



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

DOTTORATO DI RICERCA IN INFORMATICA, SISTEMI E  
TELECOMUNICAZIONI  
CICLO XXVII

COORDINATORE Prof. Luigi Chisci

**APPLICAZIONI DI DINAMICA NON  
LINEARE:  
UN CASO CLASSICO ED UNO  
QUANTISTICO**

SETTORE SCIENTIFICO DISCIPLINARE FIS/03

**Dottorando**

Dott. Eugenio Pugliese

**Tutori**

Prof. Riccardo Meucci

Prof. Stefano Ruffo

**Coordinatore**

Prof. Luigi Chisci

Anni 2012/2014

Dott. Eugenio Pugliese: *Applicazioni di dinamica non lineare: un caso classico ed uno quantistico*

*A Michelangelo e Rosanna ...*

*... con tutto l'amore che ho ..*

— Eugenio



## INTRODUZIONE

---

La presente tesi di dottorato, che raccoglie i risultati del mio lavoro di ricerca svolto negli ultimi tre anni, presenta una struttura non usuale. Essa si compone di due distinte parti che riguardano argomenti eterogenei benchè inquadrabili, entrambi, nell'ambito della Dinamica Non Lineare e Sistemi Complessi. La scelta di questa struttura è da attribuirsi, principalmente, al carattere multidisciplinare del laboratorio in cui ho svolto il lavoro di ricerca con la possibilità di spaziare tra vari ambiti di ricerca attivi.

Il lavoro sperimentale è stato svolto interamente all'Istituto Nazionale di Ottica - CNR sezione di Firenze presso i laboratori di Arcetri, e gli argomenti trattati sono esposti, in questo volume, come segue.

La Parte I è dedicata allo studio della dinamica di scarica di un tubo al plasma di origine commerciale. I capitoli riguardanti tale argomento sono tre. Il primo presenta l'argomento della scarica nei tubi al plasma, le nozioni fisiche fondamentali che ne descrivono il funzionamento nonché una panoramica sui risultati ottenuti fino ad oggi sulla descrizione della dinamica del fenomeno. Il secondo capitolo raccoglie l'insieme delle misure sperimentali effettuate, riguardanti la caratterizzazione elettrica del tubo, la descrizione della dinamica di scarica e della transizione verso regimi di dinamica caotica. Nel terzo capitolo è presentato il modello teorico, introdotto per descrivere il fenomeno, e le simulazioni fatte per verificarne la compatibilità con i dati sperimentali.

La Parte II presenta uno studio della correlazione tra l'insorgenza, in un sistema di oscillatori accoppiati, di proprietà quantistiche fondamentali, in particolare l'entanglement, e l'instabilità dinamica delle soluzioni delle equazioni del moto, studiata usando un opportuno oscillatore classico realizzato elettronicamente. Nel primo capitolo di questa seconda parte viene proposto un breve inquadramento teorico del problema studiato, il cui approfondimento esula dalle finalità

di questa tesi. Nel secondo capitolo viene descritto il sistema classico, la sua realizzazione circuitale e la descrizione dei risultati sperimentali in relazione alla generazione di stati entangled nel sistema dei due oscillatori quantistici accoppiati.

La tesi è completata da una appendice A. Essa descrive, sinteticamente, alcuni risultati ottenuti nell'ambito della ricerca sull'imaging IR al quale ho potuto dare il mio contributo. In tale appendice troviamo una breve descrizione dell'applicazione dell'Olografia Digitale nel medio IR per ricostruire immagini di oggetti e persone nascosti da una coltre di fumo e fiamme.

## PUBBLICAZIONI

---

- M. Locatelli, E. Pugliese, M. Paturzo, V. Bianco, A. Finizio, A. Pelagotti, P. Poggi, L. Miccio, R. Meucci, P. Ferraro. *Imaging alive people through smoke and flames by digital holography at far infrared*. *Optics Express*, **21** Issue 5, pp. 5379-5390 (2013).
- M. Leo, C. Distante, M. Paturzo, P. Memmolo, M. Locatelli, E. Pugliese, R. Meucci, P. Ferraro. *Automatic Digital Hologram Denoising by Spatiotemporal Analysis of Pixel-wise Statistics*. *Journal of Display Technology*, **9** Issue 11, pp. 904-909 (2013).
- M. Locatelli, E. Pugliese, M. Paturzo, V. Bianco, A. Finizio, A. Pelagotti, P. Poggi, L. Miccio, R. Meucci, P. Ferraro. *Seeing through smoke and flames: a challenge for imaging capabilities, met thanks to digital holography at far infrared*. *Optical Measurement Systems for Industrial Inspection VIII*, pp. 87880K-87880K-6 (2013).
- M. Locatelli, E. Pugliese, M. Paturzo, V. Bianco, A. Finizio, A. Pelagotti, P. Poggi, L. Miccio, R. Meucci, P. Ferraro. *Lensless Digital Holography Improves Fire Safety*. *Optics and Photonics News*, **24**, Issue 12, pp. 26-26 (2013).
- V. Bianco, M. Paturzo, M. Locatelli, E. Pugliese, A. Finizio, A. Pelagotti, P. Poggi, L. Miccio, R. Meucci, P. Ferraro. *Looking through Smoke and Flames by Lensless Digital Holography at Far Infrared*. *Novel Applications of Digital Holography*. OSA, DW5A.2 (2013).
- V. Bianco, M. Paturzo, M. Locatelli, E. Pugliese, A. Finizio, A. Pelagotti, P. Poggi, L. Miccio. *Looking beyond smoke and flames. A challenge for people safety, met thanks to Digital Holography at 10.6 $\mu$ m*. *Conference on Lasers & Electro-*

Optics Europe & International Quantum Electronics Conference CLEO EUROPE/IQEC. IEEE (2013).

- V. Bianco, M. Paturzo, M. Locatelli, E. Pugliese, A. Finizio, A. Pelagotti, P. Poggi, L. Miccio, R. Meucci, P. Ferraro. *Looking through Smoke and Flames by Lensless Infrared Digital Holography*. Fringe 2013. Springer Berlin Heidelberg, pp. 911-916 (2014).
- M. Locatelli, E. Pugliese, M. Paturzo, V. Bianco, A. Finizio, A. Pelagotti, P. Poggi, L. Miccio, R. Meucci, P. Ferraro. *Imaging and display of human size scenes by long wavelength digital holography*. In *Multi-dimensional Imaging*, B. Javidi, P. Andres and E. Tajahuerce, John Wiley & Sons (2014).
- G. Carotenuto, A. Longo, L. Nicolais, S. De Nicola, E. Pugliese, M. Ciofini, M. Locatelli, A. Lapucci, R. Meucci. *Synthesis of nanographite by laser induced thermal expansion of H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> intercalated graphite lattice*. arXiv:1407.6204 (2014).
- M. Ravaro, M. Locatelli, E. Pugliese, I. Di Leo, M. Siciliani de Cumis, F. D' Amato, P. Poggi, L. Consolino, R. Meucci, P. Ferraro, P. De Natale. *Mid-infrared digital holography and holographic interferometry with a tunable quantum cascade laser*. *Optics Letters*, **39** Issue 16, pp. 4843-4846 (2014).

# INDICE

---

i	MODELLIZZAZIONE DELLA DINAMICA DELLA SCARICA LUMINOSA DI UN TUBO AL PLASMA	1
1	LA SCARICA NEI TUBI AL PLASMA	3
1.1	Fisica della scarica nei tubi al plasma	4
1.2	Scarica nei tubi al plasma: aspetti dinamici	10
2	SCARICA IN UN TUBO AL PLASMA: OSSERVAZIONI SPERIMENTALI	15
2.1	Apparato sperimentale	16
2.2	Caratterizzazione elettrica	19
2.3	Dinamica per $C = 2.4 \text{ nF}$ : sequenze temporali e biforcazione	22
2.4	Dinamica per $C = 2.4 \text{ nF}$ : mappe di ritorno ed analisi spettrale	28
2.5	Dinamica per $C = 4.8 \text{ nF}$ : scenario quasi periodico	33
2.6	Conclusioni	39
3	MODELLO FENOMENOLOGICO E DIAGRAMMI DI STABILITÀ	41
3.1	Modello fenomenologico	42
3.2	Simulazioni e diagrammi di stabilità	48
3.3	Conclusioni	53
ii	GENERAZIONE DI STATI <i>entangled</i> IN OSCILLATORI PARAMETRICI QUANTISTICI USANDO IL CONTROLLO ESTERNO DI FASE E FREQUENZA	55
4	ENTANGLEMENT IN UN SISTEMA DI DUE OSCILLATORI QUANTISTICI ACCOPPIATI	57
4.1	Entanglement e sua misura	59
4.2	Sistema di oscillatori accoppiati in equilibrio con l'ambiente	62
4.3	Oscillatore parametrico classico	64

4.4	Entanglement degli oscillatori quantistici: simulazioni	66
4.5	Conclusioni	70
5	GENERAZIONE CONTROLLATA DELL' ENTANGLEMENT	73
5.1	Richiami sul sistema	74
5.2	Arrangiamento e metodo sperimentali	75
5.3	Relazione tra instabilità dinamica ed entanglement	81
5.4	Conclusioni	86
iii	APPENDICE	89
A	VEDERE OLTRE LE FIAMME CON L'OLOGRAFIA DIGITALE IR	91
A.1	Introduzione	91
A.2	Olografia digitale nel medio infrarosso	92
A.3	Visione attraverso il fumo	94
A.4	Visione attraverso le fiamme	95
	BIBLIOGRAFIA	99

## ELENCO DELLE FIGURE

---

- Figura 1 *Arrangiamento sperimentale tipico per la misura della caratteristica tensione corrente di un tubo a scarica a bassa pressione [1].* 4
- Figura 2 *Caratteristica tensione corrente tipica di un tubo a Neon alimentato in corrente continua ed in condizioni di bassa pressione (1Torr) (da [2]).* 5
- Figura 3 *Curve di Paschen per Elio, Neon, Argon, Idrogeno e Azoto [3].* 8
- Figura 4 *Regioni visibili in regime di scarica a bagliore normale [4].* 9
- Figura 5 *Caos in un tubo a scarica: (a) evidenza di caos deterministico e (b) di caos omoclinico riportati in [5, 6].* 10
- Figura 6 *Sincronizzazione di fase riportata in [7]. A generatore sinusoidale acceso la mappa stroboscopica esibisce una concentrazione di punti in una zona ristretta dell'attrattore.* 12
- Figura 7 *Mappe sperimentali di primo ritorno attraverso la sezione di Poincaré in [8]. Seguendo la sequenza a,b,c,d si osservano la sezione triangolare del toro, tre orbite periodiche instabili e la transizione al caos.* 13
- Figura 8 *Arrangiamento sperimentale usato per la caratterizzazione dinamica del tubo a scarica, qui rappresentato in rosso.* 16
- Figura 9 *Rappresentazione schematica dell'andamento di tensione (U) e corrente (I) attraverso un tubo a scarica. Si distinguono chiaramente due fasi all'interno di un ciclo corrispondenti alla carica ed alla scarica del condensatore (da [9]).* 18
- Figura 10 *Tipica risposta, al variare della lunghezza d'onda della radiazione incidente, dei fotodiodi New Focus 1621 e 1623.* 19

- Figura 11 *Caratteristica sperimentale tensione corrente per il tubo a scarica.* 21
- Figura 12 *Sequenze temporali della tensione ai capi del tubo (curva rossa) e della intensità d'emissione (curva blu).  $V_{\text{bias}}$  vale rispettivamente: (a) 800 V; (b) 1000 V; (c) 1300 V; (d) 1400 V; (e) 1500 V; (f) 1600 V; (g) 1700 V; (h) 1900 V.* 23
- Figura 13 *Proiezione bidimensionale degli attrattori.  $V_{\text{bias}}$  vale rispettivamente: (a) 800 V; (b) 1000 V; (c) 1300 V; (d) 1400 V; (e) 1500 V; (f) 1600 V; (g) 1700 V; (h) 1900 V.* 24
- Figura 14 *Esempi di estrazione dei massimi dalle sequenze temporali.  $V_{\text{bias}}$  vale rispettivamente: (a) 1000 V; (b) 1700 V.* 26
- Figura 15 *Diagramma di biforcazione del tubo a scarica chiuso su una capacità di 2.4 nF.* 27
- Figura 16 *Mappe di primo ritorno sulla sezione di Poincaré.  $V_{\text{bias}}$  vale rispettivamente: (a) 1000 V; (b) 1200 V; (c) 1300 V; (d) 1400 V; (e) 1500 V; (f) 1600 V; (g) 1700 V; (h) 1900 V.* 29
- Figura 17 *Valutazione dell'intervallo temporale tra massimi successivi.  $V_{\text{bias}}$  vale rispettivamente: (a) 1000 V; (b) 1300 V.* 30
- Figura 18 *Spettri dei segnali di emissione per  $C = 2.4$  nF e per  $V_{\text{bias}}$  rispettivamente: (a) 1000 V; (b) 1320 V; (c) 1550 V; (d) 1700 V.* 31
- Figura 19 *Sequenze temporali della tensione ai capi del tubo (curva rossa) e intensità d'emissione (curva blu) e proiezione bidimensionale degli attrattori nel caso di  $C = 4.8$  nF.  $V_{\text{bias}}$  vale rispettivamente: (a) ed (e) 1100 V; (b) ed (f) 1160 V; (c) e (g) 1180 V; (d) e (h) 1200 V.* 34
- Figura 20 *Diagramma di biforcazione del tubo a scarica chiuso su una capacità di 4.8 nF.* 36
- Figura 21 *Mappe di primo ritorno sulla sezione di Poincaré per  $C = 4.8$  nF.  $V_{\text{bias}}$  vale rispettivamente: (a) 1100 V; (b) 1160 V; (c) 1180 V; (d) 1200 V.* 37

- Figura 22 *Spettri dei segnali di emissione per  $C = 4.8\text{nF}$ .  $V_{\text{bias}}$  è rispettivamente: (a) 1100 V; (b) 1160 V; (c) 1180 V; (d) 1200 V. 38*
- Figura 23 *Arrangiamento sperimentale usato per la caratterizzazione dinamica del tubo a scarica. 42*
- Figura 24 *In alto, curva caratteristica sperimentale (punti blu) insieme alla curva (26) che si adatta meglio ai dati (curva rossa); in basso, residui calcolati dal metodo dei minimi quadrati. 46*
- Figura 25 *Confronto tra i segnali temporali sperimentali (a) e simulati (b) in corrispondenza di  $C = 2.4\text{nF}$ ,  $V_{\text{bias}} = 900\text{V}$  ( $A_0 = 3.5$ ) ed  $\omega = 4.5$ . 50*
- Figura 26 *Isospike diagram ottenuti contando il numero di picchi in un periodo di (a)  $x$ , (b)  $y$ , (c)  $z$ , (d)  $w$ . Le integrazioni sono partite da una condizione iniziale arbitraria  $(x, y, z, w) = (1, 1, 0.01, 0.01)$ , variando  $A_0$  da 3 a 8 ed  $\omega$  da 3 a 11. 51*
- Figura 27 *(a) Diagramma di biforcazione simulato per la variabile  $x$  ottenuto per  $\lambda = 5$  e con  $\omega \in [6, 7]$  e considerando solo i massimi maggiori di 30. Le mappe di primo ritorno sono state calcolate in corrispondenza delle linee blu A, B e C corrispondenti a  $(A_0, \omega) = (4.522, 6.217), (5.622, 6.375), (6.161, 6.452)$ . (b) Biforcazione sperimentale per  $C = 2.4\text{nF}$ . 52*
- Figura 28 *Mappa bidimensionale, in funzione di  $A_0$  ed  $\omega$ , dell'esponente di Lyapunov lungo  $x$ . La scala di colore contraddistingue i valori positivi dell'esponente, la scala di grigi corrisponde ad esponente negativo. Il riquadro in rosso evidenzia la regione dei parametri usati per calcolare i diagrammi di stabilità. 53*
- Figura 29 *Diagramma di stabilità per l'equazione di Mathieu in funzione di  $\epsilon$  e  $\omega_R^2$  ( $\gamma \ll \omega_0$ ). In nero sono indicate le aree d'instabilità delle soluzioni. 66*

- Figura 30 *Entanglement valutato tramite l'andamento della negatività logaritmica. Tutte le curve sono ricavate per  $T = 100T_0$ ,  $c_0 = 0$  e  $\omega_D = 2\omega_0$ . Il valore di  $c_1$  è I)  $0.4\omega_0^2$  (in blu); II)  $0.3\omega_0^2$  (in rosso); III)  $0.2\omega_0^2$  (in verde). 67*
- Figura 31 *(a) Andamento di  $\tau_R$  in funzione di  $T$  per  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 0.2\omega_0^2$  e  $\omega_D = 2\omega_0$ . L'equazione della curva in rosso è  $\tau_R = (10.4 \pm 0.2)\ln(T/T_0) - (25.9 \pm 0.8)$ . (b) Andamento di  $\tau_R$  in funzione di  $c_1$  per  $c_0 = 0$ ,  $T = 100T_0$  e  $\omega_D = 2\omega_0$ . La curva rossa ha equazione  $\tau_R = (6.6 \pm 0.1)(c_1/\omega_0^2)^{-1} - (9.9 \pm 0.7)$ . 68*
- Figura 32 *(a) Andamento di  $r$  in funzione di  $T$  per  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 0.2\omega_0^2$  e  $\omega_D = 2\omega_0$ . L'equazione della curva in rosso è  $r = (1.7 \pm 0.9) \cdot 10^{-6}(T/T_0) + (6.97 \pm 0.02) \cdot 10^{-2}$ . (b) Andamento di  $r$  in funzione di  $c_1$  per  $c_0 = 0$ ,  $T = 100T_0$  e  $\omega_D = 2\omega_0$ . La curva rossa ha equazione  $r = (0.350 \pm 0.007)(c_1/\omega_0^2) + (8 \pm 4) \cdot 10^{-4}$ . 68*
- Figura 33 *(a) Parte immaginaria di  $\nu$  in funzione di  $\omega_D$  per i modi d'oscillazione "-" (in verde) e "+" (in blu). (b) Andamento di  $E_N$  per I)  $\omega_D = 2\omega_0$ , II)  $\omega_D = 1.96\omega_0$  e III)  $\omega_D = 1.94\omega_0$ . Tutti i grafici sono stati calcolati per  $T = 100T_0$ ,  $c_0 = 0$  e  $c_1 = 0.1\omega_0^2$ . 69*
- Figura 34 *(a) Parte immaginaria di  $\nu$  in funzione di  $\omega_D$  per i modi d'oscillazione "-" (in verde) e "+" (in blu). (b) Andamento di  $E_N$  per I)  $\omega_D = 1.96\omega_0$ , II)  $\omega_D = 2.04\omega_0$  e III)  $\omega_D = 1.8\omega_0$ . Tutti i grafici sono stati calcolati per  $T = 100T_0$ ,  $c_0 = 0.05\omega_0^2$  e  $c_1 = 0.1\omega_0^2$ . 70*
- Figura 35 *Realizzazione circuitale dell'oscillatore di Mathieu e del suo controllo di fase.  $U_1 = \text{LT1114CN}$ ,  $U_2 = \text{MLT04G}$ ,  $R_{\gamma^2/4} = 438\text{k}\Omega$ ,  $R_{\omega_0^2} = 39\text{k}\Omega$ ,  $R_\epsilon = 51\text{k}\Omega$ ,  $R_m = 4.7\text{k}\Omega$ ,  $R = 43\text{k}\Omega$ ,  $R_1 = 1.6\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 4.7\text{k}\Omega$ ,  $C = 1.45\text{nF}$ . 76*
- Figura 36 *Segnale temporale della variabile  $x$  acquisito in corrispondenza di una variazione continua di frequenza intorno a  $f_d = f_r \simeq 2.63\text{kHz}$ . 77*

- Figura 37 *Attrattori di Mathieu come osservati all'oscilloscopio. (a) Attrattore non saturato corrispondente ad una soluzione stabile; (b) Attrattore saturato corrispondente ad una condizione di instabilità.* 77
- Figura 38 *Regioni d'instabilità dell'oscillatore di Mathieu ottenute al variare di  $\epsilon$  e  $f_d$  del segnale  $V_\epsilon$ .* 78
- Figura 39 *Regioni di stabilità (S) ed instabilità (I) al variare di  $\phi$  ed  $m$ . (a) Controllo di fase partendo da una soluzione instabile a  $f_d = 2f_r$ ,  $\epsilon = 0.215$ . (b) Controllo di fase partendo da una soluzione stabile a  $f_d = 1.77f_r$ ,  $\epsilon = 0.215$ .* 81
- Figura 40 *Regioni d'instabilità dell'oscillatore di Mathieu, le zone gialle e rosse sono rispettivamente le regioni di stabilità e di instabilità determinate numericamente al variare di  $\epsilon$  ed  $f_d$ . I punti in blu sono i dati sperimentali.* 82
- Figura 41 *Regioni di stabilità (gialle) ed instabilità (rosse) al variare di  $\phi$  ed  $m$  sovrapposte ai punti sperimentali. (a) Confronto ottenuto per  $f_d = 2f_r$ ,  $\epsilon = 0.215$ . (b) Confronto per  $f_d = 1.77f_r$ ,  $\epsilon = 0.215$ .* 83
- Figura 42 *Rappresentazione polare dei diagrammi in Fig.41. (a)  $f_d = 2f_r$ ; (b)  $f_d = 1.77f_r$ .* 84
- Figura 43 *Superfici  $E_N(\tau, \phi)$  per  $\tilde{T} = 100$  e curve  $E_N(\tau)$ , per vari  $\tilde{T}$ . Nell'immagine (a)  $f_d = 2f_r$ ,  $m = 4$  e nel grafico allegato  $\phi = 264^\circ$ . (b)  $f_d = 1.77f_r$ ,  $m = 4$  e nel grafico allegato  $\phi = 120^\circ$ .* 85
- Figura 44 *Superficie  $E_N(\tau, \phi)$  e curve  $E_N(\tau)$ , per vari  $\tilde{T}$ . I parametri sono  $f_d = 1.77f_r$  ed  $m = 2$ ; nel grafico allegato  $\phi = 180^\circ$ .* 86
- Figura 45 *Arrangiamento sperimentale di olografia digitale IR in configurazione off-axis. (BS): beam splitter. (L1, L2): lenti. (VA): attenuatore variabile. (M1, M2): specchi.* 93

- Figura 46 *Immagine di un oggetto attraverso il fumo ottenuta con IRDH. (a) Oggetto di bronzo in una teca di Plexiglas<sup>TM</sup>. Le immagini sono state raccolte con una camera nel visibile prima e dopo di inserire il fumo nella teca. (b) Immagine termografica dell'oggetto attraverso il fumo. (c) Ricostruzione dell'immagine olografica d'ampiezza dello stesso oggetto.* 95
- Figura 47 *Immagine di una statuetta di metallo vista attraverso il fuoco delle candele. (a) Tecnica di acquisizione termografica ed immagine corrispondente. (b) Acquisizione olografica e ricostruzione d'ampiezza. Poiché nell'IRDH non sono necessari sistemi di focalizzazione, l'energia delle fiamme si distribuisce sull'intero sensore evitandone la saturazione.* 96
- Figura 48 *Immagini di una persona vista attraverso le fiamme. (a) Immagine termografica. (b- c) Immagini nel visibile di una mano e di una persona. (d) Immagini olografiche. Le fiamme, in questo caso, coprono tutto il campo di vista del sensore.* 97
- Figura 49 *Immagine olografica di una persona dietro le fiamme. Sinistra: ricostruzione olografica con un solo olograma. Destra: ricostruzione con acquisizioni multiple.* 98

Parte I

MODELLIZZAZIONE DELLA DINAMICA DELLA  
SCARICA LUMINOSA DI UN TUBO AL PLASMA



## LA SCARICA NEI TUBI AL PLASMA

---

Lo studio della scarica nei tubi al plasma, benché affrontato in vari periodi storici da numerosi studiosi, risulta ancora un argomento di interesse sia teorico che applicativo. Da un punto di vista teorico sono ancora molti gli aspetti della fisica della scarica la cui comprensione risulta incompleta, basti pensare, per esempio, al problema della modellizzazione della regione di contatto tra plasma ed elettrodi. Ancora maggiore è l'interesse applicativo. Molto sviluppato è l'utilizzo delle scariche al plasma per il trattamento e la modifica superficiale dei materiali. Un esempio importante è la microincisione del silicio (*etching*) che permette una precisione nanometrica nella produzione di microprocessori e circuiti integrati in genere. L'impiego poi delle scariche come sorgenti di radiazione, nel visibile e nell'ultravioletto, è molto diffuso per la realizzazione di sistemi di visualizzazione di immagini come, ad esempio, i televisori al plasma. Oltre i già citati motivi d'interesse, la scarica nel plasma ha attirato, ormai da quasi trent'anni, l'attenzione dei fisici anche per osservazioni interessanti sulla dinamica della scarica stessa, in particolare nella regione di emissione di radiazione visibile. I meccanismi di scarica, fondamentalmente non lineari, hanno permesso l'osservazione di dinamiche caotiche la cui modellizzazione, benché complessa, è molto vicina a quella di altri particolari sistemi oscillanti (*relaxation oscillators*) molto comuni, per esempio, in ambito biologico. L'oggetto di questa prima parte è lo studio della dinamica di scarica di un tubo al neon di origine commerciale, tipicamente usato per insegne luminose. In questo lavoro presentiamo sia una descrizione dettagliata, da un punto di vista dinamico, della scarica con emissione luminosa sia una modellizzazione originale del fenomeno.

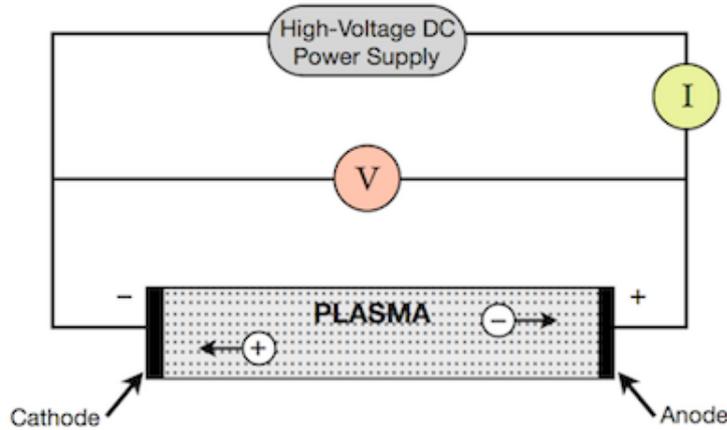


Figura 1: *Arrangiamento sperimentale tipico per la misura della caratteristica tensione corrente di un tubo a scarica a bassa pressione [1].*

### 1.1 FISICA DELLA SCARICA NEI TUBI AL PLASMA

In questa sezione diamo un cenno alla fisica della scarica nei gas, seguendo i riferimenti [10][11], in condizione di corrente continua e bassa pressione, nei due regimi di funzionamento cui siamo principalmente interessati: la regione di scarica oscura e di scarica a bagliore. La rappresentazione del comportamento elettrico di un tubo a scarica si può ottenere costruendo sperimentalmente, con un arrangiamento del tipo mostrato in Fig.1, la curva caratteristica tensione corrente. La forma generale di tale curva, presentata in Fig.2 nel caso di un tubo al Neon alla pressione di 1Torr, evidenzia un comportamento fortemente non lineare e presenta repentini salti nella conducibilità elettrica associabile al tubo a scarica come elemento circuitale.

Seguendo i punti sulla curva di Fig.2, descriviamo qualitativamente la fisica dei vari regimi semplificando il sistema come un tubo di sezione  $A$  all'interno del quale siano presenti una coppia di elettrodi planari separati da una distanza  $d$ .

Il tratto iniziale della curva, compreso tra i punti A e il punto D in figura, è identificato come regime della scarica oscura (*dark discharge*) o *scarica di Townsend*, dal nome del fisico inglese che studiò, intorno al 1897, i fenomeni di ionizzazione dei gas in un tubo. Il nome scarica oscura si riferisce al fatto che in questo regime

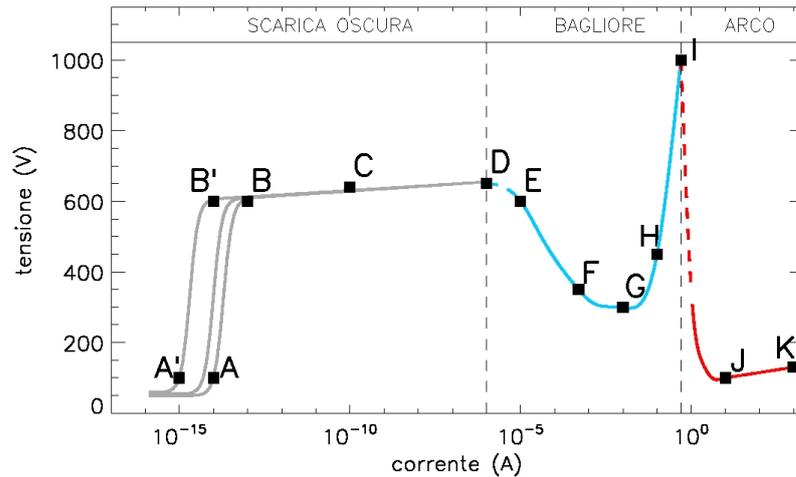


Figura 2: Caratteristica tensione corrente tipica di un tubo a Neon alimentato in corrente continua ed in condizioni di bassa pressione (1 Torr) (da [2]).

di funzionamento non viene emessa radiazione visibile. La debolissima corrente presente nel tubo nei punti A, dell'ordine dei pA o anche meno, è essenzialmente dovuta a fenomeni di ionizzazione naturale (radioattività, raggi cosmici). Poiché il livello di elettroni liberi iniziale può variare, in Fig.2 sono rappresentati più punti A. Un piccolo aumento della tensione di alimentazione determina una produzione, da parte del catodo, di nuovi elettroni per fotoemissione e la corrente nel tubo cresce. Poiché il campo applicato è ancora debole gli elettroni liberi presenti non sono in grado di generare nuove ionizzazioni e la corrente si attesta su un livello costante il cui valore,  $I_s$ , è detto *corrente di saturazione* (tratti verticali delle curve A-B, A'-B').

Il tratto compreso tra i punti B e D è interessato dalla scarica di Townsend propriamente detta. L'aumento della tensione di alimentazione determina l'accelerazione, tra due urti successivi, delle cariche libere che acquistano abbastanza energia da provocare nuove ionizzazioni. Si innesca così un effetto di moltiplicazione a valanga che porta alla crescita della corrente nel tubo fino a valori dell'ordine delle decine di  $\mu\text{A}$ .

