

IGF7 - VII Convegno Nazionale
Gruppo Italiano Frattura
Firenze, 13 - 14 giugno 1991

ANALISI DI ELEMENTI STRUTTURALI

IN MATERIALI SCARSAMENTE REAGENTI A TRAZIONE

S. Briccoli Bati
G. Ranocchiali

Professore Associato
Tecnico Laureato
Dipartimento di costruzioni - Università degli Studi di Firenze
Piazza Brunelleschi 6 Firenze

SOMMARIO

In questa nota si espongono i risultati di indagini teoriche e sperimentali volte alla interpretazione delle fratture che insorgono in elementi strutturali semplici soggetti a prova di carico a deformazione guidata. Esperienze compiute su materiali lapidei di diversa natura hanno mostrato una sorta di comportamento limite cui rapidamente tendono i percorsi di equilibrio relativi ai campioni provati per disporsi sul percorso caratteristico dei materiali no-tension, con la manifestazione di un fenomeno tipo snap-through.

I modelli interpretativi cui si fa riferimento si basano su di una legge di comportamento di tipo elasto-fragile ed elasto-softening. Vengono quindi confrontati e discussi i percorsi di equilibrio che si ottengono con le due leggi di comportamento assunte per il materiale.

Introduzione

Come è ben noto molti materiali comunemente usati per le costruzioni, quali calcestruzzo, materiali lapidei, rocce, ecc., esibiscono sotto carico un comportamento ultimo di tipo softening; ciò per la non omogeneità, ad una determinata scala, del materiale.

In questi casi alla fase elastica, hardening o plastica, segue una fase nella quale, per ulteriori incrementi di deformazione, decresce la capacità portante dell'elemento, [1] [5] [9] [10]; se il processo di carico avviene a deformazione guidata, l'elemento materiale si comporta in maniera tale che il ramo discendente della curva carico-spostamento può essere rilevato sperimentalmente.

Le indagini sperimentali a suo tempo condotte su elementi lapidei soggetti a flessione hanno messo in luce alcuni aspetti caratteristici dei diagrammi

carico-spostamento, ottenuti con procedimento a deformazione guidata; è stato notata, nelle fasi iniziali del processo di carico, la manifestazione di fenomeni di tipo snap-through in corrispondenza dell'apertura delle fratture. In [7] è stata resa ragione di questi aspetti con l'assunzione di un modello di comportamento del materiale di tipo elasto-fragile; questa assunzione ha permesso di descrivere qualitativamente e quantitativamente il comportamento rilevato per via sperimentale.

In questa problematica ci si propone ora, con riferimento ad una tipica geometria della Meccanica della Frattura, di valutare la risposta strutturale in termini di lavoro dissipato sugli stessi elementi strutturali, con l'assunzione di un modello di comportamento del materiale, di tipo elasto-softening onde valutarne le implicazioni strutturali. Tale problematica non è nuova, infatti l'influenza del comportamento softening locale in elementi strutturali convenzionalmente monodimensionali è già stata presa in considerazione da Bazant [1], Ottosen [14], Schreyer [15] e recentemente da Carpinteri [8].

Prima di procedere all'analisi di una struttura iperstatica si ritiene opportuno svolgere alcune considerazioni su di un esempio più semplice comunemente adottato in Meccanica della Frattura; esso è rappresentato da una trave semplicemente appoggiata con un carico crescente secondo un parametro λ concentrato nella sezione di mezzeria. Si tratta dunque della geometria classica del three point bending test. Per semplicità di esposizione si considera l'elasticità dell'intero sistema concentrata nel concio centrale di spessore s .

Nell'ipotesi di comportamento fragile a trazione del materiale il percorso di equilibrio della struttura, descritto in termini di $\lambda - \bar{\eta}$, è caratterizzato da due fasi successive: la prima elastica lineare e la seconda elastica fratturata.

Le equazioni della prima fase, opportunamente adimensionalizzate, sono:

$$\lambda = \frac{4}{3} \bar{\eta} \quad \bar{\eta} = \eta \frac{E t b^3}{P l^2 s} \quad (1)$$

con

$$0 < \lambda < \lambda_1$$

dove λ_1 rappresenta il valore del moltiplicatore del carico per il quale al bordo inferiore del concio deformabile viene attinto il valore limite della tensione a trazione σ_0 . Il valore del moltiplicatore del carico risulta essere pari

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} \bar{b} \quad \bar{b} = \frac{b}{l} \quad (2)$$

cui corrisponde uno spostamento

$$\bar{\eta}_1 = \frac{\bar{b}}{2}$$

Superato il valore di λ_1 ha inizio il processo di frattura e l'equazione che governa il problema in questa fase diventa:

$$\lambda = \frac{\bar{b}^3}{6 \bar{\eta}^2} \quad \bar{f} = 1 - \frac{\bar{b}}{\bar{\eta}} \quad \bar{f} = \frac{f}{b} \quad (3)$$

dove \bar{f} rappresenta l'altezza della frattura.

