutto lo spazio delle fasi ha il significato di *numero totale* di fotoni del sistema considerato. Normalizzando f in modo che tale integrale sia uguale a 1, $f(\vec{r}, \vec{u}, \nu)$ può essere interpretato come *densità di probabilità* di trovare un fotone nella posizione \vec{r} , con direzione \vec{u} e frequenza ν .

Osserviamo che in questa descrizione iniziale assumiamo per semplicità che ogni fotone sia libero di muoversi in tutto lo spazio e in qualunque direzione e di avere qualunque frequenza. Se il trasporto avviene in una determinata regione dello spazio, o solo un certo insieme di direzioni e frequenze sono considerate, la funzione f che rappresenta lo stato del sistema, sarà ristretta a un opportuno sottoinsieme dello spazio delle fasi e saranno inoltre assegnate opportune condizioni al bordo (sezione 5.1).

Se vogliamo descrivere l'evoluzione nel tempo dello stato del sistema, è necessario introdurre una dipendenza di f da un'ulteriore variabile reale t . Avremo perciò una funzione $f(\vec{r}, \vec{u}, \nu, t)$ tale che, per ogni fissato t , la funzione $f(t) := f(\cdot, \cdot, \cdot, t)$ è uno stato del sistema, nel senso della (1.2.2). Si assume che l'evoluzione, o "dinamica", di ogni sistema di trasporto di radiazione sia descritta da un'equazione del tipo (1.1.1). Tale equazione, il cui significato ci proponiamo ora di chiarire, è un *bilancio* per $f(t)$ in un volume infinitesimo dello spazio delle fasi.

La (1.2.1) si basa sul postulato che la variazione nel tempo di densità fotonica in un punto dello spazio delle fasi, rappresentata dal termine $\frac{\partial}{\partial t} f(t)$, sia dovuta a cinque distinti fenomeni:

1. il moto libero (*free streaming*) con velocità c dei fotoni in assenza di interazione con la materia circostante, (di questo fenomeno tiene conto il termine $-c\vec{u} \cdot \nabla f(t)$);
2. la possibilità di scomparsa di un fotone dal punto (\vec{r}, \vec{u}, ν) dello spazio delle fasi dovuta all'*assorbimento puro* (cioè "definitivo") del fotone stesso da parte del materiale circostante (termine $-\sigma^a f(t)$);
3. la possibilità di scomparsa di un fotone dal punto (\vec{r}, \vec{u}, ν) dovuta ad un cambio di direzione e/o di frequenza (*outscattering*) del fotone stesso in seguito a collisione col mezzo circostante (termine $-\sigma^s f(t)$);

4. la possibilità di *comparsa* di un fotone nel punto (\vec{r}, \vec{u}, ν) dovuto al cambio di direzione e/o di frequenza (*inscattering*) del fotone stesso in seguito a collisione col mezzo circostante (termine $c \int \sigma^s K f(t)$);
5. la comparsa/scomparsa di fotoni dovuta a un termine di sorgente/pozzo $q = q(\vec{r}, \vec{u}, \nu, t)$.

Rimandando a [22], [26] e [42] per un'esauriente descrizione dell'eq. (1.1.1), vediamo ora un po' più in dettaglio i termini di assorbimento e di scattering.

Consideriamo innanzitutto l'assorbimento puro. Mentre il fotone viaggia attraverso il materiale di background, c'è una certa probabilità che esso interagisca con tale materiale e scompaia "definitivamente". Per descrivere questo processo in modo quantitativo assegnamo una *sezione d'urto d'assorbimento* $\sigma^a = \sigma^a(\vec{r}, \nu)$. Questa è definita in modo tale che $\sigma^a(\vec{r}, \nu) c dt$ è la probabilità di assorbimento da parte del materiale circostante di un fotone di frequenza ν che si trova nel punto \vec{r} e viaggia (in una direzione qualunque) per un tempo dt . Poiché σ^a non dipende da \vec{u} e da t , stiamo assumendo implicitamente di trovarci in un mezzo *isotropo* e tale che le sue proprietà di interazione con la radiazione non variano nel tempo (almeno sulla scala di tempi del fenomeno di trasporto).

Analogamente si introduce una *sezione d'urto di scattering* $\sigma^s = \sigma^s(\vec{r}, \nu)$. Adesso $\sigma^s(\vec{r}, \nu) c dt$ è da interpretarsi come la probabilità che un fotone di frequenza ν , che si trova nel punto \vec{r} e viaggia (in una qualunque direzione \vec{u}) per un tempo dt , sia deviato in una qualunque nuova direzione \vec{u}_* e/o che la sua frequenza assuma un qualunque nuovo valore ν_* . Abbiamo parlato di "fotone deviato", ma si potrebbe anche parlare di "fotone assorbito e poi riemesso", purché si assuma che tale fenomeno sia localizzato, ovvero che la riemissione avvenga (praticamente) nello stesso punto in cui è avvenuto l'assorbimento e che sia (praticamente) istantanea.

Ricordando che $f(\vec{r}, \vec{u}, \nu, t)$ può essere interpretata come la densità di probabilità di trovare un fotone all'istante t nel punto (\vec{r}, \vec{u}, ν) dello spazio delle fasi, il termine $-c(\sigma^a + \sigma^s)f(t)$ nell'equazione del trasporto si giustifica come tasso di diminuzione dei fotoni nei punti dello spazio delle fasi, dovuta ad assorbimenti e a deviazioni e/o cambi di frequenza.

D'altra parte lo scattering dei fotoni "provenienti" da altre direzioni e frequenze contribuisce anche in positivo al bilancio. Per descrivere quantitativamente tale fenomeno di *inscattering* supponiamo che lo scattering sia localizzato e che possa essere descritto nei termini di un *fotone incidente* con direzione \vec{u}_* e frequenza ν_* e di un conseguente *fotone emergente* dalla collisione con direzione \vec{u} e frequenza ν . Il *nucleo di scattering* è una funzione $K = K(\vec{r}, \vec{u} \cdot \vec{u}_*, \nu, \nu_*)$ con il seguente significato. Fissati \vec{r} , \vec{u}_* e ν_* , la funzione K , come funzione di \vec{u} e ν , è la densità in $S^2 \times (0, +\infty)$ della probabilità che il fotone emergente abbia direzione \vec{u} e frequenza ν , assumendo che nel punto \vec{r} sia avvenuto un evento di scattering per un fotone

incidente con direzione \vec{u}_* e frequenza ν_* . Di conseguenza

$$\sigma^s(\vec{r}, \nu_*) K(\vec{r}, \vec{u} \cdot \vec{u}_*, \nu, \nu_*) c d\vec{u} d\nu dt$$

è la probabilità che un fotone di frequenza ν_* , che si trova nel punto \vec{r} e viaggia nella direzione \vec{u}_* per un tempo dt , subisca una collisione dalla quale emerge in una direzione contenuta in $\vec{u} + d\vec{u}$ e con una frequenza contenuta in $\nu + d\nu$ (abbiamo indicato con $d\vec{u}$ l'elemento infinitesimo di superficie su S^2). Moltiplicando per $f(\vec{r}, \vec{u}_*, \nu_*, t)$ e integrando su tutte le possibili direzioni e frequenze incidenti, si ottiene il contributo netto dell'inscattering nell'equazione del trasporto. Tale contributo, che nell'eq. (1.1.1) abbiamo indicato schematicamente con $\int c\sigma^s K f(t)$, ha perciò la seguente forma

$$\int_0^{+\infty} \int_{S^2} c \sigma^s(\vec{r}, \nu_*) K(\vec{r}, \vec{u} \cdot \vec{u}_*, \nu, \nu_*) d\vec{u}_* d\nu_*. \quad (1.2.3)$$

Per quanto riguarda la dipendenza di K dalle direzioni, incidente ed emergente, osserviamo che questa si manifesta solo attraverso l'*angolo* fra \vec{u} e \vec{u}_* , il che corrisponde alla nostra ipotesi di isotropia del mezzo. Questa ipotesi non va confusa con quella di *scattering isotropo*, che significa considerare K indipendente da \vec{u} e \vec{u}_* . Lo scattering è detto *coerente* se la probabilità che la frequenza emergente sia uguale a quella incidente è 1. Il nucleo K che descrive uno scattering isotropo e coerente in ogni punto dello spazio ha la forma più semplice possibile:

$$K(\vec{r}, \vec{u} \cdot \vec{u}_*, \nu, \nu_*) := \frac{1}{4\pi} \delta(\nu_* - \nu), \quad (1.2.4)$$

dove con δ abbiamo indicato la delta di Dirac. Osserviamo infine che in un evento di scattering un fotone incidente emerge sicuramente (per definizione) in una qualche direzione \vec{u} con una qualche frequenza ν , la funzione K . Ciò si rilegge matematicamente nella condizione di normalizzazione per la densità di probabilità K :

$$\int_0^{+\infty} \int_{S^2} K(\vec{r}, \vec{u} \cdot \vec{u}_*, \nu, \nu_*) d\vec{u} d\nu = 1, \quad (1.2.5)$$

per ogni \vec{r} , \vec{u}_* e ν_* .

La teoria formale del trasporto di radiazione (deterministico) considerata nella presente tesi sarà introdotta nella sezione 5.1. Essa si avvale dell'interpretazione dell'insieme dei possibili stati del sistema come elementi dello spazio di Banach delle funzioni integrabili secondo Lebesgue sullo spazio delle fasi. Perciò $f(t)$ è vista come elemento di tale spazio per ogni fissato t . In tale contesto, i problemi ai valori al contorno e ai valori iniziali per l'equazione del trasporto sono riformulati come problemi di evoluzione per $f(t)$. Perciò la teoria matematica del trasporto di radiazione ha per oggetto fondamentale un *problema di evoluzione (lineare) in uno spazio di Banach* (si veda la sezione 2.3). Per questa ragione, dopo un'introduzione

al problema del trasporto in una nube con *clumps* aleatori, e dopo alcuni richiami sulla teoria generale dei problemi di evoluzione (capitolo 2), nei capitoli 3 e 4 rivolgeremo la nostra attenzione ad un problema di evoluzione aleatorio in uno spazio di Banach generale e torneremo alla teoria del trasporto solo nel capitolo 5.

1.3 Cenni sulla struttura di una nube molecolare

Circa la metà della massa del gas neutro interstellare nella nostra galassia è contenuta in poche migliaia di nubi molecolari giganti di massa compresa tra 10^5 e $10^7 M_\odot$ (massa del sole, $M_\odot = 2 \times 10^{33} g$). Osservazioni recenti del gas galattico, nelle regioni spettrali del lontano infrarosso, sub-millimetrico e millimetrico hanno permesso uno studio dettagliato della struttura spaziale di queste regioni, su scale che vanno da 10^{-2} parsec (*pc*) fino alle dimensioni totali dei complessi di nubi ($\approx 100 pc$), mettendo in evidenza l'estrema complessità morfologica di questi ambienti. In effetti, significative fluttuazioni sono state osservate anche tra densità colonnari misurate lungo linee di vista relativamente vicine, che sono state interpretate come dovute alla presenza di *clumps*, filamenti, bolle in espansione e cavità.

Un'importante questione che viene sollevata da queste osservazioni, riguarda la formazione e l'evoluzione delle fluttuazioni di densità, poiché almeno alcuni dei *clumps* potrebbero non essere confinati dalla gravità, come inferibile dai valori delle loro velocità di dispersione interne e dalla loro massa. Di conseguenza, se non sono confinati dalla pressione ambiente esterna, si devono formare e disperdere su una scala di tempi molto breve. Tuttavia i clumps esistono. A sostegno di questa interpretazione parla il fatto che i clumps non sono soltanto fluttuazioni di densità colonnare sul piano del cielo, ma appaiono come entità ben definite nel dominio delle velocità. Clumps individuali visibili sulle mappe di densità colonnare, possono essere separati facilmente da altre componenti di velocità e così rappresentare condensazioni di alto contrasto nello spazio delle fasi. Criteri importanti per identificare i massimi dell'emissione con oggetti fisici stabili sono la correlazione spaziale tra stelle recentemente formate e i possibili *clumps*, ed il contrasto di densità tra mezzo *clump* e mezzo *interclump*. Si presume infatti che i *clumps*, in quanto zone dense e confinate dalla gravità, siano alle origini del processo di formazione stellare. Ad esempio nella nube molecolare situata nella regione del Toro, le stelle di tipo T-Tau e le sorgenti puntiformi IRAS (possibili protostelle) sono spesso localizzate all'interno o vicino a *cores* di ammoniaca (la molecola di ammoniaca NH_3 si forma in regioni interstellari di elevata densità). Analogamente, la parte più densa della nube molecolare "Rosetta" ρOph contiene al suo interno un cluster di stelle di recente formazione.

Il contrasto di densità stimato tra mezzo *interclump* e mezzo *clump* varia da

regione a regione ma non è mai inferiore ad un ordine di grandezza. Fluttuazioni di densità grandi fino ad un fattore 100 sono inferiti nelle regioni intorno alle stelle di classe spettrale OB (giganti blu). Osservazioni nel lontano infrarosso (la riga a $158\mu\text{m}$ dello ione C^+) hanno mostrato che questa emissione proviene da una regione estremamente più estesa di quella che dà origine all'emissione radiocontinua ed appare anche a diversi pc dall'associazione di stelle OB). La vasta estensione della regione di emissione della riga a $158\mu\text{m}$ viene interpretata come dovuta ad una grande penetrazione della radiazione UV nella nube. In effetti, i fotoni UV sono capaci di dissociare la molecola di monossido di carbonio CO nelle componenti atomiche, e successivamente ionizzare il carbonio, producendo così lo ione C^+ la cui emissione caratteristica è poi osservata nell'infrarosso. Un mezzo omogeneo non potrebbe permettere la penetrazione della radiazione UV a distanze così grandi dalla sorgente centrale di emissione. Le osservazioni astronomiche sono invece compatibili con uno scenario in cui la nube molecolare che circonda le stelle OB è frammentata in *clumps* di un fattore 10-100 più densi del mezzo in cui sono immersi.

In [58], lo studio dell'emissione infrarossa proveniente dalla nube molecolare M17 conduce a una precisa ricostruzione della struttura della nube. In particolare, si inferisce la presenza in M17 di 179 *clumps* di diametro compreso tra un minimo di 0.1 e un massimo di 0.6 parsec (il diametro di M17 è circa $2pc$), velocità comprese tra 0.5 e 3 Km s^{-1} e massa tra le 10 e le $1000 M_{\odot}$. I *clumps* hanno una densità di idrogeno molecolare compresa tra 10^5 e 10^6 molecole per centimetro cubico e riempiono circa il 30% del volume della nube. Lo spettro di massa derivato segue una legge di potenza del tipo $dn_c(m)/dm \approx m^{-1.7}$ (m indica la massa e $n_c(m)$ è il numero di *clumps* aventi massa m) Spettri di potenza simili sono stato successivamente ricavati per la nube Rosetta, ρOph , e per lo spettro di massa generale delle nubi molecolari giganti (gli esponenti della distribuzione sono compresi tra -1.1 e -1.6).

È interessante notare che un esponente ≈ 1.5 è consistente con uno scenario idrodinamico in cui vi sia equilibrio tra frammentazione e coagulazione del gas. Ancora più significativamente, un tale valore è compatibile con uno spettro di massa stellare alla Salpeter $dn_s(m)/dm \approx m^{-2.35}$ (dove $n_s(m)$ è il numero di stelle di massa m) come eventuale prodotto della frammentazione dei *clumps*, se la frazione di massa dei *clumps* che dà origine alle stelle decresce al crescere della massa.

La radiazione ultravioletta è un ingrediente fondamentale di qualunque teoria di chimica interstellare. Nel ciclo complesso della formazione e distruzione molecolare, il campo di radiazione ultravioletto gioca un ruolo duplice: se, da una parte, è il meccanismo più efficiente di distruzione delle specie neutre ($AB + h\nu \rightarrow A + B$), dall'altra favorisce la produzione di nuove specie molecolari immettendo nel gas

interstellare ioni chimicamente reattivi ($AB + h\nu \rightarrow AB^+ + e^-$) e “caldi” (specie con energia cinetica traslazionale in eccesso al background termico). La densità di radiazione ultravioletta non influenza soltanto la chimica della nube, ma determina anche il riscaldamento della polvere e la temperatura del gas. Ne consegue che sia l’interpretazione dell’emissione della polvere nel lontano infrarosso che le osservazioni di righe del CO a grandi numeri quantici (per mezzo delle quali questi processi possono essere direttamente studiati) o, più generalmente, qualunque modello realistico di nube molecolare, richiedono una conoscenza dettagliata del campo di radiazione *interno* alla nube.

La valutazione del campo di radiazione all’interno di una nube interstellare di gas e polveri implica la soluzione del problema del trasporto di radiazione. In particolare, devono essere considerati gli effetti di scattering coerente, non conservativo, anisotropo (si veda la sezione 1.2) dovuto alle particelle di polvere interstellare, [14]. Per quanto riguarda l’assorbimento puro dei fotoni ultravioletti da parte della polvere, è da notare che questo si traduce in un riscaldamento dei grani della polvere stessa. Questo fenomeno può anche essere interpretato come scattering da radiazione ultravioletta a radiazione infrarossa. Lo scattering coerente dell’ultravioletto da parte della polvere è comunque il fenomeno da considerarsi predominante, [20].

1.4 La descrizione “line process”

La scelta della descrizione probabilistica più appropriata del mezzo aleatorio che ospita il fenomeno radiativo (nel nostro caso la nube interstellare) è un punto fondamentale nella costruzione di ogni modello di trasporto stocastico.

Sebbene lo scopo della presente tesi non sia tanto quello di discutere tale scelta quanto quello di studiare il trattamento matematico del problema quando la descrizione probabilistica sia *già* stata fissata, tuttavia è chiaro che questo secondo aspetto non può prescindere completamente dal primo. Pertanto in questa sezione e nelle due successive compiremo una digressione, descrivendo due distinti “filoni” di possibili descrizioni probabilistiche di un background aleatorio. Il secondo di questi filoni, la descrizione di tipo *f.i.a.*, che sarà introdotta nella sezione 1.5, costituirà il modello probabilistico di riferimento nel seguente svolgimento della tesi.

Fissiamo una regione \mathcal{R} in cui avviene il fenomeno di trasporto e supponiamo che nella regione \mathcal{R} il mezzo col quale i fotoni interagiscono sia costituito da due o più fasi distribuite in \mathcal{R} in modo casuale. Una “fase” è una certa conformazione del mezzo ospite, che può distinguersi dalle altre fasi per composizione chimica, densità, temperatura eccetera. In ogni caso, per noi, una fase sarà completamente caratterizzata dai parametri fisici della sua interazione con la radiazione, come la sezione d’urto di assorbimento σ^a , la sezione d’urto di scattering σ^s e il nucleo

di scattering K (si veda la sezione 1.2). Supponiamo quindi che nella regione \mathcal{R} siano presenti n possibili tipi di conformazione del mezzo, cui sono associate n corrispondenti forme dei parametri di interazione:

$$(\sigma_1^a, \sigma_1^s, K_1), (\sigma_2^a, \sigma_2^s, K_2), \dots, (\sigma_n^a, \sigma_n^s, K_n).$$

Abbiamo usato la parola “forme” e non “valori” poiché le σ_i^a , le σ_i^s e le K_i saranno, in generale, funzioni anche della frequenza ν e della direzione \vec{u} della radiazione, eventualmente di tipo diverso nelle diverse fasi. La fase i -esima sarà, per definizione, quella conformazione del mezzo le cui proprietà fisiche rispetto all’interazione con i fotoni sono caratterizzate dalla tripla $(\sigma_i^a, \sigma_i^s, K_i)$. Per definizione, quindi, σ_i^a , σ_i^s e K_i non dipendono da \vec{r} .

Nel caso della nube con *clumps* siamo interessati ad un mezzo bi-fase: alla fase *interclump* sarà associato l’indice $i = 0$ e alla fase *clump* sarà associato l’indice $i = 1$. D’ora in poi ci limiteremo perciò a un mezzo bi-fase, tenendo presente che l’estensione al caso di n fasi non comporta particolari difficoltà, almeno a livello concettuale.

Il punto cruciale è il modo in cui si descrive probabilisticamente la distribuzione delle due fasi nella regione \mathcal{R} . In questa sezione ci occupiamo brevemente di un tipo di approccio che chiameremo *line process* e che è il più comunemente usato in letteratura. La descrizione *line process*, in sostanza, consiste nel fissare una linea di vista attraverso la regione \mathcal{R} e su questa assegnare un processo stocastico che descrive l’alternarsi dei “pacchetti” di fase 0 e di fase 1 lungo tale linea. Per “linea di vista” intendiamo una corda geometrica della regione convessa \mathcal{R} , ovvero la traiettoria di un fotone che attraversi \mathcal{R} senza incontrare ostacoli. Se λ è una linea di vista, per non appesantire la notazione, identificheremo λ con la sua parametrizzazione

$$\lambda : [-l_\lambda, l_\lambda] \rightarrow \mathcal{R}, \quad s \mapsto \lambda(s), \quad (1.4.1)$$

dove $2l_\lambda$ è la lunghezza della linea di vista λ (da bordo a bordo della nube), s è la lunghezza d’arco e uno dei due versi di percorrenza è stato fissato arbitrariamente. L’alternarsi delle due fasi lungo una linea di vista λ si suppone allora essere descritto da un processo stocastico:

$$\{\pi_\lambda(s) \mid s \in [-l_\lambda, l_\lambda]\}, \quad \pi_\lambda(s) \in \{0, 1\} \quad s \in [-l_\lambda, l_\lambda] \quad (1.4.2)$$

dove, per ogni s fissato, $\pi_\lambda(s)$ è una variabile aleatoria a valori in $\{0, 1\}$ definita su un’opportuno spazio di probabilità. Una volta scelto il processo stocastico $\pi_\lambda(s)$, la sezione d’urto di assorbimento lungo λ sarà anch’essa un processo stocastico dato da

$$\sigma_\lambda^a(s) := \sigma_0^a + (\sigma_1^a - \sigma_0^a)\pi_\lambda(s), \quad s \in [-l_\lambda, l_\lambda] \quad (1.4.3)$$

(la dipendenza da ν è sottintesa). Definizioni analoghe si danno per σ_λ^s e K_λ , la sezione d’urto di scattering e il nucleo di scattering lungo λ .

La scelta del tipo di processo stocastico da impiegare (è ragionevole usare lo stesso tipo di processo per tutte le linee di vista λ) può essere dettata da considerazioni fisiche come da ragioni di “opportunità” matematica. Una delle scelte più comuni, sia per le sue buone proprietà matematiche, sia per la sua effettiva corrispondenza con *certe* situazioni fisiche è quella in cui $\{\pi_\lambda(s) : s \in [-l_\lambda, l_\lambda]\}$ è una *catena di Markov* a due stati e a parametro continuo, [30], [40]. Una catena di Markov è un processo “senza memoria”: esso “sente” punto per punto una certa probabilità di transizione da uno stato a un altro, indipendentemente dalla sua “storia” passata. Questa proprietà (la *Markovianità* del processo) si esprime dicendo che, se $s > s_1 > s_2 > \dots > s_n$, la conoscenza dello stato del processo nei punti s_2, s_3, \dots, s_n non ha alcuna influenza sulla conoscenza del suo stato in s , ovvero:

$$\begin{aligned} \text{Prob} [\pi_\lambda(s) = i_0 \mid \pi_\lambda(s_1) = i_1, \pi_\lambda(s_2) = i_2, \dots, \pi_\lambda(s_n) = i_n,] \\ = \text{Prob} [\pi_\lambda(s) = i_0 \mid \pi_\lambda(s_1) = i_1] \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

dove $i_k \in \{0, 1\}$ per $k = 0, 1, \dots, n$.

Se indichiamo con $P_{ij}(r, s)$ la probabilità condizionata

$$P_{ij}(r, s) := \text{Prob} [\pi_\lambda(s) = j \mid \pi_\lambda(r) = i], \quad (1.4.5)$$

allora le funzioni P_{ij} soddisfano le note *equazioni di Chapman-Kolmogorov* [40], [30]. Una volta risolte tali equazioni, tutte le probabilità che interessano ai fini della teoria del trasporto stocastico si possono far discendere dalle funzioni P_{ij} , [45].

Indubbiamente, la descrizione *line process* ha degli aspetti poco “fisici”. In essa, ogni realizzazione della descrizione probabilistica (che si ottiene fissando una *traiettoria* del processo stocastico π_λ , per ogni linea di vista λ) *non può* dar luogo ad un’effettiva, realistica, descrizione del mezzo. Ad esempio, supponiamo che λ_1 e λ_2 siano due linee di vista che si incontrano in un punto $\vec{r}_0 \in \mathcal{R}$. Niente ci assicura che quando realizziamo una traiettoria per ciascuno dei due processi π_{λ_1} e π_{λ_2} queste abbiano lo *stesso* valore, 1 o 0, nel punto corrispondente a \vec{r}_0 . Ciò significa che la presenza della fase 1 o della fase 0 in un certo punto di \mathcal{R} *dipende dalla direzione*, il che è chiaramente assurdo dal punto di vista fisico e geometrico. Se poi λ_1 e λ_2 sono due linee di vista parallele e a distanza infinitesima l’una dall’altra, due fotoni che viaggiano affiancati su tali linee possono “vedere”, con probabilità non nulla, due situazioni completamente differenti durante il loro cammino. Queste semplici osservazioni, soprattutto la prima, generano forti dubbi sull’adeguatezza della descrizione *line process* quando il fenomeno di scattering sia non trascurabile. Senza di esso, la direzione della radiazione ha solo un ruolo di parametro nell’equazione del trasporto, per cui tutte le linee di vista possono considerarsi indipendenti. Ma lo scattering ha l’effetto di *accoppiare* le funzioni di distribuzione nelle varie dire-

zioni e una descrizione geometrica che scompone lo spazio in infinite linee di vista indipendenti sembra non conciliarsi con tale effetto.

Sottolineiamo il fatto che queste considerazioni hanno un carattere puramente intuitivo. È indubbio che la questione meriterebbe un'analisi probabilistica molto accurata, volta a stabilire, in situazioni concrete, se e quanto l'indipendenza stocastica delle linee di vista implichi una non corretta valutazione del fenomeno di scattering.

1.5 La descrizione tramite funzione indicatrice aleatoria

La scelta di un approccio *line process* è spesso dettata da situazioni in cui la conformazione del mezzo di background ha un carattere di estrema incertezza. Questo può essere, ad esempio, il caso di due (o più) fluidi miscelati in modo talmente turbolento e convoluto da rendere impensabile ogni tentativo di descrivere “globalmente” la loro distribuzione. Oppure può essere il caso di un background del quale, per una qualche ragione, non si sappia praticamente nulla e si voglia “tentare” una descrizione probabilistica (Poissoniana, Markoviana, eccetera). Tutto ciò che si può fare, in tali casi, è postulare un tipo di processo stocastico che descriva l'alternarsi dei segmenti di diverse fasi su ciascuna linea di vista. La scelta di tale processo e dei suoi parametri più opportuni sarà effettuata in base a considerazioni geometriche o a indicazioni sperimentali.

Possiamo però facilmente immaginare situazioni in cui, fermi restando degli elementi di incertezza, non occorre rinunciare ad una descrizione geometrica *globale* del background. Ciò avviene quando fra le “certezze” o “quasi certezze” che abbiamo sul nostro sistema c'è quella di una sua configurazione geometrica relativamente semplice. Ad esempio, supponiamo di dover descrivere un'atmosfera che sappiamo essere stratificata ma di non conoscere lo spessore o la composizione chimica dei vari strati. Questo mezzo potrà essere descritto in modo globale, lasciando nell'incertezza solo alcuni parametri, quali lo spessore degli strati o certi parametri fisici e chimici dei gas coinvolti.

In tali situazioni la descrizione *line process* può essere sostituita da una descrizione che tenga conto dell'effettiva conformazione del sistema per ogni fissato valore dei parametri aleatori. Nel caso di una nube *clumpy*, se immaginiamo i *clumps* come regioni ben definite, magari di forma approssimativamente sferica, distribuite casualmente all'interno della nube, le *posizioni* di tali regioni saranno gli unici parametri aleatori necessari alla descrizione. Fissato il valore di tali parametri quello che otteniamo è una nube “realistica”, fisicamente verosimile. In [11], [12] e [51], viene elaborato un modello in cui la nube interstellare è schematizzata come una regione convessa \mathcal{R} popolata aleatoriamente da un numero fissato n di *clumps*, rappresentati da regioni di forma sferica o ellissoidale. Tale

descrizione richiede un numero finito m di parametri aleatori che possono essere, ad esempio, le coordinate dei centri dei *clumps*, i loro raggi o semiassi, e così via. Se ω è il vettore aleatorio di dimensione m formato da tutti questi parametri, una singola realizzazione della conformazione del sistema si ottiene fissando il vettore ω . Ciò corrisponde a fissare posizione e forma dei clumps, ottenendo una precisa “immagine” geometrica della nube.

In generale, schematizziamo un approccio di questo tipo nel modo seguente. Sia Ω un sottoinsieme di \mathbb{R}^m sui boreliani del quale è assegnata una misura di probabilità \mathbf{P} . L’ipotesi fondamentale è che la fase *clump* sia individuata da una funzione indicatrice \mathcal{C} dipendente da $\omega \in \Omega$:

$$\mathcal{C}(\vec{r}, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{se nella posizione } \vec{r} \text{ è presente la fase } \textit{clump}, \\ 1, & \text{se nella posizione } \vec{r} \text{ è presente la fase } \textit{interclump}, \end{cases} \quad (1.5.1)$$

per ogni $\vec{r} \in \mathcal{R}$ e $\omega \in \Omega$. Tutta l’informazione probabilistica sul sistema è perciò contenuta nella funzione \mathcal{C} . Per questa ragione chiamiamo questa una descrizione “a funzione indicatrice aleatoria” (abbreviato con *f.i.a.*).

Descrizioni di tipo *f.i.a.* si ritrovano anche in campi diversi dalla teoria del trasporto (si veda ad esempio [34] e la bibliografia in esso riportata).

Supponiamo di voler descrivere una nube con n *clumps* di forma sferica distribuiti con una certa probabilità all’interno della regione \mathcal{R} . Poniamo

$$\omega := (\vec{c}_1, \rho_1, \vec{c}_2, \rho_2, \dots, \vec{c}_n, \rho_n), \quad (1.5.2)$$

dove, per ogni $k = 1, 2, \dots, n$, indichiamo con \vec{c}_k il centro del k -esimo *clump* e con ρ_k il suo raggio. Fissato un valore massimo ρ_{\max} e uno minimo ρ_{\min} per il raggio dei *clumps*, ω varierà nell’insieme

$$\Omega := \left(\mathcal{R} \times [\rho_{\min}, \rho_{\max}] \right)^n \subset \mathbb{R}^{4n}. \quad (1.5.3)$$

La scelta più semplice per \mathbf{P} è la probabilità uniforme su Ω . Se ora con $B_{\vec{c}, \rho}$ indichiamo l’intorno sferico di centro \vec{c} e raggio ρ , la funzione \mathcal{C} definita nell’eq. (1.5.1) avrà in questo caso la seguente forma

$$\mathcal{C}(\vec{r}, \omega) := \chi_{B_\omega}(\vec{r}), \quad B_\omega := \bigcup_{k=1}^n B_{\vec{c}_k, \rho_k} \quad (1.5.4)$$

dove χ_E è la funzione indicatrice dell’insieme E . Osserviamo che con tale definizione permettiamo ai *clumps* di debordare parzialmente dalla nube nonché di sovrapporsi. Naturalmente, se si vuole evitare ciò, basterà modificare opportunamente la (1.5.4) o la probabilità \mathbf{P} . Osserviamo anche che è possibile rendere aleatorio anche il numero stesso dei *clumps*. A questo scopo basterà fissare in n il numero massimo dei *clumps* e, ad esempio, moltiplicare i ρ_k nella (1.5.4) per un coefficiente ϵ_k che può assumere i valori 0 e 1 con probabilità assegnata. Tali

coefficienti costituiranno ulteriori componenti del vettore aleatorio ω dimodoché l'impianto formale rimane inalterato.

Una volta scelta la funzione \mathcal{C} (con le opportune regolarità che saranno discusse nella sezione 5.3), definiamo la sezione d'urto di assorbimento nel modo seguente:

$$\sigma^a(\vec{r}, \nu, \omega) := \sigma_0^a(\nu) + [\sigma_1^a(\nu) - \sigma_0^a(\nu)]\mathcal{C}(\vec{r}, \omega), \quad (1.5.5)$$

dove σ_0^a e σ_1^a sono, rispettivamente, le sezioni d'urto del mezzo *interclump* e del mezzo *clump*. Osserviamo che la definizione (1.5.5) assume implicitamente che la sezione d'urto nella zona di un'eventuale intersezione di due o più *clumps* rimanga σ_1^a . È chiaro che modificando opportunamente la (1.5.5) si può ovviare a questo fatto, se indesiderato.

In modo analogo si definiscono gli altri parametri aleatori del trasporto, come la sezione d'urto di scattering e il nucleo di scattering.

La descrizione *f.i.a.* è senz'altro più “fisica” di una del tipo *line process* perché, come si è sottolineato più volte, fissando il valore di ω si ottiene una nube “effettiva”, cosa che non è vera nella descrizione *line process*. Inoltre, tale approccio è abbastanza flessibile, nel senso che “allungando” opportunamente il vettore ω , e modificando di conseguenza la misura di probabilità \mathbf{P} , è possibile includere nella descrizione molti altri parametri aleatori riguardanti sia gli stessi *clumps* (ad esempio la loro forma o la loro orientazione, [51]) sia ulteriori elementi di incertezza, quali potrebbero essere le posizioni di sorgenti interne (stelle contenute nella nube). Supponiamo ad esempio di includere nella descrizione un termine di sorgente aleatorio, dovuto alla presenza di un numero n' di stelle la cui posizione all'interno di \mathcal{R} sia conosciuta solo in senso probabilistico. Potendosi considerare le stelle essenzialmente puntiformi (viste le dimensioni in gioco) tale situazione può essere descritta mediante n' vettori $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_{n'}$, distribuiti aleatoriamente in $\mathcal{R}^{n'}$, che indicano la posizione delle stelle. Per non dover specificare ogni volta diversi spazi di probabilità indipendenti (uno per le sorgenti, uno per i *clumps*, eccetera) possiamo ridefinire il vettore ω , inserendo in esso anche le coordinate dei nuovi vettori aleatori \vec{s}_k . Naturalmente, si dovrà ridefinire opportunamente anche la misura di probabilità \mathbf{P} in modo da tener conto, ad esempio, dell'indipendenza probabilistica della posizione delle sorgenti da quella dei *clumps*.

Assumendo isotropia e stazionarietà dell'emissione, il termine di sorgente da inserire nell'equazione di trasporto sarà quindi una funzione $q = q(\vec{r}, \nu, \omega)$ della seguente forma:

$$q(\vec{r}, \nu, \omega) = \sum_{k=1}^{n'} \epsilon_k(\nu) \delta(\vec{r} - \vec{s}_k), \quad (1.5.6)$$

dove δ è la delta di Dirac centrata nell'origine e $\epsilon_k(\nu)$ è un opportuno coefficiente di emissione, da parte della k -esima stella, di radiazione di frequenza ν .

Non ci si può certo nascondere che dal punto di vista applicativo l'aumento dei parametri aleatori implica una crescita delle difficoltà di calcolo (nella sezione 1.3 abbiamo visto che una nube molecolare di medie dimensioni può contenere centinaia di *clumps*,) D'altra parte si deve anche ammettere che una descrizione della nube come quella risultante dall'eq. (1.5.4) è perfino *troppo* dettagliata, specificando una probabilità indipendente per il raggio e la posizione di *ogni singolo clump*. Riteniamo che un approccio corretto dovrebbe tentare di ridurre in modo oculato il numero dei parametri aleatori, cercando una descrizione che, tramite pochi parametri e un'opportuna misura di probabilità, simuli sufficientemente bene l'aleatorietà della distribuzione. Per fare un esempio, potremmo assumere che le distanze reciproche dei *clumps* siano fissate e che gli angoli di Eulero di una tale "rete" rigida di *clumps* siano gli unici parametri aleatori del problema. Molte altre semplificazioni di questo tipo sono proponibili.

Chiudiamo la sezione osservando che da un punto di vista formale possiamo sostituire lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathfrak{B}_\Omega, \mathbf{P})$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e \mathfrak{B}_Ω è la σ -algebra di Borel di Ω (si veda la sezione 2.5), con uno spazio di probabilità generale $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, dove Ω è l'insieme degli eventi elementari da cui dipende la funzione \mathcal{C} . Come vedremo nel capitolo 3 le uniche proprietà che dovremo supporre su $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ sono la sua *completezza* e la sua *separabilità* (certamente soddisfatte nel caso in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}_\Omega$).

1.6 Confronto tra le due descrizioni

In questa sezione ci spostiamo su un piano più astratto per confrontare da un punto di vista formale la descrizione *line process* e la descrizione *f.i.a.* del mezzo aleatorio. A questo scopo utilizzeremo alcuni concetti fondamentali della teoria formale dei processi stocastici, per la quale facciamo riferimento ai testi [13] e [30]. Per quanto riguarda le definizioni relative agli spazi di probabilità, si può far riferimento a [13] e anche alla sezione 2.5 della presente tesi.

Consideriamo per semplicità una "nube unidimensionale", cioè coincidente con l'unica linea di vista λ di lunghezza l . I *clumps* sono allora segmenti su tale linea. Questa situazione semplificata permette di illustrare con più chiarezza analogie e differenze delle due descrizioni.

Nella descrizione *line process* l'aleatorietà del mezzo lungo λ è rappresentata da un processo stocastico $\{\pi(s) : s \in [-l, l]\}$ che può assumere i valori 0 e 1. Per ogni s fissato, $\pi(s)$ è dunque una *variabile aleatoria* a valori in $\{0, 1\}$, definita su di un opportuno spazio di probabilità del quale non ci interessa precisare la natura ma solo la distribuzione che esso induce sulle variabili aleatorie $\pi(s)$.

Una "realizzazione" del processo $\pi(s)$ è una normale funzione $s \mapsto \pi(s)$ da $[-l, l]$ a $\{0, 1\}$ che viene chiamata *traiettoria*. Poiché, come si è detto, non ci interessa

tanto specificare lo spazio di probabilità soggiacente quanto le traiettorie risultanti e la loro distribuzione, seguendo un procedimento standard della teoria dei processi stocastici, *identifichiamo* le possibili traiettorie con gli eventi elementari di tale spazio di probabilità. In altre parole riguardiamo il processo stocastico come misura di probabilità sull'insieme

$$\Pi := \{0, 1\}^{[-l, l]} \quad (1.6.1)$$

di tutte le funzioni definite sull'intervallo $[-l, l]$, a valori in $\{0, 1\}$. A questo scopo è necessario specificare una σ -algebra di sottoinsiemi misurabili di Π . Osserviamo che una richiesta naturale è che siano misurabili gli insiemi del tipo

$$\{\pi \in \Pi \mid \pi(s_1) = i_1, \pi(s_2) = i_2, \dots, \pi(s_n) = i_n\}, \quad (1.6.2)$$

dove $s_k \in [-l, l]$ e $i_k \in \{0, 1\}$ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$. Gli insiemi di questo tipo sono detti *cilindrici*. Se con \mathfrak{G} indichiamo la σ -algebra generata dagli insiemi cilindrici, si può dimostrare che \mathfrak{G} corrisponde alla σ -algebra di Borel associata alla topologia prodotto di Π . Se per $n \in \mathbb{N}$ e $s_1, s_2, \dots, s_n \in [-l, l]$ definiamo le *misure a dimensione finita* $\mu_{s_1, s_2, \dots, s_n}$ associate al processo $\{\pi(s) : s \in [-l, l]\}$ nel seguente modo

$$\mu_{s_1, s_2, \dots, s_n}(i_1, i_2, \dots, i_n) := \text{Prob}[\pi(s_1) = i_1, \pi(s_2) = i_2, \dots, \pi(s_n) = i_n], \quad (1.6.3)$$

dove $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{0, 1\}$, su \mathfrak{G}_λ esiste una misura di probabilità \mathbf{Q} che ristretta agli insiemi cilindrici coincida con le misure a dimensione finita (teorema di estensione di Kolmogorov, [13], sez. 36, teorema 36.1). Abbiamo così costruito uno spazio di probabilità $(\Pi, \mathfrak{G}, \mathbf{Q})$ che rappresenta il processo stocastico π , nel senso che questo è visto come misura di probabilità sull'insieme delle traiettorie. Le misure finito-dimensionali determinano molte proprietà del processo π_λ , ma non tutte. Corrispondentemente, il teorema di Kolmogorov assicura l'esistenza ma non l'unicità di \mathbf{Q} . È quindi più corretto parlare di $(\Pi, \mathfrak{G}, \mathbf{Q})$ come di una *versione* del processo π . Tuttavia, in opportune circostanze è possibile “selezionare” una versione del processo che rispecchi le proprietà che ci dobbiamo aspettare dalle traiettorie e che non sono implicate dalle distribuzioni a dimensione finita. Ad esempio se supponiamo che π sia una catena di Markov a due stati, si può dimostrare che esiste una versione $(\Pi, \mathfrak{G}, \mathbf{Q})$ in cui le traiettorie sono continue da destra con probabilità 1 ([30], cap. 8, sez. 3, Teorema 1).

Per ogni $\pi \in \Pi$ possiamo definire $\mathcal{C}(\vec{r}, \vec{u}, \pi)$ come il valore (0 o 1) del processo $\pi(s)$ nel punto s , ovvero

$$\mathcal{C}(s, \pi) := \pi(s). \quad (1.6.4)$$

Perciò la descrizione *line process* si può riguardare come descrizione di tipo *f.i.a.*, dove lo spazio di probabilità è $(\Pi, \mathfrak{G}, \mathbf{Q})$.

Partiamo, viceversa, da una descrizione di tipo *f.i.a.*. Sia $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità assegnato e \mathcal{C} una funzione indicatrice, dipendente da $\omega \in$

Ω , che rappresenta la distribuzione aleatoria della fase *clump* sulla nostra nube unidimensionale parametrizzata con $s \mapsto \lambda(s)$, $s \in [-l, l]$:

$$\mathcal{C}(s, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{se nel punto } \lambda(s) \text{ è presente la fase } \textit{clump}, \\ 1, & \text{se nel punto } \lambda(s) \text{ è presente la fase } \textit{interclump}. \end{cases} \quad (1.6.5)$$

Possiamo allora definire un processo stocastico $\{\pi(s) : s \in [-l, l]\}$ ponendo semplicemente

$$[\pi(s)](\omega) := \mathcal{C}(s, \omega), \quad s \in [-l, l], \quad \omega \in \Omega. \quad (1.6.6)$$

Avremo perciò una misura di probabilità \mathbf{Q} su Π che viene semplicemente *indotta* da \mathbf{P} tramite le misure a dimensione finita, secondo la formula

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q}[\pi(s_1) = i_1, \pi(s_2) = i_2, \dots, \pi(s_n) = i_n] \\ & := \mathbf{P}[\mathcal{C}(\lambda(s_1), \omega) = i_1, \mathcal{C}(\lambda(s_2), \omega) = i_2, \dots, \mathcal{C}(\lambda(s_n), \omega) = i_n], \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

dove, al solito, gli i_k variano in $\{0, 1\}$.

Quindi, possiamo altresì riguardare la descrizione *f.i.a.* come una descrizione *line process*, in cui i processi π sono indotti da \mathcal{C} e, corrispondentemente, la probabilità \mathbf{Q} è indotta da \mathbf{P} .

C'è dunque un'equivalenza *formale* tra le due descrizioni. Sottolineiamo questo fatto per suggerire che certe tecniche introdotte per la descrizione *f.i.a.* potrebbero adattarsi ad una descrizione *line process* e viceversa.

Per “equivalenza formale” intendiamo che ogni differenza tra le due descrizioni può essere ricondotta alla differenza tra due misure di probabilità sull'insieme $\Pi := \{0, 1\}^{[-l, l]}$. Consideriamo ad esempio una descrizione *line process* che faccia uso di una catena di Markov a due valori e una descrizione *f.i.a.* in cui gli unici parametri aleatori siano i centri $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ di n clumps (unidimensionali) di raggio $\rho < l$ fissato. Questa seconda descrizione si baserà quindi sulla funzione indicatrice

$$\mathcal{C}(s, \omega) := \chi_{\bigcup_{k=1}^n [\omega_k - \rho, \omega_k + \rho]}(s), \quad s \in [-l, l]. \quad (1.6.8)$$

Qui l'evento elementare $\omega := (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ si identifica con n punti sul segmento $[-l, l]$. Perciò $\Omega = [-l, l]^n$ e possiamo scegliere come \mathfrak{F} la σ -algebra di Borel $\mathfrak{B}_{[-l, l]^n}$ e come \mathbf{P} , ad esempio, la probabilità uniforme su $[-l, l]^n$. Come abbiamo visto, entrambe le descrizioni comportano una misura di probabilità \mathbf{Q} sull'insieme Π , ovvero una misura della probabilità di avere una certa suddivisione di $[-l, l]$ in un segmento di tipo 0 e di tipo 1. Ma, nel caso *line process*, \mathbf{Q} è la “complicata” misura di probabilità su Π associata ad un processo markoviano, mentre nel caso *f.i.a.* \mathbf{Q} è solo l’“immagine” su Π della “semplice” misura di probabilità \mathbf{P} . Le due misure \mathbf{Q} nei due casi sono diversissime. Tanto per fare un esempio fra i molti possibili, l'evento “su λ ci sono almeno $n + 1$ distinti segmenti di tipo 1” ha probabilità 0 nel secondo caso (ci sono al massimo n clumps non sovrapposti)

mentre ha probabilità non nulla nel primo caso. Osserviamo anche che nel caso *f.i.a.*, il processo π indotto da \mathcal{C} su λ non è Markoviano. Consideriamo infatti il seguente controesempio. Fissati $2n$ punti $l > s_1 > s_2 > \dots > s_{2n} > -l$ aventi distanza reciproca maggiore di ρ (raggio massimo dai clumps) consideriamo la probabilità condizionata

$$P := \mathbf{P} [\pi(s) = 1 \mid \pi(s_1) = 0, \pi(s_2) = 1, \dots, \pi(s_{2n-1}) = 0, \pi(s_{2n}) = 1]$$

con $s > s_1$. È chiaro che tale probabilità è nulla, in quanto π_λ si è già lasciato alle spalle gli n *clumps*, mentre è non nulla la probabilità condizionata.

$$P' := \mathbf{P} [\pi(s) = 1 \mid \pi(s_1) = 0]$$

Pertanto il processo è, per definizione, non-Markoviano.

2

Alcuni richiami di analisi in spazi di Banach

In questo capitolo saranno brevemente richiamati, senza alcuna pretesa di offrire una presentazione esauriente, alcuni concetti e risultati di analisi negli spazi di Banach che saranno utilizzati nella nostra trattazione. Per ogni ulteriore approfondimento rimandiamo ai testi citati nelle varie sezioni.

Con questo capitolo inizia anche un'esposizione più formale degli argomenti, con una suddivisione in *definizioni*, *lemmi*, *teoremi* e *corollari*. Tutti i lemmi e tutti i teoremi saranno seguiti dalla dimostrazione oppure, se si tratta di risultati noti o comunque presenti in letteratura, dall'indicazione bibliografica relativa. Useremo anche il titolo *osservazione* per quei risultati che sono conseguenza immediata delle definizioni, o che hanno un carattere accessorio nel contesto, o che sono semplici osservazioni da mettere in risalto. Per questo motivo l'*osservazione* potrà essere o non essere accompagnata dalla dimostrazione.

Un'ultima avvertenza riguarda la notazione. Come già si è fatto nel corso del capitolo 1, useremo il simbolo $:=$, quando l'uguaglianza è intesa *definire* un nuovo simbolo. Come esempio, introduciamo gli insiemi numerici

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mathbb{R}^+ := \{\rho \in \mathbb{R} \mid \rho \geq 0\}, \quad (2.0.1)$$

dove si usano i simboli standard \mathbb{N} , \mathbb{R} e \mathbb{C} per indicare, rispettivamente, i numeri naturali, reali e complessi.

2.1 Spazi e algebre di Banach

Ricordiamo anzitutto che una *norma* in uno spazio vettoriale \mathcal{X} sul campo dei numeri complessi \mathbb{C} è una funzione $\|\cdot\| : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che

- a) $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$ (dove 0 è l'elemento nullo dello spazio);
- b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ per ogni $x \in \mathcal{X}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$;
- c) $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ per ogni $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$.

Uno spazio vettoriale su cui è definita una norma sarà detto *spazio vettoriale normato*. Uno spazio vettoriale normato è anche uno spazio metrico, con la distanza

indotta in modo canonico dalla norma

$$\text{dist}(x_1, x_2) := \|x_1 - x_2\| \quad x_1, x_2 \in \mathcal{X}, \quad (2.1.1)$$

ed ha perciò anche la topologia naturale *metrica*, generata dagli intorni sferici aperti del tipo

$$B_{x,\delta} := \{y \in \mathcal{X} \mid \text{dist}(y, x) < \delta\}. \quad (2.1.2)$$

Uno spazio vettoriale normato, con la topologia metrica indotta dalla norma, ha perciò una struttura naturale di *spazio vettoriale topologico*, ovvero di uno spazio vettoriale su cui è definita una topologia rispetto alla quale le operazioni di addizione e di prodotto per uno scalare sono continue, [50].

L'ambiente matematico fondamentale di questa tesi è costituito da *spazi di Banach*.

Definizione 2.1 *Uno spazio di Banach (complesso) è uno spazio vettoriale normato (su \mathbb{C}), che risulti completo rispetto alla metrica indotta dalla norma.*

Un sottoinsieme \mathcal{L} di uno spazio di Banach \mathcal{X} che sia un sottospazio vettoriale di \mathcal{X} è detto semplicemente *sottospazio* di \mathcal{X} . Se il sottospazio \mathcal{L} è un sottoinsieme topologicamente chiuso di \mathcal{X} , allora \mathcal{L} è a sua volta uno spazio di Banach (con la stessa norma, ovviamente ristretta a \mathcal{L}).

Una famiglia di spazi di Banach particolare è quella in cui la norma nasce a sua volta da un *prodotto hermitiano* definito positivo. tali spazi vengono detti *di Hilbert*.

Definizione 2.2 *Sia \mathcal{X} uno spazio di Banach. Un prodotto hermitiano su \mathcal{X} è un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che*

- a) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$;
- b) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;
- c) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

per ogni $x_1, x_2, y \in \mathcal{X}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Il prodotto hermitiano si dice definito positivo se

- d) $\langle x, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in \mathcal{X}$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$;

si dice, infine, continuo se esiste $\alpha \geq 0$ tale che

- e) $|\langle x, y \rangle| \leq \alpha \|x\| \|y\|$ per ogni $x, y \in \mathcal{X}$.

Definizione 2.3 *Uno spazio di Hilbert è uno spazio di Banach \mathcal{H} con norma $\|\cdot\|$ sul quale è assegnato un prodotto hermitiano definito positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tale che*

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle \quad x \in \mathcal{H}. \quad (2.1.3)$$

Il prodotto hermitiano in uno spazio di Hilbert risulta essere continuo per la *disuguaglianza di Schwarz*:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad x, y \in \mathcal{H}. \quad (2.1.4)$$

Lo studio degli operatori lineari su uno spazio di Banach è della massima importanza in analisi funzionale pura e applicata. In particolare, l'analisi dello *spettro* di un operatore lineare ha un ruolo fondamentale nella teoria dei problemi di evoluzione, teoria che è il principale riferimento matematico di questa tesi.

L'analisi spettrale degli operatori richiede come “ambiente di lavoro” uno spazio di Banach *complesso*. D'altra parte, gli spazi di Banach che emergono in modo naturale nella modellizzazione di sistemi fisici classici sono nella maggior parte dei casi *reali*, ovvero spazi vettoriali sul campo dei numeri reali. C'è quindi bisogno di un metodo canonico per passare da uno spazio reale ad uno complesso.

Definizione 2.4 *Sia \mathcal{X} uno spazio di Banach reale con norma $\|\cdot\|$. Definiamo complessificazione di \mathcal{X} lo spazio di Banach*

$$\mathcal{X}_{\mathbb{C}} := \{x + iy \mid x, y \in \mathcal{X}\}, \quad (2.1.5)$$

in cui la somma vettoriale è definita da

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2), \quad (2.1.6)$$

il prodotto per uno scalare $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ è definito da

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) := \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y) \quad (2.1.7)$$

e la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ è definita da

$$\|x + iy\|_{\mathbb{C}} := \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} \|x \cos \theta + y \sin \theta\|. \quad (2.1.8)$$

Anche uno spazio di Hilbert reale, ovvero uno spazio di Banach reale la cui norma nasce da un prodotto scalare, ammette una complessificazione canonica. Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert reale, rispetto alla norma $\|\cdot\|$ e al prodotto scalare (bilineare, simmetrico e definito positivo) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ la complessificazione di \mathcal{H} come spazio di Banach e definiamo su $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ il prodotto hermitiano:

$$\langle x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \rangle_{\mathbb{C}} := \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle + i[\langle y_1, x_2 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle], \quad (2.1.9)$$

per ogni $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

Teorema 2.5 *Lo spazio di Banach $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, con la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$, è uno spazio di Hilbert per il prodotto hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$, ovvero*

$$\|x + iy\|_{\mathbb{C}}^2 = \langle x + iy, x + iy \rangle_{\mathbb{C}} \quad x + iy \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}. \quad (2.1.10)$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha $\langle x + iy, x + iy \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$ e, d'altra parte,

$$\begin{aligned} \|x + iy\|_{\mathbb{C}}^2 &= \left(\sup_{0 \leq \theta < 2\pi} \|x \cos \theta + y \sin \theta\| \right)^2 = \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} \|x \cos \theta + y \sin \theta\|^2 \\ &= \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} \langle x \cos \theta + y \sin \theta, x \cos \theta + y \sin \theta \rangle = F(\theta) \end{aligned}$$

dove

$$F(\theta) := \left\{ \langle x, x \rangle \cos^2 \theta + \langle y, y \rangle \sin^2 \theta + 2\langle x, y \rangle \sin \theta \cos \theta \right\}$$

Studiando la funzione $F(\theta)$ e sfruttando la “formula di polarizzazione” del prodotto scalare $2\langle x, y \rangle = \langle x + y, x + y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle$ si trova che $\sup_{0 \leq \theta < 2\pi} F(\theta) = \|x\|^2 + \|y\|^2$, da cui la tesi. \square

Lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ è detto *complessificazione* di \mathcal{H} .

D'ora in avanti, passando eventualmente alle complessificazioni, potremo sempre supporre di lavorare con spazi di Banach e di Hilbert complessi. Parleremo quindi semplicemente di “spazio di Banach” sottintendendo sempre “complesso”.

Dati due spazi di Banach \mathcal{X} e \mathcal{Y} , si associa ad essi lo spazio $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ delle applicazioni lineari limitate da \mathcal{X} in \mathcal{Y} definite su tutto \mathcal{X} , dette più semplicemente *operatori limitati da \mathcal{X} in \mathcal{Y}* .

Un'applicazione lineare $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ si dice *limitata* se il numero reale positivo

$$\|F\| := \sup \left\{ \frac{\|Fx\|}{\|x\|} \mid x \in \mathcal{X}, x \neq 0 \right\} \quad (2.1.11)$$

esiste finito.