Formalmente possiamo schematizzare il processo nel modo seguente. Consideriamo come direzione di moto delle cariche il solo asse tra gli elettrodi, su di esso

definiamo la coordinata  $x$  che varia, quindi, da  $x = 0$  a  $x = d$  coprendo la distanza tra catodo e anodo. Sia  $J_e = -e\Phi_e$  la densità di corrente degli elettroni nella direzione appena definita, dove con il simbolo  $\Phi_e$  abbiamo indicato il flusso di elettroni lungo il tubo, per unità di tempo ed attraverso l'unità di superficie. La variazione del flusso di elettroni è determinata, in questa regione, da due contributi: il primo legato alla variazione di cariche libere presenti e il secondo dovuto alle ionizzazioni secondarie dell'effetto valanga. Possiamo scrivere dunque la variazione totale del flusso di elettroni in un tratto  $dx$  come

$$d\Phi_e = \alpha\Phi_e dx + Sdx \quad (1)$$

nella quale abbiamo indicato con  $S$  il numero di elettroni prodotti nel tubo, nell'unità di volume e di tempo e con  $\alpha\Phi_e dx$  la variazione di flusso connessa alla ionizzazione secondaria, proporzionale al flusso di elettroni presenti ed alla probabilità di ionizzazione per unità di lunghezza  $\alpha$ . Il parametro  $\alpha$  è noto come *coefficiente di Townsend* e dipende dal campo elettrico applicato. La soluzione generale della (1), ponendo  $\Phi_e(0) = \Phi_{ec}$  pari al flusso di elettroni prodotti al catodo, è la seguente

$$\Phi_e = \frac{S}{\alpha} (e^{\alpha x} - 1) + \Phi_{ec} e^{\alpha x} \quad (2)$$

Nel caso in cui non siano presenti una tensione sufficiente per indurre gli elettroni a generare seconda ionizzazione e nessun meccanismo di produzione di elettroni da parte del catodo è innescato (alte temperature, campo elettrico intenso, irraggiamento a frequenza opportuna) allora  $\alpha = 0$  e  $\Phi_{ec} = 0$  e la (2) restituisce

$$\Phi_e(d) = Sd \equiv \Phi_s \quad \Rightarrow \quad I_s = -e\Phi_s A \quad (3)$$

dove  $\Phi_s$  rappresenta il flusso all'anodo in condizioni di saturazione, per cui possiamo scrivere

$$\Phi_e = \frac{\Phi_s}{\alpha d} (e^{\alpha x} - 1) + \Phi_{ec} e^{\alpha x} \quad (4)$$

Per ricavare la probabilità di ionizzazione per unità di lunghezza, indicata con  $\alpha$ , partiamo dalla probabilità di collisione per unità di lunghezza espressa in forma esponenziale

$$P(x) = \frac{1}{\lambda} e^{(-\frac{x}{\lambda})} \quad (5)$$

avendo indicato con  $\lambda$  il cammino libero medio degli elettroni tra due collisioni successive. Se consideriamo ora che  $\lambda$  è inversamente proporzionale alla densità degli atomi possiamo porre, in condizioni isobariche,  $1/\lambda = Ap$ , dove  $p$  è la pressione ed  $A$  è caratteristica del tipo di gas e dipende, in generale, dalla temperatura. Inoltre, per provocare una ionizzazione, l'elettrone deve percorrere una distanza  $x_i$  tale che l'energia acquisita, in un campo elettrico costante  $E$ , eguagli l'energia di ionizzazione dell'atomo  $U_i$ . Poniamo dunque  $Ex_i = U_i$  e scriviamo l'espressione per  $\alpha$

$$\alpha \equiv P(x_i) = \frac{1}{\lambda} e^{(-\frac{x_i}{\lambda})} = Ape^{-\frac{ApU_i}{E}} \quad (6)$$

La precedente viene posta, in genere, nella forma

$$\frac{\alpha}{p} = Ae^{-\frac{C}{E/p}} = f\left(\frac{E}{p}\right) \quad (7)$$

per rendere evidente che la ionizzazione di un gas in un tubo dipende del rapporto  $E/p$ , con  $A$  e  $C = AU_i$  parametri caratteristici della specie gassosa utilizzata. Dalla (7), cercando il massimo di  $\alpha(p)$ , si ottiene la pressione che rende massima la corrente

$$p_{\max} = \frac{E}{C} \quad (8)$$

valori tipici per i parametri introdotti sono  $A \simeq 10^3 \text{m}^{-1} \text{Torr}^{-1}$  e  $C \simeq 10^4 \text{Vm}^{-1} \text{Torr}^{-1}$ .

Nel punto D di Fig.2 la tensione ai capi del tubo è in grado accelerare le cariche presenti fino al punto che gli ioni, colpendo il catodo, riescono a provocare l'emissione secondaria di elettroni. Si ha così la rottura dielettrica del mezzo (*breakdown elettrico*) ed il tubo transisce dalla regione di scarica oscura alla regione di scarica luminosa normale (*normal glow discharge*).

Al flusso totale di elettroni dal catodo va aggiunto il contributo d'emissione secondaria  $\Phi_{es}$ , che è proporzionale al flusso di ioni incidenti  $\Phi_{ioni}$

$$\Phi_{es} = \gamma \Phi_{ioni} \quad (9)$$

il fattore di proporzionalità  $\gamma$ , tipicamente dell'ordine di  $10^{-2}$ , è spesso indicato come *secondo coefficiente di Townsend*.

Dal bilancio del flusso carica al catodo e all'anodo, introducendo la (9) e manipolando algebricamente la (2) si ottiene la condizione d'innesco (*breakdown*) della scarica in un gas in corrente continua [12]

$$1 - \gamma \left( e^{\alpha d} - 1 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) = \alpha d \quad (10)$$

che rende evidente il ruolo del fattore  $\gamma$  nel processo di esplosione della carica.

La condizione trovata può essere espressa in termini della tensione di alimentazione  $V_b$  per esprimere il voltaggio necessario al breakdown. Utilizzando la (7) con  $E = V_b/d$  si ha

$$V_b = \frac{Cpd}{\ln \left[ Apd / \ln \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \right]} = f(pd) \quad (11)$$

nota come *legge di Paschen*.

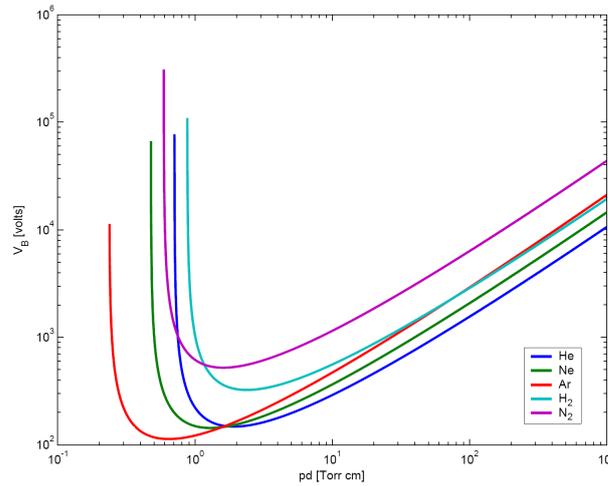


Figura 3: *Curve di Paschen per Elio, Neon, Argon, Idrogeno e Azoto [3].*

Osservando la (11) si può concludere che esiste un valore  $pd = (pd)_{\min}$  per il quale la tensione di breakdown assume il valore minimo  $V_b = V_{b,\min}$ . Quando il valore di  $pd$  cresce, gli elettroni perdono molta energia nelle collisioni, c'è bisogno di campi più intensi per sostenere la scarica e l'andamento della tensione  $f(pd)$  diventa lineare. Sotto il valore minimo del prodotto  $pd$  la tensione necessaria al breakdown sale rapidamente e la scarica non si innesca. Questo può succedere se il numero di collisioni non è sufficiente (legato a  $p$ ) o se la distanza percorsa è troppo piccola. In Fig. 3 è mostrato l'andamento della legge di Paschen per vari

elementi gassosi.

La condizione (10), che definisce l'innesco del breakdown, determina, formalmente, una densità di corrente infinita. Ovviamente ciò non avviene. Per effetti di accumulo e distribuzione della carica lungo il tubo, si instaura la transizione da scarica oscura a scarica a bagliore con insorgenza di una distribuzione di zone luminose, ad intensità variabile, lungo tutta la lunghezza del tubo. Concludiamo questo paragrafo dando una descrizione fortemente semplificata delle principali zone luminose seguendo lo schema di Fig.4

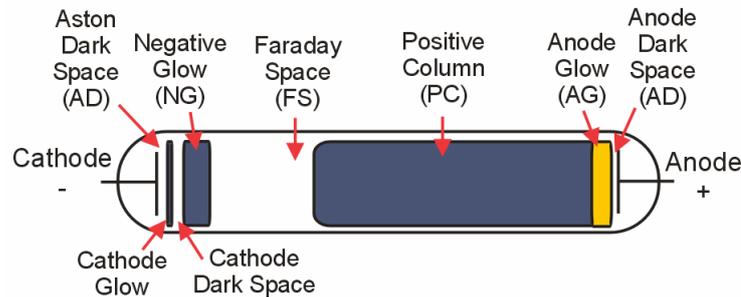


Figura 4: Regioni visibili in regime di scarica a bagliore normale [4].

Nella zona vicina al catodo si possono individuare tre regioni successive denominate rispettivamente *zona oscura di Aston*, *bagliore catodico* e *zona oscura del catodo*. In questo primo tratto gli elettroni vengono fortemente accelerati ed acquistano energia. Collidendo con gli atomi danno luogo alla moltiplicazione a valanga ma perdono gran parte della loro energia, emettendo una intensa radiazione nella regione detta di *bagliore negativo*. Gli elettroni frenati ed ormai poco energetici determinano un accumulo di carica negativa che scherma il campo elettrico. Essi non sono più in grado di produrre ionizzazioni ed, accelerati da un campo più debole, hanno bisogno di una distanza maggiore per acquisire l'energia necessaria a ionizzare gli atomi. Ciò giustifica la presenza del cosiddetto *spazio di Faraday* caratterizzato dall'assenza di emissione. Alla fine di questo tratto, gli elettroni riacquistano l'energia sufficiente a produrre emissione visibile, le densità ioniche ed elettroniche si equivalgono e raggiungono la condizione di plasma uniforme. Questa zona si estende fino all'anodo ed è chiamata *colonna positiva*, in essa il campo elettrico è praticamente costante e sufficiente a sostenere l'emissione di

radiazione visibile [13].

## 1.2 SCARICA NEI TUBI AL PLASMA: ASPETTI DINAMICI

Il nostro interesse è rivolto alla descrizione della dinamica oscillatoria di emissione di un tubo al plasma, alimentato in corrente continua, ed alla introduzione di un modello che ne descriva le caratteristiche dinamiche fondamentali. Appare quindi opportuno elencare e descrivere i risultati principali che, su questi aspetti, sono stati fin qui raggiunti. Una descrizione esaustiva e puntuale dei risultati rilevanti di dinamica non lineare in fisica del plasma può essere trovata in [14].

I fenomeni oscillatori associati alla scarica a bagliore sono noti fin dagli anni del primo dopoguerra [15]. Le caratteristiche principali di tali oscillazioni dipendono, come abbiamo visto nella sezione precedente, da vari fattori, tra i quali possiamo ricordare il tipo di gas impiegato, la pressione, le dimensioni del tubo. Le oscillazioni possono essere seguite monitorando la tensione, la radiazione emessa o anche la corrente attraverso il tubo e di esse non esistono modelli certi che possano darne una spiegazione qualitativa unica.

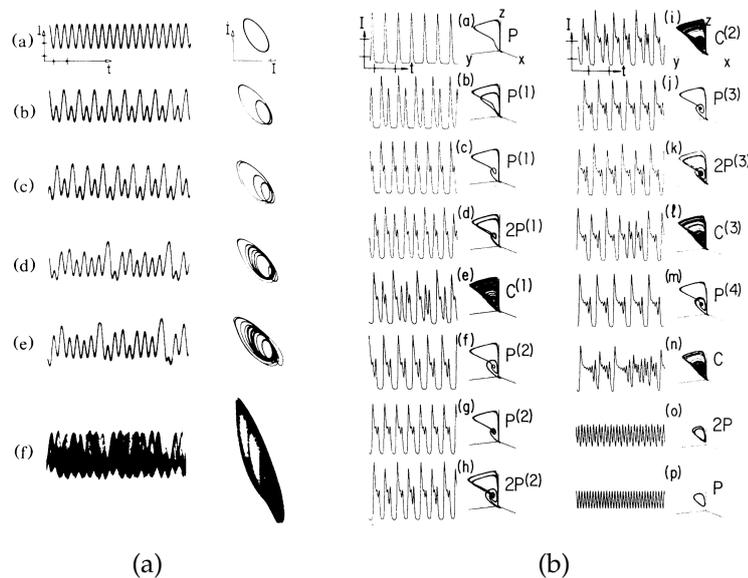


Figura 5: *Caos in un tubo a scarica: (a) evidenza di caos deterministico e (b) di caos omoclinico riportati in [5, 6].*

La natura non lineare del processo di scarica è responsabile della comparsa di comportamenti caotici la cui prima osservazione risale al 1987 e riportata nel lavoro di *T. Braun et al.* [5]. Nel lavoro citato, il caos deterministico è stato osservato nel segnale di corrente che attraversava un tubo di Plücker contenente elio, alimentato in corrente continua. Gli autori hanno mostrato che, al variare dell'alta tensione d'alimentazione, il sistema esibisce comportamenti dinamici stazionari, periodici o caotici con una transizione al caos con raddoppio di periodo (Fig.5 (a)). Solo pochi anni dopo gli stessi autori hanno registrato, in un tubo a scarica a base di argon, una successione di oscillazioni in cui la dinamica periodica si alterna a regimi caotici, le cosiddette oscillazioni miste (*mixed-mode oscillations*), spiegabili in termini di caos omoclinico [6] (Fig.5 (b)).

Negli anni successivi, l'interesse crescente sulla sincronizzazione di sistemi caotici ha coinvolto anche i tubi a scarica. In particolare la sincronizzazione di fase è stata dimostrata, impiegando questi dispositivi, in varie condizioni. Questo tipo di sincronizzazione consiste nell'aggancio in fase tra due oscillatori caotici accoppiati, che comunque mantengono caotiche ed non correlate le ampiezze. In questo senso *E.Rosa et al.* [7, 16] hanno studiato sperimentalmente la sincronizzazione in fase su un tubo a scarica di Geissler, accoppiato con un generatore periodico, alla frequenza dominante del sistema, aggiunto opportunamente al sistema. La strategia adottata è stata quella di acquisire un lungo segnale temporale di corrente a generatore sinusoidale spento, determinare la frequenza dominante e costruire l'attrattore caotico. Alla frequenza dominante sono state poi acquisite due mappe stroboscopiche, a generatore spento e acceso rispettivamente, ed i punti sperimentali acquisiti sovrapposti sul grafico dell'attrattore. La concentrazione di punti a generatore acceso dimostra l'avvenuta sincronizzazione di fase (Fig.6) .

Poco più tardi, *M.S. Davis et al.* [17] sono andati oltre la semplice sincronizzazione di fase accoppiando il tubo a scarica simultaneamente con due generatori sinusoidali indipendenti. In questo caso infatti si ha la competizione tra due oscillatori per raggiungere la sincronizzazione di fase con un terzo sistema oscillante ed è il primo passo verso processi di sincronizzazione tra una molteplicità di oscillatori. Misure e simulazioni eseguite dagli autori hanno mostrato che la scarica nel

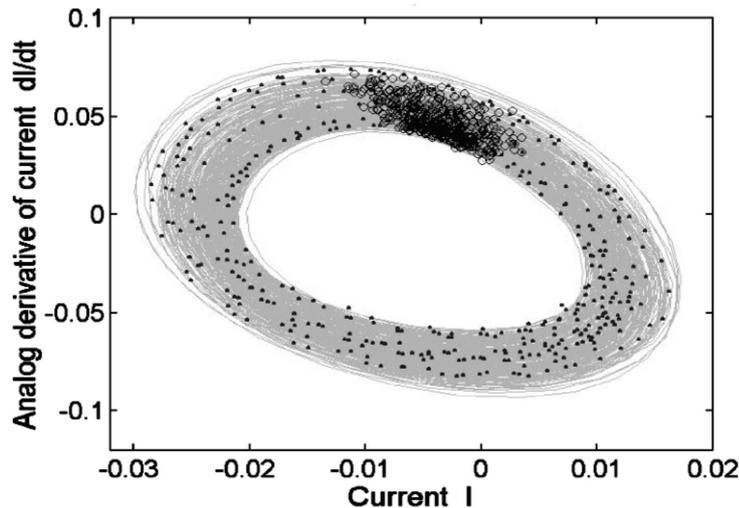


Figura 6: Sincronizzazione di fase riportata in [7]. A generatore sinusoidale acceso la mappa stroboscopica esibisce una concentrazione di punti in una zona ristretta dell'attrattore.

plasma avviene con aggancio in frequenza con uno dei due generatori alternativamente. Quando l'aggancio in fase tra l'oscillazione della scarica e primo generatore 'slitta' allora si instaura la sincronizzazione in fase con il secondo. Nella dinamica del processo gioca un ruolo fondamentale la frequenza relativa dei due generatori rispetto a quella propria della scarica nel plasma.

Particolarmente interessante, per i nostri scopi, è la letteratura riguardante gli studi sulla transizione al caos nella dinamica di scarica. Dopo le già menzionate osservazioni sulla transizione con raddoppio di periodo, sono state riportate delle evidenze di transizioni al caos di tipo quasi periodico [18, 19]. Questi lavori hanno riguardato le oscillazioni auto sostenute nel plasma nella regione della scarica oscura, in condizione di pressioni bassissime ( $\sim 10^{-3}$ Torr). La transizione quasi periodica è stata dimostrata dall'analisi spettrale e dal calcolo degli esponenti di Lyapunov dalle serie temporali sperimentali del segnale di corrente nel plasma. Di particolare importanza, per le osservazioni fatte in questa tesi di dottorato e che saranno illustrate più avanti, è il lavoro di C. Letellier et al. [8]. In questo lavoro è stata osservata sperimentalmente uno scenario di biforcazione globale con induzione della rottura di un toro bidimensionale, contraddistinto da due frequenze principali. Come si osserva in Fig.7, la rottura avviene attraverso una crisi del toro con un'orbita periodica instabile, la cui periodicità determina il

numero dei lati del poligono che rappresenta la sezione del toro.

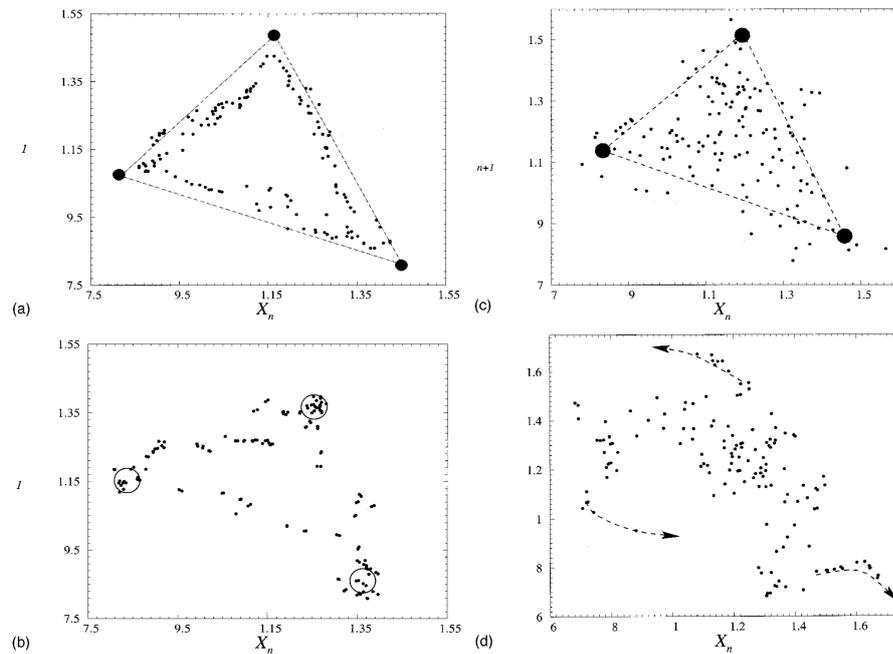


Figura 7: *Mappe sperimentali di primo ritorno attraverso la sezione di Poincaré in [8]. Seguendo la sequenza a,b,c,d si osservano la sezione triangolare del toro, tre orbite periodiche instabili e la transizione al caos.*

Nel corso degli ultimi decenni ulteriori fenomeni non lineari sono stati osservati nei plasmi. Caratteristica comune a tutti gli esperimenti è l'evoluzione della dinamica di scarica verso stati caotici all'aumento della corrente o della tensione nel plasma. Altri fenomeni come la risonanza stocastica e coerente nel plasma hanno ottenuto una certa attenzione. La risonanza stocastica è un fenomeno per il quale la risposta del sistema dinamico, ad un debole segnale periodico applicato, è amplificata dalla presenza di un opportuno livello di rumore, mentre la risonanza coerente si riferisce al fenomeno per il quale un sistema esibisce una oscillazione tra due stati dinamici diversi che risulta più coerente per un valore ottimale del rumore. Esempi di questi fenomeni sui plasmi possono essere trovati in [20, 21, 22].



## SCARICA IN UN TUBO AL PLASMA: OSSERVAZIONI SPERIMENTALI

---

Nel capitolo precedente abbiamo fatto, in estrema sintesi, un excursus delle applicazioni, sviluppate negli ultimi decenni, della dinamica non lineare in ambito di fisica del plasma. Il grande volume di articoli sulla dinamica nei plasmi, benché riguardanti una molteplicità di fenomeni non lineari diversi, trova comunque un tratto comune nell'utilizzo di dispositivi di scarica specificatamente costruiti e dedicati alla ricerca scientifica. Si pensi ai tubi di Geissler e di Plücker, ad esempio. Al contrario e come già avuto modo di dire, viene presentato, in questa prima parte, lo studio della dinamica di scarica luminosa di un tubo non nato come dispositivo da laboratorio. Si tratta infatti di un tubo a scarica commerciale comunemente usato per le insegne luminose. La ragione di questa scelta risiede nel tentativo di trasferire tecniche d'indagine su sistemi sempre più reali e di larga diffusione, siano essi naturali o, come in questo caso, realizzazioni industriali. Considerato l'impatto che il plasma ha nelle applicazioni industriali, sinteticamente già descritte all'inizio del precedente capitolo, sia come elemento per il trattamento dei materiali sia come componente nei dispositivi moderni di riproduzione d'immagini, la ricerca condotta per mezzo e su dispositivi commerciali riveste un certo interesse.

In questo capitolo, oltre la descrizione dell'esperimento condotto, vengono presentati i dati raccolti e le relative trattazioni ai fini di caratterizzare la dinamica della scarica nella regione di emissione di radiazione visibile.

## 2.1 APPARATO SPERIMENTALE

Il tubo al plasma, oggetto della nostra indagine, è stato realizzato da una ditta che produce insegne luminose per esercizi commerciali. Si tratta di un bulbo cilindrico in vetro delle dimensioni di 0.5 m di lunghezza e di 0.025 m di diametro, all'interno del quale sono presenti due elettrodi. Il gas di riempimento è il Neon e la pressione si aggira intorno ad 1 Torr. Su questo punto è bene specificare che, essendo il dispositivo di origine commerciale, la precisione con cui è nota la pressione non è verificabile e comunque, trattandosi di un bulbo sigillato, essa non è soggetta a variabilità che possa ripercuotersi sul funzionamento del tubo.

Le misure sperimentali, che come vedremo riguardano sia la caratterizzazione elettrica che dinamica della scarica, sono state effettuate approntando il circuito elettrico schematicamente rappresentato in Fig.8, in cui il tubo al neon è evidenziato in rosso.

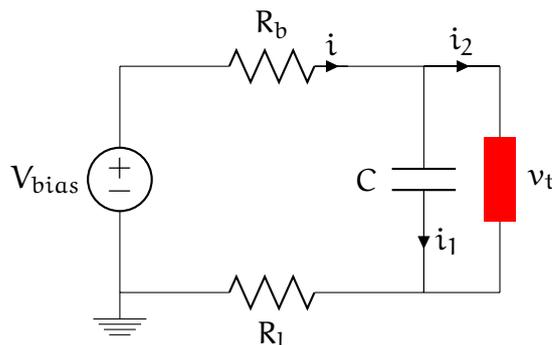


Figura 8: Arrangiamento sperimentale usato per la caratterizzazione dinamica del tubo a scarica, qui rappresentato in rosso.

Il sistema è alimentato con una sorgente di alta tensione indicata in figura con  $V_{bias}$ . Si tratta dell'alimentatore in corrente continua *Fluke 415 B High Voltage Power Supply* capace di fornire tensioni da 0 a 3100 V e correnti da 0 a 30 mA. Agendo sulle manopole del pannello frontale si può regolare la tensione d'uscita con passi da 500 V, 100 V, 10 V e 1 V, un ulteriore controllo vernier permette una regolazione fine sotto 1 V. Un selettore frontale gestisce la polarità della tensione d'uscita che può essere così impostata positiva o negativa rispetto a terra. E' utile precisare che

gli elettrodi del tubo risultano identici e possono essere usati indifferentemente come anodo o catodo.

Nella maglia sono presenti due elementi resistivi,  $R_b$ , detta resistenza di *ballast*, dal valore nominale di  $150\text{k}\Omega$  ed  $R_l$  dal valore nominale di  $1.2\text{k}\Omega$ . Una capacità  $C$  è inserita in parallelo ed il suo valore è molto influente, come sarà chiaro più avanti, sui tempi di scarica determinando una forte dipendenza della dinamica di emissione da questo parametro. Le misure sono state effettuate in corrispondenza dei due valori della capacità  $C = 2.4\text{nF}$  e  $C = 4.8\text{nF}$ . La tensione ai capi del tubo a scarica è stata indicata con  $v_t$ .

La presenza dell'elevata resistenza di ballast  $R_b$  consente di non trasferire immediatamente tutta la tensione  $V_{\text{bias}}$  ai capi del tubo ma solo dopo che il processo di carica del condensatore è completo. Questo fa sì che il sistema si comporti come un cosiddetto *relaxation oscillator*, la cui prima osservazione risale al lavoro di B. van der Pol all'inizio del 1900 [23]. La caratteristica principale di questo tipo di sistemi è la presenza di due scale dei tempi, cioè in ogni periodo d'oscillazione si susseguono un intervallo di dinamica lenta ed uno di dinamica veloce. L'oscillazione che ne segue è quindi molto differente dalla canonica onda sinusoidale. Le fasi di funzionamento, che si ripetono ad ogni ciclo, possono essere illustrate come segue. All'inizio la capacità comincia a caricarsi con un tempo caratteristico dipendente sia dal valore della capacità stessa che dal valore della resistenza "vista" ai capi del condensatore. A tale proposito bisogna tenere presente che, in questa fase e finché la tensione  $v_t$  non raggiunge un valore adeguato, il tubo, come elemento circuitale, può essere visto come una resistenza del valore delle centinaia di  $\text{k}\Omega$ . Quando la tensione del condensatore raggiunge un dato livello critico, la conducibilità del tubo si alza repentinamente e nel tubo comincia la scarica con emissione di radiazione. A questo punto la tensione sul condensatore cala rapidamente, la conducibilità del tubo si riabbassa, il processo di scarica si interrompe e comincia un nuovo ciclo. Analogamente esistono due fasi per la distribuzione dell'energia in un periodo, infatti ad una fase di accumulo di energia nel condensatore segue un rapido rilascio attraverso la scarica. Risulta evidente, da questa prima descrizione e da quanto già detto descrivendo la curva caratte-

ristica tensione corrente nel primo capitolo, che il comportamento elettrico del tubo come elemento circuitale è fortemente non lineare. Il segnale elettrico che ne deriva appare come una sequenza di impulsi e la tensione associata ha una forma simile ad una funzione a dente di sega (Fig.9).

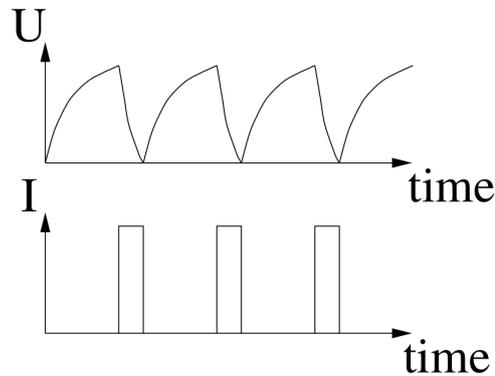


Figura 9: Rappresentazione schematica dell'andamento di tensione ( $U$ ) e corrente ( $I$ ) attraverso un tubo a scarica. Si distinguono chiaramente due fasi all'interno di un ciclo corrispondenti alla carica ed alla scarica del condensatore (da [9]).

Generatori di questo tipo sono comunemente usati nei circuiti degli oscilloscopi, delle televisioni e dei monitor dei computer. Inoltre questa tipologia di oscillazione è comune in molti sistemi di origine biologica. Alcuni esempi sono costituiti dalla dinamica del potenziale d'azione nell'attività dei neuroni o, ancora, dalla dinamica del battito cardiaco come evidenziato dallo stesso B. van der Pol nel 1928 [24].

In questa configurazione circuitale sono state effettuate misure elettriche di caratterizzazione del tubo come elemento circuitale impiegando, per la misura della tensione ai capi della resistenza di carico  $R_L$ , il multimetro *Agilent 34401A*  $6\frac{1}{2}$  digit, dove l'indicazione  $\frac{1}{2}$  digit si riferisce al fatto che la cifra più significativa può assumere solo i valori 1 e 0.

La studio della dinamica di scarica è stata effettuata registrando sequenze temporali della radiazione emessa dal tubo e la tensione ai capi di esso. La radiazione è stata rilevata usando il fotodiodo *New Focus 1621*. Il fotodiodo può essere settato su una resistenza di carico interna pari a  $50\ \Omega$ ,  $10\ \text{k}\Omega$  e Open. L'impostazione a  $50\ \Omega$ , quella usata in questo esperimento, permette di raggiungere velocità di ri-

sposta del sensore inferiori al ns. Il sensore è sensibile alla radiazione compresa tra 350 e 1000 nm ed ha, come si vede in Fig.10, la massima risposta nella regione di nostro interesse, quella sul rosso dell'emissione del neon, ovvero nell'intervallo 600 ÷ 800 nm.

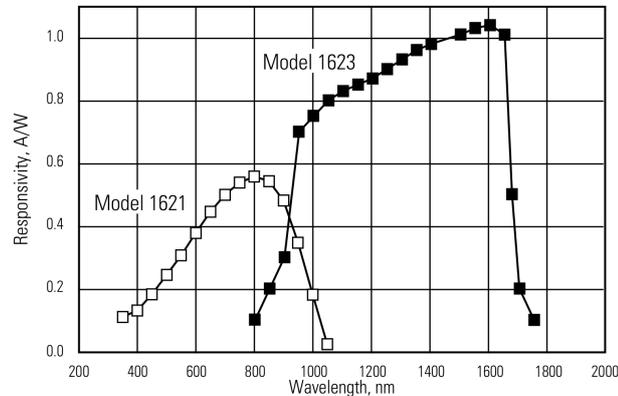


Figura 10: Tipica risposta, al variare della lunghezza d'onda della radiazione incidente, dei fotodiodi New Focus 1621 e 1623.

I segnali sono stati monitorati, e poi registrati, con l'ausilio dell'oscilloscopio digitale *LeCroy LT342 Waverunner*. Il campionamento è stato impostato alla velocità di 1 MSample/s per 0.1 s, che corrisponde ad avere segnali temporali di 100 kpts con intervallo temporale di 1  $\mu$ s/pt. Il livello di tensione sul tubo, dell'ordine delle centinaia di V, ha reso necessario l'utilizzo di una sonda  $\times 10$  per trasferire il segnale all'oscilloscopio.

## 2.2 CARATTERIZZAZIONE ELETTRICA

La caratterizzazione elettrica del tubo a scarica come elemento circuitale, approssimato qui ad un elemento a costanti concentrate con due terminali e senza tenere in alcun conto la dipendenza spaziale della carica, ha una duplice validità. Innanzitutto ci permette di definire qual'è l'intervallo di tensioni di bias per cui il sistema lavora nel regime di scarica a bagliore normale, in secondo luogo ci fornisce una quantificazione diretta della non linearità elettrica del tubo. In questa sezione ci occupiamo del primo aspetto lasciando al prossimo capitolo la trattazione della

non linearità al fine di introdurre un modello analitico per la dinamica di scarica. Applicando la seconda legge di Kirchhoff alla maglia dello schema elettrico proposto in Fig.8 possiamo scrivere

$$V_{bias} = (R_b + R_l) \cdot i + v_t \quad \Rightarrow \quad v_t = V_{bias} - \left(1 + \frac{R_b}{R_l}\right) \cdot v_l = V_{bias} - \kappa_R \cdot v_l \quad (12)$$

avendo definito  $v_l = i \cdot R_l$  ed introdotto il coefficiente adimensionale  $\kappa_R$ . Ne segue che, essendo note tutte le resistenze della maglia, è possibile ricavare la caratteristica statica  $v_t = v_t(i)$  del tubo eseguendo le misure della sola caduta  $v_l$ . In questa affermazione c'è l'assunzione che tutta la corrente per  $R_l$  passi per il tubo a scarica. Questo è rigorosamente vero su tempi molto maggiori del tempo di carica del condensatore posto in parallelo al tubo. Nel nostro caso, avendo montato nel circuito capacità dell'ordine del nF ed essendo le resistenze in gioco dell'ordine dei  $10^2$  k $\Omega$ , abbiamo tempi caratteristici di carica del condensatore dell'ordine dei 100  $\mu$ s e l'equazione (12) è verificata nel giro di qualche decimo di secondo.