Una volta innescato il processo della frattura questo non si arresta più e si ha il collasso totale. Procedendo a deformazione guidata, ovvero facendo

crescere $\bar{\eta}$, λ tende asintoticamente alla retta $\lambda = 0$ e la frattura f investe l'intera altezza della sezione (fig.1).
 Con questo comportamento il lavoro dissipato nell'intero percorso risulta essere:

$$U_0 = \frac{\sigma_0^2 s t b}{2E}$$

ed in forma adimensionalizzata:

$$\bar{U}_0 = \frac{b^2}{2}$$

da cui si ottiene

$$Gf = \frac{\sigma_0 \epsilon_0 s}{2} \quad (4)$$

e quindi, come deve essere, il valore dell'energia di frattura è esattamente pari all'energia elastica.

Nell'ipotesi di comportamento del materiale elasto-softening, l'equazione che descrive il percorso di equilibrio nella fase elastica, prima cioè del raggiungimento della tensione limite a trazione, è identico al caso precedente; altrettanto vale per il valore del moltiplicatore del carico λ_1 e per l'abbassamento $\bar{\eta}_1$. Nella seconda fase per semplicità si suppone che i due rami della curva $\lambda - \bar{\eta}$, uno lineare e l'altro iperbolico, siano connessi da una curva regolare [19] che passa per il punto di coordinate λ_1 e $\bar{\eta}_2 = 45\bar{b}/64$ cui corrispondono i valori del moltiplicatore del carico e dell'abbassamento nell'istante in cui l'altezza del tratto a comportamento coesivo è pari a $b/5$ [23]. Successivamente ad ulteriori incrementi dello spostamento $\bar{\eta}$ la frattura si innesca e comincia a propagarsi. In questa fase l'equazione che lega il parametro λ e lo spostamento η è:

per $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda < \lambda_3$

$$\lambda = \frac{675 \bar{b}^3}{2048 \bar{\eta}^2} \quad (5)$$

mentre il legame $\bar{f} - \bar{\eta}$ è:

$$\bar{f} = 1 - \frac{45 \bar{b}}{64 \bar{\eta}} \quad (6)$$

Anche qui al crescere di $\bar{\eta}$, λ tende asintoticamente alla retta di equazione $\lambda = 0$ e la frattura cresce fino ad invadere l'intera sezione. Il lavoro dissipato nell'intero percorso d'equilibrio è:

$$U_0 = \frac{37}{48} \frac{\sigma_0^2 t b s}{E}$$

ed in forma adimensionalizzata:

$$\bar{U}_0 = \frac{37}{48} \bar{b}^2$$

da cui si ottiene:

$$Gf = \frac{37}{48} \epsilon_0 \sigma_0 s \quad (7)$$

e quindi l'energia di frattura risulta essere più alta di quella che si ottiene nel caso di comportamento fragile. Per questa semplice struttura si può quindi concludere che l'introduzione del comportamento softening porta ad un valore più alto dell'energia di frattura e quindi ad attribuire una

maggior stabilità all'intero sistema. La capacità di dissipare energia risulta del 50% superiore a quella esibita con l'assunzione di un comportamento fragile. Si estende ora l'analisi ad una struttura iperstatica considerando per il materiale che la costituisce dapprima un comportamento elasto-fragile, e poi elasto-softening a trazione.

Modello con comportamento elasto fragile

Si prende in esame una struttura elementare, convenzionalmente schematizzabile come monodimensionale, costituita da materiale scarsamente reagente a trazione; ci si pone come obiettivo di controllare l'evolvere della struttura reagente al crescere di un fattore di carico λ .

Allo scopo è stato esaminato un modello strutturale per il quale si ritiene valida l'ipotesi di Navier delle sezioni piane e si ritiene influente la deformazione dovuta al taglio. L'analisi viene condotta in regime di piccoli spostamenti su di un modello costituito da una trave arco incastrata agli estremi, ed ha come scopo quello di rendere ragione, mediante una simulazione analitica del fenomeno strutturale, di alcuni aspetti caratteristici dei diagrammi carico spostamento ottenuti con indagini sperimentali.

Il modello costitutivo assunto tiene conto della seppur scarsa resistenza a trazione conservando l'ipotesi di rottura fragile sia in compressione che in trazione (fig.2b).

La formulazione analitica descrive il problema secondo fasi contraddistinte dal raggiungimento del valore della tensione limite in corrispondenza dei bordi della sezioni reagenti. Si tratta infatti di descrivere, in termini di carico spostamento, il comportamento di strutture la cui configurazione è variabile in funzione dei carichi. Si tiene conto della variazione della struttura effettivamente reagente per effetto della comparsa della frattura. Il processo viene seguito fase per fase, simulando un procedimento a deformazione guidata con lo scopo di poter cogliere anche gli eventuali rami instabili del percorso di equilibrio.

