

Il problema della combinazione quasi-statica dei carichi da vento: un approccio basato sulle copule

Gianni Bartoli^a, Claudio Mannini^a, Tommaso Massai^a

^a CRIACIV / DICeA (Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale),
Università degli Studi di Firenze

SOMMARIO

La combinazione dei carichi per la stima degli effetti del vento su edifici di media e grande altezza è un problema estremamente importante e complicato. La completa determinazione dei carichi da vento sulle strutture richiederebbe infatti la conoscenza della funzione densità di probabilità (JPDF) delle diverse componenti di carico ed in particolare dei loro valori estremi. Per la stima della JPDF a partire dalle distribuzioni marginali delle singole variabili, nel presente lavoro viene introdotto un metodo basato sulla cosiddetta copula. La copula è uno strumento matematico piuttosto comune in alcuni campi dell'ingegneria ma tutt'ora inesplorato in quello dell'ingegneria del vento. Questo approccio si rivela estremamente potente nella stima delle JPDF di valori estremi, anche quando siano disponibili storie temporali di carico sperimentali non sufficientemente estese per effettuare tale stima. In quest'articolo le copule vengono applicate a dati sperimentali per determinare i coefficienti di combinazione dei carichi da vento, necessari a massimizzare un generico effetto dato dalla combinazione lineare di due componenti di carico, trascurando il contributo relativo alla risposta della struttura in risonanza. La validazione del metodo è condotta tramite i valori estremi determinati direttamente sulle combinazioni lineari delle storie temporali. Sono illustrati e discussi due esempi in cui si considerano casi di carico quasi scorrelati e debolmente correlati fra loro, per ognuno dei quali vengono considerati due differenti tipi di copula.

ABSTRACT

The combination of wind loads or wind effects on high- and middle-rise buildings is an extremely important and complicated issue. The complete description of the wind action would require the knowledge of the joint probability density function (JPDF) of the load components and in particular of their extreme values. A copula-based approach is introduced to estimate these JPDFs from the marginal distributions of the variables. The copula is a mathematical tool already quite common in some engineering branches but practically unexplored in wind engineering. This approach is extremely useful to estimate the JPDF of extreme values also when experimental time histories are available, as generally they are not long enough to do it. In this paper the copula-based approach is applied to experimental data to determine the wind load combination coefficients focusing on a generic effect given by the linear combination of two load components. The influence of the resonant part of the structural response is neglected. The method is validated through the comparison with the extreme values determined directly on the linear combination of the time histories. Two examples are discussed, considering almost uncorrelated and fairly correlated wind loads, and two different copulas are employed for each case.

PAROLE CHIAVE: carichi da vento; valori estremi; funzione densità di probabilità congiunta; copula; coefficienti di combinazione.

1. INTRODUZIONE

In molti casi la corretta determinazione delle prestazioni di una struttura soggetta a carichi da vento deve essere affidata ad una analisi probabilistica della risposta strutturale. Per esempio, nell'ambito

del Performance-Based Design di strutture sensibili all'azione del vento, è necessario valutare le distribuzioni di probabilità delle azioni esterne (vedi Petrini *et al.*, 2009 per una descrizione di un possibile approccio probabilistico per il Performance-Based Wind Engineering). In particolare la caratterizzazione completa della risposta strutturale, se si trascurano gli effetti aeroelastici ed il contributo in risonanza della risposta strutturale, richiederebbe la conoscenza delle funzioni di densità di probabilità congiunte (JPDF) delle azioni esterne, come le forze in direzione along- ed across-wind, il momento torcente e così via. Nel caso di strutture flessibili, caratterizzate da bassi livelli di smorzamento, le JPDF delle azioni esterne sarebbero sufficienti a descrivere la risposta quasi-statica della struttura ma non il completo comportamento dinamico. Inoltre in molti casi l'attenzione può limitarsi solamente ai valori estremi delle componenti di carico rilevanti rispetto al progetto della struttura, relative quindi ad un basso livello di performance. Per esempio, nel caso della risposta di un edificio alto, potrebbe essere importante stimare un valore della componente across-wind da associare al massimo della forza di drag, o, allo stesso modo, un valore adeguato di drag da assumere come concomitante al valore massimo della forza across-wind.

L'approccio proposto è basato sulla copula, uno strumento matematico abbastanza utilizzato in alcuni campi dell'ingegneria e non solo, che permette di stimare le distribuzioni congiunte di variabili casuali, date le loro distribuzioni di probabilità marginali e qualche informazione in merito alla loro mutua correlazione. Nel caso in cui le variabili siano valori estremi di processi aleatori, un approccio tramite la copula è adatto per integrare i dati sperimentali, in quanto solitamente le storie di carico registrate non sono sufficientemente estese per definire correttamente le JPDF dei massimi. Per lo stesso motivo, questo metodo consente una significativa riduzione di onere computazionale rispetto per esempio ad un'analoga simulazione alla Monte Carlo. Nel presente lavoro, come esempio per la validazione della metodologia proposta, verrà analizzato il problema della determinazione del massimo della somma di due variabili. Tuttavia, la medesima procedura potrebbe essere utilizzata per combinazioni differenti, lineari o non lineari che siano, anche stocastiche, per gruppo qualsiasi insieme di variabili casuali.

2. COMBINAZIONE DI CARICHI DA VENTO

Nelle normative e nella letteratura specialistica sono presenti molti approcci differenti volti alla definizione di un criterio per la combinazione dei massimi dei carichi o della risposta indotta dal vento in diverse direzioni, come across- e along-wind.

Isyumov (1982) ha proposto un semplice approccio per la stima delle accelerazioni massime di un edificio, date le componenti along- e across-wind. Il metodo consiste nella combinazione, con la regola SRSS, dei valori di picco delle accelerazioni in due direzioni per poi ridurre tale combinazione tramite un coefficiente empirico, che evidenze sperimentali hanno mostrato essere variabile fra 0.7 e 1.0, a seconda dell'importanza relativa delle due componenti.

