

# Sommario

---

Prefazione .....	9
Capitolo 1: Introduzione.....	13
Capitolo 2: Il metodo riflettometrico .....	23
2.1 L'approccio numerico: la risposta impulsiva .....	27
2.2 Campionamento dei segnali.....	34
2.2.1 Il campionamento e la ricostruzione.....	35
2.3 Il modello teorico .....	43
2.4 L'elemento radiante .....	49
2.5 Test di laboratorio e prove <i>in situ</i> .....	55
2.5.1 Primo test in laboratorio .....	56
2.5.2 Secondo test di laboratorio.....	61
2.5.3 Prima prova in campo, il cantiere .....	67
Capitolo 3: Il metodo radar FMCW .....	73
3.1 Introduzione .....	75
3.2 Principio di funzionamento del Radar FMCW .....	76
3.3 Leakage Spettrale .....	84
3.4 Le tecniche di super-risoluzione.....	89
3.4.1 Analisi spettrale Bayesiana.....	90
3.5 Primi test in laboratorio .....	99
Capitolo 4: Conclusioni.....	103
Appendice I: Richiami di elettromagnetismo.....	107
I.I Equazioni del campo in forma differenziale.....	109
I.I.I Equazioni costitutive .....	110
I.I.II Rappresentazione nel dominio delle frequenze .....	111
I.I.III Energia e potenza nel campo EM.....	113
I.I.IV Propagazione del campo elettromagnetico: onde elettromagnetiche.....	115
I.I.V Riflessione e rifrazione delle onde EM.....	121
Appendice II: Interfaccia Software Matlab per l'elaborazione dati .....	127
Bibliografia .....	131



# Indice delle figure

---

Figura 1- Radargramma a 900 MHz.....	18
Figura 2 – Utilizzo del GPR in indagine strutturale.....	19
Figura 3 – Il Riflettometro a microonde.....	20
Figura 4 – Il sistema radar .....	21
Figura 5 – Modello semplificato del problema .....	27
Figura 6 – Sistema LTI.....	28
Figura 7 – Modello teorico .....	44
Figura 8 – Caso slab di aria ( $\epsilon_{\text{slab}}=1$ ).....	46
Figura 9 – Slab di materiale ad alto contenuto di umidità ( $\epsilon_{\text{slab}}=25.0-j0.5$ ) .....	47
Figura 10 – WR-160.....	49
Figura 11 – WR-160 in sezione.....	50
Figura 12 – WR-160, frequenza di cut-off.....	52
Figura 13 – WR-160, impedenza caratteristica .....	54
Figura 14 - Andamento impedenze caratteristiche con $Z_{\text{DRG}}$ impedenza della guida WR-160 .....	55
Figura 15 – Campione trave con tasca .....	56
Figura 16 – Slice campione trave superficie A.....	58
Figura 17 – Dettagli strutturali della trave .....	59
Figura 18 - Slice campione trave superficie B .....	60
Figura 19 – Campione trave con decadimento strutturale .....	62
Figura 20 – Sezione trave .....	63
Figura 21 – Sezione Trave.....	63
Figura 22 – Sezione trave .....	63
Figura 23 – Metodo resistografico .....	64
Figura 24 – Risultato della misura con resistografo .....	65
Figura 25 – Risultato della misura .....	66
Figura 26 – Ipotesi (dei restauratori) sulla stratificazione della volta.....	68
Figura 27- Pietro da Cortona, “Allegoria della quiete” con riferimenti circa le dimensioni	68
Figura 28 – Risultati della misura .....	70
Figura 29 – Entità del distacco misurata con endoscopio.....	71
Figura 30- SiversIMA RS3400X .....	76
Figura 31 - FMCW .....	77
Figura 32 - Modulazione lineare della frequenza.....	78
Figura 33 - Segnale tempo-frequenza trasmesso .....	80
Figura 34 - Segnale tempo-frequenza trasmesso e ricevuto .....	81
Figura 35-Esempio finestrazione.....	88
Figura 36-Finestrazione corretta, periodo di osservazione multiplo intero del periodo del segnale .....	88
Figura 37- Finestrazione non corretta, periodo di osservazione non multiplo intero del periodo del segnale.....	89

Figura 38 – Test lastra piana metallica .....	100
Figura 39 – Test tavola legno a contatto con la lastra metallica .....	101
Figura 40 – Test sui 3 mezzi stratificati: tavola in legno, aria, lastra metallica.....	102
Figura 41 – Vettori E ed H di un’onda piana definita dal vettore d’onda k .....	118
Figura 42 – Andamento del campo elettrico di un’onda piana che si propaga lungo l’asse z visualizzata in due istanti successivi $t_1$ e $t_1+\Delta t$ .....	120
Figura 43 – Riflessione e rifrazione all’interfaccia fra due dielettrici con caratteristiche $(\epsilon_1, \mu_1)$ e $(\epsilon_2, \mu_2)$ .....	122
Figura 44 – Interfaccia Software elaborazione dati .....	129

# Ringraziamenti

---



Grazie ai mie genitori, Chiara, Omar e Matilde per l'enorme supporto dimostrato anche durante questi anni di dottorato.

Grazie anche alla mia seconda famiglia Lorella, Francesco, Marco e Roberta per l'interesse e la fiducia dimostrata.

Grazie al Prof. Carlo Carobbi per avermi seguito come tutor durante il dottorato.

Grazie all'Ing. Marco Bini per essere stato sempre disponibile ad aiutarmi durante l'attività di studio.

Sicuramente non posso mancare di ringraziare l'Ing. Cristiano Riminesi con il quale ho condiviso gran parte del lavoro svolto durante l'attività di dottorato e nel quale ho trovato più che un collega un amico.

L'ultimo grazie, il più importante, è rivolto a Cocca per come è sempre stata al mio fianco, pronta a spronarmi durante questi anni di dottorato non sempre facili...è sempre più vero che con te mi sento il doppio che da me!





# Prefazione

---



Il presente elaborato di tesi nasce a seguito dell'attività di ricerca svolta durante il dottorato presso l'IFAC-CNR, Istituto di Fisica Applicata "Nello Carrara" del Consiglio Nazionale delle Ricerche ed in collaborazione con l'ICVBC – CNR (Istituto per la Conservazione e la Valorizzazione dei Beni Culturali del Consiglio Nazionale delle Ricerche).

L'obiettivo dell'attività di ricerca è stato quello di studiare e sviluppare nuovi metodi di indagine non distruttiva e non invasiva a microonde di strutture architettoniche con particolare attenzione all'ambito della conservazione dei Beni Culturali. In particolare l'attenzione è stata rivolta allo studio di sistemi in grado di investigare le strutture architettoniche al fine di rilevare alterazioni o discontinuità dei materiali quali ad esempio cavità di aria, inclusioni di diverso materiale o aree ad elevato contenuto di umidità.

A seguito del capitolo introduttivo (*Capitolo 1 - Introduzione*), nel quale verrà trattato in maniera approfondita l'obiettivo ed il contesto di riferimento, passeremo alla descrizione del metodo riflettometrico (*Capitolo 2 – Il metodo riflettometrico*). In questo capitolo verrà inizialmente esposta la teoria di base del metodo riflettometrico con particolare enfasi sull'approccio numerico basato sulla risposta impulsiva; passeremo in seguito alla descrizione delle prove eseguite sia su campioni di laboratorio che in contesti reali per concludere con la presentazione dei risultati ottenuti. Nel *Capitolo 3 – Il radar FMCW* verranno presentati i risultati preliminari ottenuti a seguito dello studio e dell'applicazione di un ulteriore metodo di indagine basato appunto sull'utilizzo di radar FMCW. In questo capitolo verrà fatto particolare riferimento allo studio di un metodo di super risoluzione basato su di un approccio statistico bayesiano. Nel *Capitolo 4 (Capitolo 4 – Conclusioni)* infine verranno presentate le conclusioni.



# Capitolo 1: Introduzione

---



Il presente elaborato di tesi nasce dall'attività di ricerca svolta durante il dottorato presso l'IFAC – CNR (Istituto di Fisica Applicata “Nello Carrara” del Consiglio Nazionale delle Ricerche) ed in collaborazione con l'ICVBC – CNR (Istituto per la Conservazione e la Valorizzazione dei Beni Culturali del Consiglio Nazionale delle Ricerche). L'attività di ricerca è stata orientata allo studio di metodi a microonde per l'indagine non distruttiva di strutture architettoniche.

Per metodi di indagine non distruttiva si intendono tutte quelle pratiche atte a reperire informazioni riguardanti la struttura dei materiali, come ad esempio la presenza di eventuali anomalie o difetti, senza alterare, ne tanto meno distruggere, il campione sotto esame.

Numerose tecniche di indagine non distruttiva (NDT) sono impiegate nell'ambito dell'industria civile e manifatturiera. Il requisito di assenza di “interferenza” con il materiale da investigare è spesso essenziale, nell'ambito della conservazione dei Beni Culturali, nella fase di diagnostica che stabilisce lo stato di conservazione del bene.

In ambito industriale i sistemi basati sulle NDT sono spesso impiegati nel controllo e nel monitoraggio di parametri chimico-fisici di materiali e/o prodotti direttamente correlati alla “qualità” ed affidabilità del prodotto stesso. Questo approccio consente di elevare lo standard di qualità del prodotto verificando, anche sulla totalità dei campioni, alcune caratteristiche qualitative rappresentative. Nel campo delle applicazioni civili trovano spesso impiego come strumento di indagine strutturale di opere edili quali edifici o infrastrutturali come ponti, gallerie, ecc.

Negli ultimi anni è cresciuto sempre più l'interesse per l'applicazione di tali metodologie di indagine anche nell'ambito della conservazione dei Beni Culturali in quanto un'efficace valutazione preventiva dello stato di conservazione del manufatto, qualsiasi esso sia, risulta di grande aiuto agli operatori del settore per meglio indirizzare successive e più approfondite indagini. Infatti, valutare preventivamente lo stato di un'opera d'arte, risulta molto vantaggioso per il conservatore o il restauratore il quale si trova ad avere a disposizione un certo numero di informazioni circa lo stato di “salute” dell'opera stessa e può quindi scegliere in maniera mirata quali interventi di manutenzione o restauro siano più

appropriati. Il settore della conservazione dei Beni Culturali sarà infatti quello a cui faremo riferimento nel proseguo dell'elaborato di tesi. Inoltre è chiaro più che mai quanto per questo settore sia importante l'aspetto non distruttivo del sistema di indagine oltre alla non invasività della misura.

Nel campo delle metodologie di indagine non distruttive molteplici sono gli approcci possibili ed attualmente disponibili sul mercato che si distinguono sostanzialmente in base alla tecnica utilizzata. Possiamo infatti individuare metodi che impiegano i *raggi X* piuttosto che *raggi gamma*, particolarmente utilizzati nel caso in cui l'obiettivo principale è rappresentato dalla conoscenza della morfologia interna, ma che possono avere un effetto di accumulo, essendo le radiazioni in gioco ionizzanti. Rispetto a queste tecniche "radiologiche" possiamo inoltre aggiungere che un ulteriore limite è rappresentato dalla difficoltà di movimentazione ed installazioni di tali strumentazioni ad esempio in cantiere dove è richiesto di operare su opere d'arte "accessibili" soltanto da impalcatura. Non dimentichiamoci poi che l'utilizzo di apparecchi che impiegano radiazioni ionizzanti, molto diffusi in ambienti ospedalieri, prevede precise procedure al fine di garantire l'incolumità degli operatori e di coloro che si trovano nelle vicinanze di questi apparecchi. Un'ulteriore metodologia di indagine non distruttiva è offerta dalle tecniche acustiche, come ad esempio l'utilizzo degli ultrasuoni, impiegate principalmente per un'investigazione dello spessore dei vari strati che possono comporre una struttura. La tecnica risulta particolarmente efficace nel caso di indagine medio profonda. Esistono poi i metodi elettrici e magnetici quali ad esempio le tecniche di misura delle correnti parassite oppure quelle che si basano sull'utilizzo delle microonde.

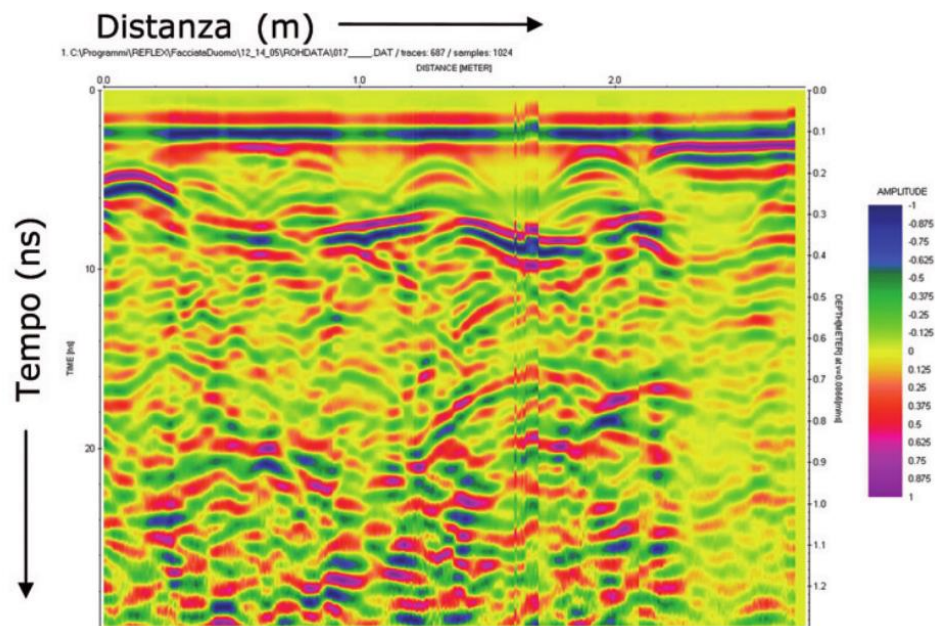
Rispetto alle tecniche non distruttive fino ad ora presentate, quelle a microonde hanno trovato sempre più applicazione perché offrono il vantaggio di essere completamente non invasive e, se adeguatamente progettate, di variare la profondità di indagine. Infine forniscono spesso una risposta selettiva rispetto all'informazione che più interessa conoscere della struttura o materiale sotto test.

Tra tutti i possibili strumenti di indagine non distruttiva a microonde quello che risulta più ampiamente utilizzato nell'ambito della conservazione dei Beni Culturali è il GPR (Ground Penetrating Radar). Il principio di funzionamento di questo



sistema radar può essere riassunto brevemente nel seguente modo. Il Ground Penetrating Radar trasmette impulsi elettromagnetici a determinata frequenza nel materiale o più in generale nella struttura da investigare. Tale impulso, una volta arrivato all'interno della struttura, continuerà a propagarsi fin quando non incontrerà una discontinuità legata alla superficie di separazione tra due materiali di caratteristiche elettromagnetiche diverse. Una volta che l'impulso avrà incontrato tale discontinuità, parte di questo verrà riflesso verso la superficie della struttura stessa per essere catturato dall'antenna in ricezione. A questo punto la parte del radar incaricata di elaborare il segnale si occuperà delle opportune operazioni di filtraggio ed amplificazione del segnale. L'operazione di misura generalmente prevede ripetuti cicli di trasmissione e ricezione spostando progressivamente, nel contempo, l'antenna lungo la direzione di scansione prescelta. Alla fine della misura sarà poi compito della parte software del radar riordinare opportunamente le tracce dei segnali ricevuti e rappresentare gli stessi sul radargramma.

Proprio dall'analisi delle capacità prestazionali del GPR è nata l'attività di ricerca, tesa allo studio e all'implementazione di nuove tecniche di indagine non distruttive basate sull'utilizzo delle microonde. Infatti, il GPR, negli ultimi anni ha trovato largo impiego nelle applicazioni di indagine non distruttiva, in particolar modo in ambito civile come strumento di supporto all'attività di indagini strutturali, in ambito archeologico per la ricognizione del terreno al fine di individuare strutture sepolte di interesse storico-artistico. Visti i risultati ottenuti in ambito civile è stato ben presto impiegato anche in ambito della conservazione dei Beni Culturali evidenziando però una non completa risposta alle esigenze degli operatori del settore i quali mostrano sempre più crescente la necessità di indagare strutture, siano esse opere d'arte oppure architettoniche, nei primi 10-20 cm dalla superficie con una risoluzione dell'ordine del centimetro. Infatti il GPR, dal punto di vista prestazionale, nelle versioni più diffuse in commercio, dispone di una risoluzione massima di circa 20-30 cm lasciando così non valutato il primo strato sub-superficiale come testimonia anche la figura riportata sotto che si riferisce al radargramma (900 MHz) di valutazione di integrità strutturale di una colonna del Duomo di Milano (Figura 1).



*Figura 1- Radargramma a 900 MHz*

Il radargramma appena mostrato, reperito in letteratura, si riferisce ad una campagna di misure che ha visto l'impiego di due moduli GPR commerciale modello SIR10B e SIR20 della Geophysical Survey System ed entrambi in grado di gestire sia una singola antenna (versione radar monostatico) oppure due antenne (versione radar bistatico). A tali moduli sono state collegate, in base alle diverse esigenze di investigazione, tre diverse antenne, una da 400 MHz, una da 900 MHz ed infine per le indagini più superficiali una operante a 1500 MHz. Con questo set-up di misura è stata resa possibile un'investigazione ad una profondità dichiarata variabile da 0.5 m a circa 3 m. Gli ordini di grandezza appena presentati per la profondità di investigazione risultano distanti da quelle che sono le esigenze di indagine sub-superficiale (fino a circa 20 cm di profondità con risoluzione fino al cm) nell'ambito della conservazione dei Beni Culturali.

Un altro limite che può presentare l'utilizzo di un sistema Ground Penetrating Radar è legato alle dimensioni della strumentazione necessaria che può rappresentare un ostacolo logistico se si è chiamati ad effettuare misure in cantieri in cui è richiesta la valutazione di opere accessibili soltanto attraverso impalcatura

(Figura 2).



*Figura 2 – Utilizzo del GPR in indagine strutturale*

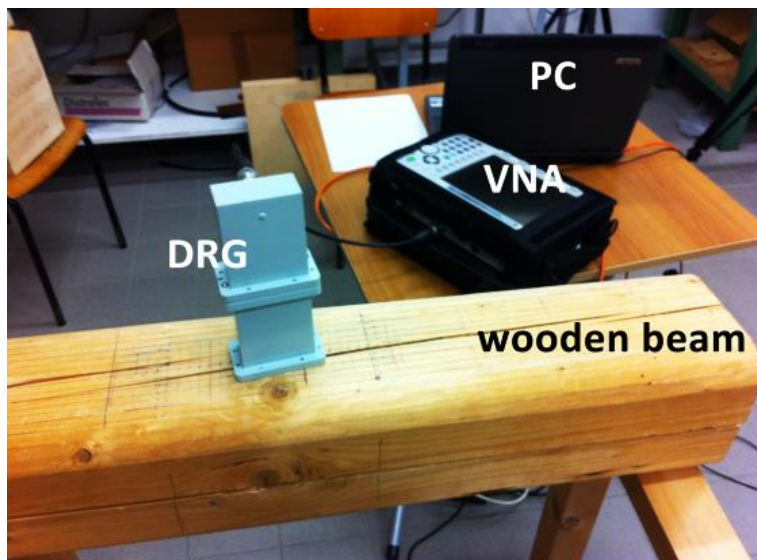
Da qui la necessità di studiare un nuovo sistema di indagine, basato sull'uso delle microonde, in grado di investigare i primi 20-30 cm della struttura sotto test, con una risoluzione di almeno 1 cm e che inoltre sia robusto e facilmente utilizzabile in cantiere. Inoltre il sistema dovrà essere in grado di lavorare a banda larga in modo da ottenere risultati significativi per i diversi valori di profondità e senza richiedere la sostituzione dell'elemento radiante in funzione della profondità di indagine stessa. La larghezza di banda è infatti legata alla risoluzione, tanto più è grande tanto più sarà possibile rilevare e risolvere dettagli e caratteristiche della struttura di piccole dimensioni.