Si consideri il sistema arco-trave incastrato agli estremi; per maggiore semplicità si fa riferimento ad uno schema a deformabilità concentrata in tre soli conci deformabili (fig.2). Lo spessore dei tre conci deformabili, con comportamento elasto-fragile sia a trazione che a compressione, è stato scelto in modo da dare, nelle varie sezioni, un diverso rapporto tra momento e rotazione relativa.

Siano dunque σ_0 la tensione limite a trazione, $-n\sigma_0$, con $n > 1$, la tensione limite a compressione, e λ il moltiplicatore del carico. Le fasi di comportamento della struttura sono contraddistinte ciascuna da valori del moltiplicatore del carico λ compresi in intervalli contigui.

Con comportamento elasto-fragile sia a trazione che a compressione, gli intervalli sono:

$$\begin{aligned} 0 &< \lambda < \lambda_1 \\ \lambda_1 &< \lambda < \lambda_2 \\ \lambda_2 &< \lambda < \lambda_3 \end{aligned}$$

dove λ_1 , λ_2 , λ_3 , sono i valori del moltiplicatore del carico cui corrispondono rispettivamente il raggiungimento della tensione:

- limite a trazione al bordo teso dei conci 1;
- limite a trazione al bordo teso del concio 2;
- limite di rottura al bordo compresso dei conci 1;

limite di rottura al bordo compresso del concio 2.

La successione dei λ è determinata dalla scelta di n e dalla geometria della struttura e dei carichi.

Le equazioni generali che reggono il problema in esame nella fase elastica non fessurata non presentano alcuna difficoltà di scrittura e pertanto non si ritiene necessario riportarle, mentre quelle valide in fase fessurata in ambedue i casi ma per $\lambda < \lambda_3$ ed opportunamente adimensionalizzate sono:

$$\begin{aligned} a_{11}\bar{N} + a_{12}\bar{M} &= b_1 \\ a_{21}\bar{N} + a_{22}\bar{M} &= b_2 \\ -a_{31}\bar{N} + a_{32}\bar{M} + b_3 &= \bar{\eta} \end{aligned} \quad (8)$$

I coefficienti b_i , a_{ij} funzioni delle fratture \bar{f}_1 , \bar{f}_2 dipendono dalla fase di carico e valgono rispettivamente

$$a_{11} = \frac{3}{2(1-\bar{f}_1)} + \frac{2}{(1-\bar{f}_2)} + \frac{6(\bar{f}_1 + \bar{f}_2)^2}{(1-\bar{f}_2)^3}$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{12\bar{f}_1 + 12\bar{f}_2}{(1-\bar{f}_2)^3}$$

$$a_{22} = \frac{24}{(1-\bar{f}_2)^3} + \frac{18}{(1-\bar{f}_1)^3}$$

$$a_{32} = \frac{4}{(1-\bar{f}_2)^3} + \frac{1}{(1-\bar{f}_1)^3}$$

$$; a_{31} = \frac{b_1}{6}$$

$$b_1 = \frac{12\bar{f}_1 + 12\bar{f}_2}{(1-\bar{f}_1)^3}$$

$$; b_2 = \frac{24}{(1-\bar{f}_2)^3}$$

$$; b_3 = \frac{b_2}{12}$$

Le prime due impongono il rispetto delle condizioni di vincolo della sezione di simmetria nella quale agiscono le caratteristiche di sollecitazione \bar{N} ed \bar{M} , mentre la terza fornisce il valore dell'abbassamento del baricentro della sezione di simmetria.

Il valore limite $\lambda = \lambda_1$ è dedotto dalla condizione (9) scritta nella sezione 1 in presenza di fratture ponendo $\bar{f}_1 = 0$.

$$(1-\bar{f}_1)^2 = -\bar{N}(1-\bar{f}_1) + 6\bar{M} \quad (9)$$

mentre il valore limite $\lambda = \lambda_2$ è dedotto dalla condizione (10) scritta nella sezione 2 in presenza di fratture ponendo \bar{f}_1 o $\bar{f}_2 = 0$

$$(1-\bar{f}_2)^2 = -\bar{N}(1+2\bar{f}_2+3\bar{f}_1) - 6\bar{M} + 6 \quad (10)$$

Il primo tratto del percorso di equilibrio, riprodotto in figura 3b con la scelta del valore di $\bar{b} = 1/4$, rappresenta la relazione $\lambda, \bar{\eta}$ in fase elastica non fratturata. Il valore limite di $\bar{\eta}$ in fase elastica è:

$$\bar{\eta} = \frac{Ph^2 s}{3EJ} \quad (11)$$

Il secondo tratto del percorso di equilibrio rappresenta la relazione $\lambda, \bar{\eta}$ in fase elastica e fratturata nelle sezioni 1; tale tratto è asintotico alla retta r_1 passante per l'origine che rappresenta il percorso d'equilibrio della struttura con resistenza a trazione nulla nelle sezioni 1. Il minimo di $\lambda = \lambda(\bar{\eta})$ può trovarsi a destra o a sinistra del punto di inizio della presente fase; nel secondo caso il tratto viene

effettivamente percorso al crescere del parametro λ , mentre nel primo caso si assiste al fenomeno tipico dello snap-through per la nascita e propagazione istantanea delle fratture f_1 . Al valore $\lambda = \lambda_1$ corrispondono dunque due valori distinti di $\bar{\eta}$ per l'improvviso cambiamento della struttura reagente che da trave diviene arco.