Le misure effettuate sono dunque le seguenti. Con il multimetro Agilent 34401A sono state misurate le due resistenze  $R_b$  ed  $R_l$

$$R_b = 148.11 \text{ k}\Omega \quad \text{e} \quad R_l = 1241 \Omega$$

Il multimetro introduce un errore di misura che si quantifica come % lettura +% fondo scala. Sui due fondo scala utilizzati (1M $\Omega$  e 10k $\Omega$ ) si ha 0.008% + 0.001% da cui

$$R_b \pm \Delta R_b = 148.11 \pm 0.02 \text{ k}\Omega \quad \text{e} \quad R_l \pm \Delta R_l = 1241.0 \pm 0.2 \Omega$$

Il coefficiente adimensionale  $\kappa_R$  vale quindi

$$\kappa_R \pm \Delta \kappa_R = 120.35 \pm 0.04$$

Con lo stesso multimetro è stata misurata la caduta di potenziale ai capi di  $R_l$  per valori di  $V_{bias}$  compresi nell'intervallo  $600 \div 2000$  V. Analogamente a quanto fatto per le resistenze si valuta l'errore di misura nel modo seguente 0.0035% + 0.0006% sul fondo scala di 100 V. Per valutare l'errore complessivo sui valori di  $v_t$  bisogna tenere conto ancora dell'incertezza sul valore di  $V_{bias}$ . Dalle specifiche dell'alimentatore Fluke 415 si ricava che la tensione di uscita ha una incertezza pari a

0.25% del valore impostato. Facciamo una valutazione sul peso relativo delle varie fonti d'incertezza. La condizione più sfavorevole si realizza per la misura di  $v_t$  eseguita a  $V_{bias} = 2000\text{ V}$ , misurando  $v_l = 13.63\text{ V}$ . In base alle specifiche di accuratezza sopra elencate, si calcola

$$V_{bias} \pm \Delta V_{bias} = 2000 \pm 5\text{ V} \quad v_l \pm \Delta v_l = 13.630 \pm 0.001\text{ V}$$

da cui, considerando anche il valore di  $\kappa_R$  e propagando gli errori, si ottiene

$$v_t \pm \Delta v_t = 359.63 \pm 5.66\text{ V}$$

Risulta evidente dunque come la principale fonte d'incertezza risieda nell'indeterminazione sul valore di  $V_{bias}$ , che tuttavia si riduce abbassando la tensione fino a 600 V.

In Fig.11 è riportata la caratteristica tensione corrente ottenuta sperimentalmente, nella quale sono state omesse le barre d'errore sulla tensione  $v_t$  perché della stessa dimensione dei marcatori dei punti sperimentali.

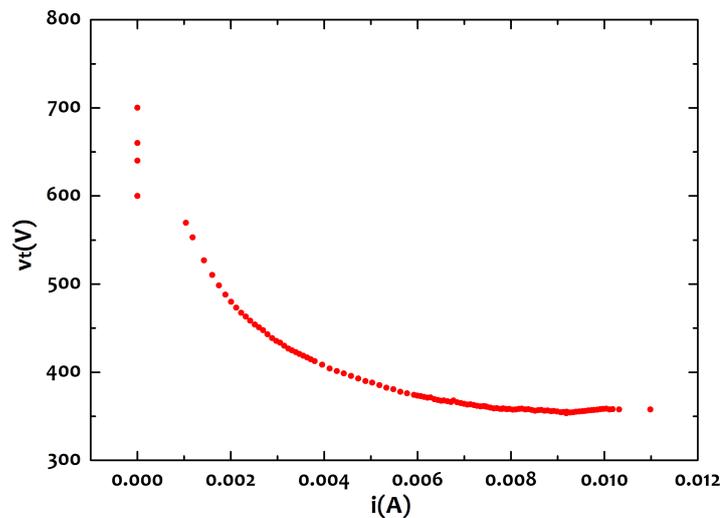


Figura 11: *Caratteristica sperimentale tensione corrente per il tubo a scarica.*

Concludiamo con alcune considerazioni. La curva ottenuta ha un picco intorno a 700 V corrispondente alla medesima tensione  $V_{bias}$ . Questo punto è il corrispondente punto D della caratteristica generica di Fig.2 del capitolo precedente. Siamo dunque nel punto di breakdown elettrico ed il tratto di curva successiva identifica il regime di funzionamento della scarica a bagliore, corrispondente all'intervallo

di valori  $730\text{ V} < V_{\text{bias}} < 2000\text{ V}$  o, se si preferisce,  $0.001\text{ A} < i < 0.011\text{ A}$ . La curva, come nelle attese, presenta pendenza negativa nell'intervallo di valori specificato per  $V_{\text{bias}}$ , in accordo con la generica rappresentazione di Fig.2 e con le curve trovate in letteratura [10]. La forma della curva al margine destro della regione di scarica luminosa, nella zona intorno a  $V_{\text{bias}} \sim 2000\text{ V}$  o  $i \sim 0.011\text{ A}$ , manifesta una certa tendenza a scostarsi dall'andamento asintotico, con asintoto intorno a  $v_t \sim 360\text{ V}$ , e sembrerebbe cominciare la fase di risalita tipica dell'ingresso nella regione della scarica a bagliore anomala.

### 2.3 DINAMICA PER $C = 2.4\text{ nF}$ : SEQUENZE TEMPORALI E BIFORCAZIONE

In questa sezione cominciamo ad analizzare i risultati osservati nella dinamica di emissione durante il processo di scarica nel tubo, nel regime di funzionamento di scarica a bagliore, nell'intervallo di tensioni  $V_{\text{bias}}$  definito nella sezione precedente. Le caratteristiche fondamentali della dinamica di emissione sono state ottenute a partire dalle sequenze temporali del segnale di emissione e della tensione del tubo rispetto a massa. Le predette sequenze temporali, raccolte tramite il fotodiodo New Focus 1621 per l'emissione visibile e tramite una sonda  $\times 10$  nel caso dell'alta tensione sul tubo, sono state visualizzate sull'oscilloscopio LeCroy LT342 e registrate campionando i segnali, come già specificato, a  $1\text{ MSample/s}$  per  $0.1\text{ s}$  ottenendo così serie temporali di  $100000\text{ pts}$  equispaziati con un intervallo temporale di  $1\text{ }\mu\text{s}$ . I dati sono stati raccolti con passo di  $V_{\text{bias}}$  pari, quasi su tutto l'intervallo, a  $10\text{ V}$ , che corrisponde, in totale, a 109 serie temporali per ognuna delle grandezze osservate. Questa grande mole di misure ci hanno permesso una descrizione abbastanza dettagliata dell'evoluzione della dinamica al variare della tensione di alimentazione  $V_{\text{bias}}$  che svolge, dunque, il ruolo di parametro di controllo.

In Fig.12 è riportato un campione significativo dei segnali temporali, scelti in punti particolarmente interessanti e significativi. Le sequenze sono rappresentate sullo stesso intervallo temporale, in modo da consentire un confronto visivo

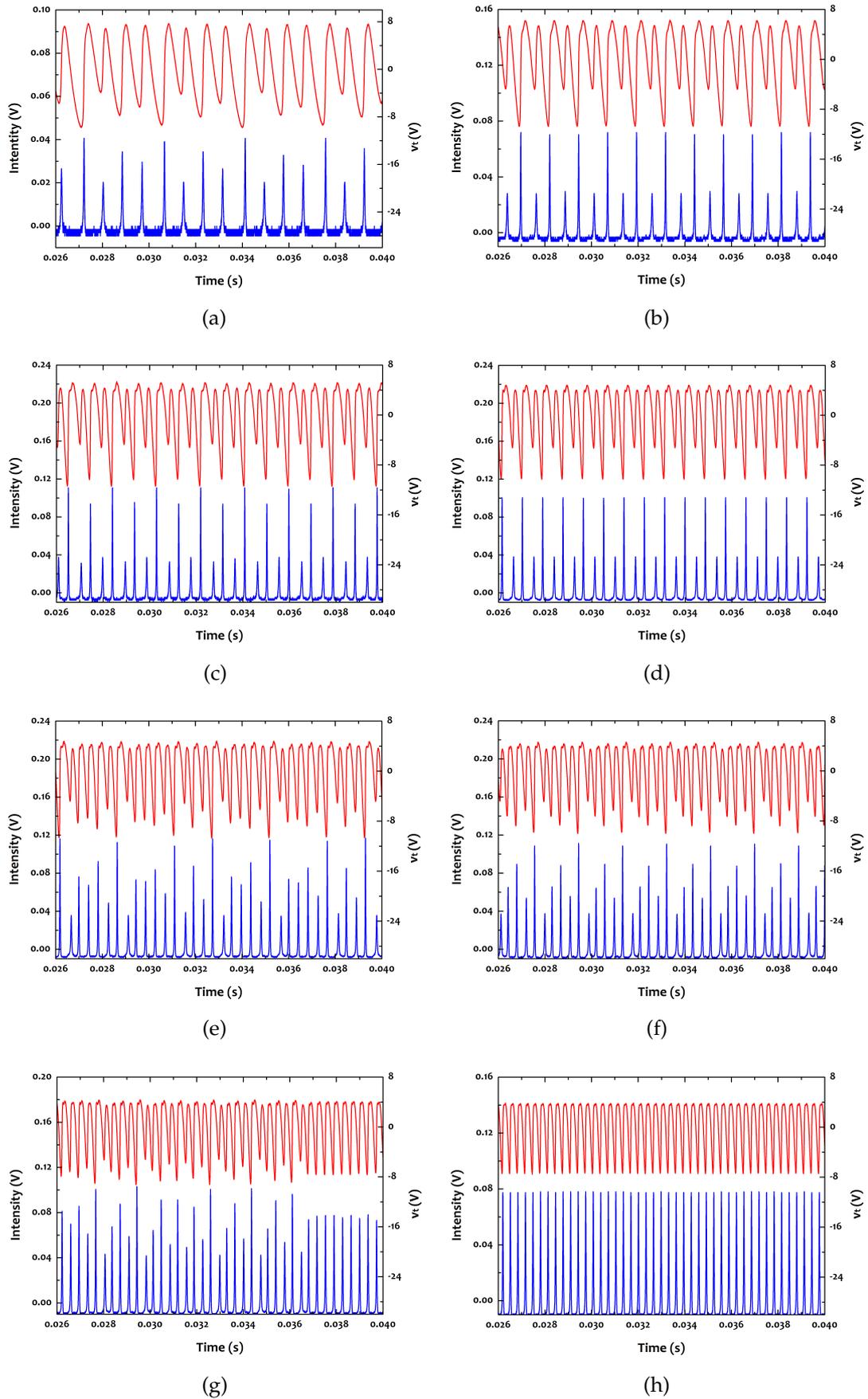


Figura 12: Sequenze temporali della tensione ai capi del tubo (curva rossa) e della intensità d'emissione (curva blu).  $V_{\text{bias}}$  vale rispettivamente: (a) 800 V; (b) 1000 V; (c) 1300 V; (d) 1400 V; (e) 1500 V; (f) 1600 V; (g) 1700 V; (h) 1900 V.

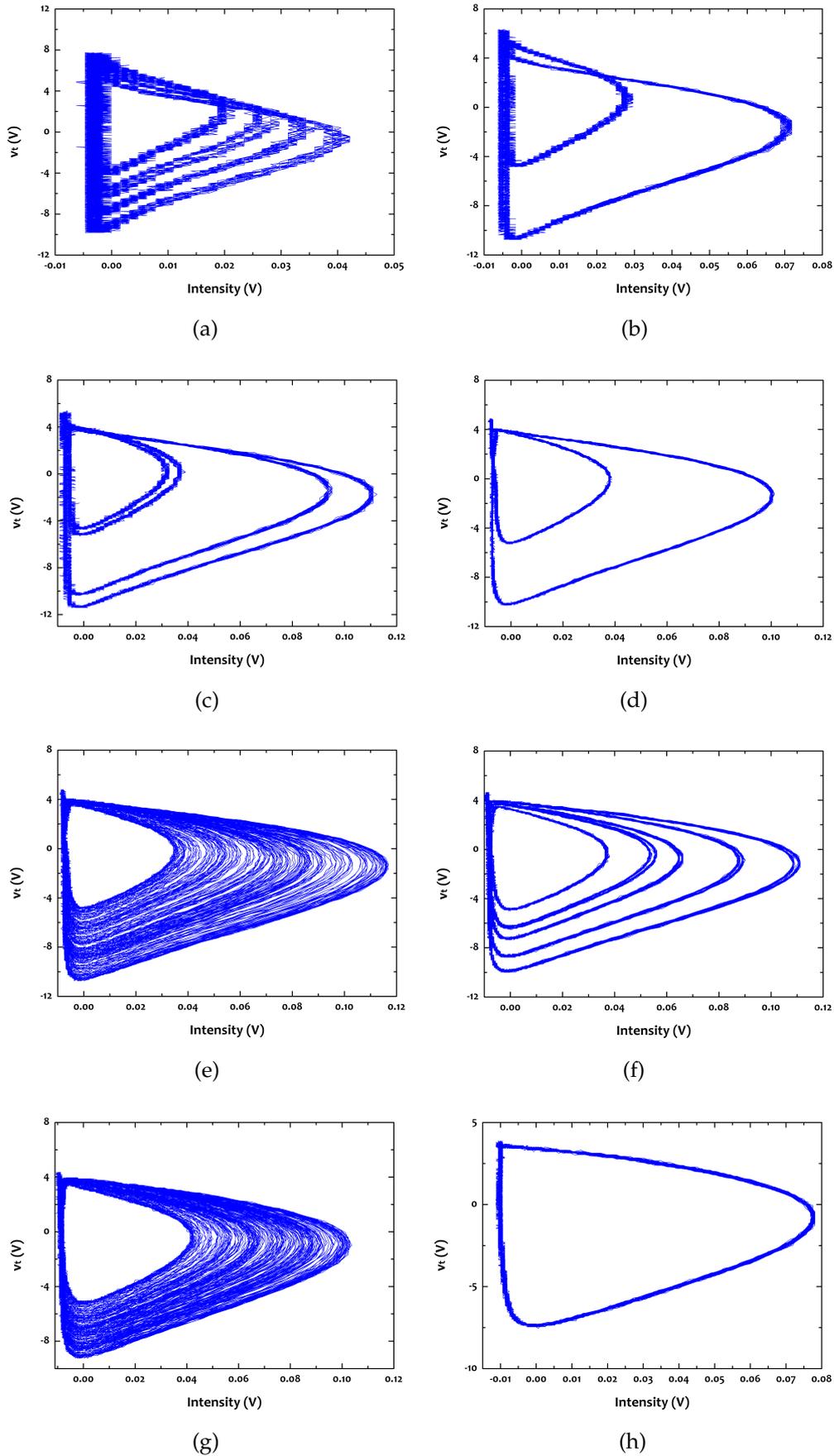


Figura 13: *Proiezione bidimensionale degli attrattori.  $V_{\text{bias}}$  vale rispettivamente: (a) 800 V; (b) 1000 V; (c) 1300 V; (d) 1400 V; (e) 1500 V; (f) 1600 V; (g) 1700 V; (h) 1900 V.*

immediato, e con due scale verticali diverse a causa della differenza dei livelli di tensione. La sequenza rossa rappresenta la tensione  $v_t$  ai capi del tubo e di essa è rappresentata solo la componente oscillatoria (oscillazione riportata intorno a 0V). La sequenza blu è l'andamento dell'intensità di emissione convertita in segnale di tensione. In Fig.13 sono riportate le proiezioni bidimensionali degli attrattori corrispondenti alle sequenze temporali di Fig.12. In queste visualizzazioni l'intensità d'emissione e la tensione sul tubo sono disposti sull'asse orizzontale e verticale rispettivamente.

Focalizzando l'attenzione sui segnali d'intensità e sui relativi attrattori bidimensionali osserviamo che in corrispondenza di  $V_{\text{bias}} = 800 \text{ V}$  (Figg.12, 13 (a)) il sistema manifesta un'orbita periodica di periodo-4, successiva ad una regione, i cui segnali non sono presenti nelle figure, in cui il comportamento dinamico è tipico del piccolo caos (cfr. Fig. 15, diagramma di biforcazione). Già prima di  $V_{\text{bias}} = 1000 \text{ V}$  il sistema, con una biforcazione inversa, si stabilizza su un'orbita periodica di periodo-2 (Figg.12, 13 (b)). Questa finestra si estende per circa 400V fino al valore  $V_{\text{bias}} = 1300 \text{ V}$  dove il sistema biforca e nasce una nuova soluzione di periodo-4 (Figg.12, 13 (c)). Le ampiezze delle oscillazioni, fin qui sempre crescenti, subiscono a questo punto una riduzione repentina, questa crisi è accompagnata da una nuova biforcazione inversa con la comparsa di una breve finestra di periodo-2 (Figg.12, 13 (d)). Il valore  $V_{\text{bias}} = 1400 \text{ V}$  rappresenta il confine tra due regimi dinamici diversi, per valori inferiori il sistema presenta sostanzialmente solo soluzioni periodiche, superando tale valore la dinamica è sostanzialmente caotica salvo richiudersi su un ciclo limite per tensioni maggiori di  $V_{\text{bias}} = 1900 \text{ V}$ . Come si vede nelle Figg.12 e 13 (e), per  $V_{\text{bias}} = 1500 \text{ V}$  il periodo d'oscillazione si estende ospitando, al suo interno, una molteplicità di picchi d'intensità variabile, è l'inizio del regime caotico. La dinamica caotica viene interrotta solo da una piccola finestra periodica, che con immagini più risolte si rivelano essere di periodo-10, che compare nell'intorno di  $V_{\text{bias}} = 1600 \text{ V}$  (Figg.12, 13 (f)). Aumentando ancora il parametro di controllo la dinamica permane caotica fino a che non si raggiunge  $V_{\text{bias}} = 1800 \text{ V}$  (Figg.12, 13 (g)), quando, con una serie di biforcazioni inverse ed una convergenza progressiva delle intensità dei picchi d'emissione, il sistema si

stabilizza, come già osservato, su un ciclo limite (Figg.12, 13 (h)).

E' evidente dagli andamenti temporali sperimentali che il regime caotico che si realizza nel sistema interessa le ampiezze d'oscillazione e non le interdistanze tra i picchi d'emissione. Quindi non c'è alcuna irregolarità dinamica nella tempistica di emissione ma solo sulla intensità della radiazione (ed ovviamente anche sulla tensione ai capi del tubo). Questa è una delle osservazioni sperimentali fondamentali ai fini della costruzione di un modello basato sulla fenomenologia esibita dal sistema.

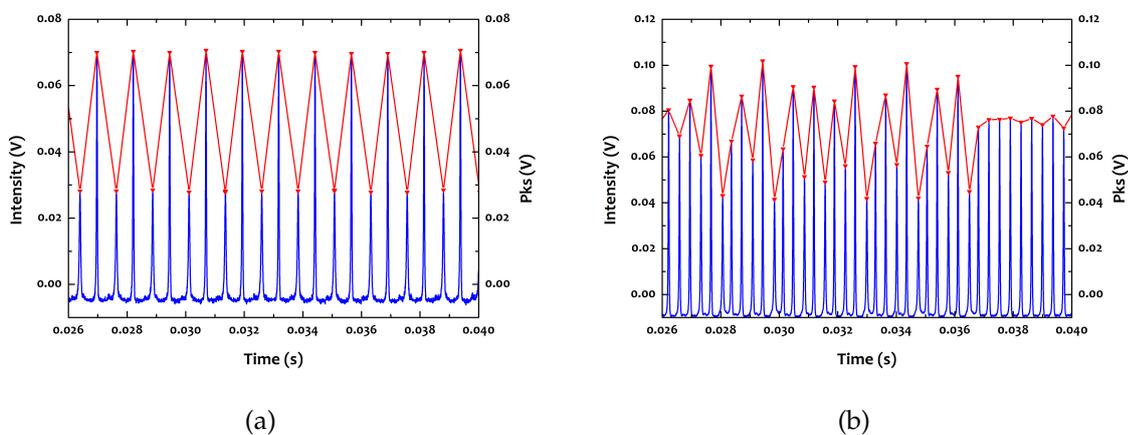


Figura 14: Esempi di estrazione dei massimi dalle sequenze temporali.  $V_{bias}$  vale rispettivamente: (a) 1000 V; (b) 1700 V.

Un resoconto completo e facilmente consultabile del comportamento dinamico dell'emissione del tubo a scarica la possiamo ottenere dalla costruzione del diagramma di biforcazione del sistema. Per il sistema in esame, il diagramma è stato costruito mettendo in grafico le ampiezze dei picchi del segnale di emissione luminosa in funzione del parametro di controllo  $V_{bias}$ . L'estrazione dei massimi è stata eseguita con *OriginLab Pro 8.5*, usando l'algoritmo di analisi dei picchi. Per non inficiare i risultati dell'estrazione con picchi spuri provenienti dal rumore elettrico, sempre presente nelle misure elettriche, abbiamo svolto una preliminare operazione di media su cinque punti attigui (*smoothing*) in modo da addolcire l'andamento dei segnali mantenendo però l'informazione rilevante costituita dal valore dei picchi provenienti dalla dinamica del sistema. In questa modalità an-

che la posizione temporale dei massimi è preservata.

La Fig.14 mostra due esempi dell'analisi dei picchi. L'immagine (a) si riferisce alla tensione  $V_{\text{bias}} = 1000 \text{ V}$  in cui il sistema presenta soluzioni di periodo-2. L'immagine (b), ottenuta dalla sequenza corrispondente a  $V_{\text{bias}} = 1700 \text{ V}$ , presenta invece un regime caotico ed anche in questo caso, in presenza di una distribuzione casuale delle intensità, l'algoritmo valuta correttamente tutti i massimi. Le scale temporali sono identiche a quelle utilizzate nella precedente Fig.12, mentre è stata duplicata, a beneficio del lettore, la scala verticale per favorire una veloce valutazione dei massimi.

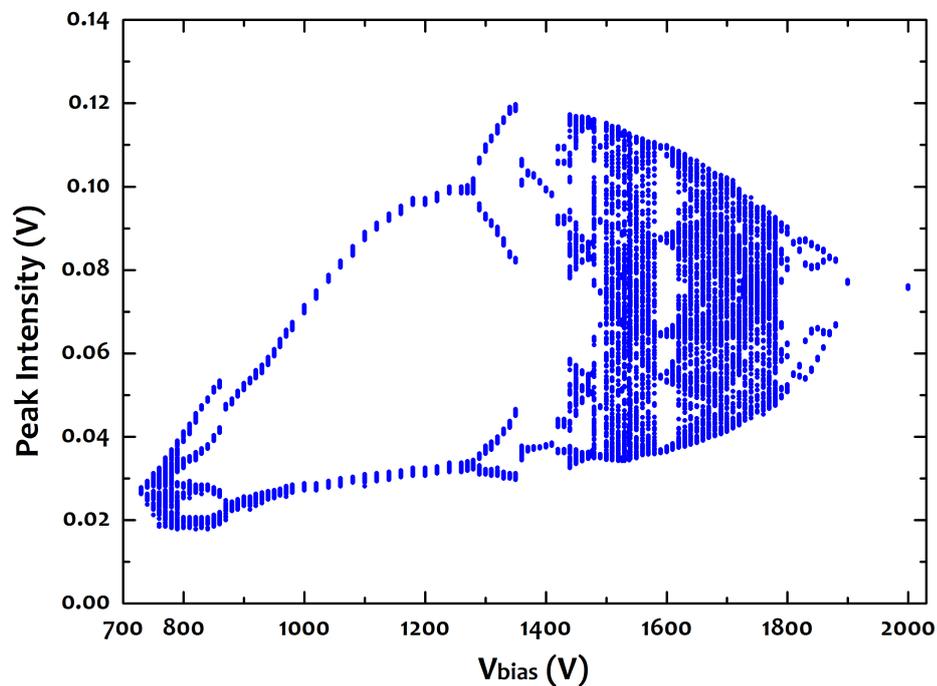


Figura 15: Diagramma di biforcazione del tubo a scarica chiuso su una capacità di  $2.4 \text{ nF}$ .

I valori dei massimi ottenuti dalle 109 sequenze temporali sono stati graficati in funzione dei corrispondenti valori del parametro di controllo  $V_{\text{bias}}$ , ottenendo il diagramma di biforcazione proposto in Fig.15.

Concludiamo questo paragrafo commentando il diagramma ottenuto. Come già anticipato in precedenza osservando le sequenze temporali, dal diagramma di biforcazione si nota una regione, sotto il valore  $V_{\text{bias}} = 800 \text{ V}$ , in cui il sistema esibisce una dinamica caotica ma con escursione di ampiezza delle intensità d'emissione molto limitata compatibile con un regime di piccolo caos. A partire da

800 V si susseguono finestre periodiche seguite da una vasta regione caotica interrotta da una finestra di soluzioni di periodo-10. Il sistema si richiude su un ciclo limite sopra  $V_{\text{bias}} = 1900 \text{ V}$ .

A prima vista, il tipo di biforcazioni dirette ed inverse evidenziate, che determinano l'ingresso e l'uscita dalla regione caotica, potrebbero far pensare ad una transizione al caos tramite raddoppio di periodo (*period doubling route to chaos*). Ad una analisi più approfondita risulta uno scenario diverso che sarà investigato a partire dalla sezione seguente.

#### 2.4 DINAMICA PER $C = 2.4 \text{ nF}$ : MAPPE DI RITORNO ED ANALISI SPETTRALE

La comprensione della transizione al caos, al variare dei parametri di controllo, nei sistemi dinamici non lineari permette di predire e controllare il comportamento del sistema, in particolare di conoscere quando ed in che modo il sistema passerà da un regime oscillatorio regolare ad uno irregolare. Inutile ricordare l'importanza di una capacità di questo tipo in modelli descrittivi, per esempio, sistemi biologici.

L'analisi delle sequenze temporali raccolte sperimentalmente sul tubo a scarica fatta nella sezione precedente ci ha restituito un diagramma di biforcazione, al variare dell'unico parametro controllo  $V_{\text{bias}}$ , molto dettagliato e il cui aspetto sembrerebbe deporre per una transizione al caos attraverso lo scenario del cosiddetto raddoppio di periodo.

Tale scenario, proposto nel 1978 da Feigenbaum [25], si verifica quando un'orbita periodica stabile dà origine ad una serie di infinite biforcazioni, caratterizzate dal raddoppio del periodo d'oscillazione, che portano alla formazione di un attrattore strano e all'instaurarsi di una dinamica caotica. La congettura della transizione al caos per raddoppio di periodo sembra essere confermata dalle mappe di primo ritorno o mappe di Poincaré. Le mappe sono state costruite riportando in grafico il valore di un massimo rispetto al precedente e sono raggruppate in Fig. 16, esse riguardano i segnali raccolti con  $V_{\text{bias}}$  che va da 1000 V a 1900 V. Le immagini

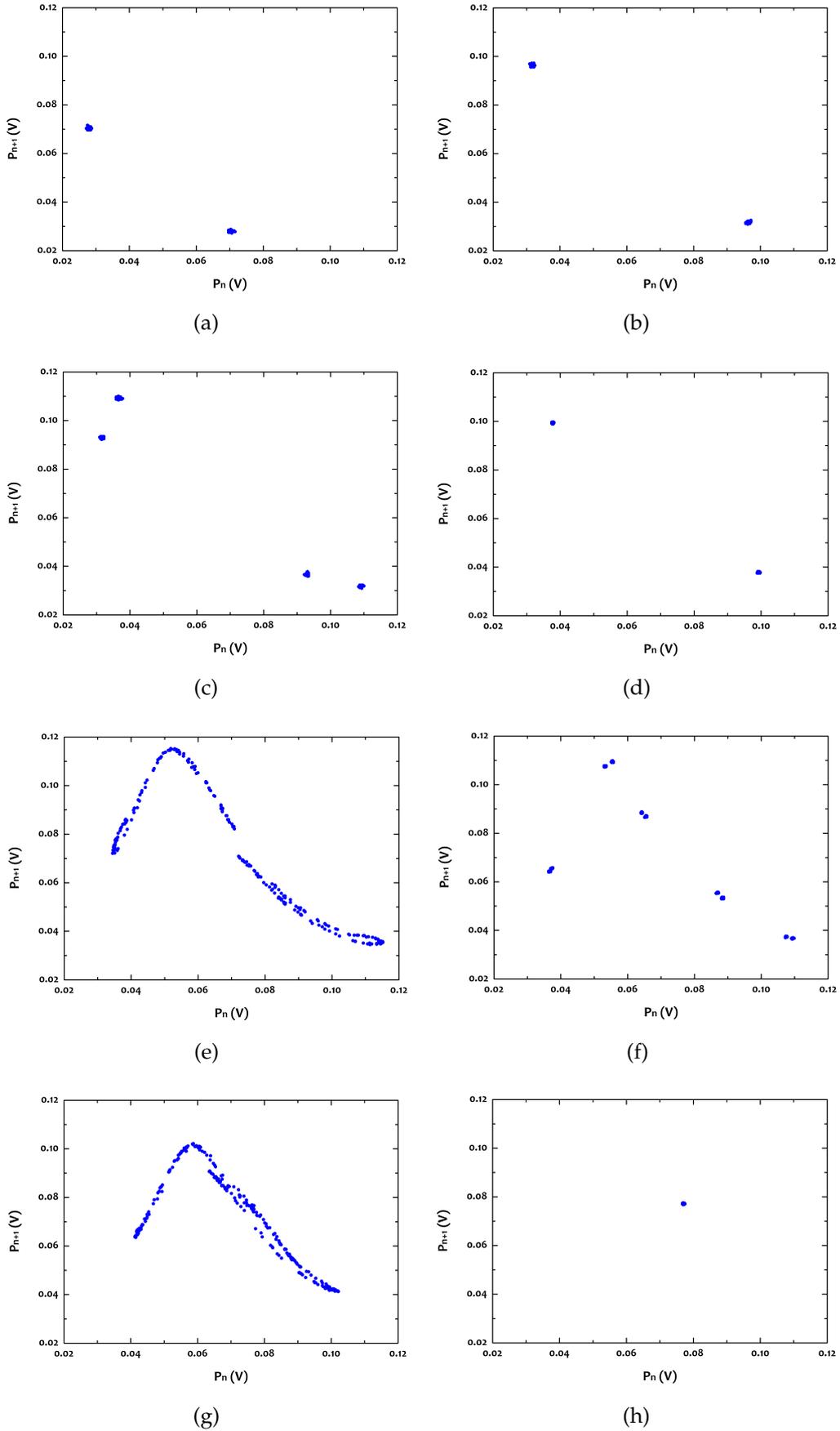


Figura 16: Mappe di primo ritorno sulla sezione di Poincaré.  $V_{bias}$  vale rispettivamente: (a) 1000 V; (b) 1200 V; (c) 1300 V; (d) 1400 V; (e) 1500 V; (f) 1600 V; (g) 1700 V; (h) 1900 V.

(a), (b), (c), (d) di Fig.16 mostrano correttamente le intersezioni delle soluzioni di periodo-2 e periodo-4 sulla sezione di Poincaré. La mappa (f) della stessa figura rende evidente che le soluzioni della finestra periodica intorno a  $V_{bias} = 1600$  V sono di periodo-10 e la mappa (h) presenta un unico punto d'intersezione corrispondente al ciclo limite su cui il sistema si stabilizza sopra i 1900 V. Le mappe riportate alle lettere (e), (g), corrispondenti a dinamiche caotiche, meritano un commento a parte. Esse esibiscono una struttura continua molto rassomigliante al cosiddetto *attrattore strano di Hénon*. Quest'ultimo, come noto, è generato da una coppia di equazioni che definiscono una mappa bidimensionale che M. Hénon introdusse osservando fenomeni caotici nelle orbite collettive degli oggetti celesti [26]. E' altrettanto noto che la mappa di Hénon segue biforcazioni con raddoppio di periodo nella transizione verso il regime caotico [27]. Nonostante queste similitudini, il dubbio che il sistema non sia interessato dallo scenario di Feigenbaum nella transizione al caos viene osservando le sequenze temporali dei segnali di emissione.

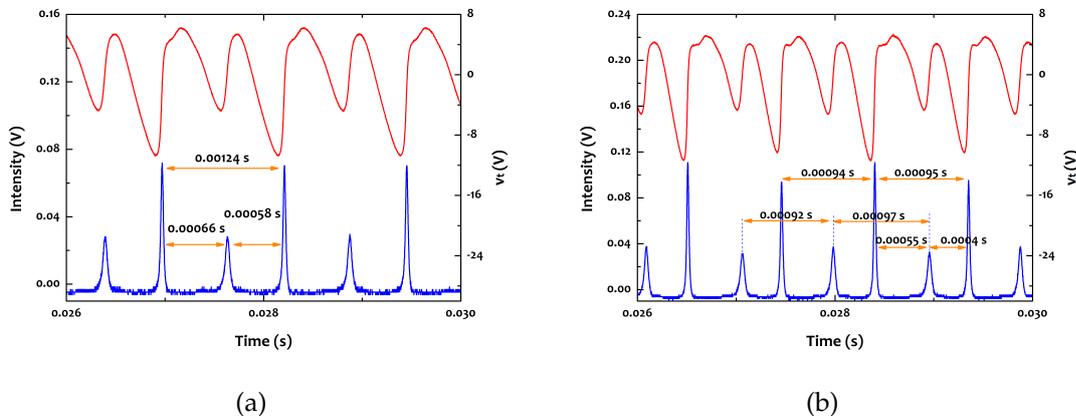


Figura 17: Valutazione dell'intervallo temporale tra massimi successivi.  $V_{bias}$  vale rispettivamente: (a) 1000 V; (b) 1300 V.

