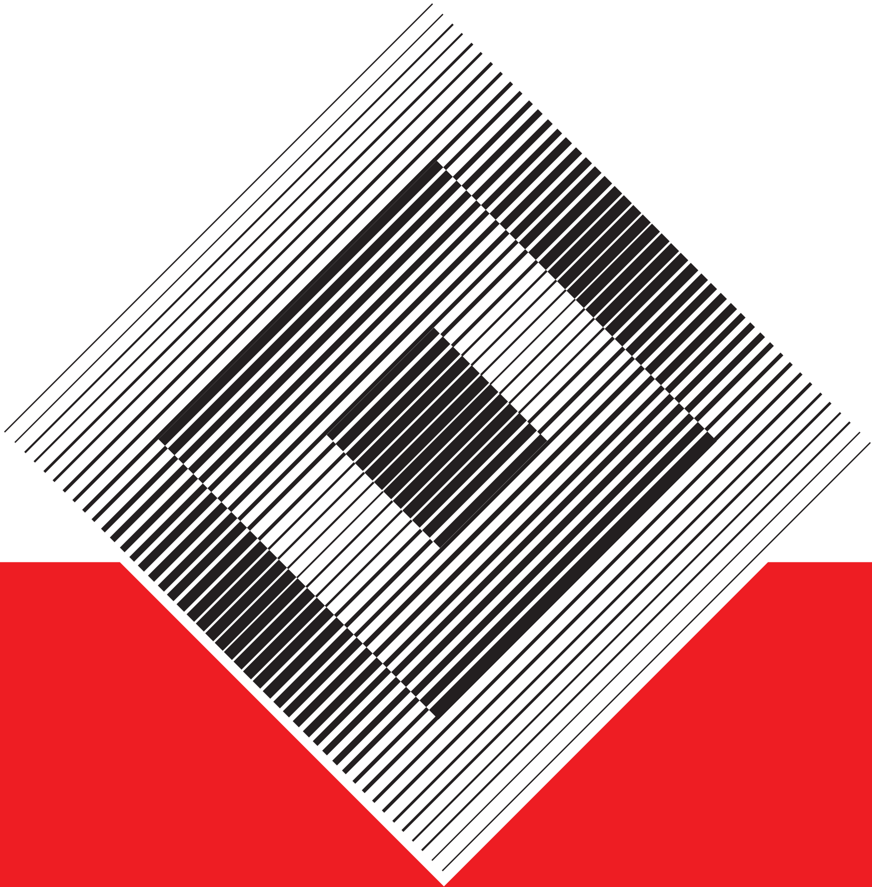
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

VOL. 38B N. 4 - OTTOBRE 2015

Poste Italiane s.p.a. - Spedizione in Abbonamento Postale - D.L. 353/2003 - (conv. In L. 27/02/2004 n° 46)
art. 1, comma 1, NE/PD - Rivista mensile - Tiratura inferiore a 20.000 copie - Taxe Perçue



Organo del CENTRO RICERCHE DIDATTICHE UGO MORIN
Via S. Giacomo, 4 - 31017 PADERNO DEL GRAPPA (Treviso)

TRIANGOLI NUMERICI

Rosa Stangarone, Luisella Verdi

In this paper we will consider the class of triangles that includes properly the class of the Normal Magic Triangles of Order 3 for which the lengths of the sides may be different. We call a triangle belonging in such a class Normal Triangle of Order 3.
While the nonisomorphic Normal Magic Triangles of Order 3 are 4 and the terns of the lengths of the sides are 4, the nonisomorphic Normal Triangles Order 3 are 120 and the terns of the lengths of the sides are 68 only.

TRIANGOLI NUMERICI

Rosa Stangarone, Luisella Verdi
(Università di Firenze)

1. Introduzione. Nel 1924 Peano (si veda [1]) chiama *triangolo magico* un triangolo equilatero nei cui vertici e punti medi dei lati sono disposti i primi 6 numeri naturali, in modo tale che la somma dei numeri posti su un medesimo lato sia costante.

Nel presente articolo si considerano triangoli, detti *triangoli normali di ordine 3* (indicati brevemente con TNO3), in cui la somma dei tre numeri naturali compresi tra 1 e 6 posti sullo stesso lato non è necessariamente costante.

Detta *lunghezza di un lato* del triangolo la somma dei numeri disposti su tale lato e denotate con s_i, i = 1, 2, 3, le lunghezze dei lati del triangolo, si verifica facilmente che i numeri naturali s_i hanno valore minimo 6 e massimo 15. Altrettanto facilmente si osserva, però, che non tutte le terne di numeri naturali compresi tra 6 e 15 possono essere terne di lunghezze dei lati di tali triangoli. Ad esempio, si vede facilmente che le terne {6,7,8} o {6,8,9} non possono essere terne di lunghezze dei lati di un triangolo TNO3, poiché, se la lunghezza di un lato è 6=1+2+3, quella di un altro lato è almeno 1+4+5=10.

In questa nota vogliamo caratterizzare le terne che possono essere terne di lunghezze dei lati di un TNO3, dimostrando che solo 68 di tali terne sono le lunghezze dei lati di questi triangoli. Si individuano, inoltre, 120 triangoli normali di ordine 3 che, mediante rotazioni e simmetrie, forniscono tutti i 720 triangoli che si ottengono dalle 6! permutazioni dei primi 6 numeri naturali disposti sui lati del triangolo.