Nel presente elaborato di tesi verranno presentati due possibili sistemi di indagine non distruttiva di cui uno basato sulla riflettometria a microonde, già abbondantemente in fase prototipale e con cui sono state effettuate campagne di misura sia su campioni di laboratorio che in cantiere su opere d'arte vere e proprie, ed un altro basato sull'utilizzo di radar FMCW (banda X) ancora però in fase di valutazione e studio preliminare.

Partendo dal primo dei due sistemi studiati ovvero il riflettometro a microonde

risulta utile a scopo introduttivo descrivere velocemente come si compone. Come riportato nella figura sotto (Figura 3) il nostro sistema di indagine non distruttiva si presenta come costituito di tre parti principali quali:

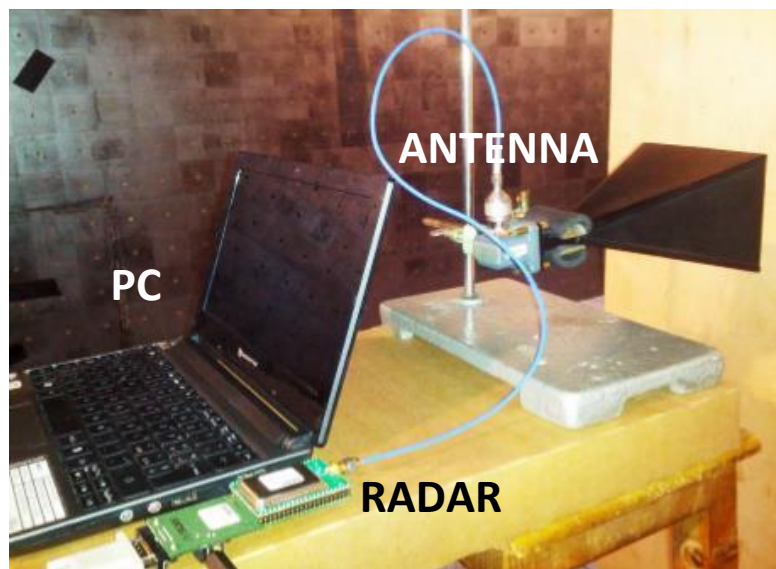
- un analizzatore di reti vettoriali (VNA, modello Anritsu S331E Site Master) operante nella gamme di frequenze 1-6 GHz
- un elemento radiante (Double Ridged Waveguide)
- un PC per il controllo da remoto dell'analizzatore di reti vettoriale e con tool in Matlab per l'elaborazione dei dati quasi in tempo reale



*Figura 3 – Il Riflettometro a microonde*

L'altro sistema, quello basato sull'utilizzo di un radar FMCW, si compone anche questo di tre parti principali (Figura 4):

- un modulo radar (SiversIMA RS3400X/00 con banda estesa da 9.250 GHz a 10.750 GHz)
- un'antenna (operante in banda X)
- un pc per il controllo remoto del modulo radar e l'elaborazione dei dati



*Figura 4 – Il sistema radar*



## Capitolo 2: Il metodo riflettometrico

---





Prima di entrare nel particolare della descrizione degli aspetti matematici ed elettromagnetici che sono alla base del sistema di indagine studiato e sviluppato durante l'attività di ricerca svolta durante il dottorato, conviene fornire una descrizione generale del sistema di indagine stesso. Questa vuole essere soltanto una veloce panoramica del sistema ed i concetti che qui verranno presentati saranno ripresi in maniera più approfondita nei paragrafi seguenti.

In particolare il sistema di indagine, come è facile intuire, si basa su di un approccio riflettometrico a microonde e si pone l'obiettivo, attraverso l'utilizzo delle onde elettromagnetiche ed in particolare delle microonde, di poter estrarre le informazioni richieste, rispetto alla struttura o al materiale da investigare, attraverso la valutazione del coefficiente di riflessione.

Sostanzialmente il sistema riflettometrico può essere visto come costituito da un trasmettitore/ricevitore ad onda continua operante nella banda 1-6 GHz il quale ha lo scopo di fornire il segnale all'elemento radiante, l'antenna. Concettualmente, alla luce di quanto appena detto, potremmo affermare che il riflettometro può essere assimilato ad un radar monostatico. Dal punto di vista operativo il segnale radiato dall'antenna raggiunge la superficie della struttura o del materiale da indagare e penetra al suo interno fino ad una profondità dipendente dalle caratteristiche elettromagnetiche proprie del materiale (ad esempio per un materiale omogeneo la profondità di investigazione è fortemente dipendente dal contenuto di umidità del materiale stesso). Proseguendo in questa sommaria descrizione del fenomeno elettromagnetico associato, possiamo aggiungere che il segnale incidente sulla superficie della struttura o del materiale verrà in parte trasmesso all'interno ma una parte di questo verrà riflesso e raccolto dalla stessa antenna. In seguito, attraverso l'analizzatore di reti vettoriale, sarà possibile misurare l'entità di questa riflessione attraverso il coefficiente di riflessione. Sarà poi l'operazione di anti-trasformazione dal dominio della frequenza a quella del tempo e la successiva deconvoluzione dello stesso coefficiente di riflessione con un segnale di riferimento a fornire la localizzazione delle eventuali anomalie del materiale o della struttura sotto indagine. L'operazione di misura di tale coefficiente di riflessione è eseguita scansionando tutta la superficie della struttura o materiale da indagare ponendo l'antenna punto per punto a contatto della

superficie stessa, quando possibile ed opportuno, oppure a distanza dalla stessa superficie tramite degli appositi spessimetri, ed in corrispondenza di tutte le posizioni assunte dall'antenna viene effettuata la misura del coefficiente di riflessione. A seguito dell'elaborazione dei dati, eseguita attraverso un tool in linguaggio Matlab, i risultati potranno essere presentati come immagini in falsi colori relativi a sezioni trasversali corrispondenti alla direzione di scansione. Il sistema studiato e sviluppato offre la possibilità di investigare le strutture con una risoluzione di circa 1 cm e fino ad una profondità variabile, a seconda delle caratteristiche dielettriche del materiale che costituisce la struttura stessa, compresa tra 20 e 30 cm.

Come si può capire da questa breve descrizione, la tecnica a cui facciamo riferimento, vista la gamma di frequenze utilizzata ed il modo di operare, risulta sicuramente non distruttiva. Inoltre, la possibilità di poter variare la distanza tra l'elemento radiante e la superficie del materiale o struttura sotto test permette di eseguire misure non a contatto evidenziando quindi una non invasività della tecnica.

I possibili limiti di una tecnica di questo tipo sono legati alla difficoltà di isolare l'informazione utile proveniente dalla struttura investigata, rappresentata appunto dal coefficiente di riflessione, dal resto dei contributi di disturbo dovuti al sistema di misura quali il trasmettitore (VNA) e l'elemento radiante. In altre parole si potrebbe pensare che ogni elemento che compone la "catena di ricezione-trasmissione" del sistema, lasci al passaggio del segnale utile riflesso una sorta di "firma" legata alla propria risposta impulsiva, con il risultato che il segnale ricevuto risulta alterato e non facilmente interpretabile. Il segnale ricevuto utile può infatti contenere informazioni non attribuibili alla struttura sotto test e che rischiano di mascherare alcuni particolari utili ed interessanti relativi alla struttura stessa. Si intuisce quindi la necessità ed il vantaggio di introdurre tecniche numeriche di isolamento dell'informazione utili al fine di migliorare le capacità investigative e descrittive del sistema.

## 2.1 L'approccio numerico: la risposta impulsiva

In questa parte dell'elaborato vogliamo fornire una panoramica dell'approccio utilizzato nel sistema di indagine a microonde presentato. L'idea di base è quella di riuscire a caratterizzare il materiale da investigare attraverso lo studio della sua risposta impulsiva.

Iniziamo dunque con il fornire un modello approssimato del problema che affronteremo. Come mostrato in Figura 5, abbiamo un elemento radiante, attraverso il quale il segnale generato dal trasmettitore (VNA) raggiunge la struttura da investigare; il segnale, una volta raggiunta la struttura, verrà in parte riflesso. Attraverso lo studio del segnale riflesso (in modo particolare del coefficiente di riflessione misurato dal VNA) è possibile estrarre informazioni circa la natura e le caratteristiche della struttura.

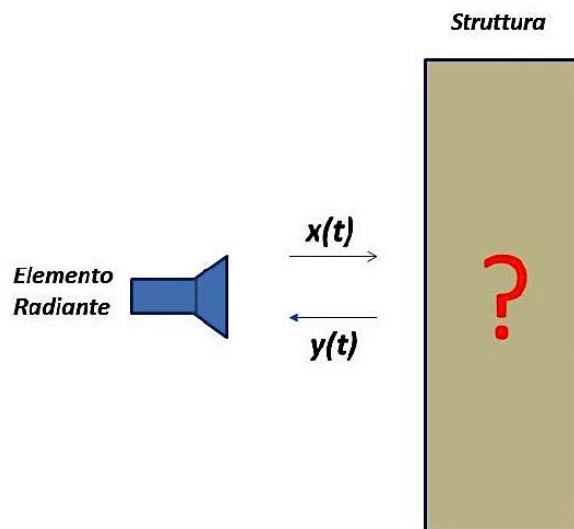
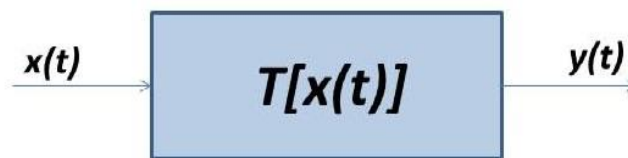


Figura 5 – Modello semplificato del problema

Facendo riferimento al dominio del tempo,  $x(t)$  rappresenta il segnale trasmesso ed  $y(t)$  il segnale ricevuto. Lo studio dell'interazione tra segnale trasmesso,  $x(t)$  e segnale ricevuto  $y(t)$ , può essere caratterizzato considerando e studiando il modello appena presentato come un sistema lineare tempo invariante (LTI). Infatti, senza alcuna perdita di generalità, possiamo ritenere la struttura sotto indagine, almeno nel breve periodo *tempo invariante* (le caratteristiche fisiche e chimiche

rimangono sicuramente costanti durante le misurazioni) e contestualmente *lineare*. Al fine di una migliore comprensione dei concetti che hanno suggerito di affrontare il problema elettromagnetico dei mezzi stratificati con un approccio di questo tipo può essere utile richiamare alcuni aspetti base dell'elaborazione dei segnali. Da un punto di vista matematico utilizzando questo approccio non facciamo altro che considerare il sistema come un *funzionale* (una trasformazione) che produce l'effetto di far corrispondere ad un segnale  $x(t)$  in ingresso un segnale univoco e determinato  $y(t)$  in uscita. Una rappresentazione grafica generalizzata del fenomeno matematico appena introdotto può essere rappresentata nel modo seguente:



*Figura 6 – Sistema LTI*

Il nostro obiettivo è rappresentato dunque dal determinare proprio il funzionale o trasformazione indicato nel grafico come  $T[x(t)]$ .

In altre parole, i sistemi lineari tempo invarianti, possono essere caratterizzati attraverso la loro *risposta impulsiva* definita come l'uscita del sistema in corrispondenza di un'eccitazione impulsiva  $x(t)=\delta(t)$ , convenzionalmente indicata con  $h(t)$ , ed esprimibile attraverso la seguente relazione  $h(t)=T[\delta(t)]$ . Vediamo dunque come sono tra loro legati i parametri appena introdotti per giungere ad un'espressione matematica della risposta impulsiva che renda poi più semplice la comprensione degli aspetti matematici a cui abbiamo fatto riferimento durante lo sviluppo del sistema di indagine.

Iniziamo dunque ricordando che nel caso di un segnale  $x(t)$  che ipotizziamo continuo ed integrabile nel tempo e sfruttando poi la *proprietà campionatrice* della funzione  $\delta(t)$ , possiamo definire la seguente relazione:

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt \quad (1)$$

eseguendo adesso un cambio di variabile di integrazione e sfruttando il fatto che la funzione  $\delta(t)$  è pari, possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\delta(\alpha - t_0)d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\delta(t_0 - \alpha)d\alpha = x(t_0) \quad (2)$$

A questo punto rinominando  $t$  il generico parametro  $t_0$  è possibile scrivere la seguente relazione la quale rappresenta la definizione di integrale di convoluzione tra il segnale  $x(t)$  e la funzione  $\delta(t)$ :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\delta(t - \alpha)d\alpha = x(t) \otimes \delta(t) \quad (3)$$

Per quanto appena riportato nell'ultima relazione scritta, possiamo formulare l'uscita  $y(t)$  del sistema considerato nel modo seguente:

$$y(t) = T[x(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\delta(t - \alpha)d\alpha\right] \quad (4)$$

Sfruttando poi la proprietà di linearità di cui godono il funzionale  $T[\cdot]$  e l'operatore integrale risulta possibile invertirne l'ordine di calcolo, aggiungendo poi che il termine  $x(\alpha)$  risulta costante rispetto al tempo  $t$ , possiamo ulteriormente

semplificare la relazione appena scritta nel modo seguente:

$$y(t) = T[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} T[x(\alpha)\delta(t - \alpha)]d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)T[\delta(t - \alpha)]d\alpha \quad (5)$$

Infine, per la proprietà di stazionarietà del sistema e dalla definizione di risposta impulsiva data sopra, arriviamo a stabilire la relazione fondamentale con cui è possibile definire il segnale di uscita del nostro sistema come il risultato dell'operazione di convoluzione del segnale in ingresso con la risposta impulsiva:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)h(t - \alpha)d\alpha = x(t) \otimes h(t) \quad (6)$$

Quanto appena scritto ci suggerisce, da un punto di vista pratico, che applicando in ingresso al sistema un segnale che approssima la funzione *delta di Dirac* è possibile risalire alla risposta impulsiva misurando il segnale di uscita. Precisiamo quindi che in realtà il segnale impulsivo  $\delta(t)$  può solo essere approssimato e nella migliore delle ipotesi quello che si riesce ad ottenere, per quanto stretto, è un impulso di durata non nulla e ampiezza limitata.

In molti casi poi, il nostro è uno di questi, si ha piuttosto a che fare con segnali in ingresso di natura armonica del tipo:

$$x(t) = Ae^{j2\pi ft} \quad (7)$$

Consideriamo che il segnale armonico appena introdotto, per semplicità, abbia ampiezza unitaria ( $A=1$ ); dunque possiamo scrivere l'uscita  $y(t)$  del sistema nel seguente modo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)x(t - \alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)e^{j2\pi f(t-\alpha)}d\alpha = e^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)e^{-j2\pi f\alpha}d\alpha \quad (8)$$

Quest'ultima relazione scritta afferma che, nel caso in cui in ingresso al sistema venga applicata un'oscillazione a frequenza fissa, allora è possibile esprimere l'uscita attraverso lo stesso segnale oscillatorio ma con ampiezza e fase variate di un fattore pari a quella che viene definita *risposta in frequenza* del sistema considerato. La risposta in frequenza del sistema è esprimibile attraverso il seguente rapporto valutato in  $x(t) = e^{j2\pi ft}$ :

$$H(f) = \frac{y(t)}{x(t)} \quad (9)$$

la variabile indipendente della risposta impulsiva è sempre il tempo a cui:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)e^{-j2\pi f\alpha}d\alpha \quad (10)$$

Ovvero la risposta in frequenza è il risultato della Trasformata di Fourier della risposta impulsiva.

Se indichiamo poi con  $X(f)$  ed  $Y(f)$  la Trasformata di Fourier rispettivamente del segnale di ingresso e di quello di uscita, possiamo allora definire la stessa risposta in frequenza come risultato della relazione tra convoluzione nel dominio del tempo e prodotto nel dominio della frequenza:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) \leftrightarrow Y(f) = X(f)H(f) \quad (11)$$

dunque è possibile ricavare la risposta in frequenza come il rapporto tra gli spettri del segnale di uscita  $Y(f)$  e del segnale di ingresso  $X(f)$ .

Riprendiamo adesso il nostro problema e cerchiamo di contestualizzare i concetti appena espressi al caso del riflettometro a microonde. Iniziamo subito con il considerare che l'analizzatore di reti (VNA), in trasmissione, esegue una "spazzolata" in frequenza (nella banda 1-6 GHz, di punti  $N=551$ ) a cui corrisponde un'eccitazione impulsiva nel dominio del tempo che indicheremo nel proseguo con  $x(t)$ . A rigore, vista la banda limitata del segnale, l'affermazione fatta rappresenta comunque un'approssimazione del caso teorico che invece fa corrispondere ad un'eccitazione impulsiva nel dominio del tempo uno spettro costante e infinito nel dominio della frequenza. Continuando a considerare le grandezze in gioco nel dominio del tempo, possiamo poi affermare che tale impulso  $x(t)$  verrà trasmesso verso l'elemento radiante di risposta impulsiva  $a(t)$  e da qui irradiato verso la struttura sotto test di risposta impulsiva  $\Gamma(t)$ . Una volta raggiunta la struttura, parte del segnale verrà riflesso (segnale riflesso  $y(t)$ ), anche in base alle caratteristiche geometriche e dielettriche di eventuali strati che compongono la struttura stessa, per poi incontrare nuovamente l'elemento radiante (di risposta impulsiva  $a(t)$ ) ed infine raggiungere l'analizzatore di reti vettoriale. Quanto appena affermato può essere espresso in maniera sintetica attraverso la seguente relazione:

$$y(t) = x(t) \otimes a(t) \otimes \Gamma(t) \otimes a(t) = x(t) \otimes h(t) \quad (12)$$

dove:

- $y(t)$  è il segnale ricevuto, o per meglio dire il segnale riflesso dalla struttura
- $x(t)$  è il segnale trasmesso dal VNA
- $\Gamma(t)$  è il coefficiente di riflessione, rappresentativo della risposta impulsiva della struttura ed è il parametro che a noi interessa
- $a(t)$  rappresenta la risposta impulsiva dell'elemento radiante
- $h(t) = a(t) \otimes \Gamma(t) \otimes a(t)$  rappresenta la funzione di trasferimento dell'intero sistema e che è peraltro il parametro effettivamente misurato dall'analizzatore di reti vettoriale (VNA)



Analogamente, nel dominio della frequenza, possiamo esprimere la stessa relazione come segue:

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (13)$$

Dove il parametro misurato dall'analizzatore di reti può quindi essere espresso dal seguente rapporto, rappresentativo della funzione di trasferimento del nostro sistema:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (14)$$

Dunque l'obiettivo principale nel nostro caso è proprio quello di ricavare la sola risposta impulsiva  $\Gamma(t)$  dei dati misurati attraverso un'operazione di deconvoluzione nel dominio del tempo.