La Fig. 17 rappresenta una porzione dei segnali corrispondenti a  $V_{bias} = 1000$  V e  $V_{bias} = 1300$  V. Nell'immagine (a) della figura si nota, anche ad occhio nudo, come l'intervallo temporale tra due massimi successivi non sia esattamente uguale e che quindi il periodo non subisca un esatto raddoppio. Allo stesso modo nel-

l'immagine (b), che si riferisce alla soluzione di periodo-4, si nota un raddoppio di periodo tra i picchi maggiori e tra i picchi minori ma l'intervallo temporale tra picchi successivi, uno minore ed uno maggiore, non si mantiene costante.

L'argomento qualitativo precedente è suffragato da una analisi quantitativa eseguita sulla composizione spettrale dei segnali. La presenza di biforcazioni caratterizzate da raddoppio di periodo, che sembrerebbero evidenti nell'aspetto del diagramma di biforcazione di Fig.15, dev'essere accompagnata dalla nascita, negli spettri di frequenza, di componenti sub-armoniche delle frequenze proprie del sistema. L'analisi è dunque discriminante per poter caratterizzare la transizione al caos.

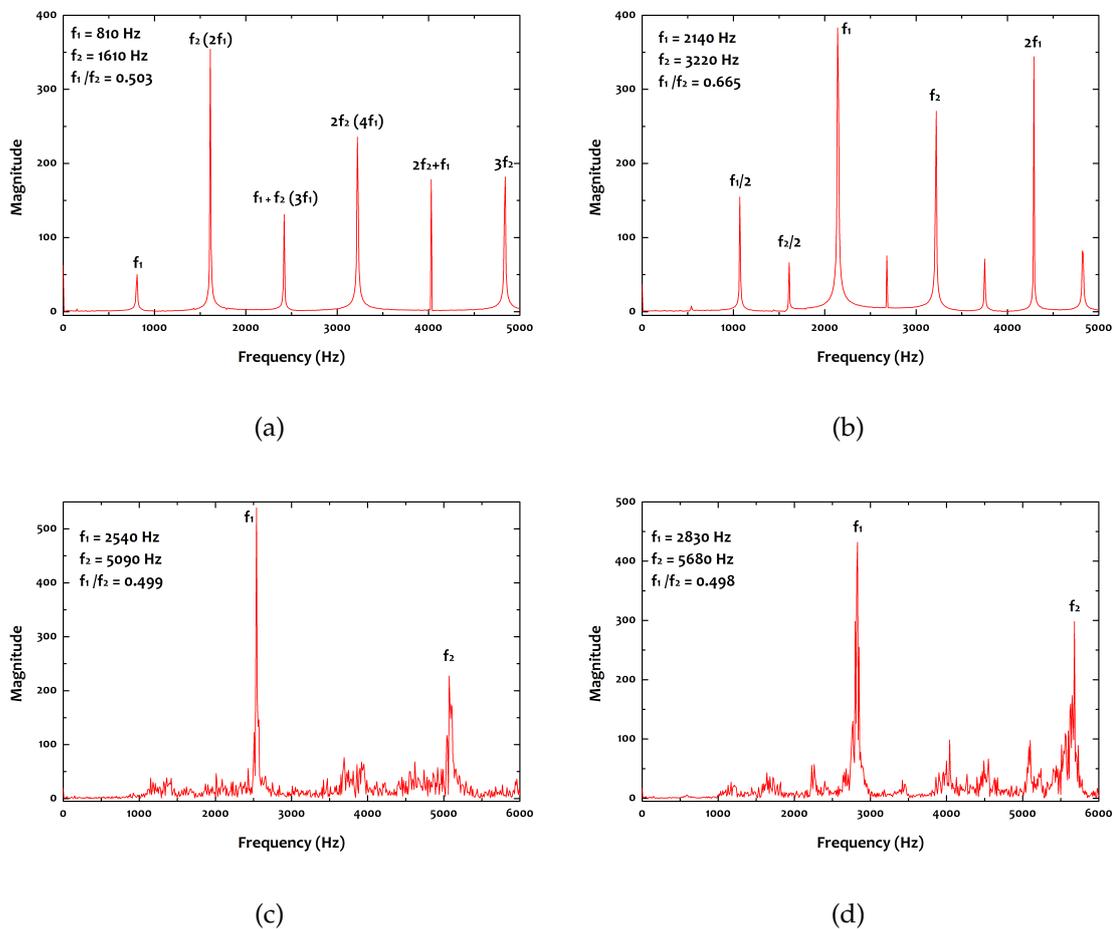


Figura 18: Spettri dei segnali di emissione per  $C = 2.4\text{ nF}$  e per  $V_{\text{bias}}$  rispettivamente: (a) 1000 V; (b) 1320 V; (c) 1550 V; (d) 1700 V.

La Fig.18 mostra gli spettri di ampiezza dei segnali di emissione corrispondenti

ai valori di  $V_{\text{bias}}$  pari a 1000 V, 1320 V, 1550 V e 1700 V. Lo spettro (a) si riferisce ad un regime dinamico interessato da soluzioni di periodo-2. Si individuano due picchi, indicati in figura con  $f_1$  ed  $f_2$ , relativi alle frequenze fondamentali del sistema e non costituenti esattamente una la sub-armonica dell'altra. Il rapporto  $f_1/f_2 = 0.503$ , benché differisca solo di qualche parte su mille rispetto al valore  $1/2$ , suffraga tale ipotesi. La vicinanza del rapporto di tali frequenze al valore  $1/2$  fa sì che i picchi successivi siano determinati da una serie di componenti, per esempio, come evidenziato in parentesi tonda accanto ai picchi, il terzo picco è composto dal battimento  $f_1 + f_2$  ma anche dalla terza armonica superiore di  $f_1$  e così per gli altri picchi. Risulta quindi non così agevole, soprattutto in presenza di più frequenze, interpretare correttamente tutte le componenti spettrali.

Lo spettro in Fig.18 (b) si riferisce, come il segnale in Fig.17 (b), alla soluzione di periodo-4. Anche in questo caso sono state evidenziate le due frequenze principali con rapporto molto vicino a  $2/3$ , in più, rispetto allo spettro precedente, si riescono ad individuare chiaramente le relative sub-armoniche connesse con le biforcazioni con raddoppio di periodo sui massimi e sui minimi d'intensità. Gli ultimi due spettri, Fig. 18 (c) e (d), si riferiscono a due regimi caotici e, come atteso, lo spettro presenta ora una distribuzione di frequenze su tutto l'intervallo osservato.

La discussione precedente, nata dall'osservazione di una spaziatura anomala tra massimi successivi nei segnali temporali, ci permette di affermare che non è poi così evidente che la transizione al caos segua la strada del cosiddetto raddoppio di periodo. L'ipotesi che quindi abbiamo avanzato è che si verifichi una transizione quasi periodica che va evidentemente dimostrata. In questo scenario, introdotto da Ruelle e Takens nel 1971 [28], la dinamica delle traiettorie, in presenza di due frequenze concorrenti ed in un rapporto non razionale tra loro, sono descrivibili con traiettorie circolari su un toro bidimensionale  $T^2$ . La nascita di ulteriori frequenze non commensurabili con le precedenti rende molto probabile il passaggio ad un regime caotico evidenziato dalla trasformazione dell'attrattore, che tende a perdere il suo aspetto regolare, e si parla in questo caso di *rottura del toro* (*torus breaking*). La prossima sezione sarà dedicata a dimostrare questa ipotesi.

2.5 DINAMICA PER  $C = 4.8 \text{ nF}$ : SCENARIO QUASI PERIODICO

La discussione precedente non ha dunque chiarito quale sia la strada che il sistema segue per passare dal regime dinamico periodico a quello caotico.

I segni di transizione con raddoppio di periodo sono stati messi in dubbio da una analisi qualitativa degli andamenti temporali dei segnali e dalla valutazione degli spettri di frequenza degli stessi. Una via per chiarire la transizione al caos, aspetto importante del comportamento dinamico del sistema, è trovare un insieme di parametri sperimentali, che non modifichi il processo dinamico nella sostanza, ma che permetta di rendere più evidente tale transizione. La scelta è stata quella di agire sul valore della capacità posta in parallelo al tubo. La variazione di questo parametro non determina in alcun modo una modifica delle caratteristiche dinamiche della scarica, come sarà evidente dai dati sperimentali, ma ha l'effetto di farla svolgere su una diversa scala dei tempi cambiando il rapporto tra la fase di carica e scarica nell'arco di un ciclo d'oscillazione.

Vari valori di  $C$  sono stati impiegati ed analizzati per i loro effetti sui segnali fino ad individuare la capacità che fosse più adeguata a farci identificare meglio la transizione al caos. È stata introdotta dunque una capacità pari a  $C = 4.8 \text{ nF}$ . La Fig. 19 riporta le sequenze temporali corrispondenti alla tensione sul tubo ed alla emissione della radiazione e le relative proiezioni bidimensionali degli attrattori. I segnali presentati sono stati raccolti per tensioni di bias che vanno da  $1100 \text{ V}$  a  $1200 \text{ V}$ . In un intervallo così ristretto si realizza tutto il cambiamento della dinamica interessante per i nostri scopi. L'immagine (a) in figura, è corrispondente alla soluzione periodica con un ciclo limite, evidenziata anche dall'attrattore corrispondente in (e). Nell'immagine (b) compare una modulazione di tipo sinusoidale nelle ampiezze d'emissione, questo sparpagliamento porta l'attrattore ad allargarsi (Fig. 19 (f)). Alzando la tensione di bias la modulazione delle ampiezze aumenta e comincia a perdere regolarità, l'attrattore corrispondente sembra avviarsi verso un'attrattore strano ma intorno ad orbite periodiche (Fig. 19 (c), (g)). Infine, per  $V_{\text{bias}} = 1200 \text{ V}$ , le ampiezze diventano scorrelate e l'attrattore si presenta completamente caotico (immagini (d), (h)).

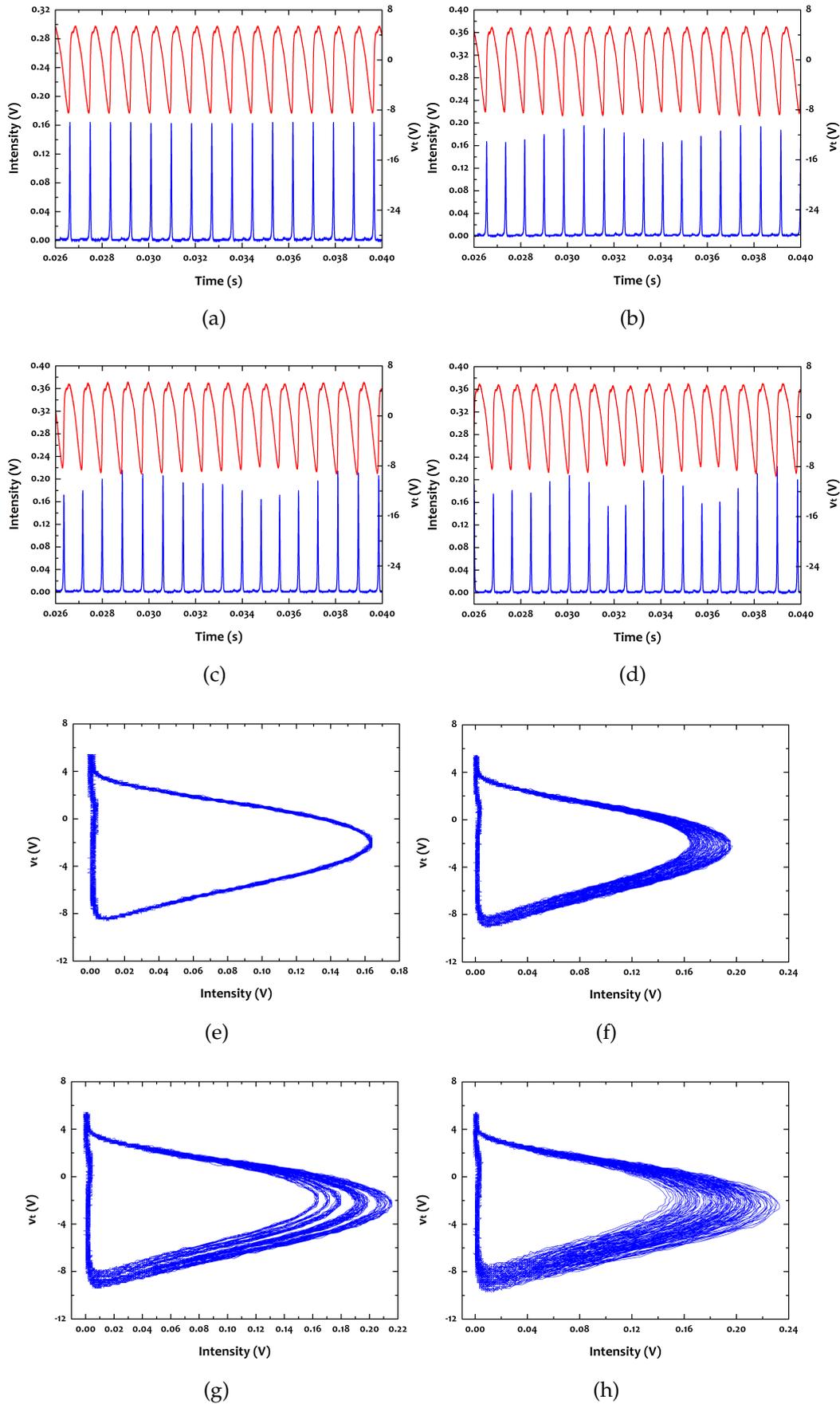


Figura 19: Sequenze temporali della tensione ai capi del tubo (curva rossa) e intensità d'emissione (curva blu) e proiezione bidimensionale degli attrattori nel caso di  $C = 4.8$  nF.  $V_{bias}$  vale rispettivamente: (a) ed (e) 1100 V; (b) ed (f) 1160 V; (c) e (g) 1180 V; (d) e (h) 1200 V.

In questo secondo arrangiamento sperimentale, dunque, la transizione al caos è molto veloce e si realizza tra 1100V e 1200V, oltre questo valore della tensione d'alimentazione il sistema presenta un comportamento caotico senza alcun cenno a finestre periodiche intermedie.

L'andamento dei segnali ma, soprattutto, gli attrattori bidimensionali costituiscono la verifica dell'assunto precedente che il cambio di capacità non determina un cambiamento della dinamica del sistema. Le immagini di Fig.19 infatti hanno un aspetto del tutto simile a quelle di Fig.13, a testimonianza che la topologia globale dello spazio delle fasi del sistema non subisce stravolgimenti.

In questa seconda campagna di misure sono state acquisite 46 sequenze temporali per le due grandezze osservate, tensione sul tubo ed intensità d'emissione, corrispondenti a valori del parametro di controllo compresi nell'intervallo  $1100\text{V} \leq V_{\text{bias}} \leq 2030\text{V}$ . Come in precedenza è stato costruito un diagramma di biforcazione, che ci permette una visione globale della dinamica corrispondente a questa nuova soluzione circuitale. La tecnica di costruzione del diagramma rimane quella esposta nella sezione precedente: smoothing dei segnali, estrazione dei massimi e costruzione del grafico in funzione del parametro di controllo. Il diagramma di biforcazione che ne deriva è mostrato in Fig.20 e risulta, in larga parte dell'intervallo investigato, meno risolto rispetto al diagramma corrispondente a  $C = 2.4\text{nF}$  ma mantiene la stessa risoluzione nella zona interessante della transizione al caos, tra 1100V e 1300V. Come detto sopra, per tensioni superiori a 1200V il regime è caotico.

E' utile rimarcare, come già fatto in precedenza, che il regime dinamico caotico si realizza sulla fluttuazione delle ampiezze del segnale d'emissione e di tensione  $v_t$  ma non sui tempi d'emissione  $\tau$ , detto in altri termini, non è stata riscontrata evoluzione verso regimi caotici a carico dell'intervallo temporale tra picchi successivi (*ISI-Inter Spike Interval*). Questo costituirà una delle peculiarità fenomenologiche per la costruzione di un modello.

Nella regione interessata dalla transizione al caos sono state costruite le mappe di primo ritorno, riportando in grafico il valore di ogni massimo rispetto a quello precedente (Fig.21).

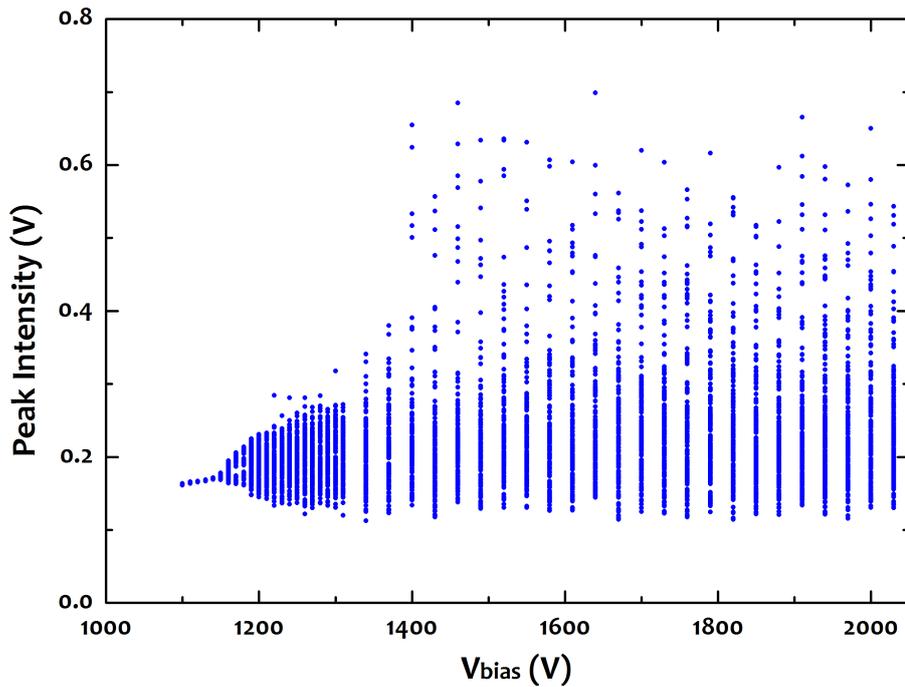


Figura 20: Diagramma di biforcazione del tubo a scarica chiuso su una capacità di 4.8 nF.

L'immagine (a) di Fig.21 contraddistingue il ciclo limite che si ottiene per  $V_{\text{bias}} = 1100\text{V}$ , ma salendo con la tensione di bias di 60V si osserva, sulla sezione, la traccia chiara di un toro, data da un curva chiusa e regolare (immagine (b)). Tra le tensioni 1160V e 1180V il toro si rompe, dando origine ad una serie di punti che corrispondono alle orbite, con struttura tendenzialmente caotica, di Fig.19 (g) ed infine si sviluppa una condizione di caos diffuso in cui le intersezioni con la sezione di Poincaré non rispettano più alcuna geometria. L'aspetto delle nuove mappe è decisamente diverso dalle precedenti. L'ipotesi della transizione quasi periodica, che era stata avanzata nella sezione precedente, adesso appare confermata chiaramente. Il percorso definito dalle mappe (a), (b), (c), (d) di Fig.21 è quasi da esempio didattico: con una prima biforcazione si passa da un orbita chiusa ad un toro e poi, con la rottura, al caos. Tale scenario quasi periodico, già molto chiaro, è ulteriormente suffragato dall'analisi degli spettri di frequenza dei segnali. In corrispondenza degli stessi valori della tensione di bias sono stati analizzati gli spettri di frequenza dei segnali di emissione. Gli spettri sono mostrati in Fig.22 e limitati alla banda di frequenza  $0 \div 5\text{kHz}$ , come peraltro già fatto nel ca-

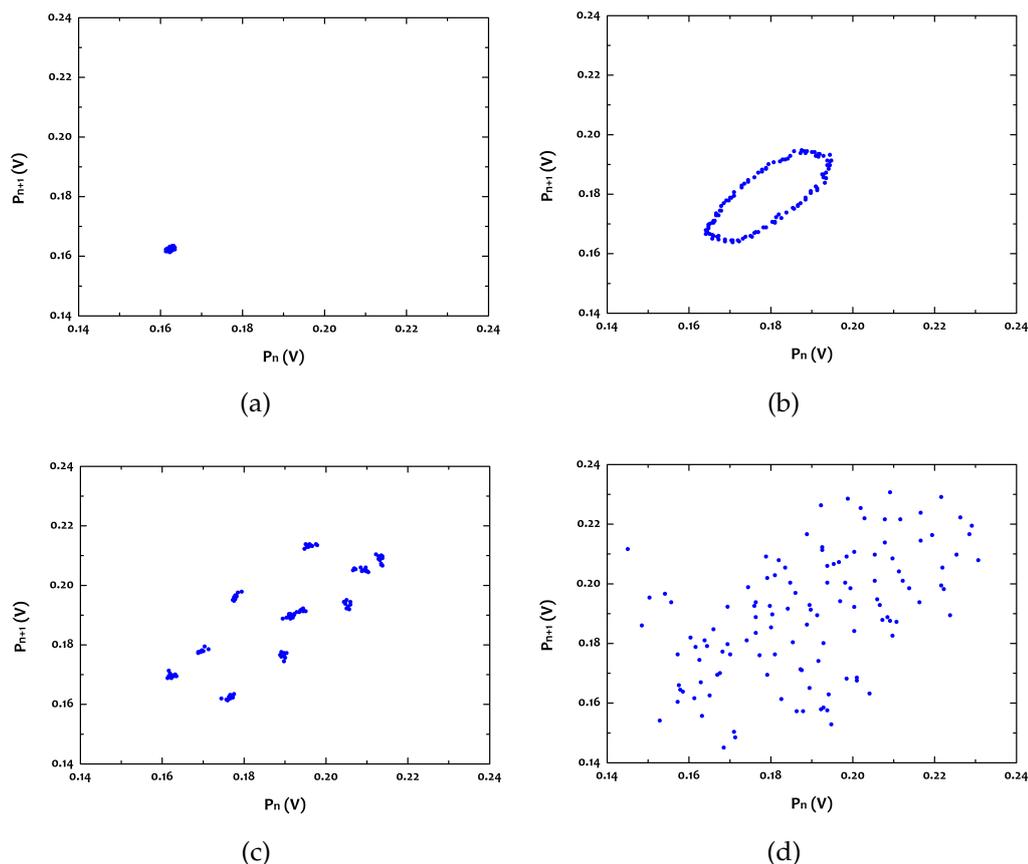


Figura 21: Mappe di primo ritorno sulla sezione di Poincaré per  $C = 4.8\text{nF}$ .  $V_{\text{bias}}$  vale rispettivamente: (a) 1100V; (b) 1160V; (c) 1180V; (d) 1200V.

so  $C = 2.4\text{nF}$ .

Lo spettro in Fig.22 (a) è caratterizzato da una sola componente di frequenza a 1150Hz e descrive la condizione di ciclo limite che si osserva alla tensione di  $V_{\text{bias}} = 1100\text{V}$ . Sono ben distinte le armoniche superiori e non compaiono altre componenti. Nell'immagine (b) lo spettro, corrispondente alla presenza del toro, mantiene una componente principale a 1190Hz ma presenta una componente più bassa, a 1050Hz, che è incommensurabile con la prima, il loro rapporto vale 0.882 troncato alle prime tre cifre decimali. Inoltre sono ben visibili tutte le altre componenti del tipo  $nf_1 + mf_2$ , con  $n, m \in \mathbb{N}$ , che rappresentano i battimenti tra le due frequenze principali. Nel caso fossero presenti una frequenza principale e le sue sub-armoniche si avrebbero delle componenti esattamente intermedie tra i picchi che rappresentano le armoniche superiori. Se invece coesistono due

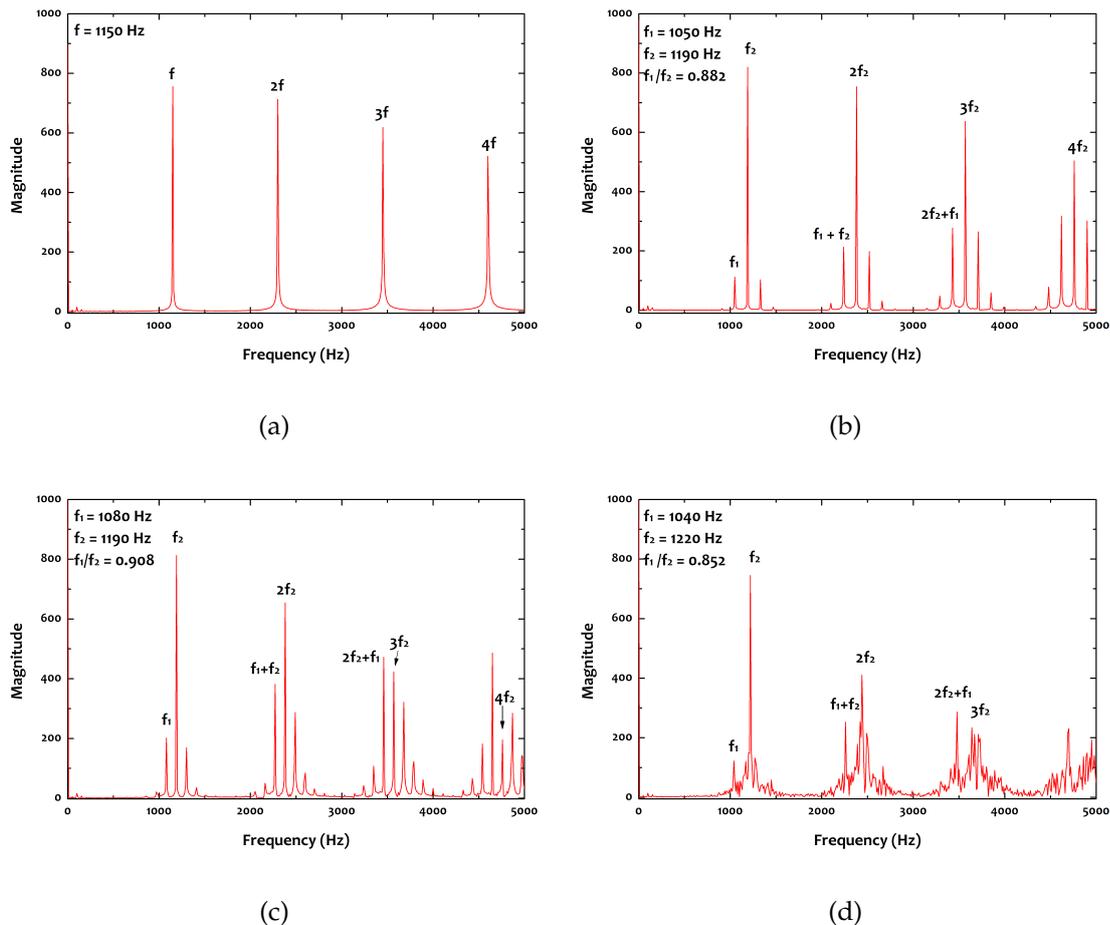


Figura 22: Spettri dei segnali di emissione per  $C = 4.8$  nF.  $V_{bias}$  è rispettivamente: (a) 1100 V; (b) 1160 V; (c) 1180 V; (d) 1200 V.

frequenze incommensurabili si originano dalle componenti satellite intorno alla componente più importante, ed alle sue armoniche, che sono tanto più ravvicinate tra loro quanto minore è la differenza tra le due frequenze che competono. Lo spettro nell'immagine (c), corrispondente alla rottura del toro, amplifica questo effetto con la comparsa di ulteriori componenti, ravvicinate tra loro a causa della minore differenza tra le componenti principali. Infine, nella situazione di caos sviluppato dello spettro (d), tutto il range di frequenza visualizzato è interessato da componenti più o meno importanti.

Il quadro descritto dalle mappe di primo ritorno e dagli spettri di frequenza è, in maniera chiara, riferibile ad una transizione al caos secondo lo scenario quasi periodico di Ruelle e Takens. La difficoltà riscontrata nell'individuare il tipo di

passaggio al caos nella condizione sperimentale con  $C = 2.4\text{nF}$  è legata dunque all'estrema vicinanza del rapporto tra le due frequenze principali al valore  $1/2$  che camuffa molto bene il quadro ed alla prospettiva delle mappe di ritorno dalle quali non è visibile la curva chiusa corrispondente al toro.

## 2.6 CONCLUSIONI

Alcune considerazioni finali possono aiutare a tenere insieme la grande mole di risultati sperimentali presentati e a focalizzare alcuni fatti salienti. Lo studio della dinamica di un tubo a scarica è stato affrontato solo in considerazione della fenomenologia osservata. Il tubo, approssimato ad un elemento elettrico a costanti concentrate, è stato caratterizzato elettricamente determinandone la dipendenza tensione-corrente. La non linearità del comportamento elettrico, conseguenza della non linearità della dinamica di scarica nel tubo, comporta la fenomenologia caotica osservata, nella regione della scarica a bagliore, sia a carico dei segnali d'emissione luminosa che della tensione sul tubo. L'accoppiamento con un elemento capacitivo in parallelo permette di realizzare un oscillatore in cui convivono due tempi caratteristici diversi, uno relativo alla fase di carica ed uno a quello di scarica. La dinamica osservata permette di affermare che l'oscillatore transita, in funzione della tensione d'alimentazione, da regioni a comportamento periodico a regioni che presentano un comportamento caotico seguendo la quasi-periodicità, molto evidente per opportuni valori di capacità in parallelo al tubo. La natura di questa transizione è stata dimostrata con l'ausilio delle mappe di primo ritorno e degli spettri di frequenza. La dinamica caotica è sempre realizzata con interessamento delle sole ampiezze d'oscillazione ma mai coinvolgendo la frequenza di scarica. L'osservazione che il caos si sviluppa sui picchi d'intensità sarà di fondamentale importanza per l'introduzione, nel prossimo capitolo, di un modello che descriva la fenomenologia. Altrettanto importante è l'osservazione che le frequenze caratteristiche del sistema subiscono un avanzamento progressivo coll'aumentare del parametro di controllo. Come può essere verificato dagli spettri di Fourier, il sistema esibisce componenti in frequenza che progressiva-

mente entrano nell'intervallo delle frequenze udibili. Questa osservazione, peraltro accompagnata da una evidenza sperimentale dell'emissione di suono a bassa frequenza proveniente dal sistema, si è rivelato un fattore cruciale ai fini della convergenza del modello che andremo a discutere.

## MODELLO FENOMENOLOGICO E DIAGRAMMI DI STABILITÀ

---

Le misure sperimentali presentate nel capitolo precedente rivelano chiaramente che la scarica nel tubo al plasma segue la quasiperiodicità per la transizione al caos. La fisica che sottende un tale fenomeno risulta, volendo entrare nei dettagli, non particolarmente agevole e va ben oltre la descrizione semiquantitativa delle regioni di scarica data al Capitolo 1.

Da un punto di vista teorico, la scarica nei plasmi è stata tradizionalmente descritta tenendo conto di processi complessi che coinvolgono la ricombinazione delle cariche e la descrizione della conduttività elettrica. La descrizione di tali processi richiede l'uso di sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali che coinvolgono sia variabili spaziali che temporali, quantità di moto ed energia delle particelle che compongono il plasma e che tengano conto dell'equazione di continuità, della diffusione ecc. Questo significa che una descrizione realistica del fenomeno risulta molto complicata. Tuttavia, una descrizione alternativa accettabile della scarica può essere ottenuta anche evitando le sopraddette questioni teoriche e focalizzando l'attenzione solo sulla caratteristica fondamentale dei tubi al plasma, ovvero la capacità di tali dispositivi di condurre corrente elettrica. In altre parole, possiamo caratterizzare la scarica per il suo comportamento elettrico macroscopico, riguardando il tubo semplicemente come un elemento non lineare a due terminali in un circuito elettrico. Chiaramente questo approccio rimuove tutte le dipendenze spaziali nella distribuzione della carica e riduce la descrizione matematica ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie non lineari, molto più semplici da trattare. La qualità di questo approccio dipende, evidentemente, dalla qualità della descrizione e caratterizzazione elettrica del tubo al plasma.

### 3.1 MODELLO FENOMENOLOGICO

In questa sezione viene presentato un modello che descrive la dinamica del tubo a scarica. Il modello deriva, in parte, dalle caratteristiche elettriche macroscopiche del tubo, trattato come elemento circuitale, ed in parte dalla fenomenologia sperimentale osservata.