2. Definizioni e notazioni. Nel 1972 Trotter (si veda [2]) definisce *triangolo magico normale di ordine n* un triangolo in cui lungo i lati sono disposti i primi 3(n–1) numeri naturali, n su ciascun lato, così che la somma dei numeri su ogni lato è una *costante magica* C. Un esempio di un triangolo magico di ordine 4, con C = 20 è dato in fig. 1

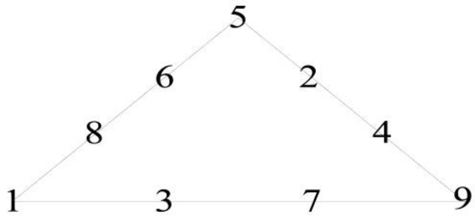


Figura 1

Per i triangoli magici di ordine 3 la costante magica C può essere soltanto 9, 10, 11, 12, (si veda [2]) e tali triangoli, (a meno di isomorfismi che defineremo tra breve) sono quelli mostrati in fig. 2

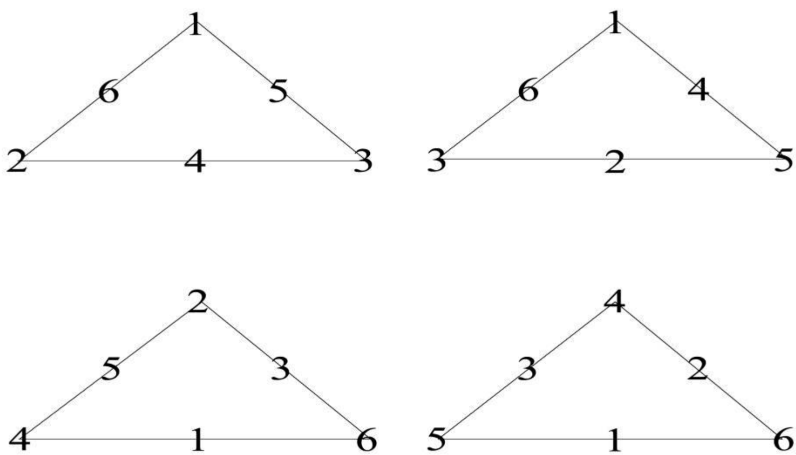


Figura 2

Le figure 3 e 4 rappresentano due TNO3 non magici

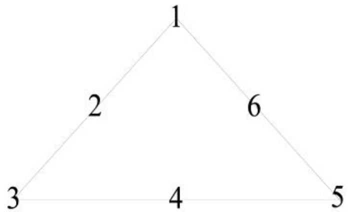


Figura 3

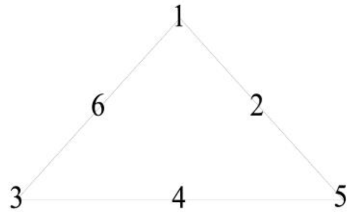


Figura 4

Indicato con I l'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, un triangolo T normale di ordine 3 è una permutazione $(\sigma_1, \dots, \sigma_6)$ degli elementi di *I,* ottenuta partendo da un vertice. In particolare consideriamo (se non è altrimenti detto esplicitamente) la permutazione ottenuta partendo dal vertice in alto e percorrendo il triangolo in senso antiorario. Il triangolo della fig. 3 è una rappresentazione della permutazione fondamentale o identica (1,2,3,4,5,6), mentre quello della fig. 4 rappresenta la permutazione (1,6,3,4,5,2).
I sottoinsiemi di I dati da $S_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $S_2 = \{\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$ e $S_3 = \{\sigma_5, \sigma_6, \sigma_1\}$ sono chiamati *lati* di T, i numeri σ_1, σ_3 *e* σ_5 sono detti *vertici,* mentre σ_2, σ_4 *e* σ_6 sono i *punti medi* rispettivamente dei lati, S_1, S_2 e S_3.
Osserviamo che s_i, lunghezza di un lato S_i, $i = 1, 2, 3$, è almeno 6=1+2+3 e al più 15=4+5+6 , per cui risulta

$$6 \leq s_i \leq 15, \qquad \text{per } i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Diciamo *perimetro* di T il numero

$$p = s_1 + s_2 + s_3 .$$

Si osservi che in ciascuno dei triangoli magici i lati hanno tutti la stessa lunghezza, ovvero per essi si verifica che $s_1 = s_2 = s_3 = \mathrm{C}$,

costante magica. Per il triangolo di fig. 3 si ha, invece, che due lati hanno la stessa lunghezza, essendo s_1= 6, $s_2 = s_3$ = 12 e p = 30, mentre per quello di fig. 4 le lunghezze dei lati sono tutte diverse, poiché s_1= 10, s_2= 12 e s_3= 8, ma ancora p = 30.
Diciamo che due triangoli TNO3 sono *isomorfi* se si possono ottenere l'uno dall'altro mediante rotazioni in senso antiorario di 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ o mediante le simmetrie rispetto alle tre mediane (le rette congiungenti i vertici e i punti medi dei lati ad essi opposti). Ne segue che ogni triangolo definisce altri cinque triangoli ad esso isomorfi. Ad esempio, i due triangoli isomorfi a quello della fig. 3 ottenuti per rotazione sono rappresentati in fig. 5

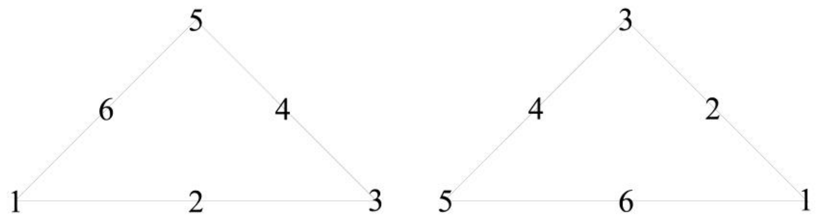


Figura 5

e i tre triangoli ottenuti mediante le simmetrie rispetto alle mediane sono quelli rappresentati in fig. 6