Solari *et al.* (1998) e Solari & Pagnini (1999) hanno considerato processi scorrelati e definito un dominio ellittico con bassa probabilità di superamento da parte di una combinazione vettoriale dei processi. Gli assi dell'ellisse sono definiti dai valori minimi e massimi dei singoli processi. Per minimizzare il rischio di sottostimare l'effetto, il dominio viene cambiato in un dodecagono circoscritto all'ellisse e la distanza massima dai vertici all'origine rappresenta il valore atteso del massimo dell'effetto risultante. Lo stesso approccio è esteso al caso di combinazione scalare dei processi.

Le raccomandazioni AIJ per la combinazione dei carichi da vento sugli edifici (Tamura *et al.*, 2003a), nel caso di strutture non molto snelle e flessibili, prescrivono di combinare l'azione along-wind con il 35% di quella across-wind scalata di un fattore pari al rapporto fra le dimensioni dell'edificio in direzione along- ed across-wind, seguendo evidenze sperimentali (Tamura *et al.*, 2008). Al contrario, per strutture snelle e flessibili, le raccomandazioni AIJ prevedono un metodo più dettagliato per la combinazione degli effetti torsionali, along- e across-wind, che seguono l'approccio di Solari *et al.* (1998) e Solari & Pagnini (1999), attraverso otto combinazioni di carico (anziché dodici), tenendo in conto la correlazione fra le azioni across-wind e torsionali. Sempre nei lavori di Tamura viene sottolineato il fatto che lo sforzo normale di picco nelle colonne di edifici alti e mediamente alti può essere sottostimato per quasi il 30% se la forza along-wind non viene presa in considerazione. L'errore può essere anche maggiore nel caso di strutture di grande altezza. In Tamura *et al.* (2008) viene rimarcato che la componente risonante della risposta strutturale gioca

un ruolo significativo sui coefficienti di combinazione solo per edifici alti (più alti di 100-150 m), sebbene la componente risonante della risposta non possa essere considerata trascurabile anche per edifici di altezza minore.

Chen & Huang (2009), dopo aver richiamato i risultati riguardanti il valore di picco della combinazione scalare di processi Gaussiani, hanno analizzato il caso più complesso della combinazione vettoriale, che presenta caratteristiche non-Gaussiane. In particolare è stato studiato il problema della stima dell'accelerazione massima in sommità ad un edificio alto. La risposta massima è stata determinata attraverso la teoria degli attraversamenti di soglia per processi non-Gaussiani e per processi Gaussiani multivariati. Uno studio di sensibilità ha mostrato che i parametri fondamentali che controllano il fattore di picco della risposta sono la varianza dei singoli processi, il loro tasso medio di attraversamento di soglia, il coefficiente di correlazione e la durata dell'azione del vento sulla struttura. Nel medesimo articolo gli autori hanno proposto un'estensione della regola di combinazione proposta da Solari & Pagnini (1999) al caso di processi correlati, e dimostrato la sua sufficiente accuratezza. Infine è stato analizzato il caso di un edificio alto con forme modali tridimensionali soggetto all'azione del vento ed è stata mostrata la differenza fra la stima dell'accelerazione di picco ottenuta con l'approccio proposto (tenendo in conto la correlazione) ed una semplice combinazione SRSS.

Naess *et al.* (2009) hanno proposto un metodo per la valutazione dei valori estremi per gli effetti dati dalla combinazione di carichi stocastici basato su simulazioni di tipo Monte Carlo. I vari processi sono stati usati per stimare il tasso di attraversamento medio per differenti livelli della risposta. L'efficienza computazionale è stata assicurata dall'assunto di una coda esponenziale per il tasso di attraversamento medio che riduce il problema all'ottimizzazione di quattro costanti. Sono state inoltre proposte applicazioni nel caso di combinazioni lineari e non-lineari di processi Gaussiani e non.

3. LE COPULE

Uno strumento matematico molto utilizzato negli ultimi anni per l'analisi delle "dipendenze" è la copula. L'approccio tramite le copule è stato impiegato nella risoluzione di una vasta gamma di problemi statistici in settori diversi, come l'economia e la finanza (Cherubini *et al.*, 2004) o l'idrologia (Favre *et al.*, 2004). Il termine copula deriva dal Latino ed indica un 'legame, una giunzione, un laccio', e fu per la prima volta formulato in campo statistico-matematico da Abe Sklar (Sklar, 1959; Nelsen, 1999).

Alla base della formulazione della teoria delle copule c'è appunto il teorema di Sklar, che stabilisce che tra una data distribuzione congiunta multivariata e le relative marginali esiste una funzione copula che le mette in relazione.

Teorema di Sklar

Sia $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una distribuzione congiunta n -dimensionale di marginali $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$. Esiste allora una funzione $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$, definita copula, tale che

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)] \quad (1)$$

Se x_1, x_2, \dots, x_n sono continue, allora C è unica; altrimenti, C è univocamente determinata sul $(\text{range of } x_1) \times (\text{range of } x_2) \times \dots \times (\text{range of } x_n)$.

Viceversa, se C è una copula e $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$ sono funzioni di distribuzione, allora la funzione $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ precedentemente definita è una distribuzione congiunta con marginali $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$. È quindi chiaro che la copula descrive come le marginali sono collegate dentro la distribuzione congiunta.

Il teorema di Sklar fornisce inoltre uno dei metodi principali per costruire una copula, che può essere visto come un corollario del teorema. Se consideriamo un vettore casuale $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, le cui distribuzioni cumulate marginali, continue e strettamente crescenti, sono $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$, allora esiste una copula $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ tale che:

$$C(\mathbf{u}) := C(u_1, u_2, \dots, u_n) = F \left[F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n) \right] \quad (2)$$

L'operatore inverso è un'inversione continua sinistra, che per ogni funzione J risulta definita come:

$$J^{-1}(y) = \inf \{x : J(x) \geq y\} \quad (3)$$

L'uso della copula per costruire distribuzioni multivariate è una tecnica potente e flessibile, perché separa la scelta della dipendenza dalla scelta delle distribuzioni marginali, sulle quali non ci sono restrizioni (Clemen & Reilly, 1999).