Le prime due equazioni provengono esclusivamente da considerazioni sul circuito, il cui schema viene qui riproposto, in Fig.23, per comodità del lettore.

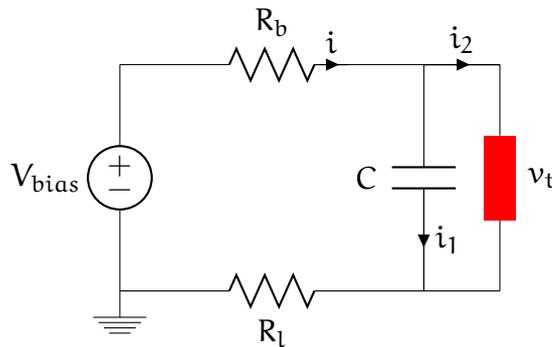


Figura 23: *Arrangiamento sperimentale usato per la caratterizzazione dinamica del tubo a scarica.*

In figura sono state indicate con  $v_t$  ed  $i_2$  la caduta di tensione e la corrente attraverso il tubo rispettivamente. Dall'applicazione della prima legge di Kirchhoff si ha

$$i = i_1 + i_2 \quad (13)$$

ed applicando la prima legge di Ohm otteniamo

$$i_1 + i_2 = \frac{V_{\text{bias}} - v_t}{R_b} \quad (14)$$

nella quale è stato trascurato il contributo della resistenza  $R_l$  poiché  $R_l \ll R_b$ . Combinando le equazioni precedenti ed introducendo l'identità  $i_1 = C \frac{dv_t}{dt}$ , si può scrivere

$$i_2 = \frac{V_{\text{bias}} - v_t}{R_b} - C \frac{dv_t}{dt} \quad (15)$$

ed esplicitando  $\frac{dv_t}{dt}$

$$\frac{dv_t}{dt} = \frac{V_{bias}}{R_b C} - \frac{v_t}{R_b C} - \frac{R_b}{R_b C} i_2 \quad (16)$$

La precedente equazione (16) esprime la variazione della tensione sul tubo in funzione della corrente che lo attraversa e di tutti i parametri sperimentali in gioco, primo fra tutti il nostro parametro di controllo  $V_{bias}$ .

Dalla seconda legge di Kirchhoff, applicata al circuito di Fig.23, si ottiene il bilancio della caduta di tensione sulla maglia

$$L \frac{di_2}{dt} = v_t - G(i_2) \quad (17)$$

Nell'equazione (17), che ci fornisce un'espressione per la variazione della corrente, la nostra seconda variabile, compaiono l'induttanza spuria  $L$  associata al tubo e la caratteristica statica tensione-corrente  $G(i_2)$  che definisce il punto di lavoro del tubo al variare della corrente che lo attraversa.

La funzione  $G(i_2)$  è stata determinata sperimentalmente con la procedura descritta nel paragrafo 2.2 e, come atteso, risulta fortemente non lineare.

Le espressioni adimensionali relative alle equazioni trovate possono essere ricavate sulla base delle assunzioni seguenti.

Dai dati sperimentali della curva caratteristica, presentati in Fig.11 al paragrafo 2.2, si nota che  $v_t$  raggiunge un valore asintotico di circa  $\mathcal{V} = 360\text{V}$  all'estremità destra della regione della scarica a bagliore. Questo valore è stato usato per scalare tutti i valori di tensione e definire come segue le prime due grandezze adimensionali  $y$  e  $g$

$$v_t = \mathcal{V} \cdot y \quad \text{e} \quad G(i) = \mathcal{V} \cdot g(i) \quad (18)$$

dove, nell'espressione per  $G$ , è stato tralasciato, per comodità, il pedice sul simbolo della corrente nel tubo.

L'ordine di grandezza della corrente  $i$  nel tubo, come si evince dai dati sperimentali della citata Fig.11, vale  $10^{-3}\text{A}$ . Introducendo dunque il fattore di scala  $\alpha = 10^{-3}\text{A}$  è stata definita una variabile di corrente adimensionale  $x$  come

$$i = \alpha \cdot x \quad (19)$$

Le sequenze temporali acquisite mostrano inoltre che l'intervallo temporale tra due picchi successivi si mantiene, per larga parte dell'escursione del parametro di controllo  $V_{bias}$ , sotto il valore di  $10^{-3}$  s ed, in particolare, su tutta la regione di comportamento periodico in corrispondenza della capacità  $C = 2.4$  nF, questo intervallo si stabilizza a circa  $\beta_1 = 0.5 \cdot 10^{-3}$  s. Il valore  $\beta_1$  è stato usato per introdurre una variabile tempo adimensionale operando la sostituzione  $t \rightarrow \beta_1 \cdot t$  (avendo mantenuto lo stesso simbolo  $t$ ).

Usando due ulteriori definizioni,  $V_{bias} = \mathcal{V} \cdot y_0$  and  $\beta_2 = R_b C$ , si può riscrivere l'equazione (16) come segue

$$\frac{\mathcal{V} \cdot dy}{\beta_1 \cdot dt} = \frac{\mathcal{V} \cdot y_0}{\beta_2} - \frac{\mathcal{V} \cdot y}{\beta_2} - \frac{R_b \cdot \alpha}{\beta_2} x \implies \frac{dy}{dt} = \frac{\beta_1}{\beta_2} y_0 - \frac{\beta_1}{\beta_2} y - \frac{\beta_1 R_b \cdot \alpha}{\beta_2 \mathcal{V}} x \quad (20)$$

Se ora si definiscono i tre parametri adimensionali

$$A_0 = \frac{\beta_1}{\beta_2} y_0 = A_1 y_0 \quad , \quad A_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{\beta_1 R_b \cdot \alpha}{\beta_2 \mathcal{V}} = A_1 \frac{R_b \cdot \alpha}{\mathcal{V}} \quad (21)$$

l'equazione (20) prende la semplice forma

$$\dot{y} = A_0 - A_1 y - A_2 x \quad (22)$$

La forma adimensionale dell'espressione (17) si ricava immediatamente usando le definizioni date sopra

$$L \frac{\alpha \cdot dx}{\beta_1 \cdot dt} = \mathcal{V}(y - g(x)) \implies \frac{L \cdot \alpha}{\mathcal{V} \cdot \beta_1} \frac{dx}{dt} = y - g(x) \quad (23)$$

Definendo l'ulteriore parametro adimensionale  $\mu = \frac{L \cdot \alpha}{\mathcal{V} \cdot \beta_1}$ , arriviamo alla scrittura delle prime due equazioni del modello in forma adimensionale e compatta

$$\mu \cdot \dot{x} = y - g(x) \quad (24)$$

$$\dot{y} = A_0 - A_1 y - A_2 x$$

Dei quattro parametri adimensionali introdotti,  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$  dipendono dall'arrangiamento sperimentale adottato, in particolare  $A_0$  varia al variare di  $V_{bias}$ ,  $\mu$  dipende invece dal sistema fisico stesso e dai valori delle costanti usate per scalare le equazioni. Per completare la descrizione di queste prime due equazioni rimane da discutere la forma di  $g(x)$ .

La forma analitica della funzione  $G(i)$  deve riprodurre l'andamento sperimentale mostrato nella Fig.11 del paragrafo 2.2. In quell'immagine coesistono un ramo praticamente verticale che rappresenta l'ultima parte della regione della scarica oscura e l'avvicinamento al punto di breakdown elettrico ed un ramo decrescente tipico della regione della scarica a bagliore. Il raccordo, vista la salita verticale verso il breakdown, è un punto angoloso, impossibile da rappresentare con una forma analitica unica, ed è stato trascurato nella trattazione statistica. E' stata assunta dunque, per la  $G(i)$ , la seguente espressione

$$G(i) = \mathcal{V} \cdot g(i) = \mathcal{V} \cdot \left[ y_c + a e^{-k_1 \cdot i} - (y_c + a) e^{-k_2 \cdot i} \right] \quad (25)$$

La presenza dei due esponenziali con costanti di decadimento diverse serve proprio a riprodurre la doppia velocità di variazione della caratteristica. Dall'espressione (25) si passa alla forma adimensionale definendo  $k_1 = K_1 \cdot \alpha$  e  $k_2 = K_2 \cdot \alpha$

$$g(x) = y_c + a e^{-k_1 \cdot x} - (y_c + a) e^{-k_2 \cdot x} \quad (26)$$

Le quantità  $y_c$ ,  $a$ ,  $k_1$  e  $k_2$  sono state determinate cercando il miglior adattamento della (26) ai dati sperimentali.

Per effettuare l'analisi statistica dei dati sperimentali, allo scopo di verificare la bontà del modello (26), sono stati mascherati i punti della regione di scarica oscura che avrebbero dato delle divergenze nel processo di calcolo. Di fatto, per i nostri scopi, solo la parte di curva relativa alla regione della scarica a bagliore è interessante e viene trattata comunque con l'espressione (26) perché l'effetto della compresenza dei due esponenziali non si esaurisce nel solo punto di massimo.

La miglior curva ed i residui sono stati calcolati impiegando il metodo dei minimi quadrati non lineare usando il cosiddetto *trust region algorithm* [29]. La Fig.24 presenta i risultati dell'analisi statistica eseguita e i residui rispetto ai punti sperimentali, che rivela un ottimo accordo tra espressione teorica e dati. Le migliori stime per i parametri contenuti in  $g(x)$  sono risultati i seguenti:  $y_c = 0.977$ ,  $a = 0.9425$ ,  $k_1 = 0.4662$ ,  $k_2 = 26.1$ .

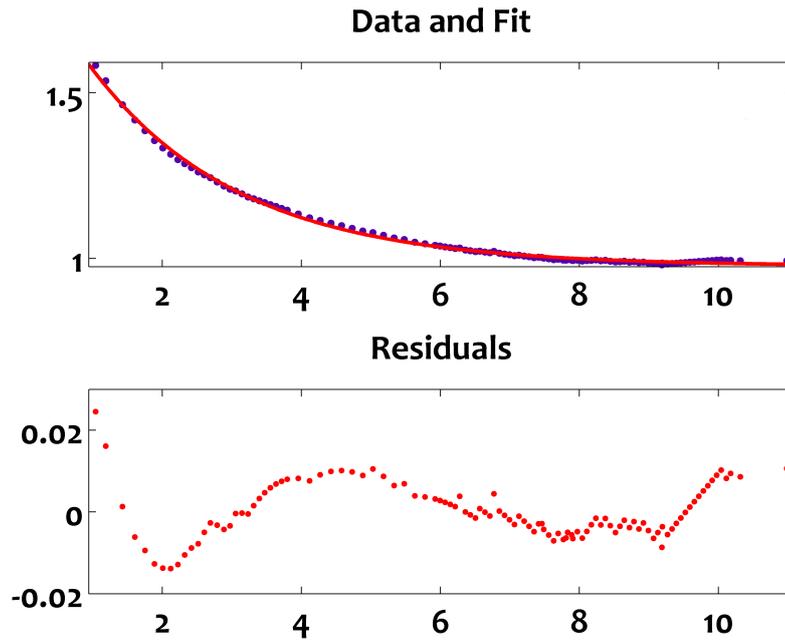


Figura 24: In alto, curva caratteristica sperimentale (punti blu) insieme alla curva (26) che si adatta meglio ai dati (curva rossa); in basso, residui calcolati dal metodo dei minimi quadrati.

Come test di *goodness of fit* è stato utilizzato il coefficiente di determinazione altrimenti detto  $R^2$ , definito come

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} \quad (27)$$

dove

$$ESS = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad \text{devianza spiegata dal modello (Explained Sum of Squares)} \quad (28)$$

$$TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad \text{devianza totale (Total Sum of Squares)} \quad (29)$$

$$RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad \text{devianza residua (Residual Sum of Squares)} \quad (30)$$

$y_i$  sono i dati osservati,  $\bar{y}$  la loro media e  $\hat{y}_i$  sono i dati stimati dal modello ottenuto dalla regressione. Nel caso presente abbiamo ottenuto  $R^2 = 0.9974$  che

dimostra l'ottimo accordo tra modello ed esperimento.

Nel presentare i dati sperimentali, nel capitolo precedente, è stato osservato che il sistema esibisce diverse regioni di funzionamento contraddistinte da dinamica caotica. D'altro canto, il teorema di Poincaré-Bendixson afferma che non può esserci evoluzione verso il caos in un sistema bidimensionale ma che sono necessari almeno tre gradi di libertà. Per descrivere correttamente i dati sperimentali è necessario dunque estendere la dimensionalità del modello introducendo ulteriori gradi di libertà. E' stato già osservato, che le sequenze temporali manifestano, nel regime di comportamento caotico, un cambio significativo nelle ampiezze di oscillazione lasciando inalterato l'intervallo temporale tra picchi successivi. Tale variazione delle ampiezze d'oscillazione rassomiglia molto da vicino ad una evoluzione di tipo oscillatorio. Ciò suggerisce di riprodurre questo comportamento introducendo l'oscillatore smorzato seguente

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega^2 z = \lambda x \quad (31)$$

Questa oscillazione è guidata dalla corrente ed è rapidamente smorzata quando la stessa decresce verso zero, riproducendo in questo modo l'osservazione sperimentale. L'accoppiamento della oscillazione in (31) con il resto delle equazioni si realizza introducendo il contributo oscillatorio nell'espressione della caratteristica. Si determina quindi un'oscillazione intorno al punto di lavoro fissato, di volta in volta, dal valore impostato di  $V_{bias}$  e quindi di  $A_0$ . La nuova espressione per la caratteristica è la seguente

$$g = g(x, z) = y_c + (a + z)e^{-k_1 \cdot x} - (y_c + a + z)e^{-k_2 \cdot x} \quad (32)$$

Con l'introduzione dell'oscillatore (31) i gradi di libertà salgono a quattro ed il modello per la descrizione macroscopica della scarica nel tubo è adesso completo e riassunto di seguito

$$\dot{x} = \frac{1}{\mu} [y - g(x, z)] \quad (33)$$

$$\dot{y} = A_0 - A_1 y - A_2 x \quad (34)$$

$$\dot{z} = w \quad (35)$$

$$\dot{w} = -\gamma w - \omega^2 z + \lambda x \quad (36)$$

Ricapitolando, il significato dei parametri è il seguente.  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$  sono legati alla configurazione sperimentale adottata. In particolare,  $A_0$  è connesso con il parametro di controllo  $V_{\text{bias}}$ . I parametri  $A_1$  e  $A_2$  dipendono dal valore della capacità inserita nel circuito elettrico mentre  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $\omega$  e  $\lambda$  sono parametri liberi.

Le serie temporali sono state acquisite per valori di  $V_{\text{bias}}$  nell'intervallo  $750 \div 2000$  V che corrispondono a valori di  $A_0 \in [3, 7.8]$ . Le due capacità adottate negli esperimenti,  $C = 2.4$  nF e  $C = 4.8$  nF determinano due coppie di valori  $(A_1, A_2) = (1.4, 0.6), (1.2, 0.5)$ .

L'ultima considerazione riguarda il parametro  $\mu$ . Poiché  $\alpha = 10^{-3}$  A,  $\mathcal{V} = 360$  V e  $\beta_1 = 0.5 \cdot 10^{-3}$  s, dalla definizione di  $\mu$  in equazione (23) troviamo

$$\mu = L \cdot \frac{10^{-3} \text{ A}}{360 \text{ V} \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 0.006 \cdot L \cdot \text{H}^{-1} \quad (37)$$

Siccome è altamente improbabile avere una induttanza spuria  $L$  dell'ordine di 1H, allora  $\mu$  è sicuramente minore di  $10^{-3}$ . Va notato, comunque, che  $\mu$  potrebbe essere usato, se fosse regolabile, per controllare la scala dei tempi del circuito.

### 3.2 SIMULAZIONI E DIAGRAMMI DI STABILITÀ

Il modello introdotto nel paragrafo precedente è stato usato per eseguire delle simulazioni numeriche allo scopo di verificarne la validità, grazie al confronto con i dati sperimentali, ma anche per fornire previsioni sul comportamento del sistema utili per pianificare altri esperimenti. Il lavoro è stato eseguito in collaborazione con il gruppo di ricerca diretto dal Prof. Jason A.C. Gallas del Dipartimento di Fisica dell'Università Federale di Paraíba, a João Pessoa in Brasile. Il calcolo dei diagrammi di stabilità che saranno presentati in questa sezione è molto impegnativo dal punto di vista delle risorse hardware ed è stato svolto con l'ausilio dei 1536 processori dell' SGI Altix Cluster del National Center for Supercomputing

(CesuP) di Porto Alegre in Brasile, che può vantare una capacità di calcolo di 16 Tflops di picco.

Il modello macroscopico derivato nella sezione precedente può essere usato per predire numericamente la distribuzione degli stati oscillatori stabili nella scarica. Questo tipo di studio ha un duplice scopo, da una parte si possono determinare diagrammi di distribuzione degli stati per intervalli estesi dei parametri che consentono una classificazione degli stati oscillatori e la loro abbondanza relativa, dall'altra definire i confini delle varie regioni di oscillazione. Poiché è molto più difficile poter realizzare esperimenti che interessino domini estesi dei parametri in gioco rispetto alle simulazioni numeriche, i diagrammi calcolati permettono una pianificazione di esperimenti concentrando l'attenzione su quelle regioni dei parametri che sono più promettenti. Inoltre, il confronto tra le soluzioni numeriche e le sequenze sperimentali consente di verificare la descrizione teorica ed, eventualmente, migliorarla.

Le equazioni del modello sono state risolte numericamente concentrando l'attenzione sull'insieme dei parametri che corrispondono alla condizione sperimentale con  $C = 2.4 \text{ nF}$ . Dall'osservazione sperimentale è emerso che all'aumentare del parametro di controllo anche la composizione in frequenza dei segnali si sposta verso l'alto fino alle frequenze acustiche. Quindi anche la frequenza  $\omega$  che compare nell'oscillatore del modello deve variare al variare di  $A_0$ . Quest'ultimo parametro invece è legato a  $V_{\text{bias}}$ . Gli altri parametri sono fissati ed i valori che hanno dato il miglior accordo con i dati sperimentali sono:  $\mu = 3 \cdot 10^{-4}$ ,  $\beta = 8 \cdot 10^{-3}$ ,  $\lambda = 5$ ,  $A_1 = 1.4$  e  $A_2 = 0.6$ . L'integrazione delle equazioni è stata effettuata usando l'algoritmo Runge-Kutta del quarto ordine con un intervallo temporale d'integrazione pari ad  $h = 5 \cdot 10^{-6}$ . I primi  $4 \cdot 10^8$  punti sono stati scartati perché riferibili ad un periodo transitorio necessario al sistema per raggiungere l'attrattore finale.

In Fig.25 è riportato il confronto tra il segnale temporale, di corrente (rosso) e tensione (verde), sperimentale e simulato per il valore di tensione di bias  $V_{\text{bias}} = 900 \text{ V}$  corrispondente ad  $A_0 = 3.5$ , qui  $\omega$  era fissato al valore 4.5. Da questo primo confronto si nota come alcune caratteristiche proprie del segnale sperimentale

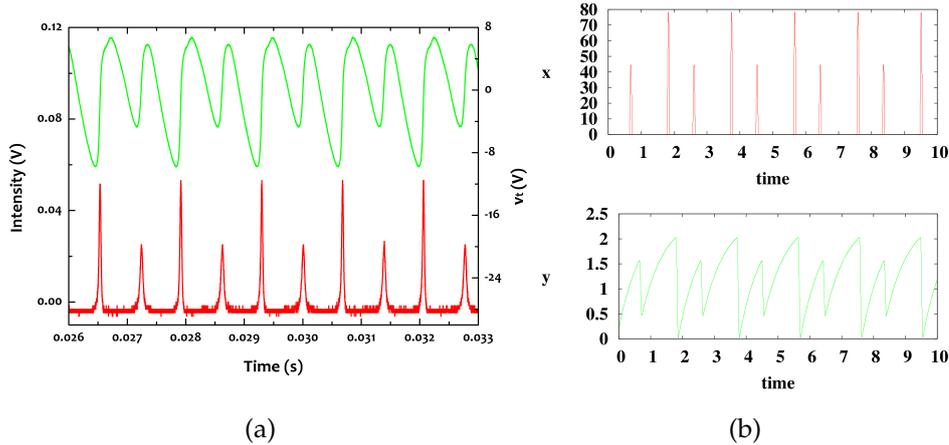


Figura 25: Confronto tra i segnali temporali sperimentali (a) e simulati (b) in corrispondenza di  $C = 2.4 \text{ nF}$ ,  $V_{\text{bias}} = 900 \text{ V}$  ( $A_0 = 3.5$ ) ed  $\omega = 4.5$ .

vengano correttamente riprodotte dal modello. Oltre la corretta alternanza dei picchi si può osservare che il segnale simulato esibisce il non perfetto raddoppio di periodo evidenziato nel capitolo precedente.

Il modello è stato usato, come già accennato, per calcolare i diagrammi di distribuzione degli stati o *isospike diagrams* [30, 31, 32, 33, 34] mostrati in Fig.26. In questi diagrammi, disegnati nello spazio dei parametri  $A_0$  ed  $\omega$ , ogni punto rappresenta il numero di picchi (spikes) contenuto in un periodo di oscillazione ed è stato associato ad un colore diverso. Il calcolo è stato eseguito per ognuna delle quattro variabili  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $w$ . Il colore nero rappresenta il caos, ovvero valori dei parametri per i quali non è possibile definire alcuna periodicità.

Per calcolare i diagrammi è stata lanciata l'integrazione numerica a partire dalla condizione iniziale arbitraria  $(x, y, z, w) = (1, 1, 0.01, 0.01)$  con  $A_0 = 3$  e questo per ogni valore di  $\omega$ , costruendo una mappa di  $400 \times 400$  punti. Il valore delle variabili ottenute da una integrazione sono state usate come punto di partenza per l'integrazione successiva. Come già osservato, i primi  $4 \cdot 10^8$  passi d'integrazione sono stati scartati perché interessati da un transitorio, le successive  $10^8$  iterazioni sono state usate per calcolare il numero di picchi contenuti in un periodo. A tale scopo sono stati registrati fino ad 800 estremi (massimi e minimi) delle serie temporali della variabile considerata, insieme con l'istante di occorrenza di ogni

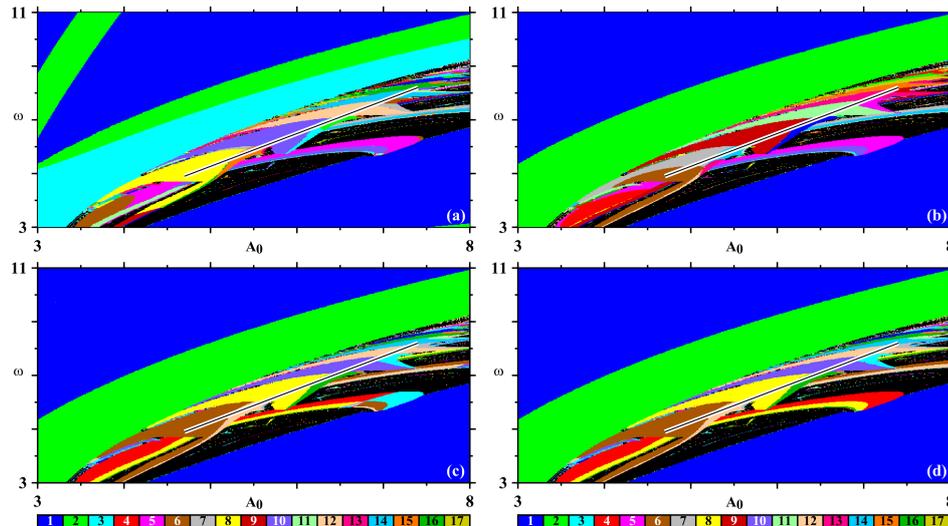


Figura 26: *Isospike diagram* ottenuti contando il numero di picchi in un periodo di (a)  $x$ , (b)  $y$ , (c)  $z$ , (d)  $w$ . Le integrazioni sono partite da una condizione iniziale arbitraria  $(x, y, z, w) = (1, 1, 0.01, 0.01)$ , variando  $A_0$  da 3 a 8 ed  $\omega$  da 3 a 11.

estremo, e registrata la ripetizione della sequenza dei massimi. E' stata definita una scala di 17 colori, rappresentata alla base delle immagini in Fig.26, che è stata usata per contraddistinguere il numero di picchi (massimi) contenuti in un periodo.

Il diagrammi ottenuti permettono di fare una ricognizione dell'intricato meccanismo della generazione dei picchi responsabile della complessità delle oscillazioni nella scarica elettrica. Ogni variabile produce un complesso mosaico di colori, dimostrando una varietà di organizzazioni diverse del numero dei picchi nello spazio dei parametri. Una caratteristica importante da notare è la seguente, pur mostrando la stessa struttura, indipendentemente dalla variabile considerata, i singoli diagrammi variano in modo tale che è difficile trovare un metodo alternativo alla rappresentazione grafica per riassumerne tutta la variabilità.

Dal modello è stato calcolato anche il diagramma di biforcazione e tre mappe di primo ritorno come mostrato in Fig.27 (a). In Fig.27 (b) è riproposto il diagramma di biforcazione sperimentale per un confronto diretto con quello simulato. Le mappe sono state calcolate in corrispondenza delle linee A, B e C disegnate sul diagramma di biforcazione e vanno confrontate con le analoghe sperimentali del

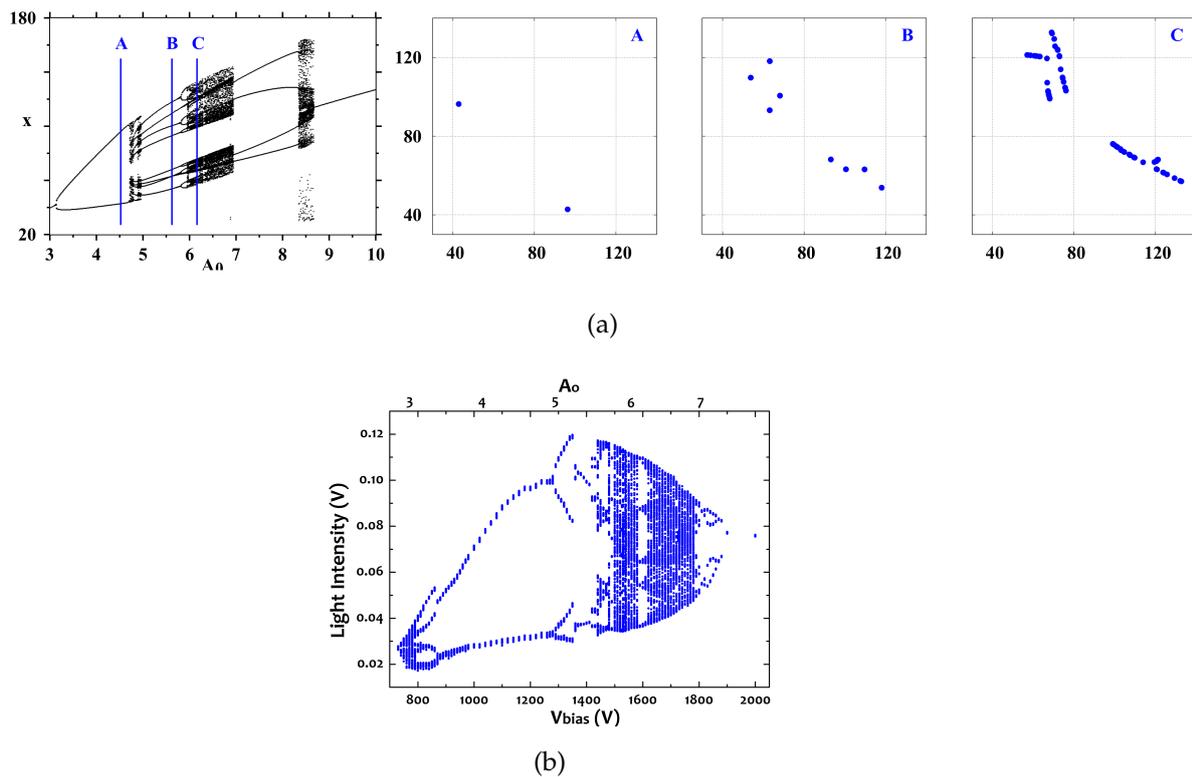


Figura 27: (a) Diagramma di biforcazione simulato per la variabile  $x$  ottenuto per  $\lambda = 5$  e con  $\omega \in [6, 7]$  e considerando solo i massimi maggiori di 30. Le mappe di primo ritorno sono state calcolate in corrispondenza delle linee blu A, B e C corrispondenti a  $(A_0, \omega) = (4.522, 6.217), (5.622, 6.375), (6.161, 6.452)$ . (b) Biforcazione sperimentale per  $C = 2.4\text{nF}$ .

capitolo 2. Si può osservare che in generale c'è un discreto accordo tra i risultati simulati e i corrispondenti grafici sperimentali. Per alti valori di  $A_0$  la biforcazione sperimentale esibisce uno scenario di period doubling invertito che in quella simulata non si osserva, se non per la chiusura finale su una ciclo limite comune ad entrambi i grafici. Questo significa che l'accordo tra misure e modello decresce all'aumentare di  $A_0$ . Le mappe di primo ritorno sono abbastanza confrontabili con le analoghe sperimentali, in particolare la mappa C presenta segni di rottura trasversale già osservato sperimentalmente nel caso della rottura del toro per  $C = 4.8\text{nF}$ , indizio di quasiperiodicità nella transizione al caos.

Altra verifica sulla corretta successione dei regimi periodici e caotici previsti dal

modello in relazione alla realtà sperimentale, è stata fatta calcolando una mappa per l'esponente di Lyapunov massimo. Il risultato è presentato in Fig.28.

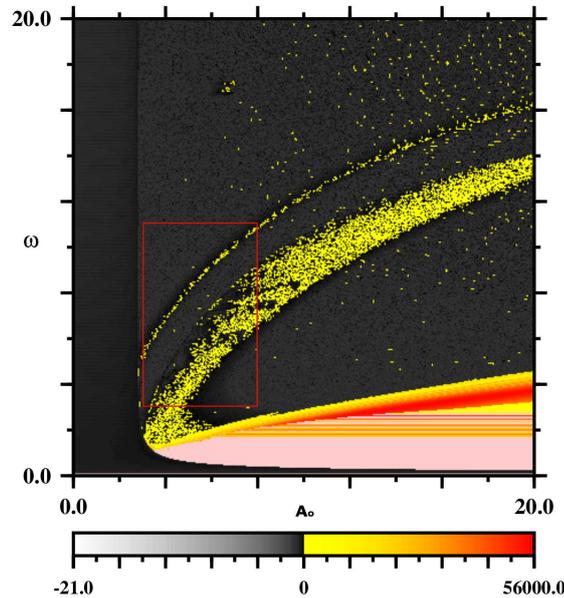


Figura 28: *Mappa bidimensionale, in funzione di  $A_0$  ed  $\omega$ , dell'esponente di Lyapunov lungo  $x$ . La scala di colore contraddistingue i valori positivi dell'esponente, la scala di grigi corrisponde ad esponente negativo. Il riquadro in rosso evidenzia la regione dei parametri usati per calcolare i diagrammi di stabilità.*

Anche in questo caso è stata usata una scala di colori per evidenziare la positività dell'esponente e quindi regioni interessate da dinamica caotica. In scala di grigi invece sono rappresentati quei punti con esponente negativo e connesso a soluzioni periodiche. Il riquadro in rosso evidenzia la regione di parametri per i quali sono stati calcolati gli isospike diagram. Si può osservare come, muovendosi in orizzontale e per valori non troppo elevati di  $\omega$  sia riprodotta la corretta successione di zone periodiche-caotiche-periodiche come da evidenza sperimentale.

### 3.3 CONCLUSIONI

In questa prima parte di tesi è stato presentato lo studio della dinamica di un tubo a scarica. Lo scenario di transizione al caos, dapprima apparentemente caratteriz-

zato dal raddoppio di periodo, ha evidenziato, ad uno studio più approfondito, il fenomeno della quasiperiodicità. Caratterizzando la scarica attraverso la curva tensione corrente, è stato sviluppato un semplice modello capace di riprodurre le caratteristiche basilari del fenomeno osservato. Sulla base di questo modello è stata fatta una classificazione dettagliata dei comportamenti oscillatori sostenuti dalla scarica. Dal calcolo dei diagrammi di stabilità per ogni variabile del modello, è stato possibile caratterizzare l'organizzazione degli stati periodici e non. Tali diagrammi indicano precisamente dove il numero dei picchi in un periodo cambia come funzione dei parametri. Con questa modalità sono state rivelate tutta una serie di regioni dei parametri per i quali il modello prevede stati stabili altrimenti impossibili da classificare. E' utile rimarcare come le informazioni contenute nei diagrammi calcolati possono effettivamente essere usate come controllo della dinamica, individuando un determinato stato per una precisa coppia di valori dei parametri.