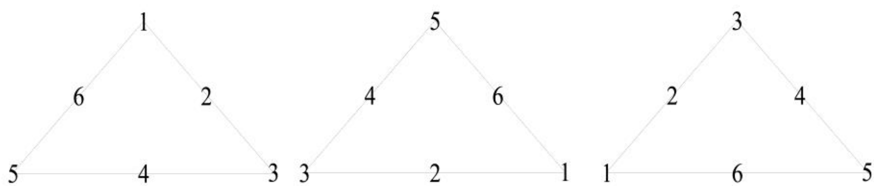


Figura 6

Ne segue, ad esempio, che sono triangoli isomorfi, ovvero triangoli appartenenti ad una stessa classe di isomorfismo, quelli rappresentati dalle 6 permutazioni

$$(1,2,3,4,5,6) \qquad (5,6,1,2,3,4) \qquad (3,4,5,6,1,2)$$
$$(1,6,5,4,3,2) \qquad (5,4,3,2,1,6) \qquad (3,2,1,6,5,4).$$

Di conseguenza le 6! permutazioni degli elementi di *I* determinano 720 triangoli TNO3 a 6 a 6 isomorfi e quindi 120 triangoli TNO3 non isomorfi tra loro. Come utile esercizio, si suggerisce al lettore di determinare i triangoli appartenenti ad una classe di isomorfismo distinta dalla precedente, ad esempio, quella determinata dal triangolo della fig. 4.
Si osservi che nei triangoli isomorfi le terne $\{s_1, s_2, s_3\}$ delle lunghezze dei lati ed il perimetro sono invarianti, come si vede anche dalle fig. 3, 5 e 6.
Si osservi, infine, che ogni triangolo TNO3 raffigura, in effetti, un'intera classe di isomorfismo in quanto da un triangolo si possono ottenere gli altri ad esso isomorfi partendo da ciascun vertice e percorrendo il triangolo sia in senso antiorario, sia in senso orario (si veda fig. 3, 5 e 6).

3. Terne ammissibili. A ciascun triangolo TNO3 si associa la terna $\{s_1, s_2, s_3\}$ delle lunghezze dei suoi lati ed il suo perimetro. Abbiamo già osservato nella (1) che le lunghezze dei lati hanno valore minimo 6 e massimo 15 e che non tutte le terne numeriche che si possono considerare con i 10 numeri naturali compresi tra 6 e 15 sono lunghezze dei lati di questi triangoli.
Chiameremo *terne ammissibili* le terne numeriche $\{s_1, s_2, s_3\}$ per le quali esistono triangoli TNO3 i cui lati abbiano lunghezza s_1, s_2, s_3.
Ad esempio, dalle fig. 3 e 4 si deduce che le terne $\{6, 12, 12\}$ e $\{10, 12, 18\}$ sono terne ammissibili, mentre, per quanto osservato nell'introduzione, le terne {6,7,8} e {6,8,9} non sono ammissibili.

Il lettore potrebbe, per esercizio, individuare altre terne ammissibili e non ammissibili.

Al fine di caratterizzare le terne $\{s_1, s_2, s_3\}$ ammissibili, introduciamo altri concetti e notazioni.

Se S_i e S_j, $i \neq j$ sono due terne di elementi di *I* si verifica la seguente proprietà:

(P$_1$) $S_i \cap S_j$ *è formato da un solo elemento se e solo se I \ (*$S_i \cup S_j$*) è costituito da un solo elemento.*

Diciamo che due terne S_i, $S_j \subset I$ sono *compatibili* se soddisfano la (P$_1$).

Ad esempio, le terne $S_i = \{2, 4, 5\}$ e $S_j = \{3, 4, 6\}$ sono compatibili, perché $S_i \cap S_j = \{4\}$ e quindi soddisfano la (P$_1$), mentre le terne $S_i = \{2, 4, 5\}$ e $S_j = \{1, 2, 4\}$ non sono compatibili, in quanto $S_i \cap S_j = \{2, 4\}$ e quindi non soddisfano la (P$_1$). Si invita il lettore a trovare altri esempi analoghi.

Ne segue la proprietà:

(P$_2$) *tre terne di elementi di I sono lati di un triangolo TNO3 se e solo se esse sono a due a due compatibili.*

Dati *i, j* = 1, 2, 3, $i \neq j$, poniamo $S_i \cap S_j := \{v_{ij}\}$, dove v_{ij} è il vertice comune ai lati S_i e S_j e indichiamo con m_{ij} il punto medio del lato opposto al vertice v_{ij}. Ovviamente si ha: $v_{ij} = v_{ji}$, $m_{ij} = m_{ji}$ e risulta

$$S_1 = \{v_{13}, m_{23}, v_{12}\},\ S_2 = \{v_{12}, m_{13}, v_{23}\},\ S_3 = \{v_{23}, m_{12}, v_{13}\}$$

ovvero il triangolo TNO3 è quello rappresentato in fig. 7

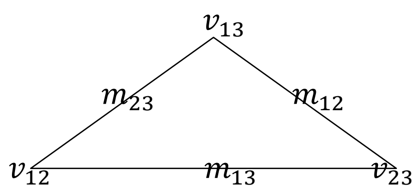


Figura 7

Si verifica che

$$p = \sum_{1 \le i < j \le 3} \left(2v_{ij} + m_{ij}\right). \tag{2}$$

Inoltre poniamo

$$s_{ij} = s_{ji} = s_i + s_j\,, \qquad \text{per } i, j = 1{,}2{,}3$$

e forniamo anzitutto delle proprietà che sono soddisfatte dai numeri s_{ij} e *p*.