La scelta di effettuare, nel nostro caso, l'operazione di deconvoluzione nel dominio del tempo rispetto a quello della frequenza non è stata semplice in quanto l'operatore di deconvoluzione presenta "insidie" in entrambi i domini. Ad esempio, operando nel dominio della frequenza può verificarsi che in corrispondenza di alcuni punti del coefficiente di riflessione misurato la funzione di trasferimento dell'elemento radiante possa assumere valori nulli con conseguente valore indefinito della risposta impulsiva della struttura. In questo caso dunque l'operazione di deconvoluzione porterebbe a dei dati del tutto insignificanti in quanto non presentano alcuna relazione con la risposta impulsiva della struttura che è invece quello che vogliamo. Principalmente è stato proprio questo aspetto, ovvero la possibilità di avere valori indefiniti per la risposta impulsiva della struttura che ci ha spinti verso l'approccio di deconvoluzione nel dominio del tempo che però, come già preannunciato, non è di immediata risoluzione.

L'operazione di deconvoluzione nel dominio del tempo risulta sempre un'equazione integrale, riportata di seguito:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(t - \alpha) a(\alpha) d\alpha \quad (15)$$

Oltre a questo, un'ulteriore difficoltà è data dal fatto che nel nostro caso ci troviamo ad operare senza alcuna conoscenza a priori di quella che è la risposta impulsiva  $a(t)$  ovvero quella legata all'elemento radiante. Per ovviare a tale problema abbiamo risolto l'equazione integrale per ricavare il parametro desiderato  $\Gamma(t)$  utilizzando, come risposta impulsiva dell'elemento radiante ( $a(t)$ ), il segnale misurato dal sistema riflettometrico nel caso di radiazione nello spazio libero o su porzioni di materiale omogeneo e con caratteristiche elettromagnetiche note. I vantaggi offerti dall'utilizzo di un tale metodo numerico si riscontrano facilmente in aumento di capacità risolutiva soprattutto per quanto riguarda i primissimi centimetri della struttura da investigare. In particolar modo, come risulterà più evidente nei paragrafi in cui vengono presentati i test applicativi del sistema, risulta evidente una più che sensibile diminuzione del “primo picco” ovvero quello relativo all'interfaccia che l'onda in propagazione trova al termine dell'elemento radiante o per meglio dire alla “bocca” dell'antenna.

## 2.2 Campionamento dei segnali

I paragrafi seguenti hanno lo scopo di ripercorrere, in modo sintetico, gli aspetti del campionamento e ricostruzione dei segnali con riferimento particolare al campionamento nel dominio della frequenza. I concetti di seguito trattati risulteranno utili nella trattazione dell'approccio matematico utilizzato nell'ambito del sistema di indagine a microonde presentato in questo elaborato. In particolare attraverso la trattazione seguente si farà chiarezza sul particolare aspetto del campionamento di segnali di durata limitata nel tempo ed a banda relativa stretta. Infatti entrambi risultano parametri rappresentativi, anche per il nostro segnale

utile ricevuto dalla cui elaborazione vogliamo ricavare le informazioni circa la composizione o più in generale lo stato di salute della struttura indagata.

### 2.2.1 Il campionamento e la ricostruzione

Le operazioni di campionamento e ricostruzione di un segnale sono disciplinate dal teorema di Shannon il quale può essere riassunto come segue.

Consideriamo un segnale  $s(t)$  di spettro limitato  $S(\omega)$  ovvero nullo al di fuori della banda di frequenze  $(-B, B)$ . Sotto tali ipotesi il segnale può essere ricostruito e quindi determinato a partire dalla conoscenza dei suoi valori in corrispondenza di una successione di istanti equispaziati, detti appunto campioni, separati tra di loro da un intervallo  $\tau \leq 1/2B$ .

Infatti, essendo  $S(\omega)=0$  per  $|\omega| > 2B$ , lo stesso spettro  $S(\omega)$  può essere sviluppato in serie di Fourier nella banda di pulsazioni  $(-2\pi B, 2\pi B)$  secondo la relazione seguente:

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\frac{\omega}{2B}} \quad (16)$$

dove come noto  $1/2B$  è definita pulsazione fondamentale ed i coefficienti della serie di Fourier possono essere determinati attraverso la relazione integrale riportata di seguito:

$$c_n = \int_{-2\pi B}^{2\pi B} S(\omega) e^{-jn\frac{\omega}{2B}} d\omega \quad (17)$$

Dalle relazioni appena scritte possiamo affermare che una volta noti i coefficienti  $c_n$  della serie di Fourier, possiamo calcolare  $s(t)$  proprio come antitrasformata di Fourier di  $S(\omega)$ , come reso noto nella relazione sotto:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (18)$$

Ipotizziamo adesso che siano noti i valori assunti da  $s(t)$  agli istanti:

$$t_n = \frac{n}{2B}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (19)$$

forniti dalla relazione:

$$s\left(\frac{n}{2B}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} S(\omega) e^{jn\frac{\omega}{2B}} d\omega \quad (20)$$

Dunque, prendendo in considerazione l'espressione dei coefficienti della serie di Fourier data in precedenza e quest'ultima relazione scritta, possiamo sicuramente notare che i coefficienti  $c_n$  sono legati ai campioni  $s(n/2B)$  del segnale  $s(t)$  secondo la relazione:

$$c_n = \frac{1}{2B} s\left(-\frac{n}{2B}\right) \quad (21)$$

Il significato di quanto appena scritto è che una volta noti i campioni del segnale nel dominio del tempo  $s(t)$ , diventano univocamente determinati anche i coefficienti della serie di Fourier  $c_n$  e conseguentemente sarà determinato anche lo spettro  $S(\omega)$ . In definitiva appare evidente che dalla conoscenza dei campioni del segnale riportati nella relazione (19) è possibile risalire alla conoscenza del segnale

$s(t)$  per qualsiasi istante.

In quest'ottica risulta quindi interessante la descrizione, anche se sommaria, di come possa avvenire la ricostruzione del segnale  $s(t)$  a partire dalla conoscenza dei suoi campioni  $s(n/2B)$ .

Partiamo dunque dal considerare il segnale  $s(t)$  come il risultato dell'antitrasformata del suo spettro, come riportato nella relazione (18), operando poi una sostituzione nella relazione che definisce la serie di Fourier (16) e tenendo conto di quanto espresso dall'ultima relazione scritta possiamo affermare che:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2B} s\left(-\frac{n}{2B}\right) e^{jn\frac{\omega}{2B}} \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (22)$$

Dalla quale poi operando un'inversione tra l'operatore sommatoria e quello integrale possiamo alternativamente scrivere:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{1}{4\pi B} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} e^{j\omega\left(t-\frac{n}{2B}\right)} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\text{sen}\left[2\pi B\left(t-\frac{n}{2B}\right)\right]}{2\pi B\left(t-\frac{n}{2B}\right)} \quad (23)$$

Nella quale è possibile individuare il termine richiamante la funzione *sinc* tale che:

$$\frac{\text{sen}(2\pi Bt)}{2\pi Bt} = \text{sinc}(2Bt) \quad (24)$$

Le espressioni appena ricavate mostrano che è possibile ottenere  $s(t)$  a partire dalla conoscenza dei suoi campioni centrati in  $n/2B$  sommando appunto opportunamente una successione di funzioni del tipo *sinc*, come sopra definito, centrate negli istanti di campionamento  $t_n = n/(2B)$   $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . L'impiego della funzione *sinc* consente un'operazione di interpolazione dei campioni tale da

ricostruire il segnale di partenza.

Appare dunque evidente che l'operazione di ricostruzione del segnale  $s(t)$ , viste le relazioni appena scritte, può essere senz'altro ricondotta ad un'operazione di filtraggio. Infatti, la funzione *sinc* assume lo stesso andamento della risposta impulsiva di un filtro passa-basso ideale rettangolare con pulsazione di taglio  $2\pi B$ . Dall'ultima relazione scritta per definire  $s(t)$  possiamo pensare che tale segnale possa essere ottenuto anche passando attraverso la convoluzione della funzione *sinc* con la sequenza di campioni  $s(n/2B)$ , sequenza che può anche essere espressa nel modo seguente:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s\left(\frac{n}{2B}\right) \cdot \delta\left(t - \frac{n}{2B}\right) \quad (25)$$

giungendo dunque ad un'altra forma di espressione del segnale  $s(t)$  come di seguito riportato:

$$s(t) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s\left(\frac{n}{2B}\right) \delta\left(t - \frac{n}{2B}\right) \right] * \text{sinc}(2Bt) \quad (26)$$

La quale rappresenta proprio l'espressione dell'uscita di un filtro passa-basso al cui ingresso è applicata la sequenza di campioni introdotta in (25). Già da quanto appena detto possiamo anticipare che nel dominio della frequenza l'operazione di ricostruzione del segnale può essere ricondotta ad un'operazione di filtraggio che estrae lo spettro  $S(\omega)$  di  $s(t)$  proprio dallo spettro dei campioni.

Possiamo quindi affermare che effettuando un campionamento con passo  $\tau \leq 1/2B$  (equivalentemente con frequenza di campionamento  $f_c > 2B$ ) è sempre possibile ricostruire il segnale di partenza  $s(t)$ . Viceversa non lo sarà se utilizziamo un passo di campionamento  $\tau > 1/2B$  in quanto si incorrerebbe in una ricostruzione affetta da sovrapposizione degli spettri (fenomeno di *aliasing*) che ha come effetto

l'alterazione irreversibile del segnale.

Il teorema del campionamento presentato e descritto fino a questo punto afferma che, dato un segnale a banda limitata, è sempre possibile ricostruirlo partendo dalla conoscenza dei suoi campioni ad intervalli  $1/2B$ , il che significa che non sarà necessario essere a conoscenza dei valori di  $s(t)$  in ogni istante ma basterà conoscere il suo valore in corrispondenza di una successione di istanti discreti.

A questo punto può essere quindi conveniente dare spiegazione della quantità di campioni necessari al fine di poter ricostruire il segnale di partenza con un certo grado di fedeltà. In tal senso dobbiamo osservare che dalla definizione del teorema di campionamento appena fornita è richiesto che il segnale in questione abbia spettro limitato in banda il che significa che non può annullarsi in nessun intervallo continuo di tempo ma al più in degli istanti temporali. Questo ci suggerisce che la conoscenza di  $s(t)$  per un arbitrario valore di  $t$ , diverso dagli istanti di campionamento, richiederebbe la conoscenza completa di tutti i campioni del segnale stesso che si estendono da  $-\infty$  a  $+\infty$  notando che tutti i valori generati dalla sommatoria presente nella relazione (23) contribuiscono a “formare” il segnale  $s(t)$  nel corrispondente istante.

In realtà però, come peraltro ben noto, tutti i segnali fisici hanno durata finita a cui è associato uno spettro effettivamente limitato (basti notare che la densità spettrale delle ampiezze di qualsiasi spettro converge a zero per  $\omega \rightarrow \infty$ ). Quindi, nel caso reale, si ha a che fare con segnali che hanno durata limitata sia nel dominio del tempo che della frequenza.

Concettualmente considerare il segnale di durata limitata nel tempo significa, da un punto di vista matematico, troncare la sommatoria individuando la seguente relazione:

$$s(t) = \sum_{n=-N}^{+N} s\left(\frac{n}{2B}\right) \text{sinc}\left[2B\left(t - \frac{n}{2B}\right)\right] \quad (27)$$

E si ammette quindi che il segnale sia ricostruibile con sufficiente approssimazione

dalla sequenza  $2N+1$  campioni ovvero che la sua durata sia pari a:

$$T = (2N + 1) \frac{1}{2B} \quad (28)$$

Risulta ancora più interessante introdurre il teorema del campionamento fino qui illustrato con particolare riferimento al dominio delle frequenze e ad i segnali a banda relativa stretta in alta frequenza.

Il campionamento di Shannon nel dominio della frequenza afferma che, considerato un segnale  $s(t)$  di durata finita  $T=t_2-t_1$ , il suo spettro  $S(\omega)$  risulta completamente determinato se sono noti i valori dei suoi campioni equispaziati di un valore di frequenza  $\Delta \leq 1/T$ .

Infatti, lo spettro di  $S(\omega)$  è data dalla seguente espressione:

$$S(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (29)$$

Dove possiamo sviluppare in serie di Fourier il segnale  $s(t)$  proprio nell'intervallo  $(t_1, t_2)$  ottenendo:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t} \quad (30)$$

Nella quale i coefficienti assumono il seguente valore:



$$\sigma_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt \quad (31)$$

Da cui possiamo velocemente verificare che:

$$\sigma_n = \frac{1}{T} S(2\pi\frac{n}{T}) \quad (32)$$

nella quale individuiamo con  $S(2\pi n/T)$  i valori assunti dallo spettro  $S(\omega)$  in corrispondenza delle frequenze:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{T} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (33)$$

la conoscenza dei campioni dello spettro  $S(\omega)$  ad intervalli di frequenza  $1/T$  è del tutto equivalente alla conoscenza dei coefficienti riportati nella (30) e permette quindi di calcolare  $s(t)$ .

Risulta ancor più interessante la trattazione del campionamento se si considerano segnali in alta frequenza ed a banda relativa stretta ovvero segnali il cui spettro è nullo al di fuori di un intervallo di frequenze di larghezza  $B$ . In questo caso risulta che la massima frequenza dello spettro è  $f_0+B/2$ , essendo  $f_0$  la frequenza di centro banda. Una volta determinata la massima frequenza del segnale si potrebbe applicare il teorema del campionamento tenendo conto del fatto che i campioni devono risultare equispaziati della quantità:

$$\tau = \frac{1}{2(f_0 + \frac{B}{2})} \quad (34)$$

Con l'intervallo di campionamento appena definito è possibile ricostruire il segnale originale ma purtroppo non rappresenta la corretta interpretazione ed estensione del teorema di campionamento per quanto riguarda la spaziatura dei campioni. Infatti, se quanto affermato nella relazione (16) fosse vero, significherebbe che, considerando un segnale con spettro non nullo, anche nell'intervallo di frequenze  $(0, f_0 - B/2)$ , questo potrebbe essere ricostruito a partire dallo stesso passo di campionamento ma per quanto appena detto sappiamo che non è così.

Un tentativo semplice di comprendere come il teorema del campionamento possa essere generalizzato anche al caso di segnali passa banda a banda relativa stretta può esser fatto partendo dal considerare il seguente segnale:

$$s(t) = a(t)\cos[\omega_0 t + \theta_t(t)] \quad (35)$$

di cui possiamo dare una rappresentazione complessa e successivamente considerare l'involuppo complesso dello stesso giungendo dunque a scrivere  $s(t)$  nella forma seguente:

$$s(t) = a(t)e^{j\theta(t)} \quad (36)$$

che risulterà avere, per come è definito, lo spettro diverso da zero soltanto in banda base ovvero in  $(-B/2, B/2)$  su cui è sicuramente possibile applicare il teorema del campionamento e per quanto stabilito all'inizio del paragrafo l'intervallo di campionamento deve valere  $\tau=1/B$ . Il segnale ricostruito risulta esser determinato dalla seguente espressione:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a\left(\frac{n}{B}\right)\cos\left[\omega_0 t + \theta\left(\frac{n}{B}\right)\right] \frac{\text{sen}\left[\pi B\left(t - \frac{n}{B}\right)\right]}{\pi B\left(t - \frac{n}{B}\right)} \quad (37)$$

Nel caso presentato, riguardante i segnali a banda relativa stretta in alta frequenza, l'intervallo minimo di campionamento risulta essere  $\tau=1/B$  dove  $B$  è rappresentativo della larghezza di banda del segnale e non della sua frequenza massima.

L'ultima relazione risulterà utile nella comprensione dell'approccio numerico utilizzato nella teoria di base del riflettometro che verrà presentato nei successivi paragrafi. Infatti tale relazione rappresenta uno dei passaggi chiave del processo di elaborazione del segnale ricevuto.

## 2.3 Il modello teorico

Al fine di comprendere al meglio quelli che sono gli effetti dell'interazione dell'onda elettromagnetica con il materiale nel quale incide e successivamente penetra, possiamo considerare un problema semplificato come quello di un'onda piana di ampiezza unitaria incidente su di un mezzo con determinate caratteristiche dielettriche, ospitante a sua volta un ulteriore mezzo di caratteristiche dielettriche diverse.

A tal proposito consideriamo dunque un'onda piana (cfr. *Appendice I*) nel dominio della frequenza proveniente dal vuoto:

$$E_{\text{inc}}(z, \omega) = A \cdot e^{-j\beta_0 z} \quad (38)$$

dove,  $\beta_0$  rappresenta la costante di propagazione nello spazio libero. Tale onda piana risulta incidente normalmente all'interfaccia di una struttura multistrato come riportato nella figura seguente rappresentativa della geometria del problema (Figura 7).

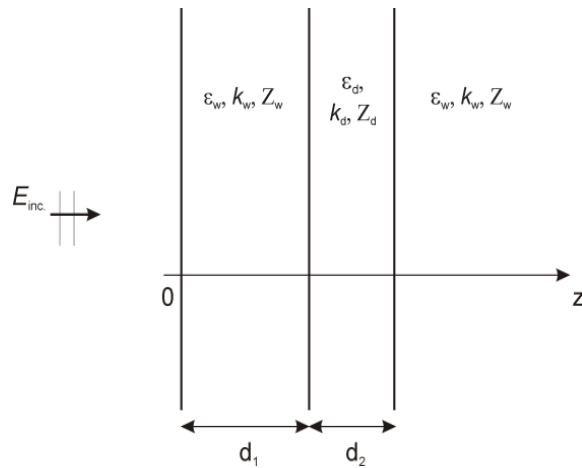


Figura 7 – Modello teorico

L'onda piana è dunque incidente su di una struttura rappresentativa stratiforme, il cui mezzo principale, di costante dielettrica  $\epsilon_w$ , costante di propagazione  $k_w$  e impedenza caratteristica  $Z_w$ , ospita un ulteriore mezzo, di diverse caratteristiche elettromagnetiche, con costante dielettrica  $\epsilon_d$ , costante di propagazione  $k_d$  ed impedenza caratteristica  $Z_d$ .

La grandezza di interesse, risulta essere il coefficiente di riflessione dal quale è possibile ricavare le informazioni relative a determinate caratteristiche fisiche ed elettromagnetiche della strutture su cui incide l'onda piana. Tale coefficiente di riflessione in corrispondenza della sezione  $z=0$  del sistema geometrico considerato può essere espresso tramite la relazione seguente:

$$\Gamma(0, \omega) = \frac{\Gamma_0 + \Gamma_1 e^{-2jk_w d_1} + \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2jk_d d_2} + \Gamma_2 e^{-2jk_w d_1} e^{-2jk_w d_2}}{1 + \Gamma_0 \Gamma_1 e^{-2jk_w d_1} + \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2jk_d d_2} + \Gamma_0 \Gamma_2 e^{-2jk_w d_1} e^{-2jk_w d_2}} \quad (39)$$

dove:

$$\Gamma_1 = \frac{Z_1 - \zeta_0}{Z_1 + \zeta_0}; \Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_w}{Z_2 + Z_w}; \Gamma_3 = \frac{Z_3 - Z_d}{Z_3 + Z_d} \quad (40)$$

risultano essere i coefficienti di riflessione alle interfacce  $z=0$ ,  $z=d_1$  e  $z=d_2$ ;  $\zeta_0$  rappresenta invece l'impedenza caratteristica del vuoto. Il coefficiente di riflessione appena introdotto risulterà essere una rappresentazione discreta dello spettro del corrispondente coefficiente di riflessione nel dominio del tempo. Lo spettro sarà dunque limitato in una banda di frequenze compresa tra  $(f_{min}, f_{max})$  determinata in base alle prestazioni dell'analizzatore di reti utilizzato che nel nostro caso presenta una banda compresa tra 1 e 6 GHz.