Concludendo possiamo affermare che il modello introdotto, benché relativamente semplice, è in grado di riprodurre le principali osservazioni sperimentali e rivela una ricca ed inaspettata varietà di comportamenti dinamici.

## Parte II

# GENERAZIONE DI STATI *ENTANGLED* IN OSCILLATORI PARAMETRICI QUANTISTICI USANDO IL CONTROLLO ESTERNO DI FASE E FREQUENZA



## ENTANGLEMENT IN UN SISTEMA DI DUE OSCILLATORI QUANTISTICI ACCOPPIATI

---

L'*Entanglement* è uno degli aspetti più peculiari ed affascinanti della meccanica quantistica. Esso ha giocato un ruolo fondamentale nella teoria quantistica, fin dalla sua nascita. A questo concetto si sono aggrappati, nel corso della storia, i detrattori della quantomeccanica, basti citare fra tutti il celebre articolo di Einstein, Podolsky e Rosen [35], ma anche coloro che ne dimostrarono invece la bontà delle previsioni, vedi i famosi esperimenti di Bell [36]. Da allora l'interesse verso l'entanglement non solo non si è spento ma ha ricevuto notevole impulso grazie a nuovi campi di ricerca quali l'informazione quantistica, la crittografia e la computazione quantistica in cui tale concetto gioca un ruolo fondamentale. Il limite all'applicazione di tali proprietà quantistiche nei campi citati è rappresentato dal fenomeno della decoerenza, ovvero il meccanismo per il quale un sistema perde la propria coerenza quantistica, le peculiarità quali l'entanglement, ed emerge il comportamento classico. La decoerenza si origina in principal modo dall'interazione del sistema quantistico con l'ambiente circostante determinando la perdita dell'entanglement. Questo fenomeno è tanto più critico quanto più piccolo risulta il tempo di decoerenza rispetto al tempo di coerenza tipico del sistema, impedendo così la manifestazione di qualsiasi effetto quantistico. Per evitare ciò bisognerebbe operare in condizioni di isolamento e raffreddamento dell'apparato sperimentale, frustrando di fatto qualsiasi tentativo di realizzazione di un computer quantistico.

Recentemente, Galve *et al.* [37] hanno dimostrato che per un sistema di due oscillatori armonici con accoppiamento dipendente dal tempo ad in contatto con un bagno termico è possibile osservare stati entangled anche ad alta temperatura. Questo risultato ha evidentemente delle importanti conseguenze. Da un lato esclude

la temperatura come la causa della decoerenza quantistica avendo trovato almeno un sistema che manifesta un comportamento quantistica anche innalzando la temperatura. Dall'altro rende più agevole la sperimentazione non dovendo ricorrere a condizioni di raffreddamento estremo degli apparati sperimentali. Successivamente *Roque et al.* [38] hanno mostrato che la generazione dell'entanglement dipende dalla instabilità dinamica, classicamente intesa, del sistema. In altri termini, la sopravvivenza dell'entanglement in un sistema quantistico dipende dalle condizioni d'instabilità del sistema classico descritto dalle medesime equazioni del moto.

Questa connessione tra l'entanglement e l'instabilità classica può costituire uno strumento potente d'investigazione per determinare, per via classica ed in presenza di sistemi la cui trattazione quantistica risulti complessa, i valori adeguati dei parametri in gioco che possono determinare la generazione dell'entanglement stesso.

In questa seconda parte di tesi viene presentato uno studio sperimentale della connessione sopra citata tra caratteristiche molto diverse tra loro come l'entanglement e l'instabilità dinamica. A tale scopo, è stato realizzato elettronicamente l'analogo classico corrispondente all'oscillatore che descrive l'evoluzione temporale degli operatori di campo del sistema di oscillatori parametrici quantistici. Operando su di esso un controllo esterno è stato possibile guidare il sistema verso regimi dinamici stabili o instabili. Tale controllo si è rivelato efficace anche per la generazione dell'entanglement nel sistema quantistico associato. Questo risultato dimostra non solo che è possibile comprendere, manipolando l'equivalente classico, quale sia il migliore insieme di parametri del sistema per generare l'entanglement ma anche, e direi soprattutto, che il controllo esterno di fase è cruciale per creare o distruggere l'entanglement e che quest'ultimo può essere controllato dinamicamente.

## 4.1 ENTANGLEMENT E SUA MISURA

Il concetto di entanglement è una conseguenza naturale dell'impianto formale della meccanica quantistica. Le principali conseguenze pratiche di questa caratteristica tutta quantistica sono le possibili correlazioni tra i risultati di misura effettuati su diversi sottosistemi di cui è composto un sistema quantistico complessivo. In questa sezione viene data una brevissima descrizione del concetto di entanglement limitando al massimo l'uso del formalismo, e rimandando, per un approfondimento teorico, alle molte trattazioni disponibili sull'argomento.

Consideriamo un sistema quantistico e lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  ad esso associato, pensato, per semplicità, finito dimensionale. Se il sistema è divisibile in due sottosistemi ai quali sono associati gli spazi di Hilbert  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , cosiddetto sistema bipartito, allora lo spazio di Hilbert del sistema complessivo può essere ottenuto come prodotto tensore tra gli spazi di Hilbert associati ai due sottosistemi  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ .

Uno vettore di stato  $|\psi\rangle$ , rappresentante il sistema complessivo, è detto *separabile* se esso è esprimibile come prodotto tensore tra vettori di stato appartenenti ai due sottosistemi

$$|\psi\rangle = |\varphi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$$

in questo caso l'informazione riguardante ognuno dei sottosistemi è racchiusa nei vettori  $|\varphi_1\rangle$  e  $|\varphi_2\rangle$  ed una qualsiasi misura effettuata su uno dei due sistemi componenti non ha conseguenze sull'altro. Per esempio il postulato della riduzione dello stato è applicato al sottosistema oggetto della misura lasciando inalterato l'altro e le misure effettuate su sottosistemi diversi rimangono così scorrelate.

Se lo stato  $|\psi\rangle$  non è esprimibile come sopra allora esso si dice *entangled* e le misure effettuate anche su uno solo dei sottosistemi avranno conseguenze sul sistema complessivo cambiando radicalmente anche le probabilità di ottenere un dato risultato in eventuali misure successive.

In generale, introdotte le basi  $|\alpha_i\rangle$  ed  $|\beta_j\rangle$  rispettivamente per i sottospazi  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , lo stato generico di  $\mathcal{H}$  si esprime come

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_j\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} |\alpha_i \beta_j\rangle$$

nella quale  $n$  ed  $m$  sono le dimensioni rispettivamente di  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  e, nell'ultimo passaggio, è stata compattata la notazione dei vettori di base. Per fare degli esempi ci possiamo limitare al caso di sottospazi bidimensionali, associati a due particelle di spin  $1/2$ , e prendere come vettori di base le proiezioni dello spin sull'asse di quantizzazione. Indicati con  $|1\rangle$  e  $|0\rangle$  gli stati con proiezione  $1/2$  e  $-1/2$  rispettivamente, la base dello spazio  $\mathcal{H}$  è costituita dai quattro vettori

$$\{|0\rangle \otimes |0\rangle, |0\rangle \otimes |1\rangle, |1\rangle \otimes |0\rangle, |1\rangle \otimes |1\rangle\} \equiv \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$$

Un esempio di stato entangled è il seguente

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle)$$

nel quale non è possibile separare i contributi provenienti dai due sottosistemi.

Lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |11\rangle)$$

è invece separabile perché riscrivibile come segue

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle$$

Le definizioni precedenti, introdotte nel caso di stati puri di sistemi bipartiti, sono facilmente generalizzabili al caso di stati puri per sistemi multipartiti. In questo caso lo spazio  $\mathcal{H}$  sarà espresso dal prodotto tensore seguente tra gli  $N$  spazi componenti

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$$

e lo stato  $|\psi\rangle$  si dirà separabile o entangled a seconda che possa essere espresso o meno come prodotto tensore tra stati  $|\varphi\rangle_1, |\varphi\rangle_2, \cdots |\varphi\rangle_N$  appartenenti ai singoli sottospazi.

In generale però, lo stato di un sistema fisico non è completamente determinato e non può essere dunque descritto mediante stati puri. Questo significa che non sempre possiamo descrivere il nostro sistema con un semplice vettore  $|\psi\rangle$  appartenente ad uno spazio di Hilbert. Basti pensare, ad esempio, ad un fascio di atomi emessi da una sorgente termica. Di essi non conosciamo l'energia cinetica ma solo la sua distribuzione. In questo caso diremo che l'informazione che possediamo sul sistema è incompleta ed il sistema sarà descritto da uno dei possibili stati dell'insieme

$$\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$$

ognuno dei quali con probabilità  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ .

Nel caso più generale, in presenza di stati misti, la descrizione viene fatta introducendo la matrice densità, definita nel modo seguente

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$$

con i coefficienti  $p_k$  che soddisfano la condizione di normalizzazione  $\sum_k p_k = 1$ . La matrice densità, oltre a permettere una descrizione statistica dei sistemi quantistici, risulta uno strumento valido per valutare la separabilità degli stati puri ma soprattutto, ed è il caso più delicato, degli stati misti.

Vari criteri di quantificazione dell'entanglement, basati sulla matrice densità, sono stati introdotti. In questo lavoro, limitandoci ai sistemi bipartiti, useremo la *negatività logaritmica*  $E_N$ , che si basa sul criterio della positività dell'operatore densità sotto operazione di trasposta parziale (PPT) [39]. Tale criterio afferma che se uno stato, descritto da un operatore densità  $\rho_{12}$ , è separabile, allora la trasposta parziale  $\rho^{T_i}$ , relativa al sottosistema  $i$ , è semidefinita positiva [40]. Il criterio PPT risulta condizione necessaria e sufficiente per la separabilità di stati gaussiani di sistemi bipartiti [41].

La  $E_N$  quantifica quanto la trasposta parziale  $\rho^{T_i}$  si discosta dall'essere semidefinita positiva e si definisce

$$E_N = \log(2N + 1)$$

in cui  $\mathcal{N}$  rappresenta il valore assoluto della somma di tutti gli autovalori negativi di  $\rho^{\text{T}_i}$ .

La negatività logaritmica vale  $E_{\mathcal{N}} \geq 0$ , con l'uguaglianza valida solo nel caso di stati puri. Infatti se uno stato misto  $\rho_{12}$  è puro la sua trasposta parziale soddisferà la condizione di positività sotto operazioni di trasposta parziale e pertanto non avrà autovalori negativi, il che comporta che la negatività  $\mathcal{N}$  sarà pari a zero. In tal caso la formula della negatività logaritmica si riduce a  $E_{\mathcal{N}} = \log 1$ , ossia è identicamente nulla.

E' stato dimostrato che  $E_{\mathcal{N}}$  è una funzione monotona con l'entanglement nelle trasformazioni di tipo *Local Operations Classical Communications (LOCC)* [42, 43].

#### 4.2 SISTEMA DI OSCILLATORI ACCOPPIATI IN EQUILIBRIO CON L'AMBIENTE

In questa sezione viene presentato il sistema quantistico oggetto della nostra analisi. La trattazione che viene fatta qui segue, abbastanza fedelmente, quella esposta in [38], i cui risultati, presentati nella sezione 4.4, hanno ispirato questo lavoro sperimentale. Il sistema è costituito da due oscillatori quantistici accoppiati, con frequenza e costante d'accoppiamento dipendenti dal tempo, in contatto con l'ambiente. Si tratta dunque di un sistema aperto in cui l'ambiente esterno è interpretato, seguendo la linea proposta da Caldeira-Leggett [44], come un insieme di particelle. Se l'accoppiamento tra sistema ed ambiente è debole, in modo da poter assumere che la risposta dell'ambiente allo stimolo del sistema sia lineare, allora le particelle sono solo leggermente perturbate dalla loro posizione d'equilibrio e si può approssimare il potenziale che agisce su di esse con un potenziale armonico. Questo permette di schematizzare l'insieme delle particelle come un sistema di oscillatori armonici. Formalmente il sistema è rappresentato dall'hamiltoniana seguente

$$H = H_S + H_B + H_I \tag{38}$$

con

$$H_S = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)}{2}X_1^2 + \frac{P_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)}{2}X_2^2 + c(t)X_1X_2 \quad (39)$$

$$H_B = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{p_k^2}{2m_k} + \frac{m_k\omega_k^2 x_k^2}{2} \right] \quad (40)$$

$$H_I = \frac{c_k^2}{2m_k\omega_k^2} (X_1 + X_2)^2 - \sqrt{2}c_k x_k (X_1 + X_2) \quad (41)$$

Nelle precedenti, i pedici 1 e 2 individuano gli oscillatori del sistema e  $k$  quelli dell'ambiente. Con  $\omega(t)$  è stata indicata la pulsazione e con i simboli  $\{X_1, X_2, P_1, P_2\}$  gli operatori di posizione ed impulso per gli oscillatori 1 e 2 del sistema. Analogamente i simboli  $\omega_k$  e  $\{x_k, p_k\}$  individuano rispettivamente frequenze ed operatori di posizione ed impulso per gli oscillatori dell'ambiente.

Per il momento assumiamo  $\omega(t) = \omega_0$  e  $c(t) = mc_0 + mc_1 \cos(\omega_D t)$ , con  $\omega_D$  frequenza angolare associata all'accoppiamento, ed illustriamo i risultati di *Roque et al.* [38] che hanno stimolato la ricerca presentata qui.

Definiamo la trasformazione seguente

$$\begin{cases} X_+ = \frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \\ X_- = \frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} P_+ = \frac{P_1+P_2}{\sqrt{2}} \\ P_- = \frac{P_1-P_2}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (42)$$

Sostituendo i nuovi operatori in (38) l'hamiltoniana del sistema assume la forma seguente

$$H = H_+ + H_- \quad (43)$$

con

$$H_+ = \frac{P_+^2}{2m} + \frac{m\Omega_+^2(t)}{2}X_+^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{p_k^2}{2m_k} + \frac{m_k\omega_k^2}{2} \left( x_k - \frac{\sqrt{2}c_k}{m_k\omega_k^2} X_+ \right)^2 \right] \quad (44)$$

$$H_- = \frac{P_-^2}{2m} + \frac{m\Omega_-^2(t)}{2}X_-^2 \quad (45)$$

con  $\Omega_{\pm}^2(t) = \omega_0^2 \pm c_0 \pm c_1 \cos(\omega_D t)$ .

Con questa trasformazione il modo  $H_+$  rappresenta un oscillatore parametrico accoppiato con l'ambiente ed il modo  $H_-$  è un oscillatore parametrico libero. Le hamiltoniane risultano così disaccoppiate ed i due modi possono essere studiati

separatamente.

L'hamiltoniana è bilineare negli operatori del sistema, questo implica che se prepariamo il sistema in uno stato gaussiano, come qui viene supposto, esso rimarrà in uno stato gaussiano indefinitamente. Tutta l'informazione sulla correlazione quantistica, per un sistema in uno stato gaussiano, è contenuta nella matrice di covarianza per gli operatori di campo, l'interesse è dunque quello di valutare l'evoluzione temporale degli elementi di detta matrice.

In [38] è stata determinata quindi l'evoluzione temporale degli elementi della matrice di covarianza per gli operatori  $\{X_+, X_-, P_+, P_-\}$ , operatori di posizione e impulso per entrambi gli oscillatori  $H_+$  ed  $H_-$ , più facili da calcolare rispetto agli originali. Il calcolo per gli elementi della matrice di covarianza degli operatori  $\{X_+, P_+\}$ , dell'hamiltoniana  $H_+$  che contiene l'accoppiamento con l'ambiente, introduce una dipendenza dalla temperatura del bagno termico (il nostro ambiente) che si ritrova nella valutazione dell'entanglement.

Il calcolo esplicito della matrice di covarianza è complesso e può essere trovato in [38]. Verranno forniti qui solo i risultati della valutazione dell'entanglement ottenuti per via teorica che dovranno essere confrontati con quelli ottenuti per via sperimentale. Prima di passare alla descrizione dei risultati viene presentato, nella prossima sezione, l'oscillatore parametrico classico che, come vedremo, gioca un ruolo cruciale nell'interpretazione dei risultati stessi.

### 4.3 OSCILLATORE PARAMETRICO CLASSICO

Prima di presentare i risultati sull'entanglement del sistema quantistico della sezione precedente, esponiamo qui le caratteristiche essenziali dell'oscillatore parametrico dissipativo classico. E' possibile dimostrare che l'evoluzione temporale degli elementi della matrice di covarianza degli operatori  $\{X_+, X_-, P_+, P_-\}$  è regolata da equazioni differenziali formalmente identiche a quelle dell'oscillatore parametrico classico [38]. Vedremo nel prossimo paragrafo che tale tipo di oscillatore presenta delle interessanti connessioni con la trattazione dell'entanglement. Descriviamo qui le caratteristiche principali di tale oscillatore.

L'equazione del moto dell'oscillatore parametrico dissipativo classico si può scrivere nella forma seguente

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega^2(t)x = 0 \quad (46)$$

dove  $\omega^2(t) = \omega_0^2 + \epsilon\cos(\omega_D t)$  e  $\gamma$  è il coefficiente di smorzamento. Definendo le variabili adimensionali

$$\tilde{t} = \frac{\omega_D t}{2}, \quad \tilde{\epsilon} = \frac{2\epsilon}{\omega_D^2}, \quad \tilde{\omega}_0 = \frac{2\omega_0}{\omega_D}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{2\gamma}{\omega_D} \quad (47)$$

e tenendo conto della trasformazione  $dt = \frac{2}{\omega_D} d\tilde{t}$ , l'equazione del moto può essere messa nella forma adimensionale seguente

$$\ddot{x} + \tilde{\gamma}\dot{x} + \tilde{\omega}^2(t)x = 0 \quad (48)$$

nella quale  $\tilde{\omega}^2(t) = \tilde{\omega}_0^2 + 2\tilde{\epsilon}\cos(2\tilde{t})$ . Nel prosieguo del paragrafo, avendo a che fare solo con variabili adimensionali, sarà omessa la tilde sui simboli.

Siamo interessati a soluzioni del tipo  $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}y(t)$  e con  $\gamma \ll \omega_0$ . Sostituendo in (48) si ottiene l'equazione per  $y$

$$\ddot{y} + \left[ \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} + 2\epsilon\cos(2t) \right] y = 0 \quad (49)$$

che rappresenta il cosiddetto *oscillatore di Mathieu* con frequenza angolare  $\omega_R^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4$ . La (49) rappresenta un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti periodici che può essere trattata con la teoria di Floquet [45]. Una possibile coppia di soluzioni linearmente indipendenti sono date da

$$\phi_1(t) = e^{i\nu t}p(t), \quad \phi_2(t) = \phi_1(-t) \quad (50)$$

con  $p(t)$  funzione periodica di periodo  $\pi$  e  $\nu$  il cosiddetto *esponente caratteristico di Mathieu*. A partire dalle condizioni iniziali

$$\begin{cases} \phi_1(t_0) = 0 \\ \phi_2(t_0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\phi}_1(t_0) = 1 \\ \dot{\phi}_2(t_0) = 0 \end{cases} \quad (51)$$

le soluzioni  $\phi_1(t)$  e  $\phi_2(t)$  possono essere ottenute tramite integrazione numerica dell'equazione (49).

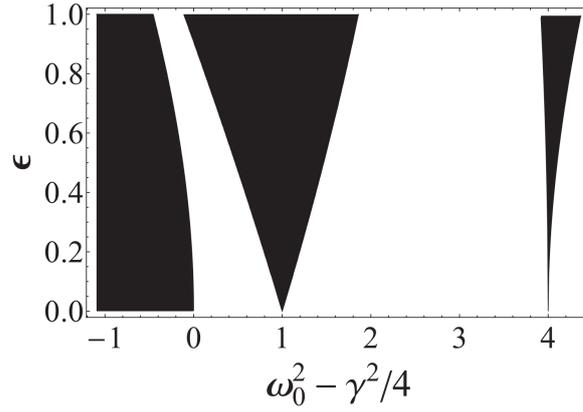


Figura 29: Diagramma di stabilità per l'equazione di Mathieu in funzione di  $\epsilon$  e  $\omega_R^2$  ( $\gamma \ll \omega_0$ ).  
In nero sono indicate le aree d'instabilità delle soluzioni.

L'esponente caratteristico  $\nu$  è funzione dei parametri in gioco,  $\omega_R$  ed  $\epsilon$ , e determina la stabilità delle soluzioni. Se  $\text{Im}\{\nu\} \neq 0$ , allora esiste almeno una soluzione instabile. La ricostruzione del diagramma di stabilità delle soluzioni per la (49) è riportato in Fig.29.

#### 4.4 ENTANGLEMENT DEGLI OSCILLATORI QUANTISTICI: SIMULAZIONI

In questa sezione vengono presentati i risultati delle simulazioni, ottenuti da *Roque et al.* [38], eseguite sul sistema dei due oscillatori quantistici per valutare il grado di entanglement e la sua dipendenza dai parametri del sistema. Per presentare i risultati viene usato un tempo adimensionale definito come  $\tau = \omega_0 t$ , inoltre tutti i parametri del sistema sono riscritti rispetto ad  $\omega_0$  e viene introdotta la temperatura dello stato fondamentale  $T_0 = \hbar\omega_0/k_B$ . Lo smorzamento dell'oscillatore parametrico classico è stato assunto pari a  $\gamma = 0.005\omega_0/\sqrt{2}$ . Si definiscono  $\tau_R$ , pari al tempo dopo il quale il sistema è in uno stato entangled, ed  $r$  che rappresenta la velocità media con cui l'entanglement cresce.

In Fig.30 è mostrata l'evoluzione con il tempo della negatività logaritmica  $E_N$ , nel caso di accoppiamento parametrico puro definito da  $c_0 = 0$  e  $c_1 \neq 0$ . La curva mostra che anche ad alta temperatura, rispetto a quella corrispondente allo stato

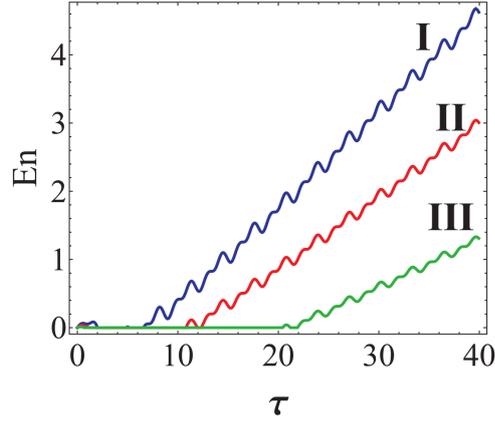


Figura 30: Entanglement valutato tramite l'andamento della negatività logaritmica. Tutte le curve sono ricavate per  $T = 100T_0$ ,  $c_0 = 0$  e  $\omega_D = 2\omega_0$ . Il valore di  $c_1$  è I)  $0.4\omega_0^2$  (in blu); II)  $0.3\omega_0^2$  (in rosso); III)  $0.2\omega_0^2$  (in verde).

fondamentale  $T_0$ , il sistema rimane entangled per un tempo molto lungo ovvero per  $\tau \gg 1$ . Se si trascurano le oscillazioni, l'andamento di  $E_N$  è praticamente lineare in  $\tau$ . Dalla valutazione della retta che meglio si adatta agli andamenti trovati si possono ricavare la pendenza e l'intercetta sull'asse orizzontale che corrispondono alle quantità  $r$  e  $\tau_R$  definite sopra.

Valutazioni più quantitative sono ottenute operando simulazioni per vari valori di  $T$  e  $c_1$  ed estraendo i corrispondenti valori di  $\tau_R$  ed  $r$ . In Fig.31 sono presentati gli andamenti di  $\tau_R$  così ottenuti.

I dati nel grafico in figura mostrano che  $\tau_R$  è una funzione monotona crescente in funzione di  $T$  (Fig.31 a) e monotona decrescente in funzione di  $c_1$  (Fig.31 b). Gli andamenti suggeriscono una dipendenza logaritmica per la funzione  $\tau_R(T)$  ed una dipendenza del tipo  $1/c_1$  per la funzione  $\tau_R(c_1)$ . Nella stessa figura sono graficate in rosso le migliori curve che si adattano ai dati.

Gli analoghi andamenti per  $r$  sono presentati in Fig.32. Dalla Fig.32 (a) si nota che non c'è variazione di  $r$  con  $T$ , cosa che sembra confermata dai valori dei coefficienti della retta che interpola i dati. Al contrario risulta una dipendenza lineare abbastanza chiara di  $r$  da  $c_1$  (Fig.32 b). Questi stessi andamenti sono osservati in tutte le simulazioni effettuate anche per valori elevati di  $T$  rispetto a  $T_0$ .

Almeno due considerazioni interessanti possono essere fatte a commento di que-

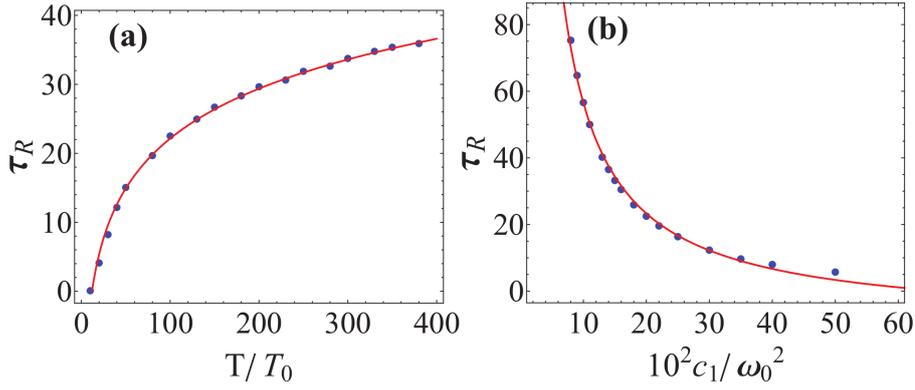


Figura 31: (a) Andamento di  $\tau_R$  in funzione di  $T$  per  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 0.2\omega_0^2$  e  $\omega_D = 2\omega_0$ . L'equazione della curva in rosso è  $\tau_R = (10.4 \pm 0.2)\ln(T/T_0) - (25.9 \pm 0.8)$ . (b) Andamento di  $\tau_R$  in funzione di  $c_1$  per  $c_0 = 0$ ,  $T = 100T_0$  e  $\omega_D = 2\omega_0$ . La curva rossa ha equazione  $\tau_R = (6.6 \pm 0.1)(c_1/\omega_0^2)^{-1} - (9.9 \pm 0.7)$ .

ste prime simulazioni. Innanzitutto la dinamica di entanglement sembra essere molto più sensibile alle variazioni del coefficiente di accoppiamento  $c_1$  rispetto alla temperatura  $T$ . Infatti il tasso di crescita  $r$  non varia con  $T$  ma varia linearmente con  $c_1$ . Inoltre è bene osservare che esiste sempre un valore  $\tau_R$ , anche per alte  $T$ , per cui il sistema dei due oscillatori è in uno stato entangled con un tasso  $r$  uguale a quello per basse temperature del bagno termico.

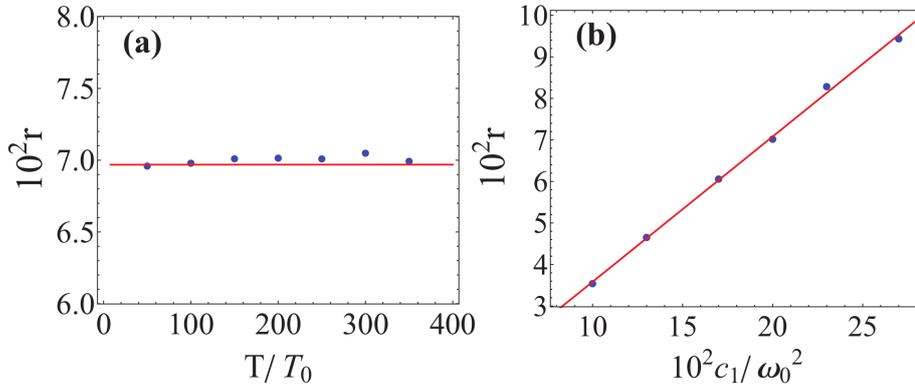


Figura 32: (a) Andamento di  $r$  in funzione di  $T$  per  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 0.2\omega_0^2$  e  $\omega_D = 2\omega_0$ . L'equazione della curva in rosso è  $r = (1.7 \pm 0.9) \cdot 10^{-6}(T/T_0) + (6.97 \pm 0.02) \cdot 10^{-2}$ . (b) Andamento di  $r$  in funzione di  $c_1$  per  $c_0 = 0$ ,  $T = 100T_0$  e  $\omega_D = 2\omega_0$ . La curva rossa ha equazione  $r = (0.350 \pm 0.007)(c_1/\omega_0^2) + (8 \pm 4) \cdot 10^{-4}$ .

Veniamo ora alla descrizione del comportamento più interessante, per i nostri sco-

pi, emerso dalle simulazioni. Analizziamo la dipendenza dell'entanglement dalla pulsazione  $\omega_D$ . L'entanglement si dimostra molto sensibile alle variazioni di  $\omega_D$  e questa sensibilità è legata all'instabilità del sistema. In Fig.33 (a) viene messa in grafico la parte immaginaria dell'esponente caratteristico di Mathieu  $\nu$ , introdotto nella sezione precedente, in funzione di  $\omega_D$ , per entrambi i modi d'oscillazione in cui è stata separata l'hamiltoniana del sistema. Tale esponente può essere calcolato numericamente risolvendo l'equazione dell'oscillatore parametrico classico associata ad ognuna delle hamiltoniane  $H_+$  ed  $H_-$ .

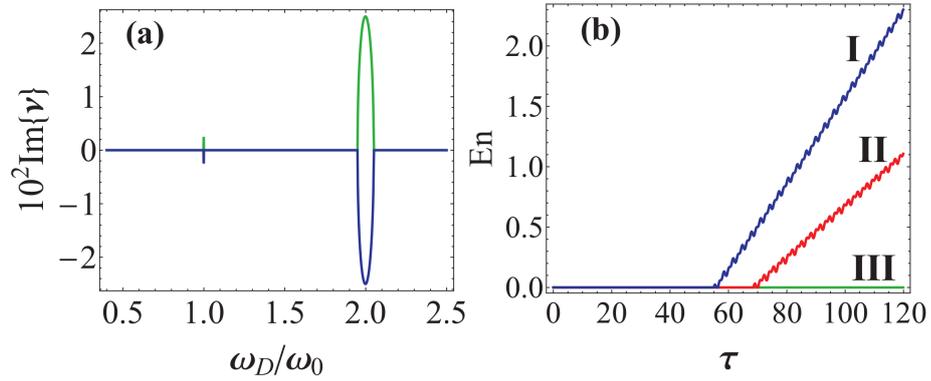


Figura 33: (a) Parte immaginaria di  $\nu$  in funzione di  $\omega_D$  per i modi d'oscillazione "−" (in verde) e "+" (in blu). (b) Andamento di  $E_N$  per I)  $\omega_D = 2\omega_0$ , II)  $\omega_D = 1.96\omega_0$  e III)  $\omega_D = 1.94\omega_0$ . Tutti i grafici sono stati calcolati per  $T = 100T_0$ ,  $c_0 = 0$  e  $c_1 = 0.1\omega_0^2$ .

Nella Fig.33 (b) è mostrato il grafico di  $E_N$  al variare di  $\tau$  per vari valori di  $\omega_D$ . Dal grafico di Fig.33 (a) si vede che solo per  $\omega_D$  intorno al valore  $2\omega_0$  si ha  $\text{Im}\{\nu\} \neq 0$ , che corrisponde all'instabilità del sistema. Corrispondentemente, sul grafico di  $E_N$  solo per gli andamenti con  $\omega_D = 1.96\omega_0$  e  $\omega_D = 2\omega_0$  si osserva entanglement per tempi lunghi. Riguardando ora i grafici precedenti, calcolati per  $\omega_D = 2\omega_0$ , ci rendiamo conto che il sistema si trovava in una condizione d'instabilità.

Se passiamo dall'accoppiamento puramente parametrico ad un accoppiamento misto tra gli oscillatori, identificata dalla condizione  $c_0 \neq 0$ , possiamo osservare ancora qualcosa di interessante. In Fig.34 (a) è mostrato l'andamento di  $\text{Im}\{\nu\}$  in questo regime d'accoppiamento, in cui è stato posto  $c_0 = 0.05\omega_0^2$ . Le regioni d'instabilità dei due modi + e − non sono più completamente sovrapposte. Infatti

ti, a causa del segno diverso con cui  $c_0$  entra nelle due hamiltoniane, si ha uno slittamento in verso opposto delle due zone d'instabilità. Andando nuovamente a valutare l'andamento di  $E_N$  per vari  $\omega_D$  si trova che si ottiene comunque entanglement per tempi lunghi in corrispondenza del comportamento instabile del modo "–".