Qualunque scelta della funzione C porta a differenti famiglie di copule; tuttavia, non ci sono strumenti teorici per determinare la copula (date le marginali, possono essere derivate un'infinità di distribuzioni congiunte multivariate). Normalmente, una famiglia parametrica di funzioni (dipendenti da un parametro α) può essere scelta per rappresentare la dipendenza. Le cosiddette copule Archimedee sono costruite a partire da una funzione $\psi: [0,1] \rightarrow [0,+\infty)$, decrescente, continua e convessa, tale che $\psi(1) = 0$ e $(-1)^k d^k \psi^{-1}(t)/dt^k \geq 0$, cosicché la copula può essere definita come:

$$C \left[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n) \right] = \begin{cases} \psi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \psi(F_i(x_i)) \right) & \text{se } \sum_{i=1}^n \psi(F_i(x_i)) \leq \psi(0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4)$$

Scelte diverse per la funzione ψ portano a differenti famiglie di copule. Le scelte classiche per la funzione generatrice α includono le copule di Clayton [$\psi(t) = t^{\alpha}-1$], le copule di Frank [$\psi(t) = \log(e^{\alpha t}-1)-\log(e^{\alpha}-1)$], le copule di Gumbel-Hougaard [$\psi(t) = (-\log t)^{\alpha}$]. Il parametro α , che rappresenta la dipendenza, può essere messo in relazione con correlazioni non-parametriche (correlazioni di rango), quali i coefficienti di correlazione di rango dati da Spearman (ρ_s) o Kendall (τ_k). Per fare un esempio, il legame tra il parametro α e la correlazione di rango di Kendall è dato dalla relazione:

$$\tau_k = 1 + 4 \cdot \int_0^1 \frac{\psi(t)}{\psi'(t)} dt \quad (5)$$

In molte pubblicazioni (Grimaldi & Serinaldi, 2003, 2006), si possono trovare varie espressioni e proprietà del legame tra copule e coefficienti di correlazione di rango. È utile ricordare che in statistica i coefficienti di correlazione di rango forniscono una stima delle relazioni fra le diverse modalità di ordinamento degli stessi elementi di un insieme, misurando la corrispondenza tra due di queste modalità e attribuendole un valore. Se applicati agli estremi, i gradi di ordinamento forniscono informazioni su quanto i valori più alti della prima variabile sono collegati a quelli più alti della seconda. Un'importante proprietà dei coefficienti di correlazione di rango è l'invarianza rispetto a trasformazioni monotone delle variabili, come quelle necessarie alla valutazione delle copule.

Dal momento che un solo parametro (α) può risultare insufficiente a caratterizzare la dipendenza quando si ha a che fare con più di due variabili, è stata introdotta una seconda classe di copule, le copule Ellittiche. In questo tipo di copule la dipendenza è modellata attraverso una matrice simmetrica e definita positiva, i cui elementi sono usati per descrivere la dipendenza tra coppie di variabili. Tra queste una delle più utilizzate è la copula Gaussiana, che può essere espressa nella forma:

$$C_G \left[u_1, u_2, \dots, u_n, \Sigma \right] = \Phi_{\Sigma} \left[\varphi^{-1}(u_1), \varphi^{-1}(u_2), \dots, \varphi^{-1}(u_n) \right] \quad (6)$$

dove Φ_{Σ} è la funzione di distribuzione cumulata (CDF) di una variabile Gaussiana multivariata a media nulla e matrice di covarianza Σ , mentre φ rappresenta la CDF di una variabile Gaussiana standardizzata, cioè $\varphi = N(0,1)$. La matrice di covarianza Σ può essere stimata a partire dalle marginali $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$, valutandone gli elementi tramite un approccio di massima verosimiglianza (per maggiori dettagli nella procedura si può consultare ad esempio Renard & Lang, 2007).

4. ANALISI DEI MASSIMI MULTIVARIATI

Come precedentemente detto, come esempio di lavoro, nel presente articolo viene proposta un'applicazione dell'approccio basato sulle copule per l'analisi dei massimi attesi della combinazione lineare di due o più processi. Di fatto, in molti casi è necessario determinare un'adeguata combinazione dei carichi per ottenere una stima affidabile di un determinato effetto, per esempio quello dato dalla combinazione lineare delle forze indotte dal vento.

Il problema, nella formulazione generale, può esser proposto in questo modo: dati n processi $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, ognuno con valore massimo $X_{i,\max}$, e una loro combinazione lineare:

$$Z = \sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i \quad (7)$$

l'obiettivo è la stima del valore massimo di Z (Z_{\max}) introducendo n quantità scalari γ_{X_i} in modo che:

$$Z_{\max} = \sum_{i=1}^n \gamma_{X_i} \cdot a_i \cdot X_{i,\max} \quad (8)$$

I valori dei coefficienti di combinazione γ_{X_i} devono esser tali da caratterizzare Z_{\max} con la stessa probabilità di superamento di $X_{i,\max}$, ovvero:

$$X_{i,\max} \quad \text{t.c.} \quad \text{Prob} \left[\max(X_i) \geq X_{i,\max} \right] = p \quad (9)$$

$$Z_{\max} \quad \text{t.c.} \quad \text{Prob} \left[\max \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i \right) \geq \sum_{i=1}^n \gamma_{X_i} \cdot a_i \cdot X_{i,\max} \right] = p \quad (10)$$

In altre parole, a parte la modalità con cui vengono definiti i massimi dei processi (per esempio utilizzando la procedura introdotta da Cook & Mayne, 1979, 1980, o quella di Rice, 1944, ripresa successivamente da Davenport, 1961), i coefficienti γ_{X_i} devono essere in grado di riprodurre per il processo combinato la stessa probabilità di superamento dei singoli processi.