Alla luce di quanto introdotto e definito nel paragrafo relativo al campionamento ed alla ricostruzione dei segnali a banda relativa stretta, possiamo esprimere il coefficiente di riflessione nel dominio del tempo attraverso la seguente relazione:

$$\Gamma(0, t) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{T} |\Gamma(0, \omega)| \cos[2\pi f_0 t + \arg(\Gamma(0, \omega))] \text{sinc}[2\pi B(t - \frac{n}{B})] \quad (41)$$

Dove N, in questo caso, rappresenta il numero dei punti di misura dell'analizzatore di reti (VNA).

Come primo caso di studio teorico e validazione del modello stesso abbiamo considerato quello di un'onda piana di ampiezza unitaria incidente su di un mezzo di costante dielettrica  $\epsilon=2.5+j0.02$  con il quale abbiamo voluto simulare un cavità di aria inserendo uno slab di costante dielettrica pari al vuoto. La cavità di aria si estende da 3 a 5cm (ovvero riferendosi alla Figura 8,  $d_1=3$  cm e  $d_2=5$  cm). Quanto appena descritto può essere rappresentativo del caso reale di una struttura in legno con basso contenuto relativo di umidità e con all'interno una cavità di aria. I risultati ottenuti, applicando le relazioni appena introdotte al mezzo stratificato considerato, sono riportati nella figura seguente:

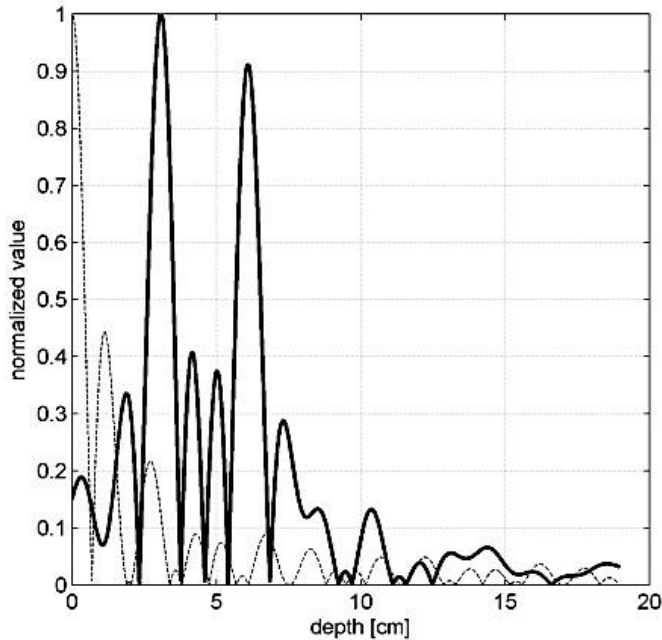
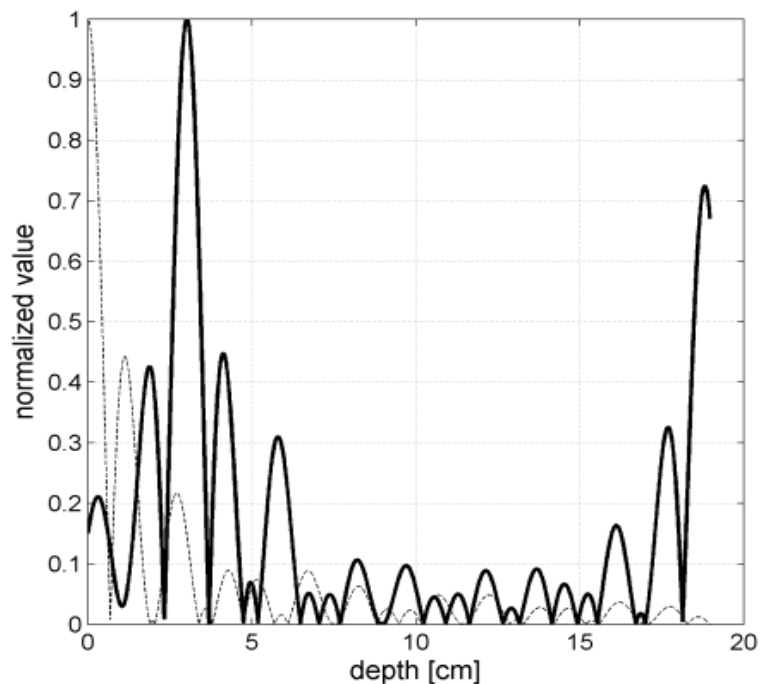


Figura 8 – Caso slab di aria ( $\epsilon_{slab}=1$ )

I valori di profondità sono stati normalizzati al valore di costante dielettrica del mezzo principale. Nel caso inverso, ovvero di normalizzazione della profondità al valore di costante dielettrica del mezzo “ospitato”, in questo caso il vuoto, si sarebbe dovuto dividere la quota di profondità riferita al primo picco per la radice quadrata del valore di costante dielettrica del mezzo di cui è costituita l'inclusione. In realtà sarà sempre conveniente riferirsi al mezzo principale in quanto, attraverso specifiche misure, è possibile avere indicazioni sul valore che può assumere la costante dielettrica rendendo più semplice l'interpretazione dei dati ottenuti. Tornando all'analisi dei risultati ottenuti, nella figura sopra, è possibile individuare due picchi di ampiezza normalizzata al valore massimo, in corrispondenza proprio delle quote di profondità 3 e 8 cm dimostrando la validità dell'approccio anche se utilizzato per un modello semplificato.

Sempre al fine di generalizzare lo studio è stato verificato anche il caso in cui il mezzo “ospitato” fosse un mezzo ad elevato contenuto di umidità. In questo caso si

è voluto rappresentare invece la stessa struttura in legno ma con all'interno un'intercapedine dello stesso materiale ma con una percentuale di umidità più elevata. Facendo un'analogia di questo caso con uno reale possiamo ricondurci ai frequenti eventi di infiltrazione di acqua all'interno delle strutture sia lignee che murarie. Le quote a cui si inserisce tale intercapedine rimangono invariate rispetto al caso precedente. I risultati ottenuti sono riportati nella figura seguente (Figura 9).



*Figura 9 – Slab di materiale ad alto contenuto di umidità ( $\epsilon_{slab}=25.0-j0.5$ )*

In questo caso, avendo ancora normalizzato rispetto alla costante dielettrica del mezzo principale notiamo che il secondo picco, quello relativo alla fine dell'intercapedine, viene a localizzarsi ad una quota di profondità maggiore rispetto a quanto ottenuto in Figura 8. Per riferire correttamente la quota del secondo picco del mezzo "ospitato" dobbiamo operare una normalizzazione di questa rispetto alla costante dielettrica di tale mezzo. Il valore del secondo picco letto nel grafico riportato nella figura sopra è circa 18 cm a cui dobbiamo togliere i 3cm della quota della prima interfaccia in modo da individuare l'estensione dell'inclusione pari a 15 cm. Questa, a sua volta, dovrà essere divisa per la radice quadrata della costante

dielettrica del mezzo incluso che vale circa 25, ottenendo come risultato finale il valore corretto di 5 cm. Anche per questo modello di mezzo stratificato semplificato l'approccio idealizzato ha confermato di poter essere applicato a scenari simili la cui approssimazione sia appunto riconducibile al problema elettromagnetico appena presentato.

Oltre alle informazioni appena fornite rispetto alla teoria di base del riflettometro a microonde, in questo paragrafo possiamo introdurre due parametri caratteristici della teoria radar. Infatti il modello, come già detto nell'introduzione, può essere assimilato ad un radar monostatico.

I parametri a cui ci riferiamo sono la massima distanza non ambigua, che indicheremo con  $R_{max}$ , la cui definizione deriva dal criterio del campionamento di Nyquist e che può essere espressa nel modo seguente:

$$R_{max} = \frac{c_0}{4\Delta f\sqrt{\epsilon}} \quad (42)$$

Dove con  $\Delta f$  si identifica la spaziatura dei campioni del coefficiente di riflessione nel dominio della frequenza. L'altra grandezza, che indicheremo invece con  $D_{max}$  e che deriva dal criterio di Rayleigh, definisce la massima risoluzione in distanza:

$$D_{max} = \frac{c_0}{2B\sqrt{\epsilon}} \quad (43)$$

Dove B rappresenta la larghezza di banda dell'analizzatore di reti vettoriale (VNA).



## 2.4 L'elemento radiante

L'elemento radiante del sistema di indagine riflettometrico è rappresentato dalla transizione guida cavo coassiale tipo double ridged waveguide (modello WR-160). La scelta dell'elemento radiante ha rivestito un ruolo importante in quanto influenza notevolmente le capacità prestazionali del sistema di misura. Infatti, la scelta di questo tipo di elemento radiante è stata fatta al fine di garantire sempre il massimo adattamento di impedenza tra il trasmettitore e la struttura da investigare. In altre parole questo significa riuscire ad investigare la maggior parte dei materiali di interesse fino ad una profondità di 20-30 cm altrimenti irraggiungibile in caso di elevato disadattamento. Inoltre si è resa da subito necessaria la ricerca di un'antenna a banda larga in modo da poter investigare la struttura sotto test in un range di profondità relativamente ampio senza dover ricorrere all'utilizzo di elementi radianti diversi per coprire la banda di frequenza messa a disposizione dal trasmettitore (VNA). Inoltre, avere una banda larga offre il vantaggio di rilevare dettagli strutturali di piccole dimensioni. La transizione guida cavo utilizzata è riportata in figura sotto.



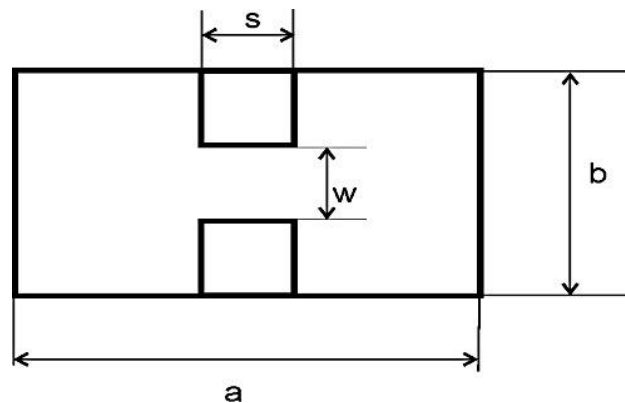
*Figura 10 – WR-160*

Diamo dunque alcune informazioni riguardo proprio le caratteristiche elettromagnetiche di questa transizione guida-cavo al fine di giustificare la scelta

fatta. Dal punto di vista elettromagnetico, le principali caratteristiche di questo tipo di guida sono le seguenti:

- la propagazione del modo fondamentale TE<sub>10</sub>
- la ridotta frequenza di cut-off
- l'ampia larghezza di banda tra il modo fondamentale ed il primo modo successivo
- ridotti valori di impedenza (se confrontati con una guida rettangolare di uguali dimensioni del tipo WR430 o WR229)

Per il calcolo in forma chiusa dei parametri di interesse principali, quali lunghezza d'onda di cut-off, lunghezza d'onda in guida ed impedenza caratteristica, si fa riferimento al metodo della risonanza trasversa. Per la double ridged waveguide, al fine di semplificare l'analisi ma senza perdita di generalità, è stata considerata la seguente geometria approssimata:



*Figura 11 – WR-160 in sezione*

dove le grandezze in gioco sono di seguito elencate:

- $s=16,46$  mm
- $w=13$  mm
- $a=65,79$  mm
- $b=30,61$  mm

Il primo passo per affrontare l'analisi del comportamento dell'elemento radiante passa attraverso il calcolo della lunghezza d'onda di cut-off reso possibile attraverso l'utilizzo della seguente formula in forma chiusa:

$$\begin{aligned} \lambda_c & \\ &= 2 * (a - s) \\ & * \sqrt{1 + \frac{4}{\pi} * (1 + 0,2 * \sqrt{\frac{b}{a-s}}) * (\frac{b}{a-s}) * \ln(\csc(\frac{\pi * w}{2 * b})) + ((2,45 + \frac{0,2 * s}{a})) * (\frac{s * b}{w * (a-s)})} \end{aligned} \quad (44)$$

per la relazione appena scritta ed in funzione anche dei parametri geometrici in gioco è possibile definire i seguenti intervalli di validità evidenziando un errore, per l'approssimazione considerata, inferiore all'1%:

$$0,01 < \frac{w}{b} \leq 1 \leftrightarrow \frac{b}{100} < a < b$$

$$0 < \frac{b}{a} < 1 \leftrightarrow 0 < b < a$$

$$0 < \frac{s}{a} < 0,45 \leftrightarrow 0 < s < a * 0,45$$

Con tali parametri si ottiene una lunghezza d'onda di cut-off  $\lambda_c=18,20$  cm, conseguentemente il valore di frequenza di cut-off risulta essere:

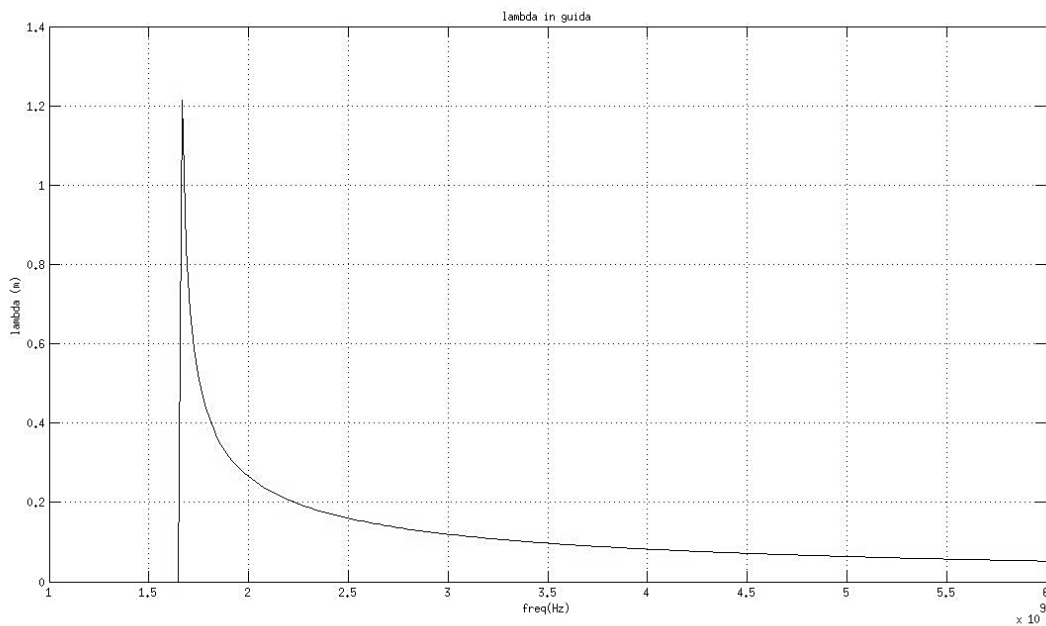
$$f_c = \frac{c}{\lambda_c} = 1,648\text{GHz} \quad (45)$$

Facendo riferimento ad una banda di frequenza che si estenda da 1 a 6 GHz possiamo agevolmente calcolare prima la lunghezza d'onda in aria e poi la corrispondente lunghezza d'onda in guida attraverso le due relazioni seguenti:

$$\lambda_0(f) = \frac{c}{f} \quad (46)$$

$$\lambda_g(f) = \frac{\lambda_0(f)}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad (47)$$

Al fine di dare una rappresentazione della stessa lunghezza in guida e dare evidenza del cut-off possiamo osservare la figura seguente:



*Figura 12 – WR-160, frequenza di cut-off*

Il calcolo dell'impedenza caratteristica della guida passa invece attraverso il calcolo dell'impedenza caratteristica per frequenza infinita la cui forma chiusa è la seguente e ancora dipendente dai parametri geometrici oltre che dalla lunghezza d'onda di cut-off:

$$Z_{\infty} = \frac{120 * \pi^2 * (\frac{b}{\lambda_c})}{(\frac{b}{w}) * \sin(\pi * (\frac{s}{b}) * (\frac{b}{\lambda_c})) + [(\frac{B_0}{Y_0}) + \tan((\frac{\pi}{2}) * (\frac{b}{\lambda_c}) * (\frac{a-s}{b}))] * \cos(\pi * (\frac{s}{b}) * (\frac{b}{\lambda_c}))}$$

(48)

dove la suscettanza normalizzata è calcolabile tramite l'approssimazione di Marcuvitz:

$$\frac{B_0}{Y_0} = \frac{2 * b}{\lambda_c} * \ln[\csc(\frac{\pi * w}{2 * b})]$$

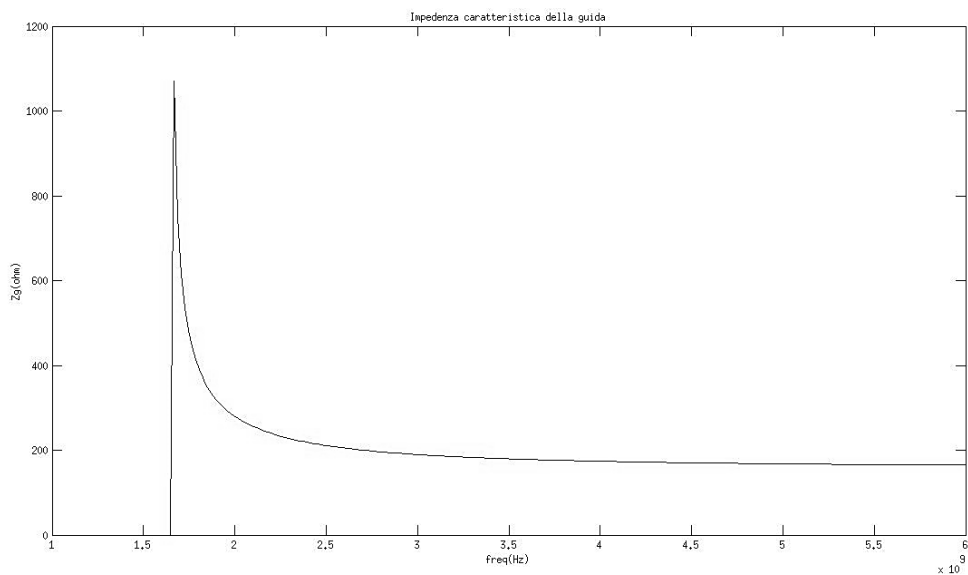
(49)

A questo punto siamo in grado di calcolare l'impedenza caratteristica della guida double-ridge tramite la seguente relazione:

$$Z_0 = \frac{Z_{\infty}}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_0}{\lambda_c})^2}}$$

(50)

Il cui andamento in funzione della frequenza è riportato nel grafico seguente:



*Figura 13 – WR-160, impedenza caratteristica*

Tale valore di impedenza caratteristica, riferito alla banda di frequenza 1-6 GHz, può essere facilmente confrontato con i valori di impedenza caratteristica dei materiali che compongono le strutture che più spesso ci troveremo ad investigare quali legno, malta, mattoni ecc. Al fine del massimo trasferimento di potenza all'interno della struttura, la scelta della transizione guida cavo WR-160 risulta la migliore se confrontata con quelle offerte dal mercato. A titolo esemplificativo dunque può essere utile dare dimostrazione della scelta confrontando l'impedenza caratteristica della nostra guida d'onda con quella di un mezzo ad esempio il legno con diverso contenuto di umidità. Di seguito è infatti riportato il grafico contenente l'andamento del valore di impedenza caratteristica del legno con contenuto di umidità del 5% e del 30 % nonché l'andamento dell'impedenza caratteristica della nostra guida d'onda e di un modello alternativo quale la WR229:

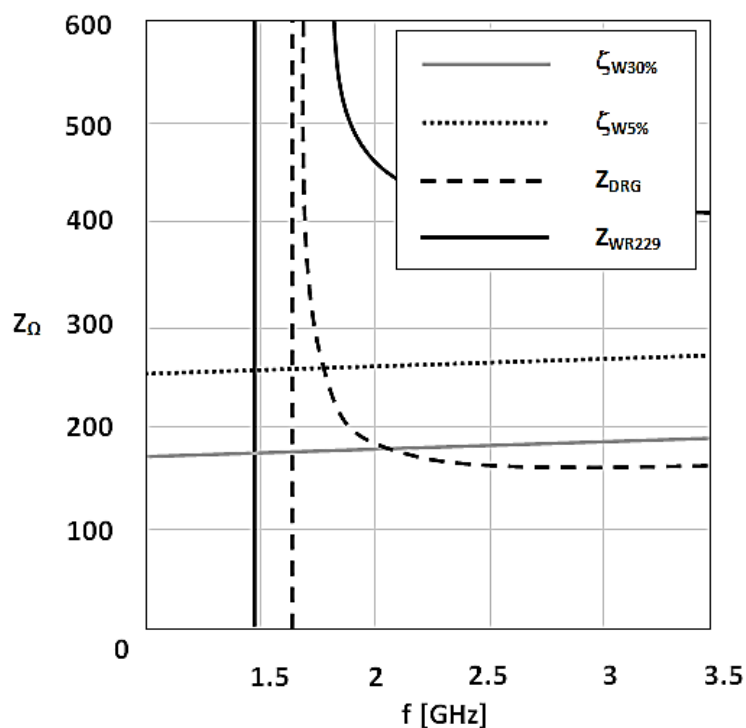


Figura 14 - Andamento impedenze caratteristiche con  $Z_{DRG}$  impedenza della guida WR-160

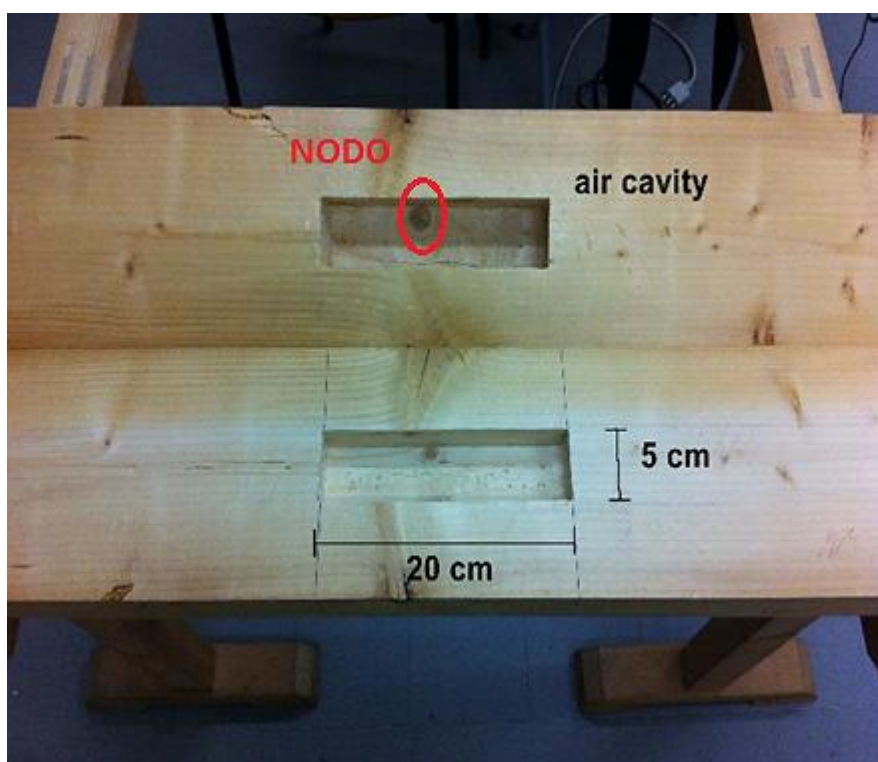
Come evidenziato nel grafico (Figura 14), la guida d'onda scelta per questo tipo di attività (indicata come  $Z_{DRG}$ ) offre, al di sopra della frequenza di cut-off, un valore di impedenza caratteristica simile a quella del legno nei due casi riferiti ai diversi contenuti di umidità consentendo un'indagine del materiale ligneo sempre efficiente a differenza di quanto offerto dal modello WR229. Questo significa che in ogni caso riusciremo a trasferire all'interno della struttura sotto indagine l'energia sufficiente a raggiungere la profondità di indagine di circa 20-30 cm.

## 2.5 Test di laboratorio e prove *in situ*

In questo paragrafo verranno presentati sia i risultati della valutazione del sistema di indagine su campioni di strutture lignee in laboratorio che quelli ottenuti durante una prima prova in "cantiere".

### 2.5.1 Primo test in laboratorio

Un primo test di valutazione della bontà del sistema è stata effettuato durante una verifica in laboratorio che ha previsto l'impiego di un provino di trave di “abete bianco” al cui interno è stata ricavata una “tasca” allo scopo di simulare una cavità di aria (Figura 15).



*Figura 15 – Campione trave con tasca*

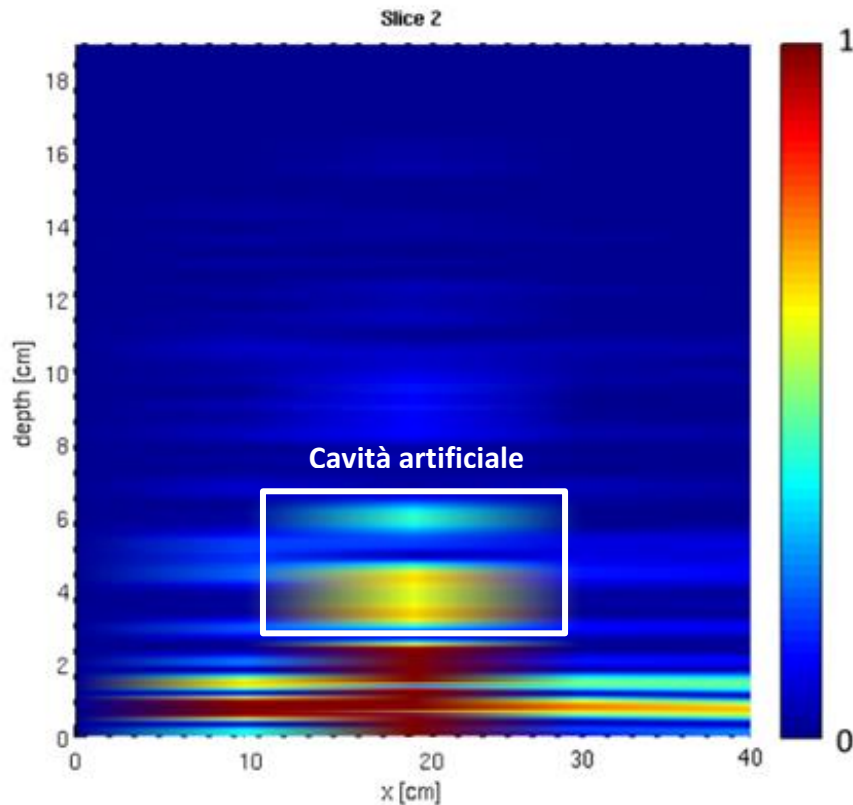
Come riportato anche in Figura 15, la cavità ha una lunghezza di 20 cm, un'altezza di 5 cm ed una profondità di circa 5 cm. L'inizio della cavità risulta ad una profondità diversa rispetto alla superficie da cui si effettua l'investigazione della trave. In particolare indicando con A la superficie superiore troveremo l'inizio della cavità ad una profondità di circa 3 cm mentre, da quella inferiore, che indicheremo con B, troveremo l'inizio della cavità a circa 7 cm. In corrispondenza della superficie posteriore si nota la presenza di un “nodo”, il quale, dal punto di vista elettromagnetico, rappresenta una forte disomogeneità nel materiale in grado di



attenuare in maniera più che sensibile la propagazione dell'onda al proprio interno. Per stimare il valore della costante dielettrica del materiale sotto test è stato utilizzata una sonda coassiale (metodo del coassiale troncato), ed il valore ottenuto è risultato frutto proprio della disomogeneità del materiale ed anche sinonimo di una fibra legnosa forse ancora umida. E' stato preso come riferimento per la costante dielettrica il valore  $\epsilon_r=3$  risultato del valor medio di una serie di misurazioni effettuate con il metodo SUSI sulla superficie della trave.

La misura è stata effettuata step-by-step lungo la mezzera della trave campione, prima rispetto alla superficie A e successivamente rispetto alla superficie B; le misure vengono effettuate senza sovrapposizione delle posizioni assunte dall'elemento radiante e con una distanza tra una posizione e la successiva di circa 0,5 cm; l'elemento radiante non risulta a contatto con la superficie al fine di migliorare il trasferimento di potenza all'interno della struttura e dunque incrementare la profondità di indagine. La banda di frequenza utilizzata per questo test si estende da 1.5 GHz a 6 GHz.

I risultati ottenuti sono riportati nelle "slice" seguenti, che si riferiscono al piano trasversale alla superficie della trave stessa:



*Figura 16 – Slice campione trave superficie A*

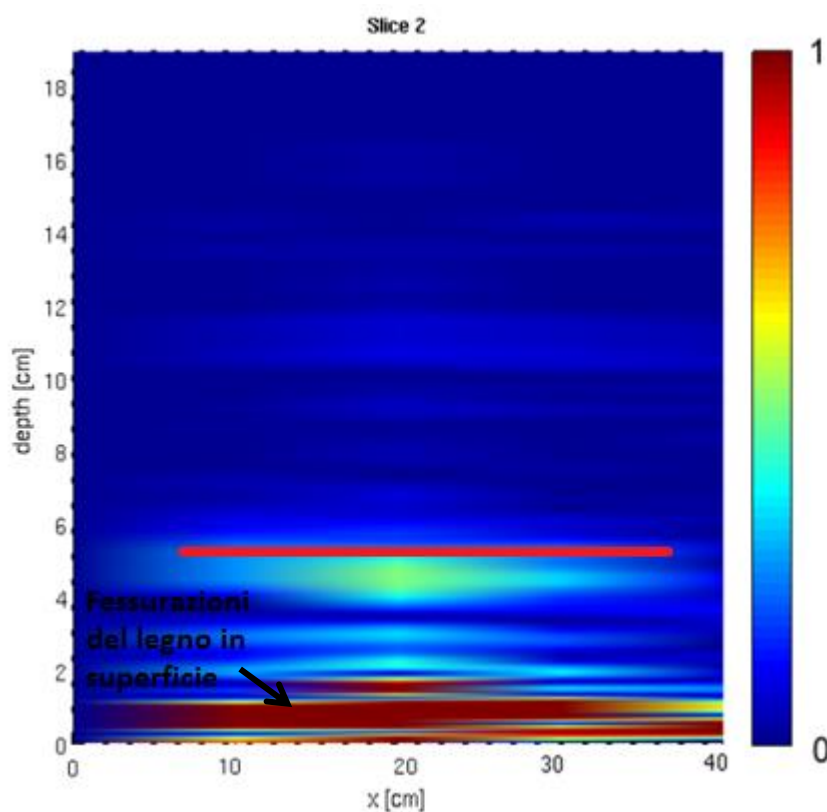
Nella Figura 16 in falsi colori è stata evidenziata la possibile posizione della cavità, di cui adesso daremo giustificazione. Le dimensioni lungo l'asse trasversale sono già state normalizzate rispetto alla costante dielettrica del mezzo ( $\epsilon_r = 2.5$ ). Dunque, come evidenziato in figura sopra, possiamo individuare la prima interfaccia di transizione legno-aria, corrispondente cioè all'inizio della cavità artificiale, ad una quota di profondità di circa 3 cm del tutto in linea con quanto riportato nell'immagine descrittiva della trave riportata in Figura 15 . La seconda interfaccia, in corrispondenza della transizione aria-legno, rappresenta il termine della cavità di aria artificiale e può essere individuata attorno ai 7 cm. In questo caso, rispetto alle dimensioni reali, si commette l'errore di circa 1 cm nella localizzazione della seconda interfaccia. Per quanto riguarda invece la larghezza della tasca possiamo affermare, come visibile, che siamo attorno ai 18 cm contro i 20 cm di dimensione reale. Questo scostamento è senz'altro dovuto all'errore di posizionamento dell'elemento radiante rispetto alla distanza tra misure successive che ricordiamo avevamo stabilito essere di 0.5 cm.

Sempre continuando ad osservare il grafico dei risultati ottenuti, possiamo affermare che le “bande” rosse relative ai primi 2 cm della “slice” rappresentano le fessurazioni del legno presenti nella superficie ed all’interno della trave. Le dimensioni delle fessurazioni del legno in superficie in questo caso erano sì visibili ma di piccola entità, viceversa nella superficie opposta, che abbiamo indicato con B, le dimensioni di tali fessurazioni risultano non trascurabili e ben visibili ad occhio nudo (Figura 17). Sempre facendo riferimento all’indagine della trave campione condotta dalla superficie B c’è da aggiungere che in questo caso ci siamo trovati ad operare con un’ulteriore difficoltà rappresentata dalla presenza di un nodo del legno che ha reso la misura ancor più “difficoltosa”. I risultati ottenuti da quest’ultima scansione, come vedremo, non sono stati certo confortanti come nel caso dell’indagine condotta dalla superficie A di cui abbiamo appena fornito e discusso i risultati. Ad ogni modo anche quest'ultima prova ha rappresentato un buon indicatore prestazionale del sistema di indagine a microonde in quanto, ha permesso di avere una prima indicazione di quelli che possono essere i limiti di operabilità del sistema stesso.



*Figura 17 – Dettagli strutturali della trave*

I risultati ottenuti dalle misure effettuate su questa superficie sono riportati in Figura 18.



*Figura 18 - Slice campione trave superficie B*

Osservando la slice quello che possiamo fare è solo ipotizzare la presenza della prima discontinuità corrispondente all'inizio della cavità evidenziata dalla linea rossa tracciata sull'immagine di Figura 18; la quota a cui si colloca questa prima interfaccia è, sempre tenendo conto della normalizzazione alla costante dielettrica di riferimento, a circa 5-5.5 cm risultando in questo caso affetta da un errore di circa 1.5-2 cm rispetto alle quote reali. Questo errore è presumibilmente dovuto al fatto che in questa sezione del materiale la costante dielettrica si scosta sensibilmente da quella considerata per la normalizzazione delle distanze, che vale 2.5, e molto probabilmente questo avviene leggermente più in profondità e testimonia un'elevata disomogeneità del materiale proprio in termini di costante dielettrica. Il significato di uno scostamento così evidente della costante dielettrica

è dovuto verosimilmente al fatto che su questa superficie del legno sono presenti crepe di dimensioni considerevoli se comparate alla lunghezza d'onda in gioco. Infatti, appare evidente la presenza delle fessurazioni in superficie riferibili alla prima "banda" rossa presente lungo tutta l'asse longitudinale del grafico. In corrispondenza della quota di 2cm, a 20 cm lungo l'asse longitudinale, si osserva una riduzione di tale "banda" con una piccola curvatura, questa è dovuta al fatto che la fessurazione a tale profondità si riduce incontrando poi il nodo del legno visibile anche nella figura della sezione della trave (Figura 15).

Alla luce dei risultati ottenuti da questo primo test abbiamo potuto concludere che il sistema di indagine è sicuramente capace di individuare disomogeneità e variazioni strutturali a patto, almeno con l'hardware attuale, che la struttura possa essere sempre considerata in prima approssimazione una stratificazione di mezzi diversi senza presentare cioè, come nel caso delle fessurazioni superficiali della trave in legno, variazioni strutturali marcate. In questo caso ne va a discapito della capacità di penetrazione dell'onda nel materiale stesso e allo stesso tempo alla capacità di risoluzione e dunque descrittiva rispetto agli strati sottostanti la superficie. L'effetto appena descritto risulta strettamente legato al fatto che le misure vengono effettuate in campo vicino quindi eccessive variazioni strutturali in prossimità dell'elemento radiante concorrono ad una deformazione del campo elettromagnetico che in certe condizioni, come ad esempio in presenza di una rugosità eccessiva, possono limitare pesantemente le capacità prestazionali del sistema di indagine.

### **2.5.2 Secondo test di laboratorio**

A seguito al primo test, presentato nel precedente paragrafo, è stato effettuato un secondo test, in collaborazione con l'istituto IVALSA (Istituto per la Valorizzazione del Legno e delle Specie Arboree) del CNR (Consiglio Nazionale delle Ricerche), su di un campione di trave in legno proveniente da una vecchia struttura architettonica.

La trave presenta un decadimento strutturale dovuto all'invecchiamento del legno

associato ad un deterioramento dovuto, come riferito dagli stessi ricercatori IVALSA, ad un attacco fungineo molto probabilmente favorito da un eccessivo contenuto di umidità. Il campione di trave è riportato nella figura sottostante (Figura 19)



*Figura 19 – Campione trave con decadimento strutturale*

In Figura 19 sono stati evidenziati due elementi principali, allo scopo di facilitare la comprensione dei risultati che saranno presentati, ovvero la cavità e la presenza di un elemento metallico nella parte superiore.