Il modo in cui abbiamo scritto la (2.1.11) richiede due precisazioni. Innanzitutto, com'è uso comune per applicazioni lineari, abbiamo scritto Fx anziché $F(x)$. Poi abbiamo utilizzato lo stesso simbolo $\|\cdot\|$ per indicare la norma in spazi diversi. In effetti, avremmo dovuto distinguere le norme nei diversi spazi usando, ad esempio, un pedice con il simbolo dello spazio corrispondente: $\|x\|_{\mathcal{X}}$, $\|Fx\|_{\mathcal{Y}}$, $\|F\|_{[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]}$. Tuttavia, questa notazione è un po' ingombrante e, d'altra parte, l'argomento della norma fa subito capire a quale spazio ci si sta riferendo. Perciò di regola eviteremo di usare notazioni del tipo $\|x\|_{\mathcal{X}}$, scrivendo semplicemente $\|x\|$, salvo quando particolari esigenze di chiarezza non lo richiederanno.

Osservazione 2.6 $F \in [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ se e solo se è continua 0. Inoltre

$$\|F\| := \sup \{ \|Fx\| \mid x \in \mathcal{X}, \|x\| = 1 \}. \quad (2.1.12)$$

DIMOSTRAZIONE. Si veda [64], cap. I, sez. 6. \square

Teorema 2.7 *Lo spazio vettoriale $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ delle applicazioni lineari limitate da \mathcal{X} in \mathcal{Y} , con la norma $\|\cdot\|$ definita dall'eq. (2.1.11), è uno spazio di Banach.*

DIMOSTRAZIONE. Si veda [61], cap. IV, teorema 1.1. \square

L'introduzione degli spazi $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ ci permette di dare subito la seguente, importante, definizione.

Definizione 2.8 *Sia \mathcal{X} uno spazio di Banach. Definiamo duale di \mathcal{X} lo spazio di Banach $\mathcal{X}^* := [\mathcal{X}, \mathbb{C}]$.*

Passiamo ora a definire le algebre di Banach.

Definizione 2.9 *Un'algebra di Banach è uno spazio di Banach \mathcal{A} sul quale è definita un'operazione di moltiplicazione, che ad ogni coppia ordinata (x, y) di elementi di \mathcal{A} associa un elemento $xy \in \mathcal{A}$, tale che le seguenti proprietà:*

- a) $x(yz) = (xy)z$,
- b) $(x + y)z = xz + yz$,
- c) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$,
- d) $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$,

siano soddisfatte per ogni $x, y, z \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, e inoltre esista un elemento neutro del prodotto $I \in \mathcal{A}$ con le proprietà

- e) $xI = Ix = x$ per ogni $x \in \mathcal{A}$,
- f) $\|I\| = 1$.

Osservazione 2.10 *L'elemento neutro I è unico.*

Gli operatori limitati da uno spazio di Banach in sé hanno una struttura naturale di algebra di Banach. Posto

$$[\mathcal{X}] := [\mathcal{X}, \mathcal{X}] \tag{2.1.13}$$

si ha il seguente teorema.

Teorema 2.11 *Sia \mathcal{X} uno spazio di Banach. Lo spazio di Banach $[\mathcal{X}]$ con l'operazione di prodotto data dalla composizione degli operatori è un'algebra di Banach.*

DIMOSTRAZIONE. Si veda [61], cap. IV, teorema 1.3. \square

Concludiamo la sezione ricordando che nel corso di questa tesi parleremo di *isomorfismo* di spazi o algebre di Banach, intendendo sempre (salvo avviso contrario) un'applicazione biunivoca compatibile con *tutta* la struttura. Così, ad esempio, un isomorfismo tra due spazi di Banach sarà per noi un isomorfismo tra i due spazi, come spazi vettoriali, che sia anche un'isometria (cioè conservi la norma). Parimenti, parleremo di un'*immersione*, intendendo un'applicazione *iniettiva* compatibile con tutta la struttura.

2.2 Operatori lineari

Nella sezione precedente abbiamo introdotto gli operatori lineari e limitati da uno spazio di Banach \mathcal{X} in sé. Vogliamo ora occuparci della categoria più generale, degli operatori lineari da \mathcal{X} in sé, non necessariamente limitati e non necessariamente definiti su tutto lo spazio. Esempi tipici di operatori lineari non limitati sono gli *operatori differenziali* su spazi di funzioni continue o su spazi di tipo L^p , che hanno perciò un ruolo di primo piano nell'approccio funzionale per le equazioni alle derivate parziali.

Un *operatore lineare in \mathcal{X}* è per definizione una funzione lineare L definita in un sottospazio $\mathcal{D}(L)$ di \mathcal{X} , detto *dominio* di L , e avente immagine in \mathcal{X} . L'immagine (*range*) di L è il sottospazio di \mathcal{X}

$$\text{Ran}(L) := \{Lx \mid x \in \mathcal{D}(L)\}. \quad (2.2.1)$$

Il nucleo (*kernel*) di L è il sottospazio di \mathcal{X}

$$\text{Ker}(L) := \{x \in \mathcal{D}(L) \mid Lx = 0\}. \quad (2.2.2)$$

Se $\text{Ker}(L) = \{0\}$, esiste l'*operatore inverso* L^{-1} , che è a sua volta un operatore lineare, con $\mathcal{D}(L^{-1}) = \text{Ran}(L)$ e $\text{Ran}(L^{-1}) = \mathcal{D}(L)$.

Un operatore lineare L in \mathcal{X} si dice *limitato* se

$$\sup \left\{ \frac{\|Lx\|}{\|x\|} \mid x \in \mathcal{D}(L), x \neq 0 \right\} < +\infty. \quad (2.2.3)$$

Dunque $[\mathcal{X}]$ si può vedere come la sottoclasse degli operatori lineari in \mathcal{X} , limitati e con $\mathcal{D}(L) = \mathcal{X}$.

Una convenzione che adotteremo sempre è la seguente: se L è un operatore lineare con dominio $\mathcal{D}(L)$ e B appartiene a $[\mathcal{X}]$, allora $L + B$ è l'operatore lineare $(L + B)x := Lx + Bx$ con dominio $\mathcal{D}(L + B) := \mathcal{D}(L)$.

Prima di passare alla definizione dello *spettro* di un operatore lineare L , ricordiamo che L è detto *densamente definito* (*d.d.*, per brevità) se la chiusura topologica $\overline{\mathcal{D}(L)}$ di $\mathcal{D}(L)$ è uguale a \mathcal{X} , ovvero se $\mathcal{D}(L)$ è un sottospazio denso di \mathcal{X} .

Inoltre, per $\lambda \in \mathbb{C}$, indicheremo brevemente con $\lambda - L$, l'operatore lineare $\lambda I - L$, dove $I \in [\mathcal{X}]$ è l'identità.

Definizione 2.12 *Sia L un operatore lineare in uno spazio di Banach \mathcal{X} . Definiamo insieme risolvente di L l'insieme*

$$\rho(L) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Ker}(\lambda - L) = \{0\} \text{ e } (\lambda - L)^{-1} \text{ è limitato e d.d.}\} \quad (2.2.4)$$

e spettro di L l'insieme

$$\sigma(L) := \mathbb{C} \setminus \rho(L) \quad (2.2.5)$$

Se $\lambda \in \rho(L)$, l'operatore limitato e d.d. $(\lambda - L)^{-1} : \text{Ran}(\lambda - L) \rightarrow \mathcal{D}(L)$, è detto *risolvente* e viene spesso indicato con $R(\lambda, L)$.

Le proprietà spettrali di un operatore lineare hanno un ruolo fondamentale nella teoria delle equazioni di evoluzione lineari in spazi di Banach. Il teorema più importante di tale teoria, dovuto a Hille e Yosida (si veda la sezione 2.3), riconduce infatti lo studio di un problema di evoluzione, governato da un operatore lineare, allo studio dello spettro e del risolvente dell'operatore stesso.

Un'altra importante proprietà degli operatori lineari, anch'essa coinvolta nel teorema di Hille-Yosida, è la proprietà di *chiusura*. Prima di definirla, dobbiamo osservare che, dati due spazi di Banach \mathcal{X} e \mathcal{Y} , il prodotto cartesiano $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ha una naturale struttura di spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|, \quad x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y} \quad (2.2.6)$$

(o altre norme topologicamente equivalenti).

Definizione 2.13 *Un operatore lineare L in \mathcal{X} si dice chiuso (in \mathcal{X}) se il suo grafico*

$$\text{Graph}(L) := \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mid x \in \mathcal{D}(L), y = Lx\} \quad (2.2.7)$$

è un sottoinsieme chiuso di $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Se L è chiuso, il dominio $\mathcal{D}(L)$ di L munito della *norma del grafico*

$$\|x\|_{\mathcal{D}(L)} := \|x\| + \|Lx\| \quad (2.2.8)$$

risulta essere a sua volta uno spazio di Banach.

Il seguente teorema fornisce un'utile caratterizzazione degli operatori chiusi.

Teorema 2.14 *L è chiuso se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ contenuta in $\mathcal{D}(L)$ che converge ad un elemento x di \mathcal{X} e tale che la successione $\{Lx_n\}$ converge ad un elemento y di \mathcal{X} , si ha $x \in \mathcal{D}(L)$ e $y = Lx$.*

DIMOSTRAZIONE. Si veda [61], cap. IV, sez. 5. □

Può accadere che un operatore non sia chiuso ma ammetta una *chiusura*.

Definizione 2.15 *Un operatore lineare L in \mathcal{X} si dice chiudibile se per ogni successione $\{x_n\}$ contenuta in $\mathcal{D}(L)$ tale che $x_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ si ha $Lx_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.*

Se L è chiudibile allora è ben definita la *chiusura* \bar{L} di L , che è l'operatore lineare definito nel seguente modo. Dato $x \in \mathcal{X}$, si dice, per definizione, che x appartiene a $\mathcal{D}(\bar{L})$ se e solo se esistono una successione $\{x_n\}$ contenuta in $\mathcal{D}(L)$ ed un elemento $y \in \mathcal{X}$ tali che $x_n \rightarrow x$ e $Lx_n \rightarrow y$ per $n \rightarrow \infty$. Allora si definisce l'azione di \bar{L} su x come $\bar{L}x := y$.

Per gli operatori lineari si può definire la relazione d'ordine “ \subset ” ponendo $L_1 \subset L_2$ se e solo se $\mathcal{D}(L_1) \subset \mathcal{D}(L_2)$ e la restrizione di L_2 a $\mathcal{D}(L_1)$ è uguale a L_1 . Si ha allora che $L_1 = L_2$ se e solo se $L_1 \subset L_2$ e $L_2 \subset L_1$.

È chiaro che tra un operatore chiudibile e la sua chiusura sussiste la relazione $L \subset \bar{L}$; inoltre L è un operatore chiuso se e solo se $L = \bar{L}$.

Nel seguente teorema elenchiamo alcune proprietà collegate alla teoria degli operatori chiusi.

Teorema 2.16 a) Se L è chiuso e invertibile, allora L^{-1} è chiuso. b) Se L è chiuso e limitato, allora $\mathcal{D}(L)$ è un sottoinsieme chiuso di \mathcal{X} . c) Se $B \in [\mathcal{X}]$ allora B è chiuso. d) Se L è chiuso e $B \in [\mathcal{X}]$, allora $L + B$, con $\mathcal{D}(L + B) := \mathcal{D}(L)$, è chiuso.

DIMOSTRAZIONE. a) segue semplicemente dal fatto che L e L^{-1} hanno lo stesso grafico, a meno dello scambio delle componenti nel prodotto cartesiano $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. b) si veda [61], cap. IV, teorema 5.2; c) si veda [61], cap. IV, teorema 5.1; d) segue dal teorema 2.14. \square

Come corollario, vediamo in che modo le proprietà collegate alla chiusura si ripercuotono sulla struttura spettrale.

Corollario 2.17 Se L è chiuso, allora

$$\rho(L) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda - L)^{-1} \in [\mathcal{X}] \}. \quad (2.2.9)$$

Viceversa, se esiste $\lambda \in \rho(L)$ tale che $(\lambda - L)^{-1} \in [\mathcal{X}]$, allora L è chiuso.

DIMOSTRAZIONE. Se L è chiuso e $\lambda \in \rho(L)$, allora $\text{Ran}(\lambda - L)$ è denso in \mathcal{X} e $(\lambda - L)^{-1}$ è chiuso per le proprietà (d) e (a). Dalla proprietà (b) segue quindi $\text{Ran}(\lambda - L) = \mathcal{X}$. Perciò $(\lambda - L)^{-1} \in [\mathcal{X}]$.

Viceversa, se $\lambda \in \rho(L)$ è tale che $(\lambda - L)^{-1} \in [\mathcal{X}]$, allora $(\lambda - L)^{-1}$ è chiuso per la proprietà (c), e dalle proprietà (d) e (a) segue che L è chiuso. \square

Dunque, la decomposizione spettrale associata ad un operatore chiuso L assume la semplice forma

$$\rho(L) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda - L)^{-1} \in [\mathcal{X}] \}, \quad (2.2.10)$$

$$\sigma(L) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda - L)^{-1} \notin [\mathcal{X}] \}. \quad (2.2.11)$$

2.3 Problemi di evoluzione e semigruppdi operatori

Sia $[a, b)$ un intervallo della retta reale, con eventualmente $b = +\infty$, e sia \mathcal{X} uno spazio di Banach. Consideriamo una funzione $f : [a, b) \rightarrow \mathcal{X}$. La f si dirà *derivabile* in $t \in (a, b)$ se esiste un elemento $f'(t) \in \mathcal{X}$, che sarà detto *derivata* di f in t , tale che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - f'(t) \right\| = 0. \quad (2.3.1)$$

Diremo che la f è derivabile in (a, b) se $f'(t)$ esiste per ogni $t \in (a, b)$ e diremo che f è derivabile in $[a, b)$ se è derivabile in (a, b) e se, inoltre, esiste $f'(a)$ come derivata destra, ovvero se vale l'eq. (2.3.1) con $t = a$ per $h \rightarrow 0^+$. Se T è un intervallo di tipo (a, b) o $[a, b)$, con eventualmente $b = +\infty$, e se $k \in \mathbb{N}_0$, denoteremo con $C^k(T, \mathcal{X})$ lo spazio vettoriale delle funzioni definite su T a valori nello spazio di Banach \mathcal{X} , derivabili con continuità k volte (per $k = 0$ sono le funzioni continue da T a \mathcal{X}).

Osserviamo che la nostra terminologia si discosta leggermente dalla letteratura corrente, che parla di derivabilità “in senso forte” e definisce f' “derivata forte” di f . L'uso dell'aggettivo *forte* in questo contesto intende soprattutto sottolineare la distinzione con i concetti di derivabilità e di derivata “deboli”. Tuttavia questo può generare una qualche confusione con l'uso che dell'aggettivo *forte* si fa quando ci si vuol riferire alla cosiddetta *topologia forte* degli operatori limitati (si veda la sezione 3.5). Dal momento che in questa tesi non prenderemo in considerazione la formulazione “debole” dei problemi di evoluzione e avremo invece bisogno di sottolineare la distinzione tra topologia metrica e topologia forte in $[\mathcal{X}]$, preferiamo chiamare la derivabilità forte “derivabilità” e la derivata forte “derivata” *tout court*, e lo stesso faremo con la seguente definizione di integrabilità.

Sia ora $b < +\infty$ e indichiamo con Π una generica partizione $a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = b$ dell'intervallo $[a, b]$, insieme con la scelta di n punti arbitrari $s_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Sia inoltre $|\Pi| := \max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, 2, \dots, n\}$. Se esiste un elemento di \mathcal{X} , che indichiamo con $\int_a^b f(t) dt$, tale che

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0^+} \left\| \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) f(s_k) - \int_a^b f(t) dt \right\| = 0, \quad (2.3.2)$$

allora f si dice *Riemann-integrabile* su $[a, b]$, e $\int_a^b f(t) dt$ è l'*integrale di Riemann* di f .

Per l'integrale di Riemann valgono proprietà analoghe a quelle del comune integrale di Riemann del caso $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. In particolare, se f è continua in $[a, b]$, allora f è Riemann integrabile.

Veniamo ora all'oggetto matematico più importante per la presente tesi. Un *problema di evoluzione* (lineare, autonomo, non omogeneo) nello spazio di Banach \mathcal{X} , detto anche *problema di Cauchy astratto*, è un sistema del tipo

$$\begin{cases} f'(t) = Lf(t) + q(t), & t \in T, \\ f(0) = \xi, \end{cases} \quad (2.3.3)$$

dove T è l'intervallo $[0, t_0)$, con eventualmente $t_0 = +\infty$, $\xi \in \mathcal{X}$ è un assegnato valore iniziale, L è un operatore lineare in \mathcal{X} e $q : T \rightarrow \mathcal{X}$ è un'assegnata funzione che rappresenta un termine “di sorgente”.

Definizione 2.18 *Definiamo soluzione (stretta) dell'equazione (2.3.3) una funzione $f : T \rightarrow X$, tale che*

- a) f è derivabile con continuità in T (cioè, è derivabile con derivata f' continua in T), che
- b) $f(t) \in \mathcal{D}(L)$ per ogni $t \in T$,
- c) f verifica le due equazioni del sistema (2.3.3).

La teoria dei problemi di evoluzione è strettamente collegata a quella dei semigrupp di operatori limitati.

Definizione 2.19 *Sia X uno spazio di Banach. Un semigrupp continuo in senso forte di operatori limitati su X è un'applicazione*

$$\mathcal{S} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [X], \quad (2.3.4)$$

che sia un omomorfismo di semigrupp con unità, cioè tale che

- a) $\mathcal{S}(0) = I$,
- b) $\mathcal{S}(t+s) = \mathcal{S}(t)\mathcal{S}(s)$, per ogni $t, s \in \mathbb{R}^+$,

e che sia continua in 0 per la topologia forte di $[X]$, cioè

- c) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\mathcal{S}(t)x - x\| = 0, \quad x \in X$.

Talvolta chiameremo \mathcal{S} anche *dinamica fortemente continua* in quanto, come risulta dal teorema 2.25, i semigrupp di operatori sono associati ai problemi di evoluzione, che sono sistemi dinamici in spazi di Banach.

Una prima conseguenza degli assiomi a), b) e c) è che \mathcal{S} è continuo in senso forte in ogni $t \geq 0$. Per mezzo del teorema di Banach-Steinhaus si dimostra poi la seguente proprietà.

Teorema 2.20 *Se $\mathcal{S} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [X]$ è un semigrupp continuo in senso forte, allora esistono due numeri reali M e β , con $M \geq 1$, tali che*

$$\|\mathcal{S}(t)\| \leq Me^{\beta t}, \quad t \geq 0. \quad (2.3.5)$$

DIMOSTRAZIONE. Si veda [41], cap. 1, teorema 2.2. □

L'elemento che collega un semigrupp con un problema di evoluzione è un operatore lineare detto *generatore* del semigrupp.

Definizione 2.21 Sia $\mathcal{S} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [\mathcal{X}]$ un semigruppero continuo in senso forte. Chiamiamo generatore infinitesimo, o più semplicemente generatore, di \mathcal{S} l'operatore lineare in \mathcal{X} definito nel modo seguente:

$$\mathcal{D}(L) := \left\{ x \in \mathcal{X} \mid \text{esiste } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{S}(t)x - x}{t} \in \mathcal{X} \right\} \quad (2.3.6)$$

$$Lx := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{S}(t)x - x}{t}, \quad x \in \mathcal{D}(L). \quad (2.3.7)$$

Si ha il seguente risultato di unicità del generatore.

Teorema 2.22 Siano $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ due semigrupperi continui in senso forte e siano L_1, L_2 i loro generatori infinitesimi. Se $L_1 = L_2$, allora $\mathcal{S}_1(t) = \mathcal{S}_2(t)$ per ogni $t \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Si veda [41], cap. 1, teorema 2.6. \square

Fra semigrupperi e generatori c'è quindi una corrispondenza biunivoca e per indicare il semigruppero generato da L possiamo usare senza ambiguità la notazione \mathcal{S}_L . Se L genera un semigruppero continuo in senso forte \mathcal{S}_L per il quale vale la disuguaglianza (2.3.5), diremo che L appartiene alla classe $\mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$.

I due teoremi che seguono costituiscono il risultato fondamentale della teoria dei semigrupperi. Il primo, il *teorema di Hille-Yosida*, caratterizza i generatori di semigrupperi continui in senso forte tramite le loro proprietà spettrali e topologiche; il secondo collega la teoria dei semigrupperi al problema di evoluzione (2.3.3).

Teorema 2.23 Sia \mathcal{X} uno spazio di Banach e siano M e β due numeri reali, con $M \geq 1$. Un operatore lineare L è un generatore infinitesimo di classe $\mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$ se e solo se si verificano le seguenti tre condizioni:

- a) $\mathcal{D}(L)$ è denso in \mathcal{X} ,
- b) L è chiuso,
- c) l'insieme risolvente $\rho(L)$ contiene la semiretta $(\beta, +\infty)$ e per ogni $\lambda > \beta$ si ha

$$\|(\lambda - L)^{-n}\| \leq M(\lambda - \beta)^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.3.8)$$

DIMOSTRAZIONE. Si veda [41], cap. 1, teorema 5.3. \square

È opportuno osservare che la condizione (c), dove $(\lambda - L)^{-n}$ indica l'operatore $(\lambda - L)^{-1}$ applicato n volte e la norma è quella di $[\mathcal{X}]$, ha senso perché, come si è visto nel corollario 2.17, la condizione di chiusura per L implica $(\lambda - L)^{-1} \in [\mathcal{X}]$.

Definizione 2.24 Il termine di sorgente $q : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ che compare nell'eq. (2.3.3) sarà detto regolare se è continuo e se, posto

$$V_q(t) := \int_0^t \mathcal{S}_L(t-s)q(s) ds, \quad t \in \mathbb{T}, \quad (2.3.9)$$

una delle due condizioni seguenti è soddisfatta:

- i) $V_q : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ è derivabile con continuità in \mathbb{T} ,
- ii) $V_q(t) \in \mathcal{D}(L)$ per ogni $t \in \mathbb{T}$ e la funzione $t \mapsto LV_q(t)$ è continua in \mathbb{T} .

Teorema 2.25 *Supponiamo che $L \in \mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$ e che il termine di sorgente $q : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ sia regolare, nel senso della definizione 2.24. Allora per ogni $\xi \in \mathcal{D}(L)$ il problema di evoluzione (2.3.3) ha un'unica soluzione data da*

$$f(t) := \mathfrak{S}_L(t)\xi + \int_0^t \mathfrak{S}_L(t-s)q(s) ds, \quad (2.3.10)$$

DIMOSTRAZIONE. Si veda [41], cap. 4, teorema 2.4. \square

La seguente osservazione fornisce un utile criterio di applicabilità del teorema 2.25

Osservazione 2.26 *Le ipotesi di regolarità della sorgente $q : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$, espresse dalla definizione 2.24 sono soddisfatte se vale una delle seguenti condizioni:*

- i') q è derivabile con continuità in \mathbb{T}
- ii') q è continua in \mathbb{T} , $q(t) \in \mathcal{D}(L)$ per ogni $t \in \mathbb{T}$ e la funzione $t \mapsto Lq(t)$ è integrabile su \mathbb{T} .

DIMOSTRAZIONE. Si veda [41], cap. 4, corollario 2.5 e corollario 2.6. \square

Sia ora ξ un generico elemento di \mathcal{X} (non necessariamente appartenente a $\mathcal{D}(L)$) e supponiamo che q sia solamente integrabile in $[0, t]$ per ogni $t \in \mathbb{T}$. Allora, per le proprietà elementari dei semigrupp (si veda [41], cap. 1, teorema 2.4), la funzione f data dall'eq. (2.3.10) risulta ben definita e continua in \mathbb{T} . Essa è detta soluzione *mild* dell'equazione (2.3.3). Per definizione, dunque, per ogni $\xi \in \mathcal{X}$ e per ogni $q : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ integrabile in $[0, t]$ per ogni $t \in \mathbb{T}$, l'equazione (2.3.3) ha un'unica soluzione *mild* (si veda anche [4] per una caratterizzazione della soluzione *mild* come soluzione di tipo *debole* di (2.3.3)).

La teoria dei semigrupp ha il pregio di essere *costruttiva*. La teoria non si limita infatti a dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione di evoluzione ma fornisce formule che permettono di ricavare l'azione di \mathfrak{S}_L a partire dall'azione di L e dei suoi risolventi. A questo modo, grazie anche all'eq. (2.3.10), siamo in grado (almeno in linea di principio) di calcolare la soluzione f . La più nota delle suddette formule è la seguente *formula esponenziale*.

Teorema 2.27 *Se $L \in \mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$ allora, fissato $t \geq 0$ si ha $(I - \frac{t}{n}L)^{-n} \in [\mathcal{X}]$ per ogni n tale che $\frac{n}{t} > \beta$ e*

$$\mathfrak{S}_L(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n}L \right)^{-n} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t}, L\right) \right]^n x, \quad (2.3.11)$$

per ogni $x \in \mathcal{X}$.

DIMOSTRAZIONE. Si veda [8], cap. 5, teorema 5.1. \square

Viceversa, i risolventi sono ricavabili dal semigruppero, del quale sono la “trasformata di Laplace”. Infatti per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(\lambda) > \beta$ vale la formula

$$R(\lambda, L)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathcal{S}_L(t)x \, dt, \quad x \in \mathcal{X} \quad (2.3.12)$$

([41], cap. 1, sezione 1.7), In molte applicazioni l’operatore L che genera una dinamica fortemente continua \mathcal{S}_L è “perturbato” da un operatore lineare limitato B . Il seguente *teorema delle perturbazioni* ci dice che l’operatore perturbato $L+B$ genera ancora una dinamica fortemente continua \mathcal{S}_{L+B} , fornendo inoltre una formula ricorsiva che ci permette di costruire \mathcal{S}_{L+B} a partire da \mathcal{S}_L .

Teorema 2.28 *Se $L \in \mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$ e $B \in [\mathcal{X}]$, allora*

$$L + B \in \mathcal{G}(M, \beta + M\|B\|, \mathcal{X}) \quad (2.3.13)$$

e, per ogni $t \geq 0$, il semigruppero $\mathcal{S}_{L+B}(t)$ può essere espresso tramite una serie convergente in $[\mathcal{X}]$:

$$\mathcal{S}_{L+B}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(t), \quad (2.3.14)$$

dove gli operatori $Z_n(t) \in [\mathcal{X}]$ sono definiti dalla seguente formula ricorsiva:

$$\begin{cases} Z_0(t) := \mathcal{S}_L(t), & t \geq 0, \\ Z_{n+1}(t)x := \int_0^t \mathcal{S}_L(t-s)BZ_n(s)x \, ds, & x \in \mathcal{X}, t \geq 0. \end{cases} \quad (2.3.15)$$

DIMOSTRAZIONE. Si veda [8], cap. 5, teorema 5.1 e [41], cap. 3, teorema 1.1. \square

Il teorema 2.28 permette di stabilire risultati di esistenza e unicità per l’equazione di evoluzione perturbata

$$\begin{cases} f'(t) = Lf(t) + Bf(t) + q(t), & t \in \mathbb{T}, \\ f(0) = \xi. \end{cases} \quad (2.3.16)$$

Il seguente risultato (che è alla base del teorema 2.28) caratterizza le soluzioni strette dei problemi di evoluzione come soluzioni continue di un’equazione integrale.

Teorema 2.29 *Supponiamo che q sia una sorgente regolare e che $\xi \in \mathcal{D}(L)$. Allora, la funzione $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ è soluzione stretta del problema di evoluzione (2.3.16) se e solo se è soluzione continua dell’equazione integrale*

$$f(t) = \mathcal{S}_L(t)\xi + \int_0^t \mathcal{S}_L(t-s)[Bf(s) + q(s)] \, ds, \quad t \in \mathbb{T}. \quad (2.3.17)$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dalle proprietà elementari del semigruppero \mathcal{S}_L ([41], cap. 1, teorema 2.4. \square

2.4 Operatori affini

Dal punto di vista dei problemi di evoluzione la variabile t (che di solito, ma non sempre, è il tempo) ha una funzione privilegiata cosicché, assumendo che lo stato del sistema sia rappresentato, per ogni $t \geq 0$, da un elemento $f(t)$ di uno spazio di Banach \mathcal{X} , le condizioni iniziali del sistema corrispondono ad un assegnato elemento $\xi \in \mathcal{X}$. Le *condizioni al contorno*, tipiche di evoluzioni governate da equazioni alle derivate parziali, devono tradursi invece in una *condizione sul dominio dell'operatore* L , affinché, per la condizione (d) della definizione 2.18, $f(t)$ soddisfi le condizioni al contorno per ogni t . In altre parole, teniamo conto delle condizioni al contorno ponendole nella definizione di $\mathcal{D}(L)$. D'altra parte sappiamo che $\mathcal{D}(L)$ deve essere un sottospazio *lineare* di \mathcal{X} . Sorge quindi una difficoltà quando cerchiamo di formalizzare con la teoria dei problemi di evoluzione modelli che richiedono condizioni al contorno *non omogenee*, ed eventualmente dipendenti da t , le quali condurrebbero a una condizione *non lineare* su $\mathcal{D}(L)$.

Anche se tale difficoltà può essere superata ricorrendo alla teoria (piuttosto complessa) dei semigruppì non lineari, [10], [37], tuttavia con l'introduzione degli *operatori affini* si può tener conto di questa semplice non-linearità, salvaguardando l'“eleganza” della teoria lineare.

Definizione 2.30 *Sia \mathcal{L} un sottospazio dello spazio di Banach \mathcal{X} . Definiamo sottospazio affine associato a \mathcal{L} (o brevemente sottospazio \mathcal{L} -affine) un sottoinsieme \mathcal{A} di \mathcal{X} con le seguenti proprietà.*

- a) $x_1 - x_2 \in \mathcal{L}, \quad x_1, x_2 \in \mathcal{A},$
- b) $x + y \in \mathcal{A}, \quad x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{L}.$

Se T è un intervallo della retta reale, definiamo poi *famiglia \mathcal{L} -affine* una famiglia a un parametro di sottoinsiemi $\{\mathcal{A}_t \mid t \in T\} \subset \mathcal{X}$ tali che, per ogni $t \in T$ fissato, \mathcal{A}_t è un sottospazio \mathcal{L} -affine.

Osservazione 2.31 *Se \mathcal{L} è un sottospazio di \mathcal{X} allora $\{\mathcal{A}_t : t \in T\}$ è una famiglia \mathcal{L} -affine se e solo se esiste una funzione $p : T \rightarrow \mathcal{X}$ tale che*

$$\mathcal{A}_t = p(t) + \mathcal{L} := \{p(t) + y \mid y \in \mathcal{L}\} \quad t \in T \quad (2.4.1)$$

DIMOSTRAZIONE. Si verifica immediatamente che se $\mathcal{A}_t = p(t) + \mathcal{L}$, allora $\{\mathcal{A}_t \mid t \in T\}$, è una famiglia \mathcal{L} -affine.

Viceversa, se supponiamo che $\{\mathcal{A}_t \mid t \in T\}$ sia una famiglia \mathcal{L} -affine, per l'assioma della scelta da ogni insieme \mathcal{A}_t possiamo estrarre un elemento $p(t) \in \mathcal{A}_t$. Definiamo così una funzione $p : T \rightarrow \mathcal{X}$ per la quale, come si può facilmente verificare, vale l'eq. (2.4.1). \square

Una funzione p per la quale vale l'eq. (2.4.1) sarà detta una *rappresentazione* della famiglia \mathcal{L} -affine $\{\mathcal{A}_t \mid t \in \mathbb{T}\}$. Evidentemente la rappresentazione non è unica perché possiamo avere $\mathcal{A}_t = p_1(t) + \mathcal{L}$ così come $\mathcal{A}_t = p_2(t) + \mathcal{L}$ per due diverse funzioni p_1 e p_2 . Tuttavia, si possono usare le rappresentazioni per definire la “regolarità” di una famiglia \mathcal{L} -affine, riferendoci alla regolarità della “migliore possibile” rappresentazione. Ad esempio, diremo che la famiglia $\{\mathcal{A}_t \mid t \in \mathbb{T}\}$ è *continua*, se esiste una rappresentazione $\mathcal{A}_t = p(t) + \mathcal{L}$ con p continua, *derivabile* se esiste una rappresentazione $\mathcal{A}_t = p(t) + \mathcal{L}$ con p derivabile, e così via.

Passiamo ora a definire gli operatori affini e le famiglie di operatori affini.

Definizione 2.32 *Sia L un operatore lineare e sia \mathcal{A} un sottospazio affine di \mathcal{X} associato a $\mathcal{D}(L)$. Definiamo operatore affine associato a L (o brevemente operatore L -affine) una funzione $A : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ tale che*

$$A(x + y) = A(x) + Ly, \quad x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{L}. \quad (2.4.2)$$

Il sottospazio affine \mathcal{A} sarà detto dominio di A e sarà anche indicato con $\mathcal{D}(A)$.

Per comodità di notazione estendiamo agli operatori affini la consuetudine di eliminare le parentesi attorno all'argomento. D'ora in poi scriveremo perciò Ax anziché $A(x)$. Si tenga sempre presente però che l'azione di A su x non è lineare.

Sia ora \mathbb{T} è un intervallo, finito o infinito, della retta reale.

Definizione 2.33 *Definiamo famiglia L -affine una famiglia a un parametro di operatori $\{A(t) \mid t \in \mathbb{T}\}$ tali che, per ogni $t \in \mathbb{T}$ fissato, $A(t)$ è un operatore L -affine.*

Osserviamo che, se $\{A(t) \mid t \in \mathbb{T}\}$ è una famiglia L -affine, allora $\{\mathcal{D}(A(t)) \mid t \in \mathbb{T}\}$ è una famiglia $\mathcal{D}(L)$ -affine.

È lecito aspettarsi che gli operatori di una famiglia L -affine sufficientemente regolare mantengano alcune buone proprietà dell'operatore lineare L cui sono associati. In particolare, se L genera una dinamica fortemente continua che ci fornisce la soluzione dell'equazione di evoluzione (2.3.3) (teorema 2.25), ci possiamo attendere che il corrispondente “affine” dell'eq. (2.3.3) sia altrettanto ben posto.

Sia dunque $\mathbb{T} := [0, t_0)$, con eventualmente $t_0 = +\infty$, e sia $\{A(t) \mid t \in \mathbb{T}\}$ è una famiglia L -affine. Consideriamo il *problema di evoluzione affine*

$$\begin{cases} f'(t) = A(t)f(t), & t \in \mathbb{T}, \\ f(0) = \xi. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Definiamo *soluzione* di (2.4.3) una funzione $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$, tale che

- a) f è derivabile con continuità in \mathbb{T} (cioè, è derivabile con derivata f' continua in \mathbb{T});
- b) $f(t) \in \mathcal{D}(A(t))$ per ogni $t \in \mathbb{T}$;

c) f verifica le due equazioni del sistema (2.4.3).

Teorema 2.34 *Supponiamo che $L \in \mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$, che $\{A(t) \mid t \in \mathbb{T}\}$ sia una famiglia L -affine e che la famiglia $\mathcal{D}(L)$ -affine $\{\mathcal{D}(A(t)) \mid t \in \mathbb{T}\}$ abbia una rappresentazione*

$$\mathcal{D}(A(t)) = p(t) + \mathcal{D}(L) \quad (2.4.4)$$

con p derivabile con continuità in \mathbb{T} . Allora il problema di evoluzione affine (2.4.3) è equivalente al problema di evoluzione lineare non omogeneo associato

$$\begin{cases} f_o'(t) = Lf_o(t) + A(t)p(t) - p'(t), & t \in \mathbb{T}, \\ f_o(0) = \xi - p(0), \end{cases} \quad (2.4.5)$$

nel senso che f è soluzione di (2.4.3) se e solo se $f_o := f - p$ è soluzione (stretta) di (2.4.5). In particolare, se la funzione

$$Q_p(t) := A(t)p(t) - p'(t), \quad t \in \mathbb{T} \quad (2.4.6)$$

è una sorgente regolare nel senso della definizione 2.24, e se $\xi \in \mathcal{D}(A(0))$ allora (2.4.3) ammette una soluzione $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ data, per ogni $t \in \mathbb{T}$, dalla formula

$$f(t) := p(t) + \mathcal{S}_L(t)[\xi - p(0)] + \int_0^t \mathcal{S}_L(t-s)Q_p(s) ds. \quad (2.4.7)$$

Inoltre, la soluzione dell'equazione (2.4.3) è unica. In particolare, la f definita dall'eq. (2.4.7) non dipende dalla scelta della rappresentazione p che soddisfa le ipotesi del teorema.

DIMOSTRAZIONE. Usando la (2.4.2) si dimostra facilmente l'equivalenza di (2.4.3) con il problema lineare associato (2.4.5), nel senso sopra citato. La formula (2.4.7) segue quindi dal teorema 2.25.

Per dimostrare l'unicità, basta osservare che se f_1 e f_2 sono due soluzioni di (2.4.3), allora $f_1 - f_2$ è soluzione del problema lineare

$$\begin{cases} (f_1 - f_2)'(t) = L(f_1 - f_2)(t), & t \in \mathbb{T}, \\ (f_1 - f_2)(0) = 0. \end{cases} \quad (2.4.8)$$

che, sempre per il teorema 2.3.4, ha come unica soluzione la funzione $(f_1 - f_2)(t) = 0$, $t \in \mathbb{T}$. \square

Nel problema di evoluzione affine (2.4.3) non abbiamo incluso termini di sorgente perché sarebbe superfluo. Se infatti $q(t)$ è un termine di sorgente e $\{A(t) \mid t \in \mathbb{T}\}$ è una famiglia L -affine allora, definendo gli operatori

$$A^{(q)}(t)x := A(t)x + q(t), \quad x \in \mathcal{D}(A(t)) \quad (2.4.9)$$

$\{A^{(q)}(t) \mid t \in \mathbb{T}\}$ è ancora una famiglia L -affine. In particolare, il problema di evoluzione lineare non omogeneo (2.3.3) è già un problema lineare affine (osserviamo

infatti che gli operatori $L^{(q)}(t)$ sono una famiglia L -affine). Il teorema 2.34 si può rileggere dicendo che è vero anche il contrario: ogni problema di evoluzione affine è un problema lineare non omogenea.

Nel caso indipendente da t , in cui cioè $A(t) = A := A(0)$, per ogni $t \in \mathbb{T}$, le cose sono ovviamente più semplici. Si ha infatti

Corollario 2.35 *Sia A un operatore L -affine e supponiamo che $L \in \mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$. Allora, per ogni $\xi \in \mathcal{D}(A)$, l'equazione di evoluzione affine e autonoma*

$$\begin{cases} f'(t) = Af(t), & t \geq 0, \\ f(0) = \xi, \end{cases} \quad (2.4.10)$$

ha un'unica soluzione f data da

$$f(t) := \xi + \int_0^t \mathcal{S}_L(s)A\xi \, ds, \quad t \geq 0. \quad (2.4.11)$$

DIMOSTRAZIONE. Ponendo $A(t) := A$ per ogni $t \in \mathbb{T}$, la tesi è un corollario immediato del teorema 2.34 se si osserva che la famiglia L -affine $\{\mathcal{D}(A(t)) \mid t \in \mathbb{T}\}$ ha la rappresentazione costante $\mathcal{D}(A(t)) = \xi + \mathcal{D}(L)$. \square

La f definita dall'eq. (2.4.11), soluzione del problema autonomo (2.4.10), si può esprimere come azione di un "semigrupp affine" sul dato iniziale ξ . Se \mathcal{A} è un sottospazio affine associato al sottospazio lineare \mathcal{L} , osserviamo che l'insieme $\text{Aff}_{\mathcal{A}}$ degli operatori affini con dominio \mathcal{A} e immagine contenuta in \mathcal{A} è un semigrupp con unità $I_{|\mathcal{A}}$ rispetto all'operazione di composizione. La seguente osservazione è di verifica immediata.

Osservazione 2.36 *Sia A come nel corollario 2.35. Per ogni $x \in \mathcal{D}(A)$ e ogni $t \geq 0$ definiamo*

$$\mathcal{Z}(t)x := x + \int_0^t \mathcal{S}_L(s)Ax \, ds. \quad (2.4.12)$$

Allora si hanno le seguenti proprietà.

- a) Per ogni $t \geq 0$, $\mathcal{Z}(t) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ e $\mathcal{Z}(t)$ è un operatore affine associato a $\mathcal{S}_L(t)|_{\mathcal{D}(L)}$ (la restrizione di $\mathcal{S}_L(t)$ a $\mathcal{D}(L)$);
- b) $\mathcal{Z}(0) = I_{|\mathcal{D}(A)}$
- c) $\mathcal{Z}(t+s) = \mathcal{Z}(t) \circ \mathcal{Z}(s)$, $t, s \geq 0$
- d) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\mathcal{Z}(t)x - x\| = 0$, $x \in \mathcal{D}(A)$
- e) $\|\mathcal{Z}(t)x_1 - \mathcal{Z}(t)x_2\| \leq Me^{\beta t}\|x_1 - x_2\|$, $t \geq 0$, $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$.

Pertanto \mathcal{Z} è un omomorfismo dei semigrupp con unità \mathbb{R}^+ e $\text{Aff}_{\mathcal{D}(A)}$, continuo per la naturale definizione di topologia forte su Aff_A .

Concludiamo la sezione con un'ultima osservazione sul teorema 2.34. Il punto fondamentale nello studio di problemi di evoluzione affini è quello di costruire una qualunque rappresentazione $p(t)$ di $\{\mathcal{D}(A(t)) : t \in \mathbb{T}\}$ che abbia le proprietà minime di regolarità richieste dal teorema 2.34. Naturalmente possiamo cercare rappresentazioni con *proprietà addizionali* che potrebbero semplificare l'espressione (2.4.7) della soluzione. Un caso speciale lo abbiamo quando la funzione p è essa stessa soluzione di (2.4.3) per un qualche dato iniziale, ovvero quando $p'(t) = A(t)p(t)$ per ogni $t \in \mathbb{T}$. Allora il termine $Q_p(t)$ nella (2.4.7) è identicamente nullo la formula si riduce a

$$f(t) := p(t) + \mathcal{S}_L(t)[\xi - p(0)], \quad t \in \mathbb{T}. \quad (2.4.13)$$

L'eq. (2.4.13) non è altro che ciò che già sappiamo dalla teoria elementare delle equazioni differenziali: la soluzione generale di un'equazione non omogenea è la somma di una soluzione particolare con la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

2.5 Variabili aleatorie in spazi di Banach

Poiché nel corso di tutta questa tesi avremo a che fare con variabili aleatorie a valori in spazi di Banach, richiamiamo in questa sezione alcuni concetti e definizioni fondamentali della teoria astratta del calcolo delle probabilità.

Definizione 2.37 *Sia Ω un insieme assegnato. Una collezione \mathfrak{F} di sottoinsiemi di Ω è detta σ -algebra se*

- a) $\Omega \in \mathfrak{F}$;
- b) $F \in \mathfrak{F} \Rightarrow F^c \in \mathfrak{F}$ (dove F^c è il complementare di F);
- c) se $\{F_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia finita o numerabile di sottoinsiemi appartenenti a \mathfrak{F} , allora $\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} F_\nu \in \mathfrak{F}$.

Una coppia (Ω, \mathfrak{F}) , in cui Ω è un insieme assegnato e \mathfrak{F} è una σ -algebra di sottoinsiemi di Ω , è detta spazio misurabile e gli elementi di \mathfrak{F} sono detti sottoinsiemi misurabili di Ω .

Dalla definizione segue subito che una σ -algebra contiene sempre l'insieme vuoto \emptyset ed è chiusa anche rispetto alle intersezioni finite o numerabili di suoi elementi.

Se \mathcal{Q} è una collezione qualunque di sottoinsiemi di Ω , si dimostra ([13], sez. 2) che esiste un'unica σ -algebra $\sigma(\mathcal{Q})$ con le seguenti proprietà.

- a) $\mathcal{Q} \subset \sigma(\mathcal{Q})$;

b) se \mathfrak{F} è una σ -algebra tale che $\mathcal{Q} \subset \mathfrak{F}$, allora $\sigma(\mathcal{Q}) \subset \mathfrak{F}$.

In altre parole, $\sigma(\mathcal{Q})$ è la più piccola σ -algebra che contiene \mathcal{Q} e sarà detta σ -algebra generata da \mathcal{Q} .

Il generare σ -algebre da collezioni di insiemi assegnate ci permette di effettuare importanti costruzioni, fra le quali la σ -algebra prodotto e la σ -algebra di Borel.

Lo spazio misurabile prodotto di due spazi misurabili $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$ è lo spazio misurabile $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2)$, dove $\Omega_1 \times \Omega_2$ è il normale prodotto cartesiano, mentre $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ denota la σ -algebra generata dai sottoinsiemi di $\Omega_1 \times \Omega_2$ del tipo $F_1 \times F_2$, con $F_1 \in \mathfrak{F}_1$ e $F_2 \in \mathfrak{F}_2$.

Supponiamo ora che Ω abbia una struttura di spazio topologico, definita tramite la famiglia degli insiemi aperti. Esiste allora una σ -algebra “privilegiata” rispetto a tale struttura, che è la σ -algebra generata dagli aperti.

Definizione 2.38 Sia Ω uno spazio topologico e \mathfrak{A} la famiglia dei sottoinsiemi insiemi aperti di Ω . La σ -algebra $\sigma(\mathfrak{A})$ è detta σ -algebra di Borel e sarà indicata con \mathfrak{B}_Ω . Gli elementi di \mathfrak{B}_Ω sono detti boreliani di Ω .

Per i nostri scopi sarà utile anche il concetto di σ -algebra separabile.

Definizione 2.39 Una σ -algebra \mathfrak{F} è detta separabile se $\mathfrak{F} = \sigma(\mathcal{Q})$, con \mathcal{Q} finito o numerabile.

Dalle definizioni segue immediatamente la seguente osservazione.

Osservazione 2.40 Se Ω è uno spazio topologico che ammette una base numerabile degli aperti, allora la σ -algebra di Borel \mathfrak{B}_Ω è separabile.

Corollario 2.41 Se Ω è uno spazio metrico separabile, allora \mathfrak{B}_Ω è separabile.

DIMOSTRAZIONE. Segue dall’osservazione precedente e dal fatto che uno spazio metrico è separabile se e solo se ha una base numerabile degli aperti. \square

Passiamo ora a definire il concetto di *funzione misurabile*. Le funzioni misurabili sono nella teoria degli spazi misurabili l’analogo delle funzioni continue nella teoria degli spazi topologici.

Definizione 2.42 Siano (Ω, \mathfrak{F}) e (Σ, \mathfrak{E}) due spazi misurabili. Una funzione $f : \Omega \rightarrow \Sigma$ si dice $\mathfrak{F}/\mathfrak{E}$ -misurabile se $f^{-1}(E) \in \mathfrak{F}$ per ogni $E \in \mathfrak{E}$.

In altre parole, una funzione è misurabile se la retroimmagine di ogni insieme misurabile è un insieme misurabile. Quando le σ -algebre \mathfrak{F} e \mathfrak{E} sono sottointese senza possibilità di equivoco, diremo semplicemente “ f è misurabile”, omettendo il prefisso “ $\mathfrak{F}/\mathfrak{E}$ ”.

Osservazione 2.43 Siano Ω e Σ due spazi topologici. Allora ogni funzione continua è $\mathfrak{B}_\Omega/\mathfrak{B}_\Sigma$ -misurabile.

DIMOSTRAZIONE. Se $E \subset \Sigma$ è aperto, allora dalla definizione di continuità si ha che $f^{-1}(E)$ è aperto e quindi sta in \mathfrak{B}_Ω . Poiché è sufficiente verificare la misurabilità su un insieme di generatori ([13], teorema 13.1), questo dimostra l'asserto. \square

Ricordando che uno spazio di Banach ha una struttura naturale di spazio topologico, con la topologia metrica indotta dalla norma, definiamo adesso le *variabili aleatorie* a valori in uno spazio di Banach *separabile*.

Definizione 2.44 Sia \mathcal{X} uno spazio di Banach separabile e sia (Ω, \mathfrak{F}) uno spazio misurabile. Chiameremo *variabile aleatoria* ogni funzione $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ che sia $\mathfrak{F}/\mathfrak{B}_\mathcal{X}$ -misurabile.

Il motivo per cui richiediamo la separabilità di \mathcal{X} è che in spazi di Banach non separabili la richiesta di $\mathfrak{F}/\mathfrak{B}_\mathcal{X}$ -misurabilità e di integrabilità (si veda la sezione 2.6) per funzioni $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ diventano troppo restrittive. Tuttavia, come vedremo nel cap. 3, dal modello discusso nel cap. 1 nasce l'esigenza di considerare variabili aleatorie a valori nello spazio $[\mathcal{X}]$ che in generale non è separabile, anche se \mathcal{X} lo è. Per la definizione di cosa intendiamo per "variabile aleatoria" in questo caso, si veda la sezione 3.5.

Introduciamo adesso il concetto di *misura* su uno spazio misurabile.

Definizione 2.45 Sia (Ω, \mathfrak{F}) uno spazio misurabile. Una *misura* su (Ω, \mathfrak{F}) è una funzione $\mu : \mathfrak{F} \rightarrow [0, +\infty]$ con le seguenti proprietà:

- a) $\mu(\emptyset) = 0$;
- b) se $\{F_\nu \mid \nu \in \mathcal{N}\}$ è una famiglia finita o numerabile di sottoinsiemi appartenenti a \mathfrak{F} , tali che $F_{\nu_1} \cap F_{\nu_2} = \emptyset$ se $\nu_1 \neq \nu_2$, allora

$$\mu\left(\bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} F_\nu\right) = \sum_{\nu \in \mathcal{N}} \mu(F_\nu). \quad (2.5.1)$$

La terna $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ è detta *spazio di misura*.

La proprietà b) si chiama *additività numerabile della misura*. Dalla definizione 2.45 segue la proprietà di *subadditività numerabile*: se $\{F_\nu \mid \nu \in \mathcal{N}\}$ è una famiglia finita o numerabile di sottoinsiemi appartenenti a \mathfrak{F} , non necessariamente disgiunti, allora

$$\mu\left(\bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} F_\nu\right) \leq \sum_{\nu \in \mathcal{N}} \mu(F_\nu). \quad (2.5.2)$$

([13], teorema 10.2).

Inoltre, è di immediata verifica la proprietà

$$\text{se } F_1, F_2 \in \mathfrak{F} \text{ e } F_1 \subset F_2 \text{ allora } \mu(F_1) \leq \mu(F_2). \quad (2.5.3)$$

In uno spazio di misura, può accadere che un sottoinsieme di un insieme misurabile di misura nulla, non sia misurabile. D'altra parte, nella teoria dell'integrazione di funzioni su spazi di misura, gli insiemi di misura nulla sono "trascurabili" e le proprietà delle funzioni sono studiate "a meno di insiemi di misura nulla". Sarebbe perciò comodo poter considerare misurabili tutti i sottoinsiemi degli insiemi di misura nulla, nonché tutti i sottoinsiemi che differiscono da insiemi misurabili per un insieme di misura nulla. Questo è *sempre* possibile, ed è quanto asserito dal seguente teorema.

Teorema 2.46 *Sia $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia \mathfrak{F}^* la collezione di tutti i sottoinsiemi $F \subset \Omega$ per i quali esistono A e $B \in \mathfrak{F}$ tali che $A \subset F \subset B$ e $\mu(B \setminus A) = 0$: in tale situazione definiamo $\mu^*(F) := \mu(A)$. Allora \mathfrak{F}^* è una σ -algebra e μ^* è una misura (e ovviamente $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}^*$).*

DIMOSTRAZIONE. Si veda [49], cap. 1, teorema 1.36. □

Lo spazio di misura $(\Omega, \mathfrak{F}^*, \mu^*)$ si chiama *completamento* di $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$. D'ora in avanti, passando eventualmente al completamento, supporremo sempre di lavorare con spazi di misura *completi*.

Consideriamo uno spazio di misura $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ e una proprietà φ riferita ai punti ω di Ω . Ad esempio φ potrebbe essere la proprietà " $f(\omega) = g(\omega)$ ", se f, g sono due funzioni assegnate, oppure "la successione $\{f_n(\omega)\}$ converge", se $\{f_n\}$ è un'assegnata successione di funzioni.

Sia Ω_φ l'insieme $\Omega_\varphi := \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ ha la proprietà } \varphi\}$. Se $\Omega_\varphi \in \mathfrak{F}$ e $\mu(\Omega_\varphi^c) = 0$, diremo che la proprietà φ vale *quasi ovunque* in Ω , oppure *per quasi ogni* $\omega \in \Omega$. Ad esempio, diremo che " f e g sono uguali quasi ovunque" se $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = g(\omega)\} \in \mathfrak{F}$ e $\mu(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0$, e che " $f_n(\omega)$ converge a $f(\omega)$ per quasi ogni $\omega \in \Omega$ " se $\{\omega \in \Omega \mid f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)\} \in \mathfrak{F}$ e $\mu(\{\omega \in \Omega \mid f_n(\omega) \not\rightarrow f(\omega)\}) = 0$.

Richiamiamo ora due importanti esempi di costruzione di una misura a partire da altre misure assegnate: la *misura prodotto* e la *distribuzione* di una funzione misurabile.

Ricordiamo innanzitutto che uno spazio di misura $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ si dice σ -finito se esiste una famiglia finita o numerabile $\{F_\nu \mid \nu \in \mathcal{N}\}$ di elementi di \mathfrak{F} , tale che $\Omega = \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} F_\nu$, con $\mu(F_\nu) < +\infty$ per ogni $\nu \in \mathcal{N}$. Sullo spazio misurabile prodotto di due spazi di misura σ -finiti si può definire una misura prodotto.

Teorema 2.47 *Siano $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2, \mu_2)$ due spazi di misura σ -finiti. Esiste un'unica misura $\mu_1 \times \mu_2$ su $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2)$ tale che*

$$(\mu_1 \times \mu_2)(F_1 \times F_2) = \mu_1(F_1) \mu_2(F_2), \quad F_1 \in \mathfrak{F}_1, F_2 \in \mathfrak{F}_2. \quad (2.5.4)$$

La misura $\mu_1 \times \mu_2$ è detta *misura prodotto* di μ_1 e μ_2 , e la terna $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ è detta *spazio di misura prodotto* di $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2, \mu_2)$.

DIMOSTRAZIONE. Si veda [13], teorema 18.2. \square

A una funzione misurabile, definita su uno spazio su cui è assegnata una misura, si associa in modo naturale una misura sullo spazio di arrivo.

Teorema 2.48 *Sia $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di misura, (Σ, \mathfrak{E}) uno spazio misurabile e $f : \Omega \rightarrow \Sigma$ una funzione $\mathfrak{F}/\mathfrak{E}$ -misurabile. Allora*

$$\eta(E) := \mu(f^{-1}(E)), \quad E \in \mathfrak{E}, \quad (2.5.5)$$

definisce una misura η su (Σ, \mathfrak{E}) . Tale misura è detta distribuzione di f .

DIMOSTRAZIONE. Per la definizione 2.42, gli insiemi del tipo $f^{-1}(E)$, con $E \in \mathfrak{E}$, stanno in \mathfrak{F} . Le proprietà a) e b) della definizione 2.45 sono di verifica immediata. \square

Finora abbiamo parlato in generale di spazi di misura ma il nostro interesse principale sono le misure di probabilità.

Una misura μ su (Ω, \mathfrak{F}) si dice *finita* se $\mu(\Omega) < +\infty$. Normalizzando (cioè dividendo per $\mu(\Omega)$) una misura finita si ottiene una misura di probabilità.

Definizione 2.49 *Sia (Ω, \mathfrak{F}) uno spazio misurabile. Una misura \mathbf{P} su (Ω, \mathfrak{F}) si dice misura di probabilità se $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. La terna $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ prende allora il nome di spazio di probabilità.*

Se $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ è uno spazio di probabilità, gli insiemi misurabili, cioè gli elementi di \mathfrak{F} , sono detti *eventi* e gli elementi di Ω , se misurabili come sottoinsiemi, sono detti *eventi elementari*. Gli eventi F tali che $\mathbf{P}(F) = 1$ sono detti *quasi certi*.