Proposizione 1. *Per qualunque triangolo normale di ordine 3 valgono le seguenti relazioni*

$$per\ i, j = 1{,}2{,}3\ i \neq j\ risulta\ 16 \le s_{ij} \le 26\ \ e\ \ s_{ij} \neq 21 \tag{3}$$

$$27 \le p \le 36. \tag{4}$$

Dimostrazione.
Per quanto riguarda la (3) ricordiamo che S_i e S_j per i≠j, hanno un solo elemento in comune e quindi si ha

$$16 = 2 \cdot 1 + \sum_{2 \le k \le 5} k \le s_{ij} \le 2 \cdot 6 + \sum_{2 \le k \le 5} k = 26$$

e

$$s_{ij} \neq \sum_{1 \le k \le 6} k = 21.$$

Riguardo alla (4), osserviamo che

$$\sum_{1\le i<j\le 3}\left(v_{ij}+m_{ij}\right)=\sum_{1\le k\le 6}k=21,$$

da cui ricordando la (2) si ha

$$\begin{aligned} &p-21= \\ &=\sum_{1\le i<j\le 3}\left(2v_{ij}+m_{ij}\right)-\sum_{1\le i<j\le 3}\left(v_{ij}+m_{ij}\right) \\ &=\sum_{1\le i<j\le 3}v_{ij}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Poiché

$$6\le\sum_{1\le i<j\le 3}v_{ij}\le 15,$$

dalla (5) si ottiene la (4).
Osserviamo che la (1) fornisce alcune condizioni necessarie affinché dati tre numeri naturali s_1, s_2, s_3 esista un triangolo i cui lati abbiano tali numeri come loro rispettive lunghezze. Utilizzando la Proposizione 1 si possono ricavare facilmente altre condizioni necessarie che sono riportate nel seguente Corollario. Da qui in poi supporremo che

$$s_1\le s_2\le s_3. \qquad (6)$$

È evidente che la condizione di monotonia (6) non è restrittiva in quanto una terna $\{s_1, s_2, s_3\}$ è ammissibile se e solo se lo è una sua qualunque permutazione, in particolare quella che soddisfa la condizione (6). Scriveremo (s_1, s_2, s_3) per indicare una terna che soddisfa la condizione di monotonia.

Corollario 2. *Le terne ammissibili* (s_1, s_2, s_3) *soddisfano le seguenti condizioni.*

i) Se $s_1=6$ *allora*
$$s_i \geq 10, \quad s_i \neq 15 \;\; per \;\; i = 2{,}3 \;\; e \;\; 21 < s_{23} \leq 26. \tag{7}$$
ii) Se $s_1=7$ *allora*
$$s_i \geq 9, \quad s_i \neq 14 \;\; per \;\; i = 2{,}3 \;\; e \;\; 20 \leq s_{23} \leq 26. \tag{8}$$
iii) Se $s_1=8$ *allora*
$$s_i \geq 8, \quad s_i \neq 13 \;\; per \;\; i = 2{,}3 \;\; e \;\; 19 \leq s_{23} \leq 26. \tag{9}$$
iv) Se $s_1=9$ *allora*
$$s_i \geq 9, \quad s_i \neq 12 \;\; per \;\; i = 2{,}3 \;\; e \;\; 18 \leq s_{23} \leq 26. \tag{10}$$
v) Se $s_1=10$ *allora*
$$s_i \geq 10, \quad s_i \neq 11 \;\; per \;\; i = 2{,}3 \;\; e \;\; 20 \leq s_{23} \leq 26. \tag{11}$$
vi) Se $s_1=11$ *allora*
$$s_i \geq 11, \;\; per \;\; i = 2{,}3 \;\; e \;\; 22 \leq s_{23} \leq 25. \tag{12}$$
vii) Se $s_1=12$ *allora*
$$s_i = 12, \;\; per \;\; i = 2{,}3\,. \tag{13}$$
viii) Se $s_1 \geq 13$ *non esistono terne ammissibili.*

Dimostrazione.

Dalla (1) e dalla (3), tenendo presente la (6), si ha che

$$\max\{s_1, 16 - s_1\} \leq s_i \leq 15, \text{per } i = 2{,}3$$

e

$$s_i \neq 21 - s_1 \;;$$

da queste relazioni seguono le i)-vii), limitatamente alle condizioni su s_i per i=2,3. Per quanto riguarda s_{23}, basta ricordare che dalla (4) e dalla (6) si ha

$$\max\{27 - s_1, 2s_1\} \leq s_{23} \leq \min\{26, 36 - s_1\}$$

e quindi, escludendo, per la (3), il caso s_{23}=21 si ottengono i)-viii).

In seguito per ottenere ulteriori condizioni necessarie utilizzeremo ripetutamente la seguente proposizione di immediata dimostrazione.

Proposizione 3. *Siano* S_1, S_2 *e* S_3 *terne a due a due compatibili e siano* v *e* m *gli elementi di* $S_1 \cap S_2$ *e* $I \setminus (S_1 \cup S_2)$ *rispettivamente. Allora* S_3 *è una terna del tipo* $\{u, m, w\}$ *con* $u \in S_1 \setminus \{v\}, w \in S_2 \setminus \{v\}$.

Nel seguito, dato un numero *s* tale che $6 \leq s \leq 15$, diremo che una terna $\{a,b,c\}$ di elementi distinti di *I* è una *decomposizione in somma* di *s*, se $s=a+b+c$.

Osservazione 1. a) I numeri 6,7,14 e 15 ammettono una ed una sola decomposizione in somma e si ha

$$6=1+2+3;\ 7=1+2+4,\ 14=3+5+6;\ 15=4+5+6. \tag{14}$$

b) I numeri 8 e 13 ammettono due sole decomposizioni in somma e si ha

$$8=1+2+5=1+3+4;\ 13=3+4+6=2+5+6. \tag{15}$$

c) I numeri 9, 10, 11 e 12 ammettono tre sole decomposizioni in somma e si ha

$$9=1+2+6=1+3+5=2+3+4;\ 10=1+3+6=1+4+5=2+3+5. \tag{16}$$

$$11=1+4+6=2+3+6=2+4+5;\ \ 12=1+5+6=2+4+6=3+4+5. \tag{17}$$

Nel paragrafo 2 abbiamo ricordato che *i triangoli magici* si possono ottenere solo quando la lunghezza dei lati del triangolo è 9,10,11 e 12. D'altra parte utilizzando la Proposizione 3 è facile vedere che le tre terne nelle quali ciascuno dei quattro numeri sopra elencati si possono decomporre sono a due a due compatibili.