Le dimensioni della trave (Figura 19) sono riportate nelle tavole di seguito :

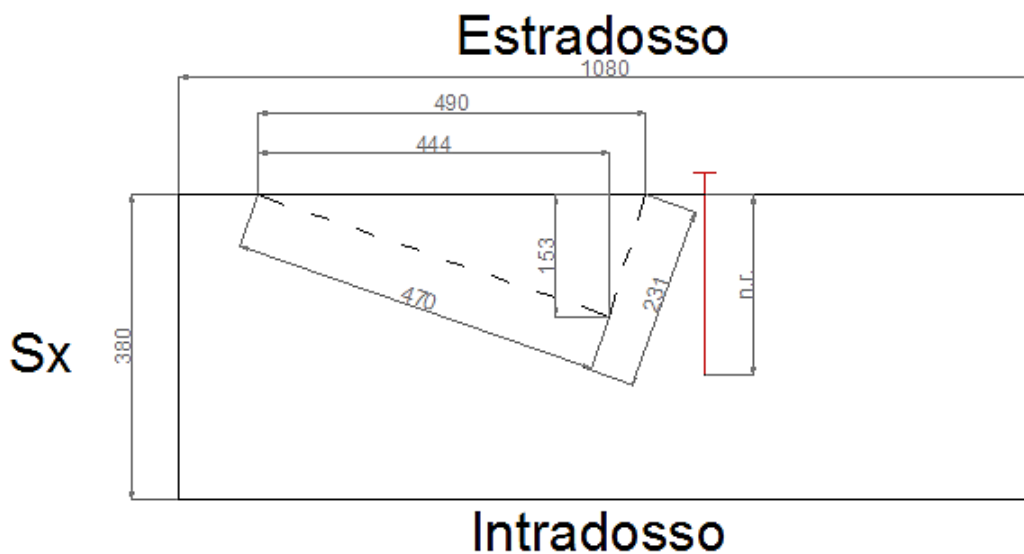


Figura 20 – Sezione trave

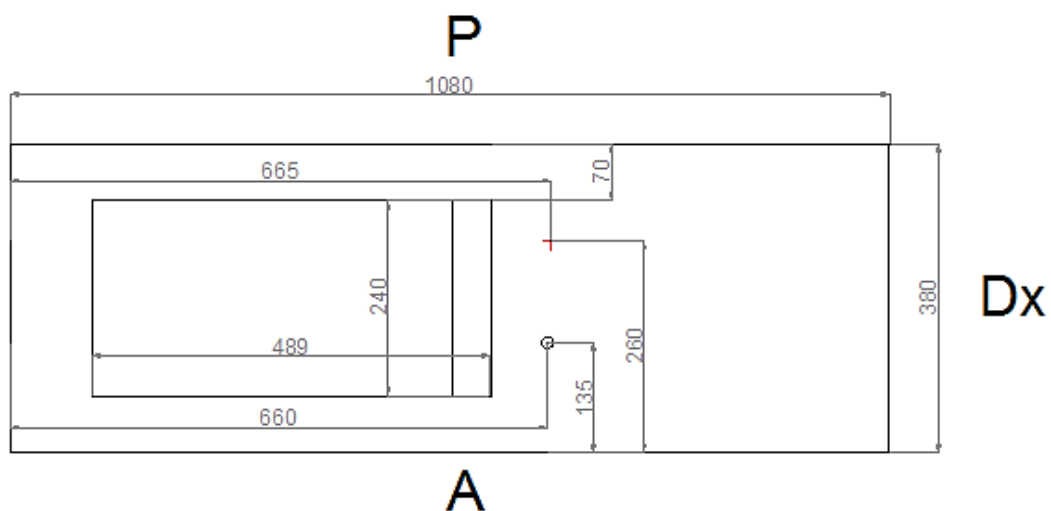


Figura 21 – Sezione Trave

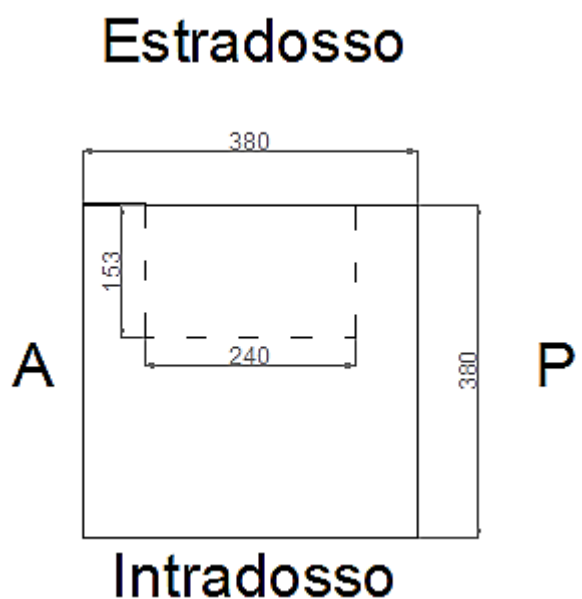


Figura 22 – Sezione trave

Preventivamente, sempre a cura dell'istituto IVALSA, sono state effettuate delle valutazioni di integrità strutturale attraverso l'utilizzo di un resistografo, un trapano dotato di una punta fine dalla quale è possibile valutare la resistenza di penetrazione nel materiale e da questa capire lo stato di salute del materiale ligneo; nota curiosa, nonostante le apparenze, il metodo resistografico è considerato allo stato dell'arte un sistema diagnostico non distruttivo nonostante

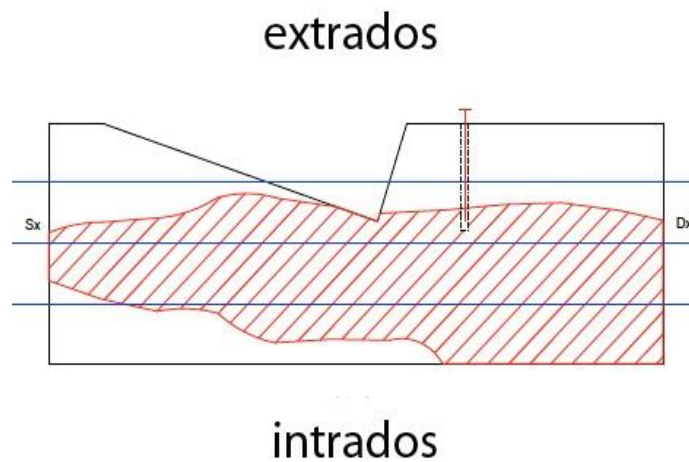
alteri, anche se lievemente, lo stato del campione.

I risultati forniti dalla valutazione condotta con il resistografo hanno configurato all'interno della trave in legno una condizione di degrado delle fibre del legno sostanzialmente estesa a gran parte della trave stessa come possono testimoniare l'immagine riportata di seguito (Figura 24) in cui l'area tratteggiata in rosso evidenzia proprio la porzione di struttura affetta da decadimento. Dalla stessa immagine è possibile anche trarre idea della conformazione della tasca e della posizione e profondità del corpo metallico.



*Figura 23 – Metodo resistografico*



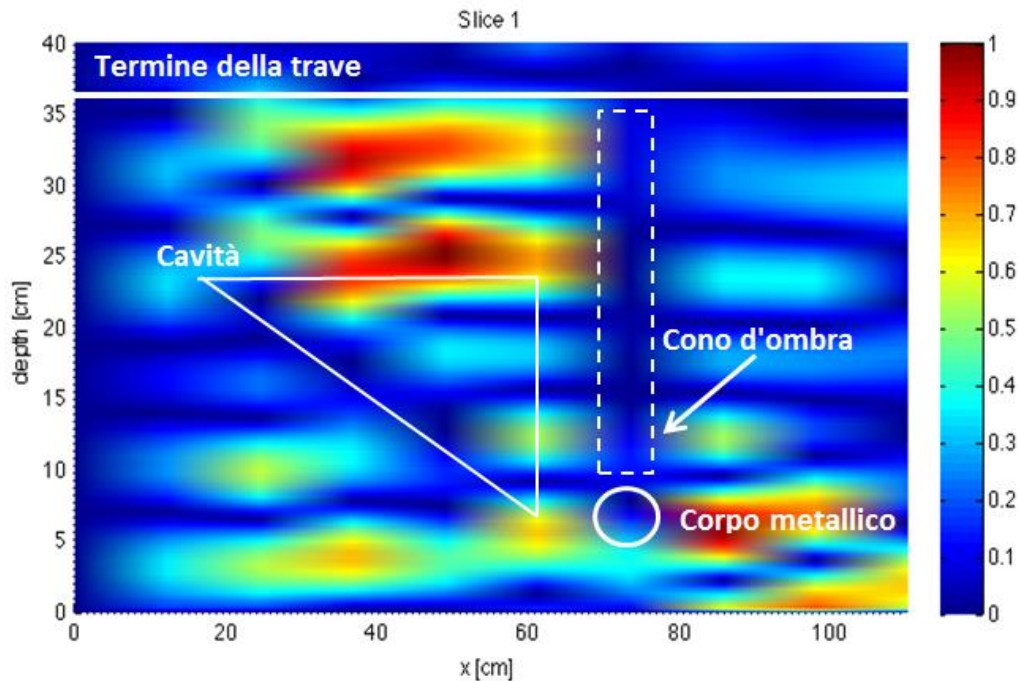


*Figura 24 – Risultato della misura con resistografo*

Le misure con il nostro sistema di indagine sono state effettuate sulla superficie “P” (Figura 21). La superficie indagata coincide con quella su cui è stata eseguita la prova con il resistografo come riportato in Figura 23.

La misura è stata effettuata sull'intera superficie della trave senza sovrapposizione di punti di misura e con una distanza tra i punti di misura di circa 0,5 cm. I valori del coefficiente di riflessione misurati sono stati poi normalizzati ad un valore di costante dielettrica di  $\epsilon_r = 2.5$ , valore ottenuto come media delle misure effettuate con lo strumento SUSI in più posizioni della trave campione.

Il risultato ottenuto è riportato nell'immagine seguente Figura 25:



*Figura 25 – Risultato della misura*

Come si può osservare dall'immagine in falsi colori, si nota subito la presenza dell'elemento metallico ad una quota di profondità di circa 7 cm (per  $x=75$  cm), valore congruente con quanto riportato nel disegno tecnico della trave stessa. Da notare, sempre facendo riferimento al corpo metallico, l'effetto del cono d'ombra esercitato dallo stesso il quale riflette, essendo un conduttore elettrico perfetto, tutta l'energia incidente su se stesso limitando così l'investigazione in profondità.

L'inizio della cavità di aria è individuabile ad una quota di profondità di circa 7 cm (per  $x$  pari a circa 60 cm), anch'essa in linea con quanto riportato nei disegni tecnici, estendendosi fino ad una profondità di circa 23 cm contro i 24 cm del valore reale riportato nel disegno tecnico. La distanza tra la fine della cavità di aria ed il termine della trave risulta poi essere di circa 7 cm nuovamente in linea con quanto riportato nei disegni tecnici. Osservando ulteriormente il grafico del risultato è possibile osservare attorno alla quota di 90 cm lungo l'asse longitudinale e ad una profondità di circa 5-10 cm un'altra regione di colore rosso intenso, rappresentativa di un'area ad elevato deterioramento in accordo con quanto rilevato dal test con il resistografo. In tal senso si possono osservare altre aree ben delimitate nel grafico di colore dal giallo al rosso meno intenso, tutte

corrispondenti a zone dove è stata rilevata una diversa resistenza al test del resistografo. Allo stesso modo la parte di grafico a destra della cavità non evidenzia eccessive disomogeneità, il colore è quasi un blu uniforme, infatti in questa porzione di trave anche il resistografo non aveva rilevato decadimento degno di nota come testimonia il grafico ottenuto dal test.

Sempre riferendosi alla stessa porzione di grafico non si ha però evidenza della fine della trave che peraltro, come detto, si trova ad una profondità di circa 38 cm. Questo può essere dovuto al fatto che sia il decadimento che il corpo metallico contribuiscono in questa parte della struttura ad una forte attenuazione della propagazione. In ogni caso il nostro obiettivo, come già ripetuto nei paragrafi precedenti, è l'investigazione delle strutture fin ad un massimo di 20-30 cm ben al di sotto dei 38 cm riferiti al termine della trave.

Anche questa seconda prova ha evidenziato le potenzialità del metodo riflettometrico di indagine strutturale studiato e messo a punto durante l'attività di ricerca. Sostanzialmente i risultati forniti risultano in linea con quelle che sono le caratteristiche geometriche della struttura ed anche con quanto rilevato dall'altro strumento diagnostico in opera sulla stessa trave ovvero il resistografo.

### **2.5.3 Prima prova in campo, il cantiere**

A seguito dei risultati confortanti ottenuti dalle prove in laboratorio ci è stata offerta, dall'Opificio delle Pietre Dure, la possibilità di testare il sistema a microonde come strumento di indagine preliminare a supporto di un intervento di restauro di una volta affrescata con sospetto distacco. L'opera in questione è un affresco di Pietro da Cortona, "*Allegoria della quiete*" (anno 1643), situato in Palazzo Venturi Ginori a Firenze. L'opera, con aggiunti alcuni riferimenti geometrici, è riportata in Figura 27 (le dimensioni riportate in figura sono in cm). Prima dell'inizio dell'attività di misura i restauratori hanno fornito informazioni riguardo a quelle che secondo loro erano le aree più a rischio distacco ed alcune informazioni preliminari riguardo ai possibili materiali che potevano comporre l'intera volta. Il modello idealizzato per la stratificazione della struttura è riportato nella figura

(Figura 26).



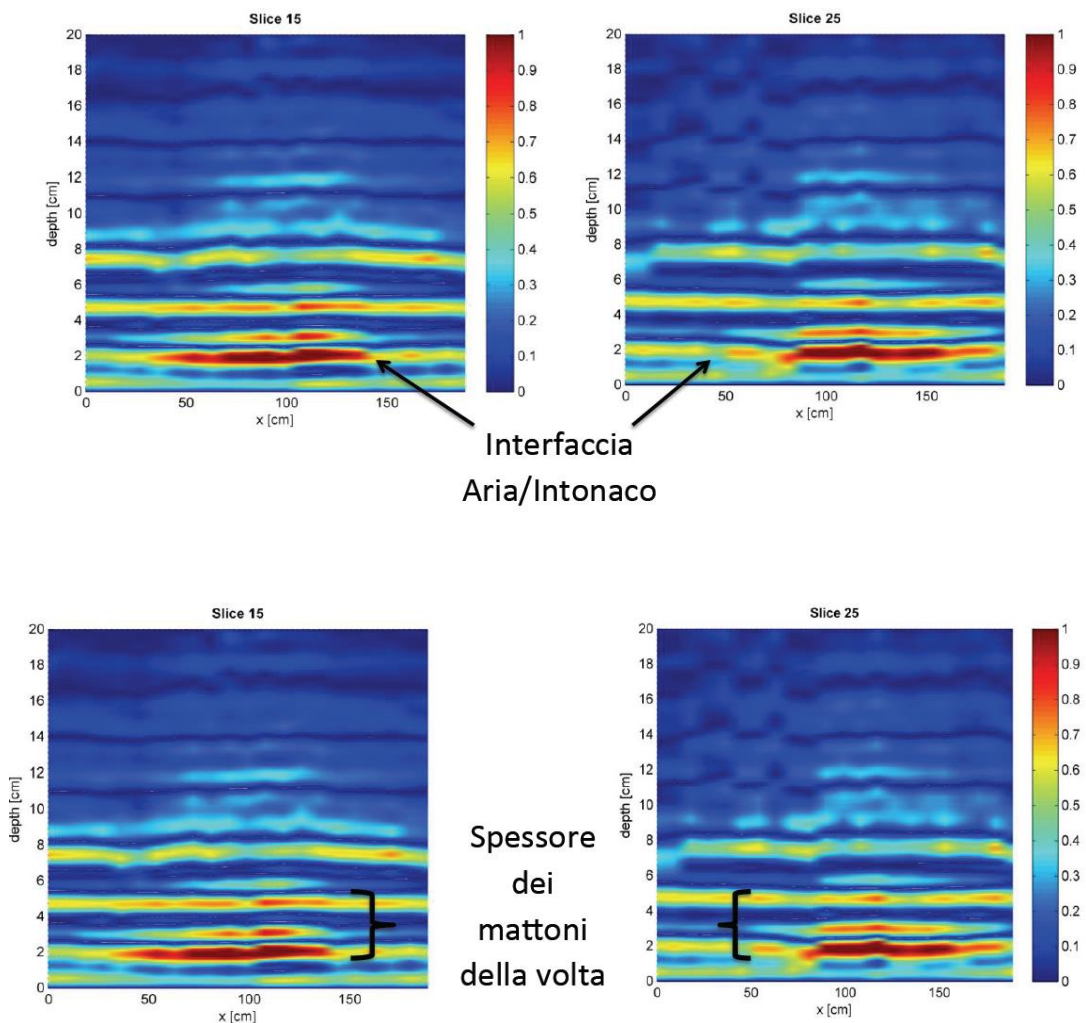
*Figura 26 – Ipotesi (dei restauratori) sulla stratificazione della volta*



*Figura 27- Pietro da Cortona, “Allegoria della quiete” con riferimenti circa le dimensioni*

Viste le dimensioni considerevoli dell'opera (355x230 cm), l'operazione di misura è stata piuttosto consistente, infatti, sono state effettuate 22 scansioni, ognuna delle quali composta da 31 step distanziati 11 cm l'uno dall'altro in senso longitudinale. Tutte le scansioni sono state eseguite non a contatto (0.5 cm di distanza dalla

superficie). In questo caso il valore della costante dielettrica di riferimento, misurato con il metodo della sonda coassiale, risulta essere circa  $\epsilon=2$ . Inoltre i restauratori hanno messo a disposizione un endoscopio con cui è stato possibile confrontare la reale struttura della volta con i risultati ottenuti con il nostro strumento di indagine; infatti per una parte della struttura, per i restauratori è stato possibile sfruttare dei piccoli fori già esistenti sull'intonaco dell'affresco per studiare la composizione della stratificazione ed, in particolare per una di queste aree, è stato possibile misurare effettivamente il distacco e confrontarlo con i risultati ottenuti. A tal fine sono riportate di seguito le due slice – slice 15 e 25 in Figura 28 - per le quali è stato possibile effettuare il confronto con il metodo endoscopico e che si riferiscono alle parti di opera con distacco più marcato.



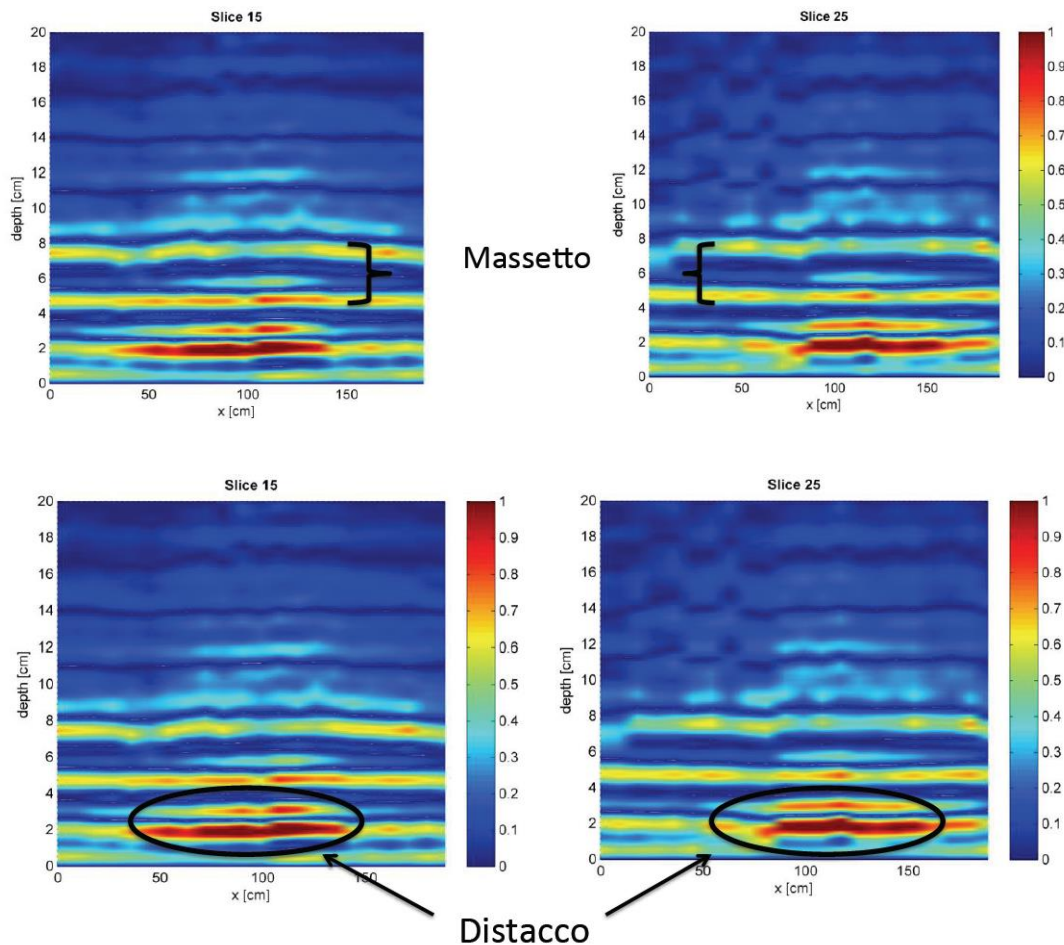


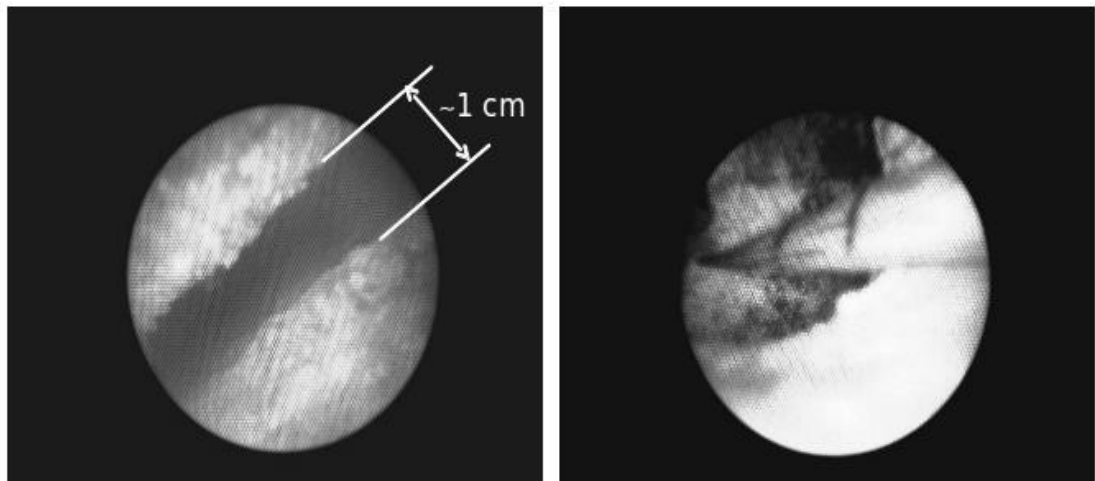
Figura 28 – Risultati della misura

Iniziamo dall'analisi della prima "slice" nella quale è possibile individuare la prima interfaccia ovvero quella relativa al passaggio da mezzo aria ad intonaco (le misure vengono effettuate non a contatto). In seguito è possibile osservare una seconda interfaccia lungo tutta l'asse longitudinale del grafico, attribuibile al cambio di materiale da intonaco a mattoni della volta (per una profondità di circa 3 cm) per passare all'ultima, quella più in profondità, che si riferisce al cambio di interfaccia tra mattoni della volta e massetto della volta (per una profondità di circa 4 cm).