Se Ω_φ è un evento del tipo $\Omega_\varphi = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ ha la proprietà } \varphi\}$, la probabilità $\mathbf{P}(\Omega_\varphi)$ di tale evento sarà indicata anche con la notazione

$$\mathbf{P}[\omega \text{ ha la proprietà } \varphi].$$

Ad esempio, si dirà che una certa proprietà φ vale *quasi certamente* (è il “quasi ovunque” nel contesto probabilistico) se $\mathbf{P}[\omega \text{ ha la proprietà } \varphi] = 1$, cioè se l'evento $\{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ ha la proprietà } \varphi\}$ è quasi certo.

Osserviamo che la misura prodotto di due misure di probabilità e la distribuzione di una funzione misurabile definita su uno spazio di probabilità sono ancora misura di probabilità. In particolare, con la notazione introdotta, se $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ è uno spazio di probabilità, (Σ, \mathfrak{E}) è uno spazio misurabile e $f : \Omega \rightarrow \Sigma$ è una funzione misurabile, la distribuzione di f è una probabilità \mathbf{D}_f su (Σ, \mathfrak{E}) definita dalla formula

$$\mathbf{D}_f(E) := \mathbf{P}[f(\omega) \in E], \quad E \in \mathfrak{E} \quad (2.5.6)$$

Prima di concludere la sezione, dimostriamo un semplice risultato che ci sarà più volte utile in seguito.

Lemma 2.50 *Se $\{F_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia finita o numerabile di eventi quasi certi, allora $\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} F_\nu$ è un evento quasi certo.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\left(\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} F_\nu\right)^c = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} F_\nu^c$, basta dimostrare che l'unione finita o numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla. Ma questo segue direttamente dalla subadditività numerabile, eq. (2.5.2). \square

2.6 L'integrale di Bochner

La generalizzazione dell'integrale di Lebesgue al caso di funzioni a valori in uno spazio di Banach separabile prende il nome di *integrale di Bochner*. In questa breve esposizione diamo per acquisita la nozione di integrabilità e di integrale secondo Lebesgue per funzioni definite su uno spazio di misura generale e a valori in \mathbb{R}^n (si veda ad esempio [49])

Sia \mathcal{X} uno spazio di Banach *separabile* e $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di misura. Per semplicità, poiché siamo interessati a misure di probabilità, supporremo che μ sia *finita*. Vogliamo allora definire l'integrale di variabili aleatorie (definizione 2.44) da Ω in \mathcal{X} .

Prima di tutto si definisce l'integrale di funzioni semplici. Se A è un insieme qualsiasi e $B \subset A$, denotiamo con $\chi_B : A \rightarrow \{0, 1\}$ la funzione indicatrice di B :

$$\chi_B(a) := \begin{cases} 1, & \text{se } a \in B, \\ 0, & \text{se } a \notin B, \end{cases} \quad a \in A. \quad (2.6.1)$$

Una *funzione semplice* è per definizione una variabile aleatoria $\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ la cui immagine consiste in un numero finito di punti. Poiché in \mathcal{X} ogni punto è un chiuso, e quindi un boreliano, le funzioni semplici sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$\varphi(\omega) := \sum_{k=0}^n \chi_{F_k}(\omega) x_k, \quad \omega \in \Omega, \quad (2.6.2)$$

dove, per $k = 0, 1, \dots, n$, gli x_k sono elementi di \mathcal{X} e gli F_k sono sottoinsiemi misurabili di Ω , cioè elementi di \mathfrak{F} . Definiamo *integrale* della funzione semplice φ che ha l'espressione (2.6.2) l'elemento di \mathcal{X}

$$\int_{\Omega} \varphi(\omega) d\mu_{\omega} := \sum_{k=0}^n \mu(F_k) x_k. \quad (2.6.3)$$

È di immediata verifica il fatto che la definizione appena data non dipende dalla particolare espressione della funzione semplice φ . Inoltre si ha

$$\left\| \int_{\Omega} \varphi(\omega) d\mu_{\omega} \right\| \leq \int_{\Omega} \|\varphi(\omega)\| d\mu_{\omega} \quad (2.6.4)$$

Passiamo quindi alla definizione dell'integrale di Bochner per tutte le altre variabili aleatorie, non necessariamente funzioni semplici. Il seguente teorema ci fornisce una caratterizzazione delle variabili aleatorie a valori in spazi di Banach separabili che, insieme al lemma seguente, è la base per la definizione.

Teorema 2.51 *Sia \mathcal{X} uno spazio di Banach separabile con norma $\|\cdot\|$ e $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di misura finita. Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ è una variabile aleatoria se e solo se esiste una successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni semplici tale che la successione $\{\|f(\omega) - \varphi_n(\omega)\|\}$ tende, decrescendo, a zero per quasi ogni $\omega \in \Omega$*

DIMOSTRAZIONE. Si veda [25], cap. II, teorema 2 e [24], cap. 1, lemma 1.1. \square

Lemma 2.52 *Se \mathcal{X} è uno spazio di Banach separabile, (Ω, \mathfrak{F}) è uno spazio misurabile, e $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ è una variabile aleatoria, allora la funzione $\|f(\cdot)\| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una variabile aleatoria.*

DIMOSTRAZIONE. Si veda [24], cap. 1, lemma 1.5. \square

Definizione 2.53 *La variabile aleatoria $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ si dice Bochner-integrabile se*

$$\int_{\Omega} \|f(\omega)\| d\mu_{\omega} < +\infty, \quad (2.6.5)$$

dove l'integrale che compare nella 2.6.5 è l'integrale di Lebesgue.

Se f è una variabile aleatoria, per il teorema 2.51 esiste una successione di funzioni semplici $\{\varphi_n\}$ con $\|f(\omega) - \varphi_n(\omega)\|$ decrescente a zero quasi ovunque. Se f è Bochner-integrabile, dall'eq. (2.6.4) si ha allora che

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} \varphi_m(\omega) d\mu_{\omega} - \int_{\Omega} \varphi_n(\omega) d\mu_{\omega} \right\| &\leq \int_{\Omega} \|\varphi_m(\omega) - \varphi_n(\omega)\| d\mu_{\omega} \\ &\leq \int_{\Omega} \|f(\omega) - \varphi_m(\omega)\| d\mu_{\omega} + \int_{\Omega} \|f(\omega) - \varphi_n(\omega)\| d\mu_{\omega} \end{aligned}$$

tende a 0 (per il teorema di Beppo Levi), quando $m, n \rightarrow \infty$. Dunque la successione $\{\int_{\Omega} \varphi_n(\omega) d\mu_{\omega}\}$ è una successione di Cauchy in \mathcal{X} . Poichè \mathcal{X} è completo esiste il limite in \mathcal{X} di tale successione.

Definizione 2.54 *Definiamo integrale di Bochner della funzione Bochner-integrabile f il limite in \mathcal{X} degli integrali delle funzioni semplici che approssimano f*

$$\int_{\Omega} f(\omega) d\mu_{\omega} := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_n(\omega) d\mu_{\omega} \quad (2.6.6)$$

Si dimostra che la definizione è ben data, cioè non dipende dalla successione di funzioni semplici che approssima f e che inoltre

$$\left\| \int_{\Omega} f(\omega) \, d\mu_{\omega} \right\| \leq \int_{\Omega} \|f(\omega)\| \, d\mu_{\omega}. \quad (2.6.7)$$

Se f è Bochner-integrabile ed $E \in \mathfrak{F}$ si definisce l'integrale di Bochner di f su E come

$$\int_E f(\omega) \, d\mu_{\omega} := \int_{\Omega} \chi_E(\omega) f(\omega) \, d\mu_{\omega} \quad (2.6.8)$$

(la funzione $\chi_E f$ è misurabile, si veda il lemma 3.31).

Nella sezione 2.3 abbiamo introdotto l'integrale di Riemann per funzioni $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$, dove $[a, b]$ è un intervallo della retta reale (è uno spazio di misura finita con la struttura standard di Lebesgue) e \mathcal{X} è uno spazio di Banach qualunque. Se \mathcal{X} è separabile si ha, come nel caso a dimensione finita, che l'integrale di Riemann (se esiste) coincide con quello di Bochner.

L'integrale di Bochner ha quasi tutte le buone proprietà dell'integrale di Lebesgue (linearità, additività, assoluta continuità, teorema di Fubini, eccetera). Tuttavia, questa affermazione non va presa troppo alla lettera. Infatti certe importanti proprietà dell'integrale di Lebesgue *non* si trasferiscono all'integrale di Bochner; ad esempio, per quest'ultimo non vale il teorema di Radon-Nikodym (si veda l'esempio riportato in [25]).

Fra i teoremi più importanti che, invece, dall'integrale di Lebesgue si estendono all'integrale di Bochner c'è il *teorema di convergenza dominata*

Teorema 2.55 *Sia $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di misura finita e \mathcal{X} uno spazio di Banach separabile. Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni $f_n : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ Bochner-integrabili tali che*

- a) $f_n(\omega)$ tende quasi ovunque a una funzione $f(\omega)$,
- b) esiste $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ Lebesgue-integrabile tale che $\|f_n(\omega)\| \leq g$ per quasi ogni $\omega \in \Omega$,

allora f è una variabile aleatoria Bochner-integrabile e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(\omega) \, d\mu_{\omega} = \int_{\Omega} f(\omega) \, d\mu_{\omega} \quad (2.6.9)$$

DIMOSTRAZIONE. Si veda [27], corollario III.6.16. □

Il seguente risultato, dovuto a Hille, mette in luce il buon comportamento degli operatori chiusi rispetto all'integrale di Bochner.

Teorema 2.56 *Sia L un operatore lineare chiuso in \mathcal{X} e sia $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ una variabile aleatoria Bochner-integrabile tale che $f(\omega) \in \mathcal{D}(L)$ per quasi ogni $\omega \in \Omega$.*

Allora la funzione $Lf(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ è una variabile aleatoria e se questa è Bochner-integrabile risulta che $\int_{\Omega} f(\omega) d\mu_{\omega} \in \mathcal{D}(L)$, con

$$L \int_{\Omega} f(\omega) d\mu_{\omega} = \int_{\Omega} Lf(\omega) d\mu_{\omega}. \quad (2.6.10)$$

DIMOSTRAZIONE. Si veda [27], teorema III.6.20. \square

La costruzione degli spazi L^p si generalizza alle funzioni Bochner-integrabili.

Sia $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di misura finita e \mathcal{X} uno spazio di Banach separabile con norma $\|\cdot\|$. Fissato $p \in [1, +\infty)$, per ogni variabile aleatoria $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ poniamo

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} \|f(\omega)\|^p d\mu_{\omega} \right)^{1/p}. \quad (2.6.11)$$

Per le variabili aleatorie f tali che $\|f\|_p \leq +\infty$ valgono disuguaglianze di tipo Hölder e Minkowsky ([27], teorema III.3.2 e lemma III.3.3). In particolare, le variabili aleatorie con $\|f\|_p < +\infty$ formano uno spazio vettoriale rispetto alle naturali operazioni di somma e prodotto per scalare.

Definizione 2.57 *Posto $\mathcal{M} := (\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, indichiamo con $L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$ lo spazio vettoriale delle variabili aleatorie $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ con $\|f\|_p < +\infty$, quotientato rispetto alla relazione di equivalenza*

$$f \sim g \Leftrightarrow f(\omega) = g(\omega) \text{ quasi ovunque}. \quad (2.6.12)$$

Con tale definizione, $\|\cdot\|_p$ è una norma per $L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$.

Teorema 2.58 *Lo spazio vettoriale $L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma $\|\cdot\|_p$.*

DIMOSTRAZIONE. Si veda [27], teorema III.6.6. \square

Nei due teoremi seguenti enunciamo alcune proprietà degli spazi L^p generalizzati che utilizzeremo nel corso della tesi.

Teorema 2.59 a) *Se $1 \leq p \leq q < +\infty$, allora $L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X}) \subset L^q(\mathcal{M}; \mathcal{X})$.*

b) *Se la σ -algebra \mathfrak{F} è separabile, allora $L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$ è uno spazio di Banach separabile.*

c) *Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni in $L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$, convergente in $L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$ a una funzione f , allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_k}(\omega)$ converge a $f(\omega)$ quasi ovunque.*

DIMOSTRAZIONE. a) Segue dal corrispondente teorema per l'integrale di Lebesgue; b) si veda [27], lemmi III.8.3 e III.8.4; c) si veda [27], teorema III.3.6 e corollario III.6.13. \square

Teorema 2.60 *Sia \mathcal{X} uno spazio di Banach separabile e siano $(\Sigma, \mathfrak{E}, \eta)$ e $\mathcal{M} := (\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ due spazi di misura finita. Sia poi $\mathbf{g} : \Sigma \rightarrow L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$, per un certo $p \in [1, +\infty)$, una variabile aleatoria Bochner-integrabile su Σ . Allora esiste una funzione $g : \Sigma \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ tale che*

- a) g è una variabile aleatoria, cioè è $(\mathfrak{E} \times \mathfrak{F})/\mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$ -misurabile;
- b) $g(s, \omega) = \mathbf{g}(s)(\omega)$ per quasi ogni $(s, \omega) \in \Sigma \times \Omega$;
- c) $g(\cdot, \omega) : \Sigma \rightarrow \mathcal{X}$ è Bochner-integrabile per quasi ogni $\omega \in \Omega$;
- d) $\int_{\Omega} g(s, \omega) d\eta_s = \left[\int_{\Omega} \mathbf{g}(s) d\eta_s \right] (\omega)$ per quasi ogni $\omega \in \Omega$.

DIMOSTRAZIONE. Si veda [27], teorema III.11.17. □

Per concludere introduciamo qualche notazione sintetica. L'integrale di Bochner (o di Lebesgue) $\int_{\Omega} f(\omega) d\mu_{\omega}$ sarà indicato anche con $\int_{\Omega} f d\mu$. Se poi $\mathcal{M} = (\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, useremo anche le notazioni $L^p(\Omega, \mu; \mathcal{X})$, $L^p(\Omega; \mathcal{X})$ e simili per indicare lo spazio $L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$, quando la struttura di spazio di misura per Ω è sottointesa. Ometteremo di regola anche l'indicazione di \mathcal{X} , scrivendo ad esempio $L^p(\Omega, \mu)$ o $L^p(\Omega)$, quando $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ o $\mathcal{X} = \mathbb{C}$.

2.7 Prodotto tensoriale di spazi di Banach

Nella precedente sezione abbiamo introdotto lo spazio $L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$, dove \mathcal{X} è uno spazio di Banach separabile, $\mathcal{M} := (\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ è uno spazio di misura finita e p è un numero reale compreso in $[1, +\infty)$.

Come vedremo nella sezione 3.2, tale spazio può essere caratterizzato in termini di un opportuno *prodotto tensoriale* fra gli spazi di Banach $L^p(\mathcal{M}; \mathbb{C})$ e \mathcal{X} . Tale caratterizzazione ci sarà di aiuto nel corso di tutta la tesi poiché essa migliora tanto la “maneggevolezza” quanto la “leggibilità” dello spazio in questione.

In questa sezione vogliamo quindi richiamare alcuni concetti fondamentali della teoria del prodotto tensoriale di spazi di Banach.

Innanzitutto occorre enunciare il teorema fondamentale sul completamento degli spazi normati.

Teorema 2.61 *Sia \mathcal{X} uno spazio vettoriale normato.. Esiste allora uno spazio di Banach $\tilde{\mathcal{X}}$ ed una immersione lineare e isometrica $j : \mathcal{X} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ tale che*

- a) $j(\mathcal{X})$ è denso in $\tilde{\mathcal{X}}$;
- b) ogni immersione lineare isometrica da \mathcal{X} in uno spazio di Banach \mathcal{Y} si estende in modo unico ad una immersione lineare isometrica da $\tilde{\mathcal{X}}$ in \mathcal{Y} .

DIMOSTRAZIONE. Si veda [64], cap. 1, sez. 10. \square

Lo spazio $\tilde{\mathcal{X}}$, che è unico a meno di isomorfismi isometrici per la parte b) del precedente teorema, è chiamato il *completamento* di \mathcal{X} . Riportiamo di seguito due corollari del teorema 2.61 che ci saranno utili più avanti.

Corollario 2.62 *Se $D \subset \mathcal{X}$ è denso in \mathcal{X} , allora $j(D)$ è denso in $\tilde{\mathcal{X}}$.*

DIMOSTRAZIONE. È immediato verificare che in ogni intorno sferico aperto di $\tilde{\mathcal{X}}$ ci sono punti di $j(D)$. \square

Corollario 2.63 *Siano \mathcal{X} e \mathcal{Y} due spazi di Banach, D un sottospazio denso di \mathcal{X} , E un sottospazio denso di \mathcal{Y} e $\phi : D \rightarrow E$ un isomorfismo lineare e isometrico. Allora ϕ può essere esteso in modo unico a un isomorfismo isometrico fra \mathcal{X} e \mathcal{Y} .*

DIMOSTRAZIONE. Si veda [64], cap. 1, sez. 10. \square

Introduciamo, seguendo l'impostazione di [54], il prodotto tensoriale *algebrico* di due spazi di Banach \mathcal{X} e \mathcal{Y} .

Consideriamo l'insieme delle espressioni formali del tipo $\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k$, con $n \in \mathbb{N}$ e $x_k \in \mathcal{X}$, $y_k \in \mathcal{Y}$ per $k = 0, 1, \dots, n$. Introduciamo in questo insieme le seguenti relazioni di equivalenza:

- 1) $\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k \sim \sum_{k=0}^n x_{\sigma(k)} \otimes y_{\sigma(k)}$, con σ permutazione di n oggetti;
- 2) $(x + x') \otimes y \sim x \otimes y + x' \otimes y$;
- 3) $x \otimes (y + y') \sim x \otimes y + x \otimes y'$;
- 4) $\lambda x \otimes y \sim x \otimes \lambda y$, con $\lambda \in \mathbb{C}$;

Definizione 2.64 *Le espressioni formali $\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k$ e $\sum_{k=0}^{n'} x'_k \otimes y'_k$ sono equivalenti se si possono trasformare l'una nell'altra con un numero finito di applicazioni delle equivalenze 1-4 tramite la seguente regola di induzione:*

$$\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k \sim \sum_{k=0}^{n'} x'_k \otimes y'_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n+m} x_k \otimes y_k \sim \sum_{k=0}^{n'} x'_k \otimes y'_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k \otimes y_k. \quad (2.7.1)$$

In modo informale possiamo capire la precedente definizione se pensiamo che le x_k siano funzioni da un certo insieme A in \mathbb{R} e le y_k siano funzioni da un'altro insieme B in \mathbb{R} . Se definiamo la funzione di due variabili

$$\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k : A \times B \rightarrow \mathbb{R}, \quad \left(\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k \right) (a, b) := \sum_{k=0}^n x_k(a) y_k(b),$$

la definizione 2.64 è data in modo che tutte le espressioni equivalenti diano la stessa funzione.

Indichiamo con $[u]$ la classe di equivalenza dell'espressione formale u per la relazione introdotta con la precedente definizione.

Definizione 2.65 Il prodotto tensoriale algebrico degli spazi di Banach \mathcal{X} e \mathcal{Y} è lo spazio vettoriale

$$\mathcal{X} \odot \mathcal{Y} := \left\{ \left[\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k \right] \mid n \in \mathbb{N}, x_k \in \mathcal{X}, y_k \in \mathcal{Y}, k = 0, 1, \dots, n \right\} \quad (2.7.2)$$

delle classi di equivalenza per la relazione introdotta nella definizione 2.64, con le operazioni di somma e prodotto per uno scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ definite da

- a) $[\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k] + [\sum_{k=0}^{n'} x'_k \otimes y'_k] := [\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k + \sum_{k=0}^{n'} x'_k \otimes y'_k]$,
 b) $\lambda [\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k] := [\sum_{k=0}^n \lambda x_k \otimes y_k]$,

Osserviamo che l'elemento neutro della somma è la classe di equivalenza $[0 \otimes 0]$.

A dimensione infinita, anche se dotiamo $\mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$ di una norma, non avremo ancora uno spazio di Banach, perché $\mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$ non sarà completo. Perciò, se vogliamo definire il prodotto tensoriale di \mathcal{X} e \mathcal{Y} in modo da ottenere ancora uno spazio di Banach, si dovrà completare $\mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$.

Definizione 2.66 Sia $\nu : \mathcal{X} \odot \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una norma sullo spazio $\mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$. Definiamo prodotto tensoriale $\mathcal{X} \otimes_{\nu} \mathcal{Y}$ come il completamento dello spazio normato $\mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$, la cui esistenza e unicità (a meno di isomorfismi) sono assicurate dal teorema 2.61.

Ci accorgiamo perciò che la costruzione del prodotto tensoriale di spazi di Banach a dimensione infinita non è unica, perché dipende dalla scelta della norma su $\mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$. Con norme diverse si ottengono spazi effettivamente diversi, cioè non isomorfi (si vedano gli esempi riportati in [25], cap. VIII).

Fra tutte le norme che si possono mettere su $\mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$, le più interessanti sono quelle che chiameremo “norme tensoriali” (*crossnorms*).

Definizione 2.67 Una norma $\nu : \mathcal{X} \odot \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}^+$ su $\mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$ è detta norma tensoriale se soddisfa la condizione

$$\nu([x \otimes y]) = \|x\| \|y\|. \quad (2.7.3)$$

Consideriamo ora lo spazio vettoriale $\text{Bil}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ delle forme bilineari $G : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C}$ tali che esiste finito il numero reale non negativo

$$\|G\| := \sup\{|G(x, y)| \mid \|x\| = \|y\| = 1\}. \quad (2.7.4)$$

Se per ogni $[\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k] \in \mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$ e per ogni $x^* \in \mathcal{X}^*$, $y^* \in \mathcal{Y}^*$ definiamo

$$\mathcal{T} \left(\left[\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k \right] \right) (x^*, y^*) := \sum_{k=0}^n x^*(x_k) y^*(y_k), \quad (2.7.5)$$

si ha che l'eq. (2.7.5) definisce un'immersione di spazi vettoriali

$$\mathcal{T} : \mathcal{X} \odot \mathcal{Y} \hookrightarrow \text{Bil}(\mathcal{X}^*, \mathcal{Y}^*). \quad (2.7.6)$$

Tramite \mathcal{T} , quindi, ogni elemento di $\mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$ è identificato con una forma bilineare su $\mathcal{X}^* \times \mathcal{Y}^*$. Osserviamo che a dimensione finita \mathcal{T} è un isomorfismo e quindi caratterizza completamente il prodotto tensoriale, tant'è vero che in questo caso si può *definire* il prodotto tensoriale di \mathcal{X} e \mathcal{Y} come $\text{Bil}(\mathcal{X}^*, \mathcal{Y}^*)$. Poiché $\text{Bil}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma definita dall'eq. (2.7.4), possiamo considerare la norma ι indotta su $\mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$ tramite l'immersione \mathcal{T} :

$$\iota(w) := \|\mathcal{T}(w)\|, \quad w \in \mathcal{X} \odot \mathcal{Y}. \quad (2.7.7)$$

Se $w = [\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k] \in \mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$ si ha perciò

$$\iota(w) = \sup \left\{ \left| \sum_{k=0}^n x^*(x_k) y^*(y_k) \right| \mid x^* \in \mathcal{X}^*, y^* \in \mathcal{Y}^*, \|x^*\| = \|y^*\| = 1 \right\}. \quad (2.7.8)$$

Si può facilmente verificare che ι è una norma tensoriale.

Lo spazio di Banach $\mathcal{X} \otimes_{\iota} \mathcal{Y}$ è detto *prodotto tensoriale iniettivo* di \mathcal{X} e \mathcal{Y} . Osserviamo che in generale $\mathcal{X} \otimes_{\iota} \mathcal{Y}$ si identifica con un sottospazio (chiuso) di $\text{Bil}(\mathcal{X}^*, \mathcal{Y}^*)$, per il corollario 2.63.

Se ora poniamo, per ogni $w \in \mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$

$$\pi(w) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^n \|x_k\| \|y_k\| \mid w = \left[\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k \right] \right\}, \quad (2.7.9)$$

si ha il seguente

Teorema 2.68 π è una norma tensoriale su $\mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$ e inoltre

- a) $\pi(w) = \sup \{ w(\phi) \mid \phi \in \text{Bil}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \|\phi\| = 1 \}$, dove l'azione di $w = [\sum_{k=0}^n x_k \otimes y_k]$ su ϕ è definita nel modo naturale $w(\phi) := \sum_{k=0}^n \phi(x_k, y_k)$,
- b) $\pi(w) \geq \iota(w)$ per ogni $w \in \mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$.

DIMOSTRAZIONE. Si veda [25], cap. VIII, proposizione 9. □

Lo spazio di Banach $\mathcal{X} \otimes_{\pi} \mathcal{Y}$ è detto *prodotto tensoriale proiettivo* di \mathcal{X} e \mathcal{Y} .

Per concludere questa sezione, introduciamo anche il prodotto tensoriale di spazi di Hilbert.

Se \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 sono spazi di Hilbert con i rispettivi prodotti hermitiani $\langle \cdot, \cdot \rangle_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_2$, definiamo il prodotto hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\odot}$ sul prodotto tensoriale algebrico $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ ponendo

$$\langle w \otimes x, y \otimes z \rangle_{\odot} := \langle w, y \rangle_1 \langle x, z \rangle_2, \quad (2.7.10)$$

per ogni $w, y \in \mathcal{H}_1$ e $x, z \in \mathcal{H}_2$, e poi estendendo la definizione per linearità.

Se indichiamo con $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ il completamento di $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ rispetto alla norma indotta dal prodotto hermitiano appena definito, e se consideriamo su $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\otimes}$ dato dall'unica estensione di $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\odot}$ a tutto $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, si ha il seguente

Teorema 2.69 *Lo spazio di Banach $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ è uno spazio di Hilbert per il prodotto hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\otimes}$.*

DIMOSTRAZIONE. [48], cap. II, sez. II.4. □

Chiamiamo $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ il *prodotto tensoriale* degli spazi di Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 .

3

Un problema di evoluzione aleatorio

Nel capitolo 1 abbiamo descritto le linee principali del modello di trasporto di radiazione in una nube con *clumps* aleatori. Quello che ci proponiamo di fare in questo capitolo è di inquadrare correttamente il modello in un contesto formale più preciso per poterne studiare la buona posizione e altre proprietà. A questo scopo, nel presente capitolo come nel successivo, ci sposteremo su un piano analitico generale, studiando un problema di evoluzione aleatorio in uno spazio di Banach astratto. La teoria così sviluppata sarà poi applicata al trasporto in mezzi aleatori nel capitolo 5. Una tale impostazione è, per quanto a nostra conoscenza, pressoché assente dall'attuale letteratura sulla teoria del trasporto stocastico (si vedano i riferimenti bibliografici citati nella sezione 1.1).

3.1 Problemi di evoluzione con parametri aleatori

Il modello di trasporto nella nube con *clumps* aleatori, così come si è presentato nel capitolo 1, conduce allo studio di un problema astratto di evoluzione del tipo:

$$\begin{cases} f'_\omega(t) = Lf_\omega(t) + J(\omega)f_\omega(t) + q_\omega(t), & t \in T \\ f_\omega(0) = \xi_\omega. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Nel sistema (3.1.1), la variabile t rappresenta il tempo e assume i valori nell'intervallo

$$T := [0, t_0), \quad (3.1.2)$$

con eventualmente $t_0 = +\infty$, mentre la variabile $\omega \in \Omega$ è un “evento elementare” di un opportuno spazio di probabilità

$$\mathcal{M} := (\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}). \quad (3.1.3)$$

Il nostro punto di vista è quello di considerare l'equazione (3.1.1) come un problema di evoluzione con “parametri” di carattere aleatorio, rappresentati da ω , la dipendenza dai quali è tale che, una volta fissato il loro valore, la (3.1.1) è un problema di evoluzione deterministico ben posto. In altre parole, per ogni ω fissato il sistema ha un'evoluzione regolare nel senso della sezione 2.3.

Lo scopo principale del presente capitolo è quello di dare un significato matematico preciso all'equazione (3.1.1).

Fissato $t \in T$ e $\omega \in \Omega$ supponiamo che l'incognita $f_\omega(t)$ sia un elemento di in uno spazio di Banach \mathcal{X} , sul campo \mathbb{C} dei numeri complessi. Supporremo sempre che \mathcal{X} sia uno spazio di Banach *separabile*. Sempre per $t \in T$ e $\omega \in \Omega$ fissati, $q_\omega(t)$ è un assegnato elemento di \mathcal{X} che rappresenta un termine di sorgente e ξ_ω (indipendente da t) è un assegnato elemento di \mathcal{X} che rappresenta il valore iniziale di f . Passando agli operatori che compaiono nell'eq. (3.1.1), L è un operatore lineare in \mathcal{X} la cui azione non dipende da ω e che sarà perciò detto *deterministico*). Invece, $J(\omega)$ è un operatore lineare *limitato* la cui azione dipende da ω e che sarà perciò detto *aleatorio*. Anche $J(\cdot)$ può essere visto come una variabile aleatoria (a valori in $[\mathcal{X}]$), ma la misurabilità è una condizione in generale troppo restrittiva. Vedremo nella sezione 3.5 che l'ipotesi sufficiente ai nostri scopi è la *misurabilità in senso forte*.

Per precisare il significato dell'equazione (3.1.1), è necessario chiarire che cosa si intende esattamente per “soluzione” di questa.

Innanzitutto osserviamo che il sistema descritto nel capitolo 1 non conduce a una struttura di equazione differenziale stocastica nel senso di Itô. Infatti, nel nostro modello, la sorgente q e la perturbazione limitata J sono legate essenzialmente ad una *configurazione geometrica* di carattere aleatorio del sistema. La teoria di Itô si applica alla modellizzazione di sistemi in cui è presente un fenomeno di “rumore bianco”, ovvero una sorgente o una perturbazione che si presenta sotto forma di un processo stocastico la cui funzione di autocorrelazione è singolare (per la teoria delle equazioni differenziali stocastiche di Ito in spazi a dimensione infinita si veda, ad esempio, [24]). Al contrario, nel nostro modello possiamo supporre che la regolarità della dipendenza da ω sia sufficiente da poter “immergere” (in un senso che verrà precisato nelle prossime sezioni) il problema di evoluzione aleatorio (3.1.1) in uno spazio di variabili aleatorie. La soluzione (stretta) del problema di evoluzione così ottenuto sarà per noi la *soluzione* del problema stocastico.

In altre parole, leggeremo l'equazione aleatoria (3.1.1) come un'equazione *deterministica* in uno spazio di variabili aleatorie. Equazioni aleatorie di questo tipo sono dette *regolari* (si vedano [55] e [57] per il caso in cui \mathcal{X} ha dimensione finita).

La prima domanda da porsi è quale sia lo spazio di variabili aleatorie più appropriato. Immaginiamo che $f_\omega(t)$ sia la soluzione (in un qualche senso) del nostro problema e consideriamo la funzione $\mathbf{f}(t) : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$, $\mathbf{f}(t)(\omega) := f_\omega(t)$. Una richiesta minima è che $\mathbf{f}(t)$, oltre a essere misurabile, abbia un'aspettazione ben definita (che è data da un integrale di Bochner nello spazio \mathcal{X}), ovvero appartenga allo spazio $L^1(\mathcal{M}; \mathcal{X})$, dove \mathcal{M} è dato dalla (3.1.3). Più in generale, se vogliamo che $\mathbf{f}(t)$ possieda tutti i momenti (si veda la definizione (3.1.8)) fino all'ordine p , con $p \in [1, +\infty)$, si dovrà supporre $\mathbf{f}(t) \in L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$.

Ricordiamo che $L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$ è lo spazio di Banach delle variabili aleatorie $u : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$, cioè delle funzioni $\mathfrak{F}/\mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$ -misurabili (definizione 2.44), tali che esista finita la

norma $\|\cdot\|_p$ definita da

$$\|u\|_p := \left(\int_{\Omega} \|u(\omega)\|^p d\mathbf{P}_{\omega} \right)^{1/p}, \quad (3.1.4)$$

dove $\|\cdot\|$ è la norma di \mathcal{X} (si veda la sezione 2.6). Dalle ipotesi di separabilità della σ -algebra \mathfrak{F} segue che $L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$ è uno spazio di Banach separabile (teorema 2.59).

Poiché lo spazio $L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$ sarà d'ora in avanti uno dei principali oggetti di indagine di questa tesi, per brevità di notazione esso sarà indicato semplicemente con il simbolo $L_{\mathcal{X}}^p$:

$$L_{\mathcal{X}}^p := L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X}). \quad (3.1.5)$$

Il primo passo da compiere per “immergere” l'eq. (3.1.1) nello spazio $L_{\mathcal{X}}^p$ è quello di identificare gli elementi di \mathcal{X} con le funzioni costanti in $L_{\mathcal{X}}^p$. Dato un qualunque elemento $x \in \mathcal{X}$, possiamo considerare la variabile aleatoria $\hat{x} \in L_{\mathcal{X}}^p$, che assume quasi certamente il valore x :

$$\hat{x}(\omega) := x, \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega \quad (3.1.6)$$

(per inciso, quando scriviamo “q. c. $\omega \in \Omega$ ” intendiamo che la definizione o la proprietà in questione vale “quasi certamente”, ovvero a meno di insiemi di misura nulla). Si ha il seguente, semplice, risultato.

Teorema 3.1 *L'applicazione che a $x \in \mathcal{X}$ associa $\hat{x} \in L_{\mathcal{X}}^p$ è un'immersione $\mathcal{X} \hookrightarrow L_{\mathcal{X}}^p$ di spazi di Banach.*

DIMOSTRAZIONE. La linearità è evidente. Dimostriamo quindi l'isometricità (e, conseguentemente, l'iniettività). Dato un qualunque $x \in \mathcal{X}$, dalle definizioni (3.1.4) e (3.1.6) segue subito che

$$(\|\hat{x}\|_p)^p = \int_{\Omega} \|\hat{x}(\omega)\|^p d\mathbf{P}_{\omega} = \int_{\Omega} \|x\|^p d\mathbf{P}_{\omega} = \|x\|^p,$$

in quanto $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. □

L'immersione $\mathcal{X} \hookrightarrow L_{\mathcal{X}}^p$ permette di identificare \mathcal{X} con un sottospazio chiuso di $L_{\mathcal{X}}^p$, che chiameremo *spazio degli elementi deterministici* e che, con abuso di notazione, continueremo a indicare con \mathcal{X} .

Il più importante proiettore sul sottospazio \mathcal{X} è senz'altro l'*operatore di aspettazione* E , definito, per ogni $u \in L_{\mathcal{X}}^p$ dall'integrale di Bochner

$$Eu := \int_{\Omega} u(\omega) d\mathbf{P}_{\omega}. \quad (3.1.7)$$

Osservazione 3.2 *Per ogni $p \in [1, +\infty)$ si ha che E è una proiezione lineare da $L_{\mathcal{X}}^p$ su \mathcal{X} . In particolare, quindi, $E \in [L_{\mathcal{X}}^p]$, con $\|E\| = 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema 2.59 sappiamo che $L_{\mathcal{X}}^p \subset L_{\mathcal{X}}^1$ e quindi esiste l'integrale di Bochner di u , che è un elemento di \mathcal{X} . Se poi \hat{x} è l'elemento deterministico associato a $x \in \mathcal{X}$, si ha

$$E\hat{x} = \int_{\Omega} \hat{x}(\omega) d\mathbf{P}_{\omega} = x \mathbf{P}(\Omega) = x,$$

che identifichiamo nuovamente con \hat{x} . Perciò E è una proiezione di $L_{\mathcal{X}}^p$ su \mathcal{X} . \square

Fissato $q \in [1, p]$ si ha che $L_{\mathcal{X}}^p \subset L_{\mathcal{X}}^q$ e quindi, per ogni $u \in L_{\mathcal{X}}^p$, esistono finiti il *momento di ordine q* di u

$$M_q(u) := \int_{\Omega} \|u\|^q d\mathbf{P}_{\omega} \quad (3.1.8)$$

e il *momento di ordine q rispetto alla media* di u

$$M'_q(u) := \int_{\Omega} \|u - Eu\|^q d\mathbf{P}_{\omega}. \quad (3.1.9)$$

3.2 Lo spazio $L_{\mathcal{X}}^p$ come prodotto tensoriale

In questa sezione vogliamo dare un'utile caratterizzazione dello spazio $L_{\mathcal{X}}^p$ in termini di prodotto tensoriale. Il risultato fondamentale è la dimostrazione dell'isomorfismo tra $L_{\mathcal{X}}^p$, con $p \in [1, +\infty)$ un opportuno prodotto tensoriale fra gli spazi di Banach $L^p(\Omega; \mathbb{C})$ e \mathcal{X} . Tale dimostrazione è costruita sulla falsariga di quella che viene data in [25] (cap. VIII, esempio 10) per l'analogo teorema nel caso $p = 1$.

Poniamo, per brevità di notazione,

$$L_{\mathbb{C}}^p := L^p(\mathcal{M}; \mathbb{C}) \quad (3.2.1)$$

e consideriamo il prodotto tensoriale algebrico $L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X}$, costituito dalle classi di equivalenza, per la relazione introdotta nella sezione 2.7, di espressioni del tipo $\sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k$, con $\psi_k \in L_{\mathbb{C}}^p$ e $x_k \in \mathcal{X}$, per $k = 0, 1, \dots, n$. Per comodità di notazione identificheremo spesso una classe di equivalenza con un suo rappresentante. Scriveremo cioè $\sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k$, intendendo in realtà la classe di equivalenza $[\sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k]$.

Per noi $L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X}$ sarà sempre uno spazio vettoriale normato, con la norma ν_p definita su ogni elemento $w \in L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X}$ da

$$\nu_p(w) := \inf \left\{ \left(\sum_{k=0}^n \|\psi_k\|^p \|x_k\|^p \right)^{1/p} \mid w = \left[\sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k \right] \right\}. \quad (3.2.2)$$

Non è difficile verificare che ν_p è una "norma tensoriale" secondo la definizione data nella sezione 2.7. Osserviamo che essa è in qualche modo una estensione della norma *proiettiva* (si veda la (2.7.9)), e si riduce a quest'ultima per $p = 1$.

Sempre per comodità di notazione, indicheremo semplicemente con $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$ lo spazio di Banach $L_{\mathbb{C}}^p \otimes_{\nu_p} \mathcal{X}$, dato dal completamento di $L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X}$ rispetto alla norma ν_p .

Prima di enunciare e dimostrare il teorema di isomorfismo, introduciamo un lemma tecnico.

Lemma 3.3 *Se $u \in L_{\mathcal{X}}^p$ e $\psi \in L_{\mathbb{C}}^q$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (dove $q = +\infty$, se $p = 1$), allora, posto $v(\omega) := \psi(\omega)u(\omega)$ q. c. $\omega \in \Omega$, si ha che $v \in L_{\mathcal{X}}^1$ e $\|v\|_{L_{\mathcal{X}}^1} \leq \|\psi\|_{L_{\mathbb{C}}^q} \|u\|_{L_{\mathcal{X}}^p}$.*

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo prima di tutto dimostrare che $v : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ è misurabile. Per il Teorema 2.51 esiste una successione $\{\sigma_n\}$ di funzioni semplici in $L_{\mathbb{C}}^q$ e una successione $\{s_n\}$ di funzioni semplici in $L_{\mathcal{X}}^p$ tali che $|\psi(\omega) - \sigma_n(\omega)|$ e $\|u(\omega) - s_n(\omega)\|$ convergono quasi certamente a zero per $n \rightarrow \infty$. Perciò si ha che

$$\begin{aligned} \|v(\omega) - \sigma_n(\omega)s_n(\omega)\| &\leq \|v(\omega) - \sigma_n(\omega)u(\omega)\| + \|\sigma_n(\omega)u(\omega) - \sigma_n(\omega)s_n(\omega)\| \\ &= |\psi(\omega) - \sigma_n(\omega)| \|u(\omega)\| + |\sigma_n(\omega)| \|u(\omega) - s_n(\omega)\| \end{aligned}$$

tende quasi certamente a zero per $n \rightarrow \infty$. Poiché $\sigma_n s_n$ risulta una funzione semplice in $L_{\mathcal{X}}^p$, possiamo dire che v è approssimata quasi certamente da una successione di funzioni semplici, e il teorema 2.51 ci dice ancora che v è misurabile.

Infine, dalla disuguaglianza di Hölder classica, e dalla definizione della norma in $L_{\mathcal{X}}^p$, segue la disuguaglianza

$$\|v\|_{L_{\mathcal{X}}^1} = \int_{\Omega} \|v(\omega)\| \, d\mathbf{P}_{\omega} \leq \int_{\Omega} |\psi(\omega)| \|u(\omega)\| \, d\mathbf{P}_{\omega} \leq \|\psi\|_{L_{\mathbb{C}}^q} \|u\|_{L_{\mathcal{X}}^p}$$

che conclude la dimostrazione. \square

Teorema 3.4 *Gli spazi di Banach $L_{\mathcal{X}}^p$ e $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$ sono isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'applicazione $\mathcal{U} : L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X} \rightarrow L_{\mathcal{X}}^p$ definita nel modo naturale

$$\mathcal{U}\left(\sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k\right)(\omega) := \sum_{k=0}^n \psi_k(\omega) x_k, \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega \quad (3.2.3)$$

La \mathcal{U} è chiaramente lineare e si verifica con facilità che è ben definita, nel senso che non dipende dal rappresentante della classe di equivalenza di $\sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k$. Dimostriamo che \mathcal{U} è un'immersione isometrica di $L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X}$ in $L_{\mathcal{X}}^p$, che si può estendere in modo unico ad un isomorfismo tra $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$ e $L_{\mathcal{X}}^p$. Per chiarezza dividiamo la dimostrazione in quattro passi.

PASSO 1 Dimostriamo che \mathcal{U} è iniettiva. Se $\sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k \neq 0 \otimes 0$, allora possiamo supporre che le funzioni ψ_k e i vettori x_k siano linearmente indipendenti nei rispettivi spazi ([54], lemma 1.1, pag. 20). In particolare $\psi_0 \neq 0$ in $L_{\mathbb{C}}^p$, per cui esiste

$\psi_0^* \in L_{\mathbb{C}}^q$, con $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ($q = +\infty$, se $p = 1$), tale che $\int_{\Omega} \psi_0^*(\omega) \psi_0(\omega) d\mathbf{P}_{\omega} \neq 0$. Allora si ha

$$\int_{\Omega} \psi_0^*(\omega) \left(\sum_{k=0}^n \psi_k(\omega) x_k \right) d\mathbf{P}_{\omega} = \sum_{k=0}^n x_k \int_{\Omega} \psi_0^*(\omega) \psi_k(\omega) d\mathbf{P}_{\omega} \neq 0,$$

perché l'espressione a destra del segno di uguaglianza è una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli dei vettori linearmente indipendenti x_k . Per il lemma 3.3 si ha quindi $\sum_{k=0}^n \psi_k(\omega) x_k \neq 0$ q. c. $\omega \in \Omega$, il che prova l'iniettività di \mathcal{U} .

PASSO 2 Consideriamo ora un *elemento semplice* di $L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X}$ (o di $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$), ovvero (la classe di equivalenza di) un'espressione del tipo $\sum_{k=0}^n \chi_{E_k} \otimes x_k$, dove $\chi_{E_k} \in L_{\mathbb{C}}^p$ è la funzione indicatrice dell'insieme misurabile $E_k \in \mathfrak{F}$. Si dimostra facilmente che nella classe di equivalenza di $\sum_{k=0}^n \chi_{E_k} \otimes x_k$ c'è sempre un'espressione del tipo $\sum_{k=0}^{n'} \chi_{E'_k} \otimes x'_k$, dove gli insiemi $E'_k \in \mathfrak{F}$ sono due a due disgiunti. Possiamo sempre supporre, quindi, di lavorare con elementi semplici in cui gli insiemi E_k sono disgiunti. Si ha allora

$$\begin{aligned} \left(\left\| \mathcal{U} \left(\sum_{k=0}^n \chi_{E_k} \otimes x_k \right) \right\|_p \right)^p &= \int_{\Omega} \left\| \sum_{k=0}^n \chi_{E_k}(\omega) x_k \right\|^p d\mathbf{P}_{\omega} \\ &= \sum_{k=0}^n \int_{E_k} \|x_k\|^p d\mathbf{P}_{\omega} = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(E_k) \|x_k\|^p = \sum_{k=0}^n \|\chi_{E_k}\|^p \|x_k\|^p, \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza segue dal fatto che

$$\left\| \sum_{k=0}^n \chi_{E_k}(\omega) x_k \right\|^p = \sum_{k=0}^n \chi_{E_k}(\omega) \|x_k\|^p,$$

in quanto gli E_k sono due a due disgiunti.

Il primo termine della precedente catena di uguaglianze non dipende dall'espressione equivalente per $\sum_{k=0}^n \chi_{E_k} \otimes x_k$. Pertanto, prendendo l'estremo inferiore su tutte le espressioni equivalenti, e ricordando la definizione (3.2.2), si ottiene

$$\left\| \mathcal{U} \left(\sum_{k=0}^n \chi_{E_k} \otimes x_k \right) \right\| = \nu_p \left(\sum_{k=0}^n \chi_{E_k} \otimes x_k \right).$$

PASSO 3 Quello che si è provato al passo 2 è che \mathcal{U} è un'isometria tra gli elementi semplici di $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$ e le funzioni semplici di $L_{\mathcal{X}}^p$ (l'immagine di un elemento semplice tramite \mathcal{U} è chiaramente una funzione semplice di $L_{\mathcal{X}}^p$). Poiché \mathcal{X} è separabile, sappiamo dal teorema 2.51 che le funzioni semplici costituiscono un sottospazio denso di $L_{\mathcal{X}}^p$. Ora dimostriamo che gli elementi semplici sono un sottospazio denso di $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$. Fissiamo $\sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k \in L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$ e $\epsilon > 0$. Per $k = 0, 1, \dots, n$, esiste σ_k funzione semplice di $L_{\mathbb{C}}^p$ tale che $n^{1/p} \|\psi_k - \sigma_k\| \leq \epsilon$. Allora

$$\nu_p \left(\sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k - \sum_{k=0}^n \sigma_k \otimes x_k \right)^p = \nu_p \left(\sum_{k=0}^n (\psi_k - \sigma_k) \otimes x_k \right)^p$$

$$\leq \sum_{k=0}^n \|\psi_k - \sigma_k\|^p \|x_k\|^p \leq \sum_{k=0}^n \frac{\epsilon^p}{n} = \epsilon^p.$$

Poiché $\sum_{k=0}^n \sigma_k \otimes x_k$ è un elemento semplice, abbiamo allora dimostrato che gli elementi semplici sono densi in $L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X}$. Per il corollario 2.62 gli elementi semplici sono quindi densi in $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$.

PASSO 4 Si è visto perciò che \mathcal{U} è un'isomorfismo isometrico tra un sottospazio denso di $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$ e un sottospazio denso di $L_{\mathcal{X}}^p$. Possiamo allora applicare il teorema 2.61 per concludere che esiste un'unica estensione lineare isometrica di \mathcal{U} (che, con abuso di notazione, continueremo ad indicare con \mathcal{U})

$$\mathcal{U} : L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X} \rightarrow L_{\mathcal{X}}^p \quad (3.2.4)$$

che ci dà l'isomorfismo cercato. \square

D'ora in avanti faremo un'identificazione sistematica di $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$ con $L_{\mathcal{X}}^p$ tramite l'isomorfismo \mathcal{U} , che non verrà esplicitamente indicato ma resterà sottointeso. Ad esempio, se $u \in L_{\mathcal{X}}^p$ e $u' \in L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$, scriveremo $u = u'$ se $u = \mathcal{U}(u')$, oppure identificheremo $L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X}$ con il sottospazio $\mathcal{U}(L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X})$ di $L_{\mathcal{X}}^p$. Se poi L è un operatore lineare in $L_{\mathcal{X}}^p$ e L' è un operatore lineare in $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$, scriveremo $L = L'$ sottointendendo che

$$\mathcal{D}(L') = \mathcal{U}^{-1}(\mathcal{D}(L)), \quad L'u = (\mathcal{U}^{-1} \circ L \circ \mathcal{U})u. \quad (3.2.5)$$

Anche la norma ν_p sarà d'ora in avanti indicata con lo stesso simbolo $\|\cdot\|_p$ usato per la norma di $L_{\mathcal{X}}^p$ (o semplicemente $\|\cdot\|$ se non c'è possibilità di equivoco).

Il seguente teorema ci fornisce un'utile (e fondamentale in seguito) caratterizzazione degli elementi di $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$ (e quindi di $L_{\mathcal{X}}^p$) come serie di elementi del tipo $\psi \otimes x$.

Teorema 3.5 *Per ogni $u \in L_{\mathcal{X}}^p$, esistono una successione $\{\psi_n\}$ in $L_{\mathbb{C}}^p$ e una successione $\{x_n\}$ in \mathcal{X} tali che*

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes x_k \quad (3.2.6)$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché $L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X}$ è denso in $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$, possiamo considerare una successione $\{u_n\}$ in $L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X}$ tale che $\|u - u_n\|_p \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Sia $\sum_{k=0}^{i_0} \psi_k \otimes x_k$ una rappresentazione di u_0 e, per $n = 1, 2, \dots$, poniamo $v_n = u_n - u_{n-1}$. Per la definizione eq. (3.2.2) (ricordando che ora indichiamo ν_p con $\|\cdot\|_p$) esiste una rappresentazione $\sum_{k=i_{n-1}+1}^{i_n} \psi_k \otimes x_k$ di v_n tale che

$$\left(\sum_{k=i_{n-1}+1}^{i_n} \|\psi_k\|^p \|x_k\|^p \right)^{1/p} \leq \|v_n\| + \frac{1}{n} \quad (3.2.7)$$

Per ogni $N \in \mathbb{N}_0$ sia n_N l'unico naturale tale che $i_{n_N-1} + 1 \leq N \leq i_{n_N}$. Si ha che

$$\begin{aligned} \left\| u_{n_N} - \sum_{k=0}^N \psi_k \otimes x_k \right\|_p &= \left\| \sum_{k=N+1}^{i_{n_N}} \psi_k \otimes x_k \right\|_p \leq \left(\sum_{k=N+1}^{i_{n_N}} \|\psi_k\| \|x_k\| \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=i_{n_N-1}+1}^{i_{n_N}} \|\psi_k\| \|x_k\| \right)^{1/p} \leq \|v_{n_N}\|_p + \frac{1}{n_N} \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \left\| u - \sum_{k=0}^N \psi_k \otimes x_k \right\|_p &\leq \|u - u_{n_N}\|_p + \left\| u_{n_N} - \sum_{k=0}^N \psi_k \otimes x_k \right\|_p \\ &\leq \|u - u_{n_N}\|_p + \|v_{n_N}\|_p + \frac{1}{n_N}. \end{aligned}$$

Poiché n_N è una funzione strettamente crescente di N , dalle disuguaglianze appena scritte segue che $\|u - \sum_{k=0}^N \psi_k \otimes x_k\| \rightarrow 0$ per $N \rightarrow \infty$, il che prova la tesi. \square

Come corollario della dimostrazione appena vista, si ha il seguente risultato.

Corollario 3.6 *Per ogni $u \in L_{\mathcal{X}}^p$, esistono una successione $\{E_n\}$ di insiemi appartenenti a \mathfrak{F} e una successione $\{x_n\}$ in \mathcal{X} tali che*

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{E_k} \otimes x_k \quad (3.2.8)$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo osservato nella dimostrazione del teorema 3.4 che gli elementi semplici sono densi in $L_{\mathcal{C}}^p \otimes \mathcal{X}$. Pertanto possiamo supporre che la successione $\{u_n\}$, utilizzata nella dimostrazione del teorema 3.5, sia costituita da elementi semplici. Anche gli elementi $v_n = u_n - u_{n-1}$ sono elementi semplici, ed esiste una rappresentazione di v_n che è un elemento semplice e che soddisfa l'eq. (3.2.7). Infatti se $v_n = \sum_{k=0}^n \chi_{F_k} \otimes y_k$, passando eventualmente ad un rappresentante $\sum_{k=i_{n-1}+1}^{i_n} \chi_{E_k} \otimes x_k$ in cui gli insiemi E_k sono disgiunti, si ha, come già osservato nella dimostrazione del teorema 3.4,

$$\|v_n\|_p = \left(\sum_{k=i_{n-1}+1}^{i_n} \|\chi_{E_k}\|^p \|x_k\|^p \right)^{1/p},$$

per cui vale l'eq. (3.2.7). Pertanto si ha $u = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{E_k} \otimes x_k$ (osserviamo che gli insiemi E_k , per $k \in \mathbb{N}_0$, non sono necessariamente tutti disgiunti). \square

Concludiamo la sezione osservando che, in termini di prodotto tensoriale, il sottospazio degli elementi deterministici è l'insieme

$$1 \otimes \mathcal{X} := \{1 \otimes x \mid x \in \mathcal{X}\}, \quad (3.2.9)$$

chiaramente isomorfo a \mathcal{X} .

3.3 Operatori deterministici in $L^p_{\mathcal{X}}$

Abbiamo visto nella sezione 3.1 che ogni vettore $x \in \mathcal{X} := L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$ può essere riguardato come elemento deterministico $L^p_{\mathcal{X}}$, ovvero come variabile aleatoria \widehat{x} che assume quasi certamente il valore x . Vedremo adesso come anche ogni operatore lineare in \mathcal{X} può essere interpretato come *operatore deterministico* in $L^p_{\mathcal{X}}$. La definizione più naturale è la seguente.

Definizione 3.7 *Sia L un operatore lineare in \mathcal{X} . Definiamo l'operatore lineare \widehat{L} in $L^p_{\mathcal{X}}$ nel seguente modo:*

$$(\widehat{L}u)(\omega) := Lu(\omega), \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega \quad (3.3.1)$$

$$\mathcal{D}(\widehat{L}) := \left\{ u \in L^p_{\mathcal{X}} \mid u(\omega) \in \mathcal{D}(L) \text{ q. c. } \omega \in \Omega \text{ e } \widehat{L}u \in L^p_{\mathcal{X}} \right\}. \quad (3.3.2)$$

Gli operatori deterministici saranno, quindi, operatori lineari in $L^p_{\mathcal{X}}$ la cui azione non dipende dal valore del parametro aleatorio ω . Vedremo nel corso di questa sezione e della successiva che \widehat{L} conserva molte delle proprietà del corrispondente L . Il risultato finale sarà che, se L genera una dinamica fortemente continua su \mathcal{X} , allora \widehat{L} genera una corrispondente dinamica fortemente continua *deterministica* su $L^p_{\mathcal{X}}$.

Cominciamo l'indagine sugli operatori deterministici con un risultato sulla chiusura dell'operatore \widehat{L} .