Per esempio, la valutazione del picco di accelerazione in un punto P in una certa direzione d ($d = X, Y$) ad una certa quota di un edificio alto richiederebbe la valutazione del valore massimo della variabile

$$a_{dP,\max} = \max(a_{dP}) = \max(a_{dG} + e_d \cdot a_{\theta}) \quad (11)$$

essendo a_{dG} l'accelerazione del centro di massa G lungo la direzione d , a_{θ} l'accelerazione torsionale (cioè l'accelerazione angolare intorno all'asse Z) e e_d l'eccentricità di piano del punto considerato P al livello scelto (vale a dire la distanza del punto P da G misurata in direzione ortogonale alla direzione d). In accordo con il quadro precedentemente illustrato, devono quindi essere determinate due quantità scalari, γ_d e γ_{θ} (coefficienti di combinazione), tali che:

$$a_{dP,\max} = \gamma_d \cdot a_{dG,\max} + \gamma_{\theta} \cdot e_d \cdot a_{\theta,\max} \quad (12)$$

dove

$$a_{dG,\max} \quad \text{t.c.} \quad \text{Prob}\left[\max(a_{dG}) \geq a_{dG,\max}\right] = p \quad (13)$$

$$a_{\theta,\max} \quad \text{t.c.} \quad \text{Prob}\left[\max(a_{\theta}) \geq a_{\theta,\max}\right] = p \quad (14)$$

in modo che

$$\text{Prob}\left[\max(a_{dG} + a_{\theta} \cdot e_y) \geq \gamma_d \cdot a_{dG,\max} + \gamma_{\theta} \cdot e_d \cdot a_{\theta,\max}\right] = p \quad (15)$$

Senza perdita di generalità alcuna, il problema può essere modificato introducendo le variabili trasformate $Y_i = a_i \cdot y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, così da ridurlo alla valutazione dei massimi della somma di variabili. In più, è lecito trasformare Y_i in un processo a media nulla, dato che il valor medio non influenza la distribuzione dei massimi.

Limitando l'attenzione al problema a due sole variabili, la PDF della somma è data dalla ben nota relazione:

$$f_{Y_1+Y_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz} (\text{Prob}[Y_1 \leq z - y | Y_2 = y]) f_{Y_2}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1, Y_2}(z - y, y) dy \quad (16)$$

dove si è utilizzata la proprietà

$$\frac{d}{dz} (\text{Prob}[Y_1 \leq z - y | Y_2 = y]) = f_{Y_1|Y_2}(z - y) = \frac{f_{Y_1, Y_2}(z - y, y)}{f_{Y_2}(y)} \quad (17)$$

Volendo quindi stimare

$$p = \text{Prob}\left[\max(Y_1 + Y_2) \geq Z_{\max}\right] = 1 - \int_{-\infty}^{Z_{\max}} f_{\max(Y_1+Y_2)}(z) dz = 1 - \int_{-\infty}^{Z_{\max}} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\max(Y_1), \max(Y_2)}(z - y, y) dy dz \quad (18)$$

occorre conoscere la funzione di probabilità congiunta della due variabili $\max(Y_1)$ e $\max(Y_2)$. Ovviamente, se i massimi delle variabili sono indipendenti fra loro, l'integrale si riduce ad una convoluzione delle densità marginali, ovvero:

$$p = \text{Prob}\left[\max(Y_1 + Y_2) \geq Z_{\max}\right] \stackrel{\text{ind.}}{=} 1 - \int_{-\infty}^{Z_{\max}} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\max(Y_1)}(z - y) f_{\max(Y_2)}(y) dy dz \quad (19)$$

Nella sezione successiva l'approccio basato sulle copule prima introdotto sarà impiegato per stimare le JPDF delle variabili, le cui distribuzioni marginali sono note da test in galleria del vento. I coefficienti di combinazione saranno determinati risolvendo l'Eq.(18) per Z_{\max} .

5. ESEMPIO APPLICATIVO

Come applicazione di quanto precedentemente introdotto, di seguito verrà affrontato il problema della determinazione del valore massimo della somma di due variabili. Le variabili sono rappresentate dalle risultanti alla base, in termini di forze e momenti, di un edificio alto e sono state ottenute dall'analisi dei dati ottenuti da una campagna sperimentale condotta in galleria del vento a strato limite sviluppato.

5.1 Sperimentazione

Nella galleria a strato limite del CRIACIV - DICeA è stato testato un modello rigido di un prisma a base quadrata (di dimensioni 103.6 mm (b) \times 103.6 mm (d) \times 610.2 mm (h)), progettato per rappresentare, in scala 1:500, un edificio di riferimento, alto e regolare.

Il modello è stato montato su una tavola rotante che permette di variare l'angolo di incidenza del vento. Le misure sono state ripetute con incrementi successivi di 10°, da 0° fino a 90°, data la doppia simmetria dell'edificio. Utilizzando una frequenza di campionamento di 250 Hz, sono state registrate storie temporali di 30 s per ogni incidenza di vento scelta.

Dalla conoscenza delle storie temporali dei coefficienti di pressione, sono state stimate le storie delle forzanti tramite integrazione delle pressioni sulle aree di pertinenza per ogni piano. Il campo di pressione, per ogni livello dell'edificio, è stato ridotto in questo modo a due forze traslazionali nelle direzioni globali X e Y ed un momento torcente in direzione θ , ossia intorno all'asse Z .

5.2 Risultati

I coefficienti di forza risultanti sono stati determinati integrando le distribuzioni di pressione in modo da ottenere forze e momenti alla base dell'edificio, per poi convertirli in forma adimensionale rispetto alla velocità del vento all'estremità superiore dell'edificio (coefficienti di forza e momento $c_{F\alpha}(t)$, $c_{M\alpha}(t)$, $c_{MZ}(t)$ con $\alpha = [X, Y]$).

Nel seguito saranno analizzati solo i risultati relativi all'angolo di incidenza 0°, per cui X rappresenterà la direzione del vento, Y la direzione across-wind e Z l'asse verticale dell'edificio; M_X e M_Y sono i momenti associati rispettivamente a F_Y e F_X .

L'analisi della struttura di correlazione delle grandezze misurate permette di derivare le seguenti conclusioni, alcune delle quali abbastanza ovvie:

- F_X e M_Y (come anche F_Y e M_X) risultano quasi perfettamente correlate (ovvero, $M_Y \approx h_X \cdot F_X$ e $M_X \approx h_Y \cdot F_Y$, essendo h_X e h_Y lunghezze di riferimento);
- F_X e F_Y risultano quasi completamente scorrelate;
- F_X è scorrelata da M_Z , mentre una maggiore correlazione emerge fra F_Y e M_Z .