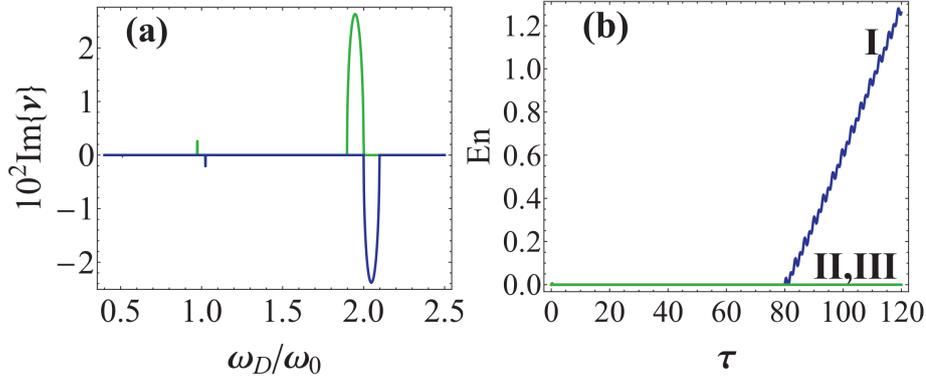


Figura 34: (a) Parte immaginaria di  $\nu$  in funzione di  $\omega_D$  per i modi d'oscillazione "–" (in verde) e "+" (in blu). (b) Andamento di  $E_N$  per I)  $\omega_D = 1.96\omega_0$ , II)  $\omega_D = 2.04\omega_0$  e III)  $\omega_D = 1.8\omega_0$ . Tutti i grafici sono stati calcolati per  $T = 100T_0$ ,  $c_0 = 0.05\omega_0^2$  e  $c_1 = 0.1\omega_0^2$ .

Nel caso generale in cui i parametri  $c_0$ ,  $c_1$  ed  $\omega_D$  assumono valori arbitrari, tutte le simulazioni fatte dimostrano che si osserva entanglement per temperature alte rispetto a  $T_0$  e per tempi lunghi quando si ha instabilità dinamica del modo di oscillazione descritto da  $H_-$  [38].

#### 4.5 CONCLUSIONI

Il sistema di due oscillatori quantistici accoppiati ed in equilibrio con un comune bagno termico manifesta la nascita di stati entangled in relazione alla condizione di stabilità del sistema. In questo capitolo sono stati presentati i risultati delle simulazioni numeriche ottenuti da [38] ed effettuate nel caso di accoppiamento puramente parametrico ( $c_0 = 0$ ) e di accoppiamento misto ( $c_0 \neq 0$ ). I dati ottenuti dimostrano che la instabilità dinamica del modo  $H_-$  costituisce una condizione necessaria e sufficiente per l'instaurarsi di stati entangled duraturi nel tempo ed

ad alte temperature, rispetto a quella dello stato fondamentale degli oscillatori. Il fatto che l'equazione del moto degli elementi della matrice di covarianza associata agli operatori quantistici coincida con quella dell'oscillatore parametrico classico ha permesso di legare facilmente la dinamica osservata ai valori dell'esponente caratteristico di Mathieu da cui dipende la stabilità dinamica del sistema. Questo ha suggerito di poter operare una sperimentazione, su una realizzazione analogica dell'oscillatore di Mathieu, per approfondire la connessione tra instabilità dinamica ed entanglement. Detto in altri termini l'obiettivo che ci siamo posti è definire sperimentalmente l'insieme dei parametri per cui tale oscillatore diventa instabile ed introdurre un controllo sulla sua frequenza angolare, connessa con la frequenza angolare e con il termine d'accoppiamento degli oscillatori quantistici, per guidare la dinamica del sistema. Anticipiamo già che tale controllo si rivela efficace anche per generare stati entangled nell'equivalente sistema quantistico. Il prossimo capitolo è dedicato alla presentazione del lavoro sperimentale.



GENERAZIONE CONTROLLATA DELL' ENTANGLEMENT

---

La connessione tra entanglement e instabilità dinamica, nel sistema di due oscillatori quantistici accoppiati ed in equilibrio con l'ambiente, è stata dimostrata tramite le simulazioni teoriche presentate nel capitolo precedente. È stato mostrato come sia sufficiente avere instabilità dinamica nel modo d'oscillazione  $H_-$  per generare stati entangled nel sistema. L'ulteriore aspetto interessante è che l'evoluzione temporale degli elementi della matrice di covarianza degli operatori quantistici, associati alle hamiltoniane  $H_+$  ed  $H_-$  in cui è separabile l'hamiltoniana originale, seguono un'equazione del moto identica a quella dell'oscillatore parametrico classico, conosciuto come *oscillatore di Mathieu*. Questo aspetto è interessante non solo perché risulta immediato fare una valutazione della instabilità dinamica del sistema, a partire dallo studio della parte immaginaria dell'esponente caratteristico di Mathieu al variare della frequenza dell'accoppiamento, ma anche perché apre la strada a verifiche sperimentali di facile realizzazione. Affrontare lo studio sperimentale di un sistema classico, generalmente più semplice e meno dispendioso in termini di risorse sperimentali, sapendo che esso può essere utilizzato per caratterizzare il comportamento di un sistema quantistico è un passo decisamente importante. Se poi, come nel lavoro che andiamo qui a presentare, l'azione sperimentale sul sistema classico, oltre a permettere la caratterizzazione del sistema quantistico, riesce anche a fornire un valido strumento di controllo della dinamica di entanglement allora il passo in avanti è rimarchevole. In questo capitolo è presentata una realizzazione elettronica dell'oscillatore di Mathieu in cui la dipendenza parametrica della frequenza viene controllata dall'esterno, in ampiezza e fase. Si dimostra che tale controllo permette di guidare il sistema verso i regimi dinamici d'interesse. La verifica contemporanea sul sistema quantistico, usando gli stessi parametri sperimentali, rivela che tale metodo

sperimentale controlla anche la dinamica di entanglement.

### 5.1 RICHIAMI SUL SISTEMA

Le equazioni che descrivono il sistema di oscillatori quantistici accoppiati ed in equilibrio con il bagno termico sono riproposte qui di seguito

$$H = H_S + H_B + H_I \quad (52)$$

con

$$H_S = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)}{2} X_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)}{2} X_2^2 + c(t) X_1 X_2 \quad (53)$$

$$H_B = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{p_k^2}{2m_k} + \frac{m_k \omega_k^2 x_k^2}{2} \right] \quad (54)$$

$$H_I = \frac{c_k^2}{2m_k \omega_k^2} (X_1 + X_2)^2 - \sqrt{2} c_k x_k (X_1 + X_2) \quad (55)$$

In tutta generalità, si suppone che sia dipendenza dal tempo anche nella frequenza dei due oscillatori  $\omega(t)$  oltre che nel coefficiente d'accoppiamento  $c(t)$ . Operando con la stessa trasformazione di variabili già introdotta nel capitolo precedente si ottiene l'hamiltoniana separabile

$$H = H_+ + H_- \quad (56)$$

dove  $H_+$  e  $H_-$  sono i due modi d'oscillazione seguenti

$$H_+ = \frac{p_+^2}{2m} + \frac{m\Omega_+^2(t)}{2} X_+^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{p_k^2}{2m_k} + \frac{m_k \omega_k^2}{2} \left( x_k - \frac{\sqrt{2} c_k}{m_k \omega_k^2} X_+ \right)^2 \right] \quad (57)$$

$$H_- = \frac{p_-^2}{2m} + \frac{m\Omega_-^2(t)}{2} X_-^2 \quad (58)$$

in questo caso  $\Omega_{\pm}^2(t) = \omega^2(t) \pm c(t)/m$ . A questo sistema è associabile un oscillatore parametrico classico, la cui equazione del moto descrive l'evoluzione temporale degli elementi della matrice di covarianza degli operatori  $\{X_+, P_+, X_-, P_-\}$ , che nella formulazione base è definito come

$$\ddot{y} + \left[ \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} + \epsilon \cos(\omega_d t) \right] y = 0 \quad (59)$$

e, come osservato nel paragrafo 4.3, corrisponde all'equazione dell'oscillatore parametrico dissipativo classico per soluzioni smorzate con  $\gamma \ll \omega_0$ . Nella (59) è stata introdotta una generica frequenza angolare  $\omega_d$  che, come vedremo nel prossimo paragrafo, gioca il ruolo di frequenza di *driving* del sistema. Questo sistema, con le varianti necessarie per operare il controllo della dinamica, è stato realizzato sperimentalmente per via elettronica secondo le modalità descritte di seguito.

## 5.2 ARRANGIAMENTO E METODO SPERIMENTALI

In questa sezione descriviamo la realizzazione sperimentale dell'oscillatore di Mathieu e la tecnica per il controllo della sua dinamica. Il sistema è stato realizzato elettronicamente a partire dall'equazione (59) che, per comodità, riscriviamo in forma di sistema di equazioni differenziali di primo grado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= - \left[ \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} + \epsilon \cos(\omega_d t) \right] x = - \left[ \omega_r^2 + \epsilon \cos(\omega_d t) \right] x \end{aligned} \quad (60)$$

in cui è stata definita  $\omega_r = \left( \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}$  che rappresenta la frequenza angolare naturale dell'oscillatore non parametrico.

E' noto, e la questione è stata affrontata nella sezione 4.3, che l'oscillatore (60) presenta soluzioni divergenti quando  $f_d = \frac{\omega_d}{2\pi}$  si avvicina ad alcuni valori notevoli, in particolare, intorno a due volte la frequenza  $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi}$ . L'interesse è quello di determinare sperimentalmente le regioni d'instabilità dell'oscillatore e controllarne la dinamica. Vedremo che è possibile cambiare il comportamento da instabile a stabile e viceversa mediante una opportuna perturbazione sinusoidale.

A questo scopo è stato progettato e realizzato l'oscillatore elettronico analogico rappresentato schematicamente in Fig.35, dove sono stati omessi alcuni accorgimenti circuitali non importanti per la descrizione dell'esperimento.

Il circuito è realizzato con componenti elettronici commerciali. L'oscillatore armonico con frequenza  $f_r$  è ottenuto usando una cascata di quattro amplificatori operazionali LT1114CN della Linear Technology. Il generatore di funzione Hameg



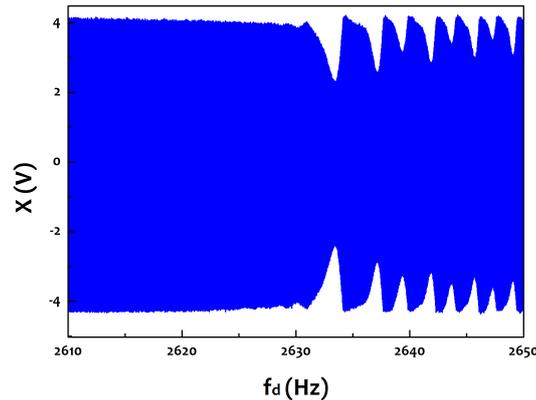


Figura 36: Segnale temporale della variabile  $x$  acquisito in corrispondenza di una variazione continua di frequenza intorno a  $f_d = f_r \simeq 2.63$  kHz.

maggiori o minori di  $f_r$ , così anche per le altre regioni d'instabilità osservate. Il comportamento appena descritto è osservabile anche rappresentando i segnali in modalità XY, la Fig.37 mostra un esempio degli attrattori che si ottengono.

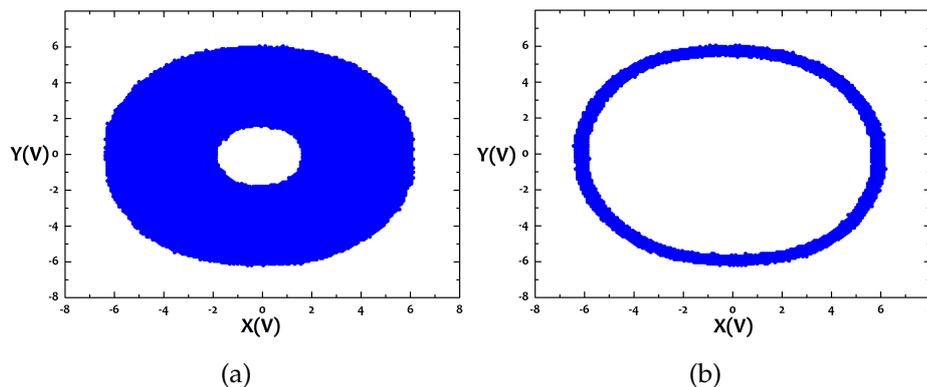


Figura 37: Attrattori di Mathieu come osservati all'oscilloscopio. (a) Attrattore non saturato corrispondente ad una soluzione stabile; (b) Attrattore saturato corrispondente ad una condizione di instabilità.

Nell'immagine (a), il segnale non saturato genera un'attrattore di forma ovoidale pieno, a causa della modulazione, ma con bordo netto per la saturazione che interviene quando la tensione eccede la soglia degli integrati. In (b) l'attrattore, corrispondente ad una situazione di instabilità, è completamente saturato e schiacciato sul bordo esterno, la modulazione non è più in grado di abbassare la tensione

sotto la soglia di saturazione e l'attrattore appare con l'interno "vuoto". La comparsa di una forma di attrattore stabile di quest'ultimo tipo indica l'ingresso del sistema nella regione d'instabilità, può così essere annotata la frequenza  $f_d$  corrispondente e ripetere l'operazione al variare dell'ampiezza del segnale  $V_\epsilon$ . Con questa modalità operativa sono state registrate le coppie di valori  $(f_d, \epsilon)$ , per cui il sistema entra ed esce dalle regioni d'instabilità, e ricostruito il diagramma di Fig.38.

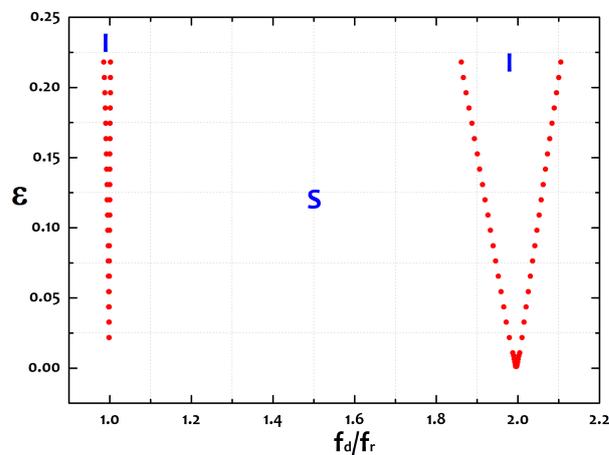


Figura 38: Regioni d'instabilità dell'oscillatore di Mathieu ottenute al variare di  $\epsilon$  e  $f_d$  del segnale  $V_\epsilon$ .

Il grafico proposto in Fig.38 è rappresentato in funzione di parametri adimensionali. L'ampiezza  $\epsilon$  è stata riscalata rispetto all'ampiezza dell'oscillatore armonico di base, caratterizzato dalla frequenza  $f_r$ ; le frequenze sull'asse orizzontale sono rapportate a  $f_r$  stessa. In questo modo, oltre a lavorare con variabili adimensionali, c'è un immediato confronto tra le caratteristiche del segnale originale e quelle del segnale imposto  $V_\epsilon$ . La Fig.38 va confrontata con quella simulata del paragrafo 4.3. Le regioni di instabilità, individuate dalla lettera I, si ritrovano in corrispondenza di  $f_d \simeq f_r$  ed  $f_d \simeq 2f_r$  come nella versione simulata.

La dinamica dell'oscillatore di Mathieu può essere controllata usando la tecnica del controllo di fase, già largamente impiegata in dinamica non lineare per pilotare il comportamento caotico in oscillatori non lineari [46]. Essa consiste nell'ap-

plicazione, ad un dato parametro del sistema, di una opportuna modulazione periodica. In questo modo il sistema viene gestito regolando l'ampiezza del segnale di controllo e la differenza di fase tra quest'ultimo e l'oscillazione propria del sistema.

Formalmente, le equazioni che descrivono il sistema, modificato con l'introduzione del controllo di fase, prendono la forma seguente

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= - \left\{ \omega_r^2 + \epsilon [1 + m \cdot \cos(\omega_d t + \phi)] \cos(\omega_d t) \right\} x \\ &= - \left\{ \omega_r^2 + V_\epsilon [1 + V_m(\phi)] \right\} x\end{aligned}\quad (61)$$

dove ora il parametro  $\epsilon$  è modulato con un segnale sinusoidale alla stessa frequenza  $f_d$ . Il comportamento del sistema controllato dipende dall'ampiezza della modulazione  $m$  e dalla differenza di fase  $\phi$  tra i segnali  $V_m(\phi)$  e  $V_\epsilon$ .

Alcune parole vanno spese per chiarire le implicazioni della modulazione introdotta. Da un punto di vista puramente teorico l'assunzione fatta nella (61) corrisponde ad assumere, per la funzione  $\Omega_\pm^2(t) = \omega^2(t) \pm c(t)/m$ , l'espressione seguente

$$\Omega_\pm^2(t) = \omega_0^2 \{1 + \epsilon [1 + m \cdot \cos(\omega_d t + \phi)] \cos(\omega_d t)\} \pm \omega_0^2 c \quad (62)$$

dove  $\omega_0$  è la pulsazione originaria alla quale il sistema tornerebbe se  $\epsilon = 0$  ed ingloba le dimensioni di una pulsazione al quadrato. Le quantità  $\epsilon$  ed  $m$  sono assunte adimensionali ed è stato posto  $c(t) = m\omega_0^2 c$ . In questo modo è possibile definire una pulsazione adimensionale dell'oscillatore parametrico che descrive l'evoluzione temporale degli operatori quantistici nel modo seguente

$$\tilde{\Omega}_\pm^2(t) = 1 \pm c + \epsilon [1 + m \cdot \cos(\omega_d t + \phi)] \cos(\omega_d t) \quad (63)$$

nella quale la quantità  $1 \pm c$  è evidentemente legata alla pulsazione naturale  $\omega_r$  dell'oscillatore di Mathieu introdotta nella (60). Volendo specializzare la discussione all'oscillatore associato ad  $H_-$ , si seleziona il termine costante  $1 - c$ . In base alla parametrizzazione circuitale scelta  $c = 0.09$ .

Sperimentalmente, la scelta della forma della modulazione introdotta in (61) è

vantaggiosa per almeno un paio di ragioni. Innanzitutto ponendo  $m = 0$  si rientra immediatamente nel caso precedente, di oscillatore non controllato, e questo permette ogni tipo di verifica durante la sperimentazione. Il secondo aspetto riguarda la realizzazione circuitale, infatti la funzione adottata ci consente di gestire lo sfasamento tra due segnali esterni applicati garantendo un controllo completo della perturbazione introdotta.

La realizzazione circuitale del controllo di fase è rappresentata nella parte inferiore dello schema circuitale di Fig.35. Nel circuito sono stati inclusi due ulteriori moltiplicatori MLT04G in modo da realizzare i tre prodotti  $V_\epsilon \cdot \chi$  e  $V_\epsilon \cdot V_m \cdot \chi$ . I due generatori di funzione Hameg HM 8131-2, che forniscono i segnali  $V_\epsilon$  e  $V_m(\phi)$ , sono stati connessi in una configurazione master-slave assicurando una differenza tra le loro fasi stabile e regolabile.

Il controllo è stato applicato in due condizioni differenti. Nel primo caso è stata scelta, come condizione iniziale, una soluzione instabile nella regione corrispondente a  $f_d = 2f_r$  (praticamente sono stati impostati i parametri  $\epsilon$  ed  $f_d$  corrispondenti ad un punto di instabilità nella regione  $f_d = 2f_r$ ). Nel secondo caso è stata scelta una condizione iniziale stabile, un punto nelle vicinanze della regione di soluzioni instabili ma esterno ad essa in corrispondenza di  $f_d = 1.77f_r$ . In entrambi i casi l'ampiezza del segnale  $V_\epsilon$  è stato impostato a  $\epsilon = 0.215$ . Come ricordato in precedenza, il valore fornito di  $\epsilon$  è riferito all'ampiezza dell'oscillazione libera, allo stesso modo il valore di  $m$  che troviamo nei grafici è riscalato rispetto ad  $\epsilon$ . Questo consente di avere sempre valori adimensionali che possono essere usati direttamente nelle routine di simulazione numerica.

La modalità di misura è analoga a quella usata per ricostruire le regioni d'instabilità dell'oscillatore di Mathieu mostrate in Fig.38. In questo caso sono stati registrati i valori delle coppie  $(\phi, m)$  per cui le soluzioni del sistema cambiano il loro carattere di stabilità. Si costruiscono i diagrammi di stabilità mostrati in Fig.39 in cui i punti sperimentali, in rosso, definiscono i confini tra le varie regioni nel piano  $(\phi, m)$ .

I dati dimostrano che il sistema è completamente controllabile in entrambe le direzioni, partendo da una condizione instabile si perviene ad una condizione di

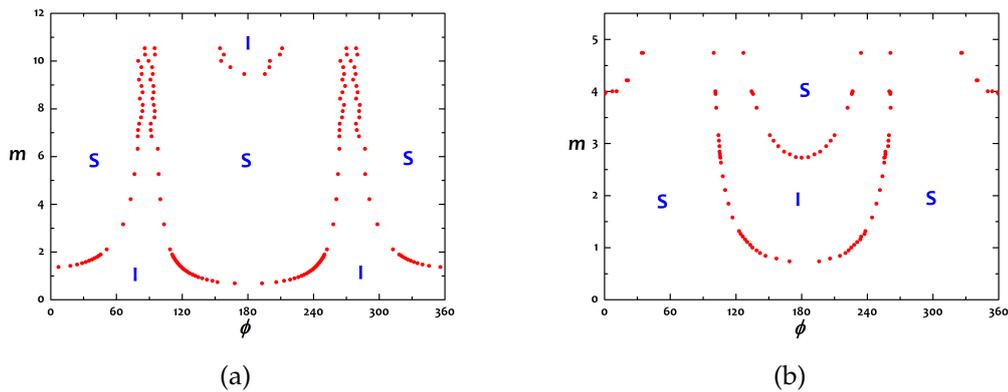


Figura 39: Regioni di stabilità (S) ed instabilità (I) al variare di  $\phi$  ed  $m$ . (a) Controllo di fase partendo da una soluzione instabile a  $f_d = 2f_r$ ,  $\epsilon = 0.215$ . (b) Controllo di fase partendo da una soluzione stabile a  $f_d = 1.77f_r$ ,  $\epsilon = 0.215$ .

stabilità e viceversa agendo sull'ampiezza  $m$  e sulla fase  $\phi$ . In particolare, focalizzando l'attenzione sul valore di fase  $\phi = 180^\circ$ , si può notare come si possa cambiare il carattere di stabilità semplicemente aumentando il valore di  $m$ .

Realizzato il controllo della stabilità dinamica dell'oscillatore parametrico classico non rimane ora che verificare quali ricadute quantistiche abbiano i risultati ottenuti facendo il confronto con le simulazioni numeriche, sul sistema di oscillatori quantistici accoppiati, in corrispondenza dello stesso set di parametri usati sperimentalmente.

### 5.3 RELAZIONE TRA INSTABILITÀ DINAMICA ED ENTANGLEMENT

Da un punto di vista teorico, la forma della funzione  $\Omega_{\pm}^2(t)$ , assunta per realizzare il controllo di fase, preserva il carattere periodico dei coefficienti dell'equazione differenziale dell'oscillatore parametrico e consente dunque di utilizzare la teoria di Floquet per le equazioni differenziali ordinarie a coefficienti periodici. L'analisi numerica è dunque analoga a quella svolta nel capitolo precedente e specializzata sul modo d'oscillazione associato ad  $H_-$ , la cui instabilità sappiamo essere condizione teorica necessaria e sufficiente per l'instaurarsi di stati entangled. La dina-

mica del sistema può essere così seguita in contemporanea sia per via numerica, dalle equazioni del modello, che sperimentalmente e confrontando poi i risultati. Adesso il carattere di stabilità delle soluzioni, valutabile dal calcolo di  $\text{Im}\{\nu\}$ , è da determinare al variare dei parametri  $f_d$ ,  $\epsilon$ ,  $m$  ed  $\phi$  negli stessi intervalli di valori usati nell'esperimento.

Il primo confronto è stato eseguito sulle regioni di stabilità dell'oscillatore di Mathieu. In Fig.40 sono stati sovrapposti i risultati ottenuti sperimentalmente e numericamente. I punti rappresentano i dati sperimentali e le regioni in giallo e rosso sono la mappa di stabilità ottenuta numericamente.

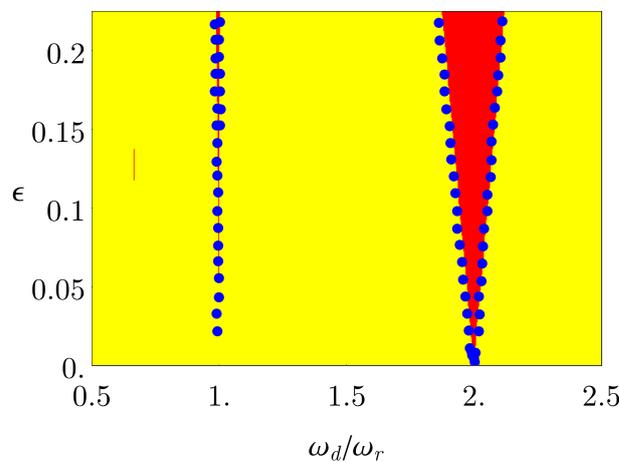


Figura 40: Regioni d'instabilità dell'oscillatore di Mathieu, le zone gialle e rosse sono rispettivamente le regioni di stabilità e di instabilità determinate numericamente al variare di  $\epsilon$  ed  $f_d$ . I punti in blu sono i dati sperimentali.

Allo stesso modo sono state confrontate le mappe di stabilità determinate al variare di  $\phi$  ed  $m$ . I risultati ottenuti sperimentalmente e numericamente sono presentati nelle due immagini di Fig.41.

L'accordo tra simulazioni e dati sperimentali è pressoché totale. Fa eccezione una ristrettissima zona d'instabilità, alle estremità del periodo di  $\phi$ , rivelata sperimentalmente e non presente nelle simulazioni nel diagramma corrispondente a  $f_d = 1.77f_r$ . Questo accordo tra esperimento e simulazioni era evidentemente atteso.

I dati sperimentali di Fig.41 possono essere rappresentati in una maniera alterna-

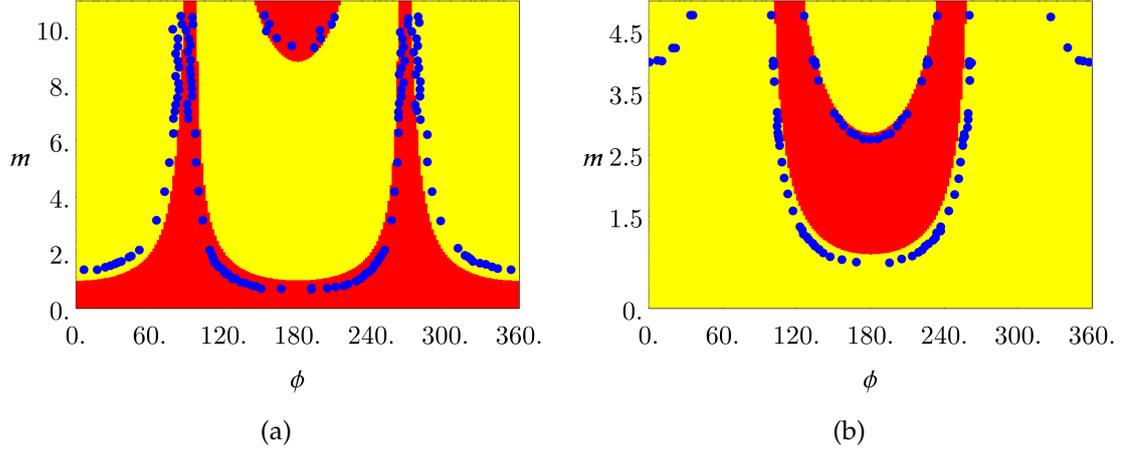


Figura 41: Regioni di stabilità (gialle) ed instabilità (rosse) al variare di  $\phi$  ed  $m$  sovrapposte ai punti sperimentali. (a) Confronto ottenuto per  $f_d = 2f_r$ ,  $\epsilon = 0.215$ . (b) Confronto per  $f_d = 1.77f_r$ ,  $\epsilon = 0.215$ .

tiva che renda più immediata l'individuazione degli intervalli di instabilità. Per far ciò definiamo le seguenti variabili polari

$$m_2 = m \cos \phi \quad (64)$$

$$m_{1.77} = m \sin \phi \quad (65)$$

in cui il parametro  $m$  è ora interpretato come una variabile radiale e i pedici indicano a quali insiemi di dati le variabili si riferiscono.

Il diagramma polare che ne consegue è rappresentato in Fig.42. Come si può osservare, in questa rappresentazione, le regioni d'instabilità sono approssimativamente bande orizzontali. Da un fit sui dati sperimentali si conclude che, per  $f_d = 2f_r$  (Fig.42 (a)), si ha instabilità per  $-0.615 \pm 0.037 \leq m \cos \phi \leq 1.199 \pm 0.044$  e  $m \cos \phi \geq -9.198 \pm 0.057$ . Per i dati acquisiti a  $f_d = 1.77f_r$  (Fig.42 (b)), le regioni d'instabilità si trovano a  $-2.762 \pm 0.005 \leq m \sin \phi \leq -0.705 \pm 0.004$ . I punti sperimentali dell'immagine (b) e non presenti nelle simulazioni sono approssimativamente descritti da  $m \sin \phi = 3.922 \pm 0.019$ .

L'unica discrepanza tra esperimento e simulazione numerica si trova per  $f_d = 1.77f_r$ . Per questa frequenza si trovano sperimentalmente due regioni di instabilità strettissime, tanto che appaiono come semplici linee, non evidenti nei dati simulati. Le ragioni di ciò possono essere molteplici, si può pensare che la risol-

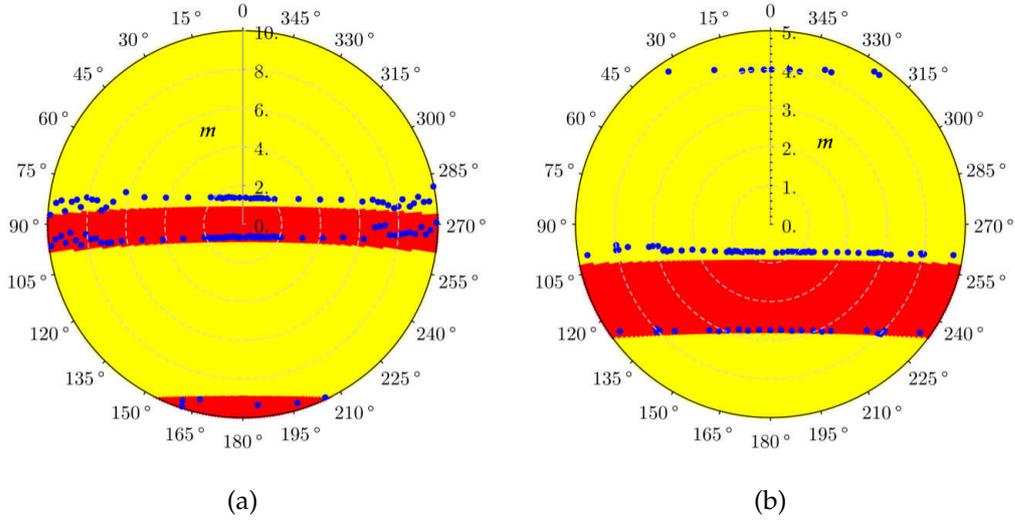


Figura 42: Rappresentazione polare dei diagrammi in Fig.41. (a)  $f_d = 2f_r$ ; (b)  $f_d = 1.77f_r$ .

zione con cui sono stati calcolati i dati simulati sia troppo bassa da poter rivelare questo dato. Ulteriori verifiche e misure più approfondite sono necessarie per chiarire questo punto, ma la sostanza e la portata degli argomenti che seguono non sono comunque inficiati da questa lieve discrepanza.