Lemma 3.8 *\widehat{L} è chiuso in $L^p_{\mathcal{X}}$ se e solo se L è chiuso in \mathcal{X} .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che L sia chiuso. Utilizzando la caratterizzazione degli operatori chiusi (teorema 2.14), dobbiamo dimostrare che, se $\{u_n\}$ è una successione contenuta in $\mathcal{D}(\widehat{L})$, convergente a $u \in L^p_{\mathcal{X}}$ e tale che $\widehat{L}u_n$ converge a $w \in L^p_{\mathcal{X}}$, allora $u \in \mathcal{D}(\widehat{L})$ e $w = \widehat{L}u$. Dal teorema 2.59, parte (c), sappiamo che, passando eventualmente ad un'opportuna sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$, si ha una convergenza puntuale quasi certa delle suddette successioni ai rispettivi limiti. Dalla definizione di \widehat{L} otteniamo quindi

$$u_{n_k}(\omega) \rightarrow u(\omega), \quad Lu_{n_k}(\omega) \rightarrow w(\omega), \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega.$$

Consideriamo ora gli insiemi

$$\mathcal{J}_1 := \{\omega \in \Omega \mid u_{n_k}(\omega) \in \mathcal{D}(L) \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}_0\},$$

$$\mathcal{J}_2 := \{\omega \in \Omega \mid u_{n_k}(\omega) \text{ converge a } u(\omega)\}$$

$$\mathcal{J}_3 := \{\omega \in \Omega \mid Lu_{n_k}(\omega) \text{ converge a } w(\omega)\}$$

Poiché L è chiuso, sempre dal teorema di caratterizzazione degli operatori chiusi segue che l'insieme $\{\omega \in \Omega \mid u(\omega) \in \mathcal{D}(L)\}$ contiene l'insieme $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2 \cap \mathcal{J}_3$. Inoltre si ha che

$$\mathcal{J}_1 = \bigcap_{k=0}^{\infty} \{\omega \in \Omega \mid u_{n_k}(\omega) \in \mathcal{D}(L)\}.$$

Dunque, $\{\omega \in \Omega \mid u(\omega) \in \mathcal{D}(L)\}$ contiene l'intersezione di un'infinità numerabile di eventi di probabilità 1. Per il lemma 2.50 e la proprietà (2.5.3) si ha quindi $\mathbf{P}[u(\omega) \in \mathcal{D}(L)] = 1$. Ma allora $u \in \mathcal{D}(\widehat{L})$ e $\widehat{L}u = w$, per le definizioni (3.3.1) e (3.3.2), e quindi \widehat{L} è chiuso.

Viceversa, supponiamo che \widehat{L} sia chiuso. Consideriamo una successione $\{x_n\}$ contenuta in $\mathcal{D}(L)$, tale che $x_n \rightarrow x \in \mathcal{X}$ e $Lx_n \rightarrow y \in \mathcal{X}$. Passando ai corrispondenti elementi deterministici in $L_{\mathcal{X}}^p$, si ha che $\widehat{x}_n \in \mathcal{D}(\widehat{L})$ per ogni n e che, essendo l'immersione di \mathcal{X} come sottospazio degli elementi deterministici un'isometria, $\widehat{x}_n \rightarrow \widehat{x}$ e $\widehat{L}\widehat{x}_n \rightarrow \widehat{y}$, per $n \rightarrow \infty$. Siccome \widehat{L} è chiuso, si ha allora che $\widehat{x} \in \mathcal{D}(\widehat{L})$ e $\widehat{L}\widehat{x} = \widehat{y}$. Dunque $x \in \mathcal{D}(L)$ e $Lx = y$, il che prova che L è chiuso. \square

Abbiamo scelto di costruire gli operatori deterministici a partire dagli operatori lineari in \mathcal{X} , secondo la definizione 3.7, che riteniamo la più "naturale". Tuttavia, la caratterizzazione di $L_{\mathcal{X}}^p$ come prodotto tensoriale di $L_{\mathbb{C}}^p$ con \mathcal{X} e, in particolare, il teorema 3.5 ci suggeriscono un'altra possibile costruzione, che esponiamo qui di seguito. Vedremo poi che, sotto opportune condizioni su L , le due costruzioni sono equivalenti.

Consideriamo innanzitutto la seguente definizione, ricordando ancora una volta che ogni oggetto definito su $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$ è identificato con il corrispondente oggetto su $L_{\mathcal{X}}^p$ tramite l'isomorfismo \mathcal{U} .

Definizione 3.9 *Dato L , operatore lineare in \mathcal{X} , definiamo il sottospazio di $L_{\mathcal{X}}^p$:*

$$L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{D}(L) := \left\{ \sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k \mid \psi_k \in L_{\mathbb{C}}^p, x_k \in \mathcal{D}(L) \text{ per } k = 0, 1, \dots, n \right\}. \quad (3.3.3)$$

Definiamo inoltre l'operatore $I \odot L$ in $L_{\mathcal{X}}^p$:

$$\mathcal{D}(I \odot L) := L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{D}(L) \quad (3.3.4)$$

$$(I \odot L) \sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k := \sum_{k=0}^n \psi_k \otimes Lx_k, \quad (3.3.5)$$

Precisiamo il senso della definizione 3.9. La classe di equivalenza $u \in L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X}$ appartiene a $L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{D}(L)$ se e solo se in essa c'è un rappresentante $\sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k$ con la proprietà che tutti gli x_k stanno in $\mathcal{D}(L)$. A partire da tale rappresentante formiamo l'espressione $\sum_{k=0}^n \psi_k \otimes Lx_k$, la cui classe di equivalenza sarà, per definizione, $(I \odot L)u$. A questo modo abbiamo dato una definizione consistente.

Osserviamo che

$$L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{D}(\widehat{L}), \quad I \odot L = \widehat{L}|_{L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{D}(L)} \quad (3.3.6)$$

ovvero $I \odot L \subset \widehat{L}$, secondo la notazione introdotta nella sezione 2.2.

Il teorema 3.5 ci suggerisce un'estensione naturale di $I \odot L$, sostituendo le serie alle somme finite. Tuttavia, si deve fare attenzione al fatto che se L non è *chiudibile* la definizione potrebbe risultare ambigua. Vale però il seguente

Lemma 3.10 *Se L è chiudibile, allora $I \odot L$ è chiudibile.*

DIMOSTRAZIONE. Con tecniche del tutto analoghe a quelle utilizzate nella dimostrazione del lemma 3.8, si dimostra che \widehat{L} è chiudibile se e solo se L lo è. Come si può facilmente verificare, se L_1 e L_2 sono due operatori lineari tali che $L_1 \subset L_2$, allora la chiudibilità di L_2 implica la chiudibilità di L_1 . Pertanto, se L è chiudibile, dall'eq. (3.3.6) segue che $I \odot L$ è chiudibile. \square

Definizione 3.11 *Dato L , operatore lineare in \mathcal{X} chiudibile, poniamo*

$$I \otimes L := \overline{I \odot L} \quad (3.3.7)$$

Osservazione 3.12 *Se L è chiuso, allora $I \otimes L \subset \widehat{L}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che se L è chiuso allora \widehat{L} è chiuso e che \widehat{L} coincide con $I \odot L$ su $L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{D}(L)$. Perciò \widehat{L} contiene la chiusura di $I \odot L$, ovvero $I \otimes L$. \square

Definiamo ora il sottospazio $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{D}(L)$ di $L_{\mathcal{X}}^p$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{D}(L) &:= \left\{ u \in L_{\mathcal{X}}^p \mid u = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes x_k, \right. \\ &\left. \text{con } \psi_k \in L_{\mathbb{C}}^p \text{ e } x_k \in \mathcal{D}(L) \text{ per ogni } k \text{ e } \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes Lx_k \in L_{\mathcal{X}}^p \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Teorema 3.13 *Se L è chiudibile allora*

$$\mathcal{D}(I \otimes L) = L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{D}(L) \quad (3.3.9)$$

e, se $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes x_k \in L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{D}(L)$, si ha

$$(I \otimes L) \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes Lx_k \quad (3.3.10)$$

DIMOSTRAZIONE. Se $u \in \mathcal{D}(I \otimes L)$ allora esistono una successione $\{u_n\}$ contenuta in $L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{D}(L)$ ed un elemento $w \in L_{\mathcal{X}}^p$ tali che $u_n \rightarrow u$ e $(I \odot L) u_n \rightarrow w = (I \otimes L) u$ per $n \rightarrow \infty$. Ripercorrendo le dimostrazioni del teorema 3.5 e del corollario 3.6, ci accorgiamo che a partire da $\{u_n\}$ è possibile costruire una successione $\{\psi_n\}$ contenuta in $L_{\mathbb{C}}^p$ e una successione $\{x_n\}$ contenuta in $\mathcal{D}(L)$ tali che $u = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes x_k$. Inoltre si ha che $w = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes Lx_k$. Allora $u \in L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{D}(L)$. Si ha così la prima inclusione $\mathcal{D}(I \otimes L) \subset L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{D}(L)$.

Viceversa, se $u \in L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{D}(L)$, allora $u = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, con $s_n = \sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k \in L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{D}(L)$. Inoltre, posto $w = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes Lx_k$ (che appartiene a $L_{\mathcal{X}}^p$ per ipotesi), si ha $w = \lim_n (I \odot L) s_n$. Dunque, per definizione, $u \in \mathcal{D}(I \otimes L)$ e $w = (I \otimes L) u$. Questo conclude la dimostrazione che $\mathcal{D}(I \otimes L) = L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{D}(L)$, provando la seconda inclusione $L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{D}(I \otimes L)$, e dimostra anche l'eq. (3.3.10). \square

Nella sezione seguente dimosteremo, fra l'altro, che se L è generatore di un semigruppoo continuo in senso forte su \mathcal{X} , allora $\widehat{L} = I \otimes L$. Dimostriamo adesso un lemma che ci servirà per applicare il teorema di Hille-Yosida agli operatori deterministici.

Lemma 3.14 *Se L è un operatore densamente definito in \mathcal{X} allora \widehat{L} è densamente definito in $L_{\mathcal{X}}^p$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $\sum_{k=0}^n \psi_k \otimes z_k \in L_{\mathcal{C}}^p \odot \mathcal{X}$ e $\epsilon > 0$. Poiché per ipotesi $\mathcal{D}(L)$ è denso in \mathcal{X} , per $k = 0, 1, \dots, n$ esiste $x_k \in \mathcal{D}(L)$ tale che $n^{1/p} \|\psi_k\| \|x_k - z_k\| \leq \epsilon$. Pertanto

$$\left\| \sum_{k=0}^n \psi_k \otimes z_k - \sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k \right\|_p^p \leq \sum_{k=0}^n \|\psi_k\|^p \|x_k - z_k\|^p \leq \epsilon^p.$$

Si è così dimostrato che $L_{\mathcal{C}}^p \odot \mathcal{D}(L)$ è denso in $L_{\mathcal{C}}^p \odot \mathcal{X}$ e il corollario 2.62 ci dice allora che $L_{\mathcal{C}}^p \odot \mathcal{D}(L)$ è denso in $L_{\mathcal{X}}^p$. Poiché $L_{\mathcal{C}}^p \odot \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{D}(\widehat{L})$ la tesi è dimostrata. \square

3.4 Semigruppoo deterministici

Il teorema seguente ci dice che gli operatori limitati su \mathcal{X} possono essere riguardati come operatori deterministici *limitati* su $L_{\mathcal{X}}^p$, che tale corrispondenza è isometrica e che è compatibile con l'operazione di composizione.

Teorema 3.15 *Se $B \in [\mathcal{X}]$ allora $\widehat{B} \in [L_{\mathcal{X}}^p]$. Inoltre, l'applicazione*

$$\mathcal{J} : [\mathcal{X}] \hookrightarrow [L_{\mathcal{X}}^p], \quad \mathcal{J}(B) := \widehat{B} \tag{3.4.1}$$

è un'immersione di algebre di Banach.

DIMOSTRAZIONE. Per provare che $\mathcal{J}(B)$ è un elemento di $[L_{\mathcal{X}}^p]$ dobbiamo dimostrare che $\mathcal{D}(\widehat{B}) = L_{\mathcal{X}}^p$. A questo scopo occorre intanto verificare che la funzione $\widehat{B}u : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ è misurabile per ogni $u \in L_{\mathcal{X}}^p$. Se D è un boreliano di \mathcal{X} si ha $(\widehat{B}u)^{-1}(D) = \{\omega \in \Omega \mid (\widehat{B}u)(\omega) \in D\} = \{\omega \in \Omega \mid (\widehat{B}u)(\omega) \in D \text{ e } (\widehat{B}u)(\omega) \neq Bu(\omega)\} \cup \{\omega \in \Omega \mid Bu(\omega) \in D\}$. Il secondo dei due insiemi dell'unione è misurabile perché $\omega \mapsto u(\omega)$ è misurabile e $u \mapsto Bu$ è continua. Il primo è misurabile perché, per la definizione di \widehat{B} , differisce dal secondo, che è misurabile, per un insieme di misura nulla e noi supponiamo sempre di lavorare con σ -algebre complete (teorema 2.46).

Si ha inoltre

$$\begin{aligned} (\|\widehat{B}u\|_p)^p &= \int_{\Omega} \|(\widehat{B}u)(\omega)\|^p d\mathbf{P}_{\omega} = \int_{\Omega} \|Bu(\omega)\|^p d\mathbf{P}_{\omega} \\ &\leq \|B\|^p \int_{\Omega} \|u(\omega)\|^p d\mathbf{P}_{\omega} = \|B\|^p (\|u\|_p)^p, \end{aligned}$$

per cui $\mathcal{J}(B) \in [L_{\mathcal{X}}^p]$. Sia $\{x_n\}$ una successione in \mathcal{X} tale che $\|x_n\| = 1$ per ogni n e $\|Bx_n\| \rightarrow \|B\|$ per $n \rightarrow \infty$. Passando ai corrispondenti elementi deterministici di $L_{\mathcal{X}}^p$ si ha $\|\widehat{x}_n\|_p = 1$ per ogni n (in quanto $x \mapsto \widehat{x}$ è un'isometria, come già osservato) e anche

$$\begin{aligned} (\|\widehat{B}\widehat{x}_n\|_p)^p &= \int_{\Omega} \|(\widehat{B}\widehat{x}_n)(\omega)\|^p d\mathbf{P}_{\omega} = \int_{\Omega} \|B\widehat{x}_n(\omega)\|^p d\mathbf{P}_{\omega} \\ &= \int_{\Omega} \|Bx_n(\omega)\|^p d\mathbf{P}_{\omega} = \|Bx_n\|^p \rightarrow \|B\|^p, \end{aligned}$$

per $n \rightarrow \infty$. Perciò $\|\widehat{B}\| = \|B\|$ e quindi \mathcal{J} è un'isometria (da cui anche l'iniettività). Infine $(\widehat{B}_1\widehat{B}_2u)(\omega) = B_1(\widehat{B}_2u)(\omega) = B_1B_2u(\omega) = (\widehat{B}_1\widehat{B}_2u)(\omega)$, per ogni $u \in L_{\mathcal{X}}^p$, ovvero $\mathcal{J}(B_1B_2) = \mathcal{J}(B_1)\mathcal{J}(B_2)$, per cui \mathcal{J} è un'immersione di algebre. \square

Osservazione 3.16 Se $B \in [\mathcal{X}]$, allora $\widehat{B} = I \otimes B$. In particolare, se $u = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes x_k \in L_{\mathcal{X}}^p$, si ha $\widehat{B}u = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes Bx_k$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché un operatore limitato è certamente chiuso, per l'osservazione 3.12 sarà sufficiente dimostrare che $\mathcal{D}(I \otimes B) = L_{\mathcal{X}}^p$. Ma questo è immediato, in quanto $\mathcal{D}(I \odot B) = L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X}$ e quindi, per ogni $u \in L_{\mathcal{X}}^p$, esiste una successione $\{u_n\}$ contenuta in $\mathcal{D}(I \odot B)$ tale che $u_n \rightarrow u$. Inoltre, $\|(I \odot B)u_n - (I \odot B)u_m\|_p \leq \|B\| \|u_n - u_m\|_p$ per cui $\{(I \odot B)u_n\}$ è una successione di Cauchy in $L_{\mathcal{X}}^p$ e dunque tende ad un elemento $w = (I \otimes B)u$ di $L_{\mathcal{X}}^p$. Pertanto $u \in \mathcal{D}(I \otimes B)$ e quindi $\mathcal{D}(I \otimes B) = L_{\mathcal{X}}^p$.

La seconda affermazione segue direttamente dal teorema 3.13. \square

La dimostrazione del teorema 3.15 si adatta facilmente al caso in cui $B \in [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$, dove \mathcal{Y} è un secondo spazio di Banach. Posto $L_{\mathcal{Y}}^p := L^p(\mathcal{M}; \mathcal{Y})$, si ha il seguente risultato che ci sarà utile nella sezione 5.4.

Osservazione 3.17 Siano \mathcal{X} e \mathcal{Y} due spazi di Banach separabili e B un operatore appartenente a $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$. Se per ogni $u \in L_{\mathcal{X}}^p$ definiamo $(\widehat{B}u)(\omega) := Bu(\omega)$, $\omega \in \Omega$, allora l'applicazione

$$\mathcal{J} : [\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \hookrightarrow [L_{\mathcal{X}}^p, L_{\mathcal{Y}}^p], \quad \mathcal{J}(B) := \widehat{B} \quad (3.4.2)$$

è un'immersione di spazi di Banach.

Teorema 3.18 Se L è un operatore lineare in \mathcal{X} di classe $\mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$, allora \widehat{L} è un operatore lineare in $L_{\mathcal{X}}^p$ di classe $\mathcal{G}(M, \beta, L_{\mathcal{X}}^p)$ e si ha

$$\mathcal{S}_{\widehat{L}}(t) = \widehat{\mathcal{S}_L(t)}, \quad t \geq 0. \quad (3.4.3)$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che $\widehat{L} \in \mathcal{G}(M, \beta, L_{\mathcal{X}}^p)$ applicando il teorema di Hille-Yosida.

Poiché L è, per ipotesi, di classe $\mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$, sappiamo dal teorema di Hille-Yosida che L è chiuso, densamente definito e, per $\lambda > \beta$ si ha $R(\lambda, L) \in [\mathcal{X}]$, con

$$\|R(\lambda, L)^n\| \leq M(\lambda - \beta)^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.4.4)$$

dove $R(\lambda, L)$ indica l'operatore risolvente $(\lambda - L)^{-1}$. I lemmi 3.8 e 3.14 ci dicono intanto che \widehat{L} è chiuso e densamente definito.

Se poi $\lambda > \beta$ e $u \in \mathcal{D}(\widehat{L})$ le uguaglianze $(\widehat{R(\lambda, L)})(\lambda - \widehat{L})u(\omega) = R(\lambda, L)[(\lambda - \widehat{L})u](\omega) = R(\lambda, L)(\lambda - L)u(\omega) = u(\omega)$ valgono quasi certamente. Con passaggi analoghi, per ogni $u \in L_{\mathcal{X}}^p$, si vede che l'uguaglianza $[(\lambda - \widehat{L})\widehat{R(\lambda, L)}]u(\omega) = u(\omega)$ vale q. c.. Perciò $\rho(\widehat{L})$ contiene la semiretta reale $(\beta, +\infty)$ e $R(\lambda, \widehat{L}) = \mathcal{J}(R(\lambda, L)) \in [L_{\mathcal{X}}^p]$ per ogni $\lambda > \beta$.

Inoltre, la disuguaglianza (3.4.4) vale anche per $R(\lambda, \widehat{L})$, come segue direttamente dal fatto che \mathcal{J} è un'isometria.

Si è così provato che \widehat{L} soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Hille-Yosida, con le stesse costanti M e β di L . Dunque $\widehat{L} \in \mathcal{G}(M, \beta, L_{\mathcal{X}}^p)$. Dobbiamo ora dimostrare l'eq. (3.4.3).

Fissiamo $t \geq 0$ e un elemento u di $L_{\mathcal{X}}^p$. Posto $V_n(t, L) := \left[\frac{n}{t}R(\frac{n}{t}, L)\right]^n$, sappiamo che $V_n(t, L) \in [\mathcal{X}]$ (per n sufficientemente grande) e inoltre (per quasi ogni $\omega \in \Omega$) valgono le uguaglianze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathcal{J}(V_n(t, L))](\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(t, L)u(\omega) = \mathcal{S}_L(t)u(\omega) = [\mathcal{J}(\mathcal{S}_L(t))](\omega),$$

(teorema 2.27). Fissato $\epsilon > 0$ poi, dall'eq. (3.4.4) si ha

$$\|\mathcal{J}(V_n(t, L))u\| \leq \|V_n(t, L)\| \|u\| \leq M \left(1 - \frac{\beta t}{n}\right)^{-n} \|u\| \leq (Me^{\beta t} + \epsilon) \|u\|$$

per n sufficientemente grande. Dal teorema della convergenza dominata per l'integrale di Bochner si ha quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(V_n(t, L))u = \mathcal{J}(\mathcal{S}_L(t))u.$$

D'altra parte, dalle proprietà di \mathcal{J} , e dall'uguaglianza già dimostrata $\mathcal{J}(R(\lambda, L)) = R(\lambda, \widehat{L})$ per ogni $\lambda > \beta$, segue subito (con notazione ovvia)

$$\mathcal{J}(V_n(t, L)) = V_n(t, \widehat{L}).$$

Poiché, infine, sempre dal teorema 2.27 si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(t, \widehat{L})u = \mathcal{S}_{\widehat{L}}(t)u,$$

grazie all'unicità del limite abbiamo l'eq. (3.4.3). □

Osserviamo che il contenuto del teorema 3.18 si può riassumere dicendo che il seguente diagramma è commutativo per ogni $t \geq 0$:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}(M, \beta, \mathcal{X}) & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{G}(M, \beta, \mathbb{L}_{\mathcal{X}}^p) \\ \downarrow \text{exp}_t & & \downarrow \text{exp}_t \\ [\mathcal{X}] & \xrightarrow{\quad \mathfrak{J} \quad} & [\mathbb{L}_{\mathcal{X}}^p] \end{array} \quad (3.4.5)$$

(dove con exp_t abbiamo indicato l'applicazione che a un generatore di semigruppero L associa l'operatore limitato $\mathfrak{S}_L(t)$).

Corollario 3.19 *Nelle ipotesi del teorema 3.18, l'azione del semigruppero generato da \widehat{L} è espressa dalla formula*

$$\mathfrak{S}_{\widehat{L}}(t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes x_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes \mathfrak{S}_L(t)x_k, \quad t \geq 0. \quad (3.4.6)$$

DIMOSTRAZIONE. L'eq. (3.4.6) è un'immediata conseguenza del teorema 3.18 e dell'osservazione 3.16. \square

Un'altra conseguenza del teorema 3.18 è la seguente.

Corollario 3.20 *Nelle ipotesi del teorema 3.18 si ha che $\widehat{L} = I \otimes L$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $\lambda > \beta$ e poniamo per comodità di notazione $R := R(\lambda, L)$. Abbiamo visto nella dimostrazione del teorema 3.18 che $\widehat{R} = R(\lambda, \widehat{L})$ e che $\widehat{R} \in [\mathbb{L}_{\mathcal{X}}^p]$. Se $u \in \mathcal{D}(\widehat{L})$, esiste $w \in \mathbb{L}_{\mathcal{X}}^p$ tale che $u = \widehat{R}w$. Per il teorema 3.5 possiamo scrivere $w = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes y_k$ per opportuni ψ_k e y_k . Per l'osservazione 3.16 si ha allora

$$u = \widehat{R} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes y_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes Ry_k.$$

Posto $x_k := Ry_k$, si ha che $x_k \in \mathcal{D}(L)$ e che $y_k = (\lambda - L)x_k$, per ogni $k \in \mathbb{N}_0$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $\widehat{L}(\sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k) = \sum_{k=0}^n \psi_k \otimes Lx_k = \sum_{k=0}^n \psi_k \otimes (\lambda x_k - y_k)$ e dunque $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \otimes Lx_k = \lambda u - w \in \mathbb{L}_{\mathcal{X}}^p$, il che prova che $\widehat{L} \subset I \otimes L$. Essendo L chiuso, l'osservazione 3.12 ci assicura che vale l'inclusione opposta. Le due inclusioni provano la tesi. \square

Grazie al teorema 3.18 possiamo cominciare a precisare il senso della “immersione” del problema di evoluzione aleatorio (3.1.1) in uno spazio di variabili aleatorie (sez. 3.1), a partire dalla versione non perturbata. Consideriamo il problema di evoluzione aleatorio nel dato spazio di Banach \mathcal{X} :

$$\begin{cases} f_{\omega}'(t) = Lf_{\omega}(t) + q_{\omega}(t), & t \in \mathbb{T} \\ f_{\omega}(0) = \xi_{\omega}, \end{cases} \quad (3.4.7)$$

con $\omega \in \Omega$. Posto

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathcal{X}, \quad \xi(\omega) := \xi_{\omega}, \quad \omega \in \Omega \quad (3.4.8)$$

e, per ogni $t \in \mathbb{T}$,

$$\mathbf{q}(t) : \Omega \rightarrow \mathcal{X}, \quad \mathbf{q}(t)(\omega) := q_\omega(t), \quad \omega \in \Omega \quad (3.4.9)$$

supponiamo che $\boldsymbol{\xi} \in L_{\mathcal{X}}^p$ e $\mathbf{q}(t) \in L_{\mathcal{X}}^p$ per ogni $t \in \mathbb{T}$. All'eq. (3.4.7) associamo allora un problema di evoluzione nello spazio $L_{\mathcal{X}}^p$, dove L è sostituito da \widehat{L} e dove ξ_ω e $q_\omega(t)$ sono sostituiti da $\boldsymbol{\xi}$ e $\mathbf{q}(t)$:

$$\begin{cases} \mathbf{f}'(t) = \widehat{L}\mathbf{f}(t) + \mathbf{q}(t), \\ \mathbf{f}(0) = \boldsymbol{\xi}. \end{cases} \quad (3.4.10)$$

Come corollario dei teoremi 3.18 e 2.25 abbiamo che (3.4.10) ha soluzione se L genera semigruppato (su \mathcal{X}), $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{D}(\widehat{L})$ se il termine di sorgente

$$\mathbf{q} : \mathbb{T} \rightarrow L_{\mathcal{X}}^p, \quad \mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}(t) \quad (3.4.11)$$

è regolare. Possiamo dunque enunciare il seguente

Teorema 3.21 *Supponiamo che $L \in \mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$, per opportune costanti $\beta \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$, e che $\mathbf{q} : \mathbb{T} \rightarrow L_{\mathcal{X}}^p$ sia regolare, nel senso della definizione 2.24. Allora, se $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{D}(\widehat{L})$, l'equazione (3.4.10) ha un'unica soluzione $\mathbf{f} : \mathbb{T} \rightarrow L_{\mathcal{X}}^p$ e vale la seguente formula*

$$\mathbf{f}(t)(\omega) = \mathcal{S}_L(t)\xi_\omega + \int_0^t \mathcal{S}_L(t-s)q_\omega(s) ds, \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega, \quad (3.4.12)$$

per ogni $t \in \mathbb{T}$ (dove \mathcal{S}_L è il semigruppato su \mathcal{X} generato da L).

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 3.18 si ha che $\widehat{L} \in \mathcal{G}(M, \beta, L_{\mathcal{X}}^p)$ e quindi dal teorema 2.25 segue che 3.4.10 ha un'unica soluzione data, per ogni $t \in \mathbb{T}$, dalla formula

$$\mathbf{f}(t) := \mathcal{S}_{\widehat{L}}(t)\boldsymbol{\xi} + \int_0^t \mathcal{S}_{\widehat{L}}(t-s)\mathbf{q}(s) ds. \quad (3.4.13)$$

Ora fissiamo $t \in \mathbb{T}$. Dal teorema 3.18, dalla definizione (3.4.8) e dall'ipotesi $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{D}(\widehat{L})$ segue che

$$\mathcal{S}_{\widehat{L}}(t)\boldsymbol{\xi} = \mathcal{S}_L(t)\xi_\omega \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega. \quad (3.4.14)$$

Consideriamo poi la funzione $\mathbf{g} : \mathbb{T} \rightarrow L_{\mathcal{X}}^p$, $\mathbf{g}(s) := \mathcal{S}_{\widehat{L}}(t-s)\mathbf{q}(s)$. Osserviamo che si può applicare il teorema 2.60 con $\Sigma = [0, t]$, dove $(\Sigma, \mathfrak{E}, \eta)$ è la struttura standard di spazio di misura data dalla misura di Lebesgue su $[0, t]$, e con $\mathcal{M} = (\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Allora esiste una funzione $g(s, \omega)$, misurabile, Bochner-integrabile rispetto a s per quasi ogni $\omega \in \Omega$, e tale che

- a) $g(s, \omega) = \mathbf{g}(s)(\omega)$ per quasi ogni $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$,
- b) $\int_0^t g(s, \omega) ds = \left[\int_0^t \mathbf{g}(s) ds \right](\omega)$ per q. c. $\omega \in \Omega$.

Ma allora dal teorema 3.18, dall'eq. (3.4.14) e dalle definizioni (3.4.9) e (3.4.11) segue

$$\begin{aligned} \left[\int_0^t \mathcal{S}_{\widehat{L}}(t-s) \mathbf{q}(s) ds \right] (\omega) &= \int_0^t [\mathcal{S}_{\widehat{L}}(t-s) \mathbf{q}(s)] (\omega) ds \\ &= \int_0^t \mathcal{S}_L(t-s) \mathbf{q}(\omega) ds = \int_0^t \mathcal{S}_L(t-s) q_\omega(t) ds. \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega \end{aligned}$$

Tale uguaglianza, insieme all'(3.4.14), prova la (3.4.12). \square

La formula (3.4.12) ci dice che la soluzione \mathbf{f} di (3.4.10) ha la forma di una famiglia di soluzioni *mild* del problema (3.4.7) parametrizzate da ω .

Corollario 3.22 *Nelle ipotesi del teorema 3.21, e definita per ogni $\omega \in \Omega$ la funzione*

$$f_\omega : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}, \quad f_\omega(t) := \mathbf{f}(t)(\omega), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (3.4.15)$$

dove \mathbf{f} è la soluzione stretta di (3.4.10), f_ω è quasi certamente soluzione *mild* di (3.4.7).

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 2.60, q_ω è quasi certamente integrabile in $[0, t]$ per ogni $t \in \mathbb{T}$ in quanto \mathbf{q} lo è. Dunque f_ω , per definizione, è quasi certamente soluzione *mild* di (3.4.7) (si veda la sezione 2.3). \square

In generale, tuttavia, non è vero che per ogni (o quasi ogni) $\omega \in \Omega$ la f_ω sarà una soluzione stretta di (3.4.7). Per poter dire ciò sono necessarie ulteriori ipotesi di regolarità su \mathbf{q} che ci assicurino che q_ω soddisfi quasi certamente le condizioni del teorema 2.25 (non è detto infatti che, se \mathbf{q} è una sorgente regolare in $L^p_{\mathcal{X}}$, ogni q_ω sia una sorgente regolare in \mathcal{X}).

La stessa strategia deve ora essere applicata all'equazione completa (3.1.1). Allo stesso modo in cui all'operatore lineare L è stato associato in modo canonico un operatore \widehat{L} , si dovrà ora associare all'operatore aleatorio $J(\omega)$ un opportuno operatore su $L^p_{\mathcal{X}}$.

3.5 Perturbazioni aleatorie

Nelle sezioni 3.3 e 3.4 ci siamo occupati della parte deterministica dell'equazione (3.1.1), rappresentata dall'operatore L . Abbiamo visto che se L genera una dinamica fortemente continua in \mathcal{X} , il corrispondente \widehat{L} genera una dinamica deterministica fortemente continua in $L^p_{\mathcal{X}}$ che è associata ad un'evoluzione aleatoria regolare.

In questa sezione e nella successiva ci occupiamo della parte operatoriale aleatoria dell'equazione (3.1.1), rappresentata dall'operatore $J(\omega)$. Vogliamo dimostrare che, sotto opportune ipotesi, è possibile vedere J come operatore lineare limitato su $L^p_{\mathcal{X}}$ e applicare quindi la teoria delle perturbazioni limitate (si veda la sezione

2.3) per studiare la regolarità dell'eq. (3.1.1). È per questo motivo che chiameremo J una *perturbazione aleatoria*.

La perturbazione aleatoria può essere vista come variabile aleatoria a valori nello spazio $[\mathcal{X}]$ degli operatori lineari e limitati su \mathcal{X} . Sorge però un problema. Nella sezione 2.5 abbiamo definito, infatti, le variabili aleatorie a valori in uno spazio di Banach *separabile* come funzioni misurabili rispetto alla σ -algebra di Borel generata dalla norma di \mathcal{X} . Tuttavia, anche se \mathcal{X} è separabile, lo spazio $[\mathcal{X}]$, con la topologia indotta dalla propria norma, *non* è in generale separabile. Lo vediamo con il seguente esempio tratto da [24].

Sia \mathcal{H} lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Consideriamo sull'intervallo $(0, 1)$ la struttura standard di spazio di probabilità data dalla misura di Lebesgue e, per ogni $t \in (0, 1)$, definiamo l'operatore $W(t)$ che agisce su una funzione $\psi \in \mathcal{H}$ nel modo seguente:

$$(W(t)\psi)(r) := \psi(r - t), \quad r \in \mathbb{R}.$$

È evidente che per ogni $t \in (0, 1)$, $W(t)$ è un'isometria di \mathcal{H} e quindi $W(t) \in [\mathcal{H}]$ con $\|W(t)\| = 1$. Per $0 < s < t < 1$ si ha quindi

$$\|(W(t) - W(s))\psi\| = \|W(s)(W(t-s)\psi - \psi)\| = \|W(t-s)\psi - \psi\|.$$

Se inoltre scegliamo ψ con supporto nell'intervallo $(-\frac{t-s}{2}, \frac{t-s}{2})$ allora le funzioni ψ e $W(t-s)\psi$ hanno supporti disgiunti, il che implica $\|W(t-s)\psi - \psi\|^2 = 2\|\psi\|^2$. Ma allora $\|W(t) - W(s)\| \geq \sqrt{2}$. Abbiamo così costruito un'infinità non numerabile di operatori $\{W(t) : t \in (0, 1)\}$ la cui distanza reciproca è almeno $\sqrt{2}$. Ciò dimostra che $[\mathcal{H}]$ non è separabile. Se infatti supponiamo che un sottoinsieme numerabile \mathcal{N} sia denso in $[\mathcal{H}]$, allora per ogni $t \in (0, 1)$ si riuscirebbe a trovare un $F_t \in \mathcal{N}$, abbastanza vicino a $W(t)$ da poter dire che tutti gli F_t così costruiti sono distinti, il che contraddice la numerabilità di \mathcal{N} .

La non separabilità di $[\mathcal{X}]$ ha diverse conseguenze. Prima di tutto, essa comporta che la σ -algebra di Borel $\mathfrak{B}_{[\mathcal{X}]}$ sia, intuitivamente parlando, “troppo grande”, nel senso che le funzioni misurabili a valori in $[\mathcal{X}]$ sono “poche”. In altre parole, la misurabilità rispetto alla topologia della norma operatoriale è una richiesta piuttosto forte e funzioni molto semplici risultano essere non misurabili. Riprendendo l'esempio precedente, la funzione $t \mapsto W(t)$ non è $\mathfrak{B}_{(0,1)}/\mathfrak{B}_{[\mathcal{H}]}$ -misurabile. Infatti, se G è un sottoinsieme *non* boreliano di $(0, 1)$ si ha che l'insieme

$$\mathcal{F} := \left\{ B \in [\mathcal{H}] : \|B - W(t)\| < \sqrt{2}/2 \text{ per qualche } t \in G \right\}$$

è aperto in $[\mathcal{H}]$ in quanto unione di una famiglia di palle aperte e, d'altra parte,

$$\{t \in (0, 1) : W(t) \in \mathcal{F}\} = G$$

perché se $t \notin G$ sappiamo che $W(t)$ dista da ogni altro $W(t')$ almeno $\sqrt{2}$. Così $t \mapsto W(t)$ non è misurabile, dal momento che la retroimmagine di un aperto non è un boreliano.

Altra conseguenza della non separabilità di $[\mathcal{X}]$ è il fatto che la definizione di integrale secondo Bochner, data nella sezione 2.6, non può essere direttamente usata per funzioni misurabili a valori in $[\mathcal{X}]$.

Per superare queste difficoltà, quando si tratta di variabili aleatorie in spazi di operatori, si deve ricorrere ad una definizione *più debole* di misurabilità: la *misurabilità in senso forte*, definizione che sta alla normale definizione di misurabilità esattamente come la *continuità in senso forte* sta alla continuità in norma. Per capire questa analogia, ricordiamo che su $[\mathcal{X}]$ esiste la cosiddetta *topologia forte* che è meno fine (e quindi, in realtà, più *debole*) della topologia metrica indotta della norma operatoriale (2.1.11). Cominciamo col definire l'*orbita* di un elemento $x \in \mathcal{X}$ come operatore lineare limitato da $[\mathcal{X}]$ in \mathcal{X} .

Definizione 3.23 Per ogni assegnato $x \in \mathcal{X}$, chiamiamo orbita di x l'applicazione definita da

$$\Lambda_x : [\mathcal{X}] \rightarrow \mathcal{X}, \quad \Lambda_x B := Bx, \quad (3.5.1)$$

per ogni $B \in [\mathcal{X}]$.

Osservazione 3.24 Per ogni $x \in \mathcal{X}$ risulta che $\Lambda_x \in [[\mathcal{X}], \mathcal{X}]$, con $\|\Lambda_x\| = \|x\|$.

La *topologia forte* è la topologia meno fine su $[\mathcal{X}]$ in cui ogni orbita è una funzione continua. Essa è quindi la topologia generata dagli insiemi del tipo $\Lambda_x^{-1}(A)$, con $x \in \mathcal{X}$ e A aperto di \mathcal{X} . Se \mathcal{Y} è uno spazio topologico e f è una funzione da \mathcal{Y} in $[\mathcal{X}]$, allora f è *continua in senso forte* (cioè per la topologia forte su $[\mathcal{X}]$) se e solo se $\Lambda_x \circ f$ è continua per ogni $x \in \mathcal{X}$.

La definizione di misurabilità in senso forte si dà in modo del tutto analogo.

Definizione 3.25 Sia \mathcal{X} uno spazio di Banach separabile e $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità. Una funzione $J : \Omega \rightarrow [\mathcal{X}]$ è detta *variabile aleatoria misurabile in senso forte* se la funzione

$$\Lambda_x \circ J : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$$

è una *variabile aleatoria a valori in \mathcal{X}* (cioè $\mathfrak{F}/\mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$ -misurabile) per ogni $x \in \mathcal{X}$.

In poche parole (ma l'aver introdotto un certo formalismo ci sarà utile per snellire dimostrazioni e definizioni seguenti) J è misurabile in senso forte se, per ogni $x \in \mathcal{X}$, la funzione $J(\cdot)x$ è misurabile.

Se ora consideriamo la collezione

$$\mathcal{Q} := \{ \Lambda_x^{-1}(D) \mid x \in \mathcal{X}, D \in \mathfrak{B}_{\mathcal{X}} \} \quad (3.5.2)$$

di tutti i sottoinsiemi di $[\mathcal{X}]$ che sono retroimmagine di boreliani di \mathcal{X} tramite le orbite e indichiamo con $\sigma(\mathcal{Q})$ la σ -algebra generata da \mathcal{Q} , il seguente teorema ci dà la caratterizzazione che ci dovevamo aspettare.

Teorema 3.26 *La misurabilità in senso forte coincide con la $\mathfrak{F}/\sigma(\mathcal{Q})$ -misurabilità.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $J : \Omega \rightarrow [\mathcal{X}]$ sia misurabile in senso forte. Fissato $x \in \mathcal{X}$ e preso un qualunque boreliano $D \in \mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$ si ha che $\Lambda_x^{-1}(D) \in \mathcal{Q}$ e $J^{-1}(\Lambda_x^{-1}(D)) = (\Lambda_x \circ J)^{-1}(D)$, che appartiene a \mathfrak{F} per definizione di misurabilità in senso forte. Poiché \mathcal{Q} genera $\sigma(\mathcal{Q})$, dai noti teoremi di teoria della misura ([13], teorema 13.1) segue che J è $\mathfrak{F}/\sigma(\mathcal{Q})$ -misurabile.

Viceversa, supponiamo che J sia $\mathfrak{F}/\sigma(\mathcal{Q})$ -misurabile. Fissati $x \in \mathcal{X}$ e un qualunque boreliano D di \mathcal{X} si ha $(\Lambda_x \circ J)^{-1}(D) = J^{-1}(\Lambda_x^{-1}(D))$. Ma $\Lambda_x^{-1}(D) \in \mathcal{Q} \subset \sigma(\mathcal{Q})$ per cui $J^{-1}(\Lambda_x^{-1}(D)) \in \mathfrak{F}$ per ipotesi, il che dimostra la misurabilità in senso forte di J . \square

I fatti seguenti sono di verifica immediata.

Osservazione 3.27 a) $\sigma(\mathcal{Q})$ è la più piccola σ -algebra per cui le funzioni Λ_x , $x \in \mathcal{X}$, sono tutte misurabili.

b) Indicando con \mathfrak{S} la σ -algebra di Borel relativa alla topologia forte di $[\mathcal{X}]$ si hanno le seguenti inclusioni:

$$\sigma(\mathcal{Q}) \subset \mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}_{[\mathcal{X}]} \quad (3.5.3)$$

La non separabilità di $[\mathcal{X}]$ ha però una conseguenza piuttosto sorprendente. In generale infatti si ha che $\sigma(\mathcal{Q}) \subset \mathfrak{S}$ ma $\sigma(\mathcal{Q}) \neq \mathfrak{S}$, cioè, $\sigma(\mathcal{Q})$ non è la σ -algebra di Borel generata dalla topologia forte. Di conseguenza *non tutte le funzioni continue in senso forte sono anche misurabili in senso forte.*

Vediamo adesso come la definizione di integrale di Bochner può essere estesa a variabili aleatorie a valori in $[\mathcal{X}]$, misurabili in senso forte.

Definizione 3.28 *Sia $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità e \mathcal{X} uno spazio di Banach separabile e sia $J : \Omega \rightarrow [\mathcal{X}]$ misurabile in senso forte. Diremo che J è Bochner-integrabile se per ogni $x \in \mathcal{X}$ la funzione $\Lambda_x \circ J$ è Bochner-integrabile (nel senso usuale) e se esiste un operatore $\langle J \rangle \in [\mathcal{X}]$ tale che*

$$\langle J \rangle x = \int_{\Omega} J(\omega) x \, d\mathbf{P}_{\omega}, \quad x \in \mathcal{X} \quad (3.5.4)$$

L'operatore $\langle J \rangle$ è, per definizione, l'integrale di Bochner di J e, in contesto probabilistico, sarà anche detto aspettazione di J .

Osservazione 3.29 *Se J è una variabile aleatoria a valori in $[\mathcal{X}]$ misurabile in senso forte, allora la funzione $\|J(\cdot)\| : \omega \rightarrow \mathbb{R}$, è misurabile e si ha*

$$\|\langle J \rangle\| \leq \int_{\Omega} \|J(\omega)\| \, d\mathbf{P}_{\omega}. \quad (3.5.5)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathcal{N} un sottoinsieme numerabile e denso in \mathcal{X} e poniamo $\mathcal{N}' := \mathcal{N} \cap \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \leq 1\}$. Per ipotesi, la funzione $J(\cdot)x : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ è misurabile per ogni $x \in \mathcal{X}$. Ma allora

$$\|J(\cdot)\| = \sup_{\mathcal{N}'} \|J(\cdot)x\|$$

è misurabile per i noti teoremi sulla misurabilità di funzioni reali.

Dalla proprietà (2.6.7) si ha poi, per ogni $x \in \mathcal{X}$,

$$\|\langle J \rangle x\| \leq \int_{\Omega} \|J(\omega)x\| d\mathbf{P}_{\omega} \leq \int_{\Omega} \|J(\omega)\| \|x\| d\mathbf{P}_{\omega} = \|x\| \int_{\Omega} \|J(\omega)\| d\mathbf{P}_{\omega}$$

da cui segue la seconda parte della tesi. \square

Riprendendo ancora una volta l'esempio precedente, è immediato verificare che, per ogni $\psi \in \mathcal{H}$, la funzione $\Lambda_{\psi} \circ W : (0, 1) \rightarrow \mathcal{H}$, $t \mapsto W(t)x$, è continua e quindi misurabile, per cui la funzione $W : (0, 1) \rightarrow [\mathcal{H}]$, $t \mapsto W(t)$ è misurabile in senso forte. Inoltre W è Bochner-integrabile su $(0, 1)$, con

$$(\langle W \rangle \psi)(r) = \int_0^1 \psi(r-t) dt \quad r \in \mathbb{R}$$

e $\|\langle W \rangle\| \leq 1$.

Sfruttando l'immersione \mathcal{J} definita nella sezione 3.4, l'aspettazione $\langle J \rangle$ di una variabile aleatoria $J : \Omega \rightarrow [\mathcal{X}]$, integrabile secondo Bochner, può essere sempre visto come operatore lineare limitato su $L_{\mathcal{X}}^p$, identificando cioè $\langle J \rangle$ con $\mathcal{J}(\langle J \rangle)$. L'aspettazione di una perturbazione aleatoria, può quindi essere interpretata come quell'operatore deterministico il cui effetto su $x \in \mathcal{X}$ è la *media* rispetto a ω degli effetti su x delle perturbazioni aleatorie $J(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Nel caso a dimensione finita, ad esempio, se l'operatore aleatorio J su \mathbb{R}^n è rappresentato da una matrice (a_{ij}) , con $a_{ij} = a_{ij}(\omega)$, si ha che $\langle J \rangle$ è rappresentato dalla matrice $(\langle a_{ij} \rangle)$, dove $\langle a_{ij} \rangle := \int_{\Omega} a_{ij}(\omega) d\mathbf{P}_{\omega}$.

Nel contesto del modello di trasporto di radiazione nella nube *clumpy*, sostituire $\langle J \rangle$ a J corrisponde a “spalmare” i *clumps* in modo uniforme sulla nube, cioè a sostituire uno spessore ottico uniforme *medio* allo spessore ottico disomogeneo dipendente da ω . Questa è la cosiddetta approssimazione *atomic-mix* di cui parleremo nel capitolo 4.

3.6 Semigruppato generato dalla perturbazione aleatoria

Lasciato il contesto di carattere generale, torniamo adesso al nostro spazio di probabilità $\mathcal{M} = (\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ fissato nella sezione 3.1 e al nostro operatore aleatorio $J(\omega)$ che compare nell'equazione 3.1.1. Dimostriamo che, sotto l'ipotesi di misurabilità in senso forte e di uniforme limitatezza della norma, è possibile vedere J come operatore limitato sullo spazio $L_{\mathcal{X}}^p$. Ci sarà utile prima introdurre un altro risultato di carattere generale.

Lemma 3.30 *Sia $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di misura e \mathcal{X} uno spazio di Banach separabile. Sia $\{f_n\}$ una successione di variabili aleatorie $f_n : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ che tende quasi certamente ad una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$. Allora f è una variabile aleatoria.*

DIMOSTRAZIONE. Si veda [27], corollario III.6.14. \square

Lemma 3.31 *Sia $w : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ una variabile aleatoria e sia $E \in \mathfrak{B}_\Omega$. Allora la funzione $\chi_E w : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ così definita:*

$$(\chi_E w)(\omega) := \chi_E(\omega) w(\omega) \quad \omega \in \Omega \quad (3.6.1)$$

è una variabile aleatoria.

DIMOSTRAZIONE. Se $D \in \mathfrak{B}_\mathcal{X}$ si ha $(\chi_E w)^{-1}(D) = [(\chi_E w)^{-1}(D) \cap E] \cup [(\chi_E w)^{-1}(D) \cap E^c] = [w^{-1}(D) \cap E] \cup [\underline{0}^{-1}(D) \cap E^c]$ (dove abbiamo indicato con $\underline{0}$ la funzione $\underline{0} : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ identicamente nulla). Perciò

$$(\chi_E w)^{-1}(D) = \begin{cases} w^{-1}(D) \cap E, & \text{se } 0 \notin D \\ [w^{-1}(D) \cap E] \cup E^c, & \text{se } 0 \in D. \end{cases}$$

In ogni caso $(\chi_E w)^{-1}(D) \in \mathfrak{B}_\Omega$ e quindi $\chi_E w$ è misurabile. \square

Teorema 3.32 *Supponiamo che $J : \Omega \rightarrow [\mathcal{X}]$, $\omega \mapsto J(\omega)$ sia misurabile in senso forte. Supponiamo inoltre che esista una costante $\beta_0 \geq 0$ tale che*

$$\|J(\omega)\| \leq \beta_0, \quad q. c. \omega \in \Omega \quad (3.6.2)$$

Allora, definito per ogni $u \in L_\mathcal{X}^p$ l'operatore

$$(\tilde{J}u)(\omega) := J(\omega)u(\omega), \quad q. c. \omega \in \Omega, \quad (3.6.3)$$

si ha che $\tilde{J} \in [L_\mathcal{X}^p]$, con $\|\tilde{J}\| \leq \beta_0$.

DIMOSTRAZIONE. Per provare che $\tilde{J} \in [L_\mathcal{X}^p]$ dobbiamo innanzitutto dimostrare che, dato un qualunque elemento u di $L_\mathcal{X}^p$, la funzione $\tilde{J}u$ è ancora un elemento di $L_\mathcal{X}^p$. Dobbiamo quindi dimostrare la misurabilità della funzione $\tilde{J}u : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$. Poiché $u : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ è misurabile, per il teorema 2.51 esiste una successione $\{s_n\}$ di funzioni semplici tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(\omega) - u(\omega)\| = 0$ per quasi ogni $\omega \in \Omega$. Dalla definizione di \tilde{J} si ha $\|(\tilde{J}s_n)(\omega) - (\tilde{J}u)(\omega)\| = \|J(\omega)s_n(\omega) - J(\omega)u(\omega)\| \leq \|J(\omega)\| \|s_n(\omega) - u(\omega)\|$, che tende a zero quasi certamente, per $n \rightarrow \infty$. Grazie al lemma 3.30, basterà allora dimostrare che le funzioni $\tilde{J}s_n$ sono misurabili per ogni n .

Fissiamo $n \in \mathbb{N}_0$. Essendo s_n una funzione semplice, essa avrà un'espressione del tipo $s_n = \sum_{k=0}^N \chi_{E_k} \otimes x_k$, con $E_k \in \mathfrak{F}$ per $k = 0, 1, \dots, N$. Si ha quindi, per quasi ogni $\omega \in \Omega$,

$$(\tilde{J}s_n)(\omega) = J(\omega) \left(\sum_{k=0}^N \chi_{E_k}(\omega) x_k \right) = \sum_{k=0}^N \chi_{E_k}(\omega) J(\omega) x_k.$$

Poichè per ipotesi J è misurabile in senso forte, si ha che le funzioni $w_k : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$, $w_k(\omega) := J(\omega)x_k$, sono variabili aleatorie, per $k = 0, 1, \dots, N$. Possiamo perciò applicare il lemma 3.31 alle funzioni $\chi_{E_k}(\cdot) J(\cdot)x_k$, che risultano quindi misurabili. Dunque, $\tilde{J}s_n$ è misurabile in quanto somma finita di funzioni misurabili (è una semplice conseguenza del teorema 2.51). Tutto ciò implica, come già osservato, la misurabilità di $\tilde{J}u$.

Osserviamo che fin qui non si è sfruttata l'ipotesi di integrabilità della norma di J , eq. (3.6.2). Lo facciamo adesso, utilizzando anche la misurabilità della norma di J (osservazione 3.29):

$$\begin{aligned} (\|\tilde{J}u\|_p)^p &= \int_{\Omega} \|(\tilde{J}u)(\omega)\|^p d\mathbf{P}_{\omega} = \int_{\Omega} \|J(\omega)u(\omega)\|^p d\mathbf{P}_{\omega} \\ &\leq \int_{\Omega} \|J(\omega)\|^p \|u(\omega)\|^p d\mathbf{P}_{\omega} \leq \beta_0^p \int_{\Omega} \|u(\omega)\|^p d\mathbf{P}_{\omega} = \beta_0^p (\|u\|_p)^p. \end{aligned}$$

Ciò dimostra che $\tilde{J}u \in L_{\mathcal{X}}^p$, e che $\tilde{J} \in [L_{\mathcal{X}}^p]$ con $\|\tilde{J}\| \leq \beta_0$ □

Si faccia perciò attenzione a distinguere \hat{L} , che è *un operatore in \mathcal{X} visto come operatore deterministico in $L_{\mathcal{X}}^p$* , da \tilde{J} , che invece è *una variabile aleatoria a valori in $[\mathcal{X}]$ vista come operatore limitato su $L_{\mathcal{X}}^p$* .

La dimostrazione del teorema 3.32 si adatta facilmente al caso di variabili aleatorie a valori in $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$, dove \mathcal{Y} è un secondo spazio di Banach. Se $x \in \mathcal{X}$, estendiamo la definizione di orbita nel modo ovvio:

$$\Lambda_x : [\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \rightarrow \mathcal{Y}, \quad \Lambda_x B := Bx, \quad (3.6.4)$$

e diciamo che $J : \Omega \rightarrow [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ è misurabile in senso forte se $\Lambda_x \circ J : \Omega \rightarrow \mathcal{Y}$ è misurabile per ogni $x \in \mathcal{X}$. Si ha allora la seguente estensione del teorema 3.32, che ci sarà utile nella sezione 5.4.

Osservazione 3.33 *Sia $J : \Omega \rightarrow [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ misurabile in senso forte e Supponiamo inoltre che esista una costante $\beta_0 \geq 0$ tale che $\|J(\omega)\| \leq \beta_0$ per q. c. $\omega \in \Omega$. Per ogni $u \in L_{\mathcal{X}}^p$ definiamo $(\tilde{J}u)(\omega) := J(\omega)u(\omega)$ per q. c. $\omega \in \Omega$. Allora $\tilde{J} \in [L_{\mathcal{X}}^p, L_{\mathcal{Y}}^p]$, con $\|\tilde{J}\| \leq \beta_0$.*

Siamo adesso in grado di enunciare e dimostrare il risultato principale della teoria sviluppata fino a questo momento. Consideriamo il problema di evoluzione aleatorio (3.1.1). Definiamo ξ e $\mathbf{q}(t)$ secondo la (3.4.8) e la (3.4.9) e assumiamo che $\xi \in L_{\mathcal{X}}^p$ e che $\mathbf{q}(t) \in L_{\mathcal{X}}^p$ per ogni $t \in \mathbb{T}$. Associamo allora all'eq. (3.1.1) un problema di evoluzione nello spazio $L_{\mathcal{X}}^p$, in cui L è sostituito da \hat{L} , ξ_{ω} e $q_{\omega}(t)$ sono sostituiti da ξ e $\mathbf{q}(t)$, e J è sostituito da \tilde{J} :

$$\begin{cases} \mathbf{f}'(t) = \hat{L}\mathbf{f}(t) + \tilde{J}\mathbf{f}(t) + \mathbf{q}(t), & t \in \mathbb{T} \\ \mathbf{f}(0) = \xi. \end{cases} \quad (3.6.5)$$

I risultati del teorema 3.21 si generalizzano al problema di evoluzione 3.6.5. Si ha infatti il seguente

Teorema 3.34 *Supponiamo che $L \in \mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$, per opportune costanti $\beta \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$, che $\mathbf{q} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbf{L}_{\mathcal{X}}^p$ sia regolare, nel senso della definizione 2.24 e che J soddisfi le ipotesi del teorema 3.32. Allora, per ogni $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{D}(\widehat{L})$, l'equazione (3.6.5) ha un'unica soluzione $\mathbf{f} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbf{L}_{\mathcal{X}}^p$ e vale la seguente formula*

$$\mathbf{f}(t)(\omega) = \mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t)\boldsymbol{\xi}_\omega + \int_0^t \mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t-s)q_\omega(s) ds, \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega, \quad (3.6.6)$$

per ogni $t \in \mathbb{T}$ (dove $\mathcal{S}_{L+J(\omega)}$ è il semigruppato su \mathcal{X} generato da $L + J(\omega)$).