Nel seguito verranno prese in considerazione principalmente F_X , F_Y e M_Z . Per prima cosa, è stata condotta un'analisi dei valori estremi sui dati registrati per i singoli coefficienti di forza. Da ogni registrazione è stata estratta una serie di massimi indipendenti; questo è stato possibile (1) suddividendo le storie in 20 finestre di uguale lunghezza, (2) estraendo il valor massimo del processo all'interno di ogni finestra e (3) valutando i coefficienti di Cook-Mayne (per esempio quelli corrispondenti a probabilità di non superamento $p = 0.78$; Cook & Mayne, 1979, 1980). Ogni finestra risulta avere una lunghezza temporale di 1.5 s, che, data la scala delle lunghezze del modello ($\lambda_L = 1/500$) ed un possibile intervallo di scale di velocità ($\lambda_V = 1/2 \div 1$), corrisponde a 375 \div 750 s in scala reale. Ogni punto può quindi essere pensato come rappresentativo del valore di raffica su un intervallo di circa 10 min. I risultati ottenuti sono riportati in Tab.1. Il valore elevato della deviazione standard di c_{FY} rispetto a c_{FX} (e di c_{MX} rispetto a c_{MY}) indica il ruolo chiave giocato dal distacco dei vortici nella definizione dei carichi dinamici dati dal vento.

Tabella 1. Coefficienti di forza alla base (μ_c , σ_c : valori di media e deviazione standard delle variabili)

	μ_c	σ_c	min	max	min – μ_c	max – μ_c
c_{FX}	0.861	0.094	0.580	1.116	-0.282	0.255
c_{FY}	0.018	0.162	-0.484	0.511	-0.502	0.493
c_{MX}	-0.012	0.084	-0.286	0.263	-0.274	0.275
c_{MY}	0.472	0.044	0.325	0.586	-0.147	0.114
c_{MZ}	-0.014	0.090	-0.331	0.281	-0.317	0.296

5.3 Analisi multivariata

Di seguito, la procedura proposta per determinare la JPFD dei valori estremi sarà utilizzata per due sole variabili, indicate con Y_1 e Y_2 . La validità dell'approccio sarà poi discussa confrontando il valore estremo della somma delle due variabili calcolato attraverso un'analisi "diretta", e i risultati

ottenuti con la stima della JPDP. L'analisi diretta è stata condotta determinando la serie storica della somma delle due variabili a partire dai dati sperimentali e calcolandone, tramite il metodo di Gumbel, il valore estremo con la stessa probabilità di superamento delle singole variabili.

Senza perdita di generalità, entrambi i processi sono stati prima trasformati in processi a media nulla ($y_i = Y_i - \mu(Y_i)$, $i = 1,2$).

Dopo che l'analisi dei valori estremi è stata condotta separatamente sulle due variabili, i massimi $y_{1,\max} = \max(y_1)$ e $y_{2,\max} = \max(y_2)$ sono stati determinati con un dato livello di probabilità di superamento, utilizzando le distribuzioni dei massimi ottenuti su finestre di eguale lunghezza.

Limitando l'attenzione ai soli massimi (chiaramente sarebbe possibile ripetere la stessa procedura anche sui valori minimi), è possibile scegliere, per ogni finestra, il valore assunto da una delle due variabili quando l'altra raggiunge il valore massimo, cioè le n_w coppie di valori concomitanti

$$[y_{1,j}, y_{2,j}] = [y_1(t_j), y_2(t_j)] | y_1(t_j) = \max_{t \in T_j} [y_1(t)], \quad j = 1, \dots, n_w \quad (20)$$

$$[y_{1,k}, y_{2,k}] = [y_1(t_k), y_2(t_k)] | y_2(t_k) = \max_{t \in T_k} [y_2(t)], \quad k = 1, \dots, n_w \quad (21)$$

dove n_w è il numero di finestre, ognuna delle quali copre un intervallo di tempo T_k , $k = 1, 2, \dots, n_w$. Nel seguito, le n_w coppie saranno chiamate "valori sincroni". Tali valori rappresentano una misura di quanto i massimi dei processi siano mutuamente correlati. Vale la pena ricordare che in generale, anche se due processi sono scorrelati, i massimi possono essere correlati se sono correlati i processi derivati (cfr. per esempio Chen & Huang, 2009).

Dopo che sono stati scelti i valori sincroni e ricavate le distribuzioni marginali (nel caso in esame secondo la legge di Gumbel), è possibile stimare la JPDP tramite il metodo basato sulle copule. Nel presente articolo sono stati utilizzati principalmente due tipi di copula: la copula Archimedeica di Gumbel-Hougaard (dove il parametro di dipendenza può esser stimato attraverso l'espressione $\tau_k = 1 - \alpha^{-1}$; cfr. Grimaldi & Serinaldi, 2003) e la copula Ellittica Gaussiana (dove la matrice di covarianza Σ può esser stimata con un criterio di massima verosimiglianza). Ulteriori analisi sono state effettuate impiegando anche due altri tipi di copule Archimedee (nella fattispecie le copule di Clayton e Frank). Dai risultati ottenuti non sono emerse differenze sostanziali tra la copula di Clayton e quella di Gumbel-Hougaard, e fra la copula di Frank e la copula Gaussiana, così che, nel seguito della trattazione, verranno riportati solo i risultati relativi alla copula di Gumbel-Hougaard e a quella Gaussiana.

Una volta stimati i parametri della copula, la JPDP dei massimi può esser valutata usando le storie temporali sperimentali, che risulterebbero generalmente di lunghezza insufficiente per la ricostruzione della distribuzione di probabilità congiunta.