Per $\lambda = \lambda_2$ si innescano le fratture agli incastri 2; il percorso di equilibrio cambia bruscamente o con continuità passando al ramo successivo, asintotico alla retta r_2 passante anch'essa per l'origine. Valgono qui le stesse considerazioni fatte per il ramo precedente. La retta r_2 rappresenta il percorso di equilibrio della struttura nell'ipotesi di resistenza a trazione nulla nelle sezioni 1 e 2 e resistenza a compressione illimitata. Le equazioni delle rette r_1 e r_2 non sono di immediata determinazione e pertanto tali rette sono state tracciate mediante un procedimento numerico. Il raggiungimento della tensione limite di rottura a compressione è espresso dalla condizione:

$$n(1-\bar{f}_1)^2 = \bar{N}(1-\bar{f}_1) + 6\bar{M} \quad (12)$$

scritta per le sezioni 1, che permette di individuare il valore $\lambda = \lambda_3$. L'evoluzione della struttura reagente per $\lambda > \lambda_3$ dipende dalla scelta tra comportamento elasto-fragile ed elasto-plastico a compressione.

Nell'ipotesi di comportamento elasto-fragile anche a compressione valgono ancora le equazioni (8) salvo ovviamente le espressioni dei coefficienti b_i , a_{ij} . In questo caso il percorso di equilibrio della struttura per $\lambda > \lambda_3$ descrive il ramo CE con asintoto $\lambda = 0$. E' caratteristico in questa fase il comportamento delle fratture \bar{f}_1 e \bar{f}_2 ; infatti mentre \bar{f}_2 cresce fino a raggiungere il valore limite $\bar{f}_2 = 1$, la frattura \bar{f}_1 si richiude via via che viene espulso il materiale nelle zone in cui viene raggiunta la tensione limite a compressione. Questo fenomeno è stato colto in tutte le prove sperimentali effettuate e di cui viene mostrato un episodio (fig.4).

E' significativa l'evoluzione della struttura che passa dallo schema di trave incastrata allo schema ad arco; la situazione limite fornisce, in armonia con la teoria della plasticità, $\bar{M} = 0$ in tutte le sezioni, così da individuare una sorta di struttura di uniforme resistenza. La convalida sperimentale delle considerazioni svolte è stata ottenuta mediante prove eseguite nel Laboratorio annesso al Dipartimento di Costruzioni dell'Università di Firenze. Il percorso di equilibrio rappresentato in figura 4 ed ottenuto per via sperimentale su di un travetto campione incastrato agli estremi, costituito da materiale scarsamente reagente a trazione, mostra con evidenza la presenza di fenomeni di snap-through perfettamente corrispondenti a quelli denunciati dal percorso di equilibrio ottenuto mediante simulazione analitica. Ai successivi incrementi del moltiplicatore del carico corrispondono tratti del diagramma che possono essere assimilati a rette passanti per l'origine, fino al punto 3 in corrispondenza del quale si ha la disgregazione del lembo superiore compresso. La prima frattura tende a richiudersi, dando luogo ad un arco con freccia decrescente; le tensioni di compressione crescono rapidamente fino al collasso totale in corrispondenza del punto 4.

Modello con comportamento elasto softening

Se il comportamento a collasso del materiale di cui è costituita la struttura è caratterizzato dalla localizzazione, in una zona limitata, del comportamento non lineare, si può fare riferimento, come è ben noto, al

modello coesivo per il quale, nella zona di processo, il materiale, sebbene danneggiato, è ancora in grado di trasmettere sforzi. Si consideri dunque ora la stessa struttura analizzata precedentemente ma nell'ipotesi che il comportamento del materiale sia elasto-softening a trazione ed elasto-fragile a compressione. Qui ci si pone come obiettivo non solo di controllare l'evolvere della struttura reagente al crescere del fattore di carico λ ma di valutare, mediante la simulazione analitica del fenomeno strutturale, l'influenza del comportamento assunto sul diagramma carico spostamento della struttura, onde quantizzare il contributo del comportamento softening nei confronti sia del carico ultimo che dello spostamento ultimo e quindi dell'energia dissipata.

Ancora una volta la formulazione analitica del problema avviene per fasi contraddistinte dal raggiungimento della tensione limite in corrispondenza delle sezioni nelle quali si è supposta concentrata l'elasticità del sistema, ed il processo viene seguito di fase in fase simulando un procedimento a deformazione guidata analogamente a quanto fatto precedentemente.