Si prova ora la seguente

Proposizione 4. *Data una terna* (s_1, s_2, s_3) *ammissibile che soddisfi la* (6) *si ha*
i) *Se* $s_1 = 7$ *e* $s_2 = 11$ *allora o* $s_3 = 12$ *oppure* $s_3 = 15$;
ii) *Se* $s_1 = 8$ e $s_2 = 10$ *allora o* $s_3 = 12$ *oppure* $s_3 = 15$;
iii) *Se* $s_1 = 10$ e $s_2 = 10$ *allora* $s_3 \neq 14$;
iv) *Se* $s_1 = 11$ e $s_2 = 11$ *allora* $s_3 \neq 13$.

Dimostrazione.
i) Poiché $s_1 = v_{13} + m_{23} + v_{12}$ e $s_2 = v_{12} + m_{13} + v_{23}$, se $s_1 = 7$ e $s_2 = 11$ dalla (14) e dalla (17) segue rispettivamente che $S_1 = \{1,2,4\}$ e che S_2 è una delle seguenti terne {1,4,6}, {2,3,6} e {2,4,5}. D'altra parte dalla Proposizione 3 segue che S_2={2,3,6} in quanto le altre due terne hanno due elementi in comune con S_1. Inoltre essendo

$$S_1 \cap S_2=\{2\} \text{ e } I \setminus (S_1 \cup S_2)=\{5\}$$

abbiamo che S_3 deve essere una delle seguenti terne

$$\{1,3,5\},\ \{1,5,6\},\ \{3,4,5\},\ \{4,5,6\}. \tag{18}$$

D'altra parte poiché, per la (6), $s_3 \geq s_2 = 11$ la prima terna di (18) deve essere esclusa. Perciò $s_3 = 12$ oppure $s_3 = 15$.
ii) Sia $s_1 = 8$. Dalla (15) segue che S_1 è uguale a {1,2,5}, oppure {1,3,4}. Se s_2=10 e inoltre S_1={1,2,5}, dalla (16), e dalla Proposizione 3 procedendo come nel punto i) si ha S_2={1,3,6} e quindi S_3 è una delle seguenti terne

$$\{2,3,4\},\ \{2,4,6\},\ \{3,4,5\},\ \{4,5,6\}. \tag{19}$$

Da (19) ricordando la (6) si ha che $s_3 = 12$ oppure $s_3 = 15$. Se $s_2 = 10$ e $S_1 = \{1,3,4\}$ allora dalla (16), e dalla Proposizione 3 segue che $S_2 = \{2,3,5\}$ e quindi S_3 è una delle seguenti terne

$$\{1,2,6\}, \{1,5,6\}, \{2,4,6\}, \{4,5,6\}. \tag{20}$$

Da (20) ricordando la (6) si ha nuovamente che $s_3 = 12$ oppure $s_3 = 15$.
iii) Se $s_1 = s_2 = 10$ allora $s_3 \neq 14$ perché se fosse $s_3 = 14$ allora per la (14) avremmo che $S_3 = \{3,5,6\}$ e allora per la (16) esisterebbe una sola decomposizione in somma di 10 compatibile con S_3 e quindi in un triangolo numerico in cui $s_1 = s_2 = 10$ deve essere $s_3 \neq 14$.
iv) Supponiamo che $s_1 = s_2 = 11$. Se fosse $s_3 = 13$ allora per la (15) avremmo che S_3 dovrebbe essere uguale o a $\{3,4,6\}$ oppure a $\{2,5,6\}$. In entrambi i casi esiste una sola decomposizione in somma di 11 compatibile con S_3. Quindi se $s_1 = s_2 = 11$ allora $s_3 \neq 13$.

Osservazione 2. Il Corollario 2 e la Proposizione 4 forniscono delle condizioni necessarie affinché una terna (s_1, s_2, s_3) che soddisfi la (6) sia ammissibile. Questo consente di individuare, tra tutte le terne di numeri naturali compresi tra 6 e 15, quelle terne (s_1, s_2, s_3) che soddisfano la (6) e che possono essere lunghezze dei lati di un triangolo TNO3. Esse sono 68 e sono elencate nella prima colonna della tabella n. 1 di seguito riportata. Osserviamo che nella tabella compaiono le terne per le quali $s_1 = s_2 = s_3$, che caratterizzano i triangoli magici. Nel paragrafo seguente stabiliremo che le 68 terne della tabella sono tutte e sole le terne ammissibili. Per provare questo ci saranno utili i valori di s_{12}, s_{13}, s_{23} e della somma $p = s_1 + s_2 + s_3$ riportati nelle altre colonne della tabella.

TABELLA n. 1.

(s_1,s_2,s_3)	s_{12}	s_{13}	s_{23}	p
(6,10,12)	16	18	22	28
(6,10,13)	16	19	23	29
(6,10.14)	16	20	24	30
(6,11,11)	17	17	22	28
(6,11,12)	17	18	23	29
(6,11,13)	17	19	24	30
(6,11,14)	17	20	25	31
(6,12,12)	18	18	24	30
(6,12,13)	18	19	25	31
(6,12,14)	18	20	26	32
(6,13,13)	19	19	26	32
(7,9,11)	16	18	20	27
(7,9,13)	16	20	22	29
(7,9,15)	16	22	24	31
(7,10,10)	17	17	20	27
(7,10,12)	17	19	22	29
(7,10,13)	17	20	23	30
(7,10,15)	17	22	25	32
(7,11,12)	18	19	23	30
(7,11,15)	18	22	26	33
(7,12,12)	19	19	24	31
(7,12,13)	19	20	25	32
(7,13,13)	20	20	26	33
(8,8,11)	16	19	19	27
(8,8,12)	16	20	20	28
(8,8,14)	16	22	22	30
(8,8,15)	16	23	23	31
(8,9,10)	17	18	19	27
(8,9,11)	17	19	20	28
(8,9,14)	17	22	23	31
(8,9,15)	17	23	24	32
(8,10,12)	18	20	22	30
(8,10,15)	18	23	25	33