Attraverso la JPDP è poi possibile definire una combinazione di progetto delle variabili da impiegare nella determinazione dei massimi di un dato effetto. Per esempio, quando si ha a che fare con la ricerca dei valori massimi della somma di due variabili, i valori di progetto possono essere trovati imponendo che una variabile assuma il suo valore massimo e cercando il valore corrispondente della seconda che dia all'effetto somma la stessa probabilità di superamento p di tale massimo. Questo procedimento si traduce prima nella determinazione del valore della somma $s = y_1 + y_2$ con un fissato livello di probabilità p di superamento, usando l'Eq.(18):

$$p = P[\max(y_1 + y_2) \geq s_{\max}] = 1 - \int_{-\infty}^{s_{\max}} f_{\max(y_1+y_2)}(s) ds = 1 - \int_{-\infty}^{s_{\max}} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\max(y_1), \max(y_2)}(s-y, y) dy ds \quad (22)$$

Determinato s_{\max} , tutti i valori delle due variabili y_1 e y_2 appartenenti alla linea $s_{\max} = y_1 + y_2$ hanno la stessa probabilità di superamento. In tal modo, due coppie di possibili valori di progetto sono date da $(y_{1,\max}, \gamma_{y2} \cdot y_{2,\max})$ e $(\gamma_{y1} \cdot y_{1,\max}, y_{2,\max})$, utilizzando come coefficienti di combinazione:

$$\gamma_{y1} = \frac{s_{\max} - y_{2,\max}}{y_{1,\max}}, \quad \gamma_{y2} = \frac{s_{\max} - y_{1,\max}}{y_{2,\max}} \quad (23)$$

L'approccio proposto è stato quindi applicato per determinare alcuni valori di progetto per le azioni alla base dell'edificio in esame. Di seguito, verrà fatto riferimento a valori di progetto per coppie di coefficienti di forza c_{FX} e c_{FY} (along- e across-wind), per ottenere una somma con probabilità di superamento uguale a quella scelta nel valutare $c_{FX,max}$ e $c_{FY,max}$. La stessa procedura verrà usata per valutare anche le due variabili c_{FY} e c_{MZ} (forza across-wind e momento torcente), che risultano molto più correlate delle precedenti.

La procedura viene illustrata nelle Fig.1-2 con riferimento all'analisi della somma di c_{FY} e $-c_{MZ}$ (il segno negativo di c_{MZ} è stato scelto per avere un segno positivo del coefficiente di correlazione). In particolare, le Fig.1a e 1b mostrano il modo in cui sono stati estratti i massimi ed i valori sincroni dalle storie temporali. La Fig.2 riporta, lungo le curve di livello della JPDF dei massimi, la linea individuata dalle coppie di valori la cui somma ha probabilità di superamento p ; nella stessa figura, è illustrata anche la procedura per la determinazione dei coefficienti di combinazione. La Fig.3 si riferisce a c_{FX} e c_{FY} : in questo caso, poiché una certa differenza emerge quando si confrontano diversi tipi di copula, sono stati riportati i grafici che si riferiscono sia a quella Gaussiana che a quella di Gumbel-Hougaard. Dalle analisi effettuate sono stati ottenuti i risultati riportati in Tab.2-3 (dove si è indicato con ρ il coefficiente di correlazione delle variabili e con σ la loro deviazione standard).

Per prima cosa è opportuno evidenziare che, anche quando i processi di partenza mostrano una scarsa correlazione (come nel caso di c_{FX} e c_{FY}), i massimi possono essere molto correlati, cosicché una variabile assume valori non trascurabili quando l'altra raggiunge i valori massimi. Infatti è evidente (Fig.2) che la JPDF dei massimi non segue un "andamento ad L" ma uno leggermente arcuato, il che significa che la probabilità di avere un certo valore massimo di una variabile è in una certa misura influenzata dai valori estremi assunti dall'altra variabile. Nonostante ciò, una correlazione molto maggiore è evidente in Fig.3, dove la curvatura della JPDF è più pronunciata.

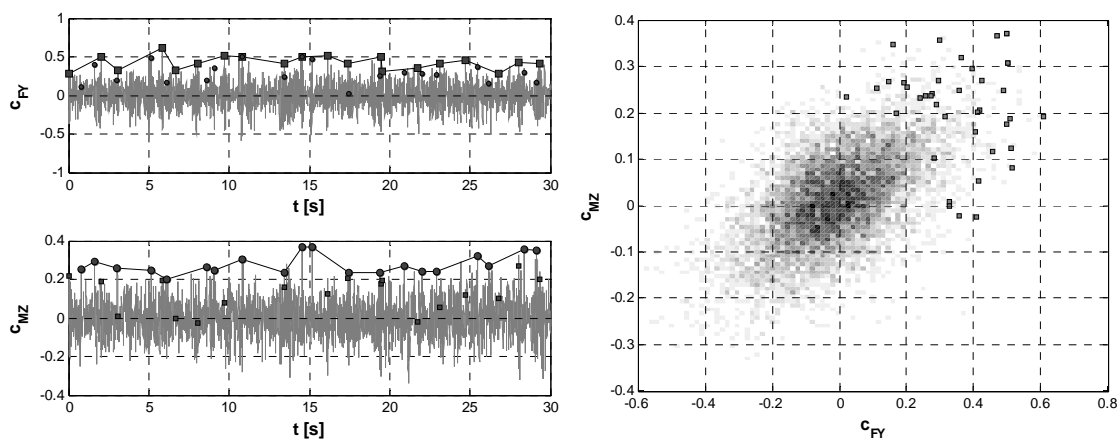


Figura 1. A sinistra: storie temporali c_{FY} e $-c_{MZ}$ e valori sincroni per i massimi di c_{FY} (quadrati) e di $-c_{MZ}$ (cerchi); a destra: distribuzione di c_{FY} e $-c_{MZ}$ e valori sincroni per i massimi (quadrati).