La porzione di grafico evidenziata alla fine, rappresenta l'entità del distacco che risulta essere tra 1 ed 1.5 cm in entrambi i casi. In corrispondenza delle porzioni di grafico riguardanti il distacco, si nota inoltre che la prima interfaccia, relativa all'inizio dello strato di intonaco, non risulta lineare come le altre ma subisce, in corrispondenza del distacco, un effetto di rilassamento. Questo fenomeno avviene

tipicamente agli intonaci a seguito di distacco.

Come già accennato, questa prova, ovvero la misura dell'entità del distacco con il riflettometro, è stata verificata confrontando i dati ottenuti tramite l'utilizzo dell'endoscopio. Quest'ultimo ha confermato l'entità del distacco, pari a circa 1cm, come testimoniano anche le immagini seguenti:



*Figura 29 – Entità del distacco misurata con endoscopio*

Grazie all'occasione di operare in campo che ci ha offerto l'Opificio delle Pietre Dure, è stato possibile mostrare ancor più chiaramente le potenzialità dello strumento di indagine studiato ed in fase di sviluppo. L'operazione di misura effettuata sulla volta affrescata ha inoltre messo in luce le caratteristiche di portabilità dello strumento e di facilità di utilizzo in quanto l'intera operazione, trattandosi di una volta, è stata effettuata su di un ponteggio che può rappresentare sicuramente un ostacolo per tanti altri mezzi e metodi diagnostici.





## Capitolo 3: Il metodo radar FMCW

---



### 3.1 Introduzione

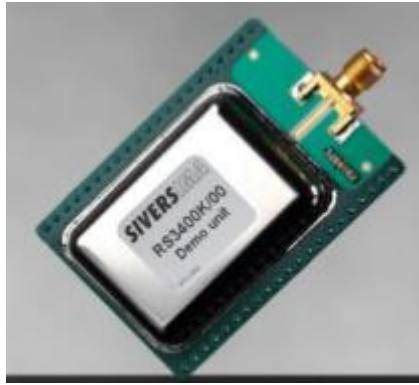
In questa parte dell'elaborato di tesi sarà presentato lo studio, anche se preliminare, di un sistema di indagine strutturale basato sull'utilizzo di un modulo radar FMCW (Frequency Modulated Continuous Wave), operante in banda X.

Lo scopo dell'attività rimane quello di studiare nuovi possibili metodi di indagine in grado di essere robusti, semplici da utilizzare ed allo stesso tempo che permettano di investigare la struttura anche nella porzione immediatamente prossima alla superficie. Diversamente da quanto avvenuto con il metodo riflettometrico, l'attività riguardante il radar FMCW è arrivata, come già detto, soltanto alla fase preliminare ed è stato possibile effettuare un solo test in laboratorio su di una struttura semplificata. Ad ogni modo, nonostante questo studio rappresenti solo il primo passo per una valutazione approfondita della possibilità di utilizzare tale sistema come strumento di indagine, i risultati forniti risultano senz'altro interessanti.

Attualmente i radar FMCW trovano largo impiego in ambito automotive, marittimo e, più in generale, in quello industriale, infatti, possono essere usati ad esempio come misuratori di livello piuttosto che come rilevatori di ostacoli da inserire a bordo dei veicoli. Il loro crescente utilizzo è legato soprattutto alla semplicità di funzionamento e ad un prezzo sul mercato sempre più competitivo.

Il modulo utilizzato durante questa fase sperimentale preliminare è il seguente:

- SiversIMA RS3400X/00 con banda estesa da 9.250 GHz a 10.750 GHz;



*Figura 30- SiversIMA RS3400X*

### **3.2 Principio di funzionamento del Radar FMCW**

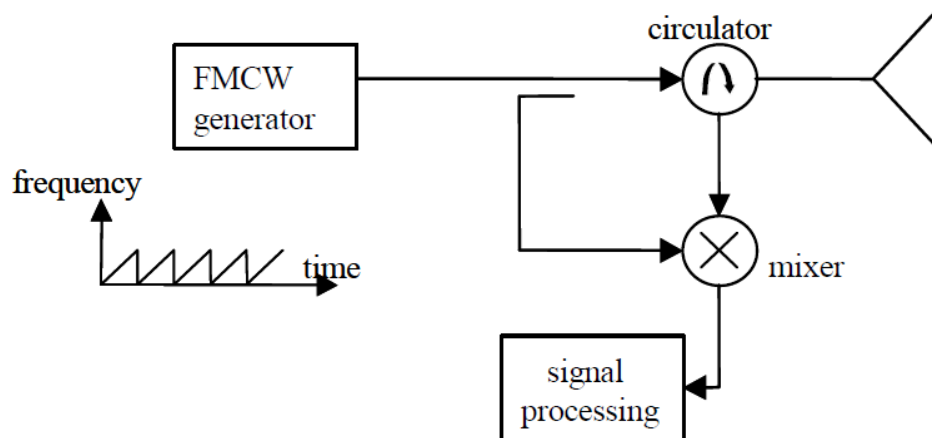
I Frequency Modulated Continuous Wave (FMCW) sono radar ad onda continua modulata in frequenza e nascono come naturale evoluzione del radar ad onda continua. Dalla modulazione di tale onda continua si riescono infatti ad ottenere informazioni riguardo la posizione del target. Nel nostro caso, quello che abbiamo appena definito in generale come target, sarà dunque rappresentato dalle varie interfacce che compongono la struttura sotto indagine.

In generale, le modulazioni utilizzabili da applicare sull'onda continua risultano essere tipicamente le seguenti forme d'onda (l'onda trasmessa dal radar FMCW è solitamente detta '*chirp*'):

- Dente di sega
- Triangolare
- Sinusoidale
- Quadratica

Dal punto di vista circuitale i moduli radar possono prevedere l'utilizzo di due

antenne, una trasmittente ed una ricevente, oppure di una singola antenna facente funzione sia da trasmettitore che da ricevitore. Nella figura seguente è data una rappresentazione dello schema a blocchi di principio di un radar FMCW a singola antenna che è peraltro la soluzione da noi utilizzata durante l'attività di ricerca.



*Figura 31 - FMCW*

Al fine di dare una breve presentazione del principio di funzionamento di un radar FMCW possiamo considerare, per semplicità, una modulazione lineare con un andamento della frequenza crescente rispetto al tempo come riportato nella figura sotto:

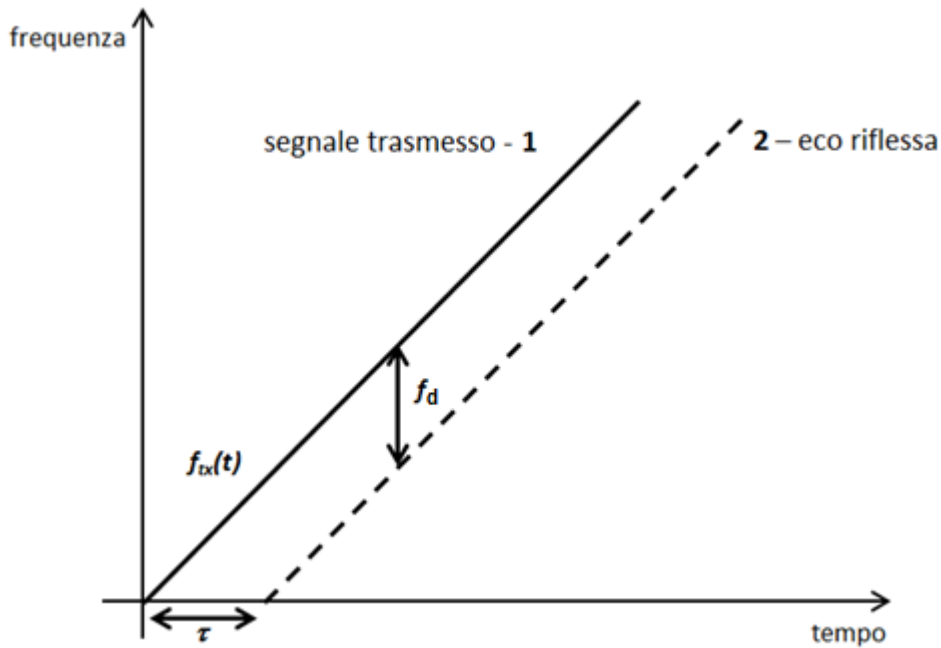


Figura 32 - Modulazione lineare della frequenza

La retta marcata con 1 si riferisce al segnale trasmesso con una determinata frequenza  $f_{tx}(t)$ . Prendiamo adesso il caso in cui il radar si trovi ad irradiare in presenza di un ostacolo che potrebbe essere l'interfaccia tra due mezzi di caratteristiche elettromagnetiche diverse. Una volta che l'onda sarà stata irradiata inciderà sull'ostacolo venendo in parte riflessa, come si vede dal segnale eco riflessa presente nel grafico di Figura 32, per giungere nuovamente al ricevitore dopo un certo tempo detto anche *tempo di volo*. Considerando l'ostacolo stazionario possiamo esprimere tale tempo attraverso la seguente relazione:

$$\tau = \frac{2R}{c} \tag{51}$$

dove  $c$  è la velocità della luce.

Per l'esempio considerato ci aspettiamo che il segnale ricevuto sia una copia esatta di quello trasmesso, a meno del ritardo temporale  $\tau$ . Una volta posti entrambi i segnali, trasmesso e ricevuto, in ingresso al mixer quello che otterremo in uscita è il risultato del battimento tra i due segnali considerati ovvero un terzo segnale con frequenza costante  $f_d$ . Attraverso la definizione di tale frequenza è poi possibile risalire alla posizione dell'ostacolo attraverso una misura della distanza tra il radar e l'ostacolo stesso utilizzando la seguente relazione:

$$f_d = \frac{2R}{c} \cdot \frac{\partial f_{tx}}{\partial t} \quad (52)$$

Quanto fino ad ora presentato è valido solo da un punto di vista esemplificativo, in realtà non sarà possibile far variare la frequenza del segnale modulato in modo lineare e crescente all'infinito; proprio per questo motivo, nel caso reale vengono utilizzate le modulazioni introdotte all'inizio del paragrafo.

A titolo esemplificativo andremo a considerare una modulazione del tipo *dente di sega* e a riformulare i concetti appena espressi.

Iniziamo con il definire il segnale trasmesso attraverso la seguente relazione:

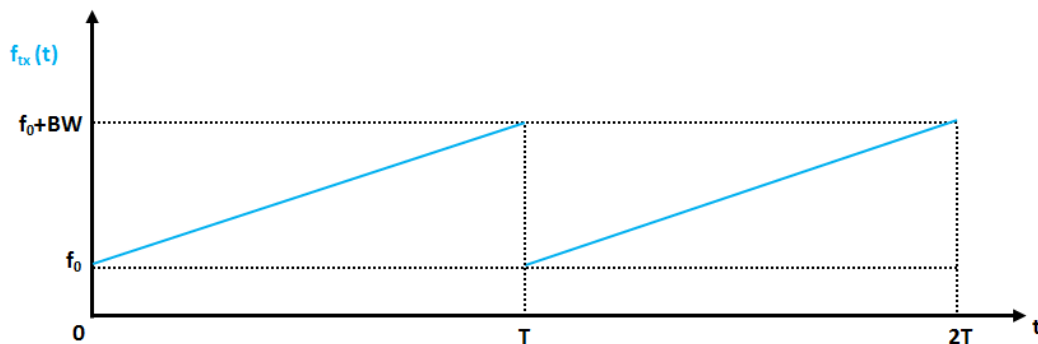
$$s_{tx}(t) = A_{tx} \cos(2\pi f_{tx} t + \theta_0) \quad (53)$$

dove  $A_{tx}$  identifica l'ampiezza del segnale trasmesso e  $\theta_0$  rappresenta invece la fase iniziale dello stesso segnale. La frequenza  $f_{tx}$ , come detto, dovrà variare

linearmente rispetto al tempo e sarà esprimibile attraverso la seguente relazione:

$$f_{tx} = f_0 + k_{ft} t \quad , 0 \leq t \leq T \quad (54)$$

dove con  $f_0$  indichiamo la frequenza iniziale, con  $T$  indichiamo il periodo della forma d'onda dente di sega e con  $k_f$  facciamo riferimento invece alla pendenza del fronte di salita del segnale dente di sega, definito come il rapporto tra la larghezza di banda  $BW$  ed il periodo  $T$  ( $k_f = BW/T$ ) e che fornisce anche un'informazione circa la velocità con cui stiamo conducendo la "spazzolata in frequenza".



*Figura 33 - Segnale tempo-frequenza trasmesso*

Anche in questo caso ci poniamo nella condizione di presenza di singolo riflettore e come fatto in precedenza possiamo supporre idealmente che il segnale ricevuto sia una replica di quello trasmesso a meno di un ritardo  $\tau$  (Figura 34).



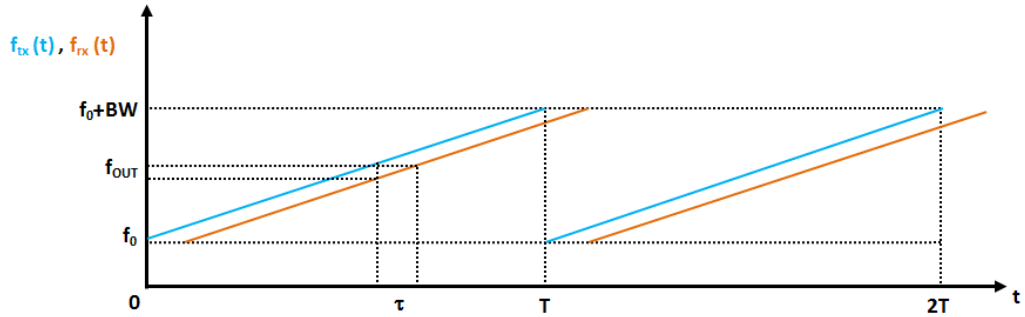


Figura 34 - Segnale tempo-frequenza trasmesso e ricevuto

Il segnale ricevuto sarà dunque esprimibile attraverso la seguente relazione:

$$s_{rx} = A_{rx} \cos[2\pi f_{rx}(t - \tau)] \quad (55)$$

Quindi, alla luce di quanto appena affermato al riguardo del segnale ricevuto, possiamo dire che la frequenza dello stesso segnale ricevuto varierà linearmente secondo la seguente relazione:

$$f_{rx} = f_0 + k_{ft}(t - \tau) \quad , 0 \leq t \leq T \quad (56)$$

A questo punto è facile dimostrare che in uscita dal mixer avremo il segnale risultato del prodotto del segnale ricevuto e di quello trasmesso, infatti:

$$\begin{aligned} s_{mix}(t) &= s_{tx} \cdot s_{rx} = A_{tx} A_{rx} \cos(2\pi f_{tx} t) \cos(2\pi f_{rx} t) \\ &= \frac{A_{tx} A_{rx}}{2} [\cos(2\pi(f_{tx} + f_{rx})t) + \cos(2\pi(f_{tx} - f_{rx})t)] \end{aligned} \quad (57)$$

A questo punto sul segnale in uscita dal mixer viene effettuata un'operazione di filtraggio di tipo passa basso che ha come effetto quello di eliminare i termini in

alta frequenza ovvero il primo termine coseno all'interno delle parentesi quadre.

Dunque l'espressione del segnale di uscita può essere riformulato nel modo seguente:

$$s_{out}(t) = \frac{A_{tx}A_{rx}}{2} \cos(2\pi k_f(f_{tx} - f_{rx})t) \quad (58)$$

Andando adesso a considerare la differenza  $f_{tx}-f_{rx}$ , per come sono state definite rispettivamente le due grandezze, possiamo porre:

$$f_{out} = f_{tx} - f_{rx} = \tau k_f = \frac{2R BW}{v_f T} \quad (59)$$

dove R è ancora la distanza tra ostacolo e radar mentre  $v_f$  esprime la velocità di fase dell'onda all'interno del mezzo in cui si trova a propagarsi (ricordo che nel caso del vuoto la velocità di fase coincide con la velocità della luce c).

Da quest'ultima relazione scritta è infine possibile ricavare un'espressione che lega la distanza R del target ai parametri radar e del mezzo di propagazione:

$$R = \frac{f_{out} v_f T}{2BW} \quad (60)$$

Dal punto di vista pratico l'operazione di localizzazione del picco sarà resa possibile dal passaggio del segnale, riportato nella relazione (58), dal dominio del tempo a quella della frequenza. Infatti, lo spettro del segnale appena considerato, risulterà costituito da un picco centrato sulla frequenza  $f_{out}$  dalla quale, utilizzando la

relazione (60), sarà possibile ricavare la distanza del target. Essendo i segnali in questione tempo discreti il passaggio dal dominio del tempo a quello della frequenza, necessario per la valutazione dello spettro, sarà reso possibile attraverso la Trasformata Discreta di Fourier (DFT).