(8,11,11)	19	19	22	30
(8,11,12)	19	20	23	31
(8,11,14)	19	22	25	33
(8,11,15)	19	23	26	34
(8,12,12)	20	20	24	32
(8,12,14)	20	22	26	34
(9,9,9)	18	18	18	27
(9,9,10)	18	19	19	28
(9,9,11)	18	20	20	29
(9,9,13)	18	22	22	31
(9,9,14)	18	23	23	32
(9, 9,15)	18	24	24	33
(9,10,10)	19	19	20	29
(9,10,13)	19	22	23	32
(9,10,14)	19	23	24	33
(9,10,15)	19	24	25	34
(9,11,11)	20	20	22	31
(9,11,13)	20	22	24	33
(9,11,14)	20	23	25	34
(9,11,15)	20	24	26	35
(9,13,13)	22	22	26	35
(10,10,10)	20	20	20	30
(10,10,12)	20	22	22	32
(10,10,13)	20	23	23	33
(10,10,15)	20	25	25	35
(10,12,12)	22	22	24	34
(10,12,13)	22	23	25	35
(10,12,14)	22	24	26	36
(10,13,13)	23	23	26	36
(11,11,11)	22	22	22	33
(11,11,12)	22	23	23	34
(11,11,14)	22	25	25	36
(11,12,12)	23	23	24	35
(11,12,13)	23	24	25	36
(12,12,12)	24	24	24	36

4. Perimetri e triangoli TNO3 ad essi associati. Ora risolviamo il problema inverso del precedente cioè troviamo per ogni numero naturale p, tale che $27 \leq p \leq 36$, tutti i TNO3 aventi perimetro uguale a p. Procediamo nel seguente modo:

a) leggiamo la Tabella n. 1 da destra a sinistra e nel far questo ordiniamo tale tabella nel senso crescente dei valori di p;

b) per ciascun numero p consideriamo tutte le terne ammissibili corrispondenti a p e per ciascuna di tali terne (s_1, s_2, s_3) si verifica facilmente che esiste almeno un triangolo le cui lunghezze dei lati sono date dalle componenti della terna e altrettanto semplicemente si determinano tutti i suddetti triangoli.

Ora, per una generica terna ammissibile (s_1,s_2,s_3) scriviamo le equazioni che sono soddisfatte dai corrispondenti v_{ij} e m_{ij}, i,j=1,2,3, $i < j$. Otteniamo così il seguente sistema

$$\begin{cases} v_{13} + m_{23} + v_{12} + m_{13} + v_{23} + m_{12} = 21 \\ v_{13} + m_{23} + v_{12} = s_1 \\ v_{12} + m_{13} + v_{23} = s_2 \\ v_{23} + m_{12} + v_{13} = s_3 \end{cases} \tag{21}$$

dove, ricordiamo

$$\sum_{i=1}^{3} s_i = p\,.$$

Il sistema (21) è equivalente a

$$\begin{cases} v_{13} + m_{23} + v_{12} + m_{13} + v_{23} + m_{12} = 21 \\ m_{23} + v_{12} - v_{23} - m_{12} = s_1 - s_3 \\ v_{12} + m_{13} + v_{23} = s_2 \\ m_{13} + v_{23} + m_{12} = 21 - s_1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} m_{13} = 21 - s_1 - (v_{23} + m_{12}) \\ v_{12} = m_{12} + s_{12} - 21 \\ m_{23} = v_{23} - s_{23} + 21 \\ v_{13} = s_3 - (v_{23} + m_{12}) \end{cases}$$

e quindi

$$v_{ij} = m_{ij} + s_{ij} - 21 \quad \text{per ogni } i,j = 1,2,3. \qquad (22)$$

Poiché v_{ij} e m_{ij} sono numeri naturali compresi tra 1 e 6, a due a due distinti si ha

$$m_{ij} \geq 22 - s_{ij} \geq 2, \qquad \text{se} \quad 16 \leq s_{ij} \leq 20;$$
$$m_{ij} \leq 27 - s_{ij} \leq 5, \qquad \text{se} \quad 22 \leq s_{ij} \leq 26.$$

Osservazione 3. Se si permutano gli elementi della terna (s_1,s_2,s_3) si ottengono sistemi le cui soluzioni individuano triangoli tra loro isomorfi.

Considerato il valore minimo *p* = 27, dalla tabella n. 1 si ha che le terne di lunghezze di lati ammissibili sono (7,9,11), (7,10,10), (8,8,11), (8,9,10) e (9,9,9).
Se si considera la terna (7,9,11) risulta $s_{12} = 16$, $s_{13} = 18$, $s_{23} = 20$. Dalla (22) si ha $v_{12} = m_{12} - 5$, $v_{13} = m_{13} - 3$ e $v_{23} = m_{23} - 1$, da cui, dovendo essere $v_{12} \geq 1$, si ha m_{12} = 6 e v_{12} = 1. Poiché $m_{13} \neq m_{12}$ e $v_{13} \neq v_{12}$ si ha inoltre $m_{13} \neq 6$ e $m_{13} \neq 4$, onde m_{13} = 5 e v_{13} = 2. Ne segue m_{23} = 4 e v_{23}= 3. Si ha dunque l'unica soluzione (2,4,1,5,3,6).