Con l'ipotesi di comportamento elasto-softening a trazione ed elasto-fragile in compressione le fasi di comportamento della struttura restano individuate dai valori del moltiplicatore del carico λ compresi nei seguenti intervalli contigui:

$$\begin{aligned} 0 &\ll \lambda \ll \lambda_1 \\ \lambda_1 &\ll \lambda \ll \lambda_2 \\ \lambda_2 &\ll \lambda \ll \lambda_3 \\ \lambda_3 &\ll \lambda \ll \lambda_4 \end{aligned}$$

Anche qui la successione dei λ dipende dalla scelta di n e dalla geometria della struttura e dei carichi. L'ampiezza della zona di processo è stata assunta pari a $0,2b$ e $0,2(b-f)$. Nella prima fase, quella elastica lineare, le equazioni risultano identiche a quelle che descrivono il comportamento della struttura con ipotesi di comportamento elasto-fragile.

In questo caso alla fase elastica ne segue una caratterizzata dal propagarsi della zona di processo in corrispondenza dei bordi inferiori dei conci 1, fino al raggiungimento della tensione limite a trazione σ_0 al bordo superiore del concio 2. Al termine di questa fase i valori del moltiplicatore del carico e del corrispondente spostamento sono:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= 1,456 b \\ \bar{\eta}_2 &= 1,836 \bar{b} \end{aligned} \tag{13}$$

Se si incrementa ulteriormente lo spostamento η , ha inizio la formazione della zona di processo anche nella parte superiore del concio 2 fino ad arrivare, nei conci 1, ad una zona di processo pari a $0,2b$, cui corrispondono:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= 1,480 \bar{b} \\ \bar{\eta}_3 &= 2,000 \bar{b} \end{aligned} \tag{14}$$

Procedendo oltre, sempre simulando un procedimento a deformazione guidata, con incrementi di spostamento si perviene ad una situazione nella quale nel concio 2 l'altezza della zona di processo è pari a $0,2b$ e nei conci 1 ha

inizio la frattura per superamento del valore critico della discontinuità di spostamento; in tale circostanza si ha:

$$\begin{aligned}\lambda_4 &= 1,855 \bar{b} \\ \bar{\eta}_4 &= 3,316 \bar{b}\end{aligned}\tag{15}$$

Ma lo spostamento impresso può ancora crescere con ulteriore incremento del moltiplicatore del carico fino a che, al bordo superiore dei conci 1 e al bordo inferiore del concio 2, non viene attinto il valore della tensione ultima a compressione $n\sigma_0$ cui corrispondono i valori:

$$\begin{aligned}\lambda_5 &= 6,266 \bar{b} \\ \bar{\eta}_5 &= 14,396 \bar{b}\end{aligned}\tag{16}$$

Arrivati in questa situazione il moltiplicatore del carico λ decresce per ulteriori incrementi di spostamento avendo la struttura esaurito la propria capacità portante. Ritenendo inessenziale in questa sede considerare un comportamento softening del materiale anche a compressione, e dunque nell'ipotesi di comportamento fragile, il percorso d'equilibrio, dopo quest'ultima fase, presenta le stesse caratteristiche di quello descritto a proposito del comportamento elasto-fragile precedentemente discusso. Nella figura 3 il percorso di equilibrio relativo all'ipotesi di comportamento elasto-softening a trazione ed elasto-fragile a compressione è rappresentato con una linea a tratto e punto contrassegnata dalla lettera a.

Osservazioni conclusive

Il confronto tra i percorsi di equilibrio relativi al caso teorico e a quello sperimentale, rivela come i fenomeni di snap-through si manifestino per entrambi i casi per valori del moltiplicatore del carico sufficientemente lontani dal valore ultimo. Inoltre anche nel percorso di equilibrio ottenuto per via sperimentale è possibile individuare le rette r_1 ed r_2 che rappresentano i percorsi di equilibrio della stessa struttura ma con resistenza a trazione nulla. Queste circostanze permettono di attribuire scarsa influenza alla resistenza a trazione sul comportamento globale della struttura. D'altronde se si valuta il lavoro di deformazione per la struttura arco-trave nel caso di resistenza nulla a trazione e nel caso di scarsa resistenza, in quest'ultima ipotesi esso risulta superiore del 3%.

Se si fanno le stesse valutazioni nel caso che si assuma un comportamento elasto-fragile ed elasto-softening, sempre per la stessa struttura si ottiene che, nella seconda ipotesi l'energia dissipata, nel tratto del percorso di equilibrio precedente il raggiungimento del valore limite della tensione a compressione $n\sigma_0$, risulta essere maggiore del 1,2% rispetto a quella che compete al primo comportamento ipotizzato. Anche il moltiplicatore del carico subisce un incremento del 1% mentre il valore dello spostamento ultimo non risente sensibilmente del comportamento softening (fig.3).