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, esistono due costanti β e $M \geq 1$ tali che $L \in \mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$. Dai teoremi 3.18, 3.32 e 2.28 segue allora che

$$\widehat{L} + \widetilde{J} \in \mathcal{G}(M, \beta + \beta_0 M, \mathbf{L}_{\mathcal{X}}^p). \quad (3.6.7)$$

Per il teorema 2.25 si ha che (3.6.5) ha un'unica soluzione \mathbf{f} data dalla formula

$$\mathbf{f}(t) := \mathcal{S}_{\widehat{L} + \widetilde{J}}(t)\boldsymbol{\xi} + \int_0^t \mathcal{S}_{\widehat{L} + \widetilde{J}}(t-s)\mathbf{q}(s) ds, \quad (3.6.8)$$

per ogni $t \in \mathbb{T}$. Ci si accorge allora che la dimostrazione si svolge in maniera identica a quella del teorema 3.21, a patto di dimostrare che

$$[\mathcal{S}_{\widehat{L} + \widetilde{J}}(t)u](\omega) = \mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t)u(\omega) \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega, \quad (3.6.9)$$

per ogni $t \in \mathbb{T}$ e per ogni $u \in \mathbf{L}_{\mathcal{X}}^p$.

Fissiamo $t \in \mathbb{T}$. Dal teorema 2.28 sappiamo che

$$\mathcal{S}_{\widehat{L} + \widetilde{J}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{Z}^{(n)}(t), \quad (3.6.10)$$

dove gli operatori $\widetilde{Z}^{(n)}(t) \in [\mathbf{L}_{\mathcal{X}}^p]$ sono definiti dalla formula ricorsiva:

$$\begin{cases} \widetilde{Z}^{(n)}(t) := \mathcal{S}_{\widehat{L}}(t), & t \geq 0, \\ \widetilde{Z}^{(n+1)}(t)u := \int_0^t \mathcal{S}_{\widehat{L}}(t-s)\widetilde{J}\widetilde{Z}^{(n)}(s)u ds, & u \in \mathbf{L}_{\mathcal{X}}^p, t \geq 0. \end{cases} \quad (3.6.11)$$

Per ogni $\omega \in \Omega$, d'altra parte, si ha che $J(\omega) \in [\mathbf{L}_{\mathcal{X}}^p]$ e quindi $L + J(\omega)$ genera semigruppato in \mathcal{X} . Sempre per il teorema 2.28, per ogni $\omega \in \Omega$ possiamo scrivere

$$\mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_\omega^{(n)}(t), \quad (3.6.12)$$

dove gli operatori $Z_\omega^{(n)}(t) \in [\mathcal{X}]$ sono definiti dalla formula ricorsiva:

$$\begin{cases} Z_\omega^{(n)}(t) := \mathcal{S}_L(t), & t \geq 0, \\ Z_\omega^{(n+1)}(t)x := \int_0^t \mathcal{S}_L(t-s)J(\omega)Z_\omega^{(n)}(s)x \, ds, & x \in \mathcal{X}, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (3.6.13)$$

Vogliamo dimostrare che

$$[\tilde{Z}^{(n)}(t)u](\omega) = Z_\omega^{(n)}(t)u(\omega) \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega, \quad (3.6.14)$$

per ogni $u \in L_{\mathcal{X}}^p$ e per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. Per $n = 0$ si ha

$$[\tilde{Z}^{(0)}(t)u](\omega) = [\mathcal{S}_{\hat{L}}(t)u](\omega) = \mathcal{S}_L(t)u(\omega) = Z_\omega^{(0)}(t)u(\omega) \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega,$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla (3.4.3). Supposta poi l'eq. (3.6.14) vera per un certo n , dimostriamola per $n + 1$. Si hanno q.c. le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \left[\int_0^t \mathcal{S}_{\hat{L}}(t-s)\tilde{J}\tilde{Z}^{(n)}(s)u \, ds \right](\omega) &= \int_0^t [\mathcal{S}_{\hat{L}}(t-s)\tilde{J}\tilde{Z}^{(n)}(s)u](\omega) \, ds \\ &= \int_0^t \mathcal{S}_L(t-s)J(\omega)[\tilde{Z}^{(n)}(s)u](\omega) \, ds = \int_0^t \mathcal{S}_L(t-s)J(\omega)Z_\omega^{(n)}(s)u(\omega) \, ds, \end{aligned}$$

dove nella prima uguaglianza si è applicato il teorema 2.60 (come fatto nella dimostrazione del teorema 3.21), nella seconda uguaglianza si sono applicate la 3.4.3 e la 3.6.3 e nella terza uguaglianza si è applicata l'ipotesi induttiva. La catena di uguaglianze ci dà l'eq. (3.6.14) per $n + 1$. Per induzione, la (3.6.14) è dunque dimostrata per ogni $n \in \mathbb{N}_0$.

Fissiamo ora $u \in L_{\mathcal{X}}^p$ e poniamo

$$\varphi_n(\omega) := \sum_{k=0}^n [\tilde{Z}^{(k)}(t)u](\omega), \quad \psi_n(\omega) := \sum_{k=0}^n Z_\omega^{(k)}(t)u(\omega),$$

per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ e per ogni $\omega \in \Omega$ (ricordiamo che t è fissato). Poniamo anche

$$\varphi(\omega) := [\mathcal{S}_{\hat{L}+\hat{J}}(t)u](\omega), \quad \psi(\omega) := \mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t)u(\omega).$$

Abbiamo appena dimostrato che, per ogni fissato n , l'uguaglianza $\varphi_n(\omega) = \psi_n(\omega)$ vale quasi certamente. Per il punto c) del teorema 2.59 e poiché vale l'eq. (3.6.10), sappiamo inoltre che esiste una sottosuccessione φ_{n_k} tale che $\varphi_{n_k}(\omega)$ converge quasi certamente in \mathcal{X} a $\psi(\omega)$. D'altra parte $\psi_{n_k}(\omega)$ converge in \mathcal{X} a $\psi(\omega)$ per ogni ω . Con tecniche analoghe a quelle impiegate nella dimostrazione del lemma 3.8, si dimostra che l'insieme $\{\omega \in \Omega \mid \psi(\omega) = \varphi(\omega)\}$ contiene l'intersezione di un'infinità numerabile di eventi certi, e perciò è un evento certo (lemma 2.50). Allora la (3.6.9) è dimostrata, e con essa il teorema. \square

Osservazione 3.35 Per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ la funzione $\omega \mapsto \mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t)$ è una variabile aleatoria a valori in $[\mathcal{X}]$ ed è Bochner-integrabile.

DIMOSTRAZIONE. Sia x un qualunque elemento di \mathcal{X} e \hat{x} il corrispondente elemento deterministico in $L_{\mathcal{X}}^p$. Dall'eq. (3.6.9) segue che

$$[\mathcal{S}_{\hat{L}+\hat{J}}(t)\hat{x}](\omega) = \mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t)x \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega. \quad (3.6.15)$$

Perciò la funzione $\omega \mapsto \mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t)x$ è un rappresentante della classe di equivalenza $\mathcal{S}_{\hat{L}+\hat{J}}(t)\hat{x} \in L_{\mathcal{X}}^p \subset L_{\mathcal{X}}^1$ e dunque, per definizione, è una variabile aleatoria Bochner-integrabile. Pertanto, $\omega \mapsto \mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t)$ è misurabile in senso forte. Inoltre si ha

$$\left\| \int_{\Omega} \mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t)x \, d\mathbf{P}_{\omega} \right\| \leq M e^{t(\beta+M\beta_0)} \int_{\Omega} \|x\| \, d\mathbf{P}_{\omega} = M e^{t(\beta+M\beta_0)} \|x\|,$$

e dunque, posto

$$\langle \mathcal{S}_{L+J} \rangle(t)x := \int_{\Omega} \mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t)x \, d\mathbf{P}_{\omega}, \quad (3.6.16)$$

si ha che $\mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t)$ è Bochner integrabile e che l'operatore $\langle \mathcal{S}_{L+J} \rangle(t) \in [\mathcal{X}]$, con $\|\langle \mathcal{S}_{L+J} \rangle(t)\| \leq M e^{t(\beta+M\beta_0)}$ è il suo integrale di Bochner (si veda la sezione 3.5). \square

Come già fatto per il teorema 3.21, anche qui osserviamo che la soluzione \mathbf{f} di (3.6.5) ha la forma di una famiglia di soluzioni *mild* di (3.1.1) parametrizzate da ω .

Corollario 3.36 Nelle ipotesi del teorema 3.34, e definita per ogni $\omega \in \Omega$ la funzione

$$f_{\omega} : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}, \quad f_{\omega}(t) := \mathbf{f}(t)(\omega), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (3.6.17)$$

dove \mathbf{f} è la soluzione stretta di (3.6.5), f_{ω} è quasi certamente soluzione *mild* di (3.1.1).

DIMOSTRAZIONE. Anche qui, come per il corollario 3.22, la dimostrazione è una conseguenza diretta della definizione di soluzione *mild* data nella sezione 2.3. \square

Ribadiamo anche in questo caso che le ipotesi del teorema 3.34 non ci assicurano che f_{ω} sia una famiglia di soluzioni strette, o quasi certamente strette. Per poter affermare ciò occorrono ulteriori ipotesi di regolarità su \mathbf{q} che ci permettano di dire che q_{ω} soddisfa quasi certamente le ipotesi del teorema 2.25.

3.7 Problemi di evoluzione affini aleatori

Concludiamo il capitolo con una breve discussione su come sia possibile estendere i risultati ottenuti sinora al caso di problemi di evoluzione *affini*. Ricordiamo che la necessità di studiare sistemi di questo tipo nasce dall'esigenza di includere termini non omogenei nelle condizioni al contorno. In teoria del trasporto, ad esempio, tali

termini rappresentano un flusso assegnato di particelle o di radiazione proveniente da sorgenti *esterne* (si veda la sezione 5.2). Se tali sorgenti sono conosciute soltanto in senso statistico, la definizione dell'operatore affine che "guida" l'evoluzione del sistema dipenderà dal parametro aleatorio $\omega \in \Omega$, opportunamente esteso in modo da contenere i parametri di questa ulteriore descrizione probabilistica (si veda la sezione 5.4). Ci troviamo così di fronte a un problema di evoluzione affine di carattere aleatorio nel senso proprio del termine, cioè nel senso che contiene un operatore affine aleatorio.

Siano $\mathcal{M} := (\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, $\mathbf{T} := [0, t_0)$, $L \in \mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$ e $J : \Omega \rightarrow [\mathcal{X}]$ come nelle sezioni precedenti. Consideriamo una famiglia di operatori del tipo

$$\{A_\omega(t) \mid \omega \in \Omega, t \in \mathbf{T}\} \quad (3.7.1)$$

e supponiamo che, per ogni $t \in \mathbf{T}$ fissato, $A_\omega(t)$ sia quasi certamente un operatore L -affine (definizione 2.32). Allora per q. c. $\omega \in \Omega$ esiste una funzione $p_\omega : T \rightarrow \mathcal{X}$ tale che

$$\mathcal{D}(A_\omega(t)) = p_\omega(t) + \mathcal{D}(L), \quad t \in \mathbf{T} \quad (3.7.2)$$

(osservazione 2.31). Definiamo, per ogni $t \in \mathbf{T}$ fissato, la funzione $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{p}(t) : \Omega \rightarrow \mathcal{X} \quad \mathbf{p}(t)(\omega) := p_\omega(t) \quad (3.7.3)$$

e l'operatore $\widehat{A}(t)$:

$$\mathcal{D}(\widehat{A}(t)) := \left\{ u \in L_{\mathcal{X}}^p \mid u(\omega) \in \mathcal{D}(A_\omega(t)), \text{ q. c. } \omega \in \Omega \right\} \quad (3.7.4)$$

$$(\widehat{A}(t)u)(\omega) := A_\omega(t)u(\omega), \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega, u \in \mathcal{D}(\widehat{A}(t)). \quad (3.7.5)$$

Lemma 3.37 *Se $\mathbf{p}(t) \in L_{\mathcal{X}}^p$ per ogni $t \in \mathbf{T}$, la (3.7.4) e la (3.7.5) definiscono una famiglia \widehat{L} -affine $\{\widehat{A}(t) \mid t \in \mathbf{T}\}$ di operatori in $L_{\mathcal{X}}^p$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $t \in \mathbf{T}$. Se $u \in \mathcal{D}(\widehat{A}(t))$, per definizione si ha che $u(\omega)$ appartiene quasi certamente a $\mathcal{D}(A_\omega(t))$. Per la (3.7.2) esisterà, per q. c. $\omega \in \Omega$ un elemento $v(\omega) \in \mathcal{D}(L)$ tale che $u(\omega) = p_\omega(t) + v(\omega)$ (v dipenderà anche da t che abbiamo fissato inizialmente). Poiché $v(\omega) = u(\omega) - \mathbf{p}(t)(\omega)$ quasi certamente, dall'ipotesi $\mathbf{p}(t) \in L_{\mathcal{X}}^p$ segue che $v \in L_{\mathcal{X}}^p$. Inoltre si ha quasi certamente l'uguaglianza

$$Lv(\omega) = A_\omega(t)u(\omega) - A_\omega(t)p_\omega(t).$$

Per la definizione di \widehat{L} (si vedano la (3.3.1) e la (3.3.2)) si ha allora che $v \in \mathcal{D}(\widehat{L})$. Abbiamo così dimostrato che

$$\mathcal{D}(\widehat{A}(t)) = \mathbf{p}(t) + \mathcal{D}(\widehat{L}), \quad t \in \mathbf{T}. \quad (3.7.6)$$

Per ogni $u \in \mathcal{D}(\widehat{A}(t))$ e per ogni $v \in \mathcal{D}(\widehat{L})$ si ha poi $[\widehat{A}(t)(u+v)](\omega) = A_\omega(t)(u(\omega) + v(\omega)) = A_\omega(t)u(\omega) + Lv(\omega) = [\widehat{A}(t)u + \widehat{L}v](\omega)$, per q. c. $\omega \in \Omega$. Dunque $\widehat{A}(t)$ è un operatore \widehat{L} -affine. \square

Consideriamo allora il problema di evoluzione aleatorio

$$\begin{cases} f'_\omega(t) = A_\omega(t) f_\omega(t) + J(\omega) f_\omega(t), \\ f_\omega(0) = \xi_\omega. \end{cases} \quad (3.7.7)$$

dove $\xi_\omega \in \mathcal{X}$ è un opportuno dato iniziale eventualmente dipendente da ω . Come già osservato nella sezione 2.4, nell'eq. (3.7.7) ci possiamo risparmiare l'inclusione esplicita di un termine di sorgente $q_\omega(t)$. Di questo infatti si può sempre tener conto ridefinendo eventualmente l'azione di $A_\omega(t)$.

Procedendo come nelle sezioni 3.4 e 3.6, definiamo $\xi(\omega) := \xi_\omega$, supponiamo che $\xi \in L^p_{\mathcal{X}}$ e associamo all'equazione aleatoria in \mathcal{X} (3.7.7) l'equazione deterministica in $L^p_{\mathcal{X}}$

$$\begin{cases} \mathbf{f}'(t) = \widehat{A}(t) \mathbf{f}(t) + \widetilde{J} \mathbf{f}(t), \quad t \in T \\ \mathbf{f}(0) = \xi. \end{cases} \quad (3.7.8)$$

Osservando che $\{\widehat{A}(t) + \widetilde{J} \mid t \in T\}$ è una famiglia $(\widehat{L} + \widetilde{J})$ -affine, e che $\mathbf{p}(t)$ è una rappresentazione anche di $\mathcal{D}(\widehat{A}(t) + \widetilde{J}) = \mathcal{D}(\widehat{A}(t))$, per avere esistenza e unicità della soluzione stretta di (3.7.8) basta applicare il teorema 2.34. Supponiamo che $\mathbf{p} : T \rightarrow L^p_{\mathcal{X}}$ sia derivabile con continuità e supponiamo che la funzione $Q_{\mathbf{p}} : T \rightarrow L^p_{\mathcal{X}}$ definita da

$$Q_{\mathbf{p}}(t) := (\widehat{A}(t) + \widetilde{J}) \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}'(t) \quad t \in T, \quad (3.7.9)$$

soddisfi le condizioni sul termine di sorgente nel teorema 2.25. Allora, per il teorema 2.34, il problema di evoluzione affine 3.7.8 ha, per ogni $\xi \in \mathcal{D}(\widehat{A}(0))$, un'unica soluzione stretta $\mathbf{f} : T \rightarrow L^p_{\mathcal{X}}$ data da

$$\mathbf{f}(t) := \mathbf{p}(t) + \mathcal{S}_{\widehat{L} + \widetilde{J}}(t)[\xi - \mathbf{p}(0)] + \int_0^t \mathcal{S}_{\widehat{L} + \widetilde{J}}(t-s) Q_{\mathbf{p}}(s) ds. \quad t \in T. \quad (3.7.10)$$

Però in questo caso l'interpretazione di $\mathbf{f}(t)(\omega)$ come soluzione *mild* di (3.7.7) e la dimostrazione di una formula analoga alla (3.6.6) non seguono immediatamente (come si potrebbe a prima vista pensare) dal teorema 3.34 riletto per i termine di sorgente $Q_{\mathbf{p}}$. Questo per due ragioni. La prima è che dobbiamo capire se e come sia possibile interpretare $\mathbf{p}'(t)(\omega)$ come $p'_\omega(t)$. La seconda è che la definizione di soluzione *mild* non si può estendere direttamente al caso affine. Torniamo infatti per un attimo alla sezione 2.4 e alla formula (2.4.7). In analogia con il caso lineare, per qualunque $\xi \in \mathcal{X}$ e per qualunque rappresentazione $p(t)$ di $\mathcal{D}(A(t))$ tale che il termine Q_p sia ben definito e integrabile in $[0, t]$ per ogni $t \in T$, la soluzione *mild* del problema (2.4.3) sarebbe la funzione *definita* dalla formula (2.4.7). Ma tale formula dipende da p che, di per sé, è un elemento estraneo al problema (2.4.3). Perciò la soluzione *mild* non sarebbe automaticamente unica, come nel caso lineare, ma dipenderebbe dalla scelta della rappresentazione. Per rispondere correttamente alle due questioni che abbiamo appena sollevato ci aiuteranno altrettanti risultati teorici che enunciamo sotto forma di lemmi. Il primo è strettamente collegato al teorema 2.60.

Lemma 3.38 Sia $g : T \rightarrow L_{\mathcal{X}}^p$ una funzione derivabile con continuità. Allora esiste $g : T \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ tale che

- a) g è $(\mathfrak{B}_T \times \mathfrak{F})/\mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$ -misurabile;
- b) $g(t, \omega) = \mathbf{g}(t)(\omega)$ per quasi ogni $(t, \omega) \in T \times \Omega$;
- c) $g(\cdot, \omega) : T \rightarrow \mathcal{X}$ è assolutamente continua per ogni $\omega \in \Omega$;
- d) per q. c. $\omega \in \Omega$ la derivata $\frac{\partial}{\partial t} g(t, \omega)$ esiste per quasi ogni $t \in T$ e $\frac{\partial}{\partial t} g(t, \omega) = \mathbf{g}'(t)(\omega)$ per quasi ogni $(t, \omega) \in T \times \Omega$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione data in [29] per il caso $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ (cap. III, teorema 3.4.2), può essere riletta nel caso generale in cui \mathcal{X} è uno spazio di Banach separabile. Si veda anche la nota che segue la dimostrazione dello stesso teorema 3.4.2. \square

Il seguente lemma si riferisce al contesto generale della sezione 2.4

Lemma 3.39 Sia $L \in \mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$ e sia $\{A(t) \mid t \in T\}$ una famiglia L -affine di operatori. Sia \mathcal{P} l'insieme di tutte le rappresentazioni $p : T \rightarrow \mathcal{X}$ di $\mathcal{D}(A(t))$ tali che

- a) $p'(t)$ esiste per quasi ogni $t \in T$;
- b) la funzione $Q_p : T \rightarrow \mathcal{X}$ definita dall'eq. (2.4.6) è integrabile in $[0, t]$ per ogni $t \in T$.

Allora, per ogni $\xi \in \mathcal{X}$, la funzione $f : T \rightarrow \mathcal{X}$ definita dall'eq. (2.4.7) non dipende dalla scelta di $p \in \mathcal{P}$.

DIMOSTRAZIONE. In [4] si dimostra che, se $\xi \in \mathcal{X}$ e $q : T \rightarrow \mathcal{X}$ è integrabile in ogni intervallo $[0, t]$ con $t \in T$, il problema di evoluzione (2.3.3) ha un'unica soluzione debole data dalla (2.3.10). La soluzione debole di (2.3.3) è, per definizione, una funzione $f : T \rightarrow \mathcal{X}$, continua, con $f(0) = \xi$ e tale che, per ogni $x^* \in \mathcal{D}(L^*)$, la funzione $t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$ è assolutamente continua in ogni intervallo $[0, t]$, con $t \in T$, e

$$\frac{d}{dt} \langle f(t), x^* \rangle = \langle f(t), L^* x^* \rangle + \langle q(t), x^* \rangle, \quad (3.7.11)$$

per quasi ogni $t \in T$. Con notazione standard, abbiamo indicato con L^* l'operatore aggiunto di L , [50], e con $\langle x, x^* \rangle$ l'azione di $x^* \in \mathcal{X}^*$ su $x \in \mathcal{X}$. Dunque, la soluzione mild di un problema di evoluzione è completamente caratterizzata come soluzione debole del problema stesso.

Siano p_1 e p_2 due funzioni in \mathcal{P} . Denotiamo con f_1 e con f_2 le funzioni definite dall'eq. (2.4.7), rispettivamente, con $p := p_1$ e $p := p_2$. Allora la funzione $f_{o1} := f_1 - p_1$ è soluzione debole dell'equazione

$$\begin{cases} f'_{o1}(t) = Lf_{o1}(t) + Q_{p_1}(t) & t \in T, \\ f_{o1}(0) = \xi - p_1(0), \end{cases} \quad (3.7.12)$$

e, analogamente, la funzione $f_{o2} := f_2 - p_2$ è soluzione debole dell'equazione

$$\begin{cases} f'_{o2}(t) = Lf_{o2}(t) + Q_{p_2}(t) & t \in \mathbb{T}, \\ f_{o2}(0) = \xi - p_2(0). \end{cases} \quad (3.7.13)$$

Da ciò segue facilmente che la funzione $(f_1 - f_2)$ è soluzione debole di

$$\begin{cases} (f_1 - f_2)'(t) = L(f_1 - f_2)(t), & t \in \mathbb{T}, \\ (f_1 - f_2)(0) = 0, \end{cases} \quad (3.7.14)$$

che ammette la soluzione identicamente nulla. Per l'unicità della soluzione debole si ha allora che f_1 è identicamente uguale a f_2 . \square

Il lemma appena dimostrato ci dice che si può parlare sensatamente di soluzione *mild* del problema di evoluzione affine (2.4.3) che, senza ambiguità sarà data per definizione dalla formula (2.4.7). Pertanto possiamo concludere la sezione estendendo il teorema 3.34 e il corollario 3.36 al caso affine.

Teorema 3.40 *Supponiamo che L e J soddisfino le ipotesi del teorema 3.34 e supponiamo che le funzioni $\mathbf{p}(t)$ e $Q_{\mathbf{p}}(t)$ date dalla (3.7.3) e dalla (3.7.9) siano tali che*

- a) $\mathbf{p}(t) \in L^p_{\mathcal{X}}$ per ogni $t \in \mathbb{T}$ e la funzione $\mathbf{p} : \mathbb{T} \rightarrow L^p_{\mathcal{X}}$ è derivabile con continuità in \mathbb{T} ;
- b) $Q_{\mathbf{p}} : \mathbb{T} \rightarrow L^p_{\mathcal{X}}$ è un termine di sorgente regolare nel senso della definizione 2.24.

Allora, se $\xi \in \mathcal{D}(\widehat{A}(0))$ l'equazione (3.7.8) ha un'unica soluzione stretta $\mathbf{f} : \mathbb{T} \rightarrow L^p_{\mathcal{X}}$ e vale la seguente formula

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t)(\omega) &= p_{\omega}(t) + \mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t)[\xi_{\omega} - p_{\omega}(0)] \\ &+ \int_0^t \mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t-s)[(A_{\omega}(s) + J(\omega))p_{\omega}(s) - p'_{\omega}(s)] ds, \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

per ogni $t \in \mathbb{T}$ e per q. c. $\omega \in \Omega$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già osservato che le ipotesi sono sufficienti ad assicurare l'esistenza di un'unica soluzione stretta di (3.7.8), che è data dall'eq. (3.7.10). Il lemma 3.38 ci dice che per q. c. $\omega \in \Omega$, la funzione $p_{\omega} : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ è derivabile quasi ovunque e $p'_{\omega}(t) = \mathbf{p}'(t)(\omega)$ per quasi ogni $(t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega$. Pertanto si ha che l'uguaglianza

$$[Q_{\mathbf{p}}(t)](\omega) = [(\widehat{A}(t) + \widetilde{J})\mathbf{p}(t)](\omega) - \mathbf{p}'(t)(\omega) = (A_{\omega}(t) + J(\omega))p_{\omega}(t) - p'_{\omega}(t)$$

vale per quasi ogni $(t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega$. Poiché (3.7.8) è equivalente (nel senso del teorema 2.34) a un'equazione del tipo (3.6.5), in cui il termine di sorgente è $Q_{\mathbf{p}}$, la seconda parte del teorema segue direttamente dal teorema 3.34. \square

Corollario 3.41 *Nelle ipotesi del teorema precedente, e definita per ogni $\omega \in \Omega$ la funzione*

$$f_\omega : \mathbb{T} \in \mathcal{X} \quad f_\omega(t) := \mathbf{f}(t)(\omega), \quad (3.7.16)$$

dove \mathbf{f} è la soluzione stretta di (3.7.8), f_ω è quasi certamente soluzione mild del problema di evoluzione affine (3.7.7).

DIMOSTRAZIONE. Per q. c. $\omega \in \Omega$, la funzione p_ω è una rappresentazione della famiglia $\mathcal{D}(L)$ -affine $\{\mathcal{D}(A_\omega(t)) \mid t \in \mathbb{T}\}$ e, per il teorema 2.60 e il lemma 3.38 soddisfa le ipotesi del lemma 3.38. Dunque f_ω è (quasi certamente) l'unica soluzione mild di (3.7.7). \square

4

Il problema della media

Lasciata la fase di formalizzazione del problema di evoluzione aleatorio (3.1.1), con la sua immersione nello spazio di variabili aleatorie integrabili che produce il sistema (3.6.5), sarà quest'ultimo sistema, d'ora in avanti, l'oggetto del nostro studio. A questo punto inoltre possiamo permetterci una semplificazione delle notazioni che consiste nella naturale *identificazione* di L e J con \widehat{L} e \widetilde{J} . Pertanto, d'ora in avanti, lo stesso simbolo L indicherà sia l'operatore lineare in \mathcal{X} , sia il corrispondente operatore deterministico in $L_{\mathcal{X}}^p$, e lo stesso simbolo J indicherà sia la variabile aleatoria a valori in $[\mathcal{X}]$ sia il corrispondente operatore limitato su $L_{\mathcal{X}}^p$. Potremo passare dall'una all'altra interpretazione a seconda delle esigenze. Stessa cosa per il simbolo \mathcal{S}_L il quale, grazie al teorema 3.18 e all'identificazione di L con \widehat{L} , può essere interpretato sia come semigruppato su \mathcal{X} generato da L sia come semigruppato deterministico su $L_{\mathcal{X}}^p$ generato da \widehat{L} . Abbandoneremo anche le notazioni del tipo f_{ω} , q_{ω} , ξ_{ω} e \mathbf{f} , \mathbf{q} , $\boldsymbol{\xi}$, usando solo i simboli f , q , ξ . Riscriviamo perciò il sistema (3.6.5) con la nuova e meno ingombrante notazione:

$$\begin{cases} f'(t) = Lf(t) + Jf(t) + q(t), & t \in \mathbb{T} \\ f(0) = \xi. \end{cases} \quad (4.0.1)$$

Nelle ipotesi del teorema 3.34, la (4.0.1) ha un'unica soluzione stretta

$$f(t) := \mathcal{S}_{L+J}(t)\xi + \int_0^t \mathcal{S}_{L+J}(t-s)q(s) ds, \quad (4.0.2)$$

che è quasi certamente soluzione *mild* della (3.1.1).

Questo capitolo è dedicato allo studio del *problema della media* per il problema di evoluzione (4.0.1). Come già accennato nella sezione 1.1, il problema della media è di fondamentale importanza nelle applicazioni. Esso consiste nella ricerca di un'equazione che permetta di calcolare con buona approssimazione il valor medio $\langle f \rangle$ della soluzione f di (4.0.1) evitando il procedimento "diretto" (numericamente troppo dispendioso) che consisterebbe prima nel calcolare f in corrispondenza di "tanti" $\omega \in \Omega$ e poi nel farne la media. L'apparato formale introdotto nel capitolo 3 ci permette ora di dare un'impostazione rigorosa del problema della media (rigore di cui la letteratura sull'argomento appare carente) nonché della nota "tecnica dello *smoothing*". Ma il risultato a nostro giudizio più interessante è l'introduzione di una nuova tecnica, basata su proiezioni "pseudo-ortogonali" dell'eq. (4.0.1), che

risulta particolarmente efficiente e formalmente semplice quando si utilizza una descrizione probabilistica del mezzo aleatorio di tipo *f.i.a.*

I risultati ottenuti si possono estendere facilmente al caso del problema di evoluzione affine 3.7.7.

Vale la pena osservare che nelle applicazioni la sola conoscenza della media può non essere molto significativa se non è accompagnata dalla conoscenza della *varianza*. L'elaborazione di metodi che permettano di calcolare o di stimare la *varianza*, come altri momenti di ordine superiore al primo, è perciò una questione di notevole importanza, della quale non ci occupiamo in questa trattazione ma che merita senz'altro un attento approfondimento. Si veda a riguardo [47].

4.1 L'approssimazione “atomic-mix”

In questa sezione descriviamo l'approccio più “ingenuo” al problema della media: la cosiddetta *approssimazione “atomic-mix”*. Questa consiste nell'approssimare gli effetti dell'operatore aleatorio $J(\omega)$ con il suo “effetto medio”, rappresentato dall'operatore $\langle J \rangle$, definito nella sezione 3.5 dalla (3.5.4). Il nome *atomic-mix* deriva dal contesto della teoria di trasporto stocastico, dove la descrizione *atomic-mix* può considerarsi esatta in una situazione in cui le due fasi che costituiscono il mezzo ospite sono miscelate finemente, tanto da poter considerare il loro effetto come rappresentato in ogni punto da una *sezione d'urto media*, [45].

Una tale descrizione non è certo adeguata ad una nube con *clumps* dall'alto contrasto di densità fra la fase *clump* e la fase *interclump*. Tuttavia l'approccio *atomic-mix* si presta bene, nella sua semplicità, ad introdurre il problema della media. Vedremo inoltre che esso si ritrova come approssimazione di “ordine zero” nei metodi più elaborati che descriveremo nelle sezioni successive.

Consideriamo l'operatore di aspettazione E , definito dalla (3.1.7), e poniamo $E^* := I - E$. Considerando che E ed E^* sono due operatori di proiezione (osservazione 3.2), scriveremo

$$I = E \oplus E^* \tag{4.1.1}$$

intendendo che $L_{\mathcal{X}}^p$ è la somma diretta dei sottospazi $E(L_{\mathcal{X}}^p)$ ed $E^*(L_{\mathcal{X}}^p)$. Ogni variabile aleatoria $u \in L_{\mathcal{X}}^p$ potrà dunque essere scritta come

$$u = \langle u \rangle + u^*, \tag{4.1.2}$$

dove $\langle u \rangle := Eu$ è la *media* (o *aspettazione*) di u e $u^* := E^*u = u - \langle u \rangle$ è lo *scarto dalla media*. Poiché, come si è osservato nella sezione 3.1, $E(L_{\mathcal{X}}^p)$ è isomorfo a \mathcal{X} , possiamo anche dire che l'applicazione che scompone u nella coppia $(\langle u \rangle, u^*)$, definisce un'applicazione da $L_{\mathcal{X}}^p$ nello spazio di Banach $\mathcal{X} \times E^*(L_{\mathcal{X}}^p)$.

Osservazione 4.1 *L'applicazione $u \mapsto (\langle u \rangle, u^*)$ definisce un isomorfismo lineare e continuo (ma non isometrico) fra gli spazi di Banach $L_{\mathcal{X}}^p$ e $\mathcal{X} \times E^*(L_{\mathcal{X}}^p)$.*

DIMOSTRAZIONE. La linearità è evidente, così come la biunivocità. Indichiamo con $\|\cdot\|_p$ la norma in $L_{\mathcal{X}}^p$, con $\|\cdot\|$ la norma in \mathcal{X} e ancora con $\|\cdot\|$ la norma in $\mathcal{X} \times E^*(L_{\mathcal{X}}^p)$ definita dalla (2.2.6). Ricordando che $\|\langle u \rangle\|_p = \|\langle u \rangle\|$ (con l'identificazione di \mathcal{X} con il sottoinsieme degli elementi deterministici di $L_{\mathcal{X}}^p$), si ha allora

$$\|u\|_p \leq \|\langle u \rangle\|_p + \|u^*\|_p = \|\langle u \rangle\| + \|u^*\|_p = \|(\langle u \rangle, u^*)\|,$$

il che dimostra la continuità. In generale però non vale il segno di uguale fra $\|u\|_p$ e $\|\langle u \rangle\| + \|u^*\|_p$, per cui non possiamo dire che l'isomorfismo è un'isometria. \square

Anche la perturbazione aleatoria J ammette una decomposizione in media e scarto dalla media. Osserviamo che l'ipotesi di uniforme limitatezza di J , espressa dalla (3.6.2), ci assicura che J (come variabile aleatoria a valori in $[\mathcal{X}]$) è Bochner-integrabile e la sua aspettazione $\langle J \rangle$ è un operatore limitato (che potrà essere riguardato come operatore su \mathcal{X} o come operatore deterministico su $L_{\mathcal{X}}^p$) tale che $\|\langle J \rangle\| \leq \beta_0$ (osservazione 3.29). Definiamo

$$J^*(\omega) := J(\omega) - \langle J \rangle \quad \omega \in \Omega. \quad (4.1.3)$$

La funzione $J^* : \Omega \rightarrow [\mathcal{X}]$ è chiaramente una variabile aleatoria a valori in $[\mathcal{X}]$ perché, per ogni $x \in \mathcal{X}$, si ha subito che $\Lambda_x \circ J^*$ è misurabile in quanto somma di funzioni misurabili (si veda la sezione 3.5). Inoltre la variabile aleatoria J^* può essere identificata con un operatore limitato su $L_{\mathcal{X}}^p$. Infatti dall'eq. (3.6.2) e dall'eq. (3.5.5) segue che $\|J^*(\omega)x\| \leq \|J(\omega)x\| + \|\langle J \rangle x\| \leq 2\beta_0\|x\|$, per ogni $x \in \mathcal{X}$ e $\omega \in \Omega$, per cui si può applicare il teorema 3.32 per concludere che J^* (ovvero \tilde{J}^*) appartiene a $[L_{\mathcal{X}}^p]$ con

$$\|J^*\| \leq 2\beta_0 \quad (4.1.4)$$

Osserviamo che J^* è Bochner-integrabile e che

$$\langle J^* \rangle = 0. \quad (4.1.5)$$

Inoltre vale il seguente risultato.

Lemma 4.2 *Per ogni $u \in L_{\mathcal{X}}^p$ si ha*

$$\langle Ju \rangle = \langle J \rangle \langle u \rangle + \langle J^* u^* \rangle \quad (4.1.6)$$

DIMOSTRAZIONE. Per linearità si ha $\langle Ju \rangle = E(\langle J \rangle + J^*)(\langle u \rangle + u^*) = \langle J \rangle \langle u \rangle + \langle J^* u^* \rangle + E\langle J \rangle u^* + EJ^* \langle u \rangle$. Ma $\langle J \rangle \in [\mathcal{X}]$ (e quindi è chiuso) per cui dal teorema 2.56 segue $E\langle J \rangle u^* = \langle J \rangle E u^* = 0$. Inoltre, per ogni $x \in \mathcal{X}$ vale $EJx = \langle J \rangle x$, per cui $EJ^* \langle u \rangle = EJ \langle u \rangle - E\langle J \rangle \langle u \rangle = \langle J \rangle \langle u \rangle - \langle J \rangle \langle u \rangle = 0$ e il lemma è così dimostrato.

\square

Vediamo ora altri due lemmi che useremo costantemente nel corso del capitolo.

Lemma 4.3 *Sia \mathcal{X} uno spazio di Banach, $B \in [\mathcal{X}]$ un operatore limitato e f una funzione $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$, dove \mathbb{T} è un intervallo reale. Consideriamo poi la funzione $Bf : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$, $t \mapsto Bf(t)$. Allora, se f è continua anche Bf lo è e se f è derivabile anche Bf lo è. Inoltre*

$$(Bf)'(t) = Bf'(t), \quad t \in \mathbb{T}. \quad (4.1.7)$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla continuità degli operatori limitati e dalla definizione di derivata (eq. (2.3.1)). \square

Lemma 4.4 *L'operatore E commuta con ogni operatore deterministico chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Ripristiniamo per un momento la notazione \widehat{L} per indicare l'operatore deterministico in $L^p_{\mathcal{X}}$ associato a un operatore lineare L in \mathcal{X} . Sappiamo che L è chiuso se \widehat{L} lo è (lemma 3.8). Quindi, dal teorema 2.56 e dalla definizione di \widehat{L} per ogni $u \in \mathcal{D}(\widehat{L})$ si ha

$$E\widehat{L}u = \int_{\Omega} (\widehat{L}u)(\omega) d\mathbf{P}_{\omega} = \int_{\Omega} L u(\omega) d\mathbf{P}_{\omega} = L \int_{\Omega} u(\omega) d\mathbf{P}_{\omega} = \widehat{L}Eu.$$

il che dimostra che $Eu \in \mathcal{D}(\widehat{L})$ e la commutatività di E con \widehat{L} . \square

Prima di proseguire introduciamo la seguente convenzione. Se \mathbb{T} è un intervallo reale e g è una funzione $g : \mathbb{T} \rightarrow L^p_{\mathcal{X}}$, indichiamo con $\langle g \rangle$ la funzione

$$\langle g \rangle : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}, \quad t \mapsto \langle g(t) \rangle \quad (4.1.8)$$

e con g^* la funzione

$$g^* : \mathbb{T} \rightarrow L^p_{\mathcal{X}}, \quad t \mapsto (g(t))^*. \quad (4.1.9)$$

Possiamo allora provare il seguente

Teorema 4.5 *Se $f : \mathbb{T} \rightarrow L^p_{\mathcal{X}}$ è soluzione del problema (4.0.1), le funzioni $\langle f \rangle : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ e $f^* : \mathbb{T} \rightarrow L^p_{\mathcal{X}}$ soddisfano il seguente sistema in \mathcal{X}*

$$\begin{cases} \langle f \rangle'(t) = L\langle f \rangle(t) + \langle J \rangle \langle f \rangle(t) + \langle J^* f^* \rangle(t) + \langle q \rangle(t), & t \in \mathbb{T} \\ \langle f \rangle(0) = \langle \xi \rangle. \end{cases} \quad (4.1.10)$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché $E \in [L^p_{\mathcal{X}}]$, per il lemma 4.3 la funzione $\langle f \rangle$ è derivabile con continuità e si ha $Ef' = (Ef)' = \langle f \rangle'$. Poiché L genera semigruppato, dal teorema di Hille-Yosida, 2.23, sappiamo che L è chiuso e dunque dal lemma 4.4 segue che $\langle f \rangle(t) \in \mathcal{D}(L)$, con $ELf(t) = LEf(t) = L\langle f \rangle(t)$ per ogni $t \in \mathbb{T}$. Allora, se si applica l'operatore di aspettazione E ad entrambi i membri delle due uguaglianze che costituiscono il problema di evoluzione (4.0.1), usando le relazioni appena trovate e sfruttando la (4.1.6), si trova che $\langle f \rangle$ e f^* soddisfano il sistema (4.1.10). \square

L'approssimazione *atomic-mix* consiste nel sostituire a (4.1.10), che un sistema esatto ma "non chiuso" per la media $\langle f \rangle$, il sistema che si ottiene da (4.1.10) eliminando il termine $\langle J^* f^* \rangle$. Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} (\langle f \rangle^{(0)})'(t) = L\langle f \rangle^{(0)}(t) + \langle J \rangle \langle f \rangle^{(0)}(t) + \langle q \rangle(t), & t \in T, \\ \langle f \rangle^{(0)}(0) = \langle \xi \rangle, \end{cases} \quad (4.1.11)$$

che è un problema di evoluzione in \mathcal{X} per l'incognita $\langle f \rangle^{(0)}$. In (4.1.11) non possiamo usare il simbolo $\langle f \rangle$ perché la soluzione $\langle f \rangle^{(0)}$ di (4.1.11) sarà in generale solo un'approssimazione di $\langle f \rangle$, cioè di Ef , se f è la soluzione di (4.0.1).

Dunque, l'approccio *atomic-mix* consiste nell'approssimare J con $\langle J \rangle$, q con $\langle q \rangle$ e ξ con $\langle \xi \rangle$. Da un punto di vista più formale diremo che il procedimento che abbiamo seguito è consistito nella *proiezione* del problema di evoluzione (4.0.1) sul sottospazio \mathcal{X} .

In generale, se P è un proiettore da uno spazio di Banach \mathcal{X} su un sottospazio chiuso $\mathcal{Y} := P(\mathcal{X})$, chiamiamo *proiezione su \mathcal{Y}* di un problema di evoluzione in \mathcal{X} , il problema di evoluzione che si ottiene da questo con il seguente procedimento:

1. si applica l'operatore P a entrambi i membri delle due uguaglianze del sistema (equazione principale e condizione iniziale),
2. si chiude il sistema così ottenuto sostituendo l'incognita Pf all'incognita originaria f .

Il problema così proiettato è un problema di evoluzione nello spazio di Banach $P(\mathcal{X})$. La seguente osservazione è di verifica immediata.

Osservazione 4.6 *Se proiettiamo un problema di evoluzione su due sottospazi del tipo $P(\mathcal{X})$ e $(I-P)(\mathcal{X})$, dove P è un proiettore su un sottospazio chiuso, mettendo a sistema i due problemi di evoluzione così ottenuti, si ha un problema di evoluzione nello spazio $P(\mathcal{X}) \times (I-P)(\mathcal{X})$ che è equivalente al problema originario nello spazio \mathcal{X} .*

Tornando all'*atomic-mix*, si dimostra immediatamente che, nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione di (4.0.1) (teorema 3.34), il problema (4.1.11) ha un'unica soluzione stretta per ogni $\xi \in \mathcal{D}(L)$ (cioè $\mathcal{D}(\widehat{L})$). tale soluzione è data da

$$\langle f \rangle^{(0)}(t) := \mathcal{S}_{L+\langle J \rangle}(t)\langle \xi \rangle + \int_0^t \mathcal{S}_{L+\langle J \rangle}(t-s)\langle q \rangle(s) ds, \quad (4.1.12)$$

per ogni $t \in T$. D'altra parte la soluzione *esatta* del problema della media (cioè la media $\langle f \rangle$ della soluzione f di (4.0.1)) ha la seguente forma

$$\langle f \rangle(t) = \langle \mathcal{S}_{L+J}(t)\xi \rangle + \int_0^t \langle \mathcal{S}_{L+J}(t-s)q(s) \rangle ds \quad (4.1.13)$$

(dove si è sfruttato ancora una volta il teorema 2.56 per far passare la media dentro l'integrale).

Il “salto” che si compie quando si passa dalla descrizione esatta alla descrizione *atomic-mix* è rappresentato dalla differenza fra gli operatori

$$\langle \mathcal{S}_{L+J} \rangle \text{ e } \mathcal{S}_{L+\langle J \rangle},$$

ovvero *fra la media delle dinamiche e la dinamica generata dalla media* (si tenga presente, fra l'altro, che la media di un semigruppato, in generale, *non* è un semigruppato, [35]). Lo scopo dei metodi che descriveremo nelle sezioni successive sarà, in un certo senso, quello di colmare il salto fra $\langle \mathcal{S}_{L+J} \rangle$ e $\mathcal{S}_{L+\langle J \rangle}$, cercando delle descrizioni intermedie, più accurate dell'*atomic-mix* e più semplici della soluzione esatta.

4.2 Reticoli di Banach e operatori positivi

In questa sezione richiamiamo brevemente alcuni concetti fondamentali e risultati noti della teoria dei reticoli di Banach e degli operatori positivi. Tale teoria sarà utilizzata nella sezione successiva per stabilire una disuguaglianza fra gli operatori $\mathcal{S}_{L+\langle J \rangle}$ e $\langle \mathcal{S}_{L+J} \rangle$, che vale quando lo spazio di Banach \mathcal{X} ha la struttura supplementare di reticolo.

Definizione 4.7 *Uno spazio vettoriale \mathcal{X} su \mathbb{R} su cui è definita una relazione d'ordine \leq è detto spazio vettoriale ordinato se*

- a) *per ogni coppia $x, y \in \mathcal{X}$ tale che $x \leq y$ si ha $x + z \leq y + z$, per ogni $z \in \mathcal{X}$;*
- b) *per ogni coppia $x, y \in \mathcal{X}$ tale che $x \leq y$ si ha $\lambda x \leq \lambda y$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^+$.*

In uno spazio vettoriale ordinato \mathcal{X} l'insieme

$$\mathcal{X}^+ := \{x \in \mathcal{X} \mid x \geq 0\} \tag{4.2.1}$$

è detto *cono positivo* ed è un sottoinsieme convesso di \mathcal{X} (nella (4.2.1), 0 è l'elemento nullo di \mathcal{X}).

Definizione 4.8 *Uno spazio vettoriale ordinato \mathcal{X} , con la relazione d'ordine \leq è detto reticolo vettoriale se per ogni $x, y \in \mathcal{X}$ esistono gli elementi $x \vee y := \sup\{x, y\}$ e $x \wedge y := \inf\{x, y\}$.*

Dato un elemento x di un un reticolo vettoriale \mathcal{X} , si possono definire gli elementi

$$x^+ := x \vee 0, \quad x^- := (-x) \vee 0, \quad |x| := x^+ + x^-, \tag{4.2.2}$$

per cui si ha che $x = x^+ - x^-$ per ogni $x \in \mathcal{X}$, e che $x = x^+ = |x|$ se e solo se $x \in \mathcal{X}^+$.

Definizione 4.9 *Un reticolo vettoriale \mathcal{X} che sia anche uno spazio di Banach (reale) con la norma $\|\cdot\|$ è detto reticolo di Banach se*

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|. \quad (4.2.3)$$

Teorema 4.10 *In un reticolo di Banach*

- a) *le trasformazioni $x \mapsto x^+$, $x \mapsto x^-$, $x \mapsto |x|$, $(x, y) \mapsto x \vee y$, $(x, y) \mapsto x \wedge y$, sono continue;*
- b) *il cono positivo è chiuso;*
- c) $\|x\| = \||x|\|$, *per ogni $x \in \mathcal{X}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per i punti a) e b) si veda [53], cap. II, proposizione 5.2. Per il punto c), osserviamo che la (4.2.3) implica $\|x\| = \|y\|$ se $|x| = |y|$, il che, per $y := |x|$, ci dà $\|x\| = \||x|\|$. \square

L'esempio per noi fondamentale di reticolo di Banach è il seguente. Sia \mathcal{X} un reticolo di Banach separabile, con la relazione d'ordine \leq , e sia $\mathcal{M} := (\Sigma, \mathfrak{E}, \zeta)$ uno spazio di misura finita. Allora lo spazio $L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$, con $p \in [1, +\infty)$, è a sua volta un reticolo di Banach rispetto alla relazione d'ordine (indicata ancora con \leq):

$$f \leq g \Leftrightarrow f(s) \leq g(s) \text{ per quasi ogni } s \in \Sigma. \quad (4.2.4)$$

Ad esempio, in teoria del trasporto \mathcal{X} è uno spazio di funzioni L^1 a valori reali (si veda la sezione 5.1) e quindi è un reticolo di Banach indotto, tramite la (4.2.4) dall'ordinamento naturale di \mathbb{R} . In tale spazio gli elementi del cono positivo sono quelli per cui vale l'interpretazione fisica come distribuzioni di particelle.

Veniamo adesso a un risultato che stabilisce la proprietà di "positività" dell'integrale di Bochner.

Teorema 4.11 *Sia \mathcal{X} un reticolo di Banach separabile, $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di misura finita e $f : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ una funzione Bochner-integrabile e positiva quasi ovunque (ovvero tale che $f(\omega) \in \mathcal{X}^+$ per quasi ogni $\omega \in \Omega$). Allora*

$$\int_{\Omega} f(\omega) \, d\mu_{\omega} \in \mathcal{X}^+.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 2.51 esiste una successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni semplici tale che $\|\varphi_n(\omega) - f(\omega)\|$ tende decrescendo a zero per quasi ogni $\omega \in \Omega$. Per la continuità della trasformazione $x \mapsto |x|$ si ha allora che $|\varphi_n(\omega)|$ tende a $|f(\omega)| = f(\omega)$ per quasi ogni $\omega \in \Omega$. Inoltre $\||\varphi_n(\omega)|\| = \|\varphi_n(\omega)\| \leq \|f(\omega)\| + \|\varphi_n(\omega) - f(\omega)\|$. Poiché $\|\varphi_n(\omega) - f(\omega)\|$ decresce con n si ha quindi $\||\varphi_n(\omega)|\| \leq \|f(\omega)\| + \|\varphi_n(\omega) - f(\omega)\|$ per ogni n e per quasi ogni $\omega \in \Omega$. Per il teorema della convergenza dominata (teorema 2.55), la successione degli integrali delle funzioni $|\varphi_n|$ tende

all'integrale della f . Ma, fissato n , se $\sum_{k=0}^m \chi_{F_k}(\omega)x_k$ è una rappresentazione di φ_n tale che gli insiemi F_k sono disgiunti, si ha che

$$|\varphi_n(\omega)| = \sum_{k=0}^n \chi_{F_k}(\omega)|x_k| \in \mathcal{X}^+.$$

Perciò la successione degli integrali delle $|\varphi_n|$ è contenuta in \mathcal{X}^+ e dalla chiusura di \mathcal{X}^+ segue la tesi. \square

Nelle definizioni di spazio vettoriale ordinato, reticolo vettoriale e reticolo di Banach, abbiamo richiesto per \mathcal{X} la struttura di spazio vettoriale *reale*. Anche se questa struttura è la più naturale per elaborare la teoria dei reticoli di Banach tuttavia, come sottolineato nella sezione 2.1, l'esigenza di usare spazi di Banach *complessi* si presenta in modo altrettanto naturale quando si fa uso della teoria dei problemi di evoluzione. Non c'è però difficoltà ad estendere le definizioni alla complessificazione $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$ di uno spazio vettoriale reale \mathcal{X} . In particolare, si può dimostrare per ogni $z := x + iy \in \mathcal{X}_{\mathbb{C}}$ esiste

$$|z| := \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} |x \cos \theta + y \sin \theta| \in \mathcal{X}^+, \quad (4.2.5)$$

e tale definizione ci permette di definire anche z^+ , $z^- \in \mathcal{X}^+$, e, per ogni $z_1, z_2 \in \mathcal{X}_{\mathbb{C}}$, anche $z_1 \vee z_2, z_1 \wedge z_2 \in \mathcal{X}$. Con queste definizioni tutte le proprietà formali del caso reale si conservano. Se, inoltre, $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}$ è la complessificazione dello spazio di Banach \mathcal{X} , dotato della norma (2.1.8), si ha che anche in \mathcal{X} vale la proprietà (4.2.3) (per le dimostrazioni e per ulteriori dettagli rimandiamo a [53], cap. II, sez. 11).

Introduciamo ora il concetto fondamentale di *operatore positivo*.

Definizione 4.12 *Sia \mathcal{X} un reticolo di Banach. Un operatore lineare L in \mathcal{X} è detto positivo se*

$$Lx \in \mathcal{X}^+ \text{ per ogni } x \in \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{X}^+. \quad (4.2.6)$$

Se L è un operatore positivo, scriveremo $L \geq 0$. Se l'operatore $-L$ è positivo, allora diremo che L è *negativo* e scriveremo $L \leq 0$. Diremo poi che L ha *segno definito* se è positivo oppure negativo.

Per gli operatori positivi vale il seguente importante risultato.

Teorema 4.13 *Se B è un operatore positivo con $\mathcal{D}(B) = \mathcal{X}$, allora $B \in [\mathcal{X}]$ e*

$$\|B\| = \sup\{\|Bx\| \mid x \in \mathcal{X}^+, \|x\| = 1\}. \quad (4.2.7)$$

DIMOSTRAZIONE. Si veda [53], cap. II, teorema 5.3. \square

Se \mathcal{X} è un reticolo di Banach, allora $[\mathcal{X}]$ ammette la relazione d'ordine

$$B_1 \leq B_2 \Leftrightarrow B_2 - B_1 \geq 0, \quad (4.2.8)$$

cioè si dice che B_2 è maggiore di B_1 se $B_2 - B_1$ è positivo. Tale relazione d'ordine rende $[\mathcal{X}]$ uno spazio vettoriale ordinato, il cui cono positivo $[\mathcal{X}]^+$ è l'insieme degli operatori limitati positivi. Tuttavia, in generale, $[\mathcal{X}]$ non avrà la struttura di reticolo di Banach. Per poter affermare ciò occorrono ulteriori ipotesi su \mathcal{X} (si veda [53], cap. IV, teorema 1.5). Osserviamo che la (4.2.8) significa che $B_2x - B_1x \in \mathcal{X}^+$ per ogni $x \in \mathcal{X}^+$.

Possiamo estendere la relazione d'ordine appena definita anche agli operatori lineari ponendo

$$L_1 \leq L_2 \Leftrightarrow (L_2 - L_1)x \geq 0, \quad x \in \mathcal{D}(L_1) \cap \mathcal{D}(L_2) \cap \mathcal{X}^+, \quad (4.2.9)$$

il che ci sarà utile soprattutto per snellire le notazioni.

In molte applicazioni della teoria dei semigruppri gli elementi dello spazio di Banach \mathcal{X} rappresentano possibili *stati* di un sistema fisico. Quando lo stato è la distribuzione di una grandezza positiva, come temperatura, densità di particelle o di individui di una popolazione, eccetera, solo gli elementi di \mathcal{X}^+ hanno significato fisico diretto. Pertanto, se l'evoluzione del sistema è modellizzata da un problema di evoluzione in \mathcal{X} , le soluzioni che interessano sono quelle che, partendo da un dato iniziale in \mathcal{X}^+ , rimangono in \mathcal{X}^+ in tutti gli istanti successivi. Questo significa il semigruppri di operatori che determina la dinamica deve essere un semigruppri di operatori *positivi*, [38].

Definizione 4.14 *Sia \mathcal{X} un reticolo di Banach. Un semigruppri continuo in senso forte $\mathcal{S} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [\mathcal{X}]$ si dice positivo se $\mathcal{S}(t) \in [\mathcal{X}]^+$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$.*

I due lemmi seguenti saranno utilizzati nella sezione successiva.

Lemma 4.15 *Sia \mathcal{X} un reticolo di Banach e sia $L \in \mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$. Allora il semigruppri \mathcal{S}_L è positivo se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda > \beta$, l'operatore risolvente $R(\lambda, L) \in [\mathcal{X}]$ è positivo.*

DIMOSTRAZIONE. Se, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda > \beta$, $R(\lambda, L) \in [\mathcal{X}]^+$, dal teorema 2.27 e dal fatto che \mathcal{X}^+ è chiuso, segue che $\mathcal{S}_L(t) \in [\mathcal{X}]^+$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$.

Viceversa, supponiamo che \mathcal{S}_L sia positivo. Poiché vale la (2.3.12), dal teorema 4.11 (che si estende facilmente al caso dell'integrale su $[0, +\infty)$ come limite di integrali su intervalli finiti) segue che $R(\lambda, L) \in [\mathcal{X}]^+$. \square

Lemma 4.16 *Siano G e H due operatori lineari in un reticolo di Banach \mathcal{X} con lo stesso dominio \mathcal{D} , e sia $B \in [\mathcal{X}]$ tale che $Bx \in \mathcal{D}$ per ogni $x \in \mathcal{D}$. Supponiamo che G e H siano invertibili con $G^{-1}, H^{-1} \in [\mathcal{X}]^+$. Allora, $HB \geq BG$ implica $BG^{-1} \geq H^{-1}B$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in \mathcal{X}^+$ e sia $y \in \mathcal{D}$ tale che $x = Gy$ (per cui $y = G^{-1}x \in \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{D}$). Allora $(BG^{-1} - H^{-1}B)x = (BG^{-1} - H^{-1}B)Gy = By - H^{-1}BGy$. Poiché

$By \in \mathcal{D}$ per ipotesi, possiamo scrivere $By - H^{-1}BGy = H^{-1}(HB - BG)y$. Ma $H^{-1}(HB - BG)y \geq 0$ perché, sempre per ipotesi, $H^{-1} \geq 0$, e $(HB - GB)y \geq 0$. Pertanto si è dimostrato che $(BG^{-1} - H^{-1}B)x \geq 0$ per ogni $x \in \mathcal{X}^+$, ovvero $BG^{-1} \geq H^{-1}B$. \square

4.3 Disuguaglianza di Jensen per il semigruppato aleatorio

In questa sezione torniamo al problema di evoluzione (4.0.1) e dimostriamo che, se lo spazio \mathcal{X} ha una struttura di reticolo di Banach, e sotto opportune ipotesi su L e J , vale una disuguaglianza del tipo

$$\mathcal{S}_{L+\langle J \rangle}(t) \leq \langle \mathcal{S}_{L+J} \rangle(t), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (4.3.1)$$

L'equazione (4.3.1), il cui significato sarà precisato fra breve, ci dice che la soluzione *atomic-mix* è "minore" della soluzione esatta. Nel contesto del modello del trasporto di radiazione, come vedremo meglio nel capitolo 5, il significato della (4.3.1) è il seguente: *a parità di spessore ottico medio, la radiazione è attenuata di più da un mezzo uniforme che non da un mezzo clumpy; in altre parole, la soluzione esatta è più luminosa della soluzione atomic-mix.*

Se usiamo la tipica notazione esponenziale per i semigruppato, la (4.3.1) si scrive nel seguente modo

$$e^{t(L+\langle J \rangle)} \leq \langle e^{t(L+J)} \rangle, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.3.2)$$

da cui appare più evidente che l'analogia tra la (4.3.1) e la disuguaglianza di Jensen per l'esponenziale

$$e^{t\langle \varphi \rangle} \leq \langle e^{t\varphi} \rangle, \quad (4.3.3)$$

dove $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione integrabile, [49].

Precisiamo il significato della disuguaglianza (4.3.1). Prima di tutto, adottiamo l'interpretazione di J come variabile aleatoria a valori in $[\mathcal{X}]$ (sappiamo che è Bochner-integrabile e riguardiamo $\langle J \rangle$ come operatore limitato su \mathcal{X}). Come osservato nella sezione 3.6 (osservazione 3.35), per ogni fissato $t \in \mathbb{R}^+$ la funzione $\omega \mapsto \mathcal{S}_{L+J(\omega)}(t)$ è anch'essa una variabile aleatoria Bochner-integrabile a valori in $[\mathcal{X}]$ e il suo integrale di Bochner è l'operatore $\langle \mathcal{S}_{L+J} \rangle(t)$ definito dalla 3.6.16.

Dunque, se lo spazio di Banach \mathcal{X} ha la struttura di *reticolo* rispetto a una relazione d'ordine \leq , il significato della (4.3.1) è che, per ogni fissato $t \in \mathbb{R}^+$, l'operatore $\langle \mathcal{S}_{L+J} \rangle(t) \in [\mathcal{X}]$ è maggiore dell'operatore $\mathcal{S}_{L+\langle J \rangle}(t) \in [\mathcal{X}]$, secondo la relazione d'ordine (4.2.8).

Teorema 4.17 *Supponiamo che \mathcal{X} abbia la struttura di reticolo di Banach. Se $L + \langle J \rangle$ genera un semigruppato positivo e se, per ogni $\lambda > \beta + M\beta_0$,*

$$R(\lambda, L + \langle J \rangle)J^*(\omega) \leq R(\lambda, L + J(\omega))J^*(\omega), \quad q. c. \omega \in \Omega, \quad (4.3.4)$$

allora vale la disuguaglianza (4.3.1).

DIMOSTRAZIONE. Introduciamo per brevità la seguente notazione: con $C(\omega)$ e $\langle C \rangle$ indichiamo rispettivamente gli operatori $L + J(\omega)$ e $L + \langle J \rangle$ (sul dominio $\mathcal{D}(L)$). Sappiamo che, per ogni $\lambda > \beta + M\beta_0$, esistono gli operatori risolvanti $R(\lambda, \langle C \rangle)$, $R(\lambda, C(\omega)) \in [\mathcal{X}]$, per ogni $\omega \in \Omega$. Inoltre, poiché per ipotesi $\langle C \rangle$ e genera semigruppato positivo, si ha che i risolvanti $R(\lambda, \langle C \rangle)$, con $\lambda > \beta + M\beta_0$, sono operatori positivi (lemma 4.15).

Fissiamo $\lambda > \beta + M\beta_0$. Sommando l'identità I alla disuguaglianza (4.3.4), per le proprietà elementari dei reticoli di Banach si ha

$$I + R(\lambda, \langle C \rangle)J^*(\omega) \leq R(\lambda, C(\omega))J^*(\omega) + I \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega.$$

Componendo la precedente disuguaglianza con l'operatore $R(\lambda, \langle C \rangle)$, che è un operatore positivo, si ottiene ancora

$$R(\lambda, \langle C \rangle) + R(\lambda, \langle C \rangle)J^*(\omega)R(\lambda, \langle C \rangle) \leq R(\lambda, C(\omega))J^*(\omega)R(\lambda, \langle C \rangle) + R(\lambda, \langle C \rangle),$$

che vale, al solito, quasi certamente. Ma $R(\lambda, C(\omega))J^*(\omega)R(\lambda, \langle C \rangle) = R(\lambda, C(\omega))[(\lambda - \langle C \rangle) - (\lambda - C(\omega))]R(\lambda, \langle C \rangle) = R(\lambda, C(\omega)) - R(\lambda, \langle C \rangle)$ e dunque

$$R(\lambda, \langle C \rangle) + R(\lambda, \langle C \rangle)J^*(\omega)R(\lambda, \langle C \rangle) \leq R(\lambda, C(\omega)), \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega. \quad (4.3.5)$$

Integrando su Ω entrambi i membri della (4.3.5), ricordando che $\langle J^* \rangle = 0$ e che $R(\lambda, \langle C \rangle)$ può essere portato fuori dall'integrale (teorema 2.56), si ottiene la disuguaglianza $R(\lambda, \langle C \rangle) \leq \langle R(\lambda, C) \rangle$, che riscritta in notazione estesa è la seguente

$$[\lambda - (L + \langle J \rangle)]^{-1} \leq \langle [\lambda - (L + J)]^{-1} \rangle. \quad (4.3.6)$$

Osserviamo che per poter scrivere la (4.3.6) si deve prima dimostrare che la funzione

$$R(\lambda, C) : \Omega \rightarrow [\mathcal{X}], \quad R(\lambda, C)(\omega) := R(\lambda, C(\omega))$$

è una variabile aleatoria a valori in $[\mathcal{X}]$, Bochner-integrabile. Questo lo si può vedere nel modo seguente. Torniamo alle notazioni introdotte nelle sezioni 3.3 e 3.6. Identificando la variabile aleatoria $C(\omega) := L + J(\omega)$ con l'operatore $\tilde{C} := \widehat{L} + \tilde{J}$, sappiamo che \tilde{C} ammette risolvante $R(\lambda, \tilde{C})$, per il nostro λ fissato. Posto $[\widetilde{R(\lambda, C)u}](\omega) := R(\lambda, C(\omega))u(\omega)$ si dimostra facilmente che

$$\widetilde{R(\lambda, C)\tilde{C}}v = v, \quad \tilde{C}\widetilde{R(\lambda, C)u} = u,$$

per ogni $v \in \mathcal{D}(\widehat{L})$, $u \in L_x^p$ e dunque $\widetilde{R(\lambda, C)} = R(\lambda, \tilde{C}) \in [L_x^p]$. Da ciò si deduce subito che $R(\lambda, C)$ è una variabile aleatoria a valori in $[\mathcal{X}]$, Bochner-integrabile.

Fissato $t \in \mathbb{R}^+$, dalla disuguaglianza (4.3.6) segue facilmente che

$$[I - \frac{t}{n}(L + \langle J \rangle)]^{-n} x \leq \langle [I - \frac{t}{n}(L + J)]^{-n} \rangle x \quad (4.3.7)$$

per ogni $n > t(\beta + M\beta_0)$ e per ogni $x \in \mathcal{X}^+$. Dunque, la disuguaglianza (4.3.1) segue dal teorema 2.27 e dal fatto che \mathcal{X}^+ è chiuso. \square

Osserviamo che la dimostrazione appena effettuata sfrutta una sorta di “convessità” della trasformazione $C \mapsto R(\lambda, C) \in [\mathcal{X}]^+$. La (4.3.5) è l’analogo della disuguaglianza reale

$$\frac{1}{\lambda - \langle c \rangle} + \frac{c - \langle c \rangle}{(\lambda - \langle c \rangle)^2} \leq \frac{1}{\lambda - c}, \quad c, \langle c \rangle \leq \lambda$$

che esprime il fatto che il ramo positivo dell’iperbole $\frac{1}{\lambda - c}$ sta al di sopra della sua retta tangente in $\langle c \rangle$. Scrivendo poi la disuguaglianza (4.3.4) nel seguente modo:

$$\left[R(\lambda, L + J(\omega)) - R(\lambda, L + \langle J \rangle) \right] \left(J(\omega) - \langle J \rangle \right) \geq 0, \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega \quad (4.3.8)$$

possiamo anche osservare che questa esprime una proprietà di “monotonia” rispetto a $J(\omega)$ della famiglia di risolventi

$$\left\{ R(\lambda, L + J(\omega)) \mid \omega \in \Omega \right\}. \quad (4.3.9)$$

I seguenti corollari illustrano due situazioni in cui il teorema 4.17 può essere applicato.

Corollario 4.18 *Supponiamo che $L + \langle J \rangle$ e $L + J(\omega)$ (per q. c. $\omega \in \Omega$) generino un semigruppato positivo. Allora se $J^*(\omega)$ ha quasi certamente segno definito, vale la disuguaglianza (4.3.1).*

DIMOSTRAZIONE. Con la stessa notazione usata nella dimostrazione del teorema 4.17, per ogni $\lambda > \beta + M\beta_0$ e per quasi ogni $\omega \in \Omega$ esistono gli operatori risolventi $R(\lambda, \langle C \rangle), R(\lambda, C(\omega)) \in [\mathcal{X}]$. Inoltre, poiché per ipotesi $\langle J \rangle$ e $J(\omega)$ generano semigruppato positivi, si ha che i suddetti risolventi sono operatori positivi (lemma 4.15). Fissiamo $\lambda > \beta + M\beta_0$. Per ipotesi $J^*(\omega)$ ha quasi certamente segno definito. Perciò, per ogni $x \in \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{X}^+$, se $J^*(\omega) \geq 0$ si ha

$$(\lambda - \langle C \rangle)x - (\lambda - C(\omega))x = J^*(\omega)x \geq 0 \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega,$$

per cui $(\lambda - \langle C \rangle) \geq (\lambda - C(\omega))$, mentre se $J^*(\omega) \leq 0$ si ha

$$(\lambda - \langle C \rangle)x - (\lambda - C(\omega))x = J^*(\omega)x \leq 0 \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega,$$

per cui $(\lambda - \langle C \rangle) \leq (\lambda - C(\omega))$. Dal lemma 4.16 (con $B = I$) segue allora che

$$\begin{cases} R(\lambda, C(\omega)) \geq R(\lambda, \langle C \rangle), & \text{se } J^*(\omega) \geq 0; \\ R(\lambda, C(\omega)) \leq R(\lambda, \langle C \rangle), & \text{se } J^*(\omega) \leq 0; \end{cases}$$

per q. c. $\omega \in \Omega$. Ma allora vale la disuguaglianza (4.3.4) e quindi le ipotesi del teorema 4.17 sono soddisfatte. \square

Corollario 4.19 *Supponiamo che $L + \langle J \rangle$ e $L + J(\omega)$ (per q. c. $\omega \in \Omega$) generino un semigruppato positivo. Se le seguenti ipotesi*

- i) $J(\omega)x$ e $\langle J \rangle x$ appartengono a $\mathcal{D}(L)$ per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$;
- ii) $J(\omega)\langle J \rangle = \langle J \rangle J(\omega)$
- iii) $J(\omega)Lx = LJ(\omega)x$ per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$;
- iv) $[J^*(\omega)]^2 \geq 0$;

sono soddisfatte per q. c. $\omega \in \Omega$, allora vale la disuguaglianza (4.3.1).

DIMOSTRAZIONE. Come abbiamo osservato nel precedente corollario, per ogni $\lambda > \beta + M\beta_0$ e per quasi ogni $\omega \in \Omega$ esistono i risolventi $R(\lambda, \langle C \rangle)$, $R(\lambda, C(\omega)) \in [\mathcal{X}]$ e sono operatori positivi. Inoltre, per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$, si ha

$$(\lambda - \langle C \rangle)J^*(\omega)x - J^*(\omega)(\lambda - C(\omega))x = [J^*(\omega)]^2x \geq 0,$$

dove si sono sfruttate le ipotesi (iii) e (iv). Dal lemma 4.16 segue quindi

$$J^*(\omega)R(\lambda, L + J(\omega)) \geq R(\lambda, L + \langle C \rangle)J^*(\omega), \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega. \quad (4.3.10)$$

Ora, poiché L è chiuso, dalle ipotesi (i) e (iii), e dal teorema 2.56, segue che $\langle J \rangle Lx = L\langle J \rangle x$ per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$. Tenuto conto anche dell'ipotesi (ii) si ha quindi che $J^*(\omega)Cx = CJ^*(\omega)x$ per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$ e per q. c. $\omega \in \Omega$. Si ha allora $J^*(\omega) = J^*(\omega)(\lambda - C(\omega))R(\lambda, C(\omega)) = (\lambda - C(\omega))J^*(\omega)R(\lambda, C(\omega))$ da cui

$$R(\lambda, C(\omega))J^*(\omega) = J^*(\omega)R(\lambda, C(\omega)), \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega. \quad (4.3.11)$$

Pertanto la (4.3.10) si trasforma nella (4.3.4) e le ipotesi del teorema 4.17 sono soddisfatte. \square

Se lo spazio \mathcal{X} è un reticolo di Banach, abbiamo visto nella sezione precedente che anche $L_{\mathcal{X}}^p$ è un reticolo di Banach per l'ordinamento definito dalla (4.2.4). Pertanto, rileggendo la (4.3.1) come disuguaglianza fra operatori *deterministici* su $L_{\mathcal{X}}^p$, quello che si può dire subito è che, nelle ipotesi del teorema 4.17,

$$\mathcal{S}_{L+\langle J \rangle}(t)x \leq \langle \mathcal{S}_{L+J} \rangle(t)x, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.3.12)$$

per ogni $x \in \mathcal{X}^+ \subset L_{\mathcal{X}}^p$. Come conseguenza si ha che, nelle ipotesi del teorema 4.17 e per dati iniziali e termini di sorgente *deterministici e positivi*, fra la soluzione esatta $\langle f \rangle$ del problema della media e la soluzione *atomic-mix* $\langle f \rangle^{(0)}$, date rispettivamente dalla formule (4.1.13) e (4.1.12), vale la disuguaglianza

$$\langle f \rangle^{(0)}(t) \leq \langle f \rangle(t), \quad t \in T. \quad (4.3.13)$$

Per dati iniziali e termini di sorgente aleatori la disuguaglianza (4.3.13) non è assicurata. Tuttavia, dal lemma 4.2 e dalla (4.3.12) segue (con notazione ovvia)

$$\langle \mathcal{S}_{L+J}(t) u \rangle = \langle \mathcal{S}_{L+J} \rangle(t) \langle u \rangle + \langle \mathcal{S}_{L+J}^*(t) u^* \rangle \geq \mathcal{S}_{L+\langle J \rangle}(t) \langle u \rangle + \langle \mathcal{S}_{L+J}^*(t) u^* \rangle$$

per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ e per ogni $u \in L_x^{p+}$. Questo significa che se $u \in L_x^{p+}$ è tale che

$$\langle \mathcal{S}_{L+J}^*(t) u^* \rangle \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.3.14)$$

allora vale la disuguaglianza

$$\mathcal{S}_{L+\langle J \rangle}(t) \langle u \rangle \leq \langle \mathcal{S}_{L+J}(t) u \rangle \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (4.3.15)$$

Pertanto la (4.3.13) continua a valere per dati iniziali $\xi \in L_x^{p+}$ e termini di sorgente $q(t) \in L_x^{p+}$ tali che $\langle \mathcal{S}_{L+J}^*(t) \xi^* \rangle \geq 0$ e $\langle \mathcal{S}_{L+J}^*(t) q^*(t) \rangle \geq 0$ per ogni $t \in T$.

4.4 Il metodo dello “smoothing”

Il metodo dello *smoothing* è l’approccio standard al problema della media in teoria del trasporto stocastico (si veda [45], e i riferimenti bibliografici in esso contenuti). Tale metodo sembra adattarsi particolarmente bene ad una descrizione probabilistica di tipo *line process* (sezione 1.4) e per fenomeni di trasporto stazionari in cui l’assorbimento prevale sullo scattering. Nel caso di descrizione *line process* con una catena di Markov omogenea rispetto al parametro si ottengono addirittura soluzioni esplicite. Da un punto di vista strettamente formale, il metodo è molto flessibile e si applica, come vedremo tra breve, ad un problema di evoluzione aleatorio di forma piuttosto generale com’è quello espresso dalla (4.0.1). Di fatto, però, fuori dalle condizioni particolari sopra richiamate, esso conduce a gerarchie di equazioni di difficile controllo, sia analitico che numerico, e di lenta convergenza alla soluzione esatta.

Per quanto riguarda l’applicazione astrofisica, il metodo dello *smoothing* viene utilizzato in [15], dove la descrizione probabilistica della nube è di tipo *line process*. È stato poi adattato al modello *f.i.a.* (sez. 1.5) in [12] ed infine esteso al caso dipendente dal tempo in [51].

In questa sezione diamo una presentazione esclusivamente formale del metodo.

Torniamo al sistema (4.1.10). Da esso, trascurando il termine $\langle J^* f^* \rangle$ abbiamo dedotto il modello *atomic-mix*, eq. (4.1.11). Il termine $\langle J^* f^* \rangle$ si presenta dunque come “correzione” alla descrizione *atomic-mix*. Il metodo dello *smoothing* consiste esattamente nello stimare questo termine, approssimandolo con una serie di operatori che agiscono su $\langle f \rangle$, e quindi con una gerarchia di problemi di evoluzione “chiusi” per $\langle f \rangle$.

Se proiettiamo il sistema (4.0.1) secondo la decomposizione (4.1.1), ottenendo una coppia di problemi di evoluzione per le incognite $\langle f \rangle$ e f^* che è equivalente a

(4.0.1) (osservazione 4.6). Il primo è dato dalla (4.1.10), mentre il secondo è

$$\begin{cases} (f^*)'(t) = Lf^*(t) + E^*J(f^*(t) + \langle f \rangle(t)) + q^*(t), & t \in \mathbb{T} \\ f^*(0) = \xi^*. \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Per il teorema 2.29, nelle ipotesi su ξ e su q che danno esistenza e unicità della soluzione di (4.0.1), la coppia $(\langle f \rangle, f^*)$ è soluzione stretta del sistema (4.1.10) + (4.4.1) se e solo se è soluzione continua della corrispondente versione integrale:

$$\langle f \rangle(t) = \mathcal{S}_L(t)\langle \xi \rangle + \int_0^t \mathcal{S}_L(t-s) \left[EJ(f^*(s) + \langle f \rangle(s)) + \langle q \rangle(s) \right] ds, \quad t \in \mathbb{T}, \quad (4.4.2)$$

$$f^*(t) = \mathcal{S}_L(t)\xi^* + \int_0^t \mathcal{S}_L(t-s) \left[E^*J(f^*(s) + \langle f \rangle(s)) + q^*(s) \right] ds, \quad t \in \mathbb{T}. \quad (4.4.3)$$

Interpretiamo quindi (4.4.2) e (4.4.3) come due equazioni accoppiate di tipo Volterra nello spazio vettoriale $C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$ delle funzioni continue $g : \mathbb{T} \rightarrow L_{\mathcal{X}}^p$ (non necessariamente limitate). Per facilitare le manipolazioni algebriche introduciamo una notazione di tipo “convoluzione”. Se $g \in C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$, definiamo $\mathcal{S}_L \star g \in C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$ nel modo seguente:

$$(\mathcal{S}_L \star g)(t) := \int_0^t \mathcal{S}_L(t-s)g(s) ds, \quad t \in \mathbb{T} \quad (4.4.4)$$

(non è difficile verificare che effettivamente $\mathcal{S}_L \star g \in C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$ se $g \in C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$). Il sistema di equazioni di Volterra si riscrive allora in forma compatta:

$$\begin{cases} \langle f \rangle = \mathcal{S}_L \langle \xi \rangle + \mathcal{S}_L \star EJ \langle f \rangle + \mathcal{S}_L \star EJ f^* + \mathcal{S}_L \star \langle q \rangle \\ f^* = \mathcal{S}_L \xi^* + \mathcal{S}_L \star E^* J \langle f \rangle + \mathcal{S}_L \star E^* J f^* + \mathcal{S}_L \star q^* \end{cases} \quad (4.4.5)$$

dove con $\mathcal{S}_L \xi^*$ e $\mathcal{S}_L \langle \xi \rangle$ abbiamo indicato le funzioni $t \mapsto \mathcal{S}_L(t)\xi^*$ e $t \mapsto \mathcal{S}_L(t)\langle \xi \rangle$. Definiamo ora la trasformazione lineare $H : C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p) \rightarrow C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$ nel modo seguente:

$$Hg := \mathcal{S}_L \star E^* Jg, \quad g \in C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p) \quad (4.4.6)$$

e dimostriamo che $I - H$ è un isomorfismo lineare dello spazio vettoriale $C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$ in sé. A questo scopo ricordiamo il *lemma di Gronwall-Bellmann*.

Lemma 4.20 *Siano $a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ e $b : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue e $\epsilon \in \mathbb{R}$ una costante. Se*

$$b(t) \leq \int_0^t a(s)b(s) ds + \epsilon$$

per ogni $t \in \mathbb{T}$, allora

$$b(t) \leq \epsilon \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right).$$

DIMOSTRAZIONE. Si veda [52]. cap. 1, sez. 2.1. □

Lemma 4.21 *L'operatore lineare $I - H : C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p) \rightarrow C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$ è biiettivo.*

DIMOSTRAZIONE. Si dimostra facilmente che H è una trasformazione lineare di $C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$ in sé. Dimostriamo che, per ogni $v \in C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$, l'equazione di Volterra

$$g = Hg + v \quad (4.4.7)$$

ha un'unica soluzione $g \in C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$.

Se con H^k , $k \in \mathbb{N}_0$, indichiamo la trasformazione H iterata k volte (dove $H^0 := I$), dimostriamo innanzitutto che, per ogni $v \in C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in \mathbb{T}$ vale la seguente stima

$$\|(H^k v)(t)\| \leq (M\beta_0)^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^t e^{\beta(t-s)} \|v(s)\| ds, \quad (4.4.8)$$

dove, per brevità, con $\|\cdot\|$ si è indicata la norma $\|\cdot\|_p$ di $L_{\mathcal{X}}^p$. Si procede per induzione. Per $k = 1$ si ha

$$\|(Hv)(t)\| \leq \int_0^t \|\mathcal{S}_L(t-s)E^*Jv(s)\| ds \leq M\beta_0 \int_0^t e^{\beta(t-s)} \|v(s)\| ds, \quad (4.4.9)$$

dove si è sfruttato il fatto che $L \in \mathcal{G}(M, \beta, L_{\mathcal{X}}^p)$ e che $E^*, J \in [L_{\mathcal{X}}^p]$, con $\|E^*\| = 1$ e $\|J\| \leq \beta_0$. Ora supponiamo che la (4.4.8) sia vera per un certo k e dimostriamola per $k + 1$. Si ha

$$\begin{aligned} \|(H^{k+1}v)(t)\| &\leq M\beta_0 \int_0^t e^{\beta(t-\tau)} \|(H^k v)(\tau)\| d\tau \\ &\leq (M\beta_0)^{k+1} \int_0^t \int_0^\tau \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} e^{\beta(t-\tau)} e^{\beta(\tau-s)} \|v(s)\| ds d\tau \\ &\leq (M\beta_0)^{k+1} \int_0^t \left\{ \int_0^t \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} d\tau \right\} e^{\beta(t-s)} \|v(s)\| ds \end{aligned}$$

che ci dà la (4.4.8) per $k + 1$, per cui la prova per induzione è completata.

Consideriamo allora

$$g(t) := \sum_{k=0}^{\infty} (H^k v)(t), \quad t \in \mathbb{T}. \quad (4.4.10)$$

Fissato $t \in \mathbb{T}$, dalla (4.4.8) segue che

$$\|(H^k v)(s)\| \leq \frac{(M\beta_0 t)^k}{(k-1)!} e^{\beta t} \sup_{s \in [0, t]} \|v(s)\|, \quad s \in [0, t], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.4.11)$$

Perciò la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (H^k v)(t)$ è totalmente convergente in $L_{\mathcal{X}}^p$, uniformemente rispetto a t in ogni intervallo limitato contenuto in \mathbb{T} . Dunque la (4.4.10) definisce

effettivamente una funzione $g \in C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$. Inoltre g è soluzione dell’equazione (4.4.7). Infatti, posto $g_n := \sum_{k=0}^n H^k v$, si ha

$$\begin{aligned} \|g(t) - (Hg)(t) - v(t)\| &\leq \|g(t) - g_n(t)\| + \|g_n(t) - (Hg)(t) - v(t)\| \\ &= \|g(t) - g_n(t)\| + \|[H(g_n - g)](t)\|, \end{aligned}$$

per ogni $t \in \mathbb{T}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. Il termine $\|g(t) - g_n(t)\|$ tende chiaramente a zero. Anche il termine $\|[H(g_n - g)](t)\|$ tende a zero, come segue dalla stima (4.4.11), per $k = 1$ e $v = g_n - g$, e dal fatto che la convergenza di $g_n(t)$ a $g(t)$ è uniforme sugli intervalli limitati. Rimane da dimostrare che la soluzione è unica. Se g_1 e g_2 sono due soluzioni dell’eq. (4.4.7), allora $g_1 - g_2 = H(g_1 - g_2)$ e dalla (4.4.9) segue

$$\|[H(g_1 - g_2)](t)\| \leq M\beta_0 \int_0^t e^{\beta(t-s)} \|(g_1 - g_2)(s)\| ds,$$

per cui si ha $g_1(t) - g_2(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{T}$, come semplice corollario del lemma di Gronwall-Bellmann.

Pertanto l’eq. (4.4.7) ha, per ogni $v \in C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$, un’unica soluzione g data dalla (4.4.10), il che significa che l’operatore $I - H$ è biiettivo e che $g = (I - H)^{-1}v$. \square

Poiché la seconda equazione del sistema (4.4.5) può essere riscritta nel seguente modo

$$f^* - Hf^* = H\langle f \rangle + \mathcal{S}_L \xi^* + \mathcal{S}_L \star q^*, \quad (4.4.12)$$

il lemma appena dimostrato ci dice che il sistema (4.4.5) è equivalente a un sistema in cui la seconda equazione è sostituita da

$$f^* = \sum_{k=1}^{\infty} H^k \langle f \rangle + \sum_{k=0}^{\infty} H^k (\mathcal{S}_L \xi^* + \mathcal{S}_L \star q^*). \quad (4.4.13)$$

In sostanza, siamo riusciti a esplicitare la dipendenza di f^* da $\langle f \rangle$. Ora possiamo sostituire l’espressione di f^* data dall’eq. (4.4.13) nella prima delle (4.4.5). Tenuto conto che la serie (4.4.10) converge uniformemente rispetto a t su intervalli limitati, per cui il simbolo di sommatoria “commuta” con gli operatori limitati e con il simbolo di integrale, effettuando la sostituzione otteniamo la seguente equazione chiusa per $\langle f \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle f \rangle &= \mathcal{S}_L \langle \xi \rangle + \mathcal{S}_L \star EJ \langle f \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_L \star EJH^k \langle f \rangle \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_L \star EJH^k \mathcal{S}_L \xi^* + \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_L \star EJH^k (\mathcal{S}_L \star q^*) + \mathcal{S}_L \star \langle q \rangle, \end{aligned}$$

che riscritta in modo più ordinato si presenta nella forma

$$\langle f \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_L \star EJH^k \langle f \rangle + V(t), \quad (4.4.14)$$

dove V è un termine noto dato da

$$V(t) := \mathcal{S}_L \langle \xi \rangle + \mathcal{S}_L \star \langle q \rangle + \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_L \star EJH^k \mathcal{S}_L \xi^* + \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_L \star EJH^k (\mathcal{S}_L \star q^*). \quad (4.4.15)$$

Teorema 4.22 *Nelle ipotesi su ξ e su q che danno esistenza e unicità della soluzione di (4.0.1), l'equazione (4.4.14) è un'equazione esatta per $\langle f \rangle$, nel senso che se $\langle f \rangle \in C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$ è una soluzione di (4.4.14) e $f : \mathbb{T} \rightarrow L_{\mathcal{X}}^p$ è una soluzione stretta di (4.0.1), allora si ha che $\langle f \rangle(t) = Ef(t)$ per ogni $t \in \mathbb{T}$.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già osservato che, nelle dette ipotesi su ξ e q , se $f : \mathbb{T} \rightarrow L_{\mathcal{X}}^p$ è soluzione stretta di (4.0.1), allora (Ef, E^*f) è soluzione in $C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$ del sistema (4.4.5) ed Ef è soluzione in $C(\mathbb{T}, L_{\mathcal{X}}^p)$ dell'eq. (4.4.14). Poiché la soluzione di (4.4.14) è unica (come si dimostra facilmente usando il lemma di Gronwall-Belmann), si ha che, se $\langle f \rangle$ è soluzione di (4.4.14), necessariamente $\langle f \rangle = Ef$. \square

Approssimando la sommatoria che compare nell'equazione (4.4.14) (e, volendo, anche le sommatorie che compaiono nell'espressione di V) con una somma finita, si ottiene una “gerarchia” di equazioni per $n \in \mathbb{N}_0$

$$\langle f \rangle^{(n)} = \sum_{k=0}^n \mathcal{S}_L \star EJH^k \langle f \rangle^{(n)} + V(t), \quad (4.4.16)$$

L'equazione (4.4.16) è un'approssimazione “di ordine n ” dell'equazione esatta (4.4.14). Questo è stabilito in modo rigoroso dal teorema seguente.

Teorema 4.23 *Se la funzione $\langle f \rangle : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ è soluzione continua dell'equazione (4.4.14) e, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, la funzione $\langle f \rangle^{(n)} : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ è soluzione continua dell'equazione (4.4.16), allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \rangle^{(n)}(t) = \langle f \rangle(t) \quad (4.4.17)$$

per ogni $t \in \mathbb{T}$. Inoltre la convergenza è uniforme in intervalli limitati contenuti in \mathbb{T} .

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $t \in \mathbb{T}$. Dalla (4.4.14) e dalla (4.4.16), per disuguaglianza triangolare, si ha

$$\|\langle f \rangle(t) - \langle f \rangle^{(n)}(t)\| \leq \int_0^t \left\| \mathcal{S}_L(t-s)EJ \left[(I-H)^{-1} \langle f \rangle - \sum_{k=0}^n H^k \langle f \rangle \right](s) \right\| ds$$

$$+ \int_0^t \left\| \mathcal{S}_L(t-s) EJ \left[\sum_{k=0}^n H^k(\langle f \rangle - \langle f \rangle^{(n)}) \right] (s) \right\| ds =: D_1 + D_2.$$

Poiché

$$D_1 \leq M \beta_0 t e^{\beta t} \sup_{s \in [0, t]} \left\| \left[(I - H)^{-1} \langle f \rangle - \sum_{k=0}^n H^k \langle f \rangle \right] (s) \right\|,$$

e poiché $\sum_{k=0}^n H^k \langle f \rangle (t)$ tende a $[(I - H)^{-1} \langle f \rangle](t)$ uniformemente per t in intervalli limitati (si veda la dimostrazione del lemma 4.21), per ogni fissato $\epsilon > 0$ esiste n_ϵ tale che $D_1 < \epsilon$ per ogni $n \geq n_\epsilon$ (e la stima di D_1 è uniforme rispetto a t , se t varia in intervalli limitati). Per l'altro termine, dalla (4.4.8) si ha

$$\begin{aligned} D_2 &\leq M \beta_0 \int_0^t \left\| \left[\sum_{k=0}^n H^k(\langle f \rangle - \langle f \rangle^{(n)}) \right] (\tau) \right\| d\tau \\ &\leq \sum_{k=0}^n (M \beta_0)^{k+1} \int_0^t \int_0^\tau \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} e^{\beta(t-\tau)} e^{\beta(\tau-s)} \|(\langle f \rangle - \langle f \rangle^{(n)})(s)\| ds d\tau \\ &\leq \sum_{k=0}^n (M \beta_0)^{k+1} \int_0^t \left\{ \int_0^t \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} d\tau \right\} e^{\beta(t-s)} \|(\langle f \rangle - \langle f \rangle^{(n)})(s)\| ds \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{(M \beta_0)^{k+1} t^k}{k!} e^{\beta t} \int_0^t \|(\langle f \rangle - \langle f \rangle^{(n)})(s)\| ds. \end{aligned}$$

Il fattore $\sum_{k=0}^n \frac{(M \beta_0)^{k+1} t^k}{k!} e^{\beta t}$ è maggiorato da una costante $K \geq 0$, per ogni n e per ogni t in intervalli limitati. Abbiamo perciò dimostrato che per ogni $\epsilon > 0$ esiste n_ϵ tale che

$$\| \langle f \rangle (t) - \langle f \rangle^{(n)} (t) \| \leq \epsilon + K \int_0^t \|(\langle f \rangle - \langle f \rangle^{(n)})(s)\| ds,$$

da cui, per il lemma di Gronwall-Bellmann,

$$\| \langle f \rangle (t) - \langle f \rangle^{(n)} (t) \| \leq \epsilon e^{Kt}.$$

Poiché K non dipende da n , né da t in intervalli limitati, abbiamo dimostrato la tesi. \square

Osserviamo che come approssimazione di ordine 0 si ritrova sostanzialmente l'*atomic-mix*, dal momento che per $n = 0$ (e approssimando q con $\langle q \rangle$ e ξ con $\langle \xi \rangle$ nel termine noto V), la (4.4.16) è equivalente alla (4.1.11).

Per bassi valori di n , si ottengono quelle che si chiamano *small fluctuation approximations*. Il motivo di questa denominazione è che per piccole fluttuazioni stocastiche, il termine $\langle J^* f^* \rangle$, la "correzione" alla descrizione *atomic-mix*, risulta trascurabile. Ciò si riflette nel fatto che la serie $\sum_{k=0}^\infty H^k \langle f \rangle$, come si può vedere

per induzione dalla (4.4.9), converge tanto più rapidamente quanto più piccola è la norma $\|E^*J\langle f \rangle\|$.

Come ci si rende facilmente conto, le equazioni (4.4.16) hanno una struttura notevolmente complicata, salvo considerare casi piuttosto particolari. Inoltre, da un punto di vista dell'integrazione numerica il metodo risulta scarsamente efficiente per via del carattere "oscillante" della serie. Nelle applicazioni, infatti, anche se la soluzione $\langle f \rangle$ è positiva, i termini $H^k\langle f \rangle$ o simili, in quanto contengono l'azione di E^*J , presenteranno una variazione di segno che porta a una difficoltà in qualche modo analoga a quella del calcolo dell'esponenziale e^{-h} , con $h > 0$, basata sullo sviluppo $\sum_{k=0}^{\infty} (-h)^k/k!$.

4.5 Una decomposizione di tipo Fourier dello spazio $L_{\mathcal{X}}^2$

Ripensando al significato "astratto" del problema della media possiamo capire meglio le difficoltà del metodo dello *smoothing*. Il problema della media nasce dalla difficoltà intrinseca di lavorare con lo spazio "troppo ampio" $L_{\mathcal{X}}^p$. Per ottenere il valore medio della soluzione in modo diretto si dovrebbe prima costruire la soluzione di (4.0.1) e poi calcolarne la media eseguendo un integrale di Bochner per ogni $t \in T$. L'approssimazione *atomic-mix* riduce tutto ciò ad un (relativamente) semplice problema di evoluzione nello spazio \mathcal{X} , problema che però è troppo lontano dall'originale per poter dare risultati soddisfacenti. Il metodo dello *smoothing* cerca allora di "correggere il tiro" con l'introduzione di ulteriori termini, piuttosto complicati, nel suddetto problema di evoluzione. Per far ciò lo *smoothing* si basa sulla decomposizione (4.1.1) dello spazio $L_{\mathcal{X}}^p$. Tale decomposizione, però, non fa guadagnare un granché in semplicità poiché il sottospazio $E^*(L_{\mathcal{X}}^p)$, formato dagli elementi di media nulla, è altrettanto "ampio" quanto lo spazio $L_{\mathcal{X}}^p$. Lo *smoothing*, quindi, non prende le mosse da una vera e propria semplificazione *geometrica* del problema ma compie un'approssimazione di carattere *algebrico* su equazioni che non sono altro che una riscrittura del problema di evoluzione originale.

Partendo tali considerazioni, l'idea per costruire un metodo più efficiente è quella di sostituire alla decomposizione (4.1.1) una decomposizione del tipo

$$I = \bigoplus_{k=0}^{\infty} E_k, \quad (4.5.1)$$

dove con la (4.5.1) si intende che ogni $u \in L_{\mathcal{X}}^p$ si scrive in modo unico come somma delle sue proiezioni su opportuni sottospazi $E_k(L_{\mathcal{X}}^p)$. Nella (4.5.1), la convergenza della serie di operatori è da intendersi nella topologia forte, ovvero nel senso che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sum_{k=0}^n E_k u - u\|_p = 0$ per ogni $u \in L_{\mathcal{X}}^p$. Se ogni E_k proietta $L_{\mathcal{X}}^p$ su un sottospazio isomorfo a \mathcal{X} , allora questa decomposizione fornisce un'effettiva approssimazione geometrica che ci permette di lavorare su spazi più semplici.

In questa sezione vedremo che tale decomposizione esiste se $p = 2$, cioè se lavoriamo nello spazio $L_{\mathcal{X}}^2$ delle variabili aleatorie a valori in \mathcal{X} che possiedono i momenti fino all'ordine 2. Nella sezione successiva applicheremo il risultato al problema della media.

Nella sezione 3.2 abbiamo dimostrato che $L_{\mathcal{X}}^2 := L^2(\mathcal{M}; \mathcal{X})$ è isomorfo al prodotto tensoriale $L_{\mathbb{C}}^2 \otimes_{\nu_2} \mathcal{X}$, dove si è posto $L_{\mathbb{C}}^2 := L^2(\mathcal{M}; \mathbb{R})$ e dove, per ogni $u \in L_{\mathbb{C}}^2 \odot \mathcal{X}$,

$$\nu_2(u) := \inf \left\{ \left(\sum_{k=0}^n \|\psi_k\|^2 \|x_k\|^2 \right)^{1/2} \mid u = \left[\sum_{k=0}^n \psi_k \otimes x_k \right] \right\}. \quad (4.5.2)$$

Per l'ipotesi di separabilità della σ -algebra \mathfrak{F} , sappiamo che $L_{\mathbb{C}}^2$ è uno spazio di Hilbert separabile (teorema 2.59) rispetto al prodotto hermitiano

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle := \int_{\Omega} \overline{\psi_2(\omega)} \psi_1(\omega) d\mathbf{P}_{\omega}, \quad \psi_1, \psi_2 \in L_{\mathbb{C}}^2, \quad (4.5.3)$$

dove $\overline{\psi}$ indica la funzione coniugata di ψ . Per i classici risultati sugli spazi di Hilbert separabili, esiste allora un *sistema ortonormale completo* di $L_{\mathbb{C}}^2$,

$$\mathcal{E} := \{e_k : k \in \mathbb{N}_0\} = \{e_0, e_1, e_2, \dots\}. \quad (4.5.4)$$

Inoltre, essendo \mathbf{P} una misura di probabilità su Ω , *supponiamo di aver scelto \mathcal{E} in modo tale che e_0 sia la funzione costante*

$$e_0(\omega) := 1, \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega. \quad (4.5.5)$$

Fissato il sistema ortonormale completo \mathcal{E} , per ogni elemento $u \in L_{\mathcal{X}}^2$ e per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ poniamo

$$\widehat{E}_k : L_{\mathcal{X}}^2 \rightarrow \mathcal{X}, \quad \widehat{E}_k u := \int_{\Omega} \overline{e_k}(\omega) u(\omega) d\mathbf{P}_{\omega}. \quad (4.5.6)$$

Grazie al lemma 3.3 è immediato dimostrare la seguente osservazione.

Osservazione 4.24 *Per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ la 4.5.6 definisce un operatore lineare e limitato $\widehat{E}_k \in [L_{\mathcal{X}}^2, \mathcal{X}]$, con $\|\widehat{E}_k\| \leq 1$.*

Fissiamo ora $u \in L_{\mathcal{X}}^2$. Per il teorema 3.5, esistono una successione $\{\psi_j\}$ in $L_{\mathbb{C}}^2$ e una successione $\{x_j\}$ in \mathcal{X} tali che $u = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \otimes x_j$. D'altra parte, per $j \in \mathbb{N}_0$ le funzioni $\psi_j \in L_{\mathbb{C}}^2$ ammettono sviluppi in serie di tipo $\psi_j = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_j^k e_k$, dove, per $k, j \in \mathbb{N}_0$, i coefficienti λ_j^k sono dati da $\lambda_j^k = \int_{\Omega} \overline{e_k}(\omega) \psi_j(\omega) d\mathbf{P}_{\omega}$.

Lemma 4.25 *Nella situazione sopra descritta si ha che*

$$\widehat{E}_k u = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^k x_j \quad (4.5.7)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}_0$.

DIMOSTRAZIONE. Ricordando il lemma 3.3, per ogni $k, m \in \mathbb{N}_0$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{E}_k u - \sum_{j=0}^m \lambda_j^k x_j \right\|_{\mathcal{X}} &= \left\| \int_{\Omega} \overline{e}_k(\omega) u(\omega) d\mathbf{P}_{\omega} - \int_{\Omega} \sum_{j=0}^m \overline{e}_k(\omega) \psi_j(\omega) x_j d\mathbf{P}_{\omega} \right\|_{\mathcal{X}} \leq \\ &\left\| \overline{e}_k \left[u - \sum_{j=0}^m \psi_j \otimes x_j \right] \right\|_{L_{\mathcal{X}}^1} \leq \|\overline{e}_k\|_{L_{\mathbb{C}}^2} \left\| u - \sum_{j=0}^m \psi_j \otimes x_j \right\|_{L_{\mathcal{X}}^2} = \left\| u - \sum_{j=0}^m \psi_j \otimes x_j \right\|_{L_{\mathcal{X}}^2}. \end{aligned}$$

Quest'ultima quantità tende a zero per $m \rightarrow \infty$, e ciò prova la tesi. \square

Possiamo ora dimostrare il risultato principale di questa sezione.

Teorema 4.26 *Fissato il sistema ortonormale completo \mathcal{E} , per ogni elemento $u \in L_{\mathcal{X}}^2$ si ha*

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} e_k \otimes u_k, \quad (4.5.8)$$

dove

$$u_k := \widehat{E}_k u \in \mathcal{X}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (4.5.9)$$

Inoltre la decomposizione (4.5.8) è unica, nel senso che se $u = \sum_{k=0}^{\infty} e_k \otimes w_k$, dove w_k sono elementi di \mathcal{X} , allora $w_k = \widehat{E}_k u$ per ogni $k \in \mathbb{N}_0$.

DIMOSTRAZIONE. Fissato $u \in L_{\mathcal{X}}^2$, sia $\{\varphi_n\}$ una successione di elementi di $L_{\mathbb{C}}^2 \odot \mathcal{X}$ che approssima u in $L_{\mathcal{X}}^2$. Passando eventualmente ad un'opportuna sottosuccessione, possiamo supporre che $\|\varphi_n - u\|^2 \leq 2^{-(n+1)}$, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. Allora, per disuguaglianza triangolare, si ha subito che

$$\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|^2 \leq 2^{-n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $\sum_{j=0}^{j_0} \psi_j \otimes x_j$ una qualunque rappresentazione di φ_0 e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\sum_{j=j_{n-1}+1}^{j_n} \psi_j \otimes x_j$ una rappresentazione di $\varphi_n - \varphi_{n-1}$ tale che

$$\sum_{j=j_{n-1}+1}^{j_n} \|\psi_j\|^2 \|x_j\|^2 \leq \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|^2 + 2^{-n}.$$

Come abbiamo visto nel teorema 3.5, si ha che $u = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \otimes x_j$. Ma allora, se per ogni $M \in \mathbb{N}$ l'indice n_M è tale che $M \leq j_{n_M}$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_0+1}^M \|\psi_j\|^2 \|x_j\|^2 &\leq \sum_{j=j_0+1}^{j_{n_M}} \|\psi_j\|^2 \|x_j\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{n_M} \sum_{j=j_{n-1}+1}^{j_n} \|\psi_j\|^2 \|x_j\|^2 \leq \sum_{n=1}^{n_M} \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|^2 + 2^{-n} \leq 2^{-n} + 2^{-n}. \end{aligned}$$

Siamo così riusciti a costruire la rappresentazione (3.2.6) di u in modo che la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \|\psi_j\|^2 \|x_j\|^2$ sia convergente. Fissata tale rappresentazione, consideriamo per ogni $j \in \mathbb{N}_0$ lo sviluppo $\psi_j = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_j^k e_k$. Se u_k è dato dalla (4.5.9), dal lemma precedente sappiamo che $u_k = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^k x_j$. Per ogni $n, m \in \mathbb{N}_0$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \left\| u - \sum_{k=0}^n e_k \otimes u_k \right\| &\leq \left\| u - \sum_{j=0}^m \psi_j \otimes x_j \right\| + \left\| \sum_{j=0}^m \psi_j \otimes x_j - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \lambda_j^k e_k \otimes x_j \right\| \\ &+ \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \lambda_j^k e_k \otimes x_j - \sum_{k=0}^n e_k \otimes u_k \right\| =: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Osserviamo che per ogni $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ si ha

$$\left\| \sum_{j=m_1}^{m_2} \sum_{k=0}^n e_k \otimes \lambda_j^k x_j \right\|^2 \leq \sum_{j=m_1}^{m_2} \sum_{k=0}^n |\lambda_j^k|^2 \|x_j\|^2 \leq \sum_{j=m_1}^{m_2} \|\psi_j\|^2 \|x_j\|^2,$$

e dunque, poiché abbiamo dimostrato che $\sum_{j=0}^{\infty} \|\psi_j\|^2 \|x_j\|^2$ è una serie convergente, la successione $\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n e_k \otimes \lambda_j^k x_j$ (come successione in m) è una successione di Cauchy, uniformemente rispetto a n . Pertanto la convergenza di $\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n e_k \otimes \lambda_j^k x_j$ a $\sum_{k=0}^n e_k \otimes u_k$ è *uniforme rispetto a n* . Allora, fissato a piacere $\epsilon > 0$ esiste $m(\epsilon)$, che dipende solo da ϵ e *non* da n , tale che $I_1 < \epsilon$ e $I_3 < \epsilon$ quando $m > m(\epsilon)$. Poi esisterà $n(\epsilon, m)$ tale che $I_2 < \epsilon$ se $n > n(\epsilon, m)$. Quindi, se $n_1(\epsilon) := n(\epsilon, m(\epsilon))$ si avrà $\|u - \sum_{k=0}^n e_k \otimes u_k\| < 3\epsilon$ per ogni $n > n_1(\epsilon)$, e la (4.5.8) è così dimostrata. Per quanto riguarda l'unicità, osserviamo che se $u = \sum_{k=0}^n e_k \otimes u_k \in L^2_{\mathbb{C}} \odot \mathcal{X}$ si ha

$$\widehat{E}_i u = \sum_{k=0}^n u_k \int_{\Omega} \overline{e_i}(\omega) e_k(\omega) d\mathbf{P}_{\omega} = \sum_{k=0}^n \delta_k^i u_k = u_i$$

Passando al caso della somma infinita, se $u = \sum_{k=0}^{\infty} e_k \otimes u_k$ possiamo scrivere

$$\|u_i - \widehat{E}_i u\| \leq \left\| u_i - \widehat{E}_i \left(\sum_{k=0}^n e_k \otimes u_k \right) \right\| + \left\| \widehat{E}_i \left(\sum_{k=0}^n e_k \otimes u_k \right) - \widehat{E}_i u \right\|.$$

Il primo termine a secondo membro è nullo per quanto già visto per una somma finita, il secondo termine tende a zero per la continuità degli operatori \widehat{E}_k . Pertanto $u_i = E_i u$ per ogni $i \in \mathbb{N}_0$. \square

Il contenuto intuitivo del teorema 4.26 e dell'equazione (4.5.8) si può facilmente comprendere con il seguente esempio. Sia \mathcal{X} uno spazio di tipo $L^p(\mathcal{J}; \mathbb{C})$, dove \mathcal{J} è, ad esempio, un intervallo della retta reale con la misura di Lebesgue. Un elemento $u \in L^2_{\mathcal{X}}$ può essere visto allora come funzione di due variabili $u = u(\omega, \rho)$, $\omega \in \Omega$, $\rho \in \mathcal{J}$, tale che, per ogni fissato ρ , la funzione (\cdot, ρ) sta in $L^2(\Omega; \mathbb{C})$ (teorema 2.60). Possiamo perciò sviluppare $u(\cdot, \rho)$ in una serie di funzioni ortonormali (ad esempio di Fourier) i cui coefficienti u_k dipenderanno da ρ . Il teorema 4.26 ci dice allora che

tali coefficienti, come funzioni di ρ , appartengono a $L^p(\mathcal{J}; \mathbb{C})$ e che la serie *converge nella norma di $L^2_{\mathcal{X}}$* .

La serie (4.5.8) è dunque una sorta di “serie di Fourier generalizzata” i cui “coefficienti” u_k sono elementi di uno spazio di Banach \mathcal{X} .

Se $u \in L^2_{\mathcal{X}}$, per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ definiamo

$$E_k : L^2_{\mathcal{X}} \rightarrow L^2_{\mathcal{X}}, \quad E_k u := e_k \otimes \widehat{E}_k u, \quad (4.5.10)$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ definiamo

$$P_n : L^2_{\mathcal{X}} \rightarrow L^2_{\mathcal{X}}, \quad P_n u := \sum_{k=0}^n E_k u, \quad (4.5.11)$$

e

$$\widehat{P}_n : L^2_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}^{n+1}, \quad \widehat{P}_n u := (\widehat{E}_0 u, \widehat{E}_1 u, \dots, \widehat{E}_n u). \quad (4.5.12)$$

Il teorema 4.26 ha il seguente corollario.

Corollario 4.27 a) Per ogni $k, n \in \mathbb{N}_0$, $E_k \in [L^2_{\mathcal{X}}]$ e $P_n \in [L^2_{\mathcal{X}}]$ sono proiettori;

b) $E_{k_1} E_{k_2} = 0$ per $k_1 \neq k_2$;

c) vale la (4.5.1);

d) per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $\widehat{P}_n \in [L^2_{\mathcal{X}}, \mathcal{X}^{n+1}]$ è un isomorfismo (in generale non isometrico) fra $P_n(L^2_{\mathcal{X}})$ e \mathcal{X}^{n+1} .

DIMOSTRAZIONE. I punti (a), (b) e (c) sono di verifica immediata. Osservando poi che, per ogni $k \in \mathbb{N}_0$, la corrispondenza $x \mapsto e_k \otimes x$ è un isomorfismo fra \mathcal{X} e $E_k(L^2_{\mathcal{X}})$, il punto (d) segue dal fatto che $P_n(L^2_{\mathcal{X}}) = \bigoplus_{k=0}^n E_k(L^2_{\mathcal{X}})$. \square

Osserviamo che, a causa dell'ipotesi (4.5.5), gli operatori E_0 e P_0 coincidono con l'operatore di aspettazione E (e così gli operatori \widehat{E}_0 e \widehat{P}_0 , a meno di isomorfismi tra $E(L^2_{\mathcal{X}})$ e \mathcal{X}).

Nel caso particolare in cui $\mathcal{X} := \mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert (separabile), $L^2_{\mathcal{H}}$ è a sua volta uno spazio di Hilbert, con il prodotto hermitiano dato dalla (2.7.10). In questo caso (come si può facilmente verificare dimostrandola prima per somme finite e poi passando al limite) vale l'uguaglianza

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} e_k \otimes h_k \right\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|h_k\|^2 \right)^{1/2}, \quad h \in L^2_{\mathcal{H}} \quad (4.5.13)$$

Gli operatori \widehat{P}_n sono così isomorfismi (isometrici) fra gli spazi di Hilbert $P_n(L^2_{\mathcal{H}})$ e \mathcal{H}^{n+1} . $L^2_{\mathcal{H}}$ stesso è isomorfo allo spazio $\ell^2(\mathcal{H})$ delle successioni $\{h_n\}$ di elementi di \mathcal{H} tali che $\sum_{k=0}^{\infty} \|h_k\|^2 < +\infty$ (che è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto hermitiano $\sum_{k=0}^{\infty} \langle h_k, h'_k \rangle$ fra due elementi $\{h_n\}$ e $\{h'_n\}$ di $\ell^2(\mathcal{H})$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto hermitiano di \mathcal{H}).

Se in generale \mathcal{X} è uno spazio di Banach, l'uguaglianza (4.5.13) non è vera (neanche per somme finite) e i P_n non sono isometrie.

4.6 Il metodo delle proiezioni

Applichiamo i risultati della sezione precedente al problema della media. L'idea è quella di approssimare il problema di evoluzione (4.0.1) con le sue *proiezioni* (si veda la sezione 4.1) sui sottospazi $P_n(L_{\mathcal{X}}^2)$, i quali “invadono” lo spazio $L_{\mathcal{X}}^2$ quando $n \rightarrow \infty$.

Se proiettiamo la (4.0.1) applicando a entrambi i membri l'operatore P_n , con n fissato in \mathbb{N}_0 , otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} (f^{(n)})'(t) = L f^{(n)}(t) + J_n f^{(n)}(t) + q^{(n)}(t), & t \in \mathbb{T} \\ f^{(n)}(0) = \xi^{(n)}, \end{cases} \quad (4.6.1)$$

dove si è posto

$$J_n := P_n J, \quad q^{(n)}(t) := P_n q(t), \quad \xi^{(n)} := P_n \xi. \quad (4.6.2)$$

Nello scrivere la (4.6.1) si è tenuto conto del lemma 4.3 e del fatto che P_n commuta con ogni operatore deterministico chiuso (la dimostrazione di questa proprietà è analoga a quella del lemma 4.4).