Se, invece, si considera la terna (7,10,10), allora s_{12} = s_{13}= 17, s_{23} = 20. Dalla (22) segue $v_{12} = m_{12} - 4$, $v_{13} = m_{13} - 4$ e $v_{23} = m_{23} - 1$, da cui, m_{12} = 6 e v_{12} = 2, m_{13} = 5 e v_{13} = 1, m_{23} = 4 e v_{23}= 3, oppure m_{12} = 5 e v_{12} = 1, m_{13} = 6 e v_{13} = 2, m_{23} = 4 e v_{23}= 3; cioè si hanno i due triangoli (1,4,2,5,3,6) e (2,4,1,6,3,5). Si osservi che nelle due eventualità v_{23} e m_{23} restano fissi, mentre sono scambiati tra loro gli altri due vertici e gli altri due punti medi. Ciò significa che i due triangoli si ottengono l'uno dall'altro per simmetria rispetto alla mediana congiungente v_{23} con m_{23} e quindi sono isomorfi in accordo con l'Osservazione 3.
Se ora si considera la terna (8,8,11) risulta s_{12} = 16 e s_{13} = s_{23} = 19 e quindi $v_{12} = m_{12} - 5, v_{13} = m_{13} - 2$ e v_{23} = m_{23} – 2, da cui, m_{12}= 6 e v_{12} = 1, m_{13}= 4 e v_{13} = 2, m_{23} = 5 e v_{23}= 3, oppure m_{12} = 6 e v_{12}= 1, m_{13} = 5 e v_{13} = 3, m_{23} = 4 e v_{23} = 2; cioè si hanno i due triangoli (2,5,1,4,3,6) e (3,4,1,5,2,6). Si osserva che nelle due 6-uple restano fissi v_{12} e m_{12}, mentre si scambiano tra loro gli altri due vertici e gli altri due punti medi, ovvero i triangoli sono simmetrici rispetto alla mediana congiungente v_{12} e m_{12} e quindi, anche in questo caso, sono isomorfi in accordo con l'Osservazione 3.
Se (s_1, s_2, s_3) = (8,9,10), allora s_{12} = 17, s_{13} = 18 e s_{23}= 19. Dalla (22) segue v_{12}= m_{12} – 4, v_{13} = m_{13} – 3 e v_{23}= m_{23} – 2, per cui, m_{12} = 6 e v_{12}= 2, m_{13}= 4 e v_{13} = 1, m_{23} = 5 e v_{23}= 3, oppure m_{12} = 5 e v_{12}= 1, m_{13} = 6 e v_{13} = 3, m_{23}= 4 e v_{23} = 2 e quindi si hanno i due triangoli (1,5,2,4,3,6) e (3,4,1,6,2,5) non isomorfi.
Se infine si considera la terna ammissibile (9,9,9) in cui i numeri s_i sono tutti uguali risulta che s_{ij} = 18, v_{ij} = m_{ij} – 3 e $m_{ij} \geq 4$, da cui si ottengono i seguenti 6 triangoli tutti isomorfi tra loro

(1,5,3,4,2,6); (2,6,1,5,3,4); (3,4,2,6,1,5)
(1,6,2,4,3,5); (2,4,3,5,1,6); (3,5,1,6,2,4).

Si osserva che i triangoli sulla stessa riga si ottengono l'uno dall'altro per rotazioni, mentre quelli sulla stessa colonna per simmetria rispetto a una mediana.

In modo analogo si procede per i valori di p maggiori di 27 e si verificano le seguenti proprietà:
i) se i numeri s_i, $i = 1,2,3$, sono tutti distinti, allora si ottengono 1 o 2 o 4 triangoli non isomorfi;
ii) se tra i numeri s_i $i = 1,2,3$, ce ne sono solo due uguali, allora si individuano 2 o 4 o 6 triangoli a due a due isomorfi tra loro;
iii) se i numeri s_i sono tutti uguali tra loro si determinano 6 triangoli tutti isomorfi tra loro e si ritrovano i triangoli magici.
Da quanto provato precedentemente si deduce che esistono solo 6 triangoli non isomorfi tali che $p = 27$. Essi sono, ad esempio,

$$(2,4,1,5,3,6);\ (1,4,2,5,3,6);\ (2,5,1,4,3,6);$$
$$(3,4,1,6,2,5);\ (1,5,2,4,3,6);\ (1,5,3,4,2,6).$$

In maniera analoga si determinano 6 triangoli non isomorfi di perimetro 28, 35 e 36. Ai valori di $p = 29$ e 34 è invece possibile associare 12 triangoli non isomorfi e per ciascuno dei valori di $p = 30$, 31, 32, 33 si possono individuare 18 triangoli non isomorfi. In totale si possono determinare 120 triangoli TNO3 non isomorfi tra loro che sono elencati nella successiva tabella n. 2.

Conclusione

I 120 triangoli della tabella n. 2 forniscono, mediante le rotazioni di 0, $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ e le simmetrie rispetto alle 3 mediane, i 6! = 720 triangoli TNO3, ovvero tutti e soli i triangoli che si possono costruire considerando nei vertici e nei punti medi dei lati le 6! permutazioni dei primi 6 numeri naturali.

TABELLA n. 2

$p = 27$

$$(2,4,1,5,3,6);\ (1,4,2,5,3,6);\ (2,5,1,4,3,6);$$
$$(3,4,1,6,2,5); (1,5,2,4,3,6);\ (1,5,3,4,2,6).$$

$p = 28$

$$(2,3,1,5,4,6);\ (1,3,2,5,4,6);\ (2,5,1,3,4,6);$$
$$(4,3,1,6,2,5);\ (1,5,2,3,4,6);\ (1,6,2,3,4,5).$$

$p = 29$

$$(3,2,1,5,4,6);\ (2,3,1,4,5,6);\ (3,2,1,6,4,5);\ (1,3,2,4,5,6);$$
$$(4,2,1,5,3,6);\ (2,4,1,3,5,6);\ (4,2,1,6,3,5);\ (1,4,2,3,5,6);$$
$$(5,3,1,6,2,4);\ (4,2,3,5,1,6);\ (3,2,4,5,1,6);\ (1,6,2,3,5,4).$$

$p = 30$

$$(3,2,1,4,5,6);\ (2,3,1,4,6,5);\ (3,1,2,5,4,6);\ (2,1,3,5,4,6);$$
$$(1,3,2,4,6,5);\ (1,2,3,4,5,6);\ (4,1,2,5,3,6);\ (2,4,1,3,6,5);$$
$$(4,1,2,6,3,5);\ (1,4,2,3,6,5);\ (5,2,1,4,3,6);\ (2,5,1,3,6,4);$$
$$(5,2,1,6,3,4);\ (1,4,3,2,5,6);\ (4,1,3,5,2,6);\ (1,5,2,3,6,4);$$
$$(3,1,4,5,2,6);\ (1,4,5,2,3,6).$$

$p = 31$

$$(3,2,1,4,6,5);\ (3,1,2,4,5,6);\ (2,1,3,4,5,6);\ (3,2,1,5,6,4);$$
$$(4,2,1,3,5,6);\ (1,2,4,3,5,6);\ (4,3,1,2,5,6);\ (3,4,1,2,6,5);$$
$$(5,1,2,4,3,6);\ (1,4,3,2,6,5);\ (1,3,4,2,5,6);\ (5,2,1,6,4,3);$$
$$(5,1,2,6,3,4);\ (2,4,3,1,5,6);\ (6,2,1,5,3,4);\ (1,5,3,2,6,4);$$
$$(5,3,1,6,4,2);\ (5,1,3,6,2,4).$$

$p = 32$

$$(3,1,2,4,6,5);\ (2,1,3,4,6,5);\ (4,1,2,3,5,6);\ (4,2,1,3,6,5);$$
$$(2,1,4,3,5,6);\ (4,2,1,5,6,3);\ (4,3,1,2,6,5);\ (5,1,2,3,4,6);$$
$$(2,1,5,3,4,6);\ (1,3,4,2,6,5);\ (6,1,2,4,3,5);\ (2,3,4,1,5,6);$$
$$(2,4,3,1,6,5);\ (6,1,2,5,3,4);\ (6,2,1,5,4,3);\ (6,3,1,5,4,2);$$
$$(6,1,3,5,2,4);\ (2,3,5,1,4,6).$$

$p = 33$

$$(4,1,2,3,6,5);\ (2,1,4,3,6,5);\ (5,2,1,3,6,4);\ (4,1,3,2,5,6);$$
$$(3,1,4,2,5,6);\ (5,2,1,4,6,3);\ (6,1,2,3,4,5);\ (4,2,3,1,5,6);$$
$$(6,2,1,3,5,4);\ (6,2,1,4,5,3);\ (3,2,4,1,5,6);\ (2,3,4,1,6,5);$$
$$(3,1,5,2,4,6);\ (6,1,2,5,4,3);\ (6,4,1,3,5,2);\ (6,3,1,4,5,2);$$
$$(3,2,5,1,4,6);\ (6,1,4,5,2,3).$$

$p = 34$

$(4, 1, 3, 2, 6, 5)$; $(5, 1, 2, 3, 6, 4)$; $(5, 1, 2, 4, 6, 3)$; $(3, 1, 4, 2, 6, 5)$;
$(6, 1, 2, 3, 5, 4)$; $(4, 2, 3, 1, 6, 5)$; $(5, 4, 2, 1, 6, 3)$; $(3, 2, 4, 1, 6, 5)$;
$(5, 3, 2, 4, 6, 1)$; $(6, 1, 3, 5, 4, 2)$; $(3, 2, 6, 1, 4, 5)$; $(6, 3, 2, 4, 5, 1)$.

$p = 35$

$(5, 1, 3, 2, 6, 4)$; $(5, 1, 3, 4, 6, 2)$; $(5, 2, 3, 1, 6, 4)$;
$(6, 1, 3, 4, 5, 2)$; $(3, 2, 5, 1, 6, 4)$; $(6, 2, 3, 4, 5, 1)$.

$p = 36$

$(5, 1, 4, 2, 6, 3)$; $(4, 1, 5, 2, 6, 3)$; $(5, 2, 4, 1, 6, 3)$;
$(4, 2, 5, 1, 6, 3)$; $(6, 1, 4, 3, 5, 2)$; $(6, 1, 5, 3, 4, 2)$.

5. Qualche esercizio. In questo paragrafo proponiamo la seguente applicazione didattica per studenti di una scuola media superiore.

Si considerino i triangoli TNO3 che verificano la seguente proprietà:

(P) due lati del triangolo hanno la stessa lunghezza, ovvero esistono $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$, tali che $s_i = s_j$.

Risolvere i seguenti quesiti:

Q_1) Fornire alcuni esempi di TNO3 non isomorfi che godono della proprietà (P), diversi da quelli magici. In particolare dare un esempio di una terna di TNO3 non isomorfi, tali che $s_1 = 6\ e\ s_2 = s_3 = 12$.

Q_2) Stabilire quanti sono i triangoli TNO3 non isomorfi che soddisfano la proprietà (P), esclusi quelli magici.

Q_3) Calcolare il numero totale dei TNO3 che godono della proprietà (P).

Q_4) Fornire alcuni esempi di TNO3 non isomorfi che non godono della proprietà (P). In particolare dare un esempio di una quaterna di TNO3 non isomorfi, tali che $s_1 = 8,\ s_2 = 11\ e\ s_3 = 12$.

Q_5) Determinare quanti sono i triangoli TNO3 non isomorfi che non soddisfano la proprietà (P).

Q_6) Trovare il numero totale dei TNO3 che non godono della proprietà (P).

Bibliografia

[1] G. Peano, Giochi di aritmetica e problemi interessanti, Paravia Torino 1924.
[2] Terrel Trotter, Jr, Normal Magic Triangles of order n, Journal of Recreational Mathematics, vol 5, 1, 1972, pp 28-32.
[3] Terrel Trotter, Jr, Perimeter- magic Polygons, Journal of Recreational Mathematics, vol 7, 1, 1974, pp 14-20.