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bazant, Z.P. "Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete." J. Engrg. Mech. Div., ASCE, vol.102, n.2, 1976, pp.331-344.
- [2] Dougill, J.W. "On stable progressively fracturing solids." J. of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), vol.27, 1976, pp.423-437.
- [3] Carpinteri, A. "Static and energetic fracture parameters for rocks and concretes." Mater. Struct., RILEM, vol.14, 1981, pp.151-162.
- [4] Di Leo, A. "Osservazioni sulla valutazione dei parametri statici ed energetici di tenacità alla frattura dei calcestruzzi mediante prove di flessione con caricamento centrale su provini prismatici intagliati." IX Convegno Nazionale dell'Associazione Italiana per l'Analisi della Sollecitazione, Grado, 23-26 Settembre 1981.
- [5] Carpinteri, A. "Application of of fracture mechanics to concrete structures." J. Struct. Div., ASCE, vol.108, n.4, 1982, pp.833-848.
- [6] Shaha, S.P. "Dependence of concrete fracture toughness on specimen geometry and on composition." in Fracture mechanics of concrete: Material characterization and testing, A. Carpinteri and A.R. Ingraffea, eds., Martinus Nijhoff Publishers, 1984, pp.111-135.
- [7] Briccoli Bati, S., Di Pasquale, S., Paradiso, M., Tempesta, G., Tonietti, U. "Confronto tra esperimento e modello teorico per un problema di strutture in muratura." in Unilateral problems in structural analysis-2, Proc. of the second meeting on unilateral problems in structural analysis CISM, 1985, pp.61-79.
- [8] Carpinteri, A., Carpinteri, A. "Softening and fracturing process in masonry arches" Proc. of the 7th IBMAC, Melbourne, Australia, 17-20 Febbraio 1985, pp.502-510.
- [9] Hillerborg, A. "Results of three comparative test series for determining the fracture energy G_f of concrete." Mater. Struct., RILEM, vol.18, 1985, pp.407-413.
- [10] Hillerborg, A. "The theoretical basis of a method to determine the fracture energy G_f of concrete." Mater. Struct., RILEM, vol.106, n.18, 1985, pp.291-296.
- [11] Ingraffea, A.R., e Saouma, V. "Numerical modelling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete." in Fracture mechanics of concrete: structural application and numerical calculation, G.C. Sih and A. Di Tommaso, eds., Martinus Nijhoff Publishers, 1985, pp.171-225.
- [12] Jenq, Y.S., e Shaha, S.P. "Two parameter fracture model for concrete." J. Engrg. Mech., ASCE, vol.111, n.10, 1985, pp.1227-1241.
- [13] Li, V.C., e Liang, E. "Fracture processes in concrete and fiber-reinforced cementitious composites." J. Engrg. Mech., ASCE, vol.112, n.6, 1986, pp.566-586.
- [14] Ottosen, N.S. "Thermodynamic consequences of strain-softening in tension" J. Engrg. Mech. Div., ASCE, vol.112, n. 11, 1986.
- [15] Schreyer, H.L., Chen, Z. "One-dimensional softening with localization" J. Appl. Mech., vol.53, n.4, 1986, pp.791-797.
- [16] Cedolin, L., Dei Poli, S., e Iori, I. "Tensile behavior of concrete." J. Engrg. Mech., ASCE, vol.113, n.3, 1987, pp.431-449.
- [17] Biolzi, L. "Influence of slenderness and size-scale on the global behaviour of concrete slabs." Atti del IX Congresso Nazionale AIMETA, Bari, 4-7 Ottobre 1988, pp.111-114.
- [18] Carpinteri, A. "Softening and snap-back instability in cohesive solids" Int. J. for numerical methods in engrg., vol.28, 1989, pp.1521-1537.

- [19] Carpinteri, A. "Decrease of apparent tensile and bending strength with specimen size: two different explanations based on fracture mechanics." *Int. J. Solids Structures*, vol.25, n.4, 1989, pp.407-429.
- [20] Carpinteri, A. "Size effect on strength, toughness, and ductility." *J. Engrg. Mech.*, ASCE, vol.115, n.7, 1989, pp.1375-1392.
- [21] Carpinteri, A. "Cusp catastrophe interpretation of fracture instability." *J. Mech. Phys. Solids*, vol.37, n.5, 1989, pp.567-582.
- [22] Chuang, T.J. e Mai, Y.W. "Flexural behavior of strain-softening solids." *Int. J. Solids Structures*, vol.25, n.12, 1989, pp.1427-1443.
- [23] Iori, I. "Sull'instabilità interna di elementi in conglomerato." in *Meccanica dei materiali e delle strutture. Atti del Convegno Nazionale in ricordo di R. Baldacci e M. Capurso, Roma 25-27 Ottobre, 1989*, pp.375-385.