Ancora una volta, come fatto peraltro con il sistema riflettometrico, possiamo definire le capacità prestazionali del radar, ovvero l'accuratezza nella misura della distanza del target, attraverso appunto la definizione della massima risoluzione, ancora data dal criterio di Rayleigh:

$$D_{\max} = \frac{c_0}{2B\sqrt{\epsilon}} \quad (61)$$

Ricordando che la banda  $B$  in questo caso vale 1.5 GHz ed ipotizzando come mezzo il vuoto, possiamo facilmente ricavare che il valore di risoluzione risulta 10 cm. Per quello che è lo scopo applicativo di tale sistema di indagine il valore ottenuto risulta effettivamente esagerato rispetto all'obiettivo di investigazione che prevede appunto una capacità risolutiva di almeno 1-2 cm. Quanto appena detto significa che la disponibilità di banda del sistema radar è limitata rispetto a quanto effettivamente necessario per condurre test investigativi secondo quanto richiesto dal nostro obiettivo. La limitatezza di banda come abbiamo detto rappresenta quindi un vincolo rispetto alla risoluzione massima ottenibile dal sistema radar in quanto operando, sul segnale digitale fornito dal modulo radar, il calcolo della DFT si può incorrere nel fenomeno comunemente noto come "spectral leakage" di cui daremo una descrizione nel successivo paragrafo.

### 3.3 Leakage Spettrale

Come già accennato nel paragrafo precedente, il segnale in uscita dal modulo radar e dal cui spettro vorremmo ricavare le informazioni circa la posizione del target, risulta essere campionato nel tempo e non continuo. In generale un segnale campionato può essere espresso nel seguente modo:

$$s(kT_p) = A_0 \sin(2\pi f_0 kT_p + \varphi_0) \quad (62)$$

Dove  $T_p$  è il passo di campionamento ovvero il reciproco della frequenza di campionamento  $F_p$  la quale dovrà essere scelta in modo da rispettare il teorema del campionamento di Nyquist al fine di evitare il fenomeno dell'*aliasing* ovvero la sovrapposizione delle repliche spettrali. Il termine  $k$  è invece un numero intero.

Dal momento che il segnale non è continuo anziché usare la trasformata di Fourier sarà necessario utilizzare la DFT ovvero l'equivalente della trasformata continua di Fourier nel dominio discreto. Applicando la DFT al nostro caso avremmo a che fare con un numero limitato  $N$  di campioni su cui applicare la trasformata discreta definita come:

$$S(nF) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} T_p s(kT_p) \exp^{-j2\pi n T_p n F} \quad (63)$$

Dove  $k_0$  è l'istante iniziale di campionamento,  $F$  identifica la risoluzione spettrale definita nel modo seguente:

$$F = \frac{F_p}{N} = \frac{1}{NT_p} \quad (64)$$

La limitatezza della sommatoria a valori finiti può essere proprio ricondotta ad un'operazione di "finestratura" del segnale nel dominio del tempo. Possiamo quindi definire la durata di tale finestra come:

$$T_w = \frac{N}{F_p} = NT_p \quad (65)$$

Tale operazione di finestratura, ovvero l'osservazione 'finita' del segnale nel dominio del tempo, corrisponde ad una discretizzazione dello spettro dato che l'espressione appena data per la DFT risulta essere una funzione complessa.

Consideriamo adesso un generico segnale nel dominio del tempo  $s(t)$ , di spettro  $S(f)$ , e cerchiamo di riassumere i passi necessari al calcolo della DFT (Discrete Fourier Transform) e di valutare gli effetti di questa in entrambi i domini tempo e frequenza. Per come abbiamo definito l'operatore DFT, possiamo individuare come prima operazione quella del campionamento a frequenza  $F_p$  del segnale  $s(t)$ . Tale operazione, nel corrispondente dominio della frequenza, si traduce in una ripetizione periodica dello spettro. Il risultato ottenuto è la naturale conseguenza del teorema del campionamento di Nyquist. Ritornando alla descrizione dei passaggi che concorrono all'esecuzione dell'operazione di DFT, proseguiamo dicendo che a seguito del campionamento verrà selezionato solo un numero finito di campioni in virtù proprio del troncamento della sommatoria presente nella

relazione (63). Il troncamento della sommatoria, come abbiamo già detto , può essere identificata come un'operazione di finestrazione del segnale a cui ci possiamo riferire introducendo una funzione  $w(kT_p)$  che assumerà valore unitario nell'intervallo  $k_0 < k < k_0 + N - 1$ . In altre parole, il segnale nel dominio del tempo verrà moltiplicato per tale funzione finestra ottenendo così un segnale uguale a quello discretizzato all'interno del periodo di osservazione determinato dalla finestra stessa e nullo altrove. Nel dominio della frequenza, questa operazione risulterà equivalente ad un prodotto di convoluzione tra lo spettro  $S(f)$  e lo spettro della funzione finestra  $W(f)$  che adesso diventa:

$$W(nF) = T_w \text{sinc}(n) e^{-j\pi n} \quad (66)$$

Infine l'ultimo passo, a completamento dell'operazione di DFT, è rappresentato dalla ripetizione, nel dominio del tempo, dei campioni acquisiti nell'intervallo di durata  $T_w$ , generando quindi la comparsa di massimi secondari o lobi secondari nello spettro del segnale  $S(f)$ .

Al termine del calcolo della DFT per il segnale sinusoidale considerato in (62) si avrà:

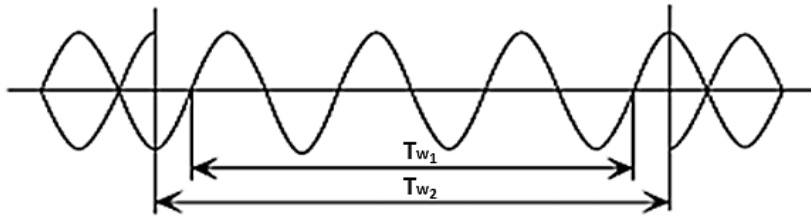
$$S(nF) = -\frac{jA_0}{2} e^{j\varphi_0} W(nF - f_0) + \frac{jA_0}{2} e^{-j\varphi_0} W(nF + f_0) \quad (67)$$

dove il termine  $W(nF)$  tiene conto della presenza della funzione finestra. L'utilizzo

di tale procedura può introdurre distorsioni se il campionamento e la finestatura non vengono eseguiti in modo corretto.

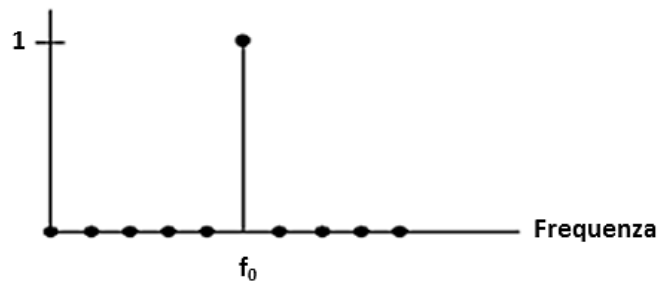
Infatti se per il nostro segnale consideriamo un periodo di osservazione coincidente con la durata temporale delle finestra, pari o multiplo intero del periodo del segnale, allora il risultato sarà che la ripetizione spettrale non introdurrà distorsione; viceversa, se la durata della finestra non coincide con un numero pari o multiplo intero del periodo, otterremo uno spettro contenente armoniche che non sono riconducibili al segnale di partenza. Questo sostanzialmente accade quando i campioni dello spettro non coincidono più con gli zeri della funzione finestra e quindi si ha come effetto una dispersione dell'energia della traccia spettrale del segnale lungo tutta l'asse delle frequenze, questo fenomeno è appunto noto come "*spectral leakage*".

In altre parole nell'ambito della rivelazione radar questo si traduce in una indeterminazione della corretta posizione di target nonché l'incapacità di distinguere due target od ostacoli vicini. Il fenomeno a cui abbiamo fatto appena riferimento può essere facilmente compreso attraverso il seguente esempio. Consideriamo il segnale sinusoidale di Figura 35 a cui applichiamo prima una finestra con periodo di osservazione  $T_{w1}$  di durata pari ad un multiplo intero del segnale considerato e successivamente una finestra di durata  $T_{w2}$  non coincidente con un multiplo intero del periodo.



*Figura 35-Esempio finestatura*

Applicando la giusta finestra di durata  $T_{w1}$  si osserva che i campioni dello spettro coincidono con gli zeri della funzione finestra ad eccezione della frequenza in corrispondenza della quale il campione ha ampiezza massima come riportato in Figura 36.

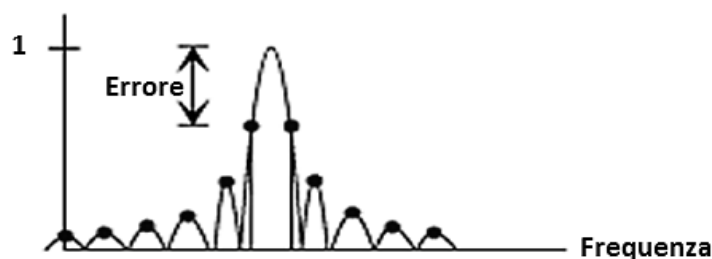


*Figura 36-Finestratura corretta, periodo di osservazione multiplo intero del periodo del segnale*

Viceversa, applicando una finestra di durata  $T_{w2}$  otterremo uno spettro nel quale i campioni non coincidono con gli zeri della funzione finestra causando una distorsione del contenuto spettrale come riportato in Figura 37.

Con riferimento specifico al caso radar, quanto riportato in Figura 37 si traduce in una indeterminazione della posizione del target.





*Figura 37- Finestratura non corretta, periodo di osservazione non multiplo intero del periodo del segnale*

### 3.4 Le tecniche di super-risoluzione

Quanto appena detto fino qui mette in luce le problematiche maggiori che derivano dall'utilizzo dell'operazione di DFT necessaria al fine di poter passare dal dominio del tempo a quello della frequenza. Il passaggio tra i due domini risulta necessario se vogliamo utilizzare lo spettro del segnale ricevuto per l'investigazione e successivamente la caratterizzazione della struttura indagata. Allo scopo di svincolarci dalle limitazioni prestazionali introdotte da un approccio DFT classico, affrontate nel precedente paragrafo, ci vengono in aiuto gli *algoritmi di super-risoluzione* i quali, attraverso approcci di tipo statistico, ci permettono di aumentare le capacità risolutive del sistema senza dover cambiare per questo il sistema stesso. Prima di procedere all'esposizione dell'approccio di super-risoluzione da noi utilizzato può essere utile dare una descrizione generale di questi particolari metodi di elaborazione dei segnali.

Possiamo quindi iniziare dicendo che gli approcci di super-risoluzione si distinguono in base a due classi di algoritmi:

- Parametrici: si sfruttano delle conoscenze a priori sullo scenario da

investigare, si fanno ipotesi sul modello rappresentativo

- Non Parametrici: Nessun conoscenza a priori sullo scenario da investigare

Tra gli algoritmi di tipo parametrico risulta interessante ed innovativa l'applicazione del teorema di Bayes come approccio alla super-risoluzione, di cui daremo nel seguito del paragrafo una descrizione delle caratteristiche principali passando poi alla contestualizzazione dei concetti espressi al caso del segnale radar FMCW.

### **3.4.1 Analisi spettrale Bayesiana**

Nella realtà, come ben sappiamo, i dati di misura sono raramente disponibili in quantità e qualità sufficienti a garantire e consentire una deduzione scientifica completa del processo che li ha generati. Infatti quello che più comunemente viene effettuato è la deduzione e la costruzione di un modello rappresentativo del fenomeno che ha generato i dati a partire dai dati stessi.

Si possono però anche verificare casi in cui si hanno a disposizione delle informazioni a priori aggiuntive circa alcuni parametri che fanno parte dell'esperimento statistico che stiamo osservando, derivanti ad esempio da esperimenti precedenti o semplicemente ipotizzate al momento. Il caso appena considerato, ovvero la conoscenza di informazioni aggiuntive note a priori, è proprio quello su cui si basa l'approccio statistico bayesiano. Infatti, considerando quanto affermato dal teorema di Bayes, è possibile legare l'informazione proveniente dai dati di misura, o più in generale dall'esperimento, con quella disponibile a priori al fine di ottenere come risultato una distribuzione di probabilità a posteriori che fornisca una rappresentazione del fenomeno e dei parametri di interesse. In altre parole potremmo affermare che l'inferenza bayesiana valuta un'ipotesi (o modello),  $H$ , alla luce di alcuni dati osservati,  $D$ , e

alcune informazioni preliminari,  $I$ .

Partendo da quanto affermato nel teorema di Bayes, la probabilità a posteriore può essere definita nel seguente modo:

$$P(H|D, I) = \frac{P(D|H, I)P(H|I)}{P(D|I)} \quad (68)$$

dove  $P(D|H, I)$  è la probabilità di osservare i dati di misura a partire dall'ipotesi formulata e dalle informazioni pregresse. Solitamente ci si riferisce a questa probabilità con il termine di *funzione di verosimiglianza*. Il termine  $P(H|I)$  si riferisce invece alla probabilità a priori delle ipotesi mentre  $P(D|I)$  rappresenta la *funzione di verosimiglianza marginale* la quale, nel caso della stima dei parametri a modello fissato, può essere considerata semplicemente una costante di normalizzazione per la probabilità e può dunque essere trascurata nel processo di calcolo della probabilità a priori stessa.

Una volta introdotti i concetti di base riguardanti l'inferenza bayesiana, passiamo adesso ad una descrizione generale del processo di stima spettrale fondata su di un approccio di tipo bayesiano. La prima fase della stima spettrale bayesiana è rappresentata dalla definizione, o per meglio dire costruzione del modello per i dati osservati, che come abbiamo già accennato nella parte introduttiva è strettamente legato all'ipotesi  $H$ . Il modello che dovrà essere costruito riguarderà l'ipotesi relativa ai dati osservati che in generale saranno distinti per frequenza  $\omega$ , il nostro parametro di interesse, ed ampiezza. Una volta definito il modello passeremo al calcolo della probabilità a posteriori, l'incognita del problema, per i parametri di interesse  $\omega$  secondo quanto affermato dal teorema di Bayes nella relazione (66).

Per facilitare la comprensione della teoria di base per la costruzione del modello, iniziamo con il considerare un set discreto  $D$  di  $N$  dati tale che  $D = \{d_1(t_1), \dots, d_N(t_N)\}$ , con  $t_n$  l'istante discreto di osservazione. I singoli dati  $d(t_i)$  possono essere definiti attraverso la seguente relazione:

$$d(t_i) = s(t_i) + g(t_i) + e(t_i) \quad (69)$$

dove  $s(t_i)$  rappresenta il segnale di interesse,  $g(t_i)$  rappresenta invece una funzione aggiuntiva che tiene conto anche dei parametri noti a priori mentre,  $e(t_i)$  tiene invece conto del rumore sulla cui distribuzione statistica, per adesso, non facciamo nessuna ipotesi. Calcolare la grandezza di interesse  $s(t_i)$  può effettivamente risultare complicato ma fortunatamente, come vedremo, possiamo rendere più semplici le cose considerando lo stesso segnale di interesse come combinazione lineare di un numero finito  $m_s$  di funzioni, che definiremo come funzioni del modello e che indicheremo con  $\psi_j$ , le quali, a loro volta risultano parametrizzate rispetto al termine di interesse  $\omega$ . La combinazione lineare a cui abbiamo fatto appena riferimento può essere espressa come segue:

$$s(t_i) = \sum_{j=1}^{m_s} a_j \psi_j(\omega, t_i) \quad (70)$$

dove i termini indicati con  $a$  rappresentano i coefficienti di espansione della combinazione lineare stessa.

Un procedimento del tutto analogo può essere considerato per la funzione aggiuntiva  $g(t_i)$  ma in questo caso non ci sarà nessuna dipendenza dal parametro di interesse. Infatti è possibile individuare un set di  $m_g$  funzioni  $\zeta_j$  che come abbiamo detto risulteranno indipendenti da  $\omega$ :

$$g(t_i) = \sum_{j=1}^{m_g} b_j \zeta_j(t_i) \quad (71)$$

e analogamente al caso precedente i termini  $b$  rappresentano i coefficienti di espansione della combinazione lineare appena definita. Precisiamo però che i

parametri  $a$  e  $b$  non rappresentano l'obiettivo della nostra inferenza statistica per cui possiamo "racchiuderli" in un unico termine indicato con  $c$  ed il cui compito sarà proprio quello di tenere conto di questi parametri a cui da ora in avanti ci riferiremo con il termine *parametri di disturbo*.

Nonostante la funzione relativa al segnale di interesse  $s(t_i)$  sia funzione dei parametri di interesse mentre, la funzione aggiuntiva  $g(t_i)$  non lo sia, conviene comunque, per semplificare la notazione simbolica e quindi la comprensione dei concetti espressi, condensare entrambi i termini  $\psi_i$  e  $\zeta_i$  in un solo termine che indicheremo con  $\varphi$  e attraverso il quale sarà possibile esprimere la funzione del modello del segnale in modo nuovo, più compatto e conseguentemente più comprensibile:

$$f(t_i) = s(t_i) + g(t_i) = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(\omega, t_i) \quad (72)$$

dove l'indice  $m$  è rappresentativo del numero totale delle funzioni modello ( $m=m_s+m_g$ ).

Per quanto appena scritto, sostituendo la funzione modello del segnale, a quella del modello generale riportata nella relazione (67), possiamo definire la singola osservazione del dato come  $d(t_i)=f(t_i)+e(t_i)$ .

Si deve però precisare che in generale le funzioni del modello ( $\psi_i$  e  $\zeta_i$ ), utilizzate come base per la linearizzazione della funzione del segnale  $s(t_i)$  e di quella aggiuntiva  $g(t_i)$ , non risultano ortogonali allo spazio delle osservazioni  $D$  e questo può rappresentare un ostacolo nel calcolo della relazione del modello e successivamente nel calcolo delle varie distribuzioni di probabilità. Si deve però tenere presente che è possibile ottenere l'ortogonalizzazione di tali funzioni di base, rispetto allo spazio delle osservazioni  $D$ , utilizzando il procedimento di decomposizione di Choleski di cui diamo solo conoscenza in quanto la dimostrazione di questa non è l'obiettivo di questo elaborato. Ad ogni modo al fine di semplificare ulteriormente la comprensione dei concetti espressi considereremo

da ora in poi valida l'affermazione che per le definizioni delle funzioni di modello siano state utilizzate funzioni di base ortogonali.

Riprendendo in considerazione il teorema di Bayes, possiamo esprimere la probabilità congiunta del modello relativo ai parametri  $\omega$  e  $c$  come segue:

$$P(\omega, c|D, H, I) = \frac{P(D|\omega, c, H, I)P(\omega, c, |H, I)}{P(D|H, I)} \quad (73)$$

La funzione di verosimiglianza  $P(D|\omega, c, H, I)$  viene calcolata come comparazione, o per meglio dire come differenza, dei dati prodotti dal modello del segnale identificato nella relazione (70), con il set di dati effettivamente osservati  $D$ . Si intuisce immediatamente che se il modello "ricalca" perfettamente il segnale reale, così per come è definito nella relazione (67), otterremo il solo termine di rumore indicato nel modello con il termine  $e(ti)$ . Senza perdita di generalità consideriamo, per il proseguo dello sviluppo, che tale termine di rumore sia indipendente dal tempo. Nella definizione del modello sarà però necessario fornire un valore plausibile per tale livello di rumore, che in realtà risulta incognito. Fortunatamente però possiamo sfruttare il principio della massima entropia (di cui tralasciamo la dimostrazione) che assegna ad un dato rumore di densità di potenza  $\sigma^2$  una distribuzione di probabilità gaussiana così definita:

$$P(e|\sigma, I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{e^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (74)$$

L'ipotesi fatta circa la distribuzione di probabilità del rumore fornisce risultati corretti se ci si riferisce proprio a quella data potenza di rumore  $\sigma^2$ . Quello che vogliamo è invece rendere il modello indipendente dal valