

Università degli Studi di Firenze
Dottorato di ricerca in fisica e astronomia

Ciclo XXVI

Coordinatore Prof. Roberto Livi

**Costruzione di una sezione d'urto per i jet di
Mueller-Navelet che integra i calcoli esatti ad ordine
finito con la risommazione di alta energia**

Settore Scientifico Disciplinare FIS/02

Dottorando: Dott. Niccoli Alessandro

Tutore: Dott. Colferai Dimitri

Coordinatore: Prof. Livi Roberto

Anni 2011/2013

Indice

1	Introduzione	3
2	La QCD e le equazioni $DGLAP$	8
3	Il Pomeron	13
4	La reggeizzazione del gluone	20
5	La Fattorizzazione di alta energia	31
5.1	L'equazione $BFKL$	31
5.2	I Vertici di jet	36
6	I jet di Mueller-Navelet	40
7	Metodo di sottrazione dei dipoli	49
8	L'algoritmo di jet del cono e k_T	55
9	L'approssimazione di piccolo cono	64
10	Risultati del matching	70
10.1	Strategia di calcolo	70
10.2	Risultati numerici BFKL con piccolo cono	74
10.3	Risultati del "matching"	77
11	Conclusioni	81
A	Appendice	84
	Riferimenti bibliografici	87

1 Introduzione

Lo scopo dell'attività di ricerca svolta durante il dottorato è stato quello di studiare i processi d'urto di alta energia che avvengono come manifestazione della interazione nucleare forte. Quest'ultima tra le quattro forze fondamentali a noi finora note, è la più intensa. Essa non solo è responsabile dell'attrazione tra protoni e neutroni nei nuclei atomici, ma governa la struttura stessa dei nucleoni e di tutte le altre particelle adroniche, i quali sono composti di particelle ancora più elementari: i quark ed i gluoni.

La teoria ormai universalmente accettata per descrivere l'interazione forte è la cromodinamica quantistica (QCD), una teoria di gauge non abeliana in cui i quark rappresentano i campi di materia, mentre i gluoni costituiscono il campo vettoriale che media l'interazione; alla carica non abeliana dei vari campi viene dato il nome convenzionale di “colore” (si veda [1] per una rassegna e [2] per un'introduzione agli aspetti tecnici).

La caratteristica peculiare della QCD — che la differenzia profondamente dalla elettrodinamica quantistica (QED) descrivente l'interazione elettromagnetica — è la dinamica interagente dei gluoni, dovuta alla non abelianità del gruppo di gauge. Questa interazione diretta tra i mediatori dell'interazione induce un aumento della forza tra particelle “colorate” all'aumentare della loro distanza, ed una riduzione della stessa alle piccole distanze. Più tecnicamente, la ri-normalizzabilità della QCD prevede una costante di accoppiamento α_s mobile, ossia dipendente dalla scala degli impulsi trasferiti Q , che decresce all'aumentare di Q : $\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$ per $Q \rightarrow \infty$ (libertà asintotica). Tale comportamento, da un lato offre una base teorica al fenomeno del confinamento, ovvero all'impossibilità di avere stati asintotici con carica di colore non nulla (come i quark e i gluoni); dall'altro lato permette di poter applicare la teoria perturbativa ai processi cosiddetti “duri”, cioè che coinvolgono grossi impulsi trasferiti, corrispondenti allo scambio di quanti di piccola lunghezza d'onda e quindi con piccola costante di accoppiamento efficace.

La compresenza di questi due regimi dinamici (non perturbativo alle grandi distanze, perturbativo alle corte distanze), gioca un ruolo essenziale nella descrizione fenomenologica dei processi adronici. Infatti, anche se ci aspettiamo che nei processi duri l'accoppiamento tra quark e gluoni sia debole e quindi trattabile con tecniche perturbative, ciò nonostante le particelle finali (e anche quelle iniziali nei collisori adronici come Tevatron ed LHC, oppure HERA) coinvolgono adroni, in cui l'interazione diventa forte nel vero senso della parola, e la dinamica è perciò non perturbativa.

Come vedremo, esiste una metodologia efficace e ben consolidata per descrivere i processi adronici e che permette di trattare allo stesso tempo la dinamica perturbativa dell'urto duro con

quella non perturbativa degli adroni iniziali e finali. Tale metodologia, basata sul teorema di fattorizzazione delle singolarità infrarosse, ha permesso di verificare la teoria della QCD ad un elevato grado di accuratezza (dell'ordine dello 1%) per svariati osservabili sperimentali misurati a LEP, HERA, Tevatron ed LHC. Tuttavia, ci si aspetta che la QCD ad alte energie presenti un comportamento qualitativamente nuovo e che a livello teorico richieda un tipo di approccio più elaborato, il quale non può limitarsi al metodo perturbativo standard.

Per definire meglio la situazione, introduciamo le scale di energia s , t e Λ_{QCD} che specificano un tipico processo adronico, in cui due particelle (tipicamente protoni) di (quadri-)impulso p_1 e p_2 vengono accelerati e fatti collidere in modo da produrre anelasticamente particelle (generalmente molte) di vario tipo, le quali vengono rivelate ed analizzate per studiare la natura dell'interazione a cui sono soggette. L'energia totale nel sistema del centro di massa viene indicata con \sqrt{s} , dove $s \equiv (p_1 + p_2)^2$. Supponiamo che nello stato finale venga rivelata una particella od un gruppo di particelle collimate (un jet) di impulso totale p_3 . Il quadrato dell'impulso trasferito è indicato con l'altra variabile di Mandelstam $t \equiv (p_1 - p_3)^2$. Infine, la terza scala $\Lambda_{QCD} \sim 200 \text{ MeV}$, data dalla natura, rappresenta l'ordine di grandezza degli impulsi/energie all'interno delle particelle adroniche come i protoni, e va considerata come l'inizio del regno della dinamica non perturbativa.

Con queste notazioni, ci aspettiamo una piccola costante di accoppiamento $\alpha_s(t) \ll 1$ per processi con grande impulso trasferito $|t| \gg \Lambda_{QCD}^2$, per i quali si può applicare la teoria perturbativa. Tuttavia ad alte energie, ossia per $s \gg |t|$, ci aspettiamo che i calcoli perturbativi non siano più attendibili, in quanto la serie perturbativa ha dei coefficienti che, all'ordine perturbativo α_s^n , crescono come il $(\log(s/|t|))^n$ in modo che $\alpha_s(t) \log(s/|t|) \sim 1$, così da compromettere la convergenza della serie.

Si rende perciò necessaria una risommazione della serie perturbativa. La tecnica che permette di tenere in conto a tutti gli ordini questi termini dominanti $[\alpha_s(t) \log(s/|t|)]^n$ ad alta energia è stata sviluppata da Balaksti, Fadin, Kuraev e Lipatov [3] a partire dal 1976, e va sotto il nome di approccio BFKL.

Con l'avvento dei collisori ad alta energia, è sorta spontanea la domanda di provare a verificare sperimentalmente le previsioni teoriche dell'approccio BFKL. Uno dei processi più adatti a questa verifica è stato proposto nel 1987 da Mueller e Navelet (MN) [4]. Esso consiste nella produzione, a seguito di un urto tra due adroni qualsiasi, di una coppia di jet di grande impulso trasverso $\mathbf{k}_{J1} \sim \mathbf{k}_{J2} \gg \Lambda_{QCD}$ e con un grande intervallo di rapidità $|y_{J1} - y_{J2}| \gg 1$. Oltre ai due jet, qualsiasi altra particella può essere presente nello stato finale; questo rende i jet di MN

un'osservabile semi-inclusiva.

I jet di Mueller-Navelet ci permettono di applicare il formalismo BFKL in quanto:

- L'impulso trasverso dei jet fornisce la scala dura necessaria per la validità dell'approccio perturbativo, poiché l'impulso trasverso dei jet è circa uguale all'impulso trasferito nell'urto tra quark e gluoni: $|t| \simeq |\mathbf{k}_{J1}||\mathbf{k}_{J2}|$;
- La cinematica di alta energia è garantita dal fatto che i jet di Mueller-Navelet possiedono una rapidità molto grande, ovvero hanno un impulso longitudinale molto maggiore di quello trasverso. Equivalentemente, la sottoenergia relativa alla somma dei due jet $s_{JJ} \simeq |\mathbf{k}_{J1}||\mathbf{k}_{J2}|e^{|y_{J1}-y_{J2}|}$ è molto maggiore della scala dura;
- Avendo a che fare con stati finali sufficientemente inclusivi è possibile applicare il teorema di fattorizzazione delle singolarità infrarosse ed in particolare si possono trascurare gli effetti dell'adronizzazione che sono di natura non perturbativa.

In questo contesto si inserisce la ricerca svolta durante il dottorato e presentata in questa tesi. Il nostro intento principale è stato quello di costruire una procedura di “matching” per includere nell'espressione della sezione d'urto di alta energia BFKL anche i termini da essa trascurati che derivano dall'espressione perturbativa completa $O(\alpha_s^3)$ [5]. In altre parole, ci proponiamo di descrivere i jet di MN sfruttando tutta l'informazione teorica che abbiamo a disposizione: il calcolo perturbativo esatto ad ordine next-to-leading (NLO), ossia $O(\alpha_s^3)$, e la risommazione BFKL in approssimazione next-to-leading $\log(s)$ (NLL) che tiene in conto di tutti i contributi $\alpha_s^2[\alpha_s^n \log^m(s)]$ con $m = n$ (LL) e $m = n - 1$ (NLL). Ovviamente, questi due contributi contengono dei termini comuni ad ordine α_s^2 e α_s^3 . La procedura di “matching” consiste quindi nel sommare il contributo ad ordine finito con quello BFKL risommato, sottraendo i termini comuni per evitarne il doppio conteggio. Nel corso della tesi verrà spiegato come sono stati ricavati questi termini di sottrazione.

Il “matching” così ottenuto può essere impiegato per studiare non solo la sezione d'urto di produzione dei jet, ma anche le correlazioni che si instaurano tra le grandezze cinematiche dei due jet, le quali sono sensibili alla dinamica che governa tali processi. In particolare, noi ci siamo concentrati sullo studio della correlazione dell'angolo azimutale dei jet di Mueller-Navelet $\phi \equiv \phi_{J1} - \phi_{J2} - \pi$. Questa osservabile, proposta inizialmente da Del Duca, Schmidt e Stirling [6], è ritenuta essere una buona candidata per verificare se davvero l'approccio BFKL sia in grado di descrivere la QCD di alta energia. Infatti, all'aumentare della separazione in rapidità dei due

jet, BFKL predice una maggior emissione di gluoni a rapidità intermedie rispetto ai calcoli ad ordine finito, e quindi una maggior decorrelazione tra gli angoli azimutali dei jet.

Naturalmente, la verifica consiste nel confrontare i risultati sperimentali dei jet di MN con le varie predizioni teoriche, per vedere quale descrive al meglio i dati. Le prime analisi effettuate sui dati del Tevatron [7] non avevano permesso di trarre delle chiare conclusioni, poiché le energie in gioco erano abbastanza alte da rendere insufficienti i calcoli ad ordine finito, ma non così alte per permettere la validità delle predizioni BFKL (a quel tempo disponibili solamente in approssimazione leading-log (LL) e quindi con grosse incertezze teoriche).

Successivamente, ci sono stati dei passi avanti sia a livello teorico che sperimentale. Dal lato teorico, il calcolo delle correzioni NLL al kernel BFKL [8] e ai vertici di jet [9] ha aperto la strada al calcolo dei jet di MN in approssimazione NLL [10,11]. Tali studi hanno mostrato che le predizioni basate sui calcoli ad ordine finito sono diverse ma non molto distanti da quelle basate sulla risommazione BFKL. Questo ci ha portato a ritenere che la fusione tra questi due approcci, finora alternativi, possa fornire una descrizione più dettagliata ed affidabile degli stessi considerati singolarmente.

Dal punto di vista sperimentale, con la realizzazione di LHC siamo in grado di produrre eventi ad energie ancora maggiori delle precedenti, che meglio si adattano al processo che stiamo esaminando. In particolare, la collaborazione CMS ha recentemente pubblicato una serie di misure sui jet di MN [12] dal primo run a 7 TeV.

La parte finale del nostro lavoro, che costituisce un contributo originale da sottomettere per la pubblicazione [13], si è quindi concentrata sul calcolo dei jet di MN con le selezioni cinematiche degli eventi attuate dagli sperimentatori. In particolare, rispetto alle precedenti descrizioni teoriche, si è reso necessario modificare l'algoritmo di jet che specifica il modo in cui le particelle adroniche vengono raggruppate per formare i jet. Infatti al Tevatron, e di conseguenza nelle prime analisi fenomenologiche, veniva impiegato il cosiddetto "algoritmo del cono" [14]. Dal momento che si sono evidenziati problemi di stabilità infrarossa per questo algoritmo, è stato introdotto un diverso tipo di "clustering", fornito dall'algoritmo k_t il quale, godendo di migliori proprietà di stabilità infrarossa, è divenuto progressivamente il più usato [15], ed è ora ufficialmente adottato negli esperimenti di LHC.

Passiamo ora ad esporre la struttura della tesi. La tesi si articola in una parte introduttiva sulle caratteristiche principali della QCD quali la libertà asintotica e la fattorizzazione delle singolarità collineari (cap. 2); in cosa consiste e come è nato l'approccio BFKL per risommare i contributi di alta energia a tutti gli ordini perturbativi partendo dalla teoria di Regge e dall'idea

del Pomeron (cap. 3 e 4), fino ad arrivare alla formula di fattorizzazione di alta energia (cap. 5).

Successivamente si tratterà dei jet di Mueller-Navelet e della loro descrizione mediante la formula di fattorizzazione di alta energia e l'equazione BFKL (cap. 6). Sulla base di un confronto con una descrizione standard ad ordine fisso, presenteremo l'idea della nostra analisi per costruire una nuova e migliorata previsione teorica, usando il matching tra la sezione d'urto BFKL in approssimazione NLL e quella perturbativa sviluppata fino all'ordine $O(\alpha_s^3)$. Il metodo di cancellazione delle singolarità infrarosse tra contributi reali e virtuali ad $O(\alpha_s^3)$ è stato esposto nel capitolo 7. Abbiamo adottato il metodo di sottrazione dei dipoli sviluppato da Catani e Seymour [16], per la cui implementazione numerica abbiamo usato il programma NLOJET++ [17].

Una parte importante di questo lavoro di tesi, che verrà trattata nei capitoli 8 e 9, ha riguardato il confronto tra i vari tipi di algoritmi per la selezione delle particelle che formano i jet. Inizieremo considerando il cosiddetto "algoritmo del cono", che è stato usato nelle analisi sperimentali al Tevatron e di conseguenza nelle prime analisi fenomenologiche, per passare all'algoritmo k_t , attualmente usato negli esperimenti ad LHC.

Allo scopo di rendere più veloci le numerose integrazioni numeriche coinvolte nel calcolo degli osservabili mediante l'approccio BFKL, nel capitolo 9 abbiamo considerato l'approssimazione di piccolo cono che ha consentito di aumentare la velocità di esecuzione dei nostri programmi per generare i dati. In merito all'integrazione numerica del contributo perturbativo $O(\alpha_s^3)$ la scelta di un taglio simmetrico nell'energia dei due jet (adottata da CMS) causa una forte instabilità nel calcolo numerico del contributo perturbativo NLO. Ciò richiede lunghi tempi di esecuzione per ottenere stime sufficientemente precise; di conseguenza non è ancora stato possibile effettuare delle predizioni teoriche accurate, in particolare sui rapporti tra i coefficienti che determinano la decorrelazione dell'angolo azimutale dei jet. Nella parte finale della tesi verranno perciò mostrati dei risultati preliminari (cap. 10). Le conclusioni della nostra analisi e gli sviluppi successivi del nostro metodo di matching verranno infine presentati nel capitolo finale (11).

2 La QCD e le equazioni DGLAP

In questo capitolo faremo vedere come, partendo dall'analisi dell'urto profondamente anelastico elettrone-protone, si arrivi a determinare le equazioni DGLAP [18] che permettono di risommare tutti i termini dominanti nel limite collineare.

La validità della QCD come teoria per descrivere l'interazione forte pone le sue basi su due proprietà fondamentali: la libertà asintotica della costante di accoppiamento forte α_s e la fattorizzazione. La prima caratteristica riguarda il fatto che l'interazione forte viene descritta tramite la teoria delle perturbazioni quando in un processo d'urto si ha un grande impulso trasferito perché in questo caso α_s diventa piccola, infatti la sua espressione al primo ordine è data da

$$\alpha_s = \frac{1}{\beta_0 \cdot \log\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)} \quad (2.1)$$

Dove Q^2 è il quadrato del quadrimpulso trasferito nell'urto e β_0 è una costante positiva. Quindi per $Q \gg \Lambda_{QCD}$ vale l'approccio perturbativo. Nella (2.1) Λ_{QCD} è la scala di energia a cui cominciano ad essere importanti gli effetti non perturbativi e dagli esperimenti risulta essere dell'ordine dei 200 MeV. La mobilità della costante di accoppiamento deriva dal fatto che la QCD è una teoria in cui si possono rinormalizzare le divergenze ultraviolette.

La seconda caratteristica fondamentale è quella della fattorizzazione ovvero della possibilità di scrivere la sezione d'urto come un prodotto tra due fattori di cui uno è valutabile perturbativamente e dipende dalla fisica su piccole distanze, l'altro invece non è calcolabile completamente in modo perturbativo ed è relativo alla fisica delle lunghe distanze ma è universale e si può misurare sperimentalmente. La proprietà della fattorizzazione sarà importante per riassorbire le divergenze infrarosse della teoria derivanti dall'emissione soffice e collineare di particelle a massa nulla nello stato finale.

L'urto profondamente anelastico elettrone-protone (DIS) inizialmente viene descritto in termini del modello partonico che considera il protone composto da particelle puntiformi tra loro non interagenti. La QCD entra in gioco per correggere questo modello assumendo che i partoni possano interagire tra loro tramite la carica di colore. Per descrivere il processo si fa l'ipotesi che il fotone virtuale (di quadrimpulso q), emesso dall'elettrone, urti in modo elastico solo uno dei costituenti del protone (di quadrimpulso p) e che successivamente, la produzione anelastica di particelle finali avvenga a causa dell'interazione forte che si instaura tra i partoni che si stanno allontanando.

Per descrivere l'urto nel sistema di riferimento del laboratorio in cui il protone di massa M_h

è fermo, si introducono due variabili cinematiche: l'energia trasferita dall'elettrone sul protone $\nu = E - E'$ e la variabile di Bjorken $x_B = \frac{Q^2}{2p \cdot q}$. Seguendo la procedura della referenza [19] possiamo scrivere la sezione d'urto differenziale tramite due funzioni F_1 e F_2 chiamate funzioni di struttura del protone che in generale dipendono solo da x_B e da Q^2 :

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2 E'}{Q^4 E} \left(\frac{F_2}{\nu} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{2}{M_h} F_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.2)$$

Le due funzioni di struttura, in questo modello partonico non interagente, sono legate dalla relazione $F_2 = 2xF_1$ che è conseguenza della natura di spin 1/2 dei partoni. Allora possiamo esprimere la sezione d'urto differenziale come il prodotto di un fattore cinematico per la funzione di struttura F_2 che all'ordine più basso è data da:

$$\frac{F_2(x)}{x} = \sum_i e_i^2 \int_x^1 f_i(y) \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y} = \sum_i e_i^2 f_i(x) \quad (2.3)$$

Nella formula (2.3) le $f_i(x)$ sono le funzioni di distribuzione partoniche (PDF), che rappresentano la densità di probabilità di trovare un certo partone con una frazione di impulso x rispetto a quello del nucleone che lo contiene. Il fatto che F_2 dipenda solo dalla variabile adimensionale x e non da Q^2 prende il nome di scaling di Bjorken. Sperimentalmente però si osservavano delle piccole deviazioni da questo comportamento che potevano essere spiegate assumendo una interazione tra i partoni regolata dalla cromodinamica quantistica, una teoria di gauge non abeliana basata sul gruppo di simmetria $SU(3)$. I partoni vengono così identificati con i quark (i campi fondamentali) che interagiscono tramite lo scambio di gluoni (i campi della rappresentazione aggiunta) e possiedono un numero quantico aggiuntivo: il colore.

Si possono considerare i contributi virtuali e quelli reali derivanti dall'emissione di un gluone aggiuntivo valutando tali correzioni al primo ordine perturbativo in α_s . Analizzando il contributo reale nasce il problema dei grandi termini logaritmici $\alpha_s \log(\frac{Q^2}{Q_0^2})$ derivanti dall'emissione collineare del gluone, infatti:

$$\begin{aligned} \frac{F_2(x, Q^2)}{x} &= \sum_i \int_x^1 f_i(y) e_i^2 \left[\delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right) \int_{\mu^2}^{Q^2} \frac{d\mathbf{k}_t^2}{\mathbf{k}_t^2} + R\left(\frac{x}{y}\right) \right] \frac{dy}{y} \\ &= \sum_i \int_x^1 f_i(y) e_i^2 \left[\delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right) \log \frac{Q^2}{\mu^2} + R\left(\frac{x}{y}\right) \right] \frac{dy}{y} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Da questa formula si vede che μ^2 è il cut-off introdotto per regolarizzare la singolarità infrarossa di tipo collineare che si ha quando l'impulso trasverso \mathbf{k}_t del gluone emesso tende a zero, $P_{gq}(z)$ è la funzione di splitting quark-gluone e rappresenta la probabilità di emissione da parte di un quark di un gluone con frazione di impulso z . Il termine R invece racchiude tutti i contributi finiti nel limite collineare.

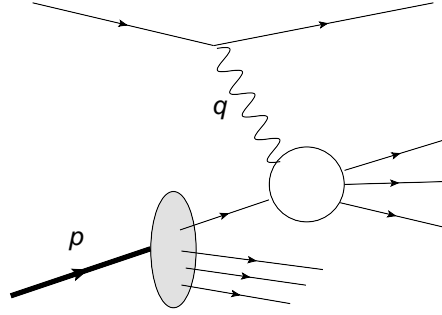


Figura 1: Urto DIS elettrone-protone.

È possibile riassorbire il termine legato alla scala non fisica μ^2 tramite una ridefinizione della funzione di distribuzione partonica:

$$f_i(x, Q_0^2) = f_i(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q_0^2}{\mu^2} \int_x^1 f_i(y) P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y} \quad (2.5)$$

E quindi si può riscrivere F_2 come:

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_i \int_x^1 f_i(y, Q_0^2) e_i^2 \left[\delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right) \log \frac{Q^2}{Q_0^2} + R\left(\frac{x}{y}\right) \right] \frac{dy}{y} + O(\alpha_s^2) \quad (2.6)$$

In questo modo si può vedere come tutti gli effetti relativi alla scala di impulso inferiore a Q_0^2 siano stati inclusi nella funzione di distribuzione che racchiude l'informazione sulla fisica delle lunghe distanze che non dipende dal particolare processo analizzato.

Quindi la sezione d'urto che era scrivibile come il prodotto tra un fattore calcolabile in maniera perturbativa, ma divergente, per la PDF:

$$\sigma_{\gamma^*p} = \hat{\sigma}_{PT} \cdot f^{(0)}(x), \quad (2.7)$$

può essere riscritta come:

$$\sigma_{\gamma^*p} = \hat{\sigma}_{PT}^{finito} \cdot f^{(fisica)}(x, Q^2), \quad (2.8)$$

in cui stavolta $\hat{\sigma}$ è finito e la PDF è una quantità fisica misurabile che ha riassorbito la divergenza infrarossa. Questa proprietà è la fattorizzazione collineare, che consiste quindi nel poter separare il contributo perturbativo da quello non perturbativo e permette di ricavare l'andamento delle PDF in funzione di Q^2 e arrivare alle equazioni DGLAP [18]:

$$\frac{\partial f_i(x, Q_0^2)}{\partial t_0} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 f_i(y, Q_0^2) P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y} \quad (2.9)$$

dove $t_0 = \log Q_0^2/\mu^2$.

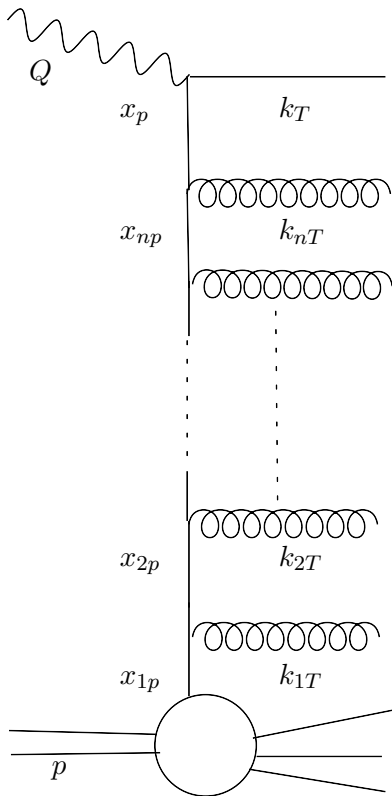


Figura 2: Diagramma di Feynman a scala per l'emissione di n gluoni.

Per risolvere queste equazioni integro-differenziali conviene passare allo spazio dei “momenti” tramite la trasformata di Mellin definita come $f_\omega(Q^2) = \int x^{\omega-1} f(x, Q^2) dx$; utilizzando l'espressione della costante di accoppiamento mobile al primo ordine si ottiene la seguente soluzione:

$$f_\omega(Q^2) = \left(\frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\alpha_s(Q^2)} \right)^{\frac{\gamma_\omega}{2\pi\beta_0}} f_\omega(Q_0^2) \quad (2.10)$$

In questa formula γ_ω è la trasformata di Mellin della funzione di Splitting $P_{ab}(x)$ e viene interpretata come dimensione anomala. Le equazioni DGLAP permettono di verificare la QCD come teoria che descrive le interazioni tra i partoni, infatti facendo un fit con i dati sperimentali a una certa scala di energia Q_0 si possono ricavare le PDF a una scala di energia superiore usando la (2.9) e confrontare così la predizione teorica con i dati. Una caratteristica importante della (2.10) è quella di risommare a tutti gli ordini il termine della forma $\alpha_s \log(\frac{Q^2}{Q_0^2})$ che risulta dominante quando uno dei partoni emessi diviene collineare con uno degli altri partoni.

Per vedere come avviene questa risommazione si prende in considerazione il diagramma di Feynman relativo all'emissione di n gluoni (vedi fig. 2) che abbiano gli impulsi trasversi fortemente ordinati tra loro secondo questa relazione $Q^2 \gg k_{nT}^2 \gg \dots \gg k_{1T}^2 \gg Q_0^2$. Ogni volta che nel processo abbiamo il vertice $q \rightarrow qg$, il suo contributo alla sezione d'urto nel limite

collineare è dato dal fattore:

$$\frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z) dz \frac{dk_T^2}{k_T^2} \quad (2.11)$$

Quindi la sezione d'urto per $n - 1$ particelle, in questo limite, assume la forma:

$$d^{n+1}\sigma = \frac{dk_T^2}{k_T^2} dz \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z) \times d^n\sigma \quad (2.12)$$

Grazie a questa espressione possiamo valutare il diagramma di Feynman a scala relativo all'emissione di n partoni considerando che ogni piolo della scala corrisponde al fattore dipendente dalla funzione di Splitting che viene iterata n volte.

$$\begin{aligned} \sigma_n(x, Q^2) &= \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dk_{nT}^2}{k_{nT}^2} \frac{\alpha_s(k_{nT}^2)}{2\pi} \dots \int_{Q_0^2}^{k_{3T}^2} \frac{dk_{2T}^2}{k_{2T}^2} \frac{\alpha_s(k_{2T}^2)}{2\pi} \int_{Q_0^2}^{k_{1T}^2} \frac{dk_{1T}^2}{k_{1T}^2} \frac{\alpha_s(k_{1T}^2)}{2\pi} \\ &\times \int_x^1 \frac{dx_n}{x_n} P_{qq}\left(\frac{x}{x_n}\right) \dots \int_{x_3}^1 \frac{dx_2}{x_2} P_{qq}\left(\frac{x_3}{x_2}\right) \int_{x_2}^1 \frac{dx_1}{x_1} P_{qq}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) g(x_1, Q_0^2) \end{aligned} \quad (2.13)$$

L'integrale sull'impulso trasverso si calcola scrivendo la costante di accoppiamento mobile al primo ordine e sfruttando il forte ordinamento tra gli impulsi trasversi, ottenendo

$$\frac{1}{n!} \left[\frac{1}{2\pi\beta_0} \log\left(\frac{\log(Q^2/\Lambda^2)}{\log(Q_0^2/\Lambda^2)}\right) \right]^n = \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{2\pi\beta_0} \log\left(\frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\alpha_s(Q^2)}\right) \right]^n \quad (2.14)$$

La parte invece relativa all' integrale in dx si valuta effettuando la trasformata di Mellin e sfruttando il fatto che la trasformata di Mellin di una convoluzione è uguale al prodotto delle trasformate di Mellin dei vari componenti. Come risultato si ottiene $[\gamma_\omega]^n g_\omega(Q_0^2)$, combinandolo con la (2.14) si ha che:

$$\begin{aligned} \sum_n \sigma_{n,\omega}(Q^2) &= g_\omega(Q_0^2) \sum_n \frac{1}{n!} \left[\frac{\gamma_\omega}{2\pi\beta_0} \log\left(\frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\alpha_s(Q^2)}\right) \right]^n \\ &= g_\omega(Q_0^2) \left(\frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\alpha_s(Q^2)} \right)^{\frac{\gamma_\omega}{2\pi\beta_0}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Quest'ultima espressione coincide con la (2.10) e quindi le equazioni DGLAP risommano tutti i termini della forma $\alpha_s \log(Q^2/Q_0^2)$.

3 Il Pommerone

Per spiegare la teoria dell'interazione forte prima dell'uso della teoria di campo basata sullo scambio di colore (QCD), venivano usate alcune proprietà della matrice di scattering S che descrive a livello quantistico il passaggio dallo stato iniziale del sistema $|a\rangle$ conosciuto a un tempo t tendente a $t \rightarrow -\infty$ a quello finale $|b\rangle$ che si ritrova a un tempo $t \rightarrow +\infty$, definita da:

$$S_{ab} = \langle b; out | a; in \rangle \quad (3.1)$$

Una delle proprietà della matrice S è quella di essere una funzione invariante di Lorentz perché viene espressa in funzione delle variabili di Mandelstam che sono costruiti con i quadrimpulsi delle particelle entranti e uscenti e sono degli invarianti di Lorentz. Considerando il processo $a + b \rightarrow c + d$ in cui a, b sono le particelle entranti e c, d quelle uscenti si definiscono:

$$s = (p_a + p_b)^2, \quad t = (p_a - p_c)^2, \quad u = (p_a - p_d)^2. \quad (3.2)$$

Nella (3.2) s rappresenta il quadrato dell'energia totale nel sistema di riferimento del centro di massa, t invece è il quadrato dell'impulso trasferito tra la particella iniziale e quella finale ed è collegato all'angolo di scattering θ . L'ampiezza di scattering $A(s, t)$ può essere scritta in funzione solo di s e t perché u non è una variabile indipendente infatti può essere espressa come combinazione delle altre due. Un'altra caratteristica importante di s è l'unitarietà ovvero $SS^\dagger = 1$.

Questa proprietà deriva dalla conservazione della probabilità, cioè la probabilità per uno stato iniziale di finire in un certo stato finale sommato su tutti i possibili stati finali deve essere uguale a uno, per cui definendo la matrice di scattering come:

$$S_{ab} = \delta_{ab} + i(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_a p_a - \sum_b p_b \right) A_{ab}, \quad (3.3)$$

sfruttando l'unitarietà si ha:

$$2ImA_{ab} = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_a p_a - \sum_b p_b \right) \sum_c A_{ac} A_{cb}^\dagger \quad (3.4)$$

Questa relazione prende il nome di regola di Cutkosky e permette di ricavare la parte immaginaria di una ampiezza calcolando l'ampiezza di scattering dello stato iniziale e di quello finale con tutte le possibili combinazioni sugli stati intermedi (vedi fig. 3). Dalla (3.4) discende il teorema ottico che mette in relazione la parte immaginaria dell'ampiezza di scattering in avanti ($t = 0$) con la sezione d'urto totale:

$$2ImA_{aa}(s, 0) = (2\pi)^4 \sum_{n=2} \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_a p_a \right) |A_{a \rightarrow n}|^2 = F\sigma_{tot} \quad (3.5)$$

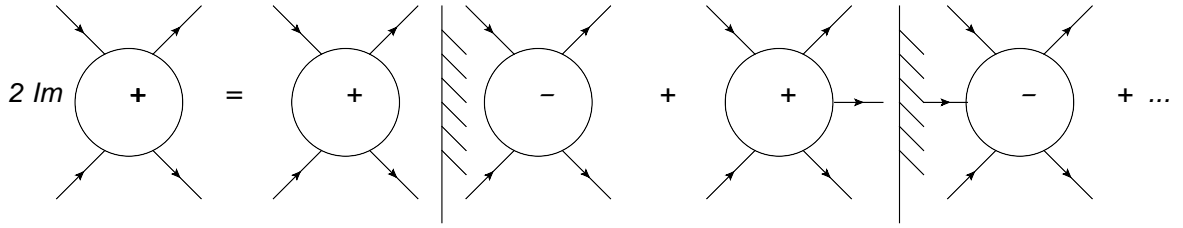


Figura 3: Illustrazione della regola di Cutkosky nel caso di due particelle che vanno in due particelle, il taglio indica che le particelle intermedie sono on-shell, il segno + indica l'ampiezza mentre il - la sua hermitiana coniugata. Il primo termine del secondo membro si riferisce al caso $n = 2$, gli altri per gli n successivi.

con il fattore di flusso $F = 2s$.

Un'altra caratteristica della matrice S è quella di essere una funzione analitica. Al di sopra di un certo valore di s che prende il nome di soglia di produzione, l'ampiezza A risulta avere una parte immaginaria definita dalla seguente relazione:

$$ImA(s, t) = \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [A(s + i\epsilon, t) - A(s - i\epsilon, t)] \quad (3.6)$$

Questa relazione viene usata nella formula di dispersione per poter ricostruire l'ampiezza A e risalire alla conoscenza della parte reale di A sapendo la sua parte immaginaria grazie alla regola di Cutkosky. Se S è analitica e quindi dalla definizione (3.3) anche A è analitica allora vale la formula di Cauchy:

$$A(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c ds' \frac{A(s', t)}{(s' - s)} \quad (3.7)$$

Allora usando la (3.6) e considerando il contorno di integrazione C di fig. 4 in cui si suppone che il contributo degli integrali sui semicerchi tenda a zero si ottiene:

$$A(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{s^+}^{\infty} ds' \frac{ImA(s', t)}{(s' - s)} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{s^-} ds' \frac{ImA(s', t)}{(s' - s)}. \quad (3.8)$$

Se l'ampiezza A non si annulla per $s \rightarrow \infty$ allora l'espressione precedente viene modificata in modo opportuno mediante delle sottrazioni per far sì che l'integrale sui semicerchi si annulli. Grazie a questa formula di dispersione si può risalire all'espressione dell'ampiezza di scattering; questa procedura prende il nome di "bootstrap method" e permette di ricavare tale ampiezza senza effettuare ipotesi sulla dinamica dell'interazione quantistica che descrive il processo in questione.

Prima della teoria di campo quantistica per determinare l'ampiezza di scattering si ricorreva allo sviluppo in onde parziali tramite i polinomi di Legendre $P_l(\cos \theta)$ dove l è il grado del polinomio e rappresenta il momento angolare della particella scambiata nell'urto, e θ è l'angolo

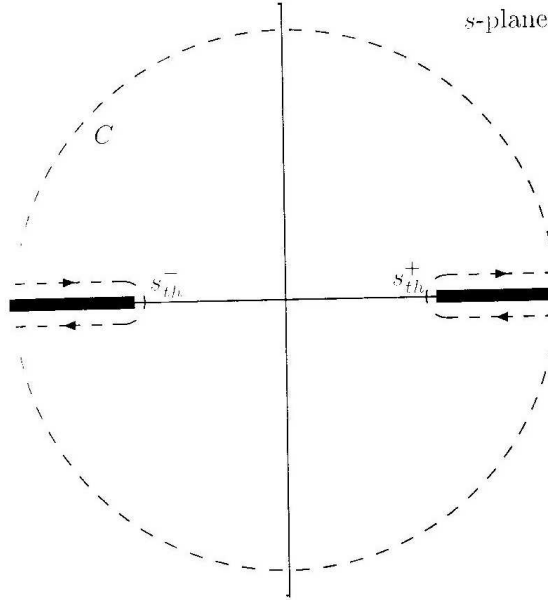


Figura 4: Contorno di integrazione per l'espressione (3.8)

di scattering nel sistema di riferimento del centro di massa collegato alle variabili di Mandelstam dalla relazione $\cos \theta = 1 + \frac{2t}{s}$; l'espressione di A in onde parziali è:

$$A_{ab \rightarrow cd}(s, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(s) P_l(1 + 2t/s) \quad (3.9)$$

La trasformazione di Sommerfeld e Watson consiste nel far diventare l una variabile continua nel piano complesso, per cui la sommatoria nella (3.9) diviene un integrale nel piano complesso e C è un contorno di integrazione effettuato attorno all'asse reale positivo di l (vedi fig. 5):

$$A(s, t) = \frac{1}{2i} \int_C dl (2l+1) \frac{a(l, t)}{\sin \pi l} P_l(1 + 2s/t) \quad (3.10)$$

La presenza al denominatore del termine $\sin \pi l$ permette di riottenere la (3.9) per i valori di l interi, $a(l, t)$ e $P(l, 1 + 2s/t)$ sono le continuazioni analitiche rispettivamente di $a_l(t)$ e di $P_l(1 + 2s/t)$.

Per vedere come vengono definiti i poli di Regge si modifica il contorno di integrazione dell'integrale precedente come in fig. 5, il nuovo contorno C' percorre tutto l'asse immaginario per $Re l = -1/2$ e prende in considerazione gli eventuali poli o tagli della funzione $a^\eta(l, t)$, quest'ultima presenta una dipendenza dall'indice $\eta = \pm 1$ chiamato segnatura dell'onda parziale e deriva dal fatto che distingue la continuazione analitica dell'onda parziale pari da quella dispari e viene accompagnata dal relativo fattore di segnatura $(\frac{\eta + e^{-i\pi l}}{2})$. Nel caso più semplice in cui

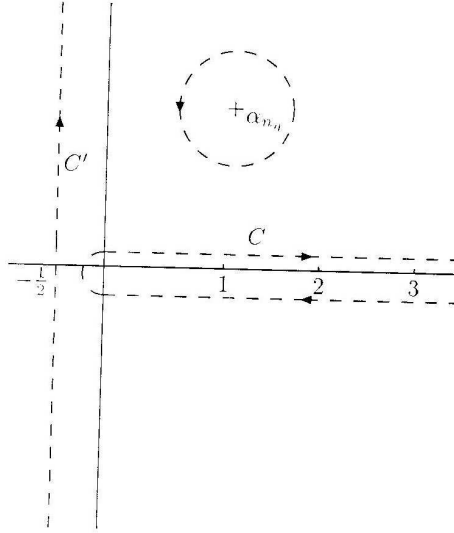


Figura 5: Contorno di integrazione per la trasformazione di Sommerfeld-Watson.

la funzione a^η presenti poli semplici per i valori di $l = \alpha_{n_\eta}(t)$ si può scrivere:

$$\begin{aligned}
A(s, t) &= \frac{1}{2i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} dl \left[\frac{(2l+1)}{\sin \pi l} \sum_{\eta=\pm 1} \frac{(\eta + e^{-i\pi l})}{2} a^{(\eta)}(l, t) P(l, 1 + 2s/t) \right] + \\
&+ \sum_{\eta=\pm 1} \sum_{n_\eta} \frac{(\eta + e^{-i\pi \alpha_{n_\eta}(t)})}{2} \frac{\pi \beta_{n_\eta}(2\alpha_{n_\eta}(t) + 1)}{\sin \pi \alpha_{n_\eta}(t)} P(\alpha_{n_\eta}(t), 1 + 2s/t). \quad (3.11)
\end{aligned}$$

I poli semplici $\alpha_{n_\eta}(t)$ sono chiamati poli di Regge pari o dispari a seconda del valore dell'indice η mentre i $\beta_{n_\eta}(t)$ sono i residui di tali poli. Nel limite di alta energia in cui $s \gg |t|$ il comportamento asintotico dei polinomi di Legendre è della forma:

$$P_l(1 + 2s/t) \rightarrow \frac{\Gamma(2l+1)}{\Gamma^2(l+1)} \left(\frac{s}{2t}\right)^l, \quad (3.12)$$

dove $\Gamma(x)$ è la funzione gamma di Eulero. Nel limite di alta energia il contributo dell'integrale lungo il contorno C' (fig. 5) tende a zero e rimangono soltanto i contributi dei poli di Regge e in modo particolare di quello che presenta la parte reale di $\alpha_{n_\eta}(t)$ più grande (che viene chiamato il polo di Regge dominante) per cui nel limite di $s \rightarrow \infty$:

$$A(s, t) \approx \frac{(\eta + e^{-i\pi \alpha(t)})}{2} \beta(t) s^{\alpha(t)}, \quad (3.13)$$

Nella (3.13) $\alpha(t)$ è la posizione del polo dominante di Regge e dipende da t , $\beta(t)$ racchiude i fattori non dipendenti da s e quindi nella (3.13) rimane ben separata la dipendenza da s e da t , e questa sarà una delle caratteristiche più importanti che si ritroveranno anche in QCD di alta energia. L'ampiezza della (3.13) può essere interpretata come quella derivante dallo scambio di un particolare oggetto chiamato Reggeone che possiede un momento angolare uguale a $\alpha(t)$, in

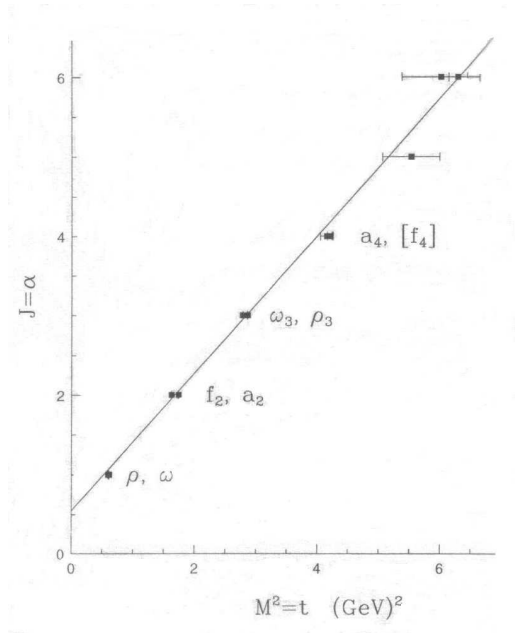


Figura 6: Grafico del momento angolare in funzione di m^2 per alcuni mesoni.

realtà il Reggeone non è una vera e propria particella fisica in quanto il suo momento angolare è una funzione dipendente da t e può assumere anche valori che non sono interi o seminteri.

Ci si aspetta che l'ampiezza di scattering A abbia dei poli in corrispondenza dei valori di α per cui $\alpha(m_i^2) = J_i$ ovvero quando nel processo d'urto viene scambiata una particella di massa m_i e momento angolare J_i . Sperimentalmente Chew e Frautschi negli anni sessanta hanno verificato che effettuando un grafico del momento angolare α in funzione della massa al quadrato m^2 di alcuni mesoni e in particolare di quelli che hanno una vita media più breve, risulta che essi stanno approssimativamente lungo una linea retta; quindi la funzione $\alpha(t)$ ha un andamento circa lineare $\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha't$ come riportato nel grafico di fig. 6. Dall'intercetta per $t = 0$ della traiettoria del polo dominante di Regge e dal teorema ottico si può ricavare l'espressione per la sezione d'urto totale σ_{tot} ovvero:

$$\sigma_{tot} \approx s^{(\alpha(0)-1)} \quad (3.14)$$

Per valori dell'intercetta $\alpha(0) < 1$ la σ_{tot} decresce al crescere di s , se invece $\alpha(0) > 1$ la σ_{tot} cresce all'aumentare di s . Nel caso in cui l'intercetta del polo dominante di Regge sia maggiore di 1 e i numeri quantici della particella scambiata siano quelli del vuoto allora in questo caso il Reggeone prende il nome di Pomeron dal nome del fisico ucraino Pomeranchuk che dimostrò che la sezione d'urto totale poteva crescere con s solo se la particella scambiata aveva i numeri quantici del vuoto (isospin uguale a zero e pari sotto l'operazione di coniugazione di carica).

Dal punto di vista sperimentale risulta che la sezione d'urto totale protone-protone cresce

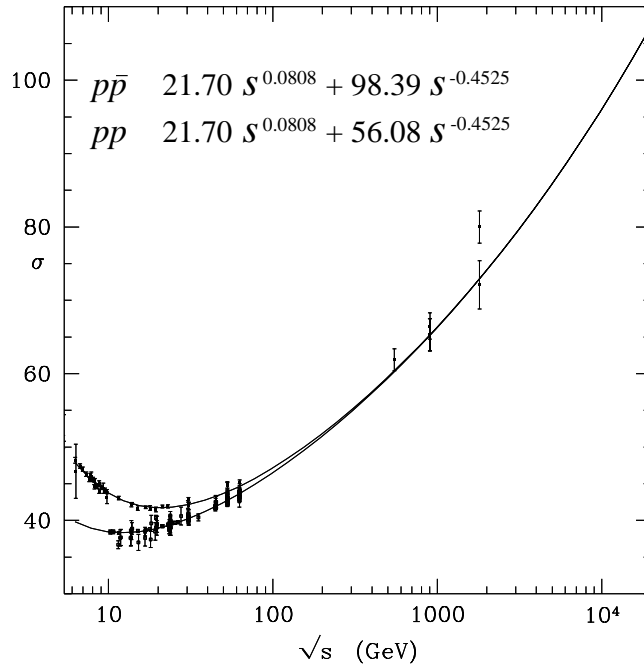


Figura 7: Grafico delle sezioni d'urto protone-protone e protone-antiprotone in funzione di \sqrt{s} .

all'aumentare dell'energia nel centro di massa \sqrt{s} e dal punto di vista teorico lo scambio del Pomeron garantisce la crescita della sezione d'urto totale con s (vedi la 3.14).

Dal grafico riportato in fig. 7 si nota un altro aspetto importante, gli andamenti della sezione d'urto totale protone-protone e quella protone-antiprotone risultano essere coincidenti per grandi valori di \sqrt{s} proprio a significare che il Pomeron essendo un oggetto con i numeri quantici del vuoto si accoppia in maniera simmetrica ad alte energie sia con il protone che con l'antiprotone. Osservando i valori numerici derivanti dal fit, riportati nella (3.15), si può dire che il primo termine si riferisce al contributo di alta energia e quindi allo scambio del Pomeron con una intercetta pari a $\alpha_P(0) = 1,08$, il secondo termine invece rappresenta un contributo sottodominante e deriva dallo scambio di un Reggeone che presenta una intercetta della traiettoria di Regge minore di 1 e pari a $\alpha_r = 0,55$. Questa differenza si nota a basse energie e, in accordo con il teorema di Pomeranchuk scompare ad alte energie.

$$\begin{aligned}\sigma_{pp} &= 21,7s^{0,08} + 56,1s^{-0,45} mb \\ \sigma_{\bar{p}p} &= 21,7s^{0,08} + 98,4s^{-0,45} mb\end{aligned}\tag{3.15}$$

C'è da fare una osservazione riguardo al fatto che l'intercetta del Pomeron sia maggiore di uno. Il limite di Froissart-Martin prevede che la sezione d'urto non debba crescere con s più velocemente del $\log^2 s$ ovvero deve valere la relazione:

$$\sigma_{tot} < K \log^2 s\tag{3.16}$$

Nel caso di intercetta maggiore di uno e quindi del Pomeron, tale condizione viene violata, però, come riportato in [20], un valore dell'intercetta di poco superiore a uno dà luogo a una violazione solo nel caso di impulsi superiori a quelli della scala di Planck. Inoltre prima di raggiungere energie così elevate, è necessario tenere in conto di altre classi di diagrammi che coinvolgono lo scambio e l'interazione di più Pomeroni, i quali riescono a ristabilire l'unitarietà mediante l'introduzione di effetti non lineari che saturano la funzione di Green.

Nelle parti che seguono si farà vedere come tramite la teoria della cromodinamica quantistica di alta energia e quindi tramite l'equazione BFKL si possa ottenere un andamento della sezione d'urto come quello predetto dalla teoria di Regge e riuscire a ricavare con la teoria di campo l'esponente di crescita a grandi s e vedere quali sono i punti di raccordo tra la teoria del Pomeron e l'equazione BFKL.

4 La reggeizzazione del gluone

Una particella di massa M e spin J si dice che reggeizza oppure che assume un comportamento alla Regge se l'ampiezza A di un processo che coinvolge lo scambio della stessa particella nel canale t ha un andamento del tipo: $A = s^{\alpha(t)}$, dove $\alpha(t)$ è la traiettoria di Regge.

Per mostrare il meccanismo di reggeizzazione del gluone, prendiamo in considerazione l'urto quark-quark attraverso lo scambio di un gluone e quindi di un ottetto di colore. In un processo di interazione di alta energia dove vengono scambiati gluoni si può organizzare il calcolo della sezione d'urto in modo da prendere in considerazione solo il contributo dei cosiddetti diagrammi a scala come quelli di fig. 8.

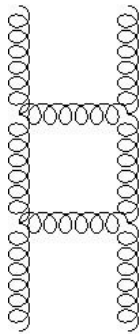


Figura 8: Parte di un diagramma a scala di gluoni

In tali diagrammi il vertice di interazione a 3 gluoni non sarà quello solito dato dalle regole di Feynman dovuto all'autointerazione ma avrà una forma modificata che indicheremo con Γ . Allo stesso modo le linee verticali di scambio di gluoni non saranno rappresentate dai propagatori gluonici della forma $D_{\mu\nu}(s, q^2) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$, essendo invece gluoni reggeizzati avranno propagatori della forma:

$$D_{\mu\nu}(s, q^2) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left(\frac{\hat{s}}{k^2} \right)^{\epsilon_G(q^2)} \quad (4.1)$$

Nell'espressione precedente \hat{s} è il quadrato dell'energia nel centro di massa delle particelle tra cui avviene lo scambio del gluone reggeizzato mentre $\alpha_G(q^2) = 1 + \epsilon_G(q^2)$ è la traiettoria di Regge del gluone.

Per determinare la reggeizzazione del gluone si devono calcolare a tutti gli ordini perturbativi i termini proporzionali al $\log s$; all'ordine principale (leading) si calcola il diagramma ad albero di fig. 9. Prendiamo in considerazione il regime cinematico di alta energia in cui vale la seguente relazione:

$$s \gg |t| = |q^2| \quad (4.2)$$

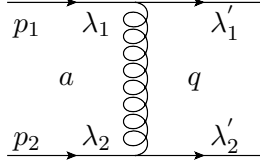


Figura 9: Diagramma ad albero

I quadrimpulsi dei quark entranti sono p_1 e p_2 e nel centro di massa hanno la seguente forma:

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(\frac{\sqrt{s}}{2}, \frac{\sqrt{s}}{2}, \mathbf{0} \right) \\ p_2 &= \left(\frac{\sqrt{s}}{2}, -\frac{\sqrt{s}}{2}, \mathbf{0} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

In questa notazione il grassetto indica che si tratta di un vettore bidimensionale. Nel regime cinematico (4.2) tutte le componenti del quadrimpulso del gluone scambiato q sono più piccole di \sqrt{s} perciò per calcolare l'ampiezza di scattering possiamo usare l'approssimazione iconale. Il vertice di interazione fermione-gluone in alto della fig. 9 darebbe un contributo del tipo:

$$-ig\bar{u}(\lambda'_1, p_1 - q)\gamma^\mu u(\lambda_1, p_1)\tau_{ij}^a \quad (4.4)$$

Nella (4.4) λ', λ sono le elicità dei due quark e τ_{ij}^a è la matrice di colore nella rappresentazione fondamentale di $SU(3)$.

Vediamo in cosa consiste l'approssimazione iconale; siccome le componenti di q^μ sono piccole allora il vertice di interazione precedente diventa:

$$-ig\bar{u}(\lambda'_1, p_1)\gamma^\mu u(\lambda_1, p_1)\tau_{ij}^a = -2igp_1^\mu \delta_{\lambda_1\lambda'_1}\tau_{ij}^a. \quad (4.5)$$

L'ampiezza all'ordine più basso per lo scambio di un gluone è:

$$A_0^{(8)} = g^2 2p_1^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} 2p_2^\nu \delta_{\lambda'_1\lambda_1} \delta_{\lambda'_2\lambda_2} G_0^{(8)} = 8\pi\alpha_s \frac{s}{t} \delta_{\lambda'_1\lambda_1} \delta_{\lambda'_2\lambda_2} G_0^{(8)} \quad (4.6)$$

Nella (4.6) $G_0^{(8)}$ indica il fattore di colore del diagramma di fig. 9 ordine albero per lo scambio in otetto di colore. Per calcolare la correzione ad ordine relativo α_s all'ampiezza $A_0^{(8)}$ mantenendo, in approssimazione di alta energia, i termini proporzionali al $\log s$ si devono calcolare i 2 grafici di fig. 10 chiamati box e crossed box. Conviene esprimere il quadrimpulso del gluone scambiato k attuando la parametrizzazione di Sudakov in cui:

$$k^\mu = \rho p_1^\mu + \lambda p_2^\mu + k_\perp^\mu \quad (4.7)$$

La componente k_\perp^μ è trasversa rispetto ai quadrivettori p_1 e p_2 ed essendo un vettore bidimensionale verrà indicato in grassetto come \mathbf{k} . Sfruttando questa parametrizzazione l'integrale

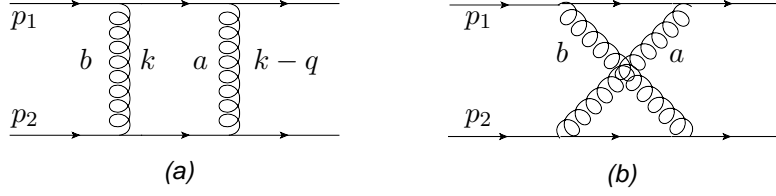


Figura 10: Diagrammi box e crossed box per la correzione virtuale $O(\alpha_s^2)$.

sullo spazio delle fasi per due particelle nello stato finale diviene:

$$\int d(P S^2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k \delta((p_1 - k)^2) \delta((p_2 + k)^2) = \frac{s}{8\pi^2} \int d\rho d\lambda d^2 \mathbf{k} \delta(-\lambda s - \mathbf{k}^2) \delta(\rho s - \mathbf{k}^2) \quad (4.8)$$

Tramite la regola di Cutkosky si può ricavare la parte immaginaria dell'ampiezza di scattering per il diagramma di fig. 10; si può inoltre risalire alla parte reale dello stesso processo tramite la regola di dispersione e avere la correzione al primo ordine $A_1^{(8)}$.

$$\begin{aligned} \text{Im} A_a^{(8)} &= \frac{64\pi^2 \alpha_s^2}{2} \int d(P S^2) \left(\frac{s}{k^2}\right) \left(\frac{s}{(k-q)^2}\right) \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} G_a \\ &= 8\pi \alpha_s \frac{s}{t} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} G_a \frac{\alpha_s}{2\pi} \int d^2 \mathbf{k} \frac{-\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nella (4.9) G_a rappresenta il fattore di colore del diagramma (a) della fig. 10. La parte reale di $A_a^{(8)}$ la cui parte immaginaria è la (4.9) è data da:

$$\text{Re} A_a^{(8)} = -8\pi \alpha_s \frac{s}{t} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} G_a \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \log \frac{s}{\mathbf{k}^2} \int d^2 \mathbf{k} \frac{-\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \quad (4.10)$$

Per ottenere questa espressione è stata usata la relazione $\log(\frac{s}{t}) = \log(\frac{s}{|t|}) - i\pi$.

All'ordine $O(\alpha_s^2)$ bisogna calcolare anche il contributo del secondo diagramma crossed box di fig. 10 che consiste nello stesso risultato del precedente scambiando s con u . Siccome la variabile di Mandelstam u è negativa per questo diagramma non c'è la parte immaginaria e rimane solo il contributo reale che è:

$$\text{Re} A_b^{(8)} = -8\pi \alpha_s \frac{u}{t} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} G_b \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \log \frac{-u}{\mathbf{k}^2} \int d^2 \mathbf{k} \frac{-\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \quad (4.11)$$

Siccome nel regime cinematico $|t| \ll s$ vale $u = -s$, allora:

$$\text{Re} A_b^{(8)} = 8\pi \alpha_s \frac{s}{t} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} G_b \frac{\alpha_s}{2\pi^2} \log \frac{s}{\mathbf{k}^2} \int d^2 \mathbf{k} \frac{-\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \quad (4.12)$$

Si possono mettere insieme i due risultati (4.10) e (4.12) valutando la differenza tra i due fattori di colore $G_a - G_b$ relativi ai due diagrammi in questione (box e crossed box)

$$\begin{aligned} G_a &= (\tau^a \tau^b) \otimes (\tau^a \tau^b), & G_b &= (\tau^a \tau^b) \otimes (\tau^b \tau^a) \\ G_a - G_b &= (\tau^a \tau^b) \otimes [\tau^a, \tau^b] = i \frac{f_{abc} i f_{abd}}{2} [\tau^a, \tau^b] \otimes \tau^c = \frac{i f_{abc} i f_{abd}}{2} \tau^d \tau^c = -\frac{N_c}{2} G_0^{(8)} \end{aligned}$$

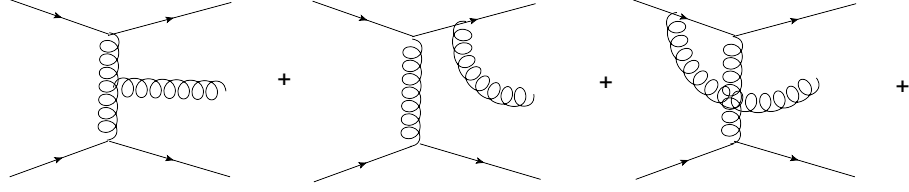


Figura 11: Diagrammi per le correzioni reali per il processo $qq \rightarrow qq + g$

e ottenere

$$A_1^{(8)} = A_0^{(8)} \epsilon_G(t) \log\left(\frac{s}{\mathbf{k}^2}\right) \quad (4.13)$$

dove, ponendo $t = -\mathbf{q}^2$, si è indicato con $\epsilon_G(t)$:

$$\epsilon_G(t) = \frac{N\alpha_s}{4\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \frac{t}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \quad (4.14)$$

Per calcolare la correzione ordine α_s^3 si devono considerare i diagrammi di fig. 11. Il primo diagramma è quello relativo all'emissione di un gluone reale e il suo contributo, nel regime cinematico considerato, vale:

$$-ig^3 2s [\rho_1 p_1^\sigma + \lambda_2 p_2^\sigma - (k_1 + k_2)_\perp^\sigma] \frac{\delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2}}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2} f_{abc} \tau^a \otimes \tau^b \quad (4.15)$$

Per scrivere in maniera compatta il contributo derivante anche dagli altri grafici di fig. 11 si può introdurre il vertice $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma(k_1, k_2)$ e graficamente ottenere quello di fig. 12. L'ampiezza $A_{2 \rightarrow 3}^{(8)\sigma}$ di tale processo si può scrivere come:

$$A_{2 \rightarrow 3}^{(8)\sigma} = -\frac{2ig^3 2p_1^\mu p_2^\nu}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} f_{abc} \tau^a \otimes \tau^b \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(k_1, k_2) \quad (4.16)$$

Seguendo il riferimento [20] il vertice $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma(k_1, k_2)$ è dato da:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma(k_1, k_2) = \frac{2p_{2\mu} p_{1\nu}}{s} \left[\left(\rho_1 + \frac{2\mathbf{k}_1^2}{\lambda_2 s} \right) p_1^\sigma + \left(\lambda_2 + \frac{2\mathbf{k}_2^2}{\rho_1 s} \right) p_2^\sigma - (k_1 + k_2)_\perp^\sigma \right] \quad (4.17)$$

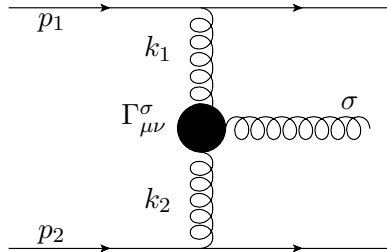


Figura 12: Diagramma di Feynman con il vertice effettivo Γ che racchiude tutti i contributi derivanti dall'emissione di un gluone reale.

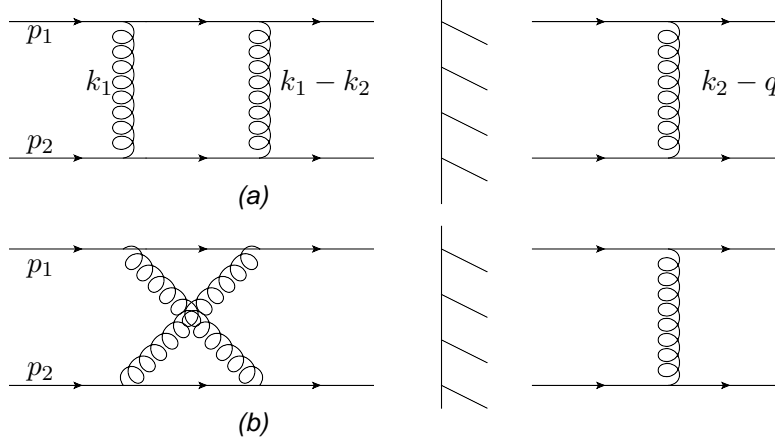


Figura 13: Diagrammi di interferenza $O(\alpha_s^3)$ tra correzioni virtuali e contributo di Born che coinvolgono lo scambio di tre gluoni.

Utilizzando come prima la regola di Cutkosky si arriva a scrivere la parte immaginaria di $A_2^{(8)}$:

$$ImA_2^{(8)} = \frac{-g_{\sigma\tau}}{2} \int d(PS^3) A_{2 \rightarrow 3}^{(8)\sigma}(k_1, k_2) A_{2 \rightarrow 3}^{\dagger(8)\tau}(k_1 - q, k_2 - q) + \dots \quad (4.18)$$

I puntini presenti nella formula precedente stanno a indicare che all'ordine $O(\alpha_s^3)$ si devono valutare anche i diagrammi di interferenza tra correzioni virtuali e contributo di Born con lo scambio di tre gluoni come quelli di fig. 13. Valutando le contrazioni tra i due vertici di interazione contenuti nelle ampiezze $A_{2 \rightarrow 3}^{(8)\sigma}$ si ottiene:

$$ImA_2^{(8)} = -\frac{N^2 \alpha_s^2}{32\pi^3} A_0^{(8)} \mathbf{q}^2 \int_{\mathbf{k}^2/s}^1 \frac{d\rho_1}{\rho_1} d^2\mathbf{k}_1 d^2\mathbf{k}_2 \cdot \left[\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2} - \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2} - \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2} \right] + \dots \quad (4.19)$$

Seguendo sempre [20] si può dire che i contributi derivanti dai grafici di fig. 13 cancellano esattamente il secondo e il terzo termine tra le parentesi quadre nell'espressione (4.19), lasciando quindi ad ordine $O(\alpha_s^3)$ solo il primo termine. Quest'ultimo ha la caratteristica di avere la dipendenza dagli impulsi trasversi $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ in modo tale da poter essere fattorizzato e questo permette di riprodurre il termine $\epsilon_G(t)$ al quadrato. Integrando in $d\rho_1$ si ottiene:

$$ImA_2^{(8)} = -\frac{1}{2} \pi \epsilon_G^2(t) \log\left(\frac{s}{\mathbf{k}^2}\right) A_0^{(8)} \quad (4.20)$$

Da questa è possibile ricavare la corrispondente parte reale e, inserendo anche il contributo dei diagrammi cosiddetti crossed in cui si scambia s con u si può scrivere fino all'ordine $O(\alpha_s^3)$ il seguente sviluppo per $A^{(8)}$:

$$A^{(8)} = A_0^{(8)} \left(1 + \epsilon_G(t) \log\left(\frac{s}{\mathbf{k}^2}\right) + \frac{1}{2} \epsilon_G^2(t) \log^2\left(\frac{s}{\mathbf{k}^2}\right) + \dots \right) \quad (4.21)$$

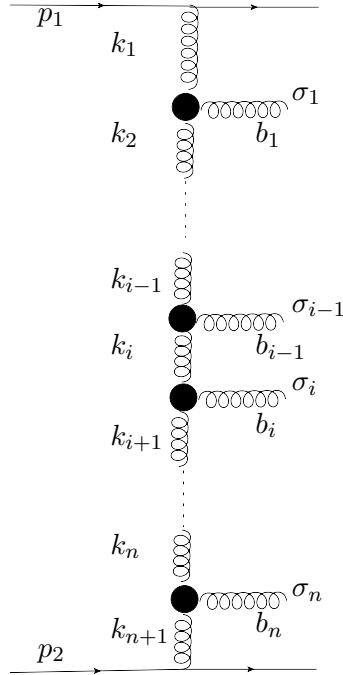


Figura 14: Grafico a scala per l'interazione di due quark con lo scambio di n gluoni.

Guardando la struttura di questo sviluppo in serie si può supporre che l'ampiezza di scattering del processo in cui viene scambiato un gluone reggeizzato abbia un andamento del tipo $A^{(8)} \sim A_0^{(8)} s^{\epsilon_G(t)}$.

Possiamo generalizzare questo andamento e scrivere il termine n-esimo di questo sviluppo considerando l'ampiezza $A_{2 \rightarrow n+2}^{(8)}$ in cui si devono calcolare diagrammi con l'emissione di n gluoni (vedi fig. 14) e si deve estendere il ragionamento fatto in precedenza per cui ad ogni gradino della scala c'è un vertice di interazione Γ .

$$\begin{aligned}
A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8)\sigma_1 \dots \sigma_n} &= 2is(g)^{n+2} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} G_n^{(8)} \\
&\times \frac{i}{\mathbf{k}_1^2} \prod_{i=1}^n \left[\frac{2p_1^{\mu_i} p_2^{\nu_{i+1}}}{s} \Gamma_{\mu_i \nu_{i+1}}^{\sigma_i}(k_i, k_{i+1}) \frac{i}{\mathbf{k}_{i+1}^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Dove

$$G_n^{(8)}(b_1, \cdot, b_n) = \prod_{i=1}^n f_{a_i a_{i+1} b_i} \tau^{a_i} \otimes \tau^{a_{n+1}} \tag{4.23}$$

L'effetto di queste emissioni nel diagramma a scala è quello di reggeizzare il gluone. Questo sostanzialmente significa che il propagatore dei gluoni verticali che vengono scambiati lungo la scala assume una forma diversa; vediamo allora in dettaglio come cambia.

Se si considera una sezione i-esima della scala (vedi fig. 15) l'energia entrante \hat{s}_i si può esprimere

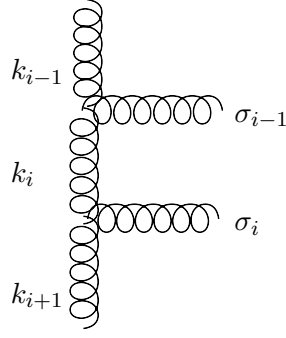


Figura 15: Sezione del diagramma a scala per la relazione (4.24).

come:

$$\hat{s}_i = (k_{i-1} - k_{i+1})^2 \approx -\rho_{i-1}\lambda_{i+1}s = \frac{\rho_{i-1}}{\rho_i}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i+1})^2 \quad (4.24)$$

Questa espressione è stata ottenuta considerando il regime cinematico di alta energia e il fatto che:

$$\begin{aligned} 1 &\gg \rho_i \gg \rho_{i+1} \gg \frac{\mathbf{k}^2}{s} \\ 1 &\gg |\lambda_{i+1}| \gg |\lambda_1| \gg \frac{\mathbf{k}^2}{s} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Inoltre per l'ultima uguaglianza della (4.24) si sfrutta la condizione di on-shell per il gluone emesso σ_i :

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= 0 = (k_i - k_{i+1})^2 = (\rho_i - \lambda_{i+1})^2 \frac{s}{4} - (\rho_i + \lambda_{i+1})^2 \frac{s}{4} - (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i+1})^2 = \\ &= -\rho_i \lambda_{i+1} s - (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i+1})^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Allora si ricava:

$$\lambda_{i+1} = -\frac{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i+1})^2}{\rho_i s} \quad (4.27)$$

che sostituito nella (4.24) verifica la relazione.

Il propagatore del gluone reggeizzato diventa:

$$D_{\mu\nu}(\hat{s}_i, k_i^2) = \frac{i g_{\mu\nu}}{\mathbf{k}_i^2} \left(\frac{\hat{s}_i}{\mathbf{k}^2} \right)^{\epsilon_G(k_i^2)} \quad (4.28)$$

Siccome i moduli degli impulsi trasversi dei gluoni scambiati lungo la scala sono tutti dello stesso ordine, indicato con \mathbf{k}^2 , allora il propagatore può essere scritto come:

$$D_{\mu\nu}(k_i^2) = \frac{i g_{\mu\nu}}{\mathbf{k}_i^2} \left(\frac{\rho_{i-1}}{\rho_i} \right)^{\epsilon_G(k_i^2)} \quad (4.29)$$

A questo punto si assume che la forma di questo propagatore sia corretta, siccome i primi termini dello sviluppo in serie di $A^{(8)}$ sono in accordo con un andamento del tipo $s^{\alpha_G(t)}$ allora i risultati precedenti vengono estesi a tutti gli ordini perturbativi usando come propagatore la (4.29), allora si scrive all'ordine n-esimo:

$$A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8)\sigma_1 \dots \sigma_n} = 2isg^{n+2} \delta_{\lambda_1 \lambda_1} \delta_{\lambda_2 \lambda_2} G_n^{(8)} \frac{i}{\mathbf{k}_1^2} \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{\epsilon_G(k_i^2)} \times \\ \times \prod_{i=1}^n \frac{2p_1^{\mu_i} p_2^{\nu_{i+1}}}{s} \Gamma_{\mu_i \nu_{i+1}}^{\sigma_i}(k_i, k_{i+1}) \frac{i}{\mathbf{k}_{i+1}^2} \left(\frac{\rho_i}{\rho_{i+1}}\right)^{\epsilon_G(k_{i+1}^2)} \quad (4.30)$$

Questa viene chiamata ampiezza di scambio multi-Regge per il processo $2 \rightarrow 2+n$ che avviene mediante lo scambio di $n+1$ gluoni reggeizzati aventi come traiettorie di Regge $\alpha_G(k_i^2) = 1 + \epsilon_G(k_i^2)$. La verifica della validità di questo approccio avviene scrivendo una equazione integrale per la parte immaginaria di $A^{(8)}$ attuando la trasformata di Mellin e vedendo che la soluzione di tale equazione presenta un polo in ω quando $\omega = \epsilon_G(t)$; questo fa sì che l'ampiezza $A^{(8)}$ abbia un andamento del tipo $A^{(8)} \approx s^{\alpha_G(t)}$. Quindi se il gluone reggeizza la trasformata di Mellin della parte immaginaria di $A^{(8)}$ deve avere un polo semplice.

Vediamo come si costruisce questa equazione integrale ripercorrendo gli aspetti principali presentati in [20].

Si parte considerando l'espressione generale per la parte immaginaria di $A^{(8)}$ dove la somma viene fatta da 0 all'infinito e rappresenta il numero di gluoni scambiati lungo la scala.

$$ImA^{(8)}(s, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int d(PS^{(n+2)}) (A_{2 \rightarrow (n+2)}^{(8)\sigma_1 \dots \sigma_n}(k_1, \dots, k_n) A_{2 \rightarrow (n+2)\sigma_1 \dots \sigma_n}^{(8)\dagger}(k_1 - q, \dots, k_n - q)) \quad (4.31)$$

Nella (4.31) $d(PS^{(n+2)})$ è lo spazio delle fasi per $n+2$ particelle nello stato finale. Tenendo conto delle approssimazioni di alta energia dovute al regime cinematico che stiamo considerando esso assume la seguente forma:

$$\int d(PS^{(n+2)}) = \frac{1}{2^{4n+3} \pi^{3n+2}} \left(\prod_{i=1}^n \int_{\rho_{i+1}}^1 \frac{d\rho_i}{\rho_i} \right) \int_0^1 d\rho_{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} d^2 \mathbf{k}_j \delta(s\rho_{n+1} - \mathbf{k}^2) \quad (4.32)$$

Inserendo l'espressione dell'ampiezza con il propagatore reggeizzato e valutando le contrazioni tra i due vertici di interazione si ha:

$$ImA^{(8)}(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int d(PS^{(n+2)}) \frac{N}{4} A_0^{(8)}(s, t) (-N)^n \frac{g^2 s \mathbf{q}^2}{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2} \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{\epsilon_G(k_1^2) + \epsilon_G((k_1 - q)^2)} \\ \times \prod_{i=1}^n \left[\frac{g^2}{\mathbf{k}_{i+1}^2 (\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{q})^2} \left(\mathbf{q}^2 - \frac{\mathbf{k}_i^2 (\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{q})^2 + (\mathbf{k}_i - \mathbf{q})^2 \mathbf{k}_{i+1}^2}{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i+1})^2} \right) \right] \times \\ \times \left(\frac{\rho_i}{\rho_{i+1}}\right)^{\epsilon_G(k_{i+1}^2) + \epsilon_G((k_{i+1} - q)^2)} \quad (4.33)$$

A questo punto conviene effettuare la trasformata di Mellin per disaccoppiare la dipendenza nella produttoria dei vari ρ_i , per questo si introduce la funzione $F^{(8)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{q})$:

$$\int d\left(\frac{s}{\mathbf{k}^2}\right) \left(\frac{ImA^{(8)}(s, t)}{A_0^{(8)}(s, t)}\right) \left(\frac{s}{\mathbf{k}^2}\right)^{-\omega-1} = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2} F^{(8)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{q}) \quad (4.34)$$

Passando alla trasformata di Mellin si può integrare in $d\left(\frac{s}{\mathbf{k}^2}\right)$ sfruttando la delta di Dirac $\delta(s\rho_{n+1} - \mathbf{k}^2)$ presente nello spazio delle fasi (4.32).

Per quanto riguarda la dipendenza dalle varie frazioni di impulso ρ_i si ha la seguente struttura:

$$\int_0^1 d\rho_{n+1} \left(\frac{1}{\rho_{n+1}}\right)^{-\omega+1+\epsilon_G(k_{n+1}^2)+\epsilon_G((k_{n+1}-q)^2)} \int_{\rho_{n+1}}^1 \frac{d\rho_n}{\rho_n} \dots \int_{\rho_2}^1 \frac{d\rho_1}{\rho_1} \int \prod_{j=1}^n B(\mathbf{k}_j, \mathbf{q}) \quad (4.35)$$

Nella precedente espressione la funzione B racchiude tutte le quantità che dipendono dagli impulsi trasversi dei gluoni \mathbf{k}_i presenti nella (4.33).

Analizzando questa espressione si vede che le integrazioni su $d\rho_i$ sono tutte accoppiate mediante la dipendenza negli estremi di integrazione dai vari ρ_i , allora si cambia variabile di integrazione introducendo la seguente trasformazione che permette di effettuare agevolmente tutte le integrazioni sulle nuove variabili τ_i :

$$\tau_i = \frac{\rho_i}{\rho_{i-1}} \quad (4.36)$$

Lo Jacobiano di questa trasformazione è dato dal prodotto dei vari $\rho_1\rho_2 \dots \rho_n$ e tutte le variabili di integrazione variano nell'intervallo tra 0 e 1: $0 < \tau_i < 1$.

La struttura degli integrali in $d\tau_i$ è la seguente:

$$\int_0^1 d\tau_{n+1} (\tau_{n+1})^{\omega-1-\epsilon_G(k_{n+1}^2)-\epsilon_G((k_{n+1}-q)^2)} \int_0^1 d\tau_n (\tau_n)^{\omega-1-\epsilon_G(k_n^2)-\epsilon_G((k_n-q)^2)} \dots \int_0^1 d\tau_1 (\tau_1)^{\omega-1-\epsilon_G(k_1^2)-\epsilon_G((k_1-q)^2)} \quad (4.37)$$

Si possono fare tutte queste integrazioni che danno luogo per ogni $d\tau_i$ al fattore:

$$\frac{1}{\omega - \epsilon_G(k_i^2) - \epsilon_G((k_i - q)^2)} \quad (4.38)$$

Considerando tutti i prefattori presenti nello spazio delle fasi (4.32) e che in approssimazione di alta energia $\epsilon_G(k_i^2) = \epsilon_G(-\mathbf{k}_i^2)$ poiché si ha $k^2 \approx -\mathbf{k}^2$, allora si può scrivere $F^{(8)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{q})$ come:

$$\begin{aligned} F^{(8)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{q}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha_s N}{4\pi^2}\right)^{n+1} (-1)^n \frac{\mathbf{q}}{(\omega - \epsilon_G(-\mathbf{k}^2) - \epsilon_G(-(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2))} \int d^2\mathbf{k}_{n+1} \\ &\times \prod_{i=1}^n \left[\frac{d^2\mathbf{k}_i}{\mathbf{k}_i^2(\mathbf{k}_i - \mathbf{q})^2} \frac{1}{(\omega - \epsilon_G(-\mathbf{k}_i^2) - \epsilon_G(-(\mathbf{k}_i - \mathbf{q})^2))} \times \right. \\ &\times \left. \left(q^2 - \frac{\mathbf{k}_i^2(\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{q})^2 + \mathbf{k}_{i+1}^2(\mathbf{k}_i - \mathbf{q})^2}{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i+1})^2} \right) \right] \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{n+1}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

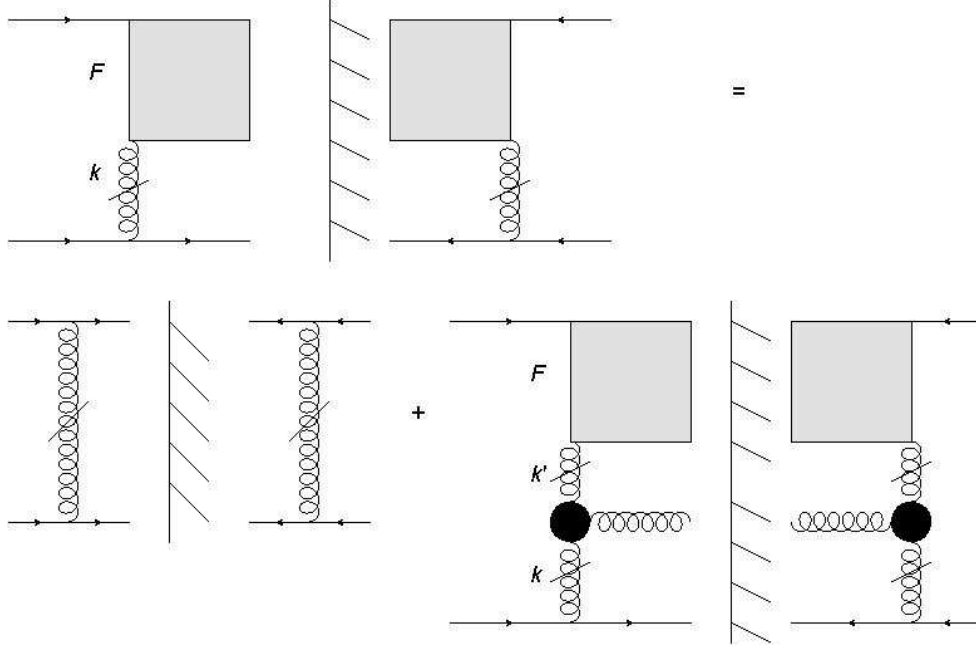


Figura 16: Schema dell'equazione integrale per la parte immaginaria dell'ampiezza nel caso di scambio in ottetto di colore, la bolla rappresenta il vertice di interazione effettivo Γ mentre il taglio sulle linee gluoniche si riferisce al fatto che si tratta di gluoni reggeizzati.

Per effettuare la somma su n conviene scrivere una equazione integrale per la funzione $F^{(8)}$ che ha la seguente forma (il diagramma riportato in fig. 16 riproduce lo schema di tale equazione integrale):

$$\begin{aligned}
F^{(8)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{q}) &= \frac{\pi \alpha_s N}{2} \frac{q^2}{4\pi^2 (\omega - \epsilon_G(-\mathbf{k}^2) - \epsilon_G(-(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2))} - \\
&- \frac{\alpha_s N}{4\pi^2} \int d^2 \mathbf{k}' \frac{F^{(8)}(\omega, \mathbf{k}', \mathbf{q})}{(\omega - \epsilon_G(-\mathbf{k}^2) - \epsilon_G(-(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2))} \\
&\times \frac{1}{\mathbf{k}'^2 (\mathbf{k}' - \mathbf{q})^2} \left(q^2 - \frac{\mathbf{k}^2 (\mathbf{k}' - \mathbf{q})^2 + \mathbf{k}'^2 (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \right) \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Il primo termine della (4.40) rappresenta lo scambio di due gluoni reggeizzati senza emissioni di gluoni e quindi senza gradini della scala, il secondo termine riguarda l'accoppiamento della $F^{(8)}$ con un gradino della scala e comprende il propagatore reggeizzato e un vertice di interazione, in questo modo la relazione (4.40) ricostruisce tutta la somma su n su tutti i gradini della scala. Questa espressione di $F^{(8)}$ consente di ricavare la soluzione che verifica l'andamento di $A^{(8)} \rightarrow s^{\alpha_G(t)}$ nel caso particolare in cui $F^{(8)}$ non dipenda da \mathbf{k} .

La (4.40) può essere riscritta in questo modo:

$$\begin{aligned}
(\omega - \epsilon_G(-\mathbf{k}^2) - \epsilon_G(-(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2)) F^{(8)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{q}) &= \frac{\pi \alpha_s N q^2}{2} \frac{1}{4\pi^2} - \frac{\alpha_s N}{4\pi^2} \int d^2 \mathbf{k}' F^{(8)}(\omega, \mathbf{k}', \mathbf{q}) \quad (4.41) \\
&\times \left(\frac{q^2}{\mathbf{k}'^2 (\mathbf{k}' - \mathbf{q})^2} - \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}'^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} - \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}{(\mathbf{k}' - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \right)
\end{aligned}$$

Adesso riprendendo la definizione di $\epsilon_G(-\mathbf{k}^2)$ (vedi 4.14) e supponendo che $F^{(8)}$ non dipenda da \mathbf{k} , la (4.41) si scrive:

$$\begin{aligned} (\omega - \epsilon_G(-\mathbf{k}^2) - \epsilon_G(-(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2))F^{(8)}(\omega, \mathbf{q}) &= \frac{\pi \alpha_s N \mathbf{q}^2}{2 \cdot 4\pi^2} + \\ &+ (\epsilon_G(-\mathbf{q}^2) - \epsilon_G(-\mathbf{k}^2) - \epsilon_G(-(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2))F^{(8)}(\omega, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Da questa si ricava la soluzione

$$F^{(8)}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\pi \alpha_s N \mathbf{q}^2}{2 \cdot 4\pi^2} \frac{1}{(\omega - \epsilon_G(-\mathbf{q}^2))} \quad (4.43)$$

Ottenuta questa soluzione si inserisce nella (4.33) e si calcola l'antitrasformata di Mellin per avere la parte immaginaria dell'ampiezza $A^{(8)}(s, t)$.

$$ImA^{(8)}(s, t) = -\frac{\pi}{2} \epsilon_G(t) \left(\frac{s}{\mathbf{k}^2}\right)^{\epsilon_G(t)} A_0^{(8)} \quad (4.44)$$

Da questa espressione si può risalire alla funzione analitica $A^{(8)}$ la cui parte immaginaria coincide con la precedente (4.44):

$$A^{(8)} = \frac{1}{2} \left(\frac{-s}{\mathbf{k}^2}\right)^{\epsilon_G(t)} A_0^{(8)} \quad (4.45)$$

Siccome l'ampiezza all'ordine più basso $A_0^{(8)}$ ha una dipendenza da s come $A_0^{(8)} \approx s$ la dipendenza da s per l'ampiezza $A^{(8)}$ è data da $-(-s)^{1+\epsilon_G(t)} = -(-s)^{\alpha_G(t)}$. Considerando il contributo dei grafici nel canale u e attuando l'approssimazione di alta energia per cui $u \approx -s$ si ricava l'espressione completa per l'ampiezza che descrive lo scambio in ottetto risommando a tutti gli ordini perturbativi i termini in $\log(s)$:

$$A^{(8)} = 8\pi\alpha_s \frac{\mathbf{k}^2}{t} \tau^a \otimes \tau^a \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} \left(\frac{s}{\mathbf{k}^2}\right)^{\alpha_G(t)} \frac{1 - e^{i\pi\alpha_G(t)}}{2} \quad (4.46)$$

L'aver ottenuto questa espressione per l'ampiezza $A^{(8)}$ ci permette di concludere che la scelta del propagatore gluonico reggeizzato fatta nella (4.28) si è rivelata corretta nell'approssimazione di alta energia.

5 La Fattorizzazione di alta energia

5.1 L'equazione *BFKL*

Dopo aver visto l'espressione dell'ampiezza di scattering quark-quark con lo scambio di un gluone in ottetto di colore nel limite di Regge vediamo adesso cosa succede all'ampiezza di scattering nel caso dello scambio di un singoletto di colore sempre nel limite di alta energia. Sostanzialmente si ripresentano gli stessi calcoli visti nel capitolo precedente, con la differenza che cambieranno tutti i fattori di colore essendoci lo scambio in singoletto e al primo ordine perturbativo si dovrà considerare il diagramma a 1-loop di fig. 10 poiché il diagramma ordine albero (fig.9) non dà contributo nel caso di singoletto di colore. Per il diagramma di fig. 10 il fattore di colore è dato da:

$$G_0^{(1)} = \frac{1}{N^2} Tr(\tau_a \tau_b) Tr(\tau_a \tau_b) = \frac{N^2 - 1}{4N^2} \quad (5.1)$$

In questa espressione e tutte le seguenti l'apice (1) si riferisce allo scambio in singoletto.

Nel limite di alta energia $s \gg |t|$ si ha $u \approx -s$ quindi mettendo insieme il processo del canale s con quello u (ovvero i due diagrammi box e crossed box) si ha che il contributo reale si cancella esattamente e quindi l'ampiezza al primo ordine perturbativo è puramente immaginaria ed è data da:

$$A_1^{(1)} = 4i\alpha_s^2 s \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} G_0^{(1)} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{\mathbf{k}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \quad (5.2)$$

Stavolta l'ampiezza di scattering ha il primo termine perturbativo di ordine α_s^2 senza essere moltiplicato per il $\log s$ per cui rispetto al caso dello scambio del gluone Reggeizzato questa ampiezza è soppressa di una potenza $\log s$. La correzione di ordine superiore si ottiene considerando i grafici delle figg. 11 e 12 valutando i corrispettivi fattori di colore. La parte immaginaria di $A_2^{(1)}$ è:

$$\begin{aligned} Im A_2^{(1)} = & -\frac{2N\alpha_s^3}{\pi^2} s \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} G_0^{(1)} \log\left(\frac{s}{\mathbf{k}^2}\right) \int d^2 \mathbf{k}_1 d^2 \mathbf{k}_2 \left[\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2} \right] \end{aligned} \quad (5.3)$$

Rispetto al calcolo precedente sono presenti due termini in più tra le parentesi quadre, questo fatto deriva dalla non completa cancellazione tra il contributo reale e virtuale dovuto al differente fattore di colore nei due casi.

Come conseguenza di questo fatto non otteniamo più una espressione che a due loop è proporzionale alla correzione a 1-loop come avveniva nel caso del gluone Reggeizzato (vedi 4.21). A questo punto, come è stato fatto prima, si introduce una funzione $f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q})$ che è legata

alla trasformata di Mellin della parte immaginaria dell'ampiezza di singoletto. Così facendo possiamo arrivare a scrivere una equazione per l'ampiezza risommata a tutti gli ordini che si otterrebbe valutando un diagramma di Feynman a scala con un numero infinito di gradini. Le linee verticali di tale scala, e quindi i vari propagatori, sono gluoni Reggeizzati che si accoppiano con i vertici di interazione Γ che rappresentano i gradini di questa scala in cui lo scambio avviene in singoletto di colore.

$$\int_1^\infty d\left(\frac{s}{\mathbf{k}}\right)\left(\frac{s}{\mathbf{k}^2}\right)^{-\omega-1} \frac{ImA^{(1)}(s, t)}{s} = 4\alpha_s^2 \delta_{\lambda_1 \lambda_1} \delta_{\lambda_2 \lambda_2} G_0^{(1)} \int \frac{d^2 \mathbf{k}_1 d^2 \mathbf{k}_2}{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2} f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}) \quad (5.4)$$

Si può scrivere una equazione integrale in maniera analoga alla (4.40) che graficamente ha la struttura della fig. 17:

$$\begin{aligned} (\omega - \epsilon_G(-\mathbf{k}_1^2) - \epsilon_G(-(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2)) f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}) &= \delta^2(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) - \\ - \frac{N\alpha_s}{2\pi^2} \int d^2 \mathbf{k}' &\left[\frac{\mathbf{q}^2}{(\mathbf{k}' - \mathbf{q})^2 \mathbf{k}_1^2} - \frac{1}{(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1)^2} \left(1 + \frac{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 \mathbf{k}'^2}{(\mathbf{k}' - \mathbf{q})^2 \mathbf{k}_1^2}\right) \right] f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Il primo termine dell'equazione precedente si riferisce allo scambio di due gluoni Reggeizzati mentre il secondo esprime l'accoppiamento della funzione f con un gradino della scala (infatti tra le parentesi quadre vi è l'espressione del vertice di interazione Γ).

Un aspetto importante della espressione (5.5) è quello di essere infrarosso finito, ovvero nel limite di emissione soffice del gluone di impulso $k_1 - k'$ la (5.5) rimane finita; per vedere questa cosa si portano i due termini che sono moltiplicati per ϵ_G al membro di destra e si riscrivono gli integrali in $d^2 \mathbf{k}'$ in questo modo:

$$\int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{\mathbf{k}'^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}')^2} = \int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{(\mathbf{k}'^2 + (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}')^2)} \left(\frac{1}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}')^2} + \frac{1}{\mathbf{k}'^2} \right) = 2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}')^2 (\mathbf{k}' + (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}')^2)}$$

Allora l'equazione (5.5) diventa:

$$\begin{aligned} \omega f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}) &= \delta^2(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \frac{N\alpha_s}{2\pi^2} \int d^2 \mathbf{k}' \left[\frac{-\mathbf{q}^2}{(\mathbf{k}' - \mathbf{q})^2 \mathbf{k}_1^2} f(\omega, \mathbf{k}', \mathbf{k}_2, \mathbf{q}) + \right. \\ &+ \frac{1}{(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1)^2} \left(f(\omega, \mathbf{k}', \mathbf{k}_2, \mathbf{q}) - \frac{\mathbf{k}_1^2 f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q})}{\mathbf{k}'^2 + (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}')^2} \right) + \\ &\left. + \frac{1}{(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1)^2} \left(\frac{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 \mathbf{k}' f(\omega, \mathbf{k}', \mathbf{k}_2, \mathbf{q})}{(\mathbf{k}' - \mathbf{q})^2 \mathbf{k}_1^2} - \frac{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q})}{(\mathbf{k}' - \mathbf{q})^2 + (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}')^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Questa è l'equazione BFKL che prende il nome dalle iniziali dei quattro fisici che la ricavarono alla fine degli anni settanta (Balitsky, Fadin, Kuraev e Lipatov). Nel limite infrarosso in cui $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k}'$ le parti divergenti si cancellano esattamente come si può verificare direttamente facendo tale limite nelle due espressioni tra le parentesi tonde.

Nel caso particolare di impulso trasferito uguale a zero e quindi $\mathbf{q} = 0$ si può semplificare l'equazione precedente in questo modo:

$$[\omega - 2\epsilon_G(-\mathbf{k}_1^2)] f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0) = \delta^2(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \frac{N\alpha_s}{\pi^2} \int d^2 \mathbf{k}' \frac{f(\omega, \mathbf{k}', \mathbf{k}_2, 0)}{(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1)^2} \quad (5.7)$$

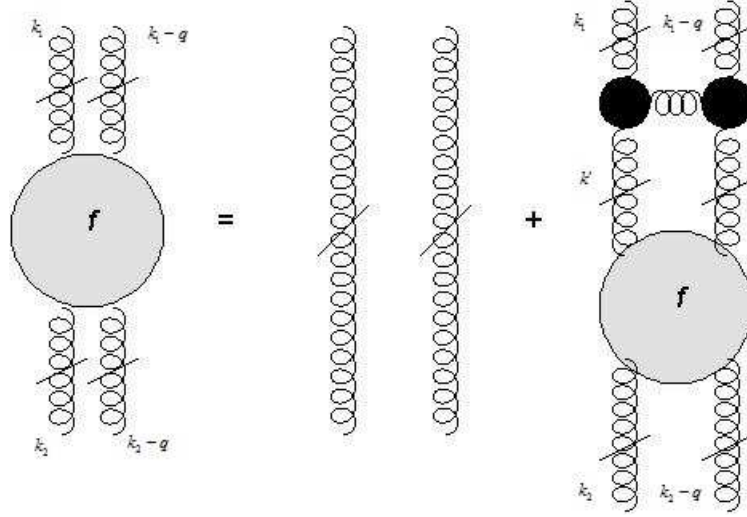


Figura 17: Rappresentazione diagrammatica dell'equazione integrale per la funzione f

Si scrivono le soluzioni di tale equazione e quindi si va a vedere qual è l'intercetta del Pomeron per $t = 0$.

L'equazione BFKL può essere scritta in questo modo:

$$\omega f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0) = \delta^2(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + K_0 \cdot f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0), \quad (5.8)$$

dove

$$K_0 \cdot f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0) = \frac{N\alpha_s}{\pi^2} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}')^2} \left[f(\omega, \mathbf{k}', \mathbf{k}_2, 0) - \frac{\mathbf{k}_1^2}{\mathbf{k}'^2 + (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}')^2} f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0) \right] \quad (5.9)$$

Questa espressione rappresenta una funzione di Green che viene risolta una volta conosciuto un set completo di autofunzioni $\phi_i(\mathbf{k})$ dell'operatore integrale K_0 che soddisfino l'equazione:

$$K_0 \cdot \phi_i(\mathbf{k}) = \lambda_i \phi_i(\mathbf{k}) \quad (5.10)$$

Nella (5.10) i λ_i sono gli autovalori del kernel K_0 . La soluzione dell'equazione di Green precedente è data da :

$$f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0) = \sum_i \frac{\phi_i(\mathbf{k}_1) \phi_i^*(\mathbf{k}_2)}{\omega - \lambda_i} \quad (5.11)$$

Un set completo di autofunzioni per il kernel K_0 è dato da:

$$\phi_\nu^n(\mathbf{k}) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} (k^2)^{i\nu - \frac{1}{2}} e^{in\theta} \quad (5.12)$$

ν varia da $-\infty$ a $+\infty$ e il vettore bidimensionale \mathbf{k} è stato scritto in coordinate polari (k, θ) .

I corrispondenti autovalori hanno la seguente forma:

$$\omega_n(\nu) = \frac{N\alpha_s}{\pi} \chi_n(\nu), \quad (5.13)$$

dove

$$\chi_n(\nu) = 2\Psi(1) - \Psi\left(\frac{1}{2} + i\nu + \frac{n}{2}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} - i\nu + \frac{n}{2}\right) \quad (5.14)$$

nella (5.14) $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ è la derivata logaritmica della funzione gamma di Eulero.

La soluzione per $f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0)$ è:

$$f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \left(\frac{k_1^2}{k_2^2}\right)^{i\nu} \frac{e^{in(\theta_1 - \theta_2)}}{2\pi^2 k_1 k_2} \frac{1}{(\omega - \omega_n(\nu))} \quad (5.15)$$

Siccome siamo interessati al comportamento per grandi valori di $\log s$ si può prendere in considerazione, nel piano complesso di ω , la singolarità che ha la parte reale più grande. Questo consente di effettuare alcune semplificazioni. Siccome la funzione $\chi_n(\nu)$ decresce all'aumentare di n possiamo restringere la somma su n al caso $n = 0$. Inoltre $\chi_0(\nu)$ decresce al crescere di $|\nu|$ allora si può espandere in serie di potenze di ν e tenere i primi termini di tale sviluppo.

$$\chi_0(\nu) = 4 \log 2 - 14\zeta(3)\nu^2 + \dots, \quad \zeta(3) \approx 1,202 \quad (5.16)$$

Allora ponendo $\omega_0 = \frac{4N\alpha_s}{\pi} \log 2$ e $a^2 = \frac{14N\alpha_s}{\pi} \zeta(3)$ si ha:

$$f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0) \approx \frac{1}{\pi k_1 k_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} \left(\frac{k_1^2}{k_2^2}\right)^{i\nu} \frac{1}{(\omega - \omega_0 + a^2\nu^2)} \quad (5.17)$$

Effettuando l'integrazione in $d\nu$ si ricava:

$$f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0) \approx \frac{1}{2\pi a k_1 k_2} \left(\frac{k_1 k_2}{\max(k_1^2, k_2^2)}\right)^{\sqrt{\omega - \omega_0}/a} \frac{1}{\sqrt{\omega - \omega_0}} \quad (5.18)$$

A questo punto effettuando l'antitrasformata di Mellin della $f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0)$ si ottiene la funzione $F(s, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0)$ che permette di ricavare tramite la formula (5.4) la parte immaginaria dell'ampiezza di scattering $A^{(1)}(s, 0)$ nel caso particolare di impulso trasferito nell'urto uguale a zero ($t = 0$).

$$\frac{Im A^{(1)}(s, 0)}{s} = 4\alpha_s^2 \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} G_0^{(1)} \int \frac{d^2 \mathbf{k}_1}{\mathbf{k}_1^2} \frac{d^2 \mathbf{k}_2}{\mathbf{k}_2^2} F(s, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0) \quad (5.19)$$

con

$$F(s, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0) \approx \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2}} \left(\frac{s}{\mathbf{k}^2}\right)^{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\pi \log(s/\mathbf{k}^2)}} \frac{1}{2\pi a} \exp\left(-\frac{\log^2(\mathbf{k}_1^2/\mathbf{k}_2^2)}{4a^2 \log(s/\mathbf{k}^2)}\right) \quad (5.20)$$

Un aspetto particolare di questa soluzione è rappresentato dal fatto che la funzione $f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0)$ non presenta un polo isolato nel piano complesso di ω ma una singolarità di taglio visto che ν è una variabile continua. Questo fatto determina nella antitrasformata di Mellin e quindi nell'espressione della funzione $F(s, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0)$ il fattore $\frac{1}{\sqrt{\log s}}$.

Un aspetto importante, come detto prima, dell'equazione BFKL è quello di non presentare divergenze infrarosse dovute all'emissione di un gluone soffice, questo però non è sufficiente a

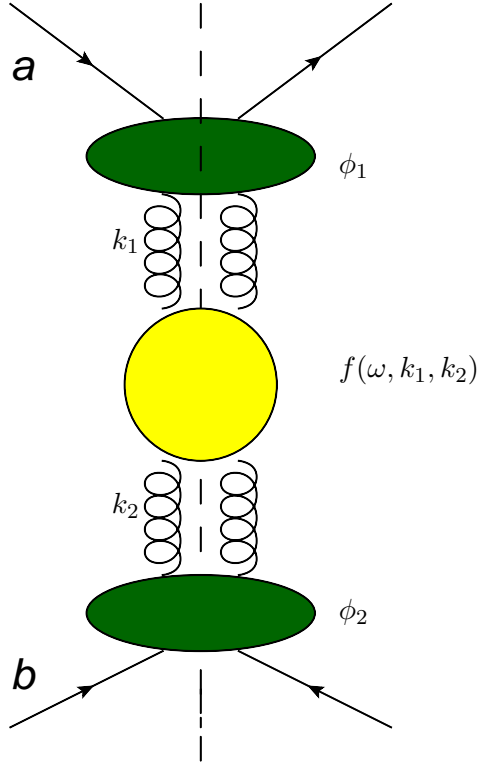


Figura 18: Diagramma che mostra lo schema della fattorizzazione della sezione d'urto partonica nei due fattori di impatto ϕ_1, ϕ_2 (in verde) e la funzione di Green del gluone f (in giallo) che costituisce la parte universale del processo.

garantire la finitezza dell'ampiezza di scattering perché le integrazioni sugli impulsi trasversi $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ danno luogo a singolarità. Per evitare questo problema si introducono due funzioni $\phi_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}), \phi_2(\mathbf{k}_2, \mathbf{q})$ che prendono il nome di fattore di impatto che devono rendere le integrazioni finite e descrivono l'interazione tra il quark entrante e il gluone reggeizzato di alta energia. È possibile scrivere la trasformata di Mellin $A^{(1)}(\omega, t)$ di $ImA^{(1)}(s, t)/s$ in questa forma:

$$A^{(1)}(\omega, t) = \frac{G}{(2\pi)^4} \int d^2\mathbf{k}_1 d^2\mathbf{k}_2 \frac{\phi_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}) \phi_2(\mathbf{k}_2, \mathbf{q})}{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2} f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}). \quad (5.21)$$

Un aspetto rilevante della (5.21) è dato dal fatto che i contributi dei fattori di impatto possono essere fattorizzati ovvero dipendono separatamente dagli impulsi trasversi $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ senza presentare accoppiamenti tra loro. I due fattori di impatto vengono moltiplicati tra loro assieme alla $f(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q})$ che è legata alla risommazione di alta energia e che rappresenta il contributo universale cioè indipendente dal particolare processo d'urto in questione; invece i due fattori di impatto sono dipendenti dal processo.

Una rappresentazione schematica di questo fatto importante è mostrato nella fig. 18. La formula di fattorizzazione (5.21) è stata ricavata in approssimazione leading e la validità di tale fattorizzazione verrà assunta a tutti gli ordini perturbativi nel caso di processi di alta energia.

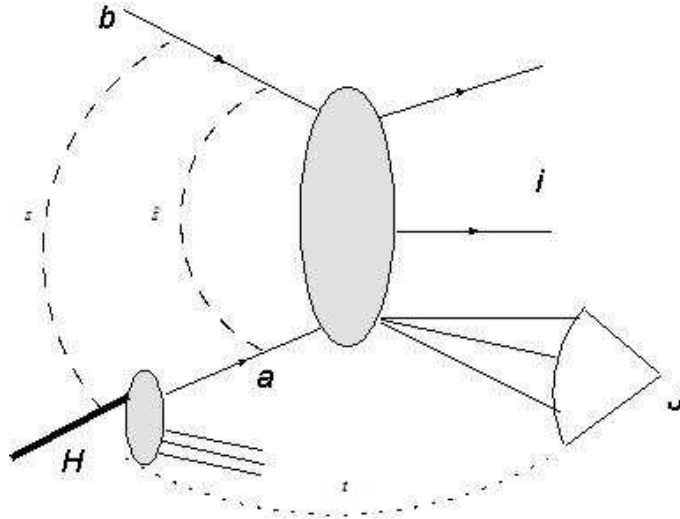


Figura 19: Rappresentazione schematica del processo di urto di alta energia tra il partone superiore b e quello inferiore a proveniente dall'adrone H e avente una funzione di distribuzione f , J indica la formazione del jet nella regione di frammentazione inferiore.

5.2 I Vertici di jet

Abbiamo parlato della fattorizzazione di alta energia che consiste nella completa separazione tra una parte universale indipendente dal processo rappresentata dalla funzione di Green gluonica BFKL e una parte invece che varia a seconda delle particelle coinvolte nell'urto e costituisce i fattori di impatto come schematizzato in fig. 18. Nel caso in cui si abbia la formazione di jet nello stato finale tali fattori di impatto prendono il nome di vertici di jet.¹

Prima di cominciare a parlare più in dettaglio in cosa è consistito il nostro lavoro sui processi d'urto di alta energia con formazione di jet e in modo particolare dei cosiddetti jet di Mueller-Navelet, è necessario ricordare un risultato ricavato in [9] che ha permesso di ottenere l'espressione della correzione al vertice di jet in approssimazione NLL $V_{q,g}^{(1)}$ che verrà usata nei calcoli successivi. In questa sezione vengono riportati i risultati salienti che hanno permesso di ottenere tale correzione al vertice di jet nel caso del quark.

Il processo che prendiamo in considerazione è la sezione d'urto quark-quark con formazione di un jet nel vertice inferiore come quello di fig. 19. Un jet viene identificato dalle tre variabili y_J, E_J e ϕ_J che si riferiscono alla rapidità, all'energia trasversa e all'angolo azimutale del jet stesso, con la lettera maiuscola J si prendono in considerazione tutte quante queste variabili: $J = (y_J, E_J, \phi_J)$. La sezione d'urto del jet ha la seguente espressione:

$$\frac{d\sigma}{dJ} = \sum_a \int dx d\hat{\sigma}_{a,b}(x) S_J(x) f_a^{(0)}(x) \quad (5.22)$$

¹La funzione di Green gluonica nello spazio di Mellin verrà indicata con G_ω per non confonderla con le PDF.

Nella precedente $d\hat{\sigma}_{ab}$ rappresenta la sezione d'urto tra i partoni a e b, S_J è l'algoritmo di selezione del jet, ovvero una funzione che descrive il modo in cui vengono selezionate le particelle dello stato finale per costituire il jet, $f_a(x)$ invece è la funzione di distribuzione partonica che rappresenta la densità di probabilità che all'interno del protone ci sia un determinato partone di tipo a con una frazione di impulso longitudinale x rispetto a quello del protone che lo contiene. All'ordine più basso la (5.22) si scrive come:

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{dJ} = \sum_a \int dx \int d\mathbf{k} h_b^{(0)}(\mathbf{k}) V_a^{(0)}(\mathbf{k}, x) f_a^{(0)}(x) \quad (5.23)$$

dove $h_b^{(0)}$ è il fattore di impatto del partone superiore b in approssimazione leading, $V_a^{(0)}$ è il vertice di jet del vertice inferiore sempre all'ordine più basso ed è dato da:

$$V_a^{(0)}(\mathbf{k}, x) = h_a^{(0)}(\mathbf{k}) S_J^{(2)}(\mathbf{k}, x) \quad (5.24)$$

con

$$h_{q/g}^{(0)}(\mathbf{k}) = \frac{\alpha_s}{\sqrt{2}} \frac{C_{F/A}}{\mathbf{k}^2} \quad (5.25)$$

$$S_J^{(2)}(\mathbf{k}, x) = \delta\left(1 - \frac{x_J}{x}\right) E_J \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_J), \quad x_J = \frac{E_J e^{y_J}}{\sqrt{s}}$$

L'espressione all'ordine superiore prevede di considerare le correzioni virtuali a 1-loop e quelle reali dovute all'emissione di un gluone che danno luogo al kernel BFKL leading log (LL) $K^{(0)}$ che risomma a tutti gli ordini i grandi termini in $\log(s)$ che sono dominanti ad alte energie:

$$\frac{d\sigma^{(1,LL)}}{dJ} = \alpha_s \sum_a \int dx \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' h_b^{(0)}(\mathbf{k}) K^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \log \frac{x s}{s_0} V_a^{(0)}(\mathbf{k}', x) f_a^{(0)}(x) \quad (5.26)$$

Per ottenere l'espressione completa all'ordine next to leading (NLL), gli autori di [9] sono riusciti a calcolare la correzione alla sezione d'urto del jet non dipendente dai termini logaritmici e ad avere quindi l'espressione del vertice di jet NLL $V_a^{(1)}$. È possibile quindi completare la (5.26) a questo ordine perturbativo e scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(1)}}{dJ} &= \alpha_s \sum_a \int dx \int d\mathbf{k} \left\{ \int d\mathbf{k}' \left[h_b^{(0)}(\mathbf{k}) K^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \log \frac{x s}{s_0} V_a^{(0)}(\mathbf{k}', x) f_a^{(0)}(x) \right] \right. \\ &\quad \left. + h_b^{(1)}(\mathbf{k}) V_a^{(0)}(\mathbf{k}, x) f_a^{(0)}(x) + h_b^{(0)}(\mathbf{k}) V_a^{(0)}(\mathbf{k}, x) f_a^{(1)}(x) + h_b^{(0)}(\mathbf{k}) V_a^{(1)}(\mathbf{k}, x) f_a^{(0)}(x) \right\} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Senza ripercorrere tutta la procedura che ha portato all'espressione finale della correzione $V_a^{(1)}$ riportata nell'espressione finale (5.29) nel caso del quark, è utile rivedere la struttura delle singolarità infrarosse che emergono valutando la correzione reale al vertice inferiore del jet in cui il gluone viene emesso nella regione di frammentazione inferiore (vedi fig. 20).

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dJ} &= \frac{\alpha_s^2}{2\sqrt{2}\pi} C_F \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' h_b^{(0)}(\mathbf{k}) \int_{z_{cut}}^1 dz \frac{P_{gq}(z)}{\pi} \frac{1}{\mathbf{k}'^2 \mathbf{q}^2 (\mathbf{q} - z\mathbf{k})^2} \cdot \\ &\quad \cdot [C_F z^2 \mathbf{k}'^2 + C_A (1-z) \mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} - z\mathbf{k})] \int_0^1 dx S_J^{(3)}(\mathbf{k}', \mathbf{q}, xz; x) f_q^{(0)}(x) \end{aligned} \quad (5.28)$$

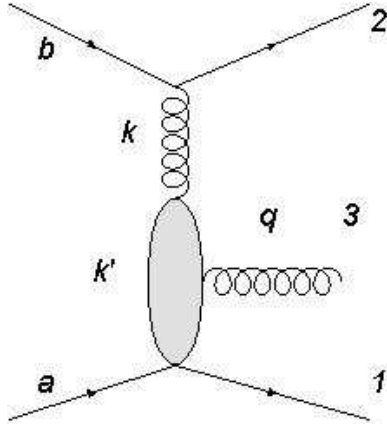


Figura 20: Diagramma di Feynman per il processo $qb \rightarrow qbg$ in approssimazione NLL nel caso in cui il gluone viene emesso nella regione di frammentazione inferiore.

Nella precedente espressione $S_J^{(3)}$ è l'algoritmo di selezione del jet per tre particelle nello stato finale, $P_{gq}(z)$ è la funzione di Splitting gluone-quark, l'integrando in $d\mathbf{k}'$ contiene tre singolarità: $\mathbf{k}' = 0$, $\mathbf{q} = 0$, $\mathbf{q} - z\mathbf{k} = 0$. Riferendosi alla fig. 20 la prima di queste singolarità si riferisce alla configurazione collineare del quark entrante a con il quark uscente 1, la seconda alla collinearità tra il quark entrante a e il gluone uscente 3 e l'ultima a quella tra il quark 1 e il gluone uscente 3. Infatti in queste tre situazioni i quadrimpulsi dei partoni diventano paralleli e i propagatori sviluppano le singolarità collineari.

Queste singolarità vengono separate a seconda che esse coinvolgano lo stato finale o quello iniziale e in base alla costante di colore C_A, C_F e viene effettuato l'integrale in regolarizzazione dimensionale in $d^{2+\epsilon}$ dimensioni per far emergere la struttura dei poli in ϵ e vedere quali di questi poli vengono cancellati sommando le correzioni reali con quelle virtuali. Le singolarità rimanenti vengono riassorbite dalla ridefinizione della funzione di distribuzione partonica $f_a^{(1)}$ che obbedisce all'equazione di Altarelli-Parisi e i termini finiti vanno a costruire il vertice di jet NLL $V_q^{(1)}$.

Per effettuare tutte le separazioni e cancellare le divergenze reali e virtuali risulta fondamentale la funzione di selezione del jet per tre particelle finali $S_J^{(3)}$ che nel limite soffice e collineare deve tendere alla $S_J^{(2)}$ per poter ricreare il vertice di jet LL $V_a^{(0)}$ e questa è una condizione necessaria per ottenere dei contributi finiti privi di ogni tipo di divergenza. Viene riportata l'espressione del vertice di jet NLL del quark, che ha costituito, insieme a quella del gluone (riportata in appendice), un ingrediente fondamentale per l'analisi che abbiamo svolto per effettuare il matching tra l'espressione risommata e quella esatta ordine $O(\alpha_s^3)$.

$$\begin{aligned}
V_q^{(1)}(\mathbf{k}, x) &= \left[\left(\frac{3}{2} \log \frac{\mathbf{k}^2}{\Lambda^2} - \frac{15}{4} \right) \frac{C_F}{\pi} + \left(\frac{85}{36} + \frac{\pi^2}{4} \right) \frac{C_A}{\pi} - \frac{5}{18} \frac{N_f}{\pi} - b_0 \log \mathbf{k}^2 \mu^2 \right] V_q^{(0)}(\mathbf{k}, x) + \\
&+ \int dz \left(\frac{C_F}{\pi} \frac{1-z}{2} + \frac{C_A}{\pi} \frac{z}{2} \right) V_q^{(0)}(\mathbf{k}, xz) + \frac{C_A}{\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{\pi} \int dz \left[\frac{1 + (1-z)^2}{2z} \times \right. \\
&\times \left. \frac{((1-z)(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot ((1-z)\mathbf{k} - \mathbf{k}'))}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 ((1-z)\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} h_q^{(0)}(\mathbf{k}') S_J^{(3)}(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}', xz; x) - \right. \\
&- \frac{1}{\mathbf{k}'^2} \Theta(\Lambda^2 - \mathbf{k}'^2) V_q^{(0)}(\mathbf{k}, xz) \left. \right] - \\
&- \frac{1}{z(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \Theta(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| - z(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| + |\mathbf{k}'|)) V_q^{(0)}(\mathbf{k}', x) \left. \right] + \\
&+ \frac{C_F}{2\pi} \int dz \frac{1+z^2}{1-z} \int \frac{d^2 \mathbf{l}}{\pi \mathbf{l}^2} \cdot \\
&\cdot \left[\frac{\alpha_s}{\sqrt{2} \mathbf{l}^2 + (\mathbf{l} - \mathbf{k})^2} \frac{C_F}{\pi} (S_J^{(3)}(z\mathbf{k} + (1-z)\mathbf{l}, (1-z)(\mathbf{k} - \mathbf{l}), x(1-z); x) + \right. \\
&+ S_J^{(3)}(\mathbf{k} - (1-z)\mathbf{l}, (1-z)\mathbf{l}, x(1-z); x)) - \\
&- \Theta \left(\frac{\Lambda^2}{(1-z)^2} - \mathbf{l}^2 \right) (V_q^{(0)}(\mathbf{k}, x) + V_q^{(0)}(\mathbf{k}, xz)) \left. \right] \\
&- \frac{2C_F}{\pi} \int dz \left(\frac{1}{1-z} \right) \int \frac{d^2 \mathbf{l}}{\pi \mathbf{l}^2} \cdot \\
&\cdot \left[\frac{\alpha_s}{\sqrt{2} \mathbf{l}^2 + (\mathbf{l} - \mathbf{k})^2} \frac{C_F}{\pi} S_J^{(2)}(\mathbf{k}, x) - \Theta \left(\frac{\Lambda^2}{(1-z)^2} - \mathbf{l}^2 \right) V_q^{(0)}(\mathbf{k}, x) \right] \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Nell'espressione precedente si ha che $b_0 = \frac{11N_c - 2N_f}{12\pi}$, N_f è il numero di sapori dei quark, $\Lambda = \mu_F$ è la scala di fattorizzazione e $\mu = \mu_R$ è quella di rinormalizzazione. L'algoritmo di selezione delle particelle $S_J^{(3)}$ della (5.29) nel caso del cono ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
S_J^{(3, \text{cono})}(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}', xz; x) &= S_J^{(2)}(\mathbf{k}, x) \Theta \left(\left[\frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|}{\max(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|, |\mathbf{k}'|)} R \right]^2 - [\Delta y^2 + \Delta \phi^2] \right) + \\
&+ S_J^{(2)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', xz) \Theta \left([\Delta y^2 + \Delta \phi^2] - \left[\frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| + |\mathbf{k}'|}{\max(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|, |\mathbf{k}'|)} R \right]^2 \right) + \\
&+ S_J^{(2)}(\mathbf{k}', x(1-z)) \Theta \left([\Delta y^2 + \Delta \phi^2] - \left[\frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| + |\mathbf{k}'|}{\max(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|, |\mathbf{k}'|)} R \right]^2 \right) \quad (5.30)
\end{aligned}$$

Nella precedente (5.30) \mathbf{k} è l'impulso del jet composto, $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ è quello del jet formato dal solo gluone mentre \mathbf{k}' è quello del jet formato solo dal quark. Le frazioni di impulso longitudinali del jet composto, del jet solo gluone e di quello solo quark sono rispettivamente x , xz e $x(1-z)$.

La rapidità Δy e angolo azimutale $\Delta \phi$ hanno le seguenti espressioni:

$$\Delta y = \log \left(\frac{1-z}{z} \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}'|} \right), \quad \Delta \phi = \arccos \frac{\mathbf{k}'(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\sqrt{\mathbf{k}'^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}}. \quad (5.31)$$

Vediamo nello specifico cosa sono i jet di Mueller-Navelet e in quali condizioni si possono formare e identificare.

6 I jet di Mueller-Navelet

La costruzione di acceleratori che generano urti a energie del centro di massa dell'ordine del TeV ha permesso di esplorare più in profondità la struttura interna del protone e studiare la cromodinamica quantistica a grandi energie. Ad LHC si ha la possibilità di creare i jet di Mueller-Navelet che hanno le caratteristiche appropriate per applicare il formalismo BFKL. Infatti tali jet, come si diceva nell'introduzione, sono caratterizzati dall'aver un impulso trasverso molto maggiore di Λ_{QCD} , e ciò permette di effettuare i calcoli con la teoria delle perturbazioni e allo stesso tempo, essendo prodotti da protoni con grande energia nel centro di massa, hanno un impulso longitudinale molto maggiore di quello trasverso. Questo fatto si traduce fenomenologicamente nell'aver dei jet molto in avanti rispetto alla direzione di propagazione dei protoni urtanti. Questi jet possiedono una forte differenza tra le rapidità. Quest'ultima è una variabile che determina quanto un jet è vicino alla direzione di provenienza del fascio di protoni iniziale; la sua espressione è data in funzione dell'impulso longitudinale: $p_z = |\mathbf{k}_J| \sinh y$. Nel caso di particelle a massa nulla o molto energetiche per cui $E/m \gg 1$ allora la rapidità viene ad assumere la seguente espressione in funzione dell'angolo polare θ del jet rispetto all'asse z in cui collidono i due protoni iniziali: $y = -\log(\tan(\frac{\theta}{2}))$. Per cui per $\theta \approx \pi/2$ la rapidità è nulla mentre per piccoli angoli polari diventa più grande. Man mano che aumenta la rapidità tra i due jet si ha un aumento dello spazio delle fasi per l'emissione di gluoni.

Lo scopo dell'analisi di questi jet è quello di verificare se queste emissioni sono ben descritte dalle tecniche BFKL. Per tale verifica oltre a calcolare la sezione d'urto dei jet si può considerare una osservabile particolare: l'angolo azimutale tra i due jet cioè l'angolo formato dalle loro proiezioni nel piano trasverso rispetto alla direzione di propagazione dei protoni incidenti. Nel caso di assenza di emissione gluonica questo angolo tra i jet è uguale a π (infatti $\phi_{J,1} = \phi_{J,2} - \pi$) e si parla di angolo azimutale correlato, invece l'emissione dei gluoni fa sì che i due angoli non siano più completamente correlati e che la decorrelazione aumenti con il numero dei partoni emessi (vedi fig. 21).

Quando si considerano urti adronici, a volte capita che lo stato finale sia costituito da jet, ovvero da un insieme di particelle che vengono raggruppate in un unico oggetto, chiamato appunto jet, caratterizzato da alcune proprietà. Le particelle che lo costituiscono hanno rapidità e angoli azimutali molto simili tra loro che possono variare in una stretta regione nel piano (y, ϕ) . La posizione centrale di questo intervallo definisce la rapidità y_J e l'angolo azimutale ϕ_J del jet, mentre le dimensioni lineari di questa regione (diciamo il semidiametro) ne definisce il "raggio" R . Esistono diverse definizioni di jet, ad ogni modo per ciascuna di esse si può dire, in modo

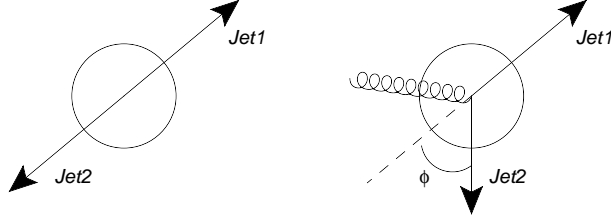


Figura 21: Decorrelazione dell'angolo azimutale nel caso di emissione di un gluone.

approssimato, che una particella fa parte di un jet di raggio fissato R quando: $\Delta\phi^2 + \Delta y^2 \lesssim R^2$, dove $\Delta\phi = \phi - \phi_J$ e $\Delta y = y - y_J$. Invece l'energia trasversa totale $|\mathbf{k}_J|$ è data dalla somma delle energie trasverse delle varie particelle che costituiscono il jet.

Il processo che vogliamo analizzare viene descritto nel centro di massa scrivendo la sezione d'urto differenziale nel modulo dell'impulso trasverso $|\mathbf{k}_{J,i}|$ e nella rapidità $y_{J,i}$ dei due jet ($i = 1, 2$). Prima si sfrutta la fattorizzazione collineare, che separa il contributo calcolabile perturbativamente ($d\hat{\sigma}_{ab}$) da quello invece non perturbativo (PDF), successivamente, per esprimere $d\hat{\sigma}_{ab}$ si usa la formula di fattorizzazione nell'impulso trasverso \mathbf{k} valida alle alte energie (fig. 22) che ha una struttura simile alla (5.21) e che è data da:

$$\frac{d\sigma}{d|\mathbf{k}_{J,1}|d|\mathbf{k}_{J,2}|dy_{J,1}dy_{J,2}} = \sum_{a,b} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_a(x_1) f_b(x_2) \frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{d|\mathbf{k}_{J,1}|d|\mathbf{k}_{J,2}|dy_{J,1}dy_{J,2}} \quad (6.1)$$

Le $f_{a,b}$ sono le funzioni di distribuzione partoniche mentre la $d\hat{\sigma}_{ab}$ è la sezione d'urto partonica scrivibile in maniera fattorizzata facendo intervenire i vertici di jet V e la funzione di Green BFKL:

$$\frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{d|\mathbf{k}_{J,1}|d|\mathbf{k}_{J,2}|dy_{J,1}dy_{J,2}} = \int d\phi_{J,1} d\phi_{J,2} \int d^2\mathbf{k}_1 d^2\mathbf{k}_2 V_a(-\mathbf{k}_1, x_1) G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \hat{s}) V_b(\mathbf{k}_2, x_2) \quad (6.2)$$

I vertici di jet si calcolano in maniera perturbativa ed includono la funzione S_J che definisce il jet in maniera analitica e prende il nome di algoritmo di selezione del jet, come abbiamo visto nelle precedenti relazioni (5.24) e (5.25). La funzione di Green G oltre a dipendere dagli impulsi trasversi \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 , dipende anche dall'energia del sottoprocesso partonico $\hat{s} = x_1 x_2 s$.

Per studiare la decorrelazione tra gli angoli azimutali si definisce il seguente coefficiente:

$$C_m = \int d\phi_{J,1} d\phi_{J,2} \cos(m(\phi_{J,1} - \phi_{J,2} - \pi)) \times \int d^2\mathbf{k}_1 d^2\mathbf{k}_2 \Phi(\mathbf{k}_{J,1}, x_{J,1}, -\mathbf{k}_1) G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \hat{s}) \Phi(\mathbf{k}_{J,2}, x_{J,2}, \mathbf{k}_2), \quad (6.3)$$

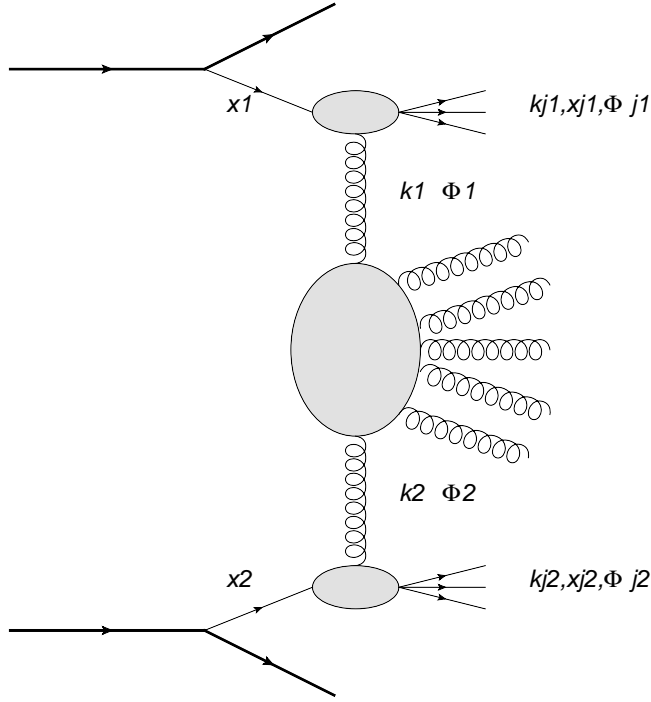


Figura 22: Cinematica jet Mueller-Navelet

dove Φ e G sono definiti come:

$$\Phi(\mathbf{k}_{J,2}, x_{J,2}, \mathbf{k}_2) = \int dx_2 f(x_2) V(\mathbf{k}_2, x_2) \quad (6.4)$$

$$G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \hat{s}) = \int \frac{d\omega}{2\pi i} G_\omega(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \left(\frac{\hat{s}}{s_0}\right)^\omega \quad (6.5)$$

G_ω viene scritta in termini delle autofunzioni LL-BFKL $E_{n,\nu}(\mathbf{k}_1)$ e dell'autovalore $\omega(n, \nu)$

$$G_\omega(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \sum_n \int d\nu E_{n,\nu}(\mathbf{k}_1) \frac{1}{\omega - \omega(n, \nu)} E_{n,\nu}^*(\mathbf{k}_2), \quad (6.6)$$

dove, in approssimazione LL $\omega(n, \nu)$ è dato da

$$\omega(n, \nu) = \alpha_s \chi_0(n, \gamma) = \alpha_s \left[2\Psi(1) - \Psi\left(\gamma + \frac{n}{2}\right) - \Psi\left(1 - \gamma + \frac{n}{2}\right) \right], \quad (\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x))$$

$$(\gamma = \frac{1}{2} + i\nu) \quad (6.7)$$

mentre l'espressione NLL è riportata in app. A.

Per $m = 0$ il coefficiente C_0 è proprio la sezione d'urto differenziale dei jet

$$C_0 = \frac{d\sigma}{d|\mathbf{k}_{J,1}|d|\mathbf{k}_{J,2}|dy_{J,1}dy_{J,2}} \quad (6.8)$$

Di conseguenza una misura della correlazione azimutale è data dal rapporto tra i coefficienti:

$$\langle \cos(m(\phi_{J,1} - \phi_{J,2} - \pi)) \rangle = \frac{C_m}{C_0} \quad (6.9)$$

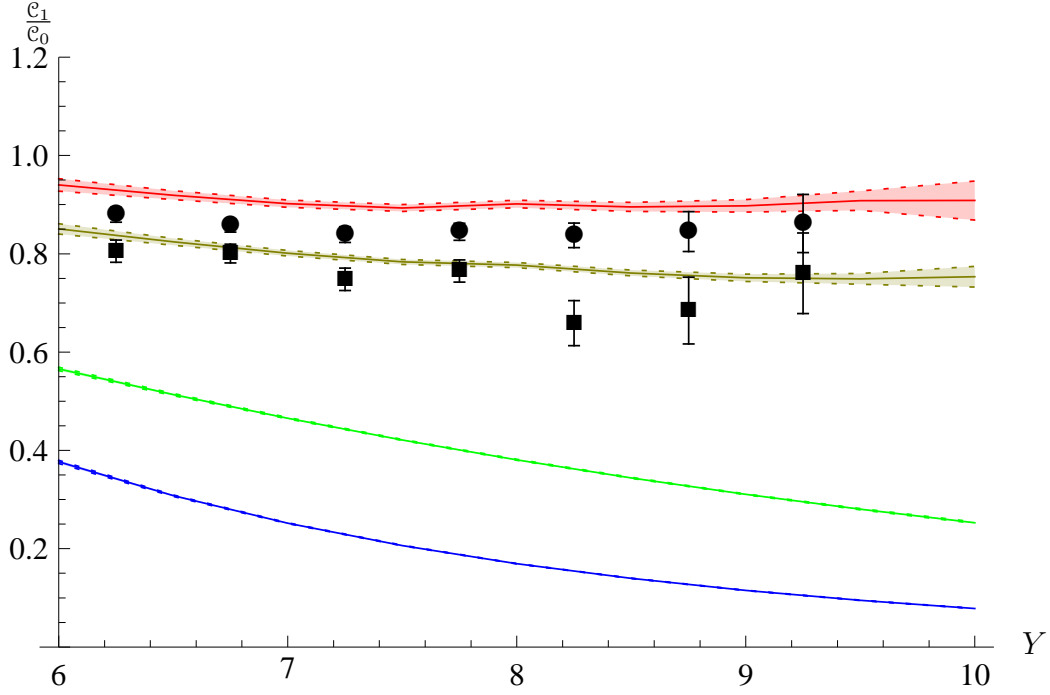


Figura 23: Andamento di C_1/C_0 in funzione della differenza tra le rapidità dei due jet Y nel caso $|\mathbf{k}_{J,1}| = |\mathbf{k}_{J,2}| = 35$ GeV ripreso da [10]. La curva blu si riferisce al caso puramente LL (vertici di jet e funzione di Green), quella verde scuro al caso NLL, la verde chiaro alla combinazione vertici di jet LL e funzione di Green migliorata dalla risommazione collineare, la rossa invece al caso di vertici NLL e funzione di Green migliorata. I punti in nero si riferiscono all'analisi ottenuta con PYTHIA [21], i quadrati invece a quella ottenuta con HERWIG [22], gli errori su tali punti sono dovuti all'integrazione con il Monte Carlo.

Quindi se questo rapporto tra i due coefficienti è vicino a 1 per i valori di m più bassi, allora gli angoli azimutali sono molto correlati, invece se il rapporto tende a 0 allora si ha la massima decorrelazione tra i due.

Nell'articolo [10] viene presentato il calcolo del coefficiente C_m in cui vengono usate le espressioni complete all'ordine NLL sia per i vertici di jet che per la funzione di Green G . Nello stesso articolo viene presentato il risultato della simulazione numerica e qui, nella fig. 23, viene riportato il grafico relativo all'andamento di C_1/C_0 in funzione della differenza di rapidità tra i jet.

Il fatto abbastanza sorprendente è che la curva rossa, che include i contributi completi *NLL* dei vertici V e di G , rimane pressoché costante e molto vicino a 1 anziché diminuire all'aumentare della differenza di rapidità tra i jet. Questo strano comportamento può essere causato da più

effetti concomitanti, tra i quali: (i) la lenta convergenza della serie BFKL alle energie (non asintotiche) che stiamo considerando; (ii) la risommazione collineare applicata solamente ad $m = 0$ con la conseguente diminuzione del coefficiente C_0 e innalzamento dei rapporti C_m/C_0 .

Per ovviare a questo strano comportamento e per cercare di descrivere i recenti dati pubblicati da CMS [12], Duclouè, Szymanowski e Wallon [11] hanno effettuato un'analisi fenomenologica basata sull'approccio BFKL fissando la scala di rinormalizzazione mediante il metodo BLM [23]. Questi autori hanno trovato un buon accordo con i risultati sperimentali, ma al prezzo di fissare la scala di rinormalizzazione a valori molto alti rispetto alle scale naturali del processo, cioè $\mu_R^2 \simeq 500|\mathbf{k}_{J1}||\mathbf{k}_{J2}|$. È evidente che con questa scelta di scala, la costante di accoppiamento assume un valore molto più basso del normale, e diminuisce così il ruolo delle correzioni sottodominanti.

Il nostro studio cerca di costruire una sezione d'urto che comprenda, oltre alla risommazione di alta energia, tutti i termini ad ordine $O(\alpha_s^3)$, che riteniamo importanti per migliorare la precisione della descrizione teorica, senza dover adottare prescrizioni poco naturali per fissare le scale di fattorizzazione e rinormalizzazione. Questa nuova sezione d'urto σ_{match} è così definita:

$$\sigma_{match} = \sigma_{NLO} + \sigma_{BFKL} - \sigma_{BFKL,NLO} \quad (6.10)$$

Nella formula precedente σ_{NLO} è la sezione d'urto esatta $O(\alpha_s^3)$, σ_{BFKL} è la sezione d'urto di alta energia ricavata dal formalismo BFKL in approssimazione NLL, mentre $\sigma_{BFKL,NLO}$ è lo sviluppo all'ordine $O(\alpha_s^3)$ dell'espressione risommata σ_{BFKL} . È necessario sottrarre quest'ultimo termine dalla (6.10) per evitare di contare due volte i termini comuni alla somma $\sigma_{NLO} + \sigma_{BFKL}$ (vedi schema di fig. 24).

Vediamo come si ricava la sezione d'urto differenziale $\sigma_{BFKL,NLO}$ sviluppando il kernel BFKL fino all'ordine NLO. Si sviluppano il vertice di jet e la funzione di Green:

$$V_a(\mathbf{k}, x) = V_a^{(0)}(\mathbf{k}, x) + \alpha_s V_a^{(1)}(\mathbf{k}, x) \quad (6.11)$$

$$G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \hat{s}) = \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \alpha_s K^{(0)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \log \frac{\hat{s}}{s_0} \quad (6.12)$$

Nella (6.12) $K^{(0)}$ è il kernel dell'equazione BFKL nell'approssimazione LL che comprende il termine di emissione reale e quello virtuale. Il vertice di jet LL come si diceva prima è dato dal prodotto tra il fattore di impatto LL $h_q^{(0)}(\mathbf{k})$ e l'algoritmo di selezione del jet $S_J^{(2)}(\mathbf{k}, x)$. Riprendendo le relazioni precedenti (5.24) e (5.25) e inserendole nelle (6.1) e (6.2) si ottiene la seguente espressione per la sezione d'urto differenziale sviluppata all'ordine LO:

$$\frac{d\sigma_{BFKL,LO}}{d|\mathbf{k}_{J1}|d|\mathbf{k}_{J2}|dy_{J1}dy_{J2}} = \sum_{a,b} \frac{\alpha_s^2 \pi C_a C_b f_a(x_{J1}) x_{J1} f_b(x_{J2}) x_{J2}}{\mathbf{k}_J^3} \delta(|\mathbf{k}_{J1}| - |\mathbf{k}_{J2}|) \quad (6.13)$$

	\Downarrow_{PT}	PT			
	α_s^2	α_s^3	α_s^4	α_s^n
$LLx \Rightarrow$	C_0	$C_1 \log \frac{s}{s_0}$	$\left(C_1 \log \frac{s}{s_0}\right)^2$	$\left(C_1 \log \frac{s}{s_0}\right)^n$

Figura 24: Tabella che mostra lo schema della fusione tra σ_{NLO} e σ_{BFKL} .

dove $C_a = C_{F,A}$ per $a = q, g$.

All'ordine NLO invece possiamo scrivere la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{BFKL,NLO}}{d|\mathbf{k}_{J1}|d|\mathbf{k}_{J2}|dy_{J1}dy_{J2}} &= \sum_{a,b} \int dx_1 dx_2 f_a(x_1) f_b(x_2) \int d\phi_{J1} d\phi_{J2} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \alpha_s \\
&\times \left[V_a^{(0)}(-\mathbf{k}_1, x_1) K^{(0)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \log \frac{\hat{s}}{s_0} V_b^{(0)}(\mathbf{k}_2, x_2) \right. \\
&\quad + V_a^{(1)}(-\mathbf{k}_1, x_1) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) V_b^{(0)}(\mathbf{k}_2, x_2) \\
&\quad \left. + V_a^{(0)}(-\mathbf{k}_1, x_1) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) V_b^{(1)}(\mathbf{k}_2, x_2) \right] \quad (6.14)
\end{aligned}$$

Le (6.13) e (6.14) costituiscono la parte da sottrarre dalla somma $\sigma_{NLO} + \sigma_{BFKL}$ per evitare di contare due volte i termini comuni. Vediamo quale è stata la procedura che ci ha portato a calcolare la sezione d'urto BFKL sviluppata al primo ordine. Noi vogliamo avere una espressione differenziale nelle due rapidità dei due jet perciò si effettua una integrazione nello spazio degli impulsi trasversi del jet integrando le (6.13) e (6.14) in opportuni intervalli di energia. Questo per poter confrontare i risultati ottenuti dalla simulazione numerica con i dati sperimentali, poiché questi ultimi vengono raggruppati in intervalli dell'energia trasversa del jet. Per far questo si aggiungono alla (6.14) le funzioni caratteristiche degli intervalli di energia trasversa dei due jet χ_{I_i} dove $I_i = [|\mathbf{k}_{J_i,Min}|, |\mathbf{k}_{J_i,Max}|]$ ($i = 1, 2$). Nella (6.14) ci sono delle integrazioni che si possono fare in maniera analitica sfruttando ad esempio le delta di Dirac presenti nell'espressione dell'algorithm del jet, altre invece si fanno numericamente. Perciò abbiamo creato dei programmi

in Mathematica ed in C++ per calcolare questa sezione d'urto differenziale e il coefficiente C_m per studiare la decorrelazione dell'angolo azimutale tra i due jet.

Il primo pezzo della (6.14) contiene il kernel LL BFKL e dopo aver fatto gli integrali usando l'algoritmo di selezione del jet (5.25) rimane la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dy_{J1}dy_{J2}} &= \sum_{a,b} \int_{I_1} d^2\mathbf{k}_{J1} \int_{I_2} d^2\mathbf{k}_{J2} \frac{1}{\mathbf{k}_{J1}^2 \mathbf{k}_{J2}^2} \frac{\alpha_s^3 C_F^2}{2} x_{J1} x_{J2} f_a(x_{J1}) f_b(x_{J2}) \\ &\quad \times \log \frac{x_{J1} x_{J2} s}{s_0} K^{(0)}(-\mathbf{k}_{J1}, \mathbf{k}_{J2}) \chi_{I_1}(\mathbf{k}_{J1}) \chi_{I_2}(\mathbf{k}_{J1}) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Vediamo qual'è l'azione del kernel $K^{(0)}$ su una generica funzione $g(\mathbf{k}_{J2})$:

$$\begin{aligned} \int_{R^2} d^2\mathbf{k}_{J2} K^{(0)}(-\mathbf{k}_{J1}, \mathbf{k}_{J2}) g(\mathbf{k}_{J2}) &= \\ &= C_A \int_{R^2} \frac{d^2\mathbf{k}_{J2}}{\pi^2} \frac{1}{(\mathbf{k}_{J1} + \mathbf{k}_{J2})^2} \left[g(\mathbf{k}_{J2}) - \frac{\mathbf{k}_{J1}^2 g(\mathbf{k}_{J1})}{\mathbf{k}_{J2}^2 + (\mathbf{k}_{J1} + \mathbf{k}_{J2})^2} \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

L'integrale su $d|\mathbf{k}_{J2}|$ va da zero all'infinito e la somma del kernel reale con quello virtuale dà luogo a un integrando finito che viene calcolato numericamente. Per quanto riguarda il calcolo del coefficiente C_m si deve valutare la seguente espressione:

$$\begin{aligned} C_m^{(1,G)} &= \int d|\mathbf{k}_{J1}| d\phi_{J1} |\mathbf{k}_{J1}| \int d|\mathbf{k}_{J2}| d\phi_{J2} \frac{|\mathbf{k}_{J2}|}{2\pi^2} \alpha_s^3 C_F^2 C_A \frac{1}{(\mathbf{k}_{J1} + \mathbf{k}_{J2})^2} \left[\cos(m\phi) L(|\mathbf{k}_{J1}|, |\mathbf{k}_{J2}|) \right. \\ &\quad \times \Theta(|\mathbf{k}_{J2}| - \mathbf{k}_{J2Min}) \Theta(\mathbf{k}_{J2Max} - |\mathbf{k}_{J2}|) - \\ &\quad \left. - L(|\mathbf{k}_{J1}|, |\mathbf{k}_{J1}|) \frac{\mathbf{k}_{J1}^2 \Theta(|\mathbf{k}_{J1}| - \mathbf{k}_{J2Min}) \Theta(\mathbf{k}_{J2Max} - |\mathbf{k}_{J1}|)}{\mathbf{k}_{J2}^2 + (\mathbf{k}_{J1} + \mathbf{k}_{J2})^2} \right] \end{aligned} \quad (6.17)$$

ove si sono definiti:

$$\begin{aligned} L(|\mathbf{k}_{J1}|, |\mathbf{k}_{J2}|) &= \sum_{a,b} \frac{1}{\mathbf{k}_{J1}^2 \mathbf{k}_{J2}^2} x_{J1}(|\mathbf{k}_{J1}|) x_{J2}(|\mathbf{k}_{J2}|) f_a(x_{J1}) f_b(x_{J2}) \log\left(\frac{x_{J1} x_{J2} s}{s_0}\right) \\ \phi &= \phi_{J1} - \phi_{J2} - \pi \end{aligned} \quad (6.18)$$

L'azione del $\cos(m\phi)$ sulla parte virtuale del kernel non dà contributo, in quanto a numeratore va imposta la condizione $\mathbf{k}_{J1} + \mathbf{k}_{J2} = 0$, e quindi $\phi = 0$. Perciò per la parte virtuale rimane da valutare il seguente integrale angolare:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{(a - \cos\phi)} \frac{1}{(b - \cos\phi)} &= \frac{1}{b-a} \int \frac{d\phi}{2\pi} \left(\frac{1}{a - \cos\phi} - \frac{1}{b - \cos\phi} \right) = \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{b^2-1}} \right) = 4\mathbf{k}_{J1}^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{k}_{J1}^2 - \mathbf{k}_{J2}^2|} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}_{J1}^4 + 4\mathbf{k}_{J2}^4}} \right), \end{aligned} \quad (6.19)$$

dove $a = \frac{\mathbf{k}_{J1}^2 + \mathbf{k}_{J2}^2}{2|\mathbf{k}_{J1}||\mathbf{k}_{J2}|}$ e $b = \frac{\mathbf{k}_{J1}^2 + 2\mathbf{k}_{J2}^2}{2|\mathbf{k}_{J1}||\mathbf{k}_{J2}|}$.

Per la parte reale, una volta passati nel piano complesso si vede che la funzione presenta due poli: uno nell'origine con molteplicità pari a m , l'altro invece nello zero del polinomio

$z^2 - 2az + 1$ che cade all'interno del cerchio unitario. Allora il risultato dell'integrale angolare si ottiene valutando il residuo della seguente funzione nei due poli:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\cos(m\phi)}{a - \cos\phi} = 2|\mathbf{k}_{J1}||\mathbf{k}_{J2}| \left(\frac{|\mathbf{k}_{<}|}{|\mathbf{k}_{>}|} \right)^m \frac{1}{|\mathbf{k}_{>}|^2 - |\mathbf{k}_{<}|^2} \quad (6.20)$$

ove $|\mathbf{k}_{<}| (|\mathbf{k}_{>}|) = \min(\max)\{|\mathbf{k}_{J1}|, |\mathbf{k}_{J2}|\}$.

Mettendo insieme i due risultati la (6.17) diventa

$$\begin{aligned} C_m^{(1,G)} &= \int_{I_1} d|\mathbf{k}_{J1}| \int_{R^+} d|\mathbf{k}_{J2}| \alpha_s^3 C_A C_F^2 \left\{ L(|\mathbf{k}_{J1}|, |\mathbf{k}_{J2}|) \left[2|\mathbf{k}_{J1}||\mathbf{k}_{J2}| \left(\frac{|\mathbf{k}_{<}|}{|\mathbf{k}_{>}|} \right)^m \frac{1}{|\mathbf{k}_{>}|^2 - |\mathbf{k}_{<}|^2} \cdot \right. \right. \\ &\cdot \Theta(|\mathbf{k}_{J1}| - \mathbf{k}_{J2MIN}) \Theta(\mathbf{k}_{J2MAX} - |\mathbf{k}_{J2}|) \left. \right] - L(|\mathbf{k}_{J1}|, |\mathbf{k}_{J1}|) \left[\frac{2\mathbf{k}_{J1}^3}{|\mathbf{k}_{J2}|} \left(\frac{1}{|\mathbf{k}_{J1}^2 - \mathbf{k}_{J2}^2|} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}_{J1}^4 + 4\mathbf{k}_{J2}^4}} \right) \Theta(|\mathbf{k}_{J1}| - \mathbf{k}_{J2MIN}) \Theta(\mathbf{k}_{J2MAX} - |\mathbf{k}_{J1}|) \right] \left. \right\} \quad (6.21) \end{aligned}$$

In questa espressione l'integrale sul modulo dell'impulso trasverso del jet 1 viene fatto sull'intervallo limitato I_1 mentre quello sull'impulso trasverso del jet 2 va fatto su tutto R^+ .

Il secondo termine della (6.14) contiene il vertice di jet $NLL V_q^{(1)}$, che presenta vari pezzi da trattare separatamente per sottrarre tutte le divergenze collineari e soffici, in modo particolare nelle parti del vertice contenenti l'algoritmo di selezione del jet per tre particelle finali $S_j^{(3)}$, che comprende tre contributi: quello del jet composto dal quark e dal gluone, e le due parti relative al jet solo quark e solo gluone. Anche in questo caso alcune integrazioni si fanno analiticamente usando le delta di Dirac e altre invece numericamente. A differenza del primo pezzo della (6.14), l'integrale angolare su ϕ non può essere fatto analiticamente nelle parti di $V_q^{(1)}$ che contengono l'algoritmo di jet per tre particelle in quanto $S_j^{(3)}$ dipende da tale angolo in modo non banale. Quindi questa integrazione e le altre sui moduli dell'impulso trasverso dei jet e sulla frazione d'impulso longitudinale z vengono calcolate numericamente mediante dei programmi che abbiamo scritto appositamente.

Il terzo contributo della (6.14) si calcola nello stesso modo del precedente, a patto di selezionare per il vertice superiore l'espressione LL dipendente da \mathbf{k}_{J1} mentre per quello inferiore il vertice di jet di ordine NLL dipendente da \mathbf{k}_{J2} .

Per quanto riguarda il calcolo di σ_{NLO} , tutti gli elementi di matrice necessari sono stati determinati nel riferimento [5]. Per poter estrarre la sezione d'urto di produzione di jet, in σ_{NLO} si devono cancellare le singolarità infrarosse tra contributi reali e virtuali. Queste singolarità emergono quando un partone viene emesso in maniera soffice oppure quando risulta collineare con uno degli altri partoni; per fare questa cancellazione abbiamo preso in considerazione il

metodo di sottrazione cosiddetto dei dipoli sviluppato nel riferimento [16], che illustreremo nel prossimo capitolo.

7 Metodo di sottrazione dei dipoli

Quando si calcola una sezione d'urto partonica nell'approssimazione NLO emergono delle singolarità di natura diversa. Un tipo è costituito dalle divergenze ultraviolette che sono presenti nella correzione virtuale e vengono riassorbite mediante la procedura di rinormalizzazione tramite la ridefinizione della costante di accoppiamento α_s . L'altro tipo invece sono quelle infrarosse che si ritrovano sia nel contributo virtuale che in quello di emissione reale, ed emergono in due situazioni: emissione soffice, quando viene emesso un gluone il cui quadrimpulso tende a zero oppure emissione collineare che avviene quando un partone viene emesso con angolo piccolo rispetto a uno degli altri partoni, ed essi assumono così la stessa direzione. Nei processi in cui sono presenti dei partoni nello stato iniziale non è sufficiente sommare tra loro il contributo virtuale con quello reale per cancellare tutte le singolarità, quindi per rimuovere quelle rimanenti bisogna ridefinire la funzione di distribuzione partonica (PDF) che viene così a dipendere da un pezzo perturbativo che dà luogo alle equazioni di evoluzione delle stesse (DGLAP) [18].

Un jet, come abbiamo detto prima, viene definito in maniera analitica tramite una funzione di selezione delle particelle che deve soddisfare due requisiti fondamentali affinché le osservabili finali siano prive di singolarità infrarosse. Se $S_J^m(p_1, \dots, p_m; p_a, p_b)$ è l'algoritmo di selezione per m particelle nello stato finale e p_j è un partone soffice, allora:

$$\lim_{p_j \rightarrow 0} S_J^m(p_1, \dots, p_j, \dots, p_m; p_a, p_b) = S_J^{m-1}(p_1, \dots, p_m; p_a, p_b) \quad (7.1)$$

Se invece p_i è collineare al partone con impulso p_{i+1} allora:

$$S_J^m(p_1, \dots, ap_i, bp_i, \dots, p_m; p_a, p_b) = S_J^{m-1}(p_1, \dots, (a+b)p_i, \dots, p_m; p_a, p_b) \quad (7.2)$$

Quindi nei due limiti infrarossi la funzione S_J^m con m particelle finali deve essere indistinguibile da quella con $m - 1$ particelle finali. Questo fatto è fondamentale per avere a che fare con osservabili prive di divergenze infrarosse per poter effettuare calcoli che diano un contributo finito. Questa richiesta è collegata anche al fatto che in un esperimento i rivelatori non sono in grado di identificare particelle finali che abbiano un quadrimpulso molto piccolo o distinguere due particelle collineari e queste due situazioni limite devono essere sottratte dal calcolo teorico in cui rappresentano delle divergenze, per poter effettuare un confronto tra la predizione teorica e i dati sperimentali.

Vediamo allora come funziona il meccanismo di sottrazione delle divergenze basato sulla costruzione di controtermini chiamati dipoli ideato nell'articolo [16]. Analizziamo il caso generale in cui non sono presenti partoni nello stato iniziale (per esempio l'annichilazione di una coppia

e^+e^- con formazione di jet nello stato finale). Si sviluppa la sezione d'urto:

$$\sigma = \sigma^{LO} + \sigma^{NLO} \quad (7.3)$$

$$\sigma^{LO} = \int_m d\sigma^B. \quad (7.4)$$

Nella (7.4) $d\sigma^B$ è la sezione d'urto in approssimazione di Born, l'integrazione è finita su tutto lo spazio delle fasi e può essere svolta in 4 dimensioni in maniera analitica o numerica.

All'ordine successivo NLO si ha:

$$\sigma^{NLO} = \int d\sigma^{NLO} = \int_{m+1} d\sigma^R + \int_m d\sigma^V. \quad (7.5)$$

Nella (7.5) $d\sigma^R$ è il contributo reale con $m + 1$ partoni nello stato finale, $d\sigma^V$ è il contributo virtuale (correzione a 1-loop) con m partoni finali. I due integrali sono divergenti separatamente in 4 dimensioni ma la loro somma è finita, in accordo con il teorema KLN [24]. Per trattare questi integrali la procedura generale è quella di effettuare la regolarizzazione dimensionale introducendo il parametro ϵ e di svolgere l'integrale in $d = 4 + 2\epsilon$ dimensioni, in questo modo emerge la struttura contenente i poli in $1/\epsilon, 1/\epsilon^2$ che si cancellano sommando i contributi reale e virtuale.

Il metodo della sottrazione proposto nel riferimento [16] invece consiste nel costruire dei termini $d\sigma^A$ che contengono esattamente la parte singolare del pezzo reale $d\sigma^R$ ed evitare così di passare alla regolarizzazione dimensionale potendo così svolgere l'integrale in 4 dimensioni.

$$d\sigma^{NLO} = [d\sigma^R - d\sigma^A] + d\sigma^A + d\sigma^V \quad (7.6)$$

$$\sigma^{NLO} = \int_{m+1} [d\sigma^R - d\sigma^A] + \int_{m+1} d\sigma^A + \int_m d\sigma^V \quad (7.7)$$

In questo modo il primo termine del secondo membro della (7.7) non contiene più alcuna singolarità che rimane invece nei due termini rimanenti. Il punto fondamentale per costruire $d\sigma^A$ è quello di poterlo scrivere in modo fattorizzato, ovvero nel prodotto tra un termine dipendente dal sottospazio a m partoni ($d\sigma^b$) per un altro fattore che, integrato sul rimanente sottospazio delle fasi di singolo partone, riproduca gli stessi poli di $d\sigma^V$ per poterli così cancellare. Un'altra caratteristica dei termini di dipolo è quella di essere universali, infatti non dipendono dal particolare processo d'urto ma soltanto dalla configurazione cinematica collineare per cui, una volta calcolati, possono essere usati per ogni processo che coinvolga la stessa situazione singolare.

$$d\sigma^A = \sum_{dipoli} d\sigma^B \otimes dV_{dipoli} \quad (7.8)$$

$$d\sigma^B = d\phi^m |M_m|^2 S_J^m \quad (7.9)$$

Nella (7.8) dV_{dipoli} sono i vari dipoli, ogni configurazione in $d\sigma^A$ è ottenuta tramite un processo a due stadi: si considera una configurazione con m partoni e successivamente uno di essi decade in due partoni, in questo modo si crea la struttura fattorizzata necessaria per cancellare la divergenza rimanente in $d\sigma^V$.

$$\begin{aligned} \int_{m+1} d\sigma^A &= \sum_{dipoli} \int_m d\sigma^B \otimes \int_1 dV_{dipoli} = \int_m d\sigma^B \otimes I \\ I &= \sum_{dipoli} \int_1 dV_{dipoli} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Il termine I contiene tutti i poli in ϵ necessari per cancellare quelli del contributo virtuale. Vediamo qual'è la struttura di un dipolo seguendo la procedura dell'articolo [16].

Nel caso di assenza di partoni nello stato iniziale si costruisce il dipolo $D_{ij,k}$ dove i, j sono i partoni tra loro collineari, k invece è il partone spettatore. Nel limite $p_i \cdot p_j \rightarrow 0$ l'elemento di matrice è dominato dal pezzo singolare contenuto nel suddetto dipolo:

$$\begin{aligned} D_{ij,k}(p_1, \dots, p_{m+1}) &= -\frac{1}{2p_i \cdot p_j} \\ &\times {}_m \langle 1, \dots, \tilde{i}j, \dots, \tilde{k}, \dots, m+1 | \frac{T_k \cdot T_{ij}}{T_{ij}^2} V_{ij,k} | 1, \dots, \tilde{i}j, \dots, \tilde{k}, \dots, m+1 \rangle_m \end{aligned} \quad (7.11)$$

L'elemento di matrice per m partoni finali si ottiene dall'elemento per $m+1$ partoni rimpiazzando i due partoni i e j con un partone fittizio indicato con $\tilde{i}j$ che prende il nome di emettitore e il partone k con \tilde{k} che prende il nome di spettatore. Quest'ultimo ha gli stessi numeri quantici (sapore, colore) di k mentre per $\tilde{i}j$ vale la seguente regola: se i e j sono un quark (antiquark) e un gluone allora $\tilde{i}j$ è un quark (antiquark), invece se i e j sono rispettivamente un quark e un antiquark allora $\tilde{i}j$ è un gluone. Nella (7.11) T_k e T_{ij} sono gli operatori di colore delle rispettive particelle, $V_{ij,k}$ dipende dalla natura dell'emettitore e si comporta come una matrice di splitting e viene a dipendere da alcune variabili cinematiche opportunamente definite per valutare l'elemento di matrice. Per esempio nel caso di splitting fermione-gluone la sua espressione è:

$$\langle s | V_{q_i, g_j, k}(\tilde{z}_i, y_{ij,k}) | s' \rangle = 8\pi\mu^{2\epsilon} \alpha_s C_F \left[\frac{2}{1 - \tilde{z}_i(1 - y_{ij,k})} - (1 + \tilde{z}_i) - \epsilon(1 - \tilde{z}_i) \right] \delta_{ss'} \quad (7.12)$$

Nella formula precedente s, s' sono gli stati di spin delle particelle iniziali e finali, \tilde{z}_i e $y_{ij,k}$ sono delle combinazioni dei quadrimpulsi dei partoni i, j, k , così definiti:

$$\tilde{z}_i = \frac{p_i p_k}{p_j p_k + p_i p_k} \quad (7.13)$$

$$y_{ij,k} = \frac{p_i p_j}{p_i p_j + p_j p_k + p_k p_i} \quad (7.14)$$

Questa è la forma assunta dal pezzo che contiene il dipolo:

$$d\sigma^A = \frac{d\phi_{m+1}}{n(1)n(2)} \sum_{ij} \sum_{k \neq i,j} D_{ij,k}(p_1, \dots, p_{m+1}) S_J^{(m)}(p_1, \dots, \tilde{p}_{ij}, \tilde{p}_k, \dots, p_{m+1}) \quad (7.15)$$

In questa formula $n(1)$ e $n(2)$ indicano il numero di polarizzazioni dei partoni presenti nello stato iniziale. Vediamo la struttura assunta dalla differenza $d\sigma^R - d\sigma^A$:

$$d\sigma^R - d\sigma^A = d\phi_{m+1} \left\{ |M_{m+1}(p_1, \dots, p_{m+1})|^2 S_J^{(m+1)}(p_1, \dots, p_{m+1}) - \sum_{ij} \sum_{k \neq i,j} D_{ij,k}(p_1, \dots, p_{m+1}) S_J^{(m)}(p_1, \dots, \tilde{p}_{ij}, \tilde{p}_k, \dots, p_{m+1}) \right\} \quad (7.16)$$

Come abbiamo detto si cancellano tutte le divergenze infrarosse infatti nel limite soffice o collineare si ha che:

$$|M_{m+1}(p_1, \dots, p_{m+1})|^2 \rightarrow D_{ij,k}(p_1, \dots, p_{m+1}), \quad (7.17)$$

$$S_J^{(m+1)}(p_1, \dots, p_i, p_j, p_k, \dots, p_{m+1}) \rightarrow S_J^{(m)}(p_1, \dots, \tilde{p}_{ij}, \tilde{p}_k, \dots, p_{m+1}). \quad (7.18)$$

Allora il dipolo può essere scritto in questo modo:

$$D_{ij,k} = - \left[\frac{V_{ij,k}}{2p_i \cdot p_j} \frac{1}{T_{ij}^2} |M_{(m)}|^2 \right] \quad (7.19)$$

Sfruttando la proprietà che lo spazio delle fasi per $m+1$ particelle nello stato finale si può fattorizzare nel prodotto dello spazio delle fasi per m particelle per lo spazio delle fasi di singolo partone, possiamo valutare $\int_{m+1} d\sigma^A$ separando nel dipolo il termine dipendente dai quadrimpulsi degli m partoni dalla parte invece che dipende dal singolo partone che può essere integrata sul suo sottospazio, inserendo in $d\sigma^A$ l'espressione del dipolo (7.19):

$$\begin{aligned} \int_{m+1} d\sigma^A &= - \int_m d\phi_m S_J^{(m)} \frac{1}{T_{ij}^2} |M_m|^2 \left[\int_1 \frac{V_{ij,k}}{2p_i \cdot p_j} dp_i(\tilde{p}_{ij}, \tilde{p}_k) \right] \\ &= \int_m [d\sigma^B \cdot I(\epsilon)] \end{aligned} \quad (7.20)$$

Il pezzo relativo al contributo virtuale contenente le correzioni a 1-loop ha la seguente struttura:

$$d\sigma^V = d\phi_m |M_m|_{(1-loop)}^2 S_J^{(m)} \quad (7.21)$$

Quindi affinché si cancellino anche le divergenze virtuali bisogna che:

$$\begin{aligned} |M_m|_{1-loop}^2 &= -_m \langle 1, \dots, m | I(\epsilon) | 1, \dots, m \rangle_m + \dots \\ &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \sum_i \frac{1}{T_i^2} \tilde{V}_i(\epsilon) \sum_{k \neq i} \left(\frac{4\pi\mu^2}{2p_1 \cdot p_k} \right)^\epsilon |M_m(p_1, \dots, p_m)|^2 + \dots, \end{aligned} \quad (7.22)$$

Questo risultato deriva dall'aver integrato $V_{ij,k}$ sul sottospazio di singolo partone e $\tilde{V}_i(\epsilon)$ ha gli stessi poli di $d\sigma^V$ una volta effettuata l'espansione in ϵ . Ricapitolando, l'espressione NLO per $d\sigma^V + d\sigma^A$ integrata su m partoni è:

$$\begin{aligned} \sigma^{NLO} &= \int_m [d\sigma^V + d\sigma^B \otimes I]_{\epsilon=0} \\ &= \int d\phi^{(m)} \{ |M_m(p_1, \dots, p_m)|_{(1-loop)}^2 + {}_m \langle 1, \dots, m | I(\epsilon) | 1, \dots, m \rangle_m \}_{\epsilon=0} S_J^{(m)}(p_1, \dots, p_m). \end{aligned} \quad (7.23)$$

I due termini tra le parentesi graffe si devono valutare prima in dimensione $d = 4 + 2\epsilon$, poi si effettua l'espansione in ϵ e dopo aver cancellato i poli tramite addizione, si fa il limite di $\epsilon \rightarrow 0$, a questo punto il pezzo che rimane è una quantità finita e l'integrale si svolge in dimensione $d = 4$ in maniera analitica oppure numericamente.

Vediamo brevemente cosa succede se sono presenti dei partoni anche nello stato iniziale. A differenza di prima nella formula della sezione d'urto sarà presente la funzione di distribuzione partonica e all'ordine NLO c'è un pezzo in più rispetto al caso senza partoni iniziali perché stavolta la somma dei contributi singolari reali e virtuali non si cancella esattamente come prima per cui si devono introdurre dei controtermini che rimuovano la singolarità residua e allo stesso tempo fanno assumere alla PDF una dipendenza da un parametro esterno, la scala di fattorizzazione μ_F .

Affinché l'aggiunta di questi controtermini non alteri l'espressione iniziale della sezione d'urto si ha una ridefinizione della PDF, in accordo con le equazioni di Altarelli-Parisi.

$$\sigma = \sum_a \int_0^1 dx f_a(x, \mu_F^2) [\sigma_a^{LO} + \sigma_a^{NLO}], \quad (7.24)$$

$$\sigma_a^{NLO} = \int_{m+1} d\sigma_a^R + \int_m d\sigma_a^V + \int_m d\sigma_a^C(\mu_F^2). \quad (7.25)$$

Rispetto al caso precedente ci sono delle singolarità infrarosse che coinvolgono anche i partoni iniziali per cui come conseguenza aumenterà il numero di termini di dipolo da calcolare, infatti oltre ai dipoli in cui sono collineari due partoni finali con spettatore sempre finale, ci sono quelli in cui lo spettatore è un partone iniziale e quelli in cui sono collineari un partone iniziale e uno finale e gli spettatori sono sia finali che iniziali. Per ogni famiglia di dipolo ci sarà una espressione analitica diversa che formerà degli operatori di inserzione I diversi per combinarsi

con $d\sigma^V$ e $d\sigma^C$ per cancellare le singolarità di questi due termini. Le nuove configurazioni di dipolo servono a cancellare tutte le singolarità infrarosse del termine di emissione reale $d\sigma^R$ che stavolta annovera anche i contributi collineari con presenza di partoni nello stato iniziale.

Una volta applicato questo metodo si ottiene una espressione finita per la sezione d'urto differenziale e per i coefficienti C_m che può essere integrata numericamente sull'impulso trasverso del jet. L'obiettivo quindi è quello di mettere assieme tutti i risultati derivanti dai programmi di risommazione di alta energia, da quello sviluppato al primo ordine e infine da quello esatto NLO per poter effettuare la fusione (il “matching”) e quindi confrontare con i dati sperimentali di LHC per stabilire se questi nuovi contributi affiancati all'approssimazione di alta energia BFKL possano migliorare la predizione teorica.

Nel prossimo capitolo parleremo degli algoritmi di selezione di particelle per formare un jet.

8 L'algoritmo di jet del cono e k_T

In un esperimento di urto protone-protone, a causa della proprietà del confinamento, non è possibile identificare i quark e i gluoni in maniera diretta. L'unica possibilità è quella di identificare i prodotti derivanti dall'interazione forte e cercare di risalire alle caratteristiche dei partoni che hanno dato luogo a tali stati finali sfruttando le conoscenze teoriche della cromodinamica quantistica. L'obiettivo è quello di verificare i modelli teorici analizzando le proprietà dei prodotti finali in un urto di alta energia dove è applicabile il calcolo perturbativo. Risulta di grande importanza disporre di un apparato sperimentale che consenta di misurare in maniera precisa l'impulso e l'energia di particelle cariche e neutre e riuscire a identificare la tipologia delle particelle prodotte nell'urto. Tuttavia, come abbiamo detto in precedenza, per lo studio della QCD è fondamentale identificare e analizzare i jet, che sono la più diretta manifestazione dei prodotti dei decadimenti partonici. Pertanto, sia dal punto di vista teorico che da quello sperimentale, è importante definire una funzione che stabilisca quali particelle faranno parte di un jet secondo alcuni criteri stabiliti a priori.

Un aspetto importante per effettuare l'analisi dei dati è quello della selezione degli eventi; in un urto tra adroni non tutti gli eventi osservati nel rivelatore sono da prendere in considerazione o sono rilevanti per l'analisi, anzi la maggioranza degli eventi derivano dagli urti soffici e danno luogo a particelle aventi un basso impulso trasverso e devono essere scartati per effettuare confronti con le predizioni teoriche della QCD perturbativa. È necessario disporre di un filtro che permetta di prendere il maggior numero di eventi rilevanti per l'analisi, e che abbia la caratteristica di accettare solo pochi eventi che non riguardano il processo in considerazione.

Dall'urto protone-protone si devono prendere in considerazione solo i processi duri ovvero quelli che danno luogo a particelle finali con grandi impulsi trasversi (dell'ordine delle decine di GeV) e separare i cosiddetti "underlying events" che derivano dall'interazione tra i partoni spettatori e che non rientrano nello studio della QCD perturbativa. Quest'ultimi eventi sono caratterizzati dall'aver un impulso trasverso inferiore a un GeV e si ritrovano a piccoli angoli rispetto alla direzione di provenienza dei due fasci di protoni che collidono. Una maniera efficace per filtrare l'enorme quantità di dati che si hanno in un urto adronico è quella di andare a considerare gli eventi che hanno fasci di particelle con energia totale più grande di una determinata soglia (dell'ordine di una decina di GeV) e che si sono depositati nel calorimetro ad angoli non troppo piccoli rispetto alla direzione iniziale dei due protoni che collidono.

Inoltre un requisito importante è quello della scelta di osservabili che siano prive di divergenze infrarosse, ovvero una osservabile non deve cambiare se allo stato finale viene aggiunto una

particella soffre oppure collineare con una delle altre particelle. I jet di particelle costituiscono il fulcro principale per la verifica della QCD di alta energia e quindi anche per la nostra analisi di matching che si basa sulla costruzione di una nuova sezione d'urto per i jet di Mueller-Navelet. Quando in un urto si formano i jet, le particelle dello stato finale non si distribuiscono in maniera uniforme nello spazio delle fasi; invece si ritrovano raggruppate in determinate regioni del calorimetro dove hanno depositato la loro energia che andrà a costituire quella totale del jet di cui faranno parte. Sia dal punto di vista teorico che da quello sperimentale è necessario definire un jet tramite un algoritmo ben definito che stabilisca quali particelle finali possono far parte di un jet, e che possa avere una espressione adatta ad essere usata nei programmi di analisi dati così come per i calcoli teorici.

Esistono due classi principali di algoritmo di jet: l'algoritmo del cono e quello k_T . Noi considereremo entrambe, in quanto le prime predizioni teoriche sui jet di Mueller-Navelet [10] sono state fatte con l'algoritmo del cono perché al Tevatron hanno usato tale algoritmo. Invece, negli esperimenti di CMS [12] per lo studio della decorrelazione dell'angolo azimutale dei jet di Mueller-Navelet è stato utilizzato l'algoritmo k_T .

Per quanto riguarda la nostra analisi, nei nostri programmi abbiamo prima usato la definizione dell'algoritmo del cono, successivamente abbiamo cambiato algoritmo usando quello k_T . Possiamo così valutare quale sia la differenza tra i risultati finali prodotti con le due tipologie di algoritmo.²

Vediamo adesso come funzionano questi due algoritmi partendo da quello k_T . Si definisce una variabile di risoluzione dipendente dal quadrimpulso delle particelle rivelate nel calorimetro che permette, a seconda di un certo criterio, di stabilire se due particelle possono essere raggruppate in un jet. Ci sono diverse definizioni di questa variabile di risoluzione, una possibile scelta ad esempio è data dalla seguente espressione:

$$y_{ij} = \frac{2E_i E_j (1 - \cos \theta_{ij})}{E_{vis}^2} \quad (8.1)$$

In questa espressione E_i, E_j sono le energie trasverse delle particelle i e j , θ_{ij} è l'angolo compreso tra tali particelle e E_{vis}^2 è la somma dell'energia di tutte le particelle rivelate nello stato finale. La procedura di formazione del jet consiste nel valutare la quantità y_{ij} (che può essere considerata come una distanza tra le varie particelle) per tutte le coppie di particelle finali. Tra tutte queste y_{ij} si prende il valore più piccolo y_{ij}^{MIN} e si confronta con un certo parametro di riferimento y_{cut} che è stato scelto a priori. Se $y_{ij}^{MIN} > y_{cut}$ allora l'algoritmo si blocca e tutte le particelle

²Nei vertici di jet la scelta di un certo algoritmo è definita dalla funzione di selezione $S_J^{(3)}$ che si ritrova nella correzione al vertice di jet NLL (vedi la (5.29)).

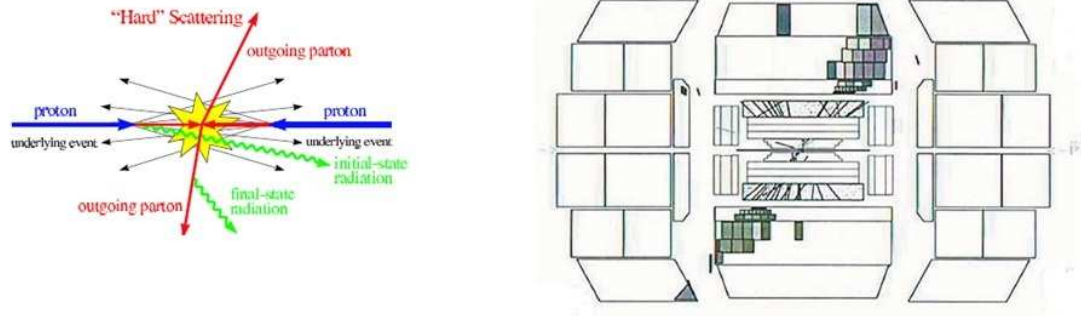


Figura 25: A sinistra: schema di un urto protone-protone con formazione di partoni duri e partoni spettatori. A destra è riportata l'immagine di un evento con due jet nel rivelatore $D0$ al Tevatron.

finali vengono considerate come jet. Se invece $y_{ij}^{MIN} < y_{cut}$ allora in tal caso le due particelle i, j che hanno creato la variabile y_{ij}^{MIN} vengono raggruppate assieme per formare una nuova pseudoparticella e viene ripetuto il calcolo delle varie distanze y_{ij} in questa nuova configurazione in cui ho una particella di meno nello stato finale (perché la i e la j che hanno formato y_{ij}^{MIN} sono state fuse in un'unica particella); l'algoritmo non si ferma fintantochè la nuova y_{ij}^{MIN} è maggiore della y_{cut} .

Vediamo invece in cosa consiste l'algoritmo di jet basato sul cono. In un urto adronico la ricerca dei jet si basa sul presupposto di trovare un innalzamento del livello energetico depositato sul calorimetro rispetto a una distribuzione energetica uniforme dovuta ai cosiddetti eventi di fondo che derivano dall'urto soffice tra i partoni spettatori. Questo innalzamento di energia si ritroverà in una certa regione del calorimetro individuata dalle coordinate η, ϕ relative alla pseudorapidità e all'angolo azimutale delle particelle che hanno colpito quella determinata regione del calorimetro. Nella fig. 26 si nota come le particelle vengono rappresentate da torri la cui altezza dipende dal deposito di energia che hanno lasciato sulla cella del calorimetro.

Vediamo in maniera schematica come funziona l'algoritmo:

- A priori viene scelto il raggio R del cono che determinerà la dimensione del jet.
- Ogni cella del calorimetro su cui è stata depositata una energia superiore a una certa soglia E_0 viene considerata come l'inizio da cui cominciare a formare il jet. Queste celle prendono il nome di "seed cell".
- Tutte le celle che hanno una apertura angolare, rispetto alla cella centroide (seed), minore di R fanno parte del jet; detto in altri termini introducendo la distanza R_{ij} dove i è l'indice

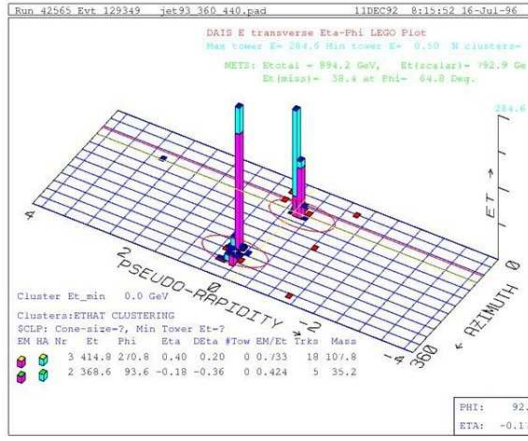


Figura 26: Un evento con formazione di più jet nel rivelatore dell'esperimento CDF al Tevatron, Le torri sono individuate dalle coordinate η e ϕ e la loro altezza rappresenta il deposito di energia trasversa del jet. In questo caso il raggio del cono (indicato dalle ellissi) è di 0,7.

della cella centroeide mentre j quella di una cella generica:

$$R_{ij} = \sqrt{(\eta_i - \eta_j)^2 + (\phi_i - \phi_j)^2} \quad (8.2)$$

Se $R_{ij} < R$ allora la cella j -esima farà parte del jet, invece se $R_{ij} > R$ allora la cella j -esima verrà esclusa dal jet.

- Tutte le celle che si trovano entro un cerchio di raggio R vengono raggruppate e si definiscono le variabili di jet come l'energia trasversa E_{Tjet} e la sua posizione nelle coordinate di pseudorapidità η_{jet} e angolo azimutale ϕ_{jet} :

$$E_{Tjet} = \sum_{i \in jet} E_{Ti}, \quad \eta_{jet} = \sum_{i \in jet} \frac{E_{Ti} \eta_i}{E_{Tjet}}, \quad \phi_{jet} = \sum_{i \in jet} \frac{E_{Ti} \phi_i}{E_{Tjet}}. \quad (8.3)$$

La pseudorapidità del jet e l'angolo azimutale sono calcolate come somma pesata delle varie pseudorapidità e angoli azimutali delle celle che costituiscono il jet, rispetto all'energia trasversa del jet stesso E_{Tjet} .

- Se due raggruppamenti si sovrappongono, essi vengono messi assieme se condividono più del 50 per cento della loro energia, altrimenti rimangono separati e le torri energetiche comuni vengono assegnate al raggruppamento più vicino. Nel caso in cui avvenga la fusione tra due jet allora nonostante l'uso di un raggio fissato R il nuovo jet fuso contiene dell'energia che proviene a distanze angolari maggiori di R .

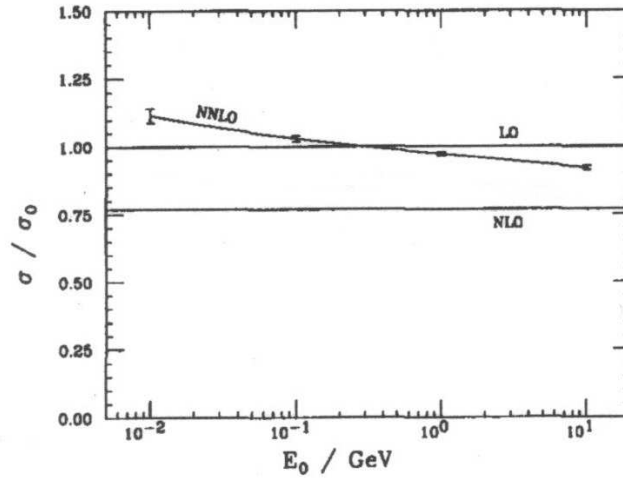


Figura 27: Dipendenza della sezione d'urto (LO, NLO, NNLO) dall'energia di soglia E_0 per l'esperimento $D0$ al Tevatron.

Nei capitoli precedenti abbiamo parlato dell'importanza di avere a che fare con grandezze prive di divergenze infrarosse, e per quanto riguarda gli algoritmi di selezione dei jet abbiamo visto quando una tale caratteristica viene rispettata. Il concetto era che se ho una configurazione con n partoni finali e ci aggiungo un partone soffice oppure se divido un partone in due partoni collineari allora la mia osservabile non deve essere modificata da tale cambiamento per non avere divergenze infrarosse.

Vediamo adesso come l'algoritmo del cono può essere non completamente privo di divergenze infrarosse venendo meno la stabilità del numero dei jet finali nel caso di aggiunta di un partone soffice. Nella fig. 27 si vede come si modifica la sezione d'urto al variare dell'energia di soglia del calorimetro E_0 per l'esperimento $D0$ del Tevatron. All'ordine NNLO si osserva che tale sezione d'urto cresce al diminuire di E_0 , questo fatto è conseguenza di un comportamento instabile di σ in quanto riducendo l'energia di soglia cominciano a farsi sentire gli effetti dei partoni soffici che, fintantoché la loro energia è sotto la sensibilità della cella calorimetrica non possono essere rivelati e quindi tale fatto è sinonimo di una sezione d'urto del jet costruita con un algoritmo instabile. Disponendo di un calorimetro perfetto con $E_0 \rightarrow 0$ il grafico all'ordine NNLO divergerebbe all'infinito, il fatto di avere una certa soglia di energia fa sí che la sezione d'urto non diverga e che rimanga bloccata a un certo valore.

La fig. 28 ci aiuta a capire quello che succede al variare della soglia di energia E_0 . Supponiamo di avere una configurazione come quella in fig. 28.a in cui due partoni sono compresi in una distanza angolare tra R e $2R$ e che nella regione di sovrapposizione dei due cerchi non ci siano

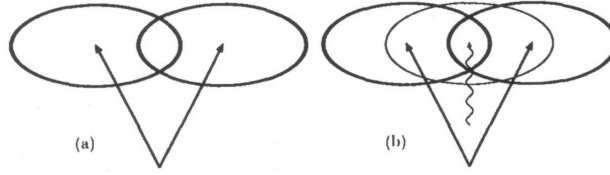


Figura 28: Figura che illustra il caso di due jet che si sovrappongono. Nella (a) ci sono due partoni duri, nella (b) viene emesso un partone soffice nella regione di sovrapposizione dei due coni.

celle attive in modo tale da poter essere considerati due jet separati. Adesso supponiamo di avere a che fare con la configurazione di fig. 28.b in cui viene emesso un partone soffice con una energia molto vicina a quella di soglia E_0 . Se tale energia è al di sotto della soglia del calorimetro allora l'algoritmo non distingue tra la configurazione *a* e la *b*, invece se l'energia supera la soglia allora si crea una nuova cella energetica (un nuovo seed). A questo punto, come si vede dalla figura, il cono attorno a questa nuova cella racchiude entrambi i partoni duri esterni e quindi secondo il meccanismo di costruzione del jet questa configurazione dà luogo ad un solo jet. Questa differenza nella classificazione della configurazione finale dipende dalla presenza di un partone soffice nella regione di sovrapposizione che viene emesso con una energia inferiore o superiore alla soglia E_0 ; la probabilità di tale emissione è data da:

$$\frac{2C_A}{\pi} \alpha_s \log \frac{E_T}{E_0} \quad (8.4)$$

Quindi un tale cambiamento al variare di E_0 nella sezione d'urto determina una instabilità nell'algoritmo e quindi una presenza di divergenza infrarossa, contrariamente alle proprietà richieste nelle equazioni (7.1,7.2) per la funzione di selezione delle particelle del jet.

Un ragionamento analogo può essere fatto per il limite collineare andando a considerare la variazione delle dimensioni δ_0 delle celle calorimetriche, infatti diminuendo tale dimensione il rivelatore può rendersi conto di una emissione collineare e quindi se tale emissione avviene sopra la soglia E_0 l'algoritmo del cono fa sì che una configurazione con un solo jet venga considerata come due jet andando contro il criterio della stabilità infrarossa.

L'algoritmo k_T invece rimane completamente privo di divergenze infrarosse a tutti gli ordini della teoria perturbativa. Questo fatto si può capire andando a rivedere la fig. 28.b. Secondo questo algoritmo il partone soffice viene unito con il partone duro esterno che si trova più vicino, a questo punto l'algoritmo deciderà se unire insieme i due jet se la loro distanza è minore del

parametro y_{cut} altrimenti li lascia separati in due jet distinti, il punto fondamentale rispetto al cono è quello che in questo caso l'algoritmo si è completamente dimenticato del partone soffice per cui la configurazione di fig 28.a e quella di fig 28.b vengono trattate nello stesso modo a differenza invece del caso precedente in cui con il cono le due situazioni davano un risultato differente a seconda dell'energia del partone soffice. Con l'algoritmo k_T i dettagli sull'energia di soglia del calorimetro non sono indispensabili come nel cono.

Per l'analisi condotta per calcolare la sezione d'urto BFKL all'ordine NLL presente in [10] sono state usate le espressioni contenenti l'algoritmo del cono; nel caso in cui si abbia a che fare solo con tre partoni nello stato finale, nella correzione al vertice di jet $V_{q,g}^{(1)}$ compare la funzione $S_J^{(3)}$. In questo caso non si hanno problemi di instabilità dei coni, in quanto il vertice di jet NLL non può dar luogo a configurazioni come quelle di fig. 28.a, 28.b perché al massimo un jet è formato da due partoni: l'altro si trova nella regione di rapidità opposta per cui non rientra nelle situazioni con il vertice di jet superiore. L'algoritmo del cono comincia a dare problemi all'ordine NNLO e quindi quando aumenta il numero di partoni dello stato finale (come si vede nella fig. 27 osservando la sezione d'urto NNLO).

Vediamo invece come si modifica la struttura della funzione di selezione delle particelle dello stato finale nel caso dell'algoritmo k_T . L'algoritmo k_T possiede come caratteristica una variabile di risoluzione del jet e uno schema di ricombinazione; la variabile di risoluzione serve per stabilire se due adroni appartengono o meno allo stesso jet, la procedura di ricombinazione invece determina quali saranno l'impulso trasverso e la rapidità della nuova pseudoparticella nel caso in cui i due adroni siano stati riuniti per formare una singola particella. Questo tipo di algoritmo ha bisogno di un ulteriore parametro, indicato con d_{cut} , che serve a stabilire quando interrompere la procedura di raggruppamento delle varie particelle. In particolare questa procedura si ferma quando i parametri di risoluzione d_{ij} (che definiremo dopo) risulteranno maggiori di d_{cut} . Per ogni coppia di adroni finali h_k, h_l vengono calcolati i parametri $d_{kl}, d_{k,B}$ e $d_{l,B}$, questi ultimi si riferiscono al fatto che le particelle possono far parte del fascio iniziale e quindi che siano degli eventi spettatori che non devono essere presi in considerazione nella descrizione di alta energia dell'urto. Dal confronto tra queste variabili di risoluzione si può dire quindi se una particella farà parte di un jet oppure del fascio di protoni. Se risulta che $d_{kl} < d_{kB}$ allora allora la particella k e quella l verranno raggruppate assieme in una nuova pseudoparticella che avrà un impulso trasverso e una rapidità determinate in base a una certa procedura di ricombinazione. Se invece $d_{kB} > d_{kl}$ allora la particella k verrà a far parte del fascio iniziale (e quindi verrà scartata). Questa procedura viene iterata più volte ricalcolando i vari d_{ij} e d_{iB} finchè tali valori non

diventano più grandi del parametro di arresto d_{cut} . In tal caso quindi se $d_{ij}, d_{iB} > d_{cut}$ allora lo stato finale sarà costituito dal fascio delle particelle spettatori e dai jet duri che sono costituiti dalle particelle che sono sopravvissute alla procedure di ricombinazione.

Risulta molto importante scegliere bene il parametro di taglio d_{cut} non solo dal punto di vista teorico ma anche da quello sperimentale per l'analisi degli stati finali. Questo parametro determina il grado di durezza del processo d'urto in questione, può essere un valore fissato a priori uguale per tutti gli eventi oppure può variare a seconda dell'evento in modo tale che, quando la procedura iterativa raggiunge il numero di jet voluti nello stato finale allora il d_{cut} assume il valore più piccolo tra le varie coppie d_{il}, d_{iB} . In questo modo viene bloccata la procedura iterativa che fa ricombinare o scartare le particelle e si ritrova il numero di jet richiesti nello stato finale.

Come illustrato in [15] l'algoritmo k_T prevede anche una seconda fase in cui si vanno a determinare gli eventuali sottojet che si possono rivelare all'interno di ogni jet formato con la procedura precedente. Vediamo nel nostro caso qual è stata la modifica nella funzione di selezione del jet all'interno della correzione $V_q^{(1)}$ per usare l'algoritmo k_T . Per quanto riguarda la scelta dei parametri di risoluzione del jet abbiamo usato le seguenti espressioni:

$$d_{kB} = p_{tk}^2 \quad (8.5)$$

$$d_{kl} = \min(p_{tk}^2, p_{tl}^2) R_{kl}^2 \quad (8.6)$$

Nella (8.6) R_{kl}^2 è una funzione che dipende dalle differenze tra la pseudorapidità³ e tra gli angoli azimutali delle due particelle. La funzione più semplice che possiamo scegliere è data da

$$R_{kl}^2 = (\eta_k - \eta_l)^2 + (\phi_k - \phi_l)^2 \quad (8.7)$$

Per quanto riguarda invece la ricombinazione abbiamo considerato la seguente procedura: quando le particelle i, j vengono raggruppate in un'unica pseudoparticella (ij) allora il modulo dell'impulso trasverso di questa nuova particella $p_{t(ij)}$, la sua pseudorapidità $\eta_{(ij)}$, e l'angolo azimutale $\phi_{(ij)}$ sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} p_{t(ij)} &= p_{ti} + p_{tj} \\ \eta_{(ij)} &= \frac{p_{ti}\eta_i + p_{tj}\eta_j}{p_{t(ij)}} \\ \phi_{(ij)} &= \frac{p_{ti}\phi_i + p_{tj}\phi_j}{p_{t(ij)}} \end{aligned} \quad (8.8)$$

³Usare la pseudorapidità al posto della rapidità è una scelta di schema di jet, motivata essenzialmente da una maggiore facilità di calcolo.

Applicando quindi questo schema di ricombinazione ecco come si modifica l'espressione dell'algoritmo di selezione delle particelle $S_J^{(3)}$. Nel caso di jet composto dai due partoni indicati con 1,2 si deve avere:

$$\begin{aligned} S_J^{(3,k_T,comp)} &= S_J^{(2)}(\mathbf{k}, x)\Theta(d_{1B} - d_{12})\Theta(d_{2B} - d_{12}) = S_J^{(2)}(\mathbf{k}, x)\Theta(\min(d_{1B}, d_{2B}) - d_{12}) \\ &= S_J^{(2)}(\mathbf{k}, x)\Theta(\min(p_{t1}^2, p_{t2}^2) - \min(p_{t1}^2, p_{t2}^2)R_{12}^2) = S_J^{(2)}(\mathbf{k}, x)\Theta(1 - R_{12}^2) \end{aligned} \quad (8.9)$$

Allora l'espressione completa è data da:

$$\begin{aligned} S_J^{(3,k_T)}(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}', xz; x) &= S_J^{(2)}(\mathbf{k}, x)\Theta(1 - R_{12}^2) + S_J^{(2)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', xz)\Theta(R_{12}^2 - 1) + \\ &+ S_J^{(2)}(\mathbf{k}', x(1 - z))\Theta(R_{12}^2 - 1) \end{aligned} \quad (8.10)$$

Nella (8.10), come nel caso dell'algoritmo del cono, viene indicato con \mathbf{k} l'impulso trasverso del jet composto, gli altri due termini della (8.10) oltre al jet composto si riferiscono al jet costituito dal solo gluone e dal solo quark; \mathbf{k}' infatti è l'impulso trasverso del quark mentre $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ è quello del gluone. Invece $x(1 - z)$ e xz si riferiscono alle loro rispettive frazioni di impulso longitudinale.

Riportiamo ora i valori della sezione d'urto differenziale dei jet (LL+NLL) ottenuti usando l'algoritmo del cono e quello k_T nella seguente situazione cinematica:

$$\sqrt{s} = 7000 \text{ GeV}, \quad |\mathbf{k}_{J1,2}| = 35 \text{ GeV} \quad y_{J1} = 3, \quad y_{J2} = 3, \quad R_J = 0.2, \quad n = 0. \quad (8.11)$$

Algoritmo del cono

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{LL+NLL}}{dy_{J1}dy_{J2}d|\mathbf{k}_{J1}|d|\mathbf{k}_{J2}|} &= 0.231 \pm 0.007 \text{ nb/GeV}^2 \quad (GFLL) \\ &= 0.192 \pm 0.003 \text{ nb/GeV}^2 \quad (GFNLL) \\ &= 0.173 \pm 0.003 \text{ nb/GeV}^2 \quad (GFRisommata) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Algoritmo k_T

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{LL+NLL}}{dy_{J1}dy_{J2}d|\mathbf{k}_{J1}|d|\mathbf{k}_{J2}|} &= 0.202 \pm 0.008 \text{ nb/GeV}^2 \quad (GFLL) \\ &= 0.160 \pm 0.004 \text{ nb/GeV}^2 \quad (GFNLL) \\ &= 0.144 \pm 0.003 \text{ nb/GeV}^2 \quad (GFRisommata) \end{aligned} \quad (8.13)$$

I tre valori numerici per ogni algoritmo si riferiscono all'ordine perturbativo della funzione di Green (LL, NLL e risommata) mentre l'errore è relativo all'integrazione numerica. Come si nota dal confronto tra i valori vi è una certa differenza nel risultato della sezione d'urto differenziale dei jet a seconda della scelta dei due tipi di algoritmo questo perché, come abbiamo visto prima, sono due algoritmi definiti in modo diverso e, selezionando le particelle in maniera diversa danno luogo a sezioni d'urto diverse.

9 L'approssimazione di piccolo cono

Una ulteriore analisi che è stata condotta è quella riguardante l'approssimazione di piccolo cono per calcolare la correzione al vertice di jet NLL $V_{q,g}^{(1)}$. Riprendendo il lavoro presentato da Ivanov e Papa [25], abbiamo creato dei programmi per calcolare la sezione d'urto differenziale applicando l'approssimazione di piccolo cono. Questa permette di svolgere analiticamente gli integrali in $d^2\mathbf{k}$ usando la funzione di selezione del jet $S_J^{(3)}$ e quindi di evitare due integrazioni numeriche che prendono parecchio tempo, visto che creare una griglia dipendente da ν (per una certa rapidità e impulso trasverso del jet) usando l'espressione esatta di $S_J^{(3)}$ richiede un tempo dell'ordine circa di 72 ore, mentre con la suddetta approssimazione questo tempo si riduce ad una decina di minuti.

All'ordine LL si ottiene la stessa espressione usando la formula esatta per la funzione di selezione del jet $S_J^{(2)}$, infatti a tale livello non c'è la dipendenza dal raggio R del jet nelle espressioni dei vertici, essendo il jet costituito da un solo partone. Le modifiche avverranno all'ordine superiore NLL in cui si “accende” la dipendenza dalle dimensioni del jet perché si va a indagare la struttura dei jet che in questo caso possono essere generati da due partoni.

Senza entrare troppo nei dettagli tecnici del calcolo svolto in [25], qui viene riportato in cosa consiste l'approssimazione di piccolo cono e come verrà applicata nella definizione del vertice di jet. Consideriamo a livello NLL la situazione in cui ho due partoni a e b nello stato finale. Come in precedenza possiamo avere queste due situazioni, illustrate in fig. 29:

(I) Il jet è formato dal solo partone a e il b è uno “spettatore” che sta al di fuori della regione di formazione del jet.

(II) Il jet è formato da entrambi i partoni a e b .

Per come è stato condotto il calcolo dei vari contributi NLL la situazione descritta nel punto (I)

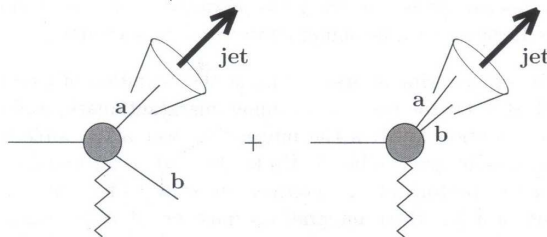


Figura 29: Nel caso di vertice di jet NLL il jet può essere formato o da un solo partone oppure da entrambi i partoni prodotti.

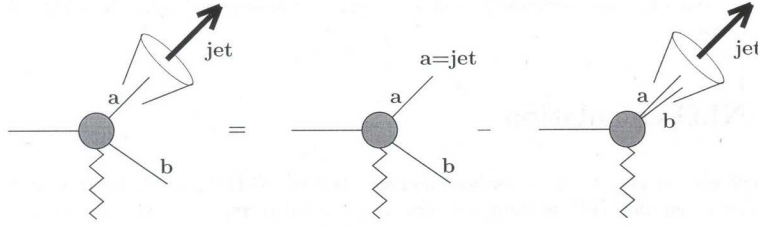


Figura 30: Figura che illustra il caso in cui il jet è formato dal partone a mentre il b è uno spettatore. Questa situazione può essere vista come la differenza tra il caso in cui il partone b ha una cinematica arbitraria e la configurazione in cui si ritrova all'interno del cono generato da a .

può essere trattata in maniera equivalente in questo modo: il partone b può avere una cinematica arbitraria purché si sottragga poi la situazione in cui tale partone ricade nella regione di apertura del cono del jet (questo fatto è riportato in modo schematico in fig. 30).

Le definizioni della rapidità relativa tra i due partoni e il loro angolo azimutale sono le stesse del caso dell'algoritmo del cono (5.31):

$$\Delta y = \frac{1}{2} \log \frac{z^2(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}{(1-z)^2 \mathbf{k}^2}, \quad \Delta \phi = \arccos \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - \mathbf{k}^2}{|\mathbf{k}| |\mathbf{q} - \mathbf{k}|} \quad (9.1)$$

Analizziamo il caso in cui solo il partone a genera il jet. Nell'eq. (9.1) \mathbf{k} è l'impulso di a e quindi del jet, $\mathbf{q} - \mathbf{k}$ è l'impulso del partone b , \mathbf{q} è l'impulso del reggeone scambiato mentre z e $(1-z)$ sono le rispettive frazioni di impulso longitudinale dei due partoni a e b . Si introduce il vettore Δ in modo tale che l'impulso \mathbf{q} del reggeone assuma la seguente forma:

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{k}}{z} + \Delta \quad (9.2)$$

Il vettore Δ è una sorta di indicatore di quanto sono paralleli o collineari i due vettori \mathbf{k} e $\mathbf{q} - \mathbf{k}$. Nel caso in cui $\Delta \rightarrow 0$ i due vettori risultano paralleli e in tale limite si ha

$$\Delta y \approx \frac{z}{1-z} \frac{\mathbf{k} \cdot \Delta}{\mathbf{k}^2}, \quad \Delta \phi \approx \frac{z^2}{(1-z)^2} \left(\frac{\Delta^2}{\mathbf{k}^2} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \Delta)^2}{\mathbf{k}^4} \right) \quad (9.3)$$

Quindi nell'approssimazione di piccolo cono ($\Delta \rightarrow 0$) la condizione di appartenenza al jet per il partone spettatore b è

$$\Delta \phi^2 + \Delta y^2 = \frac{z^2 \Delta^2}{(1-z)^2 \mathbf{k}^2} \leq R^2 \quad (9.4)$$

ossia

$$|\Delta| \leq \frac{(1-z)}{z} |\mathbf{k}| R \quad (9.5)$$

Invece nella situazione (II) l'impulso del jet è dato dalla somma degli impulsi dei due partoni $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ e la condizione di jet composto risulta essere

$$\Delta y^2 + \Delta \phi^2 = \frac{\Delta^2}{(1-z)^2 \mathbf{k}^2} \leq R^2 \quad (9.6)$$

che in termini di Δ si traduce nella condizione

$$|\Delta| \leq (1-z)|\mathbf{k}|R \quad (9.7)$$

Questa definizione per la configurazione (II) differisce rispetto a quella usata in [25] per il fatto che nel nostro caso, (in accordo con la definizione (8.9) dell'algoritmo k_i), due particelle vengono raggruppate se la loro distanza reciproca è minore di R mentre in [25] viene richiesto che la distanza tra ciascun partone e l'asse principale del jet sia minore di R

$$(y_i - y_J)^2 + (\phi_i - \phi_J)^2 \leq R^2 \quad (i = 1, 2) \quad \Leftrightarrow \quad |\Delta| \leq \frac{\min(z, 1-z)}{z} |\mathbf{k}|R \quad (9.8)$$

Ma così la distanza tra i due partoni può essere superiore a R e fino a $2R$ possono venire raggruppati, cambiando notevolmente i risultati dei due algoritmi nella procedura di raggruppamento dei partoni, come mostrato in fig. 31.

Ad ogni modo, usando la condizione (9.8), Ivanov e Papa [25] sono riusciti a svolgere analiticamente tutte le integrazioni coinvolte nel vertice di jet (eccetto, com'è ovvio, quella in x che coinvolge le PDF), in modo che i coefficienti $C_{m,\nu}$ dell'articolo [10] assumono la forma

$$C_{m,\nu}(|\mathbf{k}_J|, x_J) = \int d\phi_J \alpha_s \sqrt{\frac{2C_F}{C_A}} \frac{x_J}{\pi \sqrt{2} |\mathbf{k}_J|} (I_q^{(pc)} + I_g^{(pc)}) \quad (9.9)$$

dove $I_q^{(pc)}$ è l'espressione del vertice di jet (per quark iniziale) in approssimazione di piccolo cono:

$$\begin{aligned} I_q^{(pc)} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \mathbf{k}^{2\gamma} e^{in\phi} \int_{x_J}^1 \frac{dz}{z} \sum_{a=q,q} f_a\left(\frac{x_J}{z}\right) \left\{ \left[P_{qq}(z) + \frac{C_A}{C_F} P_{gq}(z) \right] \log \frac{\mathbf{k}^2}{\mu_F^2} - \right. \\ &- 2z^{-2\gamma} \log(R) \left[P_{qq}(z) + P_{gq}(z) \right] - \frac{\beta_0}{2} \log \frac{\mathbf{k}^2}{\mu_R^2} \delta(1-z) + \\ &+ C_A \delta(1-z) \left[\chi(n, \gamma) \log \frac{s_0}{\mathbf{k}^2} + \frac{85}{18} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\psi'(1+\gamma + \frac{n}{2}) - \psi'(\frac{n}{2} - \gamma) - \chi^2(n, \gamma) \right) \right] + \\ &+ (1+z^2) \left[C_A \left(\frac{(1+z^{-2\gamma}) \chi(n, \gamma)}{2(1-z)_+} - z^{-2\gamma} \left(\frac{\log(1-z)}{1-z} \right)_+ \right) + \left(C_F - \frac{C_A}{2} \right) \right. \\ &\times \left. \left(\frac{(1-z)}{z^2} I_2 - \frac{2 \log z}{1-z} + 2 \left(\frac{\log(1-z)}{1-z} \right)_+ \right) \right] + \delta(1-z) \left(C_F (3 \log 2 - \frac{\pi^2}{3} - \frac{9}{2}) - \frac{5n_f}{9} \right) + \\ &+ C_A z + C_F (1-z) + C_F \delta(1-z) \left(3 - \frac{\pi^2}{3} - 3 \log 2 \right) + \frac{1 + (1-z)^2}{z} \left[C_A \frac{(1-z)}{z} I_1 + \right. \\ &\left. + 2C_A \log \frac{1-z}{z} + C_F z^{-2\gamma} (\chi(n, \gamma) - 2 \log(1-z)) \right] \left. \right\} \quad (9.10) \end{aligned}$$

In appendice (A.3) viene riportata l'analoga espressione per il vertice di jet del gluone $I_g^{(pc)}$ in approssimazione di piccolo cono.⁴ Nella precedente espressione (9.10) le funzioni I_1, I_2 sono costruite mediante la funzione speciale ipergeometrica, $\chi(n, \gamma)$ è l'autovalore LL BFKL, $\gamma = i\nu - 1/2$ e le $P_{qq}(z), P_{gq}(z)$ sono le funzioni di splitting DGLAP. Inoltre il simbolo $+$ a lato di alcune parentesi significa che per le quantità racchiuse da tali parentesi si deve adottare la prescrizione $+$ per ottenere delle quantità finite, tale regola deve essere applicata così:

$$\int_x^1 (F(z))_+ \phi(z) dz = \int_x^1 dz F(z) \{\phi(z) - \phi(1)\} - \int_0^x dz F(z) \phi(1) \quad (9.11)$$

Osservando l'eq. (9.10) si può dire che la dipendenza da R è data da un termine del tipo $\log R(P_{qq}(z) + P_{gq}(z))$; come mostrato in [26] la sezione d'urto può essere espressa come uno sviluppo in serie nel parametro R attorno a $R = 0$ del tipo $A \log R + B + O(R^2)$, per cui in [25] sono riusciti a determinare in maniera analitica i coefficienti A e B di tale sviluppo.

Per calcolare il vertice di jet in approssimazione di piccolo cono per l'algoritmo k_t è sufficiente valutare la correzione alla configurazione di jet composto, semplicemente imponendo la condizione (9.5) al posto della (9.8), osservando inoltre che in questa configurazione gli autori di [25] usano la variabile riscalata $\Delta' = -z\Delta$.

Prendendo in esame il termine con il quark nello stato iniziale, dall'eq. (50) di ref. [25], l'integrazione sull'impulso trasverso si riduce a

$$\int^{\Delta'_{MAX}} \frac{d^{2+2\epsilon} \Delta'}{\pi^{1+\epsilon} \Delta'^2} \frac{1}{\Delta'^2} = \frac{1}{\epsilon \Gamma(1+\epsilon)} (\Delta'_{MAX})^\epsilon = \frac{(\min(z, 1-z) |\mathbf{k}| R)^{2\epsilon}}{\epsilon \Gamma(1+\epsilon)} \quad (9.12)$$

Per implementare correttamente l'algoritmo k_t , occorre sostituire il Δ_{MAX} dell'eq. (9.8) con quello della (9.7), che si può fare con la semplice sostituzione $\min(z, 1-z) \rightarrow z(1-z)$. Operando questa sostituzione nell'eq. (51) di ref. [25], l'integrazione sulla frazione d'impulso z diventa

$$\int_0^1 dz [z(1-z)]^{2\epsilon} \frac{1 + (1-z)^2 + \epsilon z^2}{z} = \frac{1}{\epsilon} - \frac{3}{2} + \left(\frac{13}{2} - \frac{2\pi^2}{3} \right) \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (9.13)$$

che differisce ad $O(\epsilon)$ dall'analogo risultato in [25] per la quantità $(3 - \frac{\pi^2}{3} - 3 \log 2)\epsilon$. Pertanto, all'espressione del vertice di jet riportata in eq. (9.10) è stato aggiunto, rispetto all'espressione riportata in [25], entro le parentesi graffe il termine correttivo

$$C_F \delta(1-z) \left(3 - \frac{\pi^2}{3} - 3 \log 2 \right) \quad (9.14)$$

Nel caso del gluone si procede allo stesso modo, e si ottiene un altro termine correttivo. In pratica, rispetto al calcolo originale di [25], all'interno dell'eq. (A.3) abbiamo aggiunto

⁴L'espressione (A.3) differisce da quella ricavata in [25], poiché include già le correzioni necessarie per corrispondere all'algoritmo k_t da noi calcolate.

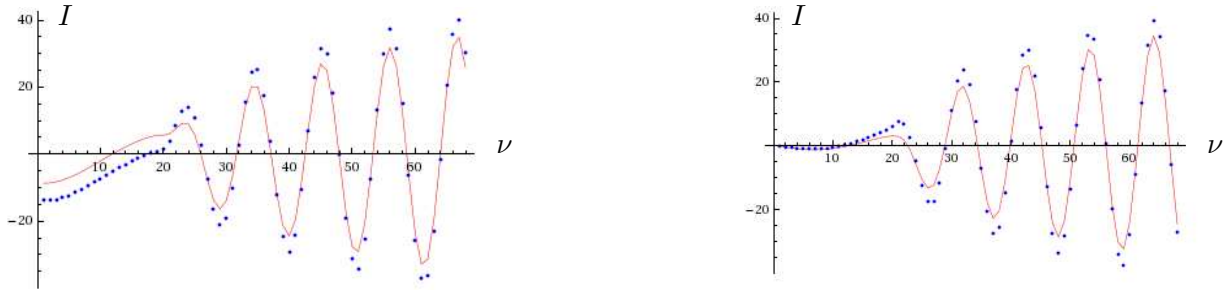


Figura 31: Confronto tra le griglie dei valori di I in funzione di ν ottenute con l'approssimazione di piccolo cono (curve in viola) e quelle con l'algoritmo k_T (punti in blu) per la parte reale (a sinistra) e per quella virtuale (a destra) nel caso del quark. Qui $R = 0.2$.

l'espressione

$$\delta(1-z) \left[-\beta_0 \log 2 + C_A \left(\frac{131}{36} - \frac{\pi^2}{3} \right) - n_f T_R \frac{23}{18} \right] \quad (9.15)$$

Dopo aver determinato le espressioni corrette per i vertici con l'algoritmo k_t in approssimazione di piccolo cono, abbiamo creato dei programmi per valutare numericamente i coefficienti $I_q^{(pc)}$ e $I_g^{(pc)}$. Per prima cosa abbiamo effettuato un confronto tra la griglia esatta ottenuta con i programmi originali [10] che implementano l'algoritmo k_t esattamente e la griglia in approssimazione di piccolo cono.

Verranno mostrati i risultati del confronto nel caso del quark sia per la parte reale che quella immaginaria dei punti delle due griglie ricavate con i due approcci. Inizialmente il confronto è stato effettuato usando l'espressione riportata in [25] e come si può osservare dalla fig. 31 vi è una sostanziale differenza tra i punti ottenuti con l'algoritmo k_t esatto rispetto a quelli ottenuti con l'approssimazione di piccolo cono di Ivanov e Papa. Anche nel caso del gluone si ha una notevole discrepanza. I punti di queste figure sono stati ottenuti con un valore del raggio pari a 0.2 e anche variando tale raggio e lo spin conforme n rimane sempre una grande differenza tra i due andamenti. Usando invece la definizione (9.6) per la configurazione (II) di jet composto si ha un accordo tra i due approcci, sia nel caso del gluone che in quello del quark e per entrambi i casi sia per la parte reale che per quella immaginaria come si può vedere dai grafici riportati nelle figg. 32-33. L'accuratezza tra i due andamenti è dell'ordine dello 0.5% per un raggio di 0.2 mentre di un 2% per un raggio di 0.5. Questo risultato ci permette di usare nei nostri programmi l'algoritmo di piccolo cono (modificato rispetto a [25]) e riuscire a costruire le griglie di punti in maniera più veloce e quindi aumentare il numero di campionamenti nella rapidità e nell'impulso trasverso del jet.

Nel prossimo capitolo useremo questi vertici di jet approssimati per calcolare la sezione d'urto

BFKL e, conseguentemente, la sezione d'urto migliorata tramite la procedura di matching.

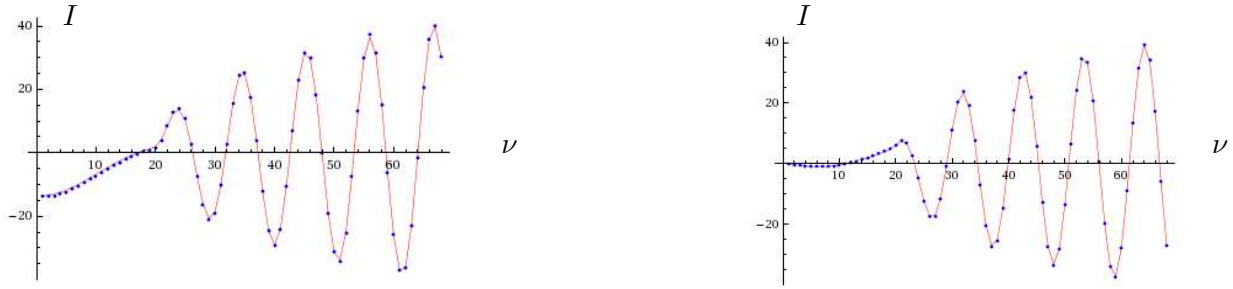


Figura 32: Andamento delle due griglie di punti di I in funzione di ν dopo la correzione dell'espressione del piccolo cono per il passaggio allo schema k_t con $R = 0.2$. Sono riportate separatamente la parte reale (a sinistra) e quella immaginaria (a destra) relativa al quark. I punti in blu sono ottenuti con l'algoritmo k_t esatto mentre la curva viola è stata ottenuta unendo i punti in approssimazione di piccolo cono.

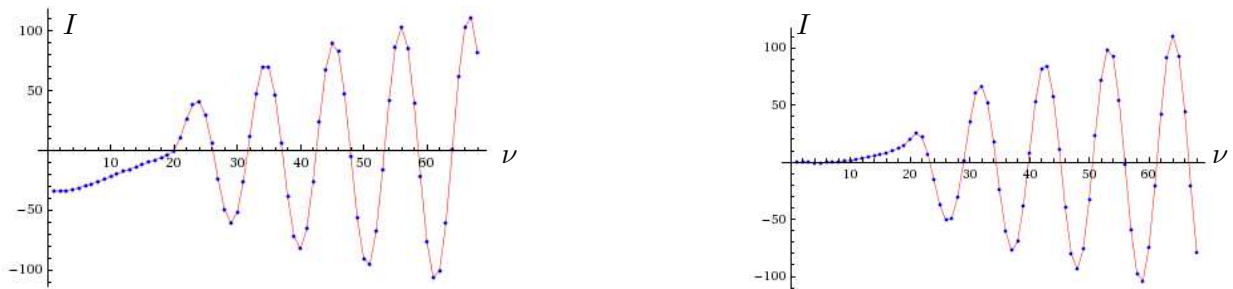


Figura 33: Grafici analoghi ai precedenti in cui si mostra l'andamento delle due griglie di punti di I in funzione di ν dopo la correzione dell'espressione del piccolo cono per il passaggio allo schema k_t con $R = 0.2$. A sinistra la parte reale dei contributi da stato iniziale gluonico, e a destra quella immaginaria. I colori sono come nella figura precedente.

10 Risultati del matching

10.1 Strategia di calcolo

Possiamo adesso entrare più nel dettaglio riguardo la struttura dei programmi che hanno permesso di ottenere i dati per la sezione d'urto dei jet MN e il successivo matching per lo studio della decorrelazione dell'angolo azimutale tra i jet. I programmi per la sezione d'urto di alta energia con la dinamica BFKL sono stati costruiti con il software Mathematica e sono suddivisi in vari livelli. Illustriamo innanzi tutto lo schema dei livelli dei programmi creati per l'analisi della decorrelazione dell'angolo azimutale dei jet di Mueller-Navelet che hanno permesso di ottenere, ad esempio, il grafico di fig. 23 del capitolo 6; in seguito vedremo cosa abbiamo modificato nella struttura dei programmi per creare i dati per la nostra analisi.

Con riferimento alla fig. 34, nel primo di questi livelli c'è un programma che crea un file con i dati delle funzioni di distribuzione partonica (PDF) estraendoli dal catalogo MSTW08. Un altro programma di primo livello definisce gli integrandi del vertice di jet NLL che vengono suddivisi in vari blocchi e si può scegliere la funzione di selezione del jet del cono o k_T . Vengono svolti analiticamente gli integrali con le delta di Dirac mentre quelli che dipendono dall'impulso trasverso verranno trattati nei livelli successivi. Un altro programma di primo livello definisce la funzione di Green BFKL con la possibilità di inserire il kernel BFKL risommato con il miglioramento collineare (questo aspetto non riguarda la ricerca svolta ma è una parte del programma che serve per ottenere la curva analizzata nel capitolo 6 sugli studi precedenti dei MN jet [10]).

Nel secondo livello vi è un programma che seleziona i punti della griglia in ν che serviranno

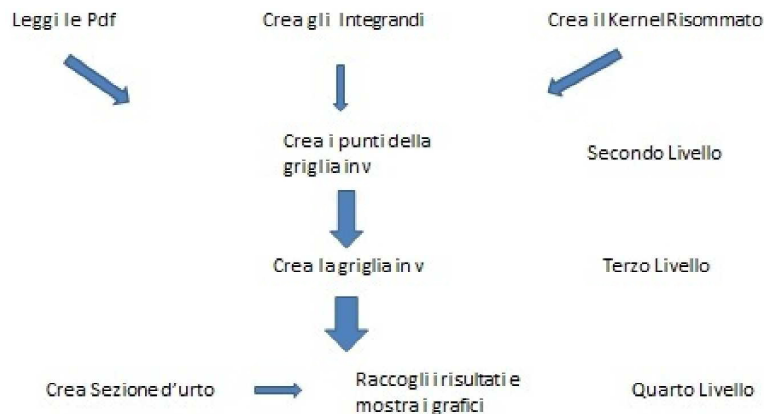


Figura 34: Schema dei vari livelli dei programmi usati in [10] per ottenere la sezione d'urto σ_{BFKL} .

per effettuare le integrazioni numeriche, la scelta dei punti avviene utilizzando le informazioni del programma che crea il kernel risommato, infatti i punti verranno scelti dove la funzione di Green assume i valori più grandi, ovvero i punti in ν saranno più densi laddove la funzione di Green sarà più grande e meno fitti dove invece assumerà i valori più piccoli, tutto questo per avere un campionamento più fitto dove il contributo con gli integrandi del vertice di jet varrà di più. Alla fine di questo livello quindi si hanno a disposizione i valori di ν (68 punti) per valutare gli integrali del vertice di jet.

Nel terzo livello si sfruttano questi punti per effettuare le integrazioni numeriche dei vari blocchi di $V_q^{(NLL)}, V_g^{(NLL)}$ nello spazio degli impulsi trasversi. Questa è la parte che impiega più tempo rispetto a tutte le altre dell'ordine delle 72 ore per costruire una sola griglia per un dato valore di rapidità e impulso trasverso del jet. È per risparmiare tempo che è stata presa in considerazione l'approssimazione modificata di piccolo cono che permette di rendere più veloce l'integrazione numerica perché usa una espressione più semplice rispetto all'algoritmo esatto del cono come abbiamo visto nel capitolo precedente. Ma allo stesso tempo consente di ottenere dei risultati che si avvicinano al caso esatto (studiato in [11]) con uno scarto dell'ordine del 2%.

A questo punto il quarto livello è il vero programma che fornisce i dati della sezione d'urto mettendo assieme i risultati dei livelli precedenti; a questo livello si effettua l'integrazione in $d\nu$ dei coefficienti $C_{n,\nu}$ in convoluzione con la funzione di Green BFKL, qui si può scegliere sia l'ordine di tale funzione che lo spin conforme n (che nel nostro caso può andare da 0 a 2). Infine si costruisce la decorrelazione dell'angolo azimutale $\langle \cos(m\phi) \rangle = \frac{C_m}{C_0}$ valutando il coefficiente C_m così definito:

$$C_m = (4 - 3\delta_{m,0}) \int d\nu C_{m,\nu}(|\mathbf{k}_{J,1}|) C_{m,\nu}^*(|\mathbf{K}_{J,2}|, x_{J,2}) \left(\frac{\hat{s}}{s_0}\right)^{\omega(m,\nu)}, \quad (10.1)$$

con

$$C_{m,\nu}(|\mathbf{k}_J|, x_J) = \int d\phi_J d^2\mathbf{k} dx f(x) V(\mathbf{k}, x_J) E_{m,\nu}(\mathbf{k}) \cos(m\phi_J). \quad (10.2)$$

Nella (10.2) $E_{m,\nu}(\mathbf{k})$ sono le autofunzioni LL BFKL (5.12).

Alla fine si raggruppano i vari contributi per tutte le rapidità dei due jet e si ottengono i grafici del rapporto tra C_1/C_0 e C_2/C_0 in funzione della rapidità relativa $Y = |y_1| + |y_2|$ dei due jet. Nella fig. 23 del capitolo 6 è stato riportato l'andamento di C_1/C_0 .

Nello studio precedente sui jet [10] i dati ottenuti rappresentano la sezione d'urto differenziale nell'impulso trasverso e nella rapidità dei due jet. Come detto in precedenza, il programma per costruire la griglia di punti in ν impiega molto tempo perché sia nell'espressione della funzione di selezione $S_J^{(3)}$ dell'algoritmo del cono che in quello k_T ci sono delle funzioni complicate da

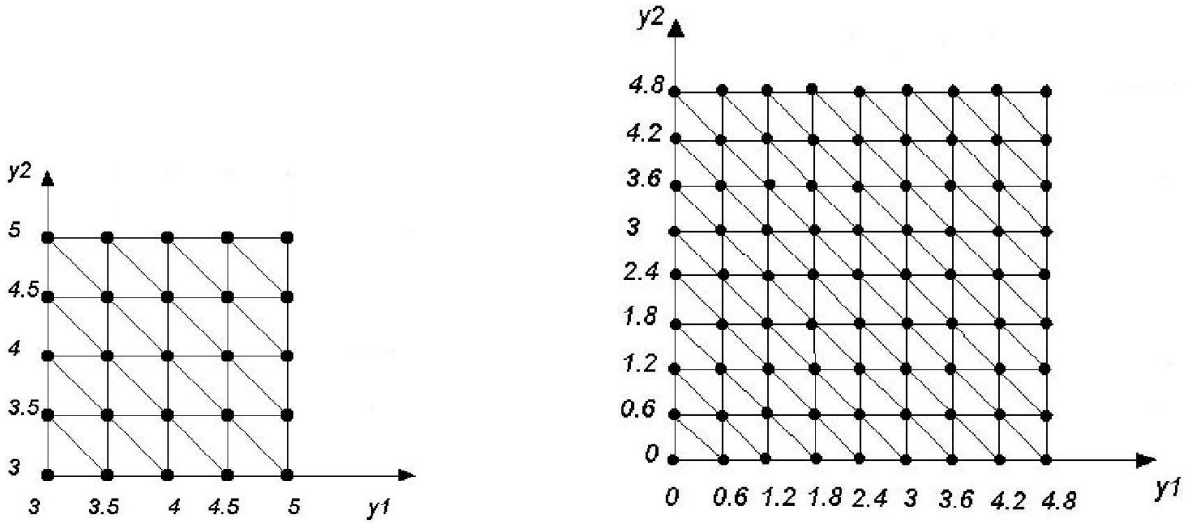


Figura 35: Griglie di punti nel piano $(|y_1|, |y_2|)$ a disposizione per il calcolo della sezione d'urto. A sinistra: valori utilizzati dall'analisi a 14 TeV [10]; a destra: valori utilizzati nell'analisi a 7 TeV di questa tesi. Le linee in diagonale collegano i punti corrispondenti al medesimo valore della rapidità relativa Y .

integrare numericamente. Inoltre il programma di terzo livello dello schema di fig. 34 deve essere ripetuto per ogni valore che viene scelto di rapidità e impulso trasverso del jet.

Con l'algoritmo modificato di piccolo con le integrazioni in $d\mathbf{k}$ vengono fatte in maniera analitica e il programma risulta notevolmente più veloce perché nel terzo livello deve effettuare una sola integrazione numerica nella frazione di impulso longitudinale x . Seguendo gli studi condotti da [11] abbiamo deciso di integrare la sezione d'urto differenziale anche sulle energie trasverse dei due jet e ottenere una $\frac{d\sigma}{dY}$ nella rapidità relativa dei due jet Y definita come:

$$\frac{d\sigma}{dY} = \int dy_1 dy_2 \delta(Y - (y_1 + y_2)) \frac{d\sigma(y_1, y_2)}{dy_1 dy_2} \approx \sum_{y_{1,i}} \Delta y \sigma(y_{1,i}, Y - y_{1,i}) \quad (10.3)$$

I termini su cui varia l'indice i della sommatoria presente nella (10.3) sono i vari valori della rapidità del singolo jet e il Δy è la larghezza dell'intervallo tra due rapidità. La velocità del nuovo algoritmo ha permesso di creare una griglia di punti più fitta e quindi di includere un maggior numero di punti nella sommatoria dell'espressione (10.3). Osservando la fig. 35 si può vedere come è aumentato il numero di punti a disposizione per avere la sezione d'urto differenziale dei due jet nelle due rapidità, dopo le modifiche che abbiamo apportato sui programmi precedenti. Nella fig. 36 viene riportato lo schema dei programmi dopo le nostre modifiche.

Nei nostri nuovi programmi le integrazioni in $d|\mathbf{k}_J|$ sono state effettuate numericamente da un valore di 35 GeV fino al valore di 60 GeV. Per quanto riguarda le singole rapidità $|y_i|$ le



Figura 36: Schema dei vari livelli dei programmi usati per ottenere la sezione d'urto σ_{BFKL} dopo le nostre modifiche.

abbiamo prese nell'intervallo $[0, 4.8]$ con passi di 0.6 .⁵ L'analisi condotta in [10] era stata fatta considerando due valori di energia trasversa dei jet di 35 e 50 GeV e come rapidità l'intervallo $y_i = [3, 5]$ a passi di 0.5.

Nel capitolo 6 abbiamo parlato della strategia per effettuare il matching ed è stato spiegato come sono state ottenute le espressioni per trovare i termini da sottrarre alla fusione tra la σ_{BFKL} e la σ_{NLO} ordine $O(\alpha_s^3)$ per evitare di contare due volte i contributi comuni alle due sezioni d'urto. Questi dati da sottrarre sono stati ottenuti con programmi realizzati sempre in Mathematica, in seguito sia per motivi di controllo che di maggiore velocità di funzionamento, sono stati ottenuti anche con programmi in linguaggio C++. Per quanto riguarda invece la σ_{NLO} ($O(\alpha_s^3)$), è stata considerata l'espressione riportata nell'articolo [5] ed è stato utilizzato un programma in C++ (NLOJET++) già presente in letteratura [17] al quale sono state fatte delle modifiche per adattare le PDF usate nel calcolo della sezione d'urto BFKL. Un aspetto importante è stato quello di verificare il limite di alta energia ($s \rightarrow \infty$) nell'espressione esatta di [5] e ritrovare l'espressione all'ordine $O(\alpha_s^3)$ dello sviluppo in serie di potenze in α_s dell'espressione della sezione d'urto di alta energia ottenuta con il formalismo BFKL.

⁵Le ultime analisi che abbiamo condotto sono state effettuate con un intervallo di rapidità Δy uguale a 0.2.

10.2 Risultati numerici BFKL con piccolo cono

Nei grafici che presentiamo per illustrare i risultati numerici che abbiamo ottenuto, la rapidità relativa Y varia da 4 fino al massimo valore sperimentale accessibile di 9.4. In questa prima parte mostreremo le predizioni alla sezione d'urto e alla decorrelazione azimutale limitatamente al calcolo risommato con l'approccio BFKL e con l'algoritmo k_t nell'approssimazione di piccolo cono. Per ogni grafico, tranne quelli di fig. 39.b e fig. 40, vengono riportati tre diverse curve che si riferiscono alla scelta dell'ordine della funzione di Green BFKL: blu $\rightarrow LL$, verde chiaro $\rightarrow NLL$ e viola $\rightarrow risommata$. La scelta di tale ordine va a modificare la funzione di Green rappresentata nell'espressione (10.1) dal termine $(\frac{\hat{s}}{s_0})^\omega$ tramite la funzione $\omega(n, \nu)$:

$$\begin{aligned}\omega &= \alpha_s \chi_0(n, \gamma) && \text{caso } LL \\ &= \alpha_s \chi_1(n, \gamma) && \text{caso } NLL \\ &= \omega_{risommata} = \alpha_s \chi_{eff} = \alpha_s \chi(n, \gamma, \omega) && \text{caso } risommato\end{aligned}\quad (10.4)$$

Nella precedente espressione χ_0, χ_1 sono gli autovalori BFKL LL e NLL (riportati in appendice), invece $\chi(n, \gamma, \omega)$ è l'autovalore che deriva dal miglioramento della funzione di Green dovuto allo spostamento dei poli $\gamma \rightarrow \gamma + \frac{\omega}{2}$ che si traduce in una dipendenza da ω nell'espressione dell'autovalore χ_{eff} come mostrato in [27].

Nelle figg. 37-38 vengono riportati i grafici della sezione d'urto dei jet ottenuti con la dinamica BFKL in funzione della rapidità relativa Y sia nel caso dei vertici di jet LL che per quelli NLL. Da questi due grafici possiamo valutare l'entità delle correzioni NLL. Confrontando la curva verde con la curva blu di fig. 37 vediamo che l'effetto delle correzioni alla funzione di Green è importante. Confrontando invece le curve di fig. 37 con quelle di fig. 38 possiamo apprezzare la diminuzione della sezione d'urto dovuta alle correzioni ai vertici di jet. Questi effetti, già noti dall'analisi in ref. [10], ci fanno capire che lo sviluppo BFKL probabilmente non ha ancora raggiunto la convergenza necessaria per raggiungere la precisione dei risultati sperimentali che è dell'ordine di qualche punto percentuale. Dal momento che i calcoli ad ordine finito riescono a raggiungere tale precisione (anche se in regioni cinematiche non così estreme come nella situazione che stiamo considerando), abbiamo forti ragioni per credere che associare all'approccio BFKL i calcoli ad ordine finito mediante il "matching" possa portare ad un netto miglioramento delle predizioni teoriche.

In fig. 39 è riportato l'andamento dei due rapporti C_2/C_0 e C_2/C_1 , in funzione di Y , allo scopo di visualizzare la decorrelazione dell'angolo azimutale dei jet. La fig. 39.a mostra come il rapporto C_2/C_0 cali all'aumentare della rapidità relativa in accordo con la dinamica BFKL,

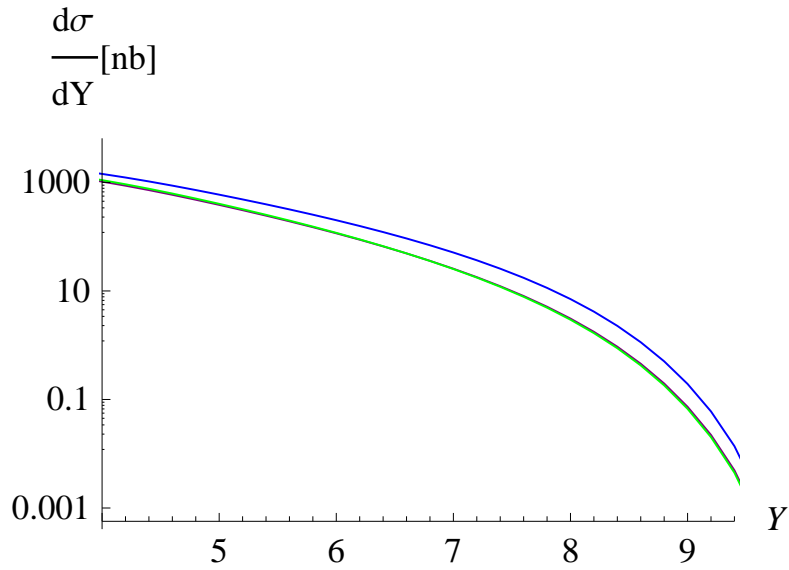


Figura 37: Sezione d'urto in funzione della rapidità relativa Y ottenuta con l'approccio BFKL usando vertici di jet LL, con l'algoritmo del piccolo cono (scelta $n = 0$). La curva blu si riferisce alla funzione di Green LL, la verde a quella NLL. È presente anche la curva viola relativa al miglioramento collineare della funzione di Green, esattamente sovrapposta alla curva verde.

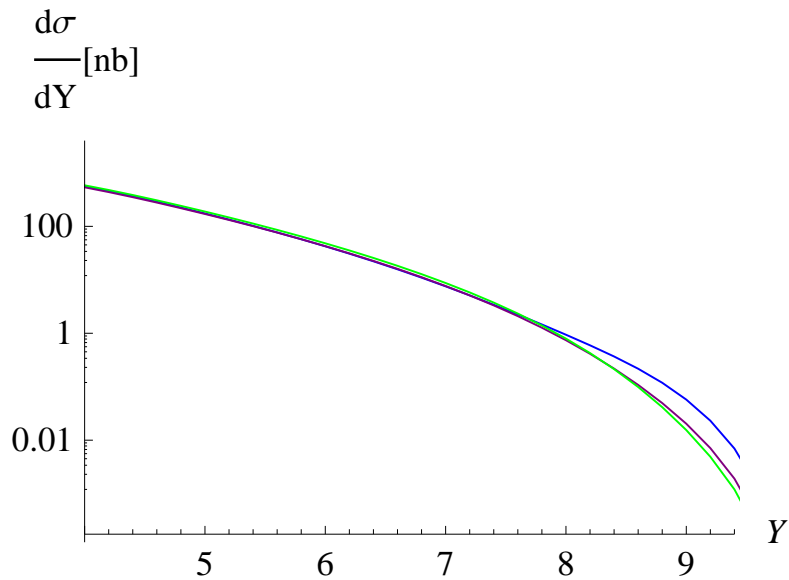


Figura 38: Sezione d'urto in funzione di Y ottenuta con l'approccio BFKL usando vertici di jet NLL, con l'algoritmo del piccolo cono (scelta $n = 0$). La curva blu si riferisce alla funzione di Green LL, la verde a quella NLL, quella viola al caso della funzione di Green risommata.

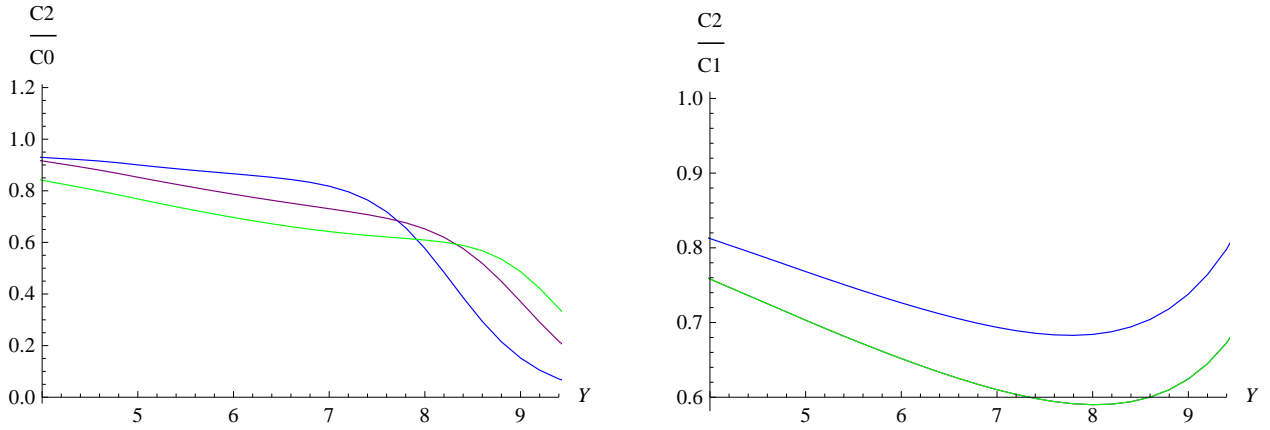


Figura 39: Rapporto C_2/C_0 (a sinistra) e C_2/C_1 (a destra) in funzione di Y ottenuti con l’approccio BFKL usando come algoritmo il piccolo cono. La curva blu si riferisce alla funzione di Green LL, la verde a quella NLL, quella viola al caso della funzione di Green risommata; (nel grafico a destra si vedono solo due curve perché quella risommata non viene calcolata nel caso di $n > 1$).

infatti aumentando la differenza tra le rapidità dei due jet si deve avere una maggiore probabilità di emissione di partoni (specialmente gluoni) tali da produrre una maggiore decorrelazione dell’angolo azimutale dei jet a grandi Y . Anche per la fig. 39.b si vede un andamento simile, almeno fino a quando la differenza di rapidità non diventa così elevata ($Y > 8$) che il poco spazio delle fasi disponibile limita l’emissione gluonica e provoca di conseguenza la risalita delle due curve. Notiamo che in questa figura si vedono solo due curve perché per $n > 1$ la procedura di miglioramento collineare per la funzione di Green non è stata ancora implementata.

Abbiamo verificato che gli andamenti delle sezioni d’urto nella fig. 39 sono in accordo con gli studi effettuati in [11] all’energia di 7 TeV, entro una tolleranza del 2%. Questo conferma la bontà dell’approssimazione di piccolo cono che abbiamo adottato in questa fase dell’analisi.

Infine in fig. 40 mostriamo un grafico che confronta i nostri calcoli con i dati sperimentali recentemente pubblicati dalla collaborazione CMS [12] di LHC, relativi alla cinematica di $\sqrt{s} = 7$ TeV, $k_{J,MIN} = 35$ GeV e $4 < Y < 9.4$. Dal momento che l’analisi

sperimentale non ha presentato i dati delle sezioni d’urto assolute ma solamente distribuzioni dell’angolo di decorrelazione tra i jet e alcuni rapporti tra i coefficienti C_m , ci limitiamo ad un confronto con uno di tali rapporti, e precisamente C_2/C_1 . Come si vede dalla fig. 40 vi è un ottimo accordo tra la curva teorica ed i dati sperimentali. In realtà, per quanto detto in precedenza, non ci illudiamo che BFKL in approssimazione di piccolo cono fornisca una buona descrizione di qualsiasi osservabile ottenibile dai jet di Mueller-Navelet, tanto più che ancora

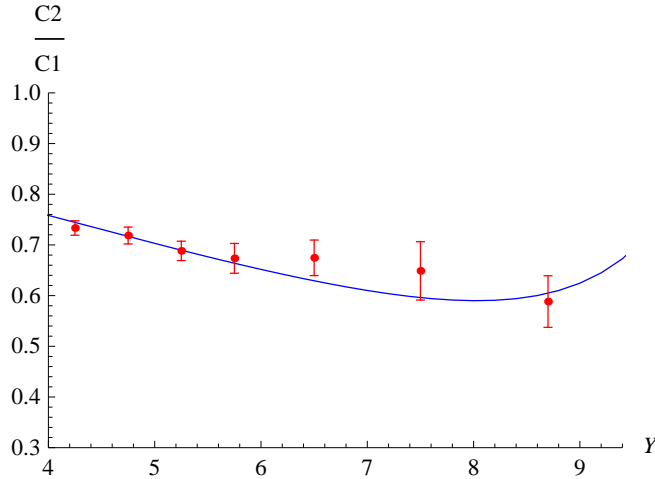


Figura 40: Confronto tra il rapporto tra i coefficienti C_2/C_1 ricavati con l’approccio BFKL risommato (curva blu) ed i dati sperimentali di CMS (punti rossi); l’errore su tali dati sperimentali va da un valore dell’ordine dell’1% a piccoli Y fino a valori del 4 – 5% per Y più grandi.

non abbiamo stimato l’errore teorico dei nostri valori centrali. Tuttavia, andando a considerare i rapporti di coefficienti, può ben essere che parte degli errori sistematici commessi nella stima teorica si cancellino tra numeratore e denominatore e che quindi cominci già ad emergere la dinamica BFKL da questo tipo di dati.

10.3 Risultati del “matching”

Per costruire il matching si procede inserendo oltre al contributo risommato BFKL i risultati della sezione d’urto perturbativa $O(\alpha_s^3)$ e da questa somma si sottrae la correzione derivante dallo sviluppo perturbativo allo stesso ordine della sezione d’urto BFKL risommata [13]. Nelle figg. 41, 42, 43 vengono mostrati i risultati del nostro matching per i coefficienti C_0 , C_1 e C_2 . Per ogni grafico vengono riportati quattro istogrammi diversi: il colore verde si riferisce al contributo puramente BFKL, il rosso indica il contributo perturbativo, quello viola la sottrazione mentre quello blu riguarda il matching. Dall’analisi di questo grafico possiamo fare le seguenti considerazioni: la procedura del matching formalmente va bene nel senso che siamo riusciti a implementare tale procedura; l’abbassamento dell’istogramma blu rispetto a quello verde ci indica che l’inserimento dei termini perturbativi trascurati da BFKL provoca una contenuta ma significativa variazione della predizione teorica a piccoli Y .

Tuttavia, come era stato anticipato nell’introduzione, viene riscontrata una problematica: per una scelta di tagli simmetrici nell’integrazione sugli impulsi trasversi dei jet (configurazione

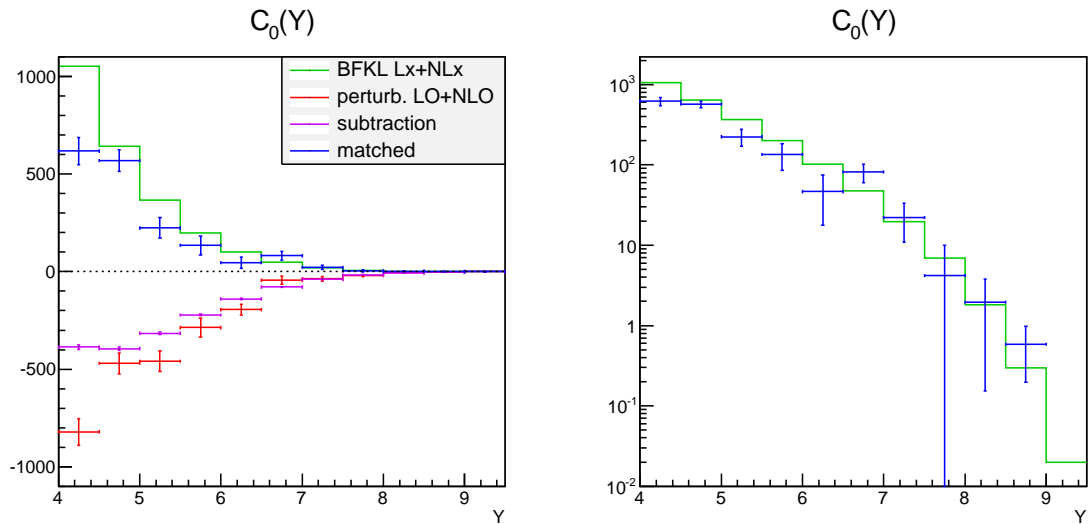


Figura 41: Confronto tra i vari andamenti del coefficiente C_0 con gli errori relativi all'integrazione numerica riportati nell'istogramma blu del matching. In verde vi è il contributo puramente BFKL, in rosso quello perturbativo mentre in viola la sottrazione.

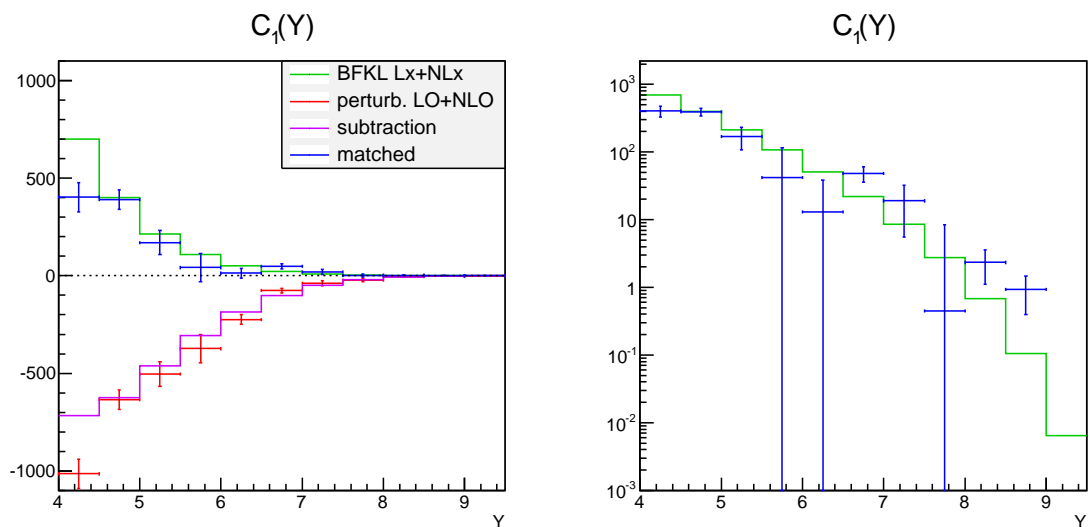


Figura 42: Confronto tra i vari andamenti del coefficiente C_1 con gli errori relativi all'integrazione numerica riportati nell'istogramma del matching in blu. Per i colori degli altri istogrammi stesse notazioni della fig. 41.

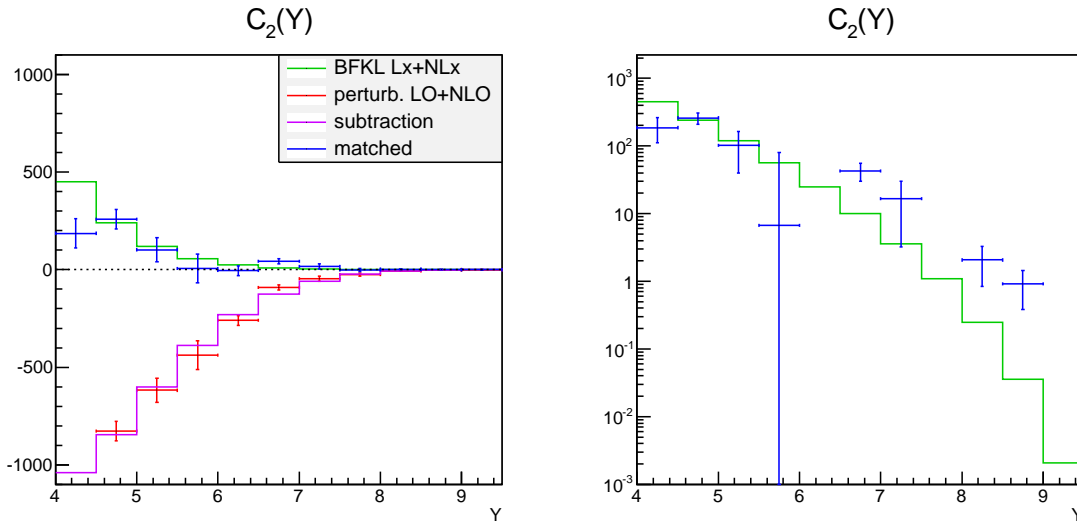


Figura 43: Confronto tra i vari andamenti del coefficiente C_2 con gli errori relativi all'integrazione numerica riportati nell'istogramma del matching in blu. Per i colori degli altri istogrammi stesse notazioni della fig. 41.

adottata nell'analisi di CMS [12]), il calcolo perturbativo converge lentamente a causa di una certa instabilità nella convergenza del calcolo numerico [28]. Ciò spiega il fatto che i risultati rappresentati dalla curva rossa abbiano errori così grandi. Questa cosa si riflette maggiormente nei grafici sui rapporti tra tali coefficienti per cui non è ancora possibile fare una predizione precisa nel caso di energia minima dei due jet uguale tra loro a causa del limitato tempo macchina impiegato fino ad ora.

Un ulteriore commento da fare sui grafici da noi ottenuti riguarda la curva perturbativa e quella della sottrazione che risultano negative. Questo risultato deriva dal fatto che avendo troncato lo sviluppo in serie ad ordine $O(\alpha_s^3)$ della sezione d'urto partonica, i termini di interferenza possono essere (e sono) negativi, ed in valore assoluto risultano più grandi del termine $O(\alpha_s^2)$ che invece, come deve essere, risulta positivo.

Ad ogni modo, la modifica alla sezione d'urto BFKL corrisponde alla differenza tra la sezione d'urto perturbativa e quella di sottrazione. Questa differenza è abbastanza limitata ed in ogni caso decisamente minore (in valore assoluto) rispetto al risultato BFKL. Pertanto la procedura di matching modifica la predizione BFKL senza stravolgerla, apportando piccole modifiche a grandi Y (dove l'approssimazione di alta energia funziona meglio), e modifiche più significative a Y moderati. Stime più precise si otterranno facendo girare i programmi di integrazione numerica per tempi più lunghi in modo da ottenere maggiore accuratezza nei risultati.

Parallelamente dovremo studiare le incertezze teoriche dei risultati ottenuti con il matching.

Ci aspettiamo che, avendo inserito tutti i termini NLO, le incertezze dovute a variazioni della scala di fattorizzazione e rinormalizzazione siano più piccole di quelle ottenute dal solo approccio BFKL.

Come prossimo sviluppo di questa ricerca ci proponiamo di applicare il matching alle situazioni con tagli asimmetrici nell'energia minima dei due jet per ottenere dati perturbativi NLO più precisi per descrivere la decorrelazione dell'angolo azimutale dei jet nella QCD di alta energia. Naturalmente ci auspichiamo di avere presto a disposizione dati sperimentali raccolti in configurazioni asimmetriche.

11 Conclusioni

Vediamo di riassumere i risultati che abbiamo ottenuto con la nostra ricerca. Il nostro studio si colloca nell'ambito della QCD di alta energia, ed in modo particolare nell'analisi fenomenologica dei jet di Mueller-Navelet, allo scopo di verificare la dinamica di alta energia che si suppone regolata dall'equazione BFKL. Come visto precedentemente, questi jet sono adatti all'applicazione di questa equazione in quanto hanno la caratteristica di presentare due scale fortemente ordinate, ovvero sono jet che hanno un impulso trasverso $|\mathbf{k}_J|$ molto più grande della scala Λ_{QCD} (alla quale cominciano a essere dominanti gli effetti di natura non perturbativa) e quindi si può applicare il calcolo perturbativo. Allo stesso tempo il fatto di essere dei jet fortemente separati in rapidità ha come conseguenza che l'energia nel centro di massa \sqrt{s} risulta molto maggiore di $|\mathbf{k}_J|$ per cui è necessario tenere in conto a tutti gli ordini perturbativi α_s^n i grandi termini proporzionali al $\log^n(s/\mathbf{k}_J^2)$ che vengono risommati dall'equazione BFKL.

L'osservabile che abbiamo scelto per la nostra analisi è la (de)correlazione degli angoli azimutali dei jet. Rispetto alle classiche sezioni d'urto differenziali, questa osservabile è meno sensibile alle incertezze teoriche introdotte dalla scelta (arbitraria) delle scale di fattorizzazione, di rinormalizzazione, delle densità partoniche e di altri ingredienti che prendono parte alla descrizione teorica del processo. Allo stesso tempo, la decorrelazione tra i jet è molto sensibile alle emissioni delle particelle al di fuori dei jet, e pertanto ci si aspetta che sia in grado di distinguere una dinamica "standard", basata sui calcoli perturbativi ad ordine finito, dalla dinamica BFKL che risomma i contributi dominanti e sottodominanti in $\log(s/\mathbf{k}_J^2)$ (NLL) a tutti gli ordini perturbativi.

Siamo partiti dallo studio sui jet condotto in [10] e dai risultati sull'analisi della decorrelazione dell'angolo azimutale. In [10] è stata riscontrata la problematica che i risultati teorici, contrariamente ad ogni aspettativa, non prevedono un aumento della decorrelazione all'aumentare della differenza tra le rapidità dei due jet (come si può osservare dalla fig. 23). Infatti, aumentando la differenza di rapidità tra i jet e quindi lo spazio delle fasi disponibile per l'emissione di particelle addizionali, ci si attende una maggior decorrelazione tra gli angoli azimutali dei jet, quale che sia la dinamica che governa tale emissione. La conclusione che se ne può trarre è che le predizioni basate sull'approccio BFKL vanno riconsiderate profondamente ed eventualmente migliorate sulla base di ulteriori informazioni fisiche.

Nello spirito di migliorare la descrizione teorica su tale osservabile abbiamo deciso di affiancare ai calcoli BFKL NLL il calcolo perturbativo esatto a livello NLO. In altre parole, ci siamo proposti di effettuare un "matching" tra i risultati ad ordine finito $O(\alpha_s^3)$ e quelli risommati con

l'approccio BFKL. Per evitare il doppio conteggio dei termini comuni ai due approcci, abbiamo sottratto i termini derivanti dallo sviluppo in serie di potenze di α_s dell'espressione BFKL risommata fino all'ordine $O(\alpha_s^3)$. Per valutare questi contributi e costruire la sezione d'urto derivante dal “matching” abbiamo creato dei programmi usando il software Mathematica. Successivamente, per questioni di controllo e di velocità di esecuzione su tali programmi sono state effettuate delle versioni in linguaggio C++.

Un aspetto importante della nostra ricerca e sul quale abbiamo svolto molte analisi è stato quello della scelta dell'algoritmo di selezione delle particelle finali per formare il jet. Partendo dall'algoritmo del cono impiegato nello studio [10] per confrontare i dati del Tevatron dove era stato usato tale algoritmo, abbiamo poi preso in considerazione l'algoritmo k_t che, come è stato detto nel cap. 8, presenta il vantaggio di essere stabile nel caso di emissione soffice oppure nell'avere particelle collineari nello stato finale. Proprio per questa ragione l'algoritmo k_t è stato scelto nell'analisi effettuata da CMS per i jet di Mueller-Navelet (e non solo) e si rende necessario per poter effettuare un confronto con tali dati sperimentali.

Durante la creazione dei programmi ci siamo imbattuti in problematiche legate al tempo di creazione dei punti della griglia necessari per l'integrazione sullo spazio di Mellin dei vertici di jet NLL. Per migliorare tale aspetto abbiamo preso in considerazione una versione semplificata dell'algoritmo k_t , ottenuto dallo sviluppo in serie nel “raggio” R dei jet. Sulla base dei calcoli presentati in [25] — che adottano una definizione di jet inconsueta — abbiamo calcolato lo sviluppo di “piccolo cono” per l'algoritmo k_t , mostrando che fornisce una buona approssimazione anche per valori di $R = 0.5$ con uno scarto dell'ordine del percento (vedi figg. 32, 33).

Il vantaggio dell'approssimazione di piccolo cono consiste nel fatto che due dei tre integrali coinvolti si riescono a svolgere analiticamente. Ciò si traduce in un gran risparmio di tempo ai fini del calcolo numerico. L'uso dell'approssimazione di piccolo cono ha permesso di ottenere in maniera più rapida i punti della griglia, e le nostre previsioni teoriche si avvicinano a quelle ottenute con il caso esatto, (usato in [11]), con uno scarto dell'ordine del 2%.

L'idea di effettuare questo matching è nata oltre che per cercare di risolvere il problema riscontrato in [10], anche dagli studi recenti effettuati da [11] in cui sono stati ottenuti accordi tra la predizione teorica e i dati sperimentali di CMS adottando l'approccio BLM [23] che consiste nel selezionare la scala di rinormalizzazione μ_R su valori molto più grandi delle scale fisiche del processo, ossia dell'ordine di $\mu_R^2 \simeq 500k_J^2$. Questo valore, poco naturale, ha sostanzialmente l'effetto di diminuire notevolmente il valore di α_s e di conseguenza il ruolo delle correzioni sottodominanti.

Il nostro intento è quello di migliorare la descrizione dei dati aumentando l'informazione fisica sulla base di rigorosi calcoli NLO, ovvero inserendo termini aggiuntivi nella sezione d'urto tramite il "matching". Siamo riusciti ad implementare questa procedura usando il programma di calcolo NLOJET++ [17] del contributo perturbativo e creando i programmi per il contributo risommato BFKL e la sottrazione. Nel capitolo 10 abbiamo presentato i risultati della nostra analisi nei grafici di figg. 41, 42, 43 che mostrano l'andamento dei coefficienti C_0 , C_1 e C_2 in funzione della rapidità relativa Y tra i due jet.

La curva del matching rispetto a quella relativa alla risommazione BFKL NLL presenta un leggero ma non trascurabile abbassamento. Questi risultati preliminari vanno nella direzione di diminuire l'effetto dei termini sottodominanti, come riscontrato in [11], ma sono basati a nostro avviso su un approccio più rigoroso.

Abbiamo però riscontrato un problema nel calcolo numerico dei contributi perturbativi $O(\alpha_s^3)$ con il programma NLOJET++ dovuto alla scelta di considerare tagli simmetrici nell'integrazione dell'impulso trasverso dei jet ($|\mathbf{k}_{J1}| = |\mathbf{k}_{J2}|$). È noto che questa configurazione simmetrica presenta una certa instabilità perturbativa in quanto, pur dando luogo ad una sezione d'urto finita, dipende fortemente dalla differenza di energia dei due jet quando questa è prossima a zero. Tuttavia, i dati sperimentali sono stati analizzati con questo taglio, e questo ci ha portati ad affrontare una sfida per la quale abbiamo bisogno di una quantità di tempo maggiore del previsto per far convergere le integrazioni Montecarlo dei termini NLO. Ciò nonostante, abbiamo verificato che la sezione d'urto migliorata non presenta questa forte dipendenza dalla asimmetria, anche se richiede tempi lunghi per essere calcolata con basso errore statistico.

Sicuramente una scelta di tagli asimmetrici può risolvere questo problema. Quando saranno disponibili da LHC analisi di jet di Mueller-Navelet con tagli asimmetrici, questo metodo potrà essere applicato in modo ancora più affidabile e fornire sperabilmente la conferma che l'approccio BFKL governa la dinamica della QCD ad alte energie.

A Appendice

In appendice vengono riportate le espressioni del vertice di jet NLL nel caso del gluone e il termine sempre relativo al gluone dell'approssimazione di piccolo cono ottenuto con la nostra convenzione.

$$\begin{aligned}
V_g^{(1)}(\mathbf{k}, x) &= \left[\left(\frac{11}{6} \frac{C_A}{\pi} - \frac{1}{3} \frac{N_f}{\pi} \right) \log \frac{\mathbf{k}^2}{\Lambda^2} + \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{67}{36} \right) \frac{C_A}{\pi} + \frac{13}{36} \frac{N_f}{\pi} - b_0 \log \frac{\mathbf{k}^2}{\mu^2} \right] V_g^{(0)}(\mathbf{k}, x) + \\
&+ \int dz \frac{N_f}{\pi} \frac{C_F}{C_A} z(1-z) V_g^{(0)}(\mathbf{k}, xz) + \\
&+ \frac{N_f}{\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{\pi} \int_0^1 dz P_{qg}(z) \left[\frac{h_q^{(0)}(\mathbf{k}')}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 + \mathbf{k}'^2} S_J^{(3)}(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}', xz; x) - \right. \\
&- \frac{1}{\mathbf{k}'^2} \Theta(\Lambda^2 - \mathbf{k}'^2) V_q^{(0)}(\mathbf{k}, xz) \left. \right] + \frac{N_f}{2\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{\pi} \int_0^1 dz P_{qg}(z) \frac{\alpha_s}{\sqrt{2}} \frac{C_A}{((1-z)\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \\
&\times \left[z(1-z) \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{k}'}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \mathbf{k}'^2} S_J^{(3)}(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}', xz; x) \right. \\
&- \frac{1}{\mathbf{k}^2} \Theta(\Lambda^2 - ((1-z)\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2) S_J^{(2)}(\mathbf{k}, x) \left. \right] + \\
&+ \frac{C_A}{\pi} \int_0^1 \frac{dz}{1-z} [(1-z)P(1-z)] \\
&\times \int \frac{d^2 \mathbf{l}}{\pi \mathbf{l}^2} \left\{ \frac{\alpha_s}{\sqrt{2}} \frac{C_A}{\mathbf{l}^2 + (\mathbf{l} - \mathbf{k})^2} (S_J^{(3)}(z\mathbf{k} + (1-z)\mathbf{l}, (1-z)(\mathbf{k} - \mathbf{l}), x(1-z); x) + \right. \\
&+ S_J^{(3)}(\mathbf{k} - (1-z)\mathbf{l}, (1-z)\mathbf{l}, x(1-z); x)) \\
&- \Theta\left(\frac{\Lambda^2}{(1-z)^2} - \mathbf{l}^2\right) [V_g^{(0)}(\mathbf{k}, x) + V_g^{(0)}(\mathbf{k}, xz)] \left. \right\} - \\
&- \frac{2C_A}{\pi} \int_0^1 \frac{dz}{1-z} \int \frac{d^2 \mathbf{l}}{\pi \mathbf{l}^2} \left[\frac{\alpha_s}{\sqrt{2}} \frac{C_A}{\mathbf{l}^2 + (\mathbf{l} - \mathbf{k})^2} S_J^{(2)}(\mathbf{k}, x) - \Theta\left(\frac{\Lambda^2}{(1-z)^2} - \mathbf{l}^2\right) V_g^{(0)}(\mathbf{k}, x) \right] \\
&+ \frac{C_A}{\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{\pi} \int_0^1 dz \left[P(z)(1-z) \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot ((1-z)\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 ((1-z)\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \right. \\
&\times \left. h_g^{(0)}(\mathbf{k}') S_J^{(3)}(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}', xz; x) - \frac{1}{\mathbf{k}'^2} \Theta(\Lambda^2 - \mathbf{k}'^2) V_g^{(0)}(\mathbf{k}, xz) \right] - \tag{A.1} \\
&- \frac{1}{z(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \Theta(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| - z(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| - z(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| + |\mathbf{k}'|))) V_g^{(0)}(\mathbf{k}', x)
\end{aligned}$$

Nell'espressione precedente si ha che:

$$b_0 = (11N_c - 2N_f)/(12\pi), \quad P(z) = (1-z) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{2} \right) \tag{A.2}$$

La scala di fattorizzazione $\mu_F = \Lambda$ e quella di rinormalizzazione $\mu_R = \mu$ sono tra loro indipendenti ma nei calcoli che abbiamo fatto nella tesi sono state poste uguali. Vediamo adesso l'espressione della funzione del gluone per creare la griglia in approssimazione di piccolo cono con il termine correttivo (9.15) da noi ricavato per ottenere l'accordo con i dati ricavati con l'algoritmo k_T .

$$\begin{aligned}
I_g^{(pc)} &= \frac{\alpha_s(\mathbf{k}^2)^\gamma e^{in\phi}}{2\pi} \int_{x_J}^1 \frac{dz}{z} f_g\left(\frac{x_J}{z}\right) \frac{C_A}{C_F} \{(P_{gg}(z) + 2N_f \frac{C_F}{C_A} P_{qg}(z)) \log \frac{\mathbf{k}_J^2}{\mu_F^2} - \\
&- 2z^{-2\gamma} \log R(P_{gg}(z) + 2N_f P_{qg}(z)) - \frac{\beta_0}{2} \log \frac{\mathbf{k}_J^2}{4\mu_R^2} \delta(1-z) + \\
&+ \delta(1-z) [-\beta_0 \log 2 + C_A (\frac{131}{36} - \frac{\pi^2}{3}) - n_f T_R \frac{23}{18}] + \\
&+ C_A \delta(1-z) \{ \chi(n, \gamma) \log \frac{s_0}{\mathbf{k}_J^2} + \frac{1}{12} + \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} (\psi'(1 + \gamma + \frac{n}{2}) - \psi'(\frac{n}{2} - \gamma) - \chi^2(n, \gamma)) \} + \\
&+ 2C_A (1 - z^{-2\gamma}) \left(\left(\frac{1}{z} - 2 + z(1-z) \right) \log(1-z) + \frac{\log(1-z)}{1-z} \right)_+ + \\
&+ C_A \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{(1-z)_+} - 2 + z(1-z) \right] \left((1 + z^{-2\gamma}) \chi(n, \gamma) - 2 \log z + \frac{(1-z)^2}{z^2} I_2 \right) + \\
&+ N_f \left[2z(1-z) \frac{C_F}{C_A} + (z^2 + (1-z)^2) \left(\frac{C_f}{C_A} \chi(n, \gamma) + \frac{(1-z)}{z} I_3 \right) - \frac{1}{12} \delta(1-z) \right]
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Nella precedente (A.3) I_2 è una funzione definita tramite una combinazione della funzione speciale ipergeometrica ${}_2F_1(1, a, a+1, z)$ definta come:

$${}_2F_1(1, a, a+1, z) = a(\psi(1) - \psi(a) - \log(1-z)) + O((1-z) \log(1-z)) \tag{A.4}$$

La funzione I_2 ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{z^2}{(1-z)^2} \left(z \left(\frac{{}_2F_1(1, 1 + \gamma - \frac{n}{2}, 2 + \gamma - \frac{n}{2}, z)}{\frac{n}{2} - \gamma - 1} - \frac{{}_2F_1(1, 1 + \gamma + \frac{n}{2}, 2 + \gamma + \frac{n}{2}, z)}{\frac{n}{2} + \gamma + 1} \right) + \right. \\
&+ z^{-2\gamma} \left(\frac{{}_2F_1(1, -\gamma - \frac{n}{2}, 1 - \gamma - \frac{n}{2}, z)}{\frac{n}{2} + \gamma} - \frac{{}_2F_1(1, -\gamma + \frac{n}{2}, 1 - \gamma + \frac{n}{2}, z)}{\frac{n}{2} - \gamma} \right) + \\
&+ z^{\frac{n}{2} - \gamma} \left(\psi(\gamma + \frac{n}{2}) + \psi(1 - \gamma + \frac{n}{2}) - \psi(\gamma - \frac{n}{2}) - \psi(1 - \gamma - \frac{n}{2}) \right) + \\
&+ (1 + z^{-2\gamma}) (\chi(n, \gamma) - 2 \log(1-z)) + 2 \log z
\end{aligned} \tag{A.5}$$

La funzione I_3 è definita tramite la precedente I_2 ed ha la seguente forma:

$$I_3 = \frac{(1-z)}{2z} I_2 - \frac{z}{1-z} \left[\log z + \frac{1 - z^{-2\gamma}}{2} (\chi(n, \gamma) - 2 \log(1-z)) \right] \tag{A.6}$$

Nell'espressione per la griglia del quark in approssimazione di piccolo cono (9.10) è presente la funzione I_1 costruita tramite la I_2 e per completezza viene riportata anche la sua espressione:

$$I_1 = \frac{(1-z)}{2z} I_2 + \frac{z}{1-z} \left[\log z + \frac{1 - z^{-2\gamma}}{2} (\chi(n, \gamma) - 2 \log(1-z)) \right] \tag{A.7}$$

Vengono riportate le espressioni degli autovalori BFKL all'ordine principale χ_0 e successivo χ_1 :

$$\chi_0(n, \gamma) = 2\Psi(1) - \Psi\left(\gamma + \frac{n}{2}\right) - \Psi\left(1 - \gamma + \frac{n}{2}\right), \quad (\text{A.8})$$

con Ψ derivata logaritmica della funzione gamma di Eulero $\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. All'ordine NLL si ha:

$$\begin{aligned} \chi_1(n, \gamma) &= S\chi_0(n, \gamma) + \frac{3}{2}\zeta(3) - \frac{\beta_0}{8N_C}\chi_0^2(n, \gamma) + \\ &+ \frac{1}{4}\left[\psi''\left(\gamma + \frac{n}{2}\right) + \psi''\left(1 - \gamma + \frac{n}{2}\right) - 2\phi(n, \gamma) - 2\phi(n, 1 - \gamma)\right] - \\ &- \frac{\pi^2 \cos(\pi\gamma)}{4 \sin^2(\pi\gamma)(1 - 2\gamma)} \left\{ \left[3 + \left(1 + \frac{N_f}{N_c^3}\right) \frac{2 + 3\gamma(1 - \gamma)}{(3 - 2\gamma)(1 + 2\gamma)}\right] \delta_{n,0} - \right. \\ &- \left. \left(1 + \frac{N_f}{N_c^3}\right) \frac{\gamma(1 - \gamma)}{2(3 - 2\gamma)(1 + 2\gamma)} \delta_{n,2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Nell'espressione precedente S è una costante $S = (4 - \pi^2 + 5\beta_0/N_C)/12$, $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n}$ è la funzione zeta di Riemann mentre ϕ ha la seguente struttura:

$$\begin{aligned} \phi(n, \gamma) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k + \gamma + \frac{n}{2}} (\psi'(k + n + 1) - \psi'(k + 1)) + \\ &+ (-1)^{k+1} [\beta'(k + n + 1) + \beta'(k + 1)] + \frac{\psi(k + 1) - \psi(k + n + 1)}{k + \gamma + \frac{n}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

con

$$\beta' = \frac{1}{4} \left[\psi'\left(\frac{1 + \gamma}{2}\right) - \psi'\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right] \quad (\text{A.11})$$

Riferimenti bibliografici

- [1] W. Marciano and H. Pagels, Phys. Rep. 36C (1978) 138.
- [2] T. Muta in *Foundations of QCD*, World Scientific Lectures Notes in Physics-Vol. 5, 1987.
- [3] V.S. Fadin, E.A. Kuraev, and L.N. Lipatov, *On the Pomeron singularity in asymptotically free theories*, Phys. Lett. B 60 (1975) 50-52.
E.A. Kuraev, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, *Multi-Reggeon processes in the Yang-Mills theory*, Sov. Phys. JETP 44 (1976) 443-450.
E.A. Kuraev, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, *The Pomeron singularity in nonabelian gauge theories*, Sov. Phys. JETP 45 (1977) 199-204.
I.I. Balitsky and L.N. Lipatov, *The Pomeron singularity in Quantum Chromodynamics*, Sov. J. Nucl. Phys. 28 (1978) 822-829.
- [4] A.H. Mueller and H. Navelet, *An inclusive minijet cross-section and the bare Pomeron in QCD*, Nucl. Phys. B 282 (1987) 727.
- [5] R.K. Ellis and J.C. Sexton, *QCD radiative corrections to parton-parton scattering*, Nucl. Phys. B 269 (1986) 445.
- [6] V. Del Duca and C. R. Schmidt, *Dijet production at large rapidity intervals*, Phys. Rev. D 49 (1994) 4510;
W. J. Stirling, *Production of jet pairs at large relative rapidity in hadron hadron collisions as a probe of the perturbative Pomeron*, Nucl. Phys. B 423 (1994) 56;
- [7] L. H. Orr and W. J. Stirling, *Dijet production at hadron hadron colliders in the BFKL approach*, Phys. Rev. D 56 (1997) 5875;
J. Kwiecinski, A. D. Martin, L. Motyka and J. Outhwaite, *Azimuthal decorrelation of forward and backward jets at the Tevatron*, Phys. Lett. B 514 (2001) 355.
- [8] V. S. Fadin and L. N. Lipatov, *BFKL pomeron in the next-to-leading approximation*, Phys. Lett. B 429 (1998) 127;
M. Ciafaloni and G. Camici, *Energy scale(s) and next-to-leading BFKL equation*, Phys.

- [9] J. Bartels, D. Colferai and G.P. Vacca, *The NLO jet vertex for Mueller-Navelet and forward jets: the quark part*, Eur. Phys. J. C 24 (2002) 83.
J. Bartels, D. Colferai and G.P. Vacca, *The NLO jet vertex for Mueller-Navelet and forward jets: The gluon part*, Eur. Phys. J. C 29 (2003) 235.
- [10] D. Colferai, F. Schwennsen, L. Szymanowski and S. Wallon, *Mueller-Navelet jets at LHC-complete NLL BFKL calculation*, JHEP 1012 (2010) 026.
- [11] B. Ducloué, L. Szymanowsky, S. Wallon, *Confronting Mueller-Navelet jets in NLL BFKL with LHC experiments at 7 TeV*, JHEP 1305 (2013) 096;
Evidence for high-energy resummation effects in Mueller-Navelet jets at the LHC, arXiv:1309.3229 [hep-ph].
- [12] The CMS Collaboration, CMS Physics Analysis Summary, *Azimuthal angle decorrelations of jets widely separated in rapidity in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV*, CMS PAS FSQ-12-002.
- [13] D. Colferai, A. Niccoli, *Mueller-Navelet jets at LHC: matching NLL BFKL with fixed NLO calculations*, in preparazione.
- [14] S. D. Ellis, Z. Kunszt and D. E. Soper, *The One Jet Inclusive Cross-section at Order α_s^3 : Gluons Only*, Phys. Rev. Lett. 62 (1989) 726;
S. D. Ellis, Z. Kunszt and D. E. Soper, *The One Jet Inclusive Cross-section at Order α_s^3 : Quarks and Gluons*, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 2121;
S. D. Ellis, Z. Kunszt and D. E. Soper, *Jets at hadron colliders at order α_s^3 A Look inside*, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 3615.
- [15] S. Catani, Y.L. Dokshitzer, M.H. Seymour and B.R. Webber, *Longitudinally-invariant k_{\perp} -clustering algorithms for hadron-hadron collisions*, Nucl. Phys. B 406 (1993) 187.

- [16] S. Catani and M.H. Seymour, *A general algorithm for calculating jet cross section in NLO QCD*, Nucl. Phys. B 485 (1997) 291.
- [17] Z. Nagy, *Next-to-leading order calculation of three jet observables in hadron hadron collision*, Phys. Rev. D 68 (2003) 094002.
- [18] V.N. Gribov and L.N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. 15 (1972) 438.
G. Altarelli and G. Parisi, Nucl. Phys. B 126 (1977) 298.
Yu.L. Dokshitzer, Sov. Phys. JETP 46 (1977) 641.
- [19] G. Dissertori, I. Knowels and M. Schmelling, *Quantum Chromodynamics*, Oxford Science Publications (2003).
- [20] J.R. Forshaw and D.A. Ross, *Quantum Chromodynamics and the Pomeron*, Cambridge Lectures Notes in Physics (1997).
- [21] T. Sjostrand, S. Mrenna, and P. Skands, *PYTHIA 6.4 physics and manual*, JHEP 05 (2006) 026.
- [22] G.. Marchesini et.al., *HERWIG: A Monte Carlo event generator for simulating hadron emission reactions with interfering gluons*, Comput. Phys. Comm. 67 (1992) 465.
- [23] S. J. Brodsky, G. P. Lepage and P. B. Mackenzie, *On the Elimination of Scale Ambiguities in Perturbative Quantum Chromodynamics*, Phys. Rev. D 28 (1983) 228.
- [24] T. Kinoshita, J. Math. Phys. 3 (1962) 650.
T. D. Lee and M. Nauenberg, Phys. Rev. 133B (1964) 1549.
- [25] D.Y. Ivanov and A. Papa, *The next to leading order forward jet vertex in the small-cone approximation*, JHEP 1205 (2012) 086.

- [26] M. Furman, Nucl. Phys. B 197 (1982) 413.
- [27] G.P. Salam, *A resummation of large sub-leading corrections at small x* , JHEP 07 (1998) 019.
- [28] J.R. Andersen, V.D. Duca, S. Frixione, C.R. Schimdt and W.J. Stirling, *Mueller-Navelet jets at hadron colliders*, JHEP 02 (2001) 007.
M. Fontannaz, J.P. Guillet and G. Heinrich, *Is a large intrinsic $k(T)$ needed to describe photon + jet photoproduction at HERA?*, Eur. Phys. J. C22 (2001) 303.