Passiamo alla presentazione dei risultati sull'entanglement. Per trattare la dinamica di entanglement, nel capitolo precedente è stato presentato, il criterio della positività della trasposta parziale (PPT). Tale criterio risulta essere condizione necessaria e sufficiente per definire la separabilità e quindi definire la condizione di entanglement per stati gaussiani di un sistema bipartito [41]. Gli stati degli oscillatori  $H_+$  ed  $H_-$  vengono preparati in stati iniziali gaussiani che si mantengono tali visto che l'hamiltoniana presenta solo potenziali quadratici [38]. Lo strumento più adeguato per valutare il grado di entanglement degli oscillatori risulta dunque essere la negatività logaritmica  $E_N$  [42].

La negatività logaritmica  $E_N$  è stata calcolata per un valore fissato di  $m$  ed introducendo una temperatura adimensionale del bagno termico  $\tilde{T}$  calcolata rispetto alla temperatura dello stato fondamentale dell'oscillatore quantistico di pulsazione  $\omega_0$  pari a  $\tilde{T} = k_B T / \hbar \omega_0$ . Preso  $m = 4$  e  $\tilde{T} = 100$  sono state costruite le superfici  $E_N$  sia in funzione del tempo ( $\tau = \omega_0 t$ ) che in funzione della fase  $\phi$ . Fissato poi un valore di fase, sono riportati anche gli andamenti di  $E_N(\tau)$  in corrispondenza

di varie  $\tilde{T}$ . I risultati sono mostrati in Fig.43. In tutti i grafici proposti sono stati utilizzati i valori dei parametri corrispondenti a quelli usati sperimentalmente. In particolare ricordiamo che  $\epsilon = 0.215$  e  $c = 0.09$ .

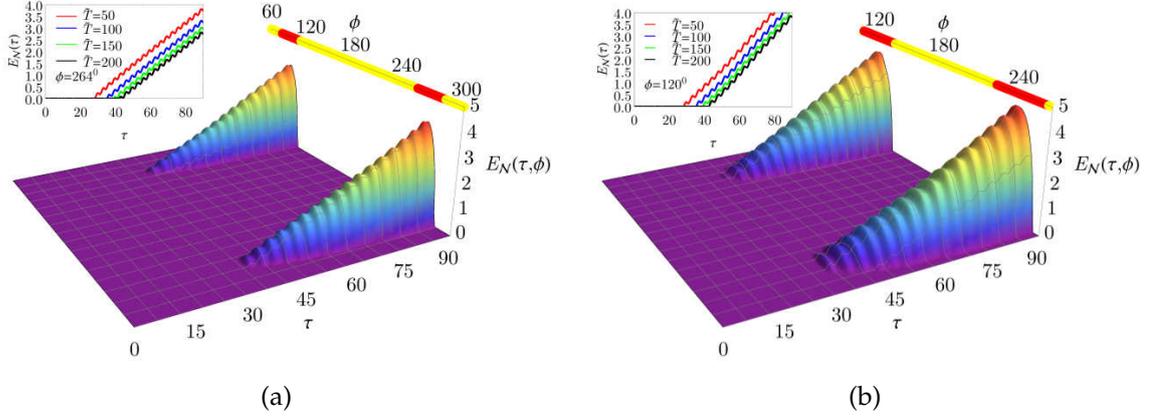


Figura 43: Superfici  $E_N(\tau, \phi)$  per  $\tilde{T} = 100$  e curve  $E_N(\tau)$ , per vari  $\tilde{T}$ . Nell'immagine (a)  $f_d = 2f_\tau$ ,  $m = 4$  e nel grafico allegato  $\phi = 264^\circ$ . (b)  $f_d = 1.77f_\tau$ ,  $m = 4$  e nel grafico allegato  $\phi = 120^\circ$ .

Sulle superfici  $E_N(\tau, \phi)$ , calcolate per  $\tilde{T} = 100$ , è stata aggiunta una barra che identifica la variabile  $\phi$  e sulla quale sono state evidenziate in rosso le regioni d'instabilità. Nel grafico allegato ad ogni superficie, i valori di  $\tilde{T}$  scelti sono  $\tilde{T} = 50, 100, 150, 200$ .

I grafici di Fig.43 danno evidenza del risultato più atteso. L'entanglement occorre solo per quei valori dei parametri per cui l'oscillatore classico ha un comportamento instabile. Per tali valori infatti si instaura l'entanglement tra gli stati, come evidenziato dalla positività di  $E_N$ . In questo modo, controllando i parametri dell'oscillatore classico, in particolare la  $\phi$  per ogni  $m$  fissato, è possibile la generazione o la soppressione dell'entanglement sul sistema quantistico. Analogamente a quanto si osserva per le soluzioni dell'oscillatore classico, in cui la divergenza si instaura dopo un periodo transitorio, anche l'entanglement non si instaura istantaneamente ma solo dopo un certo intervallo di tempo  $\tau_R$ .

Dopo un  $\tau_R$ , necessario per raggiungere lo stato entangled, la negatività logaritmica presenta un andamento generale approssimativamente lineare con piccole oscillazioni sovrapposte (grafici Fig. 43). Da questi grafici si nota come l'aumento

della temperatura produca una diminuzione del livello di entanglement, come del resto era atteso, ma che la velocità di crescita media  $r$ , corrispondente alla pendenza della retta che approssima l'andamento lineare, rimane praticamente invariato.

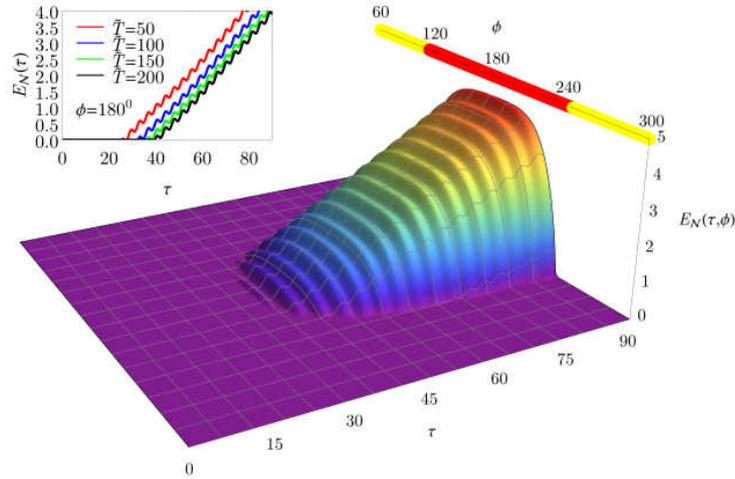


Figura 44: Superficie  $E_N(\tau, \phi)$  e curve  $E_N(\tau)$ , per vari  $\tilde{T}$ . I parametri sono  $f_d = 1.77f_r$  ed  $m = 2$ ; nel grafico allegato  $\phi = 180^\circ$ .

La Fig.44 propone la stessa analisi della figura precedente con l'unica differenza nel valore di  $m$  che adesso è posto  $m = 2$ . Anche in questo caso il sistema manifesta la correlazione quantistica in corrispondenza dei valori di  $\phi$  per cui nella mappa di figura Fig.43 si trova instabilità dinamica. Le dipendenze dal tempo e dalla temperatura seguono andamenti simili a quelli già evidenziati per il caso  $m = 4$ .

#### 5.4 CONCLUSIONI

Il lavoro presentato in questa parte della tesi ha riguardato l'analisi della generazione e dell'estinzione dell'entanglement quantistico dalla manipolazione di parametri classici. Il modello è costituito da due oscillatori quantistici accoppiati, con frequenza e termine d'accoppiamento dipendente dal tempo, ed in equilibrio con un bagno termico. Sperimentalmente è stata realizzata, su un oscillatore parametrico classico che descrive l'evoluzione temporale degli operatori del si-

stema quantistico, una tecnica di controllo, in ampiezza e fase, della frequenza di oscillazione. Sono state così investigate sperimentalmente, sul sistema classico, le regioni d'instabilità. Gli stessi parametri sperimentali sono stati utilizzati per analizzare l'entanglement sul sistema quantistico. La misura del livello di entanglement tra gli oscillatori del sistema quantistico è stata calcolata mediante della negatività logaritmica. I risultati dimostrano che dopo un tempo  $\tau_R$ , che varia al variare di  $\phi$ , gli oscillatori sono entangled l'uno con l'altro. Il lavoro sperimentale eseguito dimostra che il controllo di fase dell'oscillatore parametrico classico è cruciale per creare o distruggere l'entanglement e che esso può essere quindi controllato dinamicamente.



Parte III

APPENDICE



## VEDERE OLTRE LE FIAMME CON L'OLOGRAFIA DIGITALE IR

---

Questa appendice è dedicata alla presentazione di alcuni rilevanti risultati di ricerca che sono stati ottenuti in questi tre anni, anche con il mio contributo, nell'ambito dell'Olografia Digitale IR. Tali lavori non rientrano strettamente nell'argomento della presente tesi di dottorato, ma la loro importanza, dimostrata anche dall'attenzione manifestata dalla comunità scientifica a seguito della loro pubblicazione, ne suggerisce una breve descrizione. Un elenco completo dei risultati della ricerca degli ultimi tre anni si trova all'inizio del volume nella sezione *Pubblicazioni*.

### A.1 INTRODUZIONE

L'obbiettivo di avere una chiara visione negli scenari interessati da incendi riveste una particolare importanza in vari ambiti, primo fra tutti quelli della sicurezza e della protezione civile. Il fuoco è causa di migliaia di morti ogni anno, basti pensare che solo negli Stati Uniti i dipartimenti dei vigili del fuoco rispondono a circa 1.6 milioni di chiamate all'anno per cause d'incendio.

Le camere termiche con sensori bolometrici non raffreddati nell'infrarosso disponibili in commercio, con intervallo spettrale d'esercizio 7 – 14  $\mu\text{m}$ , sono ormai molto leggere ed anno raggiunto alte risoluzioni (dell'ordine di  $680 \times 480$  pixels con dimensione di 25  $\mu\text{m}$ ). Anche i costi sono ormai non così alti in relazione alle loro alte prestazioni. Questi dispositivi permettono una visione chiara sia attraverso il fumo che attraverso la nebbia, infatti la radiazione IR è poco diffusa dal particolato del fumo e dalle piccole gocce in sospensione che causano la nebbia. I dipartimenti dei vigili del fuoco hanno a disposizione tali tipi di dispositivi come

coadiuvanti nell'azione di salvataggio in scenari d'incendio. Ma se, come detto, le termocamere rendono possibile la visione attraverso il fumo esse non riescono a vedere attraverso le fiamme. Infatti la radiazione elettromagnetica proveniente dalle fiamme, viene focalizzata dall'obiettivo e satura il sensore impedendo la visione.

L'olografia digitale nel medio infrarosso (IRDH) è stata applicata in vari ambiti scientifici come sistema di imaging. Negli ultimi due anni, alla sezione INO-CNR di Firenze ed in collaborazione con la sezione di Napoli, abbiamo dimostrato la capacità di tale tecnica di ricostruire immagini di oggetti e persone, in movimento, anche nascoste dalle fiamme superando quindi i limiti delle attuali termocamere.

## A.2 OLOGRAFIA DIGITALE NEL MEDIO INFRAROSSO

L'olografia digitale nel medio infrarosso è una tecnica particolarmente flessibile ed adatta alla registrazione di immagini in campo aperto in situazioni reali. La maggiore lunghezza d'onda della radiazione infrarossa rispetto al visibile ( $\lambda = 10.6\mu\text{m}$  per una sorgente laser a  $\text{CO}_2$ , quindi circa 20 volte la lunghezza d'onda nel visibile) permette la registrazione digitale di ologrammi di oggetti a dimensione umana, quindi un maggiore campo di vista, ed una minore sensibilità dell'interferogramma alle vibrazioni. Queste caratteristiche, unitamente alla disponibilità di sorgenti laser a  $\text{CO}_2$  di potenza elevata e con alti valori di lunghezza di coerenza, rendono l'IRDH una tecnica adatta ad operare in campo aperto per la registrazione di ologrammi di larghe scene da medie distanze dell'ordine delle decine di metri. Infine, essendo la IRDH una tecnica che non impiega sistemi di focalizzazione davanti al sensore, si evitano i problemi di saturazione tipici delle termocamere.

Per dimostrare la capacità della tecnica di fornire immagini di oggetti immersi nel fumo e nelle fiamme abbiamo eseguito due tipologie di esperimenti.

In Fig.45 è rappresentato schematicamente l'arrangiamento sperimentale usato per ottenere l'immagine di un oggetto metallico posto all'interno di una teca di Plexiglas<sup>TM</sup> sigillata. L'arrangiamento ottico utilizzato è usuale in olografia digi-

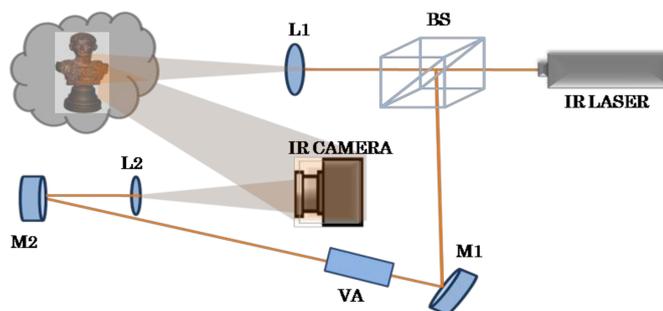


Figura 45: *Arrangiamento sperimentale di olografia digitale IR in configurazione off-axis. (BS): beam splitter. (L1, L2): lenti. (VA): attenuatore variabile. (M1, M2): specchi.*

tale nella configurazione *off-axis*, ovvero una configurazione in cui fascio oggetto e fascio di riferimento non sono coassiali. La sorgente coerente è un laser a CO<sub>2</sub>, Blade 100 della EL.EN Spa, che emette radiazione polarizzata linearmente a 10.59 μm, continua e di modo Gaussiano fondamentale TEM<sub>00</sub>. La potenza d'emissione massima raggiunge 110W. Il fascio laser è prima diviso da un *beam splitter* di ZnSe che trasmette l' 80% della radiazione incidente e riflette il rimanente 20%. La parte riflessa, che costituisce il fascio di riferimento, è indirizzata, da un specchio piano (M1), verso un attenuatore variabile (VA); il fascio di riferimento è infine reindirizzato, per mezzo dello specchio (M2), verso la termocamera ma, prima di incidere su di essa, è allargato da una lente di ZnSe (L2) e di focale di 1.5 pollici. La lente L2, allargando il fascio, permette di approssimarlo ad un fascio piano e di arrivare sulla camera con un intensità abbastanza bassa da non danneggiare il sensore. La parte trasmessa, o fascio oggetto, prima di irraggiare il campione, passa attraverso una lente convergente (L1) di ZnSe, con focale 1.5 pollici, che allarga il fascio in modo da illuminare una porzione più o meno grande dell'oggetto in relazione alla sua distanza dal sensore. L'oggetto diffonde in tutte le direzioni la radiazione IR e quella porzione intercettata dal sensore interferisce con il fascio di riferimento dando luogo ad una figura d'interferenza o ologramma. Il contrasto tra le frange d'interferenza che si formano sul sensore è ottimizzata, grazie all'attenuatore variabile, per incrementarne la visibilità. L'ologramma digitale è infine acquisita e registrata su computer, in forma di immagine singola o di video se la scena è dinamica.

Il sensore digitale usato negli esperimenti è una camera micro-bolometrica (matrice di  $640 \times 480$  elementi) della Thermoteknix Miricle, con una velocità d'acquisizione di 25 frame/s, pixel quadrati di dimensione  $25 \mu\text{m}$  ed una risposta spettrale nell'intervallo  $8\text{--}12 \mu\text{m}$ . Per avere una sufficiente separazione tra immagine reale ed immagine virtuale è necessario adeguare l'inclinazione tra fascio oggetto e fascio di riferimento senza superare i limiti imposti dal teorema del campionamento. Grazie alla bassa sensibilità alle vibrazioni, è stato possibile lavorare con il sistema antivibrazionale del tavolo disattivata. Dagli ologrammi sono state poi ricostruite numericamente le immagini con il metodo di Fresnel, sono stati filtrati gli ordini di diffrazione mantenendo solo quello d'interesse e migliorata, in postproduzione, la qualità dell'immagine.

### A.3 VISIONE ATTRAVERSO IL FUMO

Il primo importante risultato che è stato ottenuto, nella campagna di misure di olografia digitale IR, è la dimostrazione della capacità della IRDH di ricostruire immagini di oggetti nascosti dal fumo. Come oggetto è stata usata una statuette di bronzo di circa 10 cm posizionata all'interno di una teca di Plexiglas<sup>TM</sup> sigillata in modo da poter creare all'interno una coltre di fumo denso, per produrre il quale è stato usato l'incenso. L'ingresso e l'uscita della radiazione dalla teca è stata garantita dalla presenza di una finestra d'ingresso in ZnSe AR/AR ed una finestra d'uscita in Germanio. La distanza tra l'oggetto e la camera termica era di 25 cm.

In Fig.46 sono mostrate due fasi dell'esperimento con teca priva di fumo e con teca completamente riempita con il fumo prodotto dall'incenso. La coppia di immagini catturate con camera nel visibile (Fig.46 a) fanno vedere come, con teca saturata di fumo, la statuette di bronzo sia completamente nascosta. Queste immagini sono messe a confronto con l'immagine che si raccoglie con la termocamera (Fig.46 b), usata con obiettivo standard, e con la ricostruzione d'ampiezza dell'ologramma (Fig.46 c). Come atteso, la termocamera è capace di rilevare la presenza dell'oggetto perché la radiazione IR è solo leggermente diffusa dal particolato del

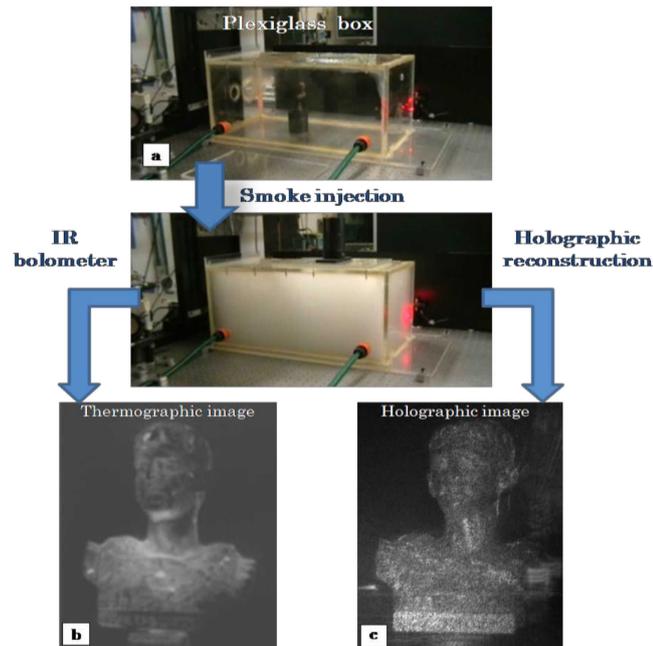


Figura 46: Immagine di un oggetto attraverso il fumo ottenuta con IRDH. (a) Oggetto di bronzo in una teca di Plexiglas<sup>TM</sup>. Le immagini sono state raccolte con una camera nel visibile prima e dopo di inserire il fumo nella teca. (b) Immagine termografica dell'oggetto attraverso il fumo. (c) Ricostruzione dell'immagine olografica d'ampiezza dello stesso oggetto.

fumo. Cosa invece non ancora nota prima dell'esperimento è che anche l'IRDH è capace di raccogliere immagini di oggetti immersi nel fumo, anzi, la turbolenza creata dal fumo davanti all'oggetto, aiuta la riduzione del rumore speckle e la definizioni di maggiori dettagli dell'immagine eseguendo acquisizioni multiple di ologrammi (multi-look, ML).

#### A.4 VISIONE ATTRAVERSO LE FIAMME

Gli esperimenti successivi sono stati indirizzati all'acquisizione di immagini di oggetti nascosti dalle fiamme. In ambiente di laboratorio è stato possibile produrre fiamme di ridotte dimensioni, sufficienti a dimostrare l'applicabilità della tecnica olografica di vedere oltre le fiamme. Sono state usate candele e fornelli da campeggio per coprire il campo di vista del sensore termico e sono stati eseguiti

test su oggetti di piccole dimensioni ed oggetti a dimensione umana. In questo modo la visione dell'oggetto usando una comune termocamera con obiettivo è impedita. Infatti il sistema di focalizzazione concentra la radiazione proveniente dalle fiamme sugli elementi del sensore termico provocandone così la saturazione (Fig.47). La registrazione olografica non è invece affetta da questo problema e permette una visione chiara attraverso le fiamme grazie ad alcune caratteristiche intrinseche della tecnica e della radiazione usata.

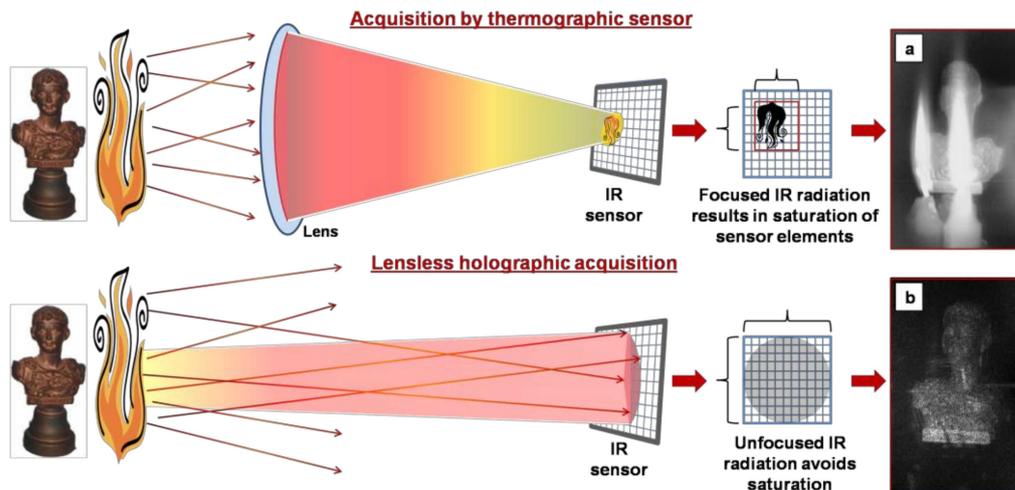


Figura 47: Immagine di una statuetta di metallo vista attraverso il fuoco delle candele.(a) Tecnica di acquisizione termografica ed immagine corrispondente. (b) Acquisizione olografica e ricostruzione d'ampiezza. Poiché nell'IRDH non sono necessari sistemi di focalizzazione, l'energia delle fiamme si distribuisce sull'intero sensore evitandone la saturazione.

Innanzitutto, poiché la IRDH è una tecnica che non fa uso di obiettivi e lenti di focalizzazione, la radiazione proveniente dalle fiamme si distribuisce sull'intero sensore termico, non saturando alcun pixel. Il secondo aspetto fondamentale riguarda la natura interferenziale della tecnica. Infatti l'ologramma è una figura d'interferenza che si genera dalla sovrapposizione del fascio di riferimento con la porzione di fascio oggetto diffusa all'indietro dall'oggetto e raccolta dal sensore termico. La radiazione proveniente dalle fiamme, non essendo coerente con la radiazione emessa dal laser, non è capace di interferire con fascio oggetto e fascio di riferimento e non è quindi in grado di distruggere la figura d'interferenza.

La realizzazione sperimentale è stata eseguita con un arrangiamento del tutto simile a quello mostrato in Fig.45. La teca, non più necessaria, è stata rimossa e, nei due esperimenti effettuati, sono stati interposti tra oggetto e sensore termico le candele ed i fornelli da campo.

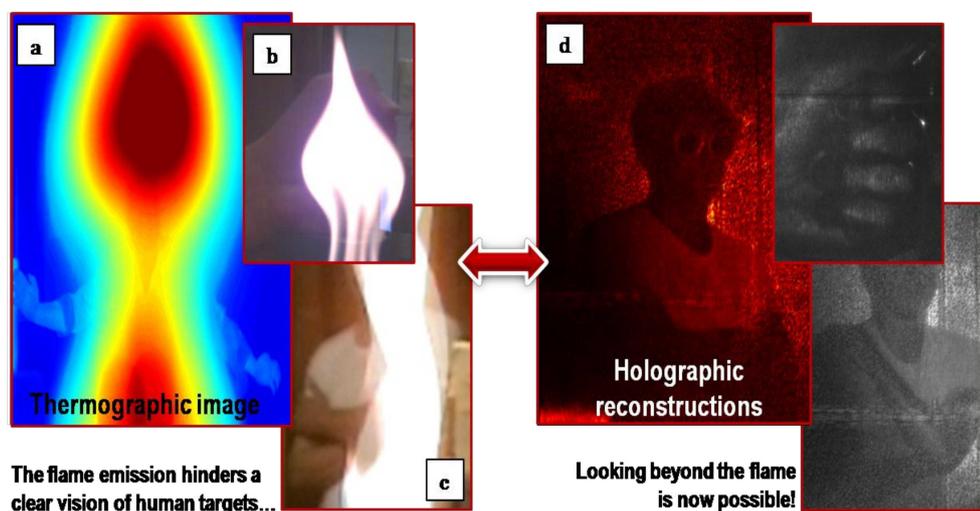


Figura 48: Immagini di una persona vista attraverso le fiamme. (a) Immagine termografica. (b-c) Immagini nel visibile di una mano e di una persona. (d) Immagini olografiche. Le fiamme, in questo caso, coprono tutto il campo di vista del sensore.

La Fig.48 mostra i vantaggi della tecnica proposta, basata sull'IRDH, rispetto alla usuale termografia. In particolare, la Fig.48 (a) mostra l'immagine termografica di un uomo dietro le fiamme. La radiazione emessa dalle fiamme, focalizzata dall'obbiettivo, nasconde completamente il corpo e la faccia dell'uomo. Conseguentemente, solo le braccia e le mani sono visibili perché estese fuori dal campo coperto dalle fiamme stesse. Allo stesso modo, le immagini nel visibile di Fig. 48 (b) e (c) mostrano rispettivamente una mano ed un uomo con le braccia in posizioni differenti. Anche in questo caso la radiazione proveniente dalle fiamme oscura il sensore impedendo la visione. Al contrario, l'immagine olografica di Fig.48 (d) permette di vedere chiaramente l'uomo con la maglietta e gli occhiali dietro le fiamme, nel riquadro si apprezzano molto bene anche i dettagli della mano. Le immagini di Fig.48 (d) sono state ottenute con la tecnica dell'acquisizione multipla di ologrammi. Infatti la presenza delle fiamme davanti all'oggetto determina una turbolenza che rende scorrelati ologrammi raccolti con una certa distanza

temporale. Questa circostanza permette un processamento delle immagini per la riduzione del rumore speckle, con un conseguente aumento della qualità dell'immagine ricostruita (Fig49).



Figura 49: Immagine olografica di una persona dietro le fiamme. Sinistra: ricostruzione olografica con un solo olograma. Destra: ricostruzione con acquisizioni multiple.

La tecnica di raccolta di immagini che si basa sull'olografia digitale nel medio IR è dunque in grado di vedere attraverso fumo e fiamme, aprendo la strada ad applicazioni in vari ambiti, primo fra tutti gli scenari d'incendio. In tali scenari infatti le termocamere tradizionali non sono di nessuna utilità a causa della saturazione cui va incontro il sensore. La poca sensibilità alle vibrazioni, garantita dall'utilizzo di sorgenti laser nel medio IR, fa della IRDH una tecnica esportabile fuori dai banchi ottici del laboratorio per operare in campo aperto. L'IRDH apre la strada per una nuova tecnica di monitoraggio attraverso fumo e fiamme che speriamo possa offrire, in futuro, nuovi strumenti di supporto alle squadre di soccorritori che operano in caso d'incendio.

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] <http://gradienti.xoom.it/main/plasmi/> ().
- [2] C. F. Gallo, IEEE Transactions on Industry Applications **IA-13**, No. 6, 739 (1975).
- [3] M. A. Lieberman and A. J. Lichtenberg, *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing*, 2nd ed. (Wiley, New Jersey, USA, 2005).
- [4] [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Electric\\_glow\\_discharge\\_schematic.png](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Electric_glow_discharge_schematic.png) ().
- [5] T. Braun, J. A. Lisboa, R. E. Francke, and J. A. C. Gallas, Phys. Rev. Lett. **59**, 613 (1987).
- [6] T. Braun, J. A. Lisboa, and J. A. C. Gallas, Phys. Rev. Lett. **68**, 2770 (1992).
- [7] C. M. Ticos, E. Rosa, W. Pardo, J. A. Walkenstein, and M. Monti, Phys. Rev. Lett. **85**, 2929 (2000).
- [8] C. Letellier, A. Dinklage, H. El-Naggar, C. Wilke, and G. Bonhomme, Phys. Rev. E **63**, 042702 (2001).
- [9] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization*, 1st ed. (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001).
- [10] J. R. Roth, *Industrial Plasma Processing. Volume 1: Principles*, 1st ed., Industrial Plasma Engineering (Institute of Physics Publishing, London, UK, 1995).
- [11] J. R. Roth, *Industrial Plasma Processing. Volume 2: Applications to Nonthermal Plasma Processing*, 1st ed., Industrial Plasma Engineering (Institute of Physics Publishing, London, UK, 2001).

- [12] A. Macchi, *Appunti su Scariche di Plasma per Applicazioni Tecnologiche* (CNR-INFM, Dip. Fisica E.Fermi Univ. di Pisa, Pisa, Italy, 2011).
- [13] Y. P. Raizer, *Gas Discharges Physics*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany, 1991).
- [14] M. Nurujjaman, arXiv **0908.1087** (2009).
- [15] B. Granovsky and L. Bykhovskaya, *J. Phys.* **10**, 351 (1946).
- [16] E. Rosa, W. Pardo, C. M.Ticos, J. A. Walkenstein, and M. Monti, *Int. J. Bifurcation Chaos* **10**, 2551 (2000).
- [17] M. S. Davis, N. G. Nutter, and E. Rosa, *Int. J. Bifurcation Chaos* **17**, 3513 (2007).
- [18] S.H.Fan, S. Yang, J. Dai, S. Zheng, D. Yuan, and S. Tsai, *Phys. Lett. A* **164**, 295 (1992).
- [19] D. Weixing, H. Wei, W. Xiaodong, and C. X. Yu, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 170 (1993).
- [20] M. Nurujjaman, A. N. S. Iyengar, and P. Parmananda, *Phys. Rev. E* **78**, 026406 (2008).
- [21] M. Nurujjaman, *Phys. Rev. E* **81**, 036203 (2010).
- [22] M. Nurujjaman and A. S. Iyengar, *Phys. Rev. E* **82**, 056210 (2010).
- [23] B. van der Pol, *Phil.Mag.* **2**, 978 (1926).
- [24] B. van der Pol, *Phil.Mag.* **6**, 763 (1928).
- [25] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978).
- [26] M. Hénon, *Commun. Math. Phys.* **50**, 69 (1976).
- [27] H. K. Sarmah and R. Paul, *IJRRAS* **3**, 72 (2010).
- [28] D. Ruelle and F. Takens, *Commun. Math. Phys.* **20**, 167 (1971).

- [29] A. Bjorck, *Numerical Methods for Least Squares Problems*, 1st ed. (SIAM, Philadelphia, USA, 1996).
- [30] J. Freire and J. Gallas, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **13**, 12191 (2011).
- [31] J. Freire and J. Gallas, *Phys. Lett. A* **375**, 1097 (2011).
- [32] J. Freire, T. Poschel, and J. Gallas, *Europhys. Lett.* **100**, 48002 (2012).
- [33] S. Souza, A. Lima, I. Caldas, R. Medrano-T., and Z. Guimaraes-Filho, *Phys. Lett. A* **376**, 1290 (2012).
- [34] A. Hoff, D. Silva, C. Manchein, and H. Albuquerque, *Phys. Lett. A* **378**, 171 (2014).
- [35] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [36] J. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [37] F. Galve, L. A. Pachón, and D. Zueco, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 180501 (2010).
- [38] T. F. Roque and J. A. Roversi, *Phys. Rev. A* **88**, 032114 (2013).
- [39] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996).
- [40] R. Horodecki, P. Horodecki, and M. Horodecki, *Phys. Rev. A* **200**, 340 (1996).
- [41] R. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2726 (2000).
- [42] G. Vidal and R. Werner, *Phys. Rev. A* **65**, 032314 (2002).
- [43] M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090503 (2005).
- [44] A. Caldeira and A. Leggett, *Physica A* **121**, 587 (1983).
- [45] Z. X. Wang and D. R. Guo, *Special Functions* (World Scientific, Singapore, 1989).
- [46] S. Zambrano, E. Allaria, S. Brugioni, I. Leyva, R. Meucci, M. A. F. Sanjuán, and F. Arecchi, *Chaos* **16**, 013111 (2006).