fig.3

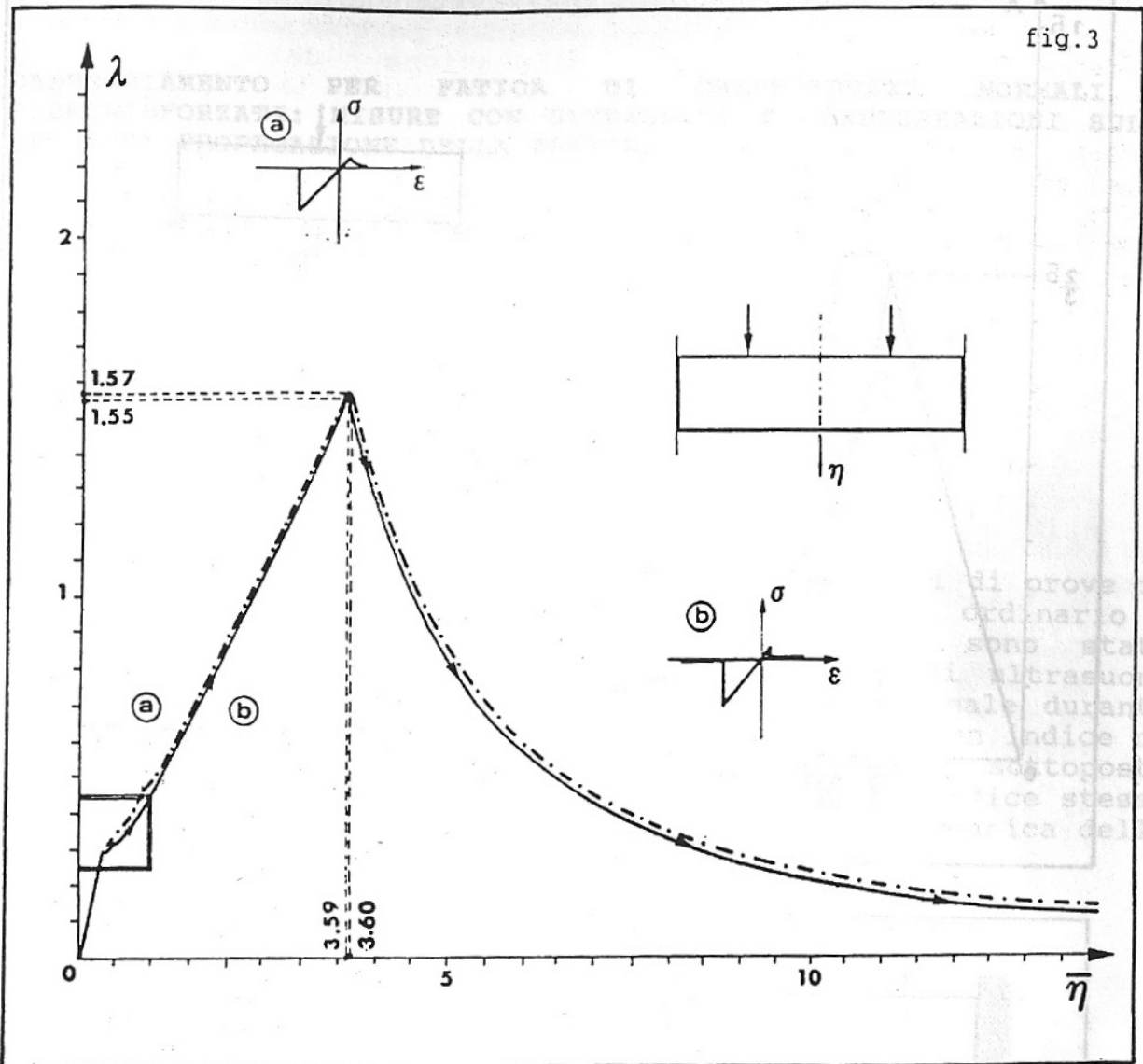


fig.4

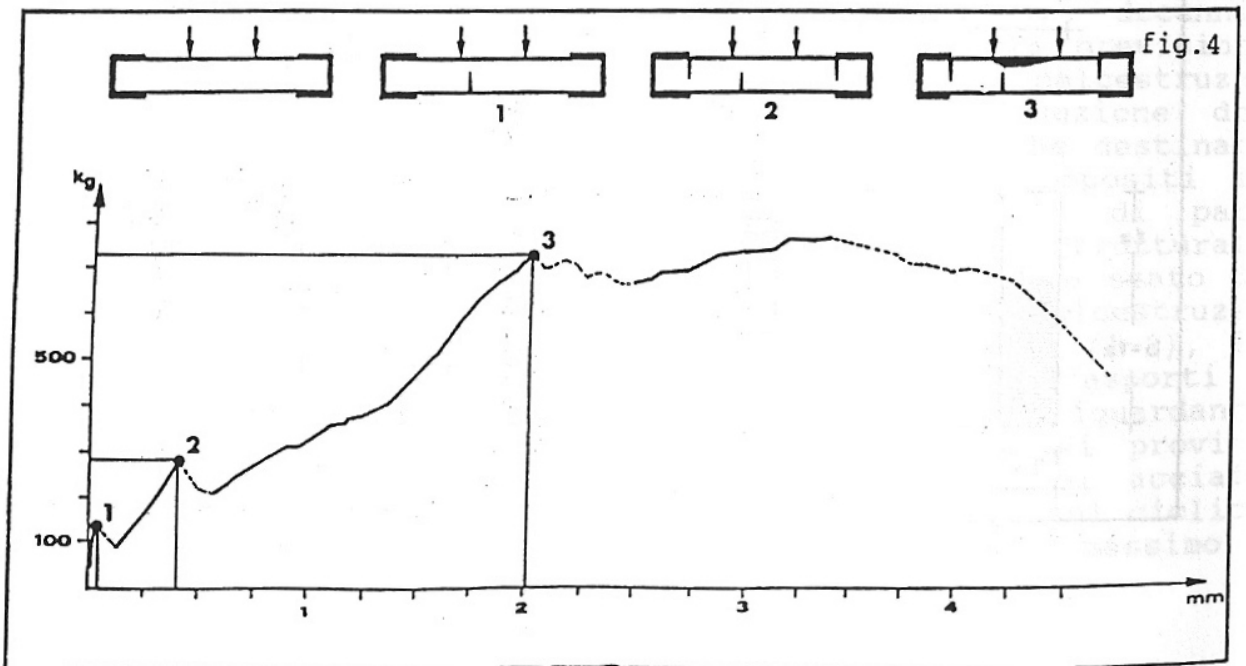