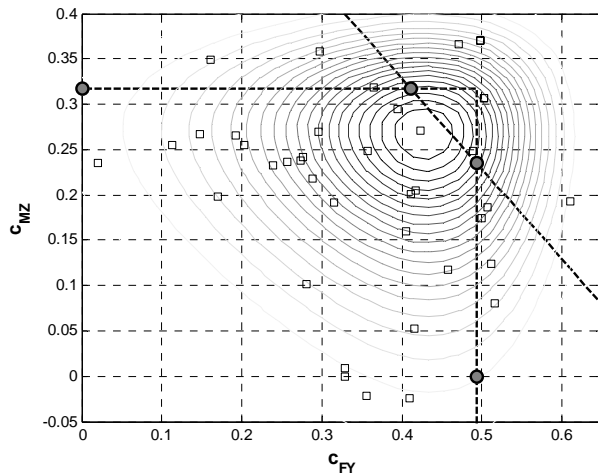


Figura 2. Valori di progetto per c_{FY} e $-c_{MZ}$ ($\rho = 0.5657$, $\sigma_{c_{FY}} = 0.162$, $\sigma_{-c_{MZ}} = 0.090$) per una copula Gaussiana

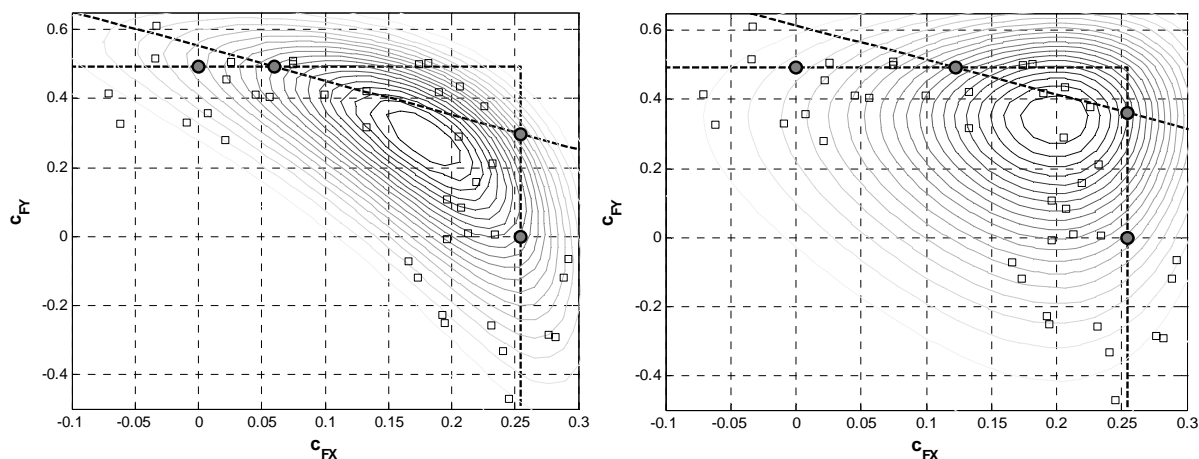


Figura 3. Valori di progetto per c_{FX} e c_{FY} ($\rho = 0.0239$, $\sigma_{c_{FX}} = 0.094$, $\sigma_{c_{FY}} = 0.162$) per una copula Gaussiana (a sinistra) e di Gumbel-Hougaard (a destra).

Riguardo la miglior tipologia di copula da utilizzare nella determinazione della JPDF, è da osservare che maggiore è il livello di correlazione, più trascurabile è l'importanza della scelta del modello di copula (come osservabile può essere dedotto dai coefficienti di combinazione espressi nel caso della somma delle due variabili c_{FY} e $-c_{MZ}$; cfr. Tab.2). Al contrario, più scorrelate sono le due variabili, meno adeguata pare la scelta di una copula Gaussiana nella modellazione della mutua dipendenza dei massimi: nel caso esaminato, la copula di Gumbel-Hougaard sembra produrre risultati più affidabili (come nel caso della somma delle due variabili c_{FX} e c_{FY} ; cfr. Tab.3). Sono comunque necessarie indagini più approfondite sui risultati ottenuti ed un confronto con differenti set di dati sperimentali, essendo la copula dipendente dalla correlazione dei massimi più che dalla correlazione dei dati stessi; per esempio, anche se la coppia (c_{FX}, c_{FY}) è meno correlata di (c_{FY}, c_{MZ}) , il coefficiente di rango di Kendall τ_k risulta maggiore nel primo caso. È inoltre da notare il fatto che i coefficienti di correlazione sono generalmente non simmetrici; una certa simmetria sarebbe prevedibile solo nel caso in cui le due variabili avessero circa la stessa varianza. Di conseguenza, una “regola di massima” di combinazione può difficilmente essere utilizzata, se si ha a che fare con variabili con proprietà statistiche piuttosto differenti.

Infine, è interessante sottolineare che il coefficiente di combinazione γ_{y2} nel caso (c_{FX}, c_{FY}) , che rappresenta la quota parte del valore massimo della forza across-wind c_{FY} da combinare con il valore massimo della forza along-wind c_{FX} , è pari a circa 0.47 (Tab.2), solo di poco più alto del valore 0.40 indicato nelle raccomandazioni AIJ (Tamura *et al.*, 2003a). In modo analogo, i coefficienti di combinazione fra la forza across-wind ed il momento torcente (c_{FY}, c_{MZ}) sono pari a circa 0.76 e 0.85, valori ragionevolmente vicini al valore 0.77 proposto sempre dalle AIJ per un coefficiente di correlazione $|\rho| = 0.57$, sebbene la norma non distingue tra i casi in cui c_{FY} o c_{MZ} siano considerati con i loro pieni valori di progetto.

Tabella 2. Coefficienti di combinazione per c_{FY} e $-c_{MZ}$ ($\rho = 0.5657$, $\sigma_{c_{FY}} = 0.162$, $\sigma_{c_{MZ}} = 0.090$).

c_{FY} e c_{MZ}	“metodo diretto”	copula di Gumbel-Hougaard		copula Gaussiana	
		valore	err.	valore	err.
$\gamma_{y1}(c_{FY})$	0.759	0.747	-1.62%	0.742	-2.27%
$\gamma_{y2}(c_{MZ})$	0.845	0.837	-0.93%	0.834	-1.30%

Tabella 3. Coefficienti di combinazione per c_{FX} e c_{FY} ($\rho = 0.0239$, $\sigma_{c_{FX}} = 0.094$, $\sigma_{c_{FY}} = 0.162$).

c_{FX} e c_{FY}	metodo “diretto”	copula di Gumbel-Hougaard		copula Gaussiana	
		valore	err.	valore	err.
$\gamma_{y1}(c_{FX})$	0.725	0.731	0.91%	0.604	-16.63%
$\gamma_{y2}(c_{FY})$	0.467	0.480	2.72%	0.234	-49.94%

6. CONCLUSIONI

In quest'articolo è stato introdotto un possibile metodo per la determinazione delle funzioni di distribuzione di probabilità congiunta (JPDF) dei massimi di due variabili casuali. L'approccio utilizzato, basato sulle copule, permette la corretta definizione della JPDF di un numero qualunque di variabili delle quali siano note le distribuzioni marginali. La procedura ha validità generale e può essere utilizzata anche per valutare la distribuzione di probabilità di una data combinazione di variabili.