La (4.6.1) è un problema di evoluzione nello spazio di Banach $P_n(L_{\mathcal{X}}^2)$ e la sua soluzione $f^{(n)} : \mathbb{T} \rightarrow P_n(L_{\mathcal{X}}^2)$ è, come vedremo in modo rigoroso più avanti, una “approssimazione di ordine n ” della soluzione f di (4.0.1). Nel corollario 4.27 abbiamo osservato che \widehat{P}_n è un isomorfismo fra $P_n(L_{\mathcal{X}}^2)$ e \mathcal{X}^{n+1} . Se applichiamo tale isomorfismo alla (4.6.1), otteniamo il sistema equivalente in \mathcal{X}^{n+1} :

$$\begin{cases} (f_k^{(n)})'(t) = L f_k^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^n J_{kj} f_j^{(n)}(t) + q_k(t), & t \in \mathbb{T}, \\ f_k^{(n)}(0) = \xi_k; \\ k = 0, 1, \dots, n, \end{cases} \quad (4.6.3)$$

ove ricordiamo n è fissato in \mathbb{N}_0 . Nella (4.6.3) abbiamo posto, per $k = 0, 1, \dots, n$,

$$q_k(t) := \widehat{E}_k q(t), \quad \xi_k := \widehat{E}_k \xi \quad (4.6.4)$$

(queste definizioni non dipendono da n). Inoltre, per $k, j = 0, 1, \dots, n$, gli operatori $J_{kj} \in [\mathcal{X}]$ sono le componenti della matrice che rappresenta l'operatore $\widehat{P}_n J \widehat{P}_n^{-1} \in [\mathcal{X}^{n+1}]$ e sono perciò dati da

$$J_{kj} x := \int_{\Omega} \overline{e_k}(\omega) e_j(\omega) J(\omega) x \, d\mathbf{P}_{\omega}, \quad x \in \mathcal{X}. \quad (4.6.5)$$

Poiché (4.6.1) e (4.6.3) sono equivalenti, $t \mapsto (f_0^{(n)}(t), f_1^{(n)}(t), \dots, f_n^{(n)}(t))$ è soluzione di (4.6.3) se e solo se $t \mapsto f^{(n)}(t) := \sum_{k=0}^n e_k \otimes f_k^{(n)}(t)$ è soluzione di (4.5.1). Osserviamo che, in pratica, si passa da (4.6.1) a (4.6.3) “uguagliando i coefficienti” dei corrispondenti elementi e_k della base.

Grazie alla decomposizione di tipo Fourier dello spazio $L^2_{\mathcal{X}}$ siamo dunque riusciti ad approssimare (4.0.1) con la gerarchia di problemi di evoluzione (4.6.1), con $n = 0, 1, 2, \dots$, che, scritti nella forma (4.6.3), risultano essere problemi di evoluzione negli spazi “semplici” $\mathcal{X}, \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^3, \dots$. Poiché si è posta la condizione (4.5.5), osserviamo che, se $(f_0^{(n)}, f_1^{(n)}, \dots, f_n^{(n)})$ è soluzione di (4.6.3), la prima componente $f_0^{(n)}$ altro non è che la media $\langle f^{(n)} \rangle$ della soluzione di (4.6.1). Ci attendiamo quindi che $f_0^{(n)}$ approssimi la media della soluzione esatta $\langle f \rangle$ quando $n \rightarrow \infty$. Per dimostrare ciò faremo uso del classico *teorema di approssimazione di Trotter*:

Teorema 4.28 *Sia \mathcal{X} uno spazio di Banach e siano C e C_n , per $n \in \mathbb{N}_0$, operatori lineari di classe $\mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$. Allora le due seguenti condizioni sono equivalenti:*

- a) $R(\lambda, C_n)x \rightarrow R(\lambda, C)x$ per $n \rightarrow \infty$, per ogni $x \in \mathcal{X}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(\lambda) > \beta$;
- b) $\mathcal{S}_{C_n}(t)x \rightarrow \mathcal{S}_C(t)x$ per $n \rightarrow \infty$, per ogni $x \in \mathcal{X}$ e $t \in \mathbb{R}^+$.

Inoltre, la convergenza al punto (b) è uniforme per t in intervalli limitati.

DIMOSTRAZIONE. [41], cap. 3, teorema 4.2. □

Osserviamo che grazie alla formula (2.3.12) è possibile sostituire alla condizione “per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(\lambda) > \beta$ ”, espressa nel punto (b), la condizione equivalente ma più semplice “ $\lambda > \beta$ ” (cioè, $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda > \beta$).

Per snellire la dimostrazione del teorema principale introduciamo due lemmi di carattere più tecnico.

Lemma 4.29 *Siano \mathcal{X} uno spazio di Banach, L un operatore di classe $\mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$ e $B \in [\mathcal{X}]$. Allora per ogni $\lambda > \beta + M\|B\|$ si ha che*

$$R(\lambda, L + B) = R(\lambda, L)[I - BR(\lambda, L)]^{-1} = R(\lambda, L) \sum_{j=0}^{\infty} (BR(\lambda, L))^j. \quad (4.6.6)$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato $\lambda > \beta + M\|B\|$, si ha che $\|BR(\lambda, L)\| \leq \|B\|\|R(\lambda, L)\| \leq M\|B\|/(\lambda - \beta) < 1$, dove si è sfruttata la (2.3.8). Dai risultati elementari sugli operatori limitati segue allora che $I - BR(\lambda, L)$ è invertibile, con

$$[I - BR(\lambda, L)]^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (BR(\lambda, L))^j.$$

Per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$ si ha, poi, $[\lambda - (L + B)]x = [I - BR(\lambda, L)](\lambda - L)x$, da cui segue che $\lambda \in \rho(L + B)$, con $R(\lambda, L + B) = R(\lambda, L)[I - BR(\lambda, L)]^{-1}$ il che dimostra la tesi. □

Lemma 4.30 *Sia \mathcal{X} uno spazio di Banach e sia $\{B_n\}$ una successione di operatori in $[\mathcal{X}]$ convergente in senso forte a $B \in [\mathcal{X}]$. Allora, per ogni $R \in [\mathcal{X}]$ e per ogni $j \in \mathbb{N}$, si ha che $(B_n R)^j$ converge in senso forte a $(BR)^j$.*

DIMOSTRAZIONE. Prima di tutto osserviamo che la successione $\{B_n\}$ è limitata (in norma operatoriale). Infatti per definizione di convergenza in senso forte, l'orbita $B_n x$ è una successione convergente in \mathcal{X} per ogni $x \in \mathcal{X}$. Perciò ogni insieme del tipo $\{B_n x \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, con $x \in \mathcal{X}$, è limitato in \mathcal{X} . Dal teorema di Banach-Steinhaus ([50], cap. 1, teorema 2.5), segue allora che $\{\|B_n\| : n \in \mathbb{N}_0\}$ è limitato da un'opportuna costante $K > 0$.

Per $j = 1$ la tesi è senz'altro vera perché $\|B_n R x - B R x\| = \|(B_n - B) R x\| \rightarrow 0$, direttamente dall'ipotesi di convergenza in senso forte. Procedendo per induzione su j , supponiamo che la tesi sia vera per un certo $j \in \mathbb{N}$ e dimostriamola per $j + 1$. Fissato $x \in \mathcal{X}$, si ha

$$\begin{aligned} & \| (B_n R)^{j+1} x - (B R)^{j+1} x \| = \| B_n R (B_n R)^j x - B R (B R)^j x \| \\ & \leq \| B_n R (B_n R)^j x - B_n R (B R)^j x \| + \| B_n R (B R)^j x - B R (B R)^j x \| \\ & \leq K \| R \| \| (B_n R)^j x - (B R)^j x \| + \| (B_n - B) R (B R)^j x \|. \end{aligned}$$

Quando $n \rightarrow \infty$ il primo degli ultimi due termini tende a zero per l'ipotesi di convergenza in senso forte e il secondo tende a zero per l'ipotesi induttiva. Il passo dell'induzione, e con esso la tesi, è così dimostrato. \square

Il teorema seguente ci dice che il “metodo delle proiezioni” che abbiamo descritto in questa sezione è un'effettiva risposta al problema della media.

Teorema 4.31 *Nelle ipotesi che assicurano esistenza e unicità della soluzione dell'eq. (4.0.1) per $p = 2$ (teorema 3.34) valgono le seguenti proprietà.*

- a) per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ i problemi di evoluzione (4.6.1) e (4.6.3) hanno un'unica soluzione stretta;
- b) se, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $f^{(n)}$ è la soluzione di (4.6.1) e se f è la soluzione di (4.0.1), allora $f^{(n)}(t)$ converge a $f(t)$ in $L^2_{\mathcal{X}}$ per ogni $t \in \mathbb{T}$, e la convergenza è uniforme per t in intervalli limitati;
- c) se, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $(f_0^{(n)}, f_1^{(n)}, \dots, f_n^{(n)})$ è la soluzione di (4.6.3), allora $f_0^{(n)}(t)$ converge a $\langle f(t) \rangle$ in \mathcal{X} per ogni $t \in \mathbb{T}$, e la convergenza è uniforme per t in intervalli limitati.

DIMOSTRAZIONE. a) Applicando l'operatore limitato P_n a J , q e ξ otteniamo oggetti, J_n , $q^{(n)}$, $\xi^{(n)}$, che hanno nello spazio di Banach $P_n(L^2_{\mathcal{X}})$ tutte le buone proprietà di J , q e ξ che ci hanno permesso di dimostrare il teorema 3.34. In particolare $\|J_n\| \leq \beta_0$, $\xi^{(n)} \in \mathcal{D}(L)$ e

$$L + J_n \in \mathcal{G}(M, \beta + M\beta_0, P_n(L^2_{\mathcal{X}})) \quad (4.6.7)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. Perciò il problema di evoluzione (4.6.1) in $P_n(L_{\mathcal{X}}^2)$, e così il suo “isomorfo” (4.6.3) in \mathcal{X}^{n+1} , hanno un’unica soluzione stretta data, rispettivamente, da

$$f^{(n)}(t) := \mathcal{S}_{L+J_n}(t)\xi^{(n)} + \int_0^t \mathcal{S}_{L+J_n}(t-s)q^{(n)}(s) ds, \quad (4.6.8)$$

e

$$f_k^{(n)}(t) := \mathcal{S}_{L+(J_{ij})}(t)\xi_k + \int_0^t \mathcal{S}_{L+(J_{ij})}(t-s)q_k(s) ds, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (4.6.9)$$

dove con il simbolo (J_{ij}) si è indicata la matrice $(n+1) \times (n+1)$ le cui componenti sono gli operatori J_{ij} definiti dalla (4.6.5).

b) Poniamo $C := L + J$ e $C_n := L + J_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. Fissato $u \in L_{\mathcal{X}}^2$ e $\lambda > \beta + M\beta_0$, dal lemma 4.29 segue

$$\|R(\lambda, C_n)u - R(\lambda, C)u\| \leq \|R(\lambda, L)\| \|[I - J_n R(\lambda, L)]^{-1}u - [I - JR(\lambda, L)]^{-1}u\|.$$

Per disuguaglianza triangolare otteniamo

$$\|[I - J_n R(\lambda, L)]^{-1}u - [I - JR(\lambda, L)]^{-1}u\| \leq D_1 + D_2 + D_3,$$

dove

$$D_1 := \left\| [I - J_n R(\lambda, L)]^{-1}u - \sum_{j=0}^k (J_n R(\lambda, L))^j u \right\|$$

$$D_2 := \left\| \sum_{j=0}^k [(J_n R(\lambda, L))^j - (JR(\lambda, L))^j] u \right\|$$

$$D_3 := \left\| \sum_{j=0}^k (JR(\lambda, L))^j u - [I - JR(\lambda, L)]^{-1}u \right\|,$$

con k arbitrario. Fissato $\epsilon > 0$, per il lemma 4.29 esiste $k(\epsilon)$ tale che $D_1 < \epsilon$ e $D_3 < \epsilon$ per ogni $k > k(\epsilon)$. Osserviamo che, in virtù della maggiorazione uniforme sulle norme degli operatori J_n , il numero $k(\epsilon)$ dipende effettivamente solo da ϵ e non da n , che pure compare nel termine D_1 . Infatti, per $\lambda > \beta + M\beta_0$ si ha

$$\|J_n R(\lambda, L)\| \leq M\beta_0/(\lambda - \beta) < 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

per cui la convergenza totale della serie $\sum_{j=0}^k (J_n R(\lambda, L))^j$ all’operatore inverso $[I - J_n R(\lambda, L)]^{-1}$ è uniformemente dominata dalla convergenza della serie geometrica $\sum_{j=0}^{\infty} [M\beta_0/(\lambda - \beta)]^j$. D’altra parte, per il lemma 4.30, esiste $n(\epsilon, k)$ tale che $D_2 < \epsilon$ per ogni $n > n(\epsilon, k)$ (osserviamo per inciso che nella dimostrazione del lemma 4.30 si è utilizzato il teorema di Banach-Steinhaus, che in questo caso è reso superfluo dall’ipotesi di uniforme limitatezza degli operatori J_n). Dunque se $n > n_1(\epsilon) := n(\epsilon, k(\epsilon))$ si ha $D_i < \epsilon$ per $i = 1, 2, 3$, e quindi

$$\|R(\lambda, C_n)u - R(\lambda, C)u\| \leq 3\epsilon \|R(\lambda, L)\|.$$

Si è così dimostrato che i risolventi $R(\lambda, C_n)$ convergono in senso forte al risolvente $R(\lambda, C)$. Da ciò e dalla (4.6.7) segue che il teorema 4.28 può essere applicato, per cui si ha che $\mathcal{S}_{L+J_n}(t)$ converge in senso forte a $\mathcal{S}_{L+J}(t)$ per ogni $t \in T$, uniformemente per t in intervalli limitati. Da ciò si deduce che la successione $f^{(n)}(t)$, data dalla (4.6.8) converge a $f(t)$ (che è data dalla (4.0.2)) e la convergenza è uniforme sugli intervalli limitati.

c) Poiché $f_0^{(n)} = E f^{(n)}$, il punto (c) segue semplicemente dal punto (b) e dal fatto che E è un operatore limitato. \square

Per concludere osserviamo che l'approssimazione di ordine 0 coincide con l'*atomic-mix*. Infatti per $n = 0$ la (4.6.1) è un problema di evoluzione in \mathcal{X} , con il dato iniziale $\xi_0 = \langle \xi \rangle$, il termine di sorgente $q_0 = \langle q \rangle$. Ma su \mathcal{X} l'operatore J_0 coincide con $\langle J \rangle$, per cui la (4.6.1) coincide con la (4.1.11).

5

Applicazioni alla teoria del trasporto

Nella capitolo 1 abbiamo introdotto la descrizione matematica di un sistema fisico consistente nella diffusione della radiazione attraverso una nube con *clumps* distribuiti in modo casuale. Nel presente capitolo costruiremo un preciso modello matematico di tale sistema, riconducendolo ad un problema di evoluzione aleatorio in un opportuno spazio di Banach cui è possibile applicare la teoria sviluppata nei capitoli 3 e 4.

Il punto di vista adottato è quello del trasporto di radiazione in un mezzo isotropo, (si veda la sezione 1.2). L'estensione ad un'equazione di trasporto più generale non comporta sostanziali modifiche formali.

5.1 Il trasporto di radiazione come problema di evoluzione astratto

Nel capitolo 3 abbiamo visto come lo studio di un problema di evoluzione aleatorio regolare parta necessariamente dagli aspetti deterministici. Seguendo tale linea, in questa sezione e nella successiva rivolgiamo la nostra attenzione alla teoria matematica del trasporto deterministico e, in particolare, all'operatore di *streaming* con condizioni al contorno. Poiché il nostro punto di vista è quello del trasporto di radiazione, il modulo della velocità delle particelle è supposto costantemente uguale a c , dove $c > 0$ è il valore della velocità della luce nel vuoto in un fissato sistema di unità di misura.

La teoria formale del trasporto come problema di evoluzione in uno spazio di tipo L^1 è oramai classica e vanta un'ampia letteratura a riguardo. Per approfondimenti rimandiamo a [28] e alle citazioni in esso contenute, oltre che ai riferimenti citati nel corso di questa sezione.

Sia \mathcal{R} un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 che rappresenta la regione interessata dal fenomeno di trasporto della radiazione. Pensando a \mathcal{R} come alla regione occupata da una nube interstellare, non ci interessa considerare un'eventuale dipendenza dal tempo di \mathcal{R} , poiché una modifica dei confini di \mathcal{R} avviene su una scala di tempi di molti ordini di grandezza superiore a quella del processo di trasporto. Supponiamo per semplicità che \mathcal{R} abbia le seguenti proprietà

- a) \mathcal{R} è un insieme aperto, convesso e limitato (non vuoto);

b) la frontiera $\partial\mathcal{R}$ di \mathcal{R} è di classe C^1 .

Quest'ultima ipotesi può essere tranquillamente sostituita con l'ipotesi che $\partial\mathcal{R}$ sia di classe C^1 tranne al più un insieme di misura superficiale nulla. Anche la convessità può essere sostituita da ipotesi più generali. Rimandiamo a [62] per la descrizione di ipotesi più deboli con le quali il lemma 5.1 e i teoremi 5.2, 5.3 e 5.5 restano validi.

Su \mathcal{R} assumiamo la struttura standard di spazio di misura data dalla σ -algebra di Borel $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}}$ e dalla misura di Lebesgue λ . La variabile “posizione” in \mathcal{R} viene indicata con \vec{r} .

Indichiamo con \vec{u} la variabile “direzione” e con ν la variabile “frequenza”. Se S^2 è la sfera unitaria di \mathbb{R}^3 , introduciamo l'insieme

$$\Sigma \subset S^2 \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \quad (5.1.1)$$

che rappresenta tutte le coppie direzione-frequenza (\vec{u}, ν) della radiazione ammesse nel modello di trasporto considerato. Assumiamo che Σ sia un sottoinsieme localmente compatto di $S^2 \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, e che sui boreliani di Σ sia assegnata una misura ζ .

Lasciando una certa generalità nella scelta di Σ e di ζ , includeremo, fra gli altri, i modelli cosiddetti “a velocità discrete”, [18], e “multigruppo”, [31].

Ci sarà utile anche definire un simbolo per l'insieme di tutte le frequenze ammesse

$$\mathcal{V} := \{\nu > 0 \mid (\vec{u}, \nu) \in \Sigma \text{ per almeno un } \vec{u} \in S^2\}. \quad (5.1.2)$$

Come abbiamo visto nella sezione 1.2, un possibile stato del sistema è una funzione $w = w(\vec{r}, \vec{u}, \nu)$, con $\vec{r} \in \mathcal{R}$ e $(\vec{u}, \nu) \in \Sigma$ da interpretarsi come densità di fotoni nello spazio delle fasi $\mathcal{R} \times \Sigma$. Perciò la scelta dello spazio di tutti i possibili stati del sistema cade in modo naturale sullo spazio di Banach

$$\mathcal{X} := L^1(\mathcal{R} \times \Sigma, \lambda \times \zeta; \mathbb{R}). \quad (5.1.3)$$

La norma di \mathcal{X}

$$\|w\| := \int_{\mathcal{R} \times \Sigma} |w(\vec{r}, \vec{u}, \nu)| \, d\vec{r} \, d\zeta_{(\vec{u}, \nu)}, \quad w \in \mathcal{X}, \quad (5.1.4)$$

ha il significato di *numero totale* di fotoni presenti nella regione \mathcal{R} .

L'evoluzione deterministica dello stato del sistema è legata all'operatore differenziale di *streaming* che descrive il cammino dei fotoni in assenza di urti col mezzo di background. La scelta del dominio di tale operatore è a sua volta legata alle *condizioni al contorno*, che descrivono il comportamento dei fotoni alla frontiera di \mathcal{R} . Per introdurre tale operatore seguiremo qui l'impostazione di Voigt, [62].

Innanzitutto introduciamo due spazi di Banach i cui elementi (positivi) sono interpretabili come *flusso* di fotoni attraverso $\partial\mathcal{R}$. Per le nostre ipotesi su $\partial\mathcal{R}$, in ogni punto $\vec{s} \in \partial\mathcal{R}$ esiste il *versore normale* $\vec{n}(\vec{s})$ che supponiamo diretto *verso l'interno* di \mathcal{R} . Possiamo quindi definire i seguenti insiemi:

$$\Phi^{\text{in}} = \left\{ (\vec{s}, \vec{u}, \nu) \in \partial\mathcal{R} \times \Sigma \mid \vec{n}(\vec{s}) \cdot \vec{u} > 0 \right\}, \quad (5.1.5)$$

$$\Phi^0 = \left\{ (\vec{s}, \vec{u}, \nu) \in \partial\mathcal{R} \times \Sigma \mid \vec{n}(\vec{s}) \cdot \vec{u} = 0 \right\}, \quad (5.1.6)$$

$$\Phi^{\text{out}} = \left\{ (\vec{s}, \vec{u}, \nu) \in \partial\mathcal{R} \times \Sigma \mid \vec{n}(\vec{s}) \cdot \vec{u} < 0 \right\}, \quad (5.1.7)$$

dove con $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ abbiamo indicato il prodotto scalare di $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$. Se con μ indichiamo la misura superficiale su $\partial\mathcal{R}$, assumiamo che Φ_0 sia di misura nulla in $\partial\mathcal{R} \times \Sigma$ per la misura $\mu \times \zeta$:

$$(\mu \times \zeta)(\Phi_0) = 0. \quad (5.1.8)$$

Introduciamo poi la misura

$$\phi_{(\vec{s}, \vec{u}, \nu)}^+ := c\vec{u} \cdot \vec{n}(\vec{s}) \mu_{\vec{s}} \zeta_{(\vec{u}, \nu)}, \quad (5.1.9)$$

sui boreliani di Φ^{in} e la misura

$$\phi_{(\vec{s}, \vec{u}, \nu)}^- := -c\vec{u} \cdot \vec{n}(\vec{s}) \mu_{\vec{s}} \zeta_{(\vec{u}, \nu)}, \quad (5.1.10)$$

sui boreliani di Φ^{out} . Quindi definiamo gli spazi di Banach

$$\mathcal{Y}^{\text{in}} := L^1(\Phi^{\text{in}}, \phi^+; \mathbb{R}), \quad (5.1.11)$$

$$\mathcal{Y}^{\text{out}} := L^1(\Phi^{\text{out}}, \phi^-; \mathbb{R}). \quad (5.1.12)$$

Le norme di \mathcal{Y}^{in} e di \mathcal{Y}^{out} sono date da

$$\|j\|_{\mathcal{Y}^{\text{in}}} := \int_{\Phi^{\text{in}}} |j(\vec{s}, \vec{u}, \nu)| d\phi_{(\vec{s}, \vec{u}, \nu)}^+, \quad j \in \mathcal{Y}^{\text{in}}, \quad (5.1.13)$$

$$\|j\|_{\mathcal{Y}^{\text{out}}} := \int_{\Phi^{\text{out}}} |j(\vec{s}, \vec{u}, \nu)| d\phi_{(\vec{s}, \vec{u}, \nu)}^-, \quad j \in \mathcal{Y}^{\text{out}} \quad (5.1.14)$$

e hanno il significato fisico di *flusso* totale di fotoni *entranti* in \mathcal{R} e, rispettivamente, *uscanti* da \mathcal{R} attraverso $\partial\mathcal{R}$.

Consideriamo ora l'operatore di *streaming* "minimale" T_m su \mathcal{X} . Sia $C_c^{1,0}(\mathcal{R} \times \Sigma)$ lo spazio delle funzioni continue su $\mathcal{R} \times \Sigma$, differenziabili con continuità rispetto alle variabili in \mathcal{R} e con supporto compatto in $\mathcal{R} \times \Sigma$. Definiamo T_m e il suo dominio:

$$(T_m w)(\vec{r}, \vec{u}, \nu) := -c\vec{u} \cdot \nabla w(\vec{r}, \vec{u}, \nu), \quad (\vec{r}, \vec{u}, \nu) \in \mathcal{R} \times \Sigma, \quad w \in \mathcal{D}(T_m), \quad (5.1.15)$$

$$\mathcal{D}(T_m) := C_c^{1,0}(\mathcal{R} \times \Sigma), \quad (5.1.16)$$

dove ∇w è il gradiente spaziale (cioè rispetto alle coordinate in \mathcal{R}) di w . Definiamo quindi l'operatore di *streaming* "massimale" T_M nel modo seguente

$$\mathcal{D}(T_M) := \left\{ w \in \mathcal{X} \mid \text{esiste } T_M w := g \in \mathcal{X} \text{ tale che} \right. \\ \left. \int_{\mathcal{R} \times \Sigma} (T_m \varphi) w \, d\vec{r} \, d\zeta = - \int_{\mathcal{R} \times \Sigma} \varphi g \, d\vec{r} \, d\zeta, \text{ per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(T_m) \right\}. \quad (5.1.17)$$

Osserviamo che $T_M w$ è una sorta di gradiente distribuzionale di w rispetto alle coordinate spaziali e limitatamente alle direzioni contenute in Σ .

L'operatore T_M risulta chiuso ([62], sez. 1) perciò $\mathcal{D}(T_M)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma del grafico

$$\|w\|_{\mathcal{D}(T_M)} := \|w\| + \|T_M w\|, \quad w \in \mathcal{D}(T_M). \quad (5.1.18)$$

Indichiamo per brevità con $W^{1,0}$ tale spazio di Banach (per la chiara analogia con gli spazi di Sobolev).

Seguendo sempre [62] (ma si veda a riguardo anche [21]), introduciamo gli operatori di traccia F_+ e F_- . Indicata con $\overline{\mathcal{R}}$ la chiusura di \mathcal{R} , sia $C^{1,0}(\overline{\mathcal{R}} \times \Sigma)$ lo spazio delle funzioni continue $w : \overline{\mathcal{R}} \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, differenziabili con continuità rispetto alle variabili spaziali in \mathcal{R} e tali che le derivate parziali ammettono un'estensione continua a $\overline{\mathcal{R}}$. Il seguente lemma è un analogo di noti risultati sugli spazi di Sobolev (si veda [1], teorema 3.18).

Lemma 5.1 *Il sottospazio $C^{1,0}(\overline{\mathcal{R}} \times \Sigma)$ è denso in $W^{1,0}$.*

DIMOSTRAZIONE. Si veda [62], teorema 1.4. \square

Definiamo le applicazioni lineari $F_+^0 : C^{1,0}(\overline{\mathcal{R}} \times \Sigma) \rightarrow C(\Phi^{\text{in}})$ e $F_-^0 : C^{1,0}(\overline{\mathcal{R}} \times \Sigma) \rightarrow C(\Phi^{\text{out}})$ che restringono una funzione w , rispettivamente, a Φ^{in} e a Φ^{out} :

$$F_+^0 w := w|_{\Phi^{\text{in}}}, \quad F_-^0 w := w|_{\Phi^{\text{out}}}. \quad (5.1.19)$$

Si hanno allora i seguenti risultati.

Teorema 5.2 *Le applicazioni F_+^0 e F_-^0 sono continue rispetto alla topologia indotta dalla norma $\mathcal{D}(T_M)$ su $C^{1,0}(\overline{\mathcal{R}} \times \Sigma)$, e alla topologia L_{loc}^1 su $C(\Phi^{\text{in}})$ e $C(\Phi^{\text{out}})$. Esistono perciò due uniche estensioni continue*

$$F_+ : W^{1,0} \rightarrow L_{\text{loc}}^1(\Phi^{\text{in}}), \quad F_- : W^{1,0} \rightarrow L_{\text{loc}}^1(\Phi^{\text{out}}) \quad (5.1.20)$$

che chiameremo operatori di traccia.

DIMOSTRAZIONE. Si veda [62], lemma 3.4. \square

Teorema 5.3 *Sia $w \in \mathcal{D}(T_M)$. Se $F_+ w \in \mathcal{Y}^{\text{in}}$ allora $F_- w \in \mathcal{Y}^{\text{out}}$ (e viceversa) e vale la seguente uguaglianza:*

$$\int_{\mathcal{R} \times \Sigma} T_M w \, d\vec{r} \, d\zeta = \int_{\Phi^{\text{in}}} F_+ w \, d\phi^+ - \int_{\Phi^{\text{out}}} F_- w \, d\phi^-. \quad (5.1.21)$$

DIMOSTRAZIONE. Si veda [62], teorema 3.5. \square

Osserviamo che la (5.1.21) è una formula di tipo Gauss-Green.

Gli operatori di traccia ci permettono di esprimere in modo formalmente soddisfacente le *condizioni al contorno* del problema di trasporto.

Definizione 5.4 Sia $\mathcal{B} \in [\mathcal{Y}^{\text{out}}, \mathcal{Y}^{\text{in}}]$. Definiamo l'operatore lineare $T_{\mathcal{B}}$ su \mathcal{X} come segue:

$$\mathcal{D}(T_{\mathcal{B}}) := \{w \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{M}}) \mid F_- w \in \mathcal{Y}^{\text{out}}, F_+ w = \mathcal{B}F_- w\}, \quad (5.1.22)$$

$$T_{\mathcal{B}} w := T_{\mathcal{M}} w, \quad w \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{B}}). \quad (5.1.23)$$

Osserviamo che $T_{\mathcal{B}}$ è un operatore di *streaming* in cui si tiene conto della condizione al contorno

$$F_+ w = \mathcal{B}F_- w, \quad (5.1.24)$$

che mette in relazione il “flusso uscente” della distribuzione w con il suo “flusso entrante”. Consideriamo ad esempio il caso $\mathcal{B} = 0$. Si hanno allora le *condizioni di non-rientro*

$$w(\vec{s}, \vec{u}, \nu) = 0, \quad (\vec{s}, \vec{u}, \nu) \in \Phi^{\text{in}}. \quad (5.1.25)$$

Come altro esempio, supponiamo che $\Sigma = S^2 \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ e, per ogni $j \in \mathcal{Y}^{\text{out}}$, poniamo

$$(\mathcal{B}j)(\vec{s}, \vec{u}, \nu) := \alpha j(\vec{s}, \vec{u}_{\text{re}}, \nu) \quad (\vec{s}, \vec{u}, \nu) \in \Phi^{\text{in}}, \quad (5.1.26)$$

dove $\alpha \in [0, 1]$ e

$$\vec{u}_{\text{re}} = \vec{u}_{\text{re}}(\vec{s}, \vec{u}) := \vec{u} - 2[\vec{u} \cdot \vec{n}(\vec{s})] \vec{n}(\vec{s}), \quad (\vec{s}, \vec{u}, \nu) \in \Phi^{\text{in}}. \quad (5.1.27)$$

Si ha che tale \mathcal{B} appartiene a $[\mathcal{Y}^{\text{out}}, \mathcal{Y}^{\text{in}}]$ e le condizioni al contorno (5.1.24) esprimono in questo caso la *riflessione*, parziale o totale, delle particelle sul bordo di \mathcal{R} , [6].

Il risultato fondamentale della teoria deterministica è che per condizioni al contorno *dissipative*, ovvero con $\|\mathcal{B}\| < 1$, l'operatore $T_{\mathcal{B}}$ genera un semigruppato “contrattivo” ($\beta = 0$ e $M = 1$). Inoltre, ricordando che lo spazio \mathcal{X} dato dalla (5.1.3) ha una naturale struttura di reticolo di Banach (si veda la sezione 4.2), se l'operatore \mathcal{B} è positivo, il semigruppato generato da $T_{\mathcal{B}}$ è positivo. Tutto ciò è riassunto nel teorema seguente.

Teorema 5.5 Se $\|\mathcal{B}\| < 1$ e \mathcal{B} allora $T_{\mathcal{B}} \in \mathcal{G}(1, 0; \mathcal{X})$. Se inoltre $\mathcal{B} \geq 0$, allora $\mathcal{S}_{T_{\mathcal{B}}} \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Si vedano [62] (teorema 4.3) e anche [28]. \square

Se $\|\mathcal{B}\| = 1$ l'operatore $T_{\mathcal{B}}$ genera un semigruppato $\mathcal{S}_{T_{\mathcal{B}}}$ contrattivo (e positivo se $\mathcal{B} \geq 0$) se e solo se

$$\mathcal{S}_{T_{\mathcal{B}}}(t)w := \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \mathcal{S}_{T_{\alpha\mathcal{B}}}(t)w \quad (5.1.28)$$

esiste per ogni $w \in \mathcal{X}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ ([62], lemma 4.6).

Vale la pena ricordare che recentemente, sono stati dimostrati teoremi di generazione di semigruppato anche per condizioni di tipo (strettamente) *moltiplicativo*, cioè con $\|\mathcal{B}\| > 1$ (si veda [16] e le citazioni in esso contenute). Tali risultati si basano sul teorema di generazione di Arendt per operatori positivi, [2].

5.2 Condizioni al contorno non omogenee

Nei problemi di trasporto, condizioni al contorno non omogenee nascono in modo naturale quando si debba tener conto di una sorgente di particelle, o di radiazione, *esterna* alla regione in cui si studia il fenomeno di trasporto. Nel modello matematico una tale sorgente si manifesta come un termine (noto) di flusso entrante da aggiungere alla condizione al contorno (5.1.24). Pertanto le condizioni al contorno diventano “lineari non omogenee”.

Abbiamo visto come la teoria matematica del trasporto si adatti, con notevole eleganza, alla teoria analitica dei problemi di evoluzione in spazi di Banach. La letteratura matematica sui problemi di trasporto con condizioni al contorno non omogenee è inizialmente alle prese con modelli particolari e offre dei risultati parziali (soprattutto per quanto riguarda la regolarità della soluzione), [19], [39], [36]. In [17], dove si identifica il termine di sorgente al bordo con un termine di sorgente diffusa costruito in maniera opportuna, viene anticipato sostanzialmente l’approccio che qui viene proposto. Una trattazione completa e di grande generalità viene sviluppata in [7] e [28]. Tuttavia, il punto di vista di tale trattazione non è quello dei problemi di evoluzione ma si rivolge piuttosto a un contesto di tipo $L^p(\mathcal{W}, d\vec{r} d\zeta_{(\vec{u}, \nu)} dt)$, dove \mathcal{W} è una varietà immersa in $\mathcal{R} \times \Sigma \times \mathbb{T}$ e \mathbb{T} è un intervallo temporale. In [28] i risultati ottenuti nel contesto ora descritto sono poi riletti nell’ambito della teoria dei semigruppato, ma *non* nel caso di sorgenti esterne dipendenti dal tempo.

In [9] e [6], infine, si mostra come il problema possa essere risolto applicando il teorema di Crandall-Liggett, [23], sulla generazione dei semigruppato non lineari, [10], [37].

Seguendo l’impostazione già anticipata in [5], e parzialmente in [6], vogliamo adesso mostrare come la semplice teoria dei problemi di evoluzione *affini* (si veda la sezione 2.4) offra la possibilità di studiare le condizioni al contorno non omogenee in piena generalità, rimanendo in linea con l’approccio semigruppato.

Sia, come nella sezione precedente, $\mathcal{B} \in [\mathcal{Y}^{\text{out}}, \mathcal{Y}^{\text{in}}]$ e sia

$$\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{Y}^{\text{in}}, \quad t \mapsto \gamma(t) \in \mathcal{Y}^{\text{in}} \quad (5.2.1)$$

un assegnato termine di sorgente al bordo (dove, al solito, $\mathbb{T} := [0, t_0)$ con eventualmente $t_0 = +\infty$). Se $w \in \mathcal{D}(T_M)$, consideriamo una condizione al contorno del

tipo

$$F_+w = \mathcal{B}F_-w + \gamma(t), \quad t \in \mathbb{T}. \quad (5.2.2)$$

A tale condizione facciamo corrispondere una famiglia (dipendente dal tempo) di operatori, definiti come segue:

$$\mathcal{D}(T_{\mathcal{B},\gamma}(t)) := \{w \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{M}}) \mid F_-w \in \mathcal{Y}^{\text{out}}, F_+w = \mathcal{B}F_-w + \gamma(t)\}, \quad (5.2.3)$$

$$T_{\mathcal{B},\gamma}(t)(w) := T_{\mathcal{M}}w, \quad w \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{B},\gamma}(t)), \quad (5.2.4)$$

per ogni $t \in \mathbb{T}$. Ricordando la definizione 2.33, e la definizione dell'operatore $T_{\mathcal{B}}$, la seguente osservazione è di dimostrazione immediata.

Osservazione 5.6 *L'insieme $\{T_{\mathcal{B},\gamma}(t) \mid t \in \mathbb{T}\}$ è una famiglia $T_{\mathcal{B}}$ -affine di operatori.*

Come abbiamo visto nella sezione 2.4, il problema centrale per studiare il problema di evoluzione affine “guidata” dagli operatori $T_{\mathcal{B},\gamma}(t)$, è quello di trovare una *rappresentazione regolare* della famiglia $\mathcal{D}(T_{\mathcal{B}})$ -affine di sottospazi costituita dai domini $\{\mathcal{D}(T_{\mathcal{B},\gamma}(t)) \mid t \in \mathbb{T}\}$. Ricordiamo che tale rappresentazione è una funzione $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ tale che $p(t) \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{B},\gamma}(t))$ per ogni $t \in \mathbb{T}$, per cui valga la relazione

$$\mathcal{D}(T_{\mathcal{B},\gamma}(t)) = p(t) + \mathcal{D}(T_{\mathcal{B}}), \quad t \in \mathbb{T}. \quad (5.2.5)$$

Il resto di questa sezione è dedicato alla costruzione di una rappresentazione di questo tipo.

Prima di tutto introduciamo le funzioni

$$t_+(\vec{r}, \vec{u}) := \sup \left\{ t \geq 0 \mid \vec{r} + ct\vec{u} \in \mathcal{R} \right\}, \quad (5.2.6)$$

$$t_-(\vec{r}, \vec{u}) := \sup \left\{ t \geq 0 \mid \vec{r} - ct\vec{u} \in \mathcal{R} \right\}, \quad (5.2.7)$$

con $(\vec{r}, \vec{u}) \in \overline{\mathcal{R}} \times S^2$. Ricordando che la regione \mathcal{R} si suppone convessa, il significato di t_+ e t_- è il seguente. Se un fotone si trova nel punto $\vec{r} \in \mathcal{R}$, allora $t_+(\vec{r}, \vec{u})$ è il *tempo* impiegato dal fotone per raggiungere $\partial\mathcal{R}$, viaggiando senza incontrare ostacoli nella direzione $\vec{u} \in S^2$. Analogo significato ha $t_-(\vec{r}, \vec{u})$, ma si misura il tempo impiegato nella direzione $-\vec{u}$. Si dimostrano facilmente le seguenti proprietà.

- a) $t_-(\vec{r}, \vec{u}) = t_+(\vec{r}, -\vec{u})$, per ogni $(\vec{r}, \vec{u}) \in \overline{\mathcal{R}} \times S^2$;
- b) $t_+(\vec{s}, \vec{u}) = 0$ per ogni $(\vec{s}, \vec{u}) \in \Phi^{\text{out}}$ e $t_-(\vec{s}, \vec{u}) = 0$, per ogni $(\vec{s}, \vec{u}) \in \Phi^{\text{in}}$;
- c) $t_+(\vec{r} + ct\vec{u}, \vec{u}) = t_+(\vec{r}, \vec{u}) - t$ e $t_-(\vec{r} + ct\vec{u}, \vec{u}) = t_-(\vec{r}, \vec{u}) + t$, per ogni $t \in [-t_-(\vec{r}, \vec{u}), t_+(\vec{r}, \vec{u})]$ e $(\vec{r}, \vec{u}) \in \overline{\mathcal{R}} \times S^2$.

Osserviamo che

$$(\vec{s}, \vec{u}, \nu, t) \mapsto (\vec{s} + ct\vec{u}, \vec{u}, \nu) \quad (5.2.8)$$

definisce un cambio di variabili dall'insieme

$$\left\{ (\vec{s}, \vec{u}, \nu, t) \mid (\vec{s}, \vec{u}, \nu) \in \Phi^{\text{in}}, 0 \leq t \leq t_+(\vec{s}, \vec{u}) \right\} \quad (5.2.9)$$

all'insieme $\bar{\mathcal{R}} \times \Sigma$. Analogamente

$$(\vec{s}, \vec{u}, \nu, t) \mapsto (\vec{s} - ct\vec{u}, \vec{u}, \nu) \quad (5.2.10)$$

definisce un cambio di variabili dall'insieme

$$\left\{ (\vec{s}, \vec{u}, \nu, t) \mid (\vec{s}, \vec{u}, \nu) \in \Phi^{\text{out}}, 0 \leq t \leq t_-(\vec{s}, \vec{u}) \right\} \quad (5.2.11)$$

all'insieme $\bar{\mathcal{R}} \times \Sigma$. Si hanno così due interessanti formule di cambio di variabile per gli integrali su $\mathcal{R} \times \Sigma$.

Lemma 5.7 *Per ogni $w \in \mathcal{X}$ valgono le seguenti uguaglianze:*

$$\int_{\mathcal{R} \times \Sigma} w(\vec{r}, \vec{u}, \nu) d\vec{r} d\zeta_{(\vec{u}, \nu)} = \int_{\Phi^{\text{in}}} \int_0^{t_+(\vec{s}, \vec{u})} w(\vec{s} + ct\vec{u}, \vec{u}, \nu) dt d\phi_{(\vec{s}, \vec{u}, \nu)}^+, \quad (5.2.12)$$

$$\int_{\mathcal{R} \times \Sigma} w(\vec{r}, \vec{u}, \nu) d\vec{r} d\zeta_{(\vec{u}, \nu)} = \int_{\Phi^{\text{out}}} \int_0^{t_-(\vec{s}, \vec{u})} w(\vec{s} - ct\vec{u}, \vec{u}, \nu) dt d\phi_{(\vec{s}, \vec{u}, \nu)}^-, \quad (5.2.13)$$

DIMOSTRAZIONE. Si veda [62], lemma 3.2 e lemma 3.3. \square

Nella sezione precedente abbiamo introdotto gli operatori di traccia F_+ e F_- . Chiameremo, in generale, *operatore di sollevamento* di \mathcal{Y}^{in} un'applicazione lineare $G : \mathcal{Y}^{\text{in}} \rightarrow \mathcal{D}(T_M)$, tale che

$$F_+ \circ G = I \quad (5.2.14)$$

Analogamente, si chiama *operatore di sollevamento* di \mathcal{Y}^{out} un'applicazione lineare $G : \mathcal{Y}^{\text{out}} \rightarrow \mathcal{D}(T_M)$, tale che $F_- \circ G = I$.

Costruiamo ora un particolare operatore di sollevamento su \mathcal{Y}^{in} . Per ogni funzione $\sigma : \mathcal{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$, misurabile e limitata, definiamo

$$\tau_\sigma(\vec{r}, \vec{u}, \nu) := \int_0^{ct_-(\vec{r}, \vec{u})} \sigma(\vec{r} - s\vec{u}, \nu) ds, \quad (\vec{r}, \vec{u}, \nu) \in \mathcal{R} \times \Sigma. \quad (5.2.15)$$

Se σ è interpretata come sezione d'urto, $\tau_\sigma(\vec{r}, \vec{u}, \nu)$ ha il significato fisico di *spessore ottico* alla frequenza ν , [42], fra il punto \vec{r} e il punto $\vec{r} - ct_-(\vec{r}, \vec{u})\vec{u} \in \partial\mathcal{R}$. Per ogni $j \in \mathcal{Y}^{\text{in}}$ definiamo quindi

$$(G_\sigma j)(\vec{r}, \vec{u}, \nu) := e^{-\tau_\sigma(\vec{r}, \vec{u}, \nu)} j(\vec{r} - ct_-(\vec{r}, \vec{u})\vec{u}, \vec{u}, \nu), \quad (\vec{r}, \vec{u}, \nu) \in \mathcal{R} \times \Sigma. \quad (5.2.16)$$

(osserviamo che $(\vec{r} - ct_-(\vec{r}, \vec{u})\vec{u}, \vec{u}, \nu) \in \Phi^{\text{in}}$ se $(\vec{r}, \vec{u}, \nu) \in \mathcal{R} \times \Sigma$).

Lemma 5.8 *Per ogni $\sigma : \mathcal{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ misurabile e limitata, la (5.2.16) definisce un operatore $G_\sigma \in [\mathcal{Y}^{\text{in}}, \mathcal{X}]$. Inoltre, per ogni $j \in \mathcal{Y}^{\text{in}}$ si ha che $G_\sigma j \in \mathcal{D}(T_M)$ e valgono le uguaglianze*

$$T_M G_\sigma j = c\sigma G_\sigma j, \quad F_+ G_\sigma j = j. \quad (5.2.17)$$

In particolare, G_σ è un sollevamento continuo di \mathcal{Y}^{in} .

DIMOSTRAZIONE. Fissati $(\vec{r}, \vec{u}, \nu) \in \overline{\mathcal{R}} \times \Sigma$ e $j \in \mathcal{Y}^{\text{in}}$, consideriamo la funzione

$$f_{(\vec{r}, \vec{u}, \nu)} : [-t_-(\vec{r}, \vec{u}), t_+(\vec{r}, \vec{u})] \rightarrow \mathcal{R}, \quad f_{(\vec{r}, \vec{u}, \nu)}(t) := (G_\sigma j)(\vec{r} + ct\vec{u}, \vec{u}, \nu). \quad (5.2.18)$$

Dalla definizione di $G_\sigma j$ si ha che

$$f_{(\vec{r}, \vec{u}, \nu)}(t) = \exp \left[- \int_{-ct_-(\vec{r}, \vec{u})}^{ct} \sigma(\vec{r} + s\vec{u}, \nu) ds \right] j(\vec{r} - ct_-(\vec{r}, \vec{u})\vec{u}, \vec{u}, \nu). \quad (5.2.19)$$

Per calcolare $\|G_\sigma j\|_{\mathcal{X}}$, applichiamo la (5.2.12) e teniamo conto del fatto che il fattore esponenziale è maggiorato da 1 (in quanto $\sigma \geq 0$):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R} \times \Sigma} |(G_\sigma j)(\vec{r}, \vec{u}, \nu)| d\vec{r} d\zeta_{(\vec{u}, \nu)} &= \int_{\Phi^{\text{in}}} \int_0^{t_+(\vec{s}, \vec{u})} |(G_\sigma j)(\vec{s} + ct\vec{u}, \vec{u})| dt d\phi_{(\vec{s}, \vec{u}, \nu)}^+ \\ &= \int_{\Phi^{\text{in}}} \int_0^{t_+(\vec{s}, \vec{u})} |f_{(\vec{s}, \vec{u}, \nu)}(t)| dt d\phi_{(\vec{s}, \vec{u}, \nu)}^+ \leq \int_{\Phi^{\text{in}}} \int_0^{t_+(\vec{s}, \vec{u})} |j(\vec{s}, \vec{u}, \nu)| dt d\phi_{(\vec{s}, \vec{u}, \nu)}^+, \end{aligned}$$

ovvero

$$\|G_\sigma j\|_{\mathcal{X}} \leq t_{\mathcal{R}} \|j\|_{\mathcal{Y}^{\text{in}}} \quad (5.2.20)$$

dove

$$t_{\mathcal{R}} := \sup \left\{ t_+(\vec{s}, \vec{u}) \mid (\vec{s}, \vec{u}) \in \Phi^{\text{in}} \right\}. \quad (5.2.21)$$

La disuguaglianza (5.2.20) dimostra che $G_\sigma \in [\mathcal{Y}^{\text{in}}, \mathcal{X}]$, con $\|G_\sigma\| \leq t_{\mathcal{R}}$.

Per l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, dalla (5.2.19) segue che, per ogni fissato $(\vec{r}, \vec{u}, \nu) \in \overline{\mathcal{R}} \times \Sigma$, la funzione $t \mapsto f_{(\vec{r}, \vec{u}, \nu)}(t)$ è assolutamente continua. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $t \mapsto f_{(\vec{r}, \vec{u}, \nu)}(t)$ è derivabile per quasi ogni t , con

$$f'_{(\vec{r}, \vec{u}, \nu)}(t) = -c\sigma(\vec{r} + ct\vec{u}, \nu) f_{(\vec{r}, \vec{u}, \nu)}(t). \quad (5.2.22)$$

Pertanto

$$c\vec{u} \cdot \nabla(G_\sigma j)(\vec{r}, \vec{u}, \nu) = -c\sigma(\vec{r}, \nu) (G_\sigma j)(\vec{r}, \vec{u}, \nu) \quad (5.2.23)$$

per quasi ogni $(\vec{r}, \vec{u}, \nu) \in \mathcal{R} \times \Sigma$ e, chiaramente, $\sigma G_\sigma j \in \mathcal{X}$. Queste condizioni sono sufficienti ad assicurare che $G_\sigma \in \mathcal{D}(T_M)$, come segue dal teorema 2.5 di Voigt, [62], che caratterizza $\mathcal{D}(T_M)$ in termini di funzioni assolutamente continue nelle direzioni contenute in Σ . La (5.2.17) segue poi dalla (5.2.19) e dalla (5.2.23). \square

Da un punto di vista fisico, la funzione $w := G_\sigma j$ è soluzione di un problema di trasporto stazionario, con solo assorbimento e flusso assegnato al bordo:

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \nabla w + \sigma w = 0, \\ w|_{\Phi^{\text{in}}} = j. \end{cases} \quad (5.2.24)$$

Quello che vogliamo fare è costruire una rappresentazione $p(t)$ di $\mathcal{D}(T_{\mathcal{B},\gamma}(t))$ della forma

$$p(t) := G_\sigma j(t), \quad (5.2.25)$$

dove $\sigma : \mathcal{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ è una qualsiasi funzione misurabile e limitata e, per ogni $t \in \mathbb{T}$ fissato, $j(t) \in \mathcal{Y}^{\text{in}}$ va determinato in modo che $p(t)$ soddisfi la condizione (5.2.2). Sostituendo quindi $G_\sigma j(t)$ al posto di w nella (5.2.2), per la seconda delle (5.2.17) otteniamo

$$j(t) = \mathcal{B}F_- G_\sigma j(t) + \gamma(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (5.2.26)$$

che, fissato $t \in \mathbb{T}$, è un'equazione in \mathcal{Y}^{in} per l'incognita $j(t)$.

Lemma 5.9 *Se $\|\mathcal{B}\| < 1$, l'equazione (5.2.26) ha, per ogni fissato t , un'unica soluzione $j(t) \in \mathcal{Y}^{\text{in}}$ data da*

$$j(t) := (I - \mathcal{B}F_- G_\sigma)^{-1} \gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{B}F_- G_\sigma)^k \gamma(t). \quad (5.2.27)$$

DIMOSTRAZIONE. Basterà dimostrare che $F_- G_\sigma \in [\mathcal{Y}^{\text{in}}, \mathcal{Y}^{\text{out}}]$, con $\|F_- G_\sigma\| \leq 1$. Consideriamo il cambio di variabile

$$(\vec{s}, \vec{u}, \nu) \mapsto (\vec{s} - ct_-(\vec{s}, \vec{u})\vec{u}, \vec{u}, \nu), \quad (5.2.28)$$

dall'insieme Φ^{out} all'insieme Φ^{in} . Da [62], lemma 3.2 e lemma 3.3, segue che tale cambio di variabile è unitario rispetto alle misure ϕ^+ e ϕ^- , ovvero

$$\int_{\Phi^{\text{in}}} j(\vec{s}_1, \vec{u}_1, \nu_1) d\phi_{(\vec{s}_1, \vec{u}_1, \nu_1)}^+ = \int_{\Phi^{\text{out}}} j(\vec{s} - ct_-(\vec{s}, \vec{u})\vec{u}, \vec{u}, \nu) d\phi_{(\vec{s}, \vec{u}, \nu)}^- \quad (5.2.29)$$

per ogni $j \in \mathcal{Y}^{\text{in}}$. Pertanto, ricordando la definizione (5.2.16) e maggiorando l'esponenziale con 1, si ha

$$\begin{aligned} \|F_- G_\sigma j\|_{\mathcal{Y}^{\text{out}}} &\leq \int_{\Phi^{\text{out}}} |j(\vec{s} - ct_-(\vec{s}, \vec{u})\vec{u}, \vec{u}, \nu)| d\phi_{(\vec{s}, \vec{u}, \nu)}^- \\ &= \int_{\Phi^{\text{in}}} |j(\vec{s}_1, \vec{u}_1, \nu_1)| d\phi_{(\vec{s}_1, \vec{u}_1, \nu_1)}^+ = \|j\|_{\mathcal{Y}^{\text{in}}} \end{aligned}$$

per ogni $j \in \mathcal{Y}^{\text{in}}$, da cui la tesi. \square

Osserviamo per inciso che nel caso in cui \mathcal{B} è l'operatore di riflessione dato dalla (5.1.26), il significato della serie $\sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{B}F_- G_\sigma)^k \gamma(t)$ è quello di sottoporre $\gamma(t)$ a infinite riflessioni su $\partial\mathcal{R}$, oltre che ad un'attenuazione esponenziale in \mathcal{R} , [6].

Teorema 5.10 *Per ogni $\sigma : \mathcal{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ misurabile e limitata, per ogni funzione $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{Y}^{\text{in}}$ e per ogni $\mathcal{B} \in [\mathcal{Y}^{\text{out}}, \mathcal{Y}^{\text{in}}]$ con $\|\mathcal{B}\| < 1$, la funzione $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{Y}^{\text{in}}$ data da*

$$p(t) := G_\sigma(I - \mathcal{B}F_-G_\sigma)^{-1}\gamma(t), \quad t \in \mathbb{T} \quad (5.2.30)$$

è una rappresentazione di $\{\mathcal{D}(T_{\mathcal{B},\gamma}(t)) : t \in \mathbb{T}\}$. Inoltre, se $\gamma \in C^k(\mathbb{T}, \mathcal{Y}^{\text{in}})$, per un certo $k \in \mathbb{N}_0$, allora $p \in C^k(\mathbb{T}, \mathcal{X})$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $t \in \mathbb{T}$. Dai lemmi 5.8 e 5.9 segue che $p(t) \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{M}})$. Inoltre $F_+p(t) = (I - \mathcal{B}F_-G_\sigma)^{-1}\gamma(t) \in \mathcal{Y}^{\text{in}}$, e quindi anche $F_-p(t) \in \mathcal{Y}^{\text{out}}$, per il teorema 5.3. Infine, $F_+p(t) - \mathcal{B}F_-p(t) = (I - \mathcal{B}F_-G_\sigma)^{-1}\gamma(t) - \mathcal{B}F_-G_\sigma(I - \mathcal{B}F_-G_\sigma)^{-1}\gamma(t) = \gamma(t)$, per cui la (5.2.2) è soddisfatta. Pertanto $p(t) \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{B},\gamma}(t))$ per ogni $t \in \mathbb{T}$, secondo la definizione (5.2.3), e dunque $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ è una rappresentazione di $\{\mathcal{D}(T_{\mathcal{B},\gamma}(t)) : t \in \mathbb{T}\}$. La seconda parte della tesi segue direttamente dai lemmi 5.8 e 5.9 e dal lemma 4.3. \square

Per concludere la sezione, un breve commento sulla costruzione che abbiamo appena visto. Usando una notazione meno formale di quella usata finora, ricordiamo che abbiamo cercato una rappresentazione p della forma

$$p(\vec{r}, \vec{u}, \nu, t) := e^{-\tau_\sigma(\vec{r}, \vec{u}, \nu)} j(\vec{r} - ct_-(\vec{r}, \vec{u})\vec{u}, \vec{u}, \nu), \quad (5.2.31)$$

dove j è una funzione su Φ^{in} che deve essere determinata in modo tale che p soddisfi la condizione (5.2.2). Tale condizione su j ci ha condotti all'eq. (5.2.26), la cui soluzione è esprimibile sotto forma di una serie di operatori limitati applicati al dato $\gamma(t)$ (si veda la (5.2.27)). Il vantaggio di questo tipo di costruzione dipende soprattutto dal fatto che, come risulta dal teorema 5.10, a una certa regolarità della funzione γ corrisponde un'identica regolarità della funzione p .