fig.1

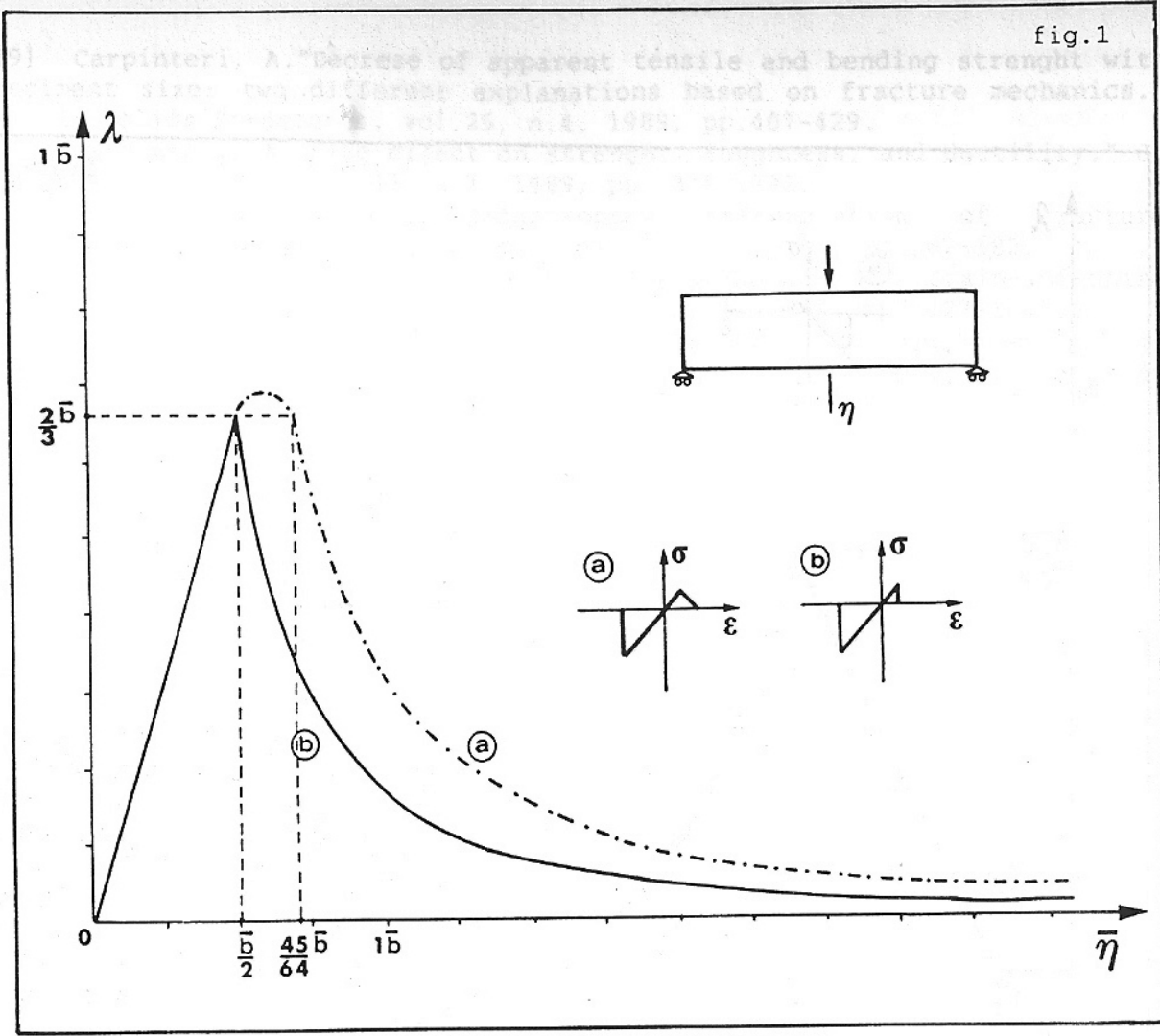


fig.2