Tale metodo è stato utilizzato per la stima dei valori di progetto delle forze risultanti alla base di un edificio alto soggetto all'azione del vento, utilizzando i risultati di prove in galleria del vento. Nell'articolo sono state analizzate e confrontate due differenti tipologie di copule. I risultati ottenuti confermano la complessità della definizione di una corretta procedura per la determinazione dei coefficienti di combinazione da utilizzare nel progetto di una struttura snella sottoposta all'azione del vento, per la quale le azioni across-wind risultano rilevanti. Ancora più difficile appare la definizione di valori "universali" per i coefficienti di combinazione.

7. RINGRAZIAMENTI

La ricerca è stata svolta grazie ad un finanziamento del Ministero Italiano per l'Università e la Ricerca, all'interno del progetto PRIN 2007 "Wind effects on slender structures: Performance-based Optimal Design (Wi-POD)" coordinato dal Prof. Giuliano Augusti e dal Prof. Marcello Ciampoli dell'Università di Roma "La Sapienza".

8. BIBLIOGRAFIA

- Charpentier A., Fermanian J.-D., Scaillet O. (2007). *The estimation of copulas: theory and practice*. In: Rank, J. (Ed.), *Copulas: From theory to application in finance*, Section 2, Risk Publications, London.
- Chen X., Huang G. (2009). Evaluation of peak resultant response for wind-excited tall buildings. *Engineering Structures* Vol. 31, pp. 858-868
- Chen X., Huang G. (2010). Estimation of probabilistic extreme wind load effects: combination of aerodynamic and wind climate data. *J. Eng. Mech.* Vol. 136 (6), pp. 747-760
- Cherubini U., Luciano E., Vecchiato E. (2004). *Copula Methods in Finance*, Wiley Finance Series, Wiley, Chichester
- Clemen R.T., Reilly T. (1999). Correlations and Copulas for Decision and Risk Analysis. *Management Science* Vol. 45, pp. 208-224
- Cook N.J., Mayne, J.R. (1979). A novel working approach to the assessment of wind loads for equivalent static design. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* Vol. 4 (2), pp. 149-164
- Cook N.J., Mayne J.R. (1980). A refined working approach to the assessment of wind loads for equivalent static design. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* Vol. 6 (1-2), pp. 125-137
- Davenport A.G. (1961). The application of statistical concepts to the wind loading of structures. *Proc. Instn. Civ. Engrg.* Vol. 19, 449-472
- Demarta S., McNeil A.J. (2005). The t Copula and Related Copulas. *International Statistical Review* Vol. 73 (1), pp. 111-129
- Favre A.C., El Adlouni S., Perreault L., Thiémonge N., Bobée B. (2004). Multivariate hydrological frequency analysis using copulas. *Water Resources Research* Vol. 40
- Grigoletto M. (2010). Modelling the Dependence in Multivariate Extremes. *Proceedings of 45th Scientific Meeting of the Italian Statistical Society*, Padua, Italy
- Grimaldi S., Serinaldi F. (2003). *Analisi statistiche bivariate di serie idrologiche*. Quaderni di Statistica, Vol. 5 (in Italian)
- Grimaldi S., Serinaldi F. (2006). Asymmetric copula in multivariate flood frequency analysis. *Advances in Water Resources* Vol. 29 (8), pp. 1155-1167
- Isyumov N. (1982). *The aeroelastic modeling of tall buildings*. In: Reinhold, T.A. (Ed.), *Wind tunnel modeling for civil engineering applications*, pp. 373-407
- Naess A., Gaidai O., Batsevych O. (2009). Extreme value statistics of combined load effect processes. *Structural safety* Vol. 31, pp. 298-305

- Nelsen R.B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer Series in Statistics, second ed., Springer-Verlag, New York
- Petrini F., Ciampoli M., Augusti G. (2009). A probabilistic framework for Performance-Based Wind Engineering. In: Borri C., Augusti G., Bartoli G., Facchini L. (Eds.), *Proceedings of Fifth European and African Conference on Wind Engineering*, Florence
- Renard B., Lang M. (2007). Use of a Gaussian copula for multivariate extreme value analysis: Some case studies in hydrology. *Advances in Water Resources* Vol. 30 (4), pp. 897-912
- Rice S.O. (1944). Mathematical analysis of random noise. *Bell Systems Tech. J.* Vol. 23, pp. 282-332
- Salvadori G., De Michele C. (2007). On the Use of Copulas in Hydrology: Theory and Practice. *J. Hydrologic Engrg* Vol. 12 (4), pp. 369-380
- Sklar A. (1959). *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*. Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris 8, pp. 229-231
- Solari G., Pagnini L.C. (1999). Gust buffeting and aeroelastic behaviour of poles and monotubular towers. *J. Fluids Struct.* Vol. 13, pp. 877-905
- Solari G., Reinhold T.A., Livesey F. (1998). Investigation of wind actions and effects on the Leaning Tower of Pisa. *Wind and Struct.* 1 (1), pp. 1-23
- Tamura Y., Kawai H., Uematsu Y., Kondo K., Ohkuma T. (2003a). Revision of AIJ Recommendations for wind loads on buildings. *Proceedings of International Wind Engineering Symposium*, Tamsui, Taipei County, Taiwan, pp. 81-96
- Tamura Y., Kikuchi H., Hibi K. (2003b). Quasi-static wind load combinations for low- and middle-rise buildings. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* Vol. 91, pp. 1613-1625
- Tamura Y., Kikuchi H., Hibi K. (2008). Peak normal stresses and effects of wind direction on wind load combinations for medium-rise buildings. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* Vol. 96, pp. 1043-1057