Una costruzione alternativa è quella di cercare una rappresentazione p_1 della forma

$$p_1(\vec{r}, \vec{u}, \nu, t) := e^{-\tau_\sigma(\vec{r}, \vec{u}, \nu)} j(\vec{r} - ct_-(\vec{r}, \vec{u})\vec{u}, \vec{u}, \nu, t - t_-(\vec{r}, \vec{u})). \quad (5.2.32)$$

La differenza di interpretazione fisica tra p e p_1 è chiara: p trasferisce *istantaneamente* il dato al bordo j in tutto \mathcal{R} , mentre p_1 impiega il tempo $t_-(\vec{r}, \vec{u})$ per trasportare nel punto (\vec{r}, \vec{u}) il dato al bordo che si trovava nel punto $\vec{r} - ct_-(\vec{r}, \vec{u})\vec{u}$ all'istante t . Si può verificare facilmente che p_1 è soluzione del problema di trasporto non-stazionario:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} p_1 + c\vec{u} \cdot \nabla p_1 + c\sigma p_1 = 0, \\ p_1|_{\Phi^{\text{in}}} = j. \end{cases} \quad (5.2.33)$$

Anche in questo caso si deve determinare j in modo che la condizione al contorno (5.2.2) sia soddisfatta e anche in questo caso si trova che j è esprimibile come una serie di operatori dipendenti dal tempo che agiscono su γ . Tali operatori

“mescolano” le variabili \vec{r} , \vec{u} e t , rendendo più difficile il controllo della regolarità di p_1 in dipendenza dalla regolarità di γ . Però p_1 ha il vantaggio di essere una rappresentazione “più fisica” il che si riflette nel fatto che la soluzione del problema di trasporto espressa in termini di p_1 risulta di forma particolarmente semplice, [6]. Per di più, la serie di operatori che agisce su γ ha in questo caso solo un numero *finito* di termini non nulli, il che è dovuto al fatto che $\gamma(t)$ si propaga con velocità finita c (per maggiori dettagli si veda [6]).

5.3 L’operatore collisionale aleatorio

Nella teoria del trasporto deterministico l’operatore collisionale J_c , che tiene conto del fenomeno di assorbimento e scattering dei fotoni da parte del mezzo ospite, è una perturbazione lineare e limitata dell’operatore di *streaming* $T_{\mathcal{B}}$. In teoria del trasporto stocastico l’operatore collisionale, in quanto dipende dalla struttura aleatoria del mezzo, diventa un operatore aleatorio. In questa sezione definiamo opportunamente J_c e dimostriamo che, sotto ragionevoli ipotesi di regolarità, esso è una *perturbazione aleatoria* nel senso della sezione 3.5.

Siano \mathcal{R} , Σ , \mathcal{V} , \mathcal{X} , eccetera, come nella precedenti sezioni. Seguendo l’impostazione *f.i.a.* (si veda la sezione 1.5), sia $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\vec{r}, \omega)$ la funzione indicatrice del mezzo *clump* dipendente dal parametro aleatorio ω (si veda la (1.5.1)). Supponiamo che ω sia un evento elementare di uno spazio di probabilità $\mathcal{M} := (\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, dove, per poter applicare i risultati dei capitoli 3 e 4, dobbiamo supporre che la σ -algebra \mathfrak{F} sia *separabile* (definizione 2.39). Ad esempio, Ω potrebbe essere l’insieme definito dalla (1.5.4), con $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}_\Omega$ e \mathbf{P} probabilità uniforme. Assumendo che le proprietà del mezzo rispetto all’interazione coi fotoni siano isotrope, e quindi indipendenti dalla direzione \vec{u} di questi ultimi, le sezioni d’urto di assorbimento σ_i^a e di scattering σ_i^s ($i = 1$ nel mezzo *clump* e $i = 0$ nel mezzo *interclump*) sono funzioni non negative della sola frequenza ν . Supporremo che le funzioni $\sigma_i^a : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $\sigma_i^s : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $i \in \{0, 1\}$ siano misurabili e limitate da opportune costanti $\bar{\sigma}^a, \bar{\sigma}^s$,

$$0 \leq \sigma_i^a(\nu) \leq \bar{\sigma}^a, \quad 0 \leq \sigma_i^s(\nu) \leq \bar{\sigma}^s, \quad \nu \in \mathcal{V}, \quad i \in \{0, 1\}. \quad (5.3.1)$$

Poniamo

$$\beta_0 := c\bar{\sigma}^a + 2c\bar{\sigma}^s. \quad (5.3.2)$$

Supponiamo per semplicità che lo scattering dipenda dall’indice i solamente nella sezione d’urto (questo ha senso se, ad esempio, le due fasi differiscono solo per la loro densità, come nel caso della nube *clumpy*). Avremo perciò un nucleo di scattering K indipendente da i e (per l’isotropia del mezzo) della forma

$$K = K(\vec{u} \cdot \vec{u}_*, \nu, \nu_*). \quad (5.3.3)$$

Nella (5.3.3), \vec{u}_* , ν_* sono direzione e frequenza del fotone emergente e \vec{u} , ν sono direzione e frequenza del fotone incidente. Assumiamo che $K : [-1, 1] \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$

sia una funzione misurabile e non negativa tale che

$$\int_{\Sigma} K(\vec{u} \cdot \vec{u}_*, \nu, \nu_*) d\zeta_{(\vec{u}, \nu)} = 1 \quad (\vec{u}_*, \nu_*) \in \Sigma \quad (5.3.4)$$

(si veda la sezione 1.2).

Seguendo l'impostazione descritta nella sezione 1.5 definiamo le sezioni d'urto aleatorie come segue

$$\sigma^a(\vec{r}, \nu, \omega) := \sigma_0^a(\nu) + [\sigma_1^a(\nu) - \sigma_0^a(\nu)]\mathcal{C}(\vec{r}, \omega), \quad (\vec{r}, \nu) \in \mathcal{R} \times \mathcal{V}, \quad \omega \in \Omega, \quad (5.3.5)$$

$$\sigma^s(\vec{r}, \nu, \omega) := \sigma_0^s(\nu) + [\sigma_1^s(\nu) - \sigma_0^s(\nu)]\mathcal{C}(\vec{r}, \omega), \quad (\vec{r}, \nu) \in \mathcal{R} \times \mathcal{V}, \quad \omega \in \Omega. \quad (5.3.6)$$

Poniamo anche

$$\sigma(\vec{r}, \nu, \omega) := \sigma^a(\vec{r}, \nu, \omega) + \sigma^s(\vec{r}, \nu, \omega), \quad (\vec{r}, \nu) \in \mathcal{R} \times \mathcal{V}, \quad \omega \in \Omega, \quad (5.3.7)$$

che ha il significato di “sezione d'urto totale aleatoria”. Definiamo allora, in dipendenza da $\omega \in \Omega$, l'operatore di assorbimento $J_a(\omega)$ e l'operatore di scattering $J_s(\omega)$ che agiscono su ogni $w \in \mathcal{X}$ nel seguente modo:

$$(J_a(\omega)w)(\vec{r}, \vec{u}, \nu) := -c\sigma(\vec{r}, \nu, \omega)w(\vec{r}, \vec{u}, \nu) \quad (5.3.8)$$

$$(J_c(\omega)w)(\vec{r}, \vec{u}, \nu) := \int_{\Sigma} c\sigma^s(\vec{r}, \nu_*, \omega)K(\vec{u} \cdot \vec{u}_*, \nu, \nu_*)w(\vec{r}, \vec{u}_*, \nu_*)d\zeta_{(\vec{u}_*, \nu_*)}, \quad (5.3.9)$$

per ogni $(\vec{r}, \vec{u}, \nu) \in \mathcal{R} \times \Sigma$. Definiamo anche l'operatore collisionale

$$J_c(\omega) := J_a(\omega) + J_s(\omega). \quad (5.3.10)$$

Per dimostrare che J_c è una perturbazione aleatoria, cioè una variabile aleatoria a valori in $[\mathcal{X}]$, è necessario ora rivolgere la nostra attenzione al problema, rimasto finora in sospenso, di formulare ipotesi di regolarità su $\mathcal{C}(\vec{r}, \omega)$.

Se \mathcal{A} è un insieme con una data struttura di spazio misurabile e $\rho > 0$ è una costante, definiamo

$$M_\rho(\mathcal{A}) := \{\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \mid \psi \text{ è misurabile e } |\psi(a)| < \rho \text{ per ogni } a \in \mathcal{A}\}. \quad (5.3.11)$$

Consideriamo su $M_\rho(\mathcal{A})$ la topologia della *convergenza puntuale quasi ovunque*. In quanto spazio topologico, $M_\rho(\mathcal{A})$ ha la struttura naturale di spazio misurabile data dalla σ -algebra di Borel e ha senso parlare di funzioni misurabili a valori in esso.

L'ipotesi su \mathcal{C} che ci permette di dimostrare che J_c è misurabile in senso forte è che la funzione $\mathcal{C}(\cdot, \omega) : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{r} \mapsto \mathcal{C}(\vec{r}, \omega)$ appartenga a $M_1(\mathcal{R})$ per ogni fissato ω , e che, identificando \mathcal{C} con la funzione

$$\mathcal{C} : \Omega \rightarrow M_1(\mathcal{R}), \quad \omega \mapsto \mathcal{C}(\cdot, \omega), \quad (5.3.12)$$

\mathcal{C} sia misurabile.

Lemma 5.11 *Supponiamo che la funzione indicatrice aleatoria \mathcal{C} sia una funzione misurabile da Ω a $M_1(\mathcal{R})$. Allora la (5.3.5), la (5.3.6) e la (5.3.7) definiscono tre funzioni $\sigma^a : \Omega \rightarrow M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$, $\sigma^s : \Omega \rightarrow M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$ e $\sigma : \Omega \rightarrow M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$ misurabili, con $\rho := \beta_0/c$.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il lemma per σ^a . Ricordando che si è assunto $\sigma_i^a \in M_{\bar{\sigma}^a}(\mathcal{V})$ per $i \in \{0, 1\}$, dalla definizione (5.3.2) e dalle proprietà elementari delle funzioni misurabili segue subito che $\sigma^a(\omega) := \sigma^a(\cdot, \cdot, \omega)$ appartiene a $M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$ per ogni $\omega \in \Omega$, dove $\rho := \beta_0/c$ e β_0 è dato dalla (5.3.2). Osservando che la funzione

$$h : M_1(\mathcal{R}) \rightarrow M_{\beta_0}(\mathcal{R} \times \mathcal{V}), \quad h(\psi) := \sigma_0^a + (\sigma_1^a - \sigma_0^a)\psi \quad (5.3.13)$$

è continua per la topologia di $M_1(\mathcal{R})$ e $M_{\beta_0}(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$, si ha che σ^a (vista come funzione da Ω a $M_{\beta_0}(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$) è la composizione della funzione misurabile (per ipotesi) $\mathcal{C} : \Omega \rightarrow M_1(\mathcal{R})$ con la funzione continua $h : M_1(\mathcal{R}) \rightarrow M_{\beta_0}(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$, ed è perciò misurabile per l'osservazione 2.43.

La dimostrazione per σ^s e per σ si svolge in modo identico. \square

Adottando il punto di vista in cui \mathcal{C} , σ^a , σ^s e σ sono funzioni da Ω a, rispettivamente, $M_1(\mathcal{R})$ e $M_{\beta_0}(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$, d'ora in avanti scriveremo, ad esempio $\mathcal{C}(\omega)(\vec{r})$ e $\sigma(\omega)(\vec{r}, \nu)$ anziché $\mathcal{C}(\vec{r}, \omega)$ e $\sigma(\vec{r}, \nu, \omega)$.

Teorema 5.12 *Supponiamo che la funzione indicatrice aleatoria \mathcal{C} sia una funzione misurabile da Ω a $M_1(\mathcal{R})$. Allora la (5.3.8), la (5.3.9) e la (5.3.10) definiscono una funzione $J_c : \Omega \rightarrow [\mathcal{X}]$ misurabile in senso forte. Inoltre, se $\beta_0 \geq 0$ è dato dalla (5.3.2) si ha*

$$\|J_c(\omega)\| \leq \beta_0 \quad \omega \in \Omega. \quad (5.3.14)$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $w \in \mathcal{X}$ e $\omega \in \Omega$ si ha

$$\|J_a(\omega)w\| = \int_{\mathcal{R} \times \Sigma} c |\sigma(\omega)(\vec{r}, \nu) w(\vec{r}, \vec{u}, \nu)| d\vec{r} d\zeta_{(\vec{u}, \nu)} \leq c(\bar{\sigma}^a + \bar{\sigma}^s) \|w\|$$

Inoltre, dal teorema di Fubini, dalla (5.3.2) e dalla (5.3.4) si ha che $\|J_s(\omega)w\|$ è maggiorato da

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{R} \times \Sigma} \int_{\Sigma} c \sigma^s(\omega)(\vec{r}, \nu_*) K(\vec{u} \cdot \vec{u}_*, \nu, \nu_*) |w(\vec{r}, \vec{u}_*, \nu_*)| d\zeta_{(\vec{u}_*, \nu_*)} d\vec{r} d\zeta_{(\vec{u}, \nu)} \\ & \leq c \bar{\sigma}^s \int_{\mathcal{R} \times \Sigma} \left\{ \int_{\Sigma} K(\vec{u} \cdot \vec{u}_*, \nu, \nu_*) d\zeta_{(\vec{u}, \nu)} \right\} |w(\vec{r}, \vec{u}_*, \nu_*)| d\vec{r} d\zeta_{(\vec{u}_*, \nu_*)} \leq c \bar{\sigma}^s \|w\|. \end{aligned}$$

Perciò $J_a(\omega), J_s(\omega) \in [\mathcal{X}]$ con $\|J_a(\omega)\| \leq c\bar{\sigma}^a + c\bar{\sigma}^s$ e $\|J_s(\omega)\| \leq c\bar{\sigma}^s$ per ogni $\omega \in \Omega$. Dunque $J_c(\omega) \in [\mathcal{X}]$ con $\|J_c(\omega)\| \leq \beta_0$ per ogni $\omega \in \Omega$.

Passiamo ora alla misurabilità in senso forte di J_a, J_s e J_c come funzioni da Ω a $[\mathcal{X}]$. Fissati $w \in \mathcal{X}$ e $\rho > 0$, consideriamo le applicazioni $g_w : M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{X}$ e $h_w : M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{X}$ definite da

$$g_w(\psi)(\vec{r}, \vec{u}, \nu) := -c\psi(\vec{r}, \nu) w(\vec{r}, \vec{u}, \nu) \quad (5.3.15)$$

$$h_w(\psi)(\vec{r}, \vec{u}, \nu) := \int_{\Sigma} c \psi(\vec{r}, \nu_*) K(\vec{u} \cdot \vec{u}_*, \nu, \nu_*) w(\vec{r}, \vec{u}_*, \nu_*) d\zeta_{(\vec{u}_*, \nu_*)}, \quad (5.3.16)$$

per ogni $\psi \in M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$ e $(\vec{r}, \vec{u}, \nu) \in \mathcal{R} \times \Sigma$. Dati $\psi, \psi_0 \in M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$ si ha che

$$\|g_w(\psi) - g_w(\psi_0)\| \leq \int_{\mathcal{R} \times \Sigma} c |\psi(\vec{r}, \nu) - \psi_0(\vec{r}, \nu)| |w(\vec{r}, \vec{u}, \nu)| d\vec{r} d\zeta_{(\vec{u}, \nu)}. \quad (5.3.17)$$

Se $\psi \rightarrow \psi_0$ in $M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$, allora $\psi(\vec{r}, \nu) \rightarrow \psi_0(\vec{r}, \nu)$ per quasi ogni $(\vec{r}, \nu) \in \mathcal{R} \times \mathcal{V}$ e inoltre

$$|\psi(\vec{r}, \nu) - \psi_0(\vec{r}, \nu)| |w(\vec{r}, \vec{u}, \nu)| \leq 2\rho |w(\vec{r}, \vec{u}, \nu)| \quad (5.3.18)$$

per ogni $(\vec{r}, \vec{u}, \nu) \in \mathcal{R} \times \Sigma$. Pertanto si può applicare il teorema della convergenza dominata agli integrali al secondo membro della (5.3.17) e concludere che $\|g_w(\psi) - g_w(\psi_0)\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$. Abbiamo così dimostrato che g_w è una funzione *continua* da $M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$ a \mathcal{X} . In modo analogo, sfruttando il teorema di Fubini e il teorema della convergenza dominata, si dimostra che $\|h_w(\psi) - h_w(\psi_0)\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$ quando $\psi \rightarrow \psi_0$ in $M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$. Pertanto anche h_w è una funzione continua da $M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$ a \mathcal{X} .

Per il lemma 5.11 le funzioni σ^a , σ^s e σ sono funzioni misurabili da Ω a $M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$, con $\rho = \beta_0/c$ dato dalla (5.3.2). Ma allora, usando la notazione introdotta nella sezione 3.5, le funzioni da Ω a \mathcal{X}

$$\Lambda_w \circ J_a = g_w \circ \sigma \quad \Lambda_w \circ J_s = h_w \circ \sigma^s, \quad (5.3.19)$$

sono misurabili per ogni $w \in \mathcal{X}$, in quanto la composizione di una funzione misurabile con una continua è una funzione misurabile per l'osservazione 2.43. Dunque, per definizione, J_a e J_s e $J_c = J_a + J_s$ sono funzioni da Ω a $[\mathcal{X}]$ misurabili in senso forte. Il teorema è così dimostrato. \square

Nel modello di riferimento, quello della nube con *clumps* aleatori, la condizione del teorema 5.12 è soddisfatta in modo naturale se si pensa ai *clumps* come a regioni di forma fissata che possono casualmente trovarsi “da qualche parte” e “in qualche modo” all'interno di \mathcal{R} . Consideriamo ad esempio il caso di un singolo *clump* (dopodiché il ragionamento si può estendere facilmente al caso di n *clumps*). Sia K un aperto di \mathbb{R}^3 con frontiera regolare che rappresenta il nostro *clump* e sia \mathcal{O}_3 il gruppo di Lie dei movimenti rigidi di \mathbb{R}^3 . Poiché \mathcal{O}_3 ha una struttura topologica, esso ha anche la struttura di spazio misurabile data dalla σ -algebra di Borel e si può parlare di funzioni misurabili a valori in \mathcal{O}_3 . Se ora $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ è uno spazio di probabilità, supponiamo di assegnare una funzione $\Psi : \Omega \rightarrow \mathcal{O}_3$, $\omega \mapsto \Psi_\omega$, tale che $\Psi_\omega(K) \in \mathcal{R}$ per ogni $\omega \in \Omega$. Poniamo quindi

$$\mathcal{C}(\omega)(\vec{r}) := \chi_{\Psi_\omega(K)}(\vec{r}), \quad \omega \in \Omega, \vec{r} \in \mathcal{R}. \quad (5.3.20)$$

Teorema 5.13 *Se $\Psi : \Omega \rightarrow \mathcal{O}_3$ è misurabile, allora la (5.3.20) definisce una funzione $\mathcal{C} : \Omega \rightarrow M_1(\mathcal{R})$ misurabile.*

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente $\mathcal{C}(\omega) \in M_1(\mathcal{R})$ per ogni $\omega \in \Omega$, in quanto è funzione indicatrice di un insieme misurabile. Dimostriamo la misurabilità.

Introduciamo la funzione $\mathcal{T} : \mathcal{O}_3 \rightarrow M_1(\mathcal{R})$ definita nel modo seguente:

$$\mathcal{T}(\Psi)(\vec{r}) := \chi_{\Psi(K)}(\vec{r}), \quad \Psi \in \mathcal{O}_3, \vec{r} \in \mathcal{R}. \quad (5.3.21)$$

Vogliamo dimostrare che \mathcal{T} è continua. A questo scopo osserviamo che la continuità di \mathcal{T} equivale alla sua continuità per successioni, in quanto \mathcal{O}_3 soddisfa il I assioma di numerabilità. Sia dunque $\{\Psi_n\}$ una successione convergente a un elemento Ψ_0 in \mathcal{O}_3 e fissiamo $\vec{r} \in \mathcal{R}$. Se $\vec{r} \in \Psi_0(K)$, allora $\mathcal{T}(\Psi_0)(\vec{r}) = 1$ e poiché $\Psi_0(K)$ è aperto, esiste un intorno U di $\Psi_0(\vec{r})$ contenuto in $\Psi_0(K) \cap \mathcal{R}$. Essendo l'azione di \mathcal{O}_3 su \mathbb{R}^3 continua, per ogni n sufficientemente alto si avrà $\Psi_n(\vec{r}) \in U$ e quindi $\mathcal{T}(\Psi_n)(\vec{r}) = 1$. Se $\vec{r} \in [\Psi_0(\bar{K})]^c$ allora $\mathcal{T}(\Psi_0)(\vec{r}) = 0$, e con un ragionamento analogo al precedente si deduce che $\mathcal{T}(\Psi_n)(\vec{r}) = 0$ per ogni n sufficientemente alto. Abbiamo quindi dimostrato che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}(\Psi_n)(\vec{r}) = \mathcal{T}(\Psi_0)(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \mathcal{R} \setminus \partial K. \quad (5.3.22)$$

Essendo K un aperto di frontiera regolare, $\text{mis}(\partial K) = 0$, per cui la (5.3.22) ci dice che $\mathcal{T}(\Psi_n) \rightarrow \mathcal{T}(\Psi_0)$ in $M_1(\mathcal{R})$. Questo prova la continuità di \mathcal{T} .

Ma, se $\mathcal{C} : \Omega \rightarrow M_1(\mathcal{R})$ è definita da (5.3.20), possiamo scrivere

$$\mathcal{C} = \mathcal{T} \circ \Psi. \quad (5.3.23)$$

Dunque \mathcal{C} è misurabile, in quanto composizione di $\Psi : \Omega \rightarrow \mathcal{O}_3$, misurabile per ipotesi, con $\mathcal{T} : \mathcal{O}_3 \rightarrow M_1(\mathcal{R})$ continua. \square

5.4 Sorgenti aleatorie

Nel capitolo 1 abbiamo accennato alla possibilità di includere termini di sorgente aleatori nel modello di trasporto di radiazione in una nube interstellare. Tali termini potrebbero essere dovuti alla presenza di stelle all'interno della nube delle quali non si conoscono certe caratteristiche (posizione, luminosità, ecc.) se non in senso probabilistico. Questo tipo di sorgente aleatoria *interna*, è rappresentato da un termine $q_\omega(t)$ nell'equazione di trasporto. Osserviamo che, in condizioni normali, il fenomeno di irraggiamento di origine stellare può considerarsi a tutti gli effetti stazionario. Tuttavia può aver senso prevedere la possibilità di una dipendenza dal tempo della sorgente, ad esempio nello studio degli effetti sulla nube di fenomeni impulsivi o oscillanti di corto periodo (come *supernovae* o *pulsars*). La presenza del termine $q_\omega(t)$ conduce ad un problema di evoluzione aleatorio del tipo di quello espresso dalla (3.1.1).

Nello studio delle nubi interstellari ha grande importanza anche la radiazione proveniente da stelle esterne che, scrivendo l'equazione del trasporto, conduce a

un termine di sorgente *superficiale* $\gamma(t)$ del tipo di quello considerato nella sezione 5.2 (si veda la (5.2.2)). L'approccio probabilistico si può estendere alla sorgente superficiale, poiché anche questa potrebbe non essere conosciuta con certezza in tutte le sue caratteristiche. Considereremo perciò una sorgente superficiale $\gamma_\omega(t)$ dipendente dal parametro aleatorio ω che condurrà ad un *problema aleatorio affine* del tipo di quello studiato in astratto nella sezione 3.7.

Come abbiamo più volte sottolineato, possiamo sempre supporre di descrivere la aleatorietà del sistema con un solo spazio di probabilità $\mathcal{M} := (\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ che contenga tutta l'informazione probabilistica su $J_c(\omega)$, su $q_\omega(t)$ e su $\gamma_\omega(t)$.

Sia \mathcal{X} lo spazio di Banach definito dalla (5.1.3). Seguendo l'impostazione del capitolo 3, se vogliamo che la soluzione $f_\omega(t)$ del nostro problema di trasporto possenga i momenti almeno fino all'ordine $p \in [1, +\infty)$, lavoreremo nello spazio di Banach $L_{\mathcal{X}}^p := L^p(\mathcal{M}; \mathcal{X})$.

Consideriamo innanzitutto una sorgente di radiazione interna

$$q_\omega : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}, \quad \omega \in \Omega, \quad (5.4.1)$$

dove $\mathbb{T} := [0, t_0)$ è un opportuno intervallo temporale che fissiamo indipendentemente da ω . Per poter applicare i risultati del capitolo 3 (e, in particolare, i teoremi 3.21, 3.34 e 3.40) si deve supporre che $\mathbf{q}(t)(\omega) := q_\omega(t)$ definisca una funzione $\mathbf{q} : \mathbb{T} \rightarrow L_{\mathcal{X}}^p$ che sia regolare nel senso della definizione 2.24. In particolare, per una sorgente stazionaria del tipo di quella definita dalla (1.5.6) (dove δ sarà l'approssimazione regolare di una delta di Dirac) tali condizioni sono certamente soddisfatte.

Un po' più delicato è il trattamento di una sorgente aleatoria superficiale, per il quale abbiamo però a disposizione la teoria sviluppata nella sezione 3.7. Con riferimento ai simboli introdotti nella sezione 5.2, consideriamo una sorgente superficiale del tipo

$$\gamma_\omega : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{Y}^{\text{in}}, \quad \omega \in \Omega. \quad (5.4.2)$$

Non ci interessa in questa sede ipotizzare possibili espressioni per $\gamma_\omega(t)$. Ci limitiamo a far presente che una categoria di sorgenti superficiali molto interessante sia dal punto di vista fisico sia da punto di vista matematico è quella in cui il termine $\gamma(t)$ è la traccia su Φ^{in} di un secondo fenomeno di trasporto, che avviene nella regione esterna a \mathcal{R} . A questo proposito si veda [35].

La condizione al contorno aleatoria su $w \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{M}})$ associata a $\gamma_\omega(t)$ è la seguente

$$F_+ w = \mathcal{B} F_- w + \gamma_\omega(t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{T}. \quad (5.4.3)$$

All'eq. (5.4.3), a sua volta, è associato l'operatore $T_{\mathcal{B}}$ -affine $T_{\mathcal{B}, \gamma_\omega}(t)$ dato da (5.2.3) e (5.2.4) con $\gamma(t) = \gamma_\omega(t)$. Per ogni $\omega \in \Omega$ fissato, abbiamo visto nella sezione 5.2 come costruire una rappresentazione $p_\omega : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ di $\{\mathcal{D}(T_{\mathcal{B}, \gamma_\omega}(t)) \mid t \in \mathbb{T}\}$. Questa è data dalla (5.2.30), con $\gamma(t) = \gamma_\omega(t)$, e vale per ogni funzione $\sigma : \mathcal{R} \rightarrow$

\mathbb{R}^+ , misurabile e limitata. Poiché noi interpretiamo σ come sezione d'urto totale (aleatoria) ci interessa in particolare una rappresentazione $p_\omega(t)$ della forma

$$p_\omega(t) := G_{\sigma(\omega)}(I - \mathcal{B}F_-G_{\sigma(\omega)})^{-1}\gamma_\omega(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (5.4.4)$$

dove $\sigma(\omega)$ è la sezione d'urto totale aleatoria definita da (5.3.7).

La (5.4.4) definisce $p_\omega : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ per ogni fissato $\omega \in \Omega$. Per poter applicare i risultati della sezione 3.7 si deve allora verificare che

$$\mathbf{p}(t)(\omega) := p_\omega(t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{T} \quad (5.4.5)$$

definisca una funzione $\mathbf{p} : \mathbb{T} \rightarrow L_{\mathcal{X}}^p$ e che questa funzione abbia l'opportuna regolarità rispetto a t . A questo scopo supponiamo, come nel teorema 5.12, che la funzione indicatrice aleatoria \mathcal{C} sia una funzione misurabile da Ω a $M_1(\mathcal{R})$. Allora, per il lemma 5.11, la funzione σ definita da (5.3.7) può essere riguardata come funzione (misurabile) da Ω a $M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$ con $\rho := \beta_0/c$.

Lemma 5.14 *Se $\mathcal{C} : \Omega \rightarrow M_1(\mathcal{R})$ è misurabile e se σ è data dalla (5.3.7), allora*

$$G_\sigma(\omega) := G_{\sigma(\omega)}, \quad \omega \in \Omega, \quad (5.4.6)$$

definisce un'applicazione $G_\sigma : \Omega \rightarrow [\mathcal{Y}^{\text{in}}, \mathcal{X}]$, misurabile in senso forte.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già osservato che σ è una funzione misurabile da Ω a $M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$, con $\rho = \beta_0/c$. In particolare, fissato $\omega \in \Omega$, la funzione $\sigma(\omega) : \mathcal{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ è misurabile e limitata per cui $G_{\sigma(\omega)} \in [\mathcal{Y}^{\text{in}}, \mathcal{X}]$, secondo il lemma 5.8. Per dimostrare la misurabilità in senso forte di G_σ , fissiamo $j \in \mathcal{Y}^{\text{in}}$ e introduciamo la funzione $g_j : M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{X}$ definita per ogni $\psi \in M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$ da

$$g_j(\psi) := G_\psi j. \quad (5.4.7)$$

Se $\psi, \psi_0 \in M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$, si ha che

$$\begin{aligned} \|g_j(\psi) - g_j(\psi_0)\|_{\mathcal{X}} &= \int_{\mathcal{R} \times \Sigma} |(G_\psi j)(\vec{r}, \vec{u}, \nu) - (G_{\psi_0} j)(\vec{r}, \vec{u}, \nu)| \, d\vec{r} \, d\zeta_{(\vec{u}, \nu)} \\ &\leq \int_{\mathcal{R} \times \Sigma} |e^{-\tau_\psi(\vec{r}, \vec{u}, \nu)} - e^{-\tau_{\psi_0}(\vec{r}, \vec{u}, \nu)}| |j(\vec{r} - ct_-(\vec{r}, \vec{u})\vec{u}, \vec{u}, \nu)| \, d\vec{r} \, d\zeta_{(\vec{u}, \nu)}, \end{aligned}$$

dove τ_ψ e τ_{ψ_0} sono dati dalla (5.2.15). Se $\psi \rightarrow \psi_0$ in $M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V})$, allora $\psi(\vec{r}, \nu) \rightarrow \psi_0(\vec{r}, \nu)$ per quasi ogni $(\vec{r}, \nu) \in \mathcal{R} \times \mathcal{V}$. Applicando ripetutamente il teorema della convergenza dominata si ha che $\tau_\psi(\vec{r}, \vec{u}, \nu) \rightarrow \tau_{\psi_0}(\vec{r}, \vec{u}, \nu)$ quasi ovunque, che $e^{-\tau_\psi(\vec{r}, \vec{u}, \nu)} \rightarrow e^{-\tau_{\psi_0}(\vec{r}, \vec{u}, \nu)}$ quasi ovunque e che, infine, $\|g_j(\psi) - g_j(\psi_0)\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$. Si è così dimostrato che $g_j : M_\rho(\mathcal{R} \times \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{X}$ è continua. Dunque la funzione $\Lambda_j \circ G_\sigma = g_j \circ \sigma$ è continua in quanto composizione di una funzione misurabile (per ipotesi) con una funzione continua. Per definizione, si ha quindi che $G_\sigma : \Omega \rightarrow [\mathcal{Y}^{\text{in}}, \mathcal{X}]$ è misurabile in senso forte. \square

Consideriamo ora gli spazi di Banach $L^p_{\mathcal{Y}^{\text{in}}} := L^p(\mathcal{M}; \mathcal{Y}^{\text{in}})$ e $L^p_{\mathcal{Y}^{\text{out}}} := L^p(\mathcal{M}; \mathcal{Y}^{\text{out}})$. Poiché $\|G_{\sigma(\omega)}\| \leq t_{\mathcal{R}}$ per ogni $\omega \in \Omega$ (lemma 5.8), dal precedente lemma e dall'osservazione 3.33 segue che se $\mathcal{C} : \Omega \rightarrow M_1(\mathcal{R})$ è misurabile, la variabile aleatoria G_{σ} può essere riguardata come operatore $G_{\sigma} \in [L^p_{\mathcal{Y}^{\text{in}}}, L^p_{\mathcal{X}}]$, con $\|G_{\sigma}\| \leq t_{\mathcal{R}}$ (per semplicità di notazione continuiamo ad usare lo stesso simbolo G_{σ} tanto per la variabile aleatoria quanto per l'operatore, e così faremo per le altre situazioni dello stesso tipo). Con la stessa dimostrazione svolta per G_{σ} , si dimostra che anche la funzione

$$F_-G_{\sigma} : \Omega \rightarrow [\mathcal{Y}^{\text{in}}, \mathcal{Y}^{\text{out}}], \quad (F_-G_{\sigma})(\omega) := F_-G_{\sigma(\omega)} \quad (5.4.8)$$

è misurabile in senso forte. Ancora, dal lemma 5.9 e dall'osservazione 3.33 segue che $F_-G_{\sigma} \in [L^p_{\mathcal{Y}^{\text{in}}}, L^p_{\mathcal{Y}^{\text{out}}}]$, con $\|F_-G_{\sigma}\| \leq 1$. Infine, dall'osservazione 3.17 segue che l'operatore di condizioni al contorno \mathcal{B} può essere riguardato come operatore deterministico $\mathcal{B} \in [L^p_{\mathcal{Y}^{\text{out}}}, L^p_{\mathcal{Y}^{\text{in}}}]$, mantenendo inalterato il valore della norma. Abbiamo così il seguente risultato.

Teorema 5.15 *Poniamo*

$$\gamma(t)(\omega) := \gamma_{\omega}(t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{T}. \quad (5.4.9)$$

Fissato $t \in \mathbb{T}$, se $\gamma(t) \in L^p_{\mathcal{Y}^{\text{in}}}$, se $\|\mathcal{B}\| < 1$ e se $\mathbf{p}(t)$ è definito dalla (5.4.5) si ha

$$\mathbf{p}(t) = G_{\sigma}(I - \mathcal{B}F_-G_{\sigma})^{-1}\gamma(t), \quad (5.4.10)$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla discussione precedente segue che l'operatore $I - \mathcal{B}F_-G_{\sigma} \in [L^p_{\mathcal{Y}^{\text{in}}}]$ è invertibile e che

$$\left[(I - \mathcal{B}F_-G_{\sigma})^{-1}\mathbf{j} \right](\omega) = (I - \mathcal{B}F_-G_{\sigma(\omega)})^{-1}\mathbf{j}(\omega) \quad (5.4.11)$$

per ogni $\omega \in \Omega$ e $\mathbf{j} \in L^p_{\mathcal{Y}^{\text{in}}}$. Ma allora, per ogni $\omega \in \Omega$ e $t \in \mathbb{T}$ si ha $\mathbf{p}(t)(\omega) = p_{\omega}(t) = G_{\sigma(\omega)}(I - \mathcal{B}F_-G_{\sigma(\omega)})^{-1}\gamma_{\omega}(t) = \left[G_{\sigma}(I - \mathcal{B}F_-G_{\sigma})^{-1}\gamma(t) \right](\omega)$, il che prova la (5.4.10). \square

Consideriamo l'operatore $T_{\mathcal{B},\gamma}(t)$ in $L^p_{\mathcal{X}}$ corrispondente alla famiglia $\{T_{\mathcal{B},\gamma_{\omega}}(t) \mid \omega \in \Omega, t \in \mathbb{T}\}$ di operatori in \mathcal{X} :

$$\mathcal{D}(T_{\mathcal{B},\gamma}(t)) := \left\{ \mathbf{w} \in L^p_{\mathcal{X}} \mid \mathbf{w}(\omega) \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{B},\gamma_{\omega}}(t)), \text{ q. c. } \omega \in \Omega \right\} \quad (5.4.12)$$

$$(T_{\mathcal{B},\gamma}(t)\mathbf{w})(\omega) := T_{\mathcal{B},\gamma_{\omega}}(t)\mathbf{w}(\omega), \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{B},\gamma}(t)), \quad (5.4.13)$$

(questa definizione corrisponde esattamente alla definizione data nella sezione 3.7 tramite la (3.7.4) e la (3.7.5), con notazione differente). Poiché dall'eq. (5.4.10) segue che $\mathbf{p}(t) \in L^p_{\mathcal{X}}$ per ogni $t \in \mathbb{T}$, per il lemma 3.37 si ha che gli operatori $\{T_{\mathcal{B},\gamma}(t) \mid t \in \mathbb{T}\}$ formano una famiglia $T_{\mathcal{B}}$ -affine (dove $T_{\mathcal{B}}$ è identificato con il corrispondente operatore deterministico in $L^p_{\mathcal{X}}$). Una seconda conseguenza del

teorema 5.15 è che la regolarità di $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow L_{y_{\text{in}}}^p$ implica una corrispondente regolarità di $\mathbf{p} : \mathbb{T} \rightarrow L_{\mathcal{X}}^p$. Questo fatto, già osservato nel caso deterministico, ci facilita nell'applicazione del teorema 3.40, poiché la verifica della necessaria regolarità della rappresentazione \mathbf{p} può essere “scaricata” sulla sorgente assegnata γ . Una terza conseguenza è l'identità

$$T_{\mathcal{B},\gamma}(t)\mathbf{p}(t) + J_{\mathbf{a}}\mathbf{p}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{T}, \quad (5.4.14)$$

che, ricordando la definizione (5.3.8), segue dalla prima delle (5.2.17) la quale implica

$$[T_{\mathcal{B},\gamma}(t)\mathbf{p}(t)](\omega) = T_{\mathcal{M}}p_{\omega}(t) = c\sigma p_{\omega}(t) = -J_{\mathbf{a}}(\omega)p_{\omega}(t) = -[J_{\mathbf{a}}\mathbf{p}(t)](\omega)$$

per ogni $\omega \in \Omega$ e per ogni $t \in \mathbb{T}$.

5.5 Formulazione completa del modello e risultati conclusivi

Con l'inclusione delle sorgenti il nostro modello di trasporto in mezzi aleatori è completato. Siamo ora in grado di scrivere un problema di evoluzione affine, aleatorio, nello spazio \mathcal{X} e di studiarlo con i metodi esposti nei capitoli 3 e 4.

Può avere senso considerare un dato iniziale aleatorio

$$\xi_{\omega} \in \mathcal{X}, \quad \omega \in \Omega. \quad (5.5.1)$$

Come già osservato a proposito dei termini di sorgente, il fatto che ξ dipenda dallo stesso parametro aleatorio $\omega \in \Omega$ da cui dipendono gli altri termini aleatori dell'equazione di trasporto è solo una semplificazione formale che consiste in una eventuale ridefinizione dello spazio di probabilità $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ in modo da includere una descrizione probabilistica dell'incertezza sul dato iniziale (dobbiamo però sempre supporre che la σ -algebra sia separabile. Possiamo allora riassumere il modello nel seguente problema di evoluzione aleatorio affine:

$$\begin{cases} f'_{\omega}(t) = T_{\mathcal{B},\gamma_{\omega}}(t)f_{\omega}(t) + J_c(\omega)f_{\omega}(t) + q_{\omega}(t), & t \in \mathbb{T}, \\ f_{\omega}(0) = \xi_{\omega}. \end{cases} \quad (5.5.2)$$

Qui di seguito ricapitoliamo in modo schematico le più importanti considerazioni che possiamo fare sulla (5.5.2) grazie ai risultati ottenuti fino a questo momento.

Funzione indicatrice aleatoria.

L'ipotesi che la funzione indicatrice aleatoria \mathcal{C} sia una funzione $\mathcal{C} : \Omega \rightarrow M_1(\mathcal{R})$ misurabile ci ha permesso di dimostrare i seguenti fatti:

- $J_c : \Omega \rightarrow [\mathcal{X}]$ è misurabile in senso forte (teorema 5.12) e quindi J_c può essere interpretato come operatore appartenente a $[L_{\mathcal{X}}^p]$ (teorema 3.32);

- se la sorgente superficiale aleatoria γ_ω è tale che $\gamma(t) \in L_{\text{yin}}^p$ per ogni $t \in \mathbb{T}$ (dove $\gamma(t)$ è dato dalla (5.4.9)), se $p_\omega(t)$ è dato dalla (5.4.4) e $\mathbf{p}(t)$ dalla (5.4.5), e se $\|\mathcal{B}\| < 1$, allora $\{T_{\mathcal{B},\gamma}(t) : t \in \mathbb{T}\}$ è una famiglia $T_{\mathcal{B}}$ -affine di operatori in $L_{\mathcal{X}}^p$, dove $T_{\mathcal{B}}$ è riguardato come operatore deterministico su $L_{\mathcal{X}}^p$ (teorema 5.15 e lemma 3.37).

D'altra parte abbiamo visto che l'ipotesi di misurabilità su \mathcal{C} è soddisfatta se \mathcal{C} corrisponde all'idea intuitiva di “disposizione geometrica casuale” di *clumps* o stelle (teorema 5.13).

Immersione del problema nello spazio $L_{\mathcal{X}}^p$.

Per poter “immergere” il problema in $L_{\mathcal{X}}^p$ e cercare così una soluzione che abbia tutti i momenti fino all'ordine p dobbiamo supporre che

- $\boldsymbol{\xi} \in L_{\mathcal{X}}^p$;
- $\mathbf{q}(t) \in L_{\mathcal{X}}^p$ per ogni $t \in \mathbb{T}$;

dove, al solito, $\mathbf{q}(t)(\omega) := q_\omega(t)$ e $\boldsymbol{\xi}(\omega) := \xi_\omega$ per ogni $\omega \in \Omega$. Il problema di evoluzione affine in $L_{\mathcal{X}}^p$ associato alla (5.5.2) è allora la seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{f}'(t) = T_{\mathcal{B},\gamma}(t) \mathbf{f}(t) + J_c \mathbf{f}(t) + \mathbf{q}(t) & t \in \mathbb{T} \\ \mathbf{f}(0) = \boldsymbol{\xi}. \end{cases} \quad (5.5.3)$$

Osserviamo che

$$\left\{ T_{\mathcal{B},\gamma,\mathbf{q}}(t) \mid t \in \mathbb{T} \right\}, \quad (5.5.4)$$

è una famiglia $T_{\mathcal{B}}$ -affine, dove abbiamo definito

$$T_{\mathcal{B},\gamma,\mathbf{q}}(t)\mathbf{w} := T_{\mathcal{B},\gamma}(t)\mathbf{w} + \mathbf{q}(t), \quad \mathbf{w} \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{B},\gamma}(t)), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (5.5.5)$$

per includere $\mathbf{q}(t)$ nell'azione dell'operatore affine.

Soluzione stretta di (5.5.3).

Affinché (5.5.3) abbia un'unica soluzione stretta, secondo la definizione della sezione 2.4, si deve applicare il teorema 3.40 alla famiglia $T_{\mathcal{B}}$ -affine (5.5.4) e alla perturbazione aleatoria J_c . Pertanto si hanno le seguenti condizioni:

- $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{B},\gamma}(0))$;
- $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow L_{\text{yin}}^p$ è differenziabile con continuità;
- la funzione

$$Q_{\mathcal{B},\gamma,\mathbf{q}}(t) := J_s \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}'(t) + \mathbf{q}(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (5.5.6)$$

è un termine di sorgente regolare nel senso della definizione 2.24

Gli ultimi due punti necessitano di qualche parola di commento. Innanzitutto la condizione $\mathbf{p} \in C^1(\mathbb{T}, L_{\mathbf{x}}^p)$ richiesta dal teorema 3.40 si trasforma qui in $\gamma \in C^1(\mathbb{T}, L_{y_{\text{in}}}^p)$, poiché la regolarità di γ induce la corrispondente regolarità su \mathbf{p} (è una conseguenza del teorema 5.15). Questo stesso fatto può essere sfruttato anche per dimostrare la regolarità di $Q_{\mathcal{B}, \gamma, \mathbf{q}}(t)$, che può essere ricondotta allo studio della regolarità di γ e di \mathbf{q} (ad esempio utilizzando l'osservazione 2.26). Per quanto riguarda la definizione del termine di sorgente $Q_{\mathcal{B}, \gamma, \mathbf{q}}(t)$, osserviamo che, stando al teorema 3.40, dovremmo considerare il termine di sorgente

$$Q_{\mathcal{B}, \gamma, \mathbf{q}}(t) := (T_{\mathcal{B}, \gamma}(t) + J_c) \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}'(t) + \mathbf{q}(t)$$

Ma tale termine si riduce alla (5.5.6) in virtù dell'eq. (5.4.14) (si vedano anche le osservazioni conclusive della sezione 2.4).

Soluzione *mild* di (5.5.2).

Se le precedenti ipotesi sono soddisfatte, applicando il teorema 3.40 si ha che il problema di evoluzione (5.5.3) ha un'unica soluzione stretta $\mathbf{f} : \mathbb{T} \rightarrow L_{\mathbf{x}}^p$ che è quasi certamente soluzione *mild* di (5.5.2), secondo la formula

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t)(\omega) &= p_{\omega}(t) + \mathcal{S}_{T_{\mathcal{B}} + J_c(\omega)}(t)[\xi_{\omega} - p_{\omega}(0)] \\ &+ \int_0^t \mathcal{S}_{T_{\mathcal{B}} + J_c(\omega)}(t-s) Q_{\mathcal{B}, \gamma_{\omega}, q_{\omega}}(s) ds, \quad \text{q. c. } \omega \in \Omega, \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

dove si è posto

$$Q_{\mathcal{B}, \gamma_{\omega}, q_{\omega}}(s) := J_s p_{\omega}(t) - p'_{\omega}(t) + q_{\omega}(t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{T}. \quad (5.5.8)$$

Bibliografia

- [1] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] W. Arendt. Resolvent positive operators. *Proc. London Math. Soc.*, **54**: 321, 1987.
- [3] S. Audic e H. Frisch. Monte-Carlo simulations of a radiative transfer problem in a random medium: Application to a binary mixture. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **50**: 127, 1993.
- [4] J. M. Ball. Strongly continuous semigroups, weak solutions and the variation of constants formula. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **63**: 370, 1977.
- [5] L. Barletti. Affine operators and semigroups with applications to transport problems. Rapporto tecnico, Università di Firenze, Dip. di Matematica, 1, 1997.
- [6] L. Barletti e A. Belleni-Morante. A particle transport problem with nonhomogeneous reflection boundary conditions. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1998. In corso di stampa.
- [7] R. Beals e V. Protopopescu. Abstract time-dependent transport equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **121**: 370, 1987.
- [8] A. Belleni-Morante. *Applied Semigroups and Evolution Equations*. Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [9] A. Belleni-Morante. A nonlinear problem arising from particle transport with nonhomogeneous boundary conditions. *Nonlinear Anal., Theory, Methods.*, **31**: 33, 1998.
- [10] A. Belleni-Morante e A. C. McBride. *Nonlinear Semigroups, an Introduction*. Wiley, New York, 1998.
- [11] A. Belleni-Morante e A. Moro. Time dependent photon transport in an interstellar cloud with stochastic clumps. *Transport Th. Statist. Phys.*, **25**: 85, 1996.

- [12] A. Belleni-Morante, A. Moro, S. Aiello e C. Cecchi-Pestellini. Photon transport in an interstellar cloud with stochastic clumps: the three-dimensional case. *Conferenze del Seminario Matematico Università di Bari*, **255**, 1994.
- [13] P. Billingsley. *Probability and Measure*. Wiley, New York, terza edizione, 1995.
- [14] C. F. Bohren e D. R. Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. Wiley, New York, 1983.
- [15] P. Boissé. Radiative transfer inside clumpy media: the penetration of UV photons inside molecular clouds. *Astronomy & Astrophysics*, **228**: 483, 1990.
- [16] G. Borgioli e S. Totaro. 3D-streaming operator with multiplying boundary conditions: semigroup generation properties. *Semigroup Forum.*, **55**: 110, 1997.
- [17] G. Busoni. Nonhomogeneous boundary conditions in evolution problems. *Riv. Mat. Univ. Parma*, **5**: 567, 1979.
- [18] H. Cabannes. Solution globale du problème de Cauchy en théorie cinétique discrète. *J. Méc.*, **17**: 1, 1978.
- [19] K. M. Case e P. F. Zweifel. Existence and uniqueness theorems for the neutron transport equation. *J. Math. Phys.*, **4**: 1376, 1963.
- [20] C. Cecchi-Pestellini. *Molecules and radiation fields in dusty environments*. Tesi di Dottorato, Dip. di Astronomia e Scienza dello Spazio, Università di Firenze, 1992.
- [21] M. Cessenat. Théorèmes de trace L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I*, **300**: 89, 1985.
- [22] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Dover, New York, 1960.
- [23] M. G. Crandall e T. M. Liggett. Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces. *Amer. J. Math.*, **93**: 265, 1971.
- [24] G. Da Prato e J. Zabczyk. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [25] J. Diestel e J. J. Uhl. *Vector Measures*. American Math. Soc., Providence, 1977.
- [26] J. S. Duderstadt e W. R. Martin. *Transport Theory*. Wiley-Interscience, New York, 1979.

- [27] H. Dunford e J. T. Schwartz. *Linear Operators (vol. I)*. Wiley-Interscience, New York, 1957.
- [28] W. Greenberg, C. van der Mee e V. Protopopescu *Boundary value problems in abstract kinetic theory*. Birkäuser, Basel, 1987.
- [29] E. Hille e R. S. Phillips. *Functional Analysis and Semigroups*. American Math. Soc., Providence, 1957.
- [30] J. Lamperti. *Stochastic Processes*. Springer Verlag, Berlin, 1977.
- [31] E. W. Larsen. The spectrum of the multigroup neutron transport operator for bounded spatial domains. *J. Math. Phys.*, **20**: 1776, 1979.
- [32] C. D. Levermore, G. C. Pomraning, D. L. Sanzo e J. Wong. Linear transport theory in a random medium. *J. of Math. Phys.*, **27**: 2526, 1986.
- [33] P. Madau. Radiative transfer in a clumpy universe: the colors of high-redshift galaxies. *The Astrophysical Journal*, **441**: 18, 1995.
- [34] K. Z. Markov e C. I. Christov. On the problem of heat conduction for random dispersions of spheres allowed to overlap. *Math. Meth. Appl. Sci.*, **2**: 249, 1992.
- [35] S. Matucci. *Trasporto di particelle in presenza di condizioni al contorno non locali e semitrasparenti. Operatori d'onda e di scattering. Aspetti deterministici e aleatori*. Tesi di Dottorato, Dip. di Matematica, Università di Firenze, 1998.
- [36] J. Mika e R. Stankiewicz. Nonhomogeneous boundary conditions in neutron transport theory. *Transport Theory and Statis. Phys.*, **2**: 55, 1972.
- [37] I. Miyadera. *Nonlinear Semigroups*. American Math. Soc., Providence, 1992.
- [38] R. Nagel, editor. *One-Parameter Semigroups of Positive Operators*. Springer Verlag, Berlin, 1986.
- [39] P. A. Newmann e R. L. Bowden. Solution of the initial value neutron transport problem for a slab with infinite reflectors. *J. Math. Phys.*, **11**: 2445, 1970.
- [40] E. Parzen. *Stochastic Processes*. Holden-Day, San Francisco, 1962.
- [41] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [42] G. C. Pomraning. *Radiation Hydrodynamics*. Pergamon Press, Oxford, 1973.
- [43] G. C. Pomraning. Transport and diffusion in a statistical medium. *Transport Th. Statist. Phys.*, **15**: 773, 1986.

- [44] G. C. Pomraning. Radiative transfer in Rayleigh-Taylor unstable IFC pellets. *Laser particle beams*, **8**: 741, 1990.
- [45] G. C. Pomraning. *Linear Kinetic Theory and Particle Transport in Stochastic Mixtures*. World Scientific, Singapore, 1991.
- [46] G. C. Pomraning. Transport theory in discrete stochastic mixtures. *Advances in Nuclear Science and Technology*, **24**: 47, 1996.
- [47] G. C. Pomraning. The variance in stochastic transport problems with Markovian mixing. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **5**: 629, 1996.
- [48] M. Reed e B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, I - Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1972.
- [49] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, terza edizione, 1987.
- [50] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, seconda edizione, 1991.
- [51] G. Saccomandi e A. Belleni-Morante. Time dependent photon transport in a three dimensional interstellar cloud with stochastic clumps. *Astrophys. and Space Sci.*, **234**: 85, 1995.
- [52] G. Sansone e R. Conti. *Equazioni differenziali non lineari*. Edizioni Cremonese, Roma, 1956.
- [53] H. H. Schaefer. *Banach Lattices and Positive Operators*. Springer Verlag, Berlin, 1974.
- [54] R. Schatten. *A Theory of Cross-Spaces*. Princeton University Press, Princeton, N. Y., 1950.
- [55] K. Sobczyk. *Stochastic Differential Equations with Applications to Physics and Engineering*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [56] G. L. Stephens, P. M. Gabriel e S. C. Tsay. Statistical radiative transport in one-dimensional media and its application to the terrestrial atmosphere. *Transport Th. Statist. Phys.*, **20**: 139, 1991.
- [57] J. L. Strand. Random ordinary differential equations. *J. Diff. Eqs.*, **7**: 538, 1970.
- [58] J. Stutzky e R. Güsten. High spatial resolution isotopic CO and CS observations of M17 SW: the clumpy structure of the molecular cloud core. *The Astrophysical Journal*, **356**: 513, 1990.

- [59] B. Su e G. C. Pomraning. A stochastic description of a broken cloud field. *J. Atmos. Sci.*, **51**: 1969, 1994.
- [60] B. Su e G. C. Pomraning. The Fermi-Eyges beam analysis for a heterogeneous absorbing stochastic medium. *Ann. Nucl. Energy*, **23**: 1153, 1996.
- [61] A. E. Taylor e D. C. Lay. *Introduction to Functional Analysis*. Wiley, New York, seconda edizione, 1980.
- [62] J. Voigt. *Functional analytic treatment of the initial boundary value problem for collisionless gases*. Tesi di Dottorato, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 1980.
- [63] J. Williams. *Random processes in nuclear reactors*. Pergamon Press, Oxford, 1974.
- [64] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer Verlag, Berlin, sesta edizione, 1980.
- [65] V. E. Zuev e G. A. Titov. Radiative transfer in cloud fields with random geometry. *J. Atmos. Sci.*, **51**: 1, 1995.

Indice dei simboli

\mathfrak{B}_Ω	39
\mathcal{C}	14
$C^k(\mathbb{T}, \mathcal{X})$	29
$\mathcal{D}(L)$	26
E	55
E^*	86
\widehat{E}_k	105
E_k, P_n, \widehat{P}_n	108
F_+, F_-	118
G_σ	122
$\mathcal{G}(M, \beta, \mathcal{X})$	31
\widetilde{J}	74
$\langle J \rangle$	72
J^*	87
J_a, J_s, J_c	127
\widehat{L}	61
$L_{\mathbb{C}}^p$	56
$L_{\mathcal{X}}^p$	55
$L_{y^{\text{in}}}^p, L_{y^{\text{out}}}^p$	133
$L_{\mathbb{C}}^p \odot \mathcal{X}$	56
$L_{\mathbb{C}}^p \otimes \mathcal{X}$	57
$M_\rho(\mathcal{A})$	127
$\Phi^{\text{in}}, \Phi^{\text{out}}$	117
ϕ^+, ϕ^-	111
$R(\lambda, L)$	27
\mathcal{R}	115
$\rho(L)$	26
\mathfrak{S}_L	31
$\sigma^a, \sigma^s, \sigma$	127
Σ	116
T_M	118
T_B	119

$T_{\mathcal{B},\gamma}(t)$	121
$T_{\mathcal{B},\gamma_\omega}(t)$	131
$T_{\mathcal{B},\gamma}(t)$	133
\mathcal{V}	116
$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$	24
$[\mathcal{X}]$	25
$y^{\text{in}}, y^{\text{out}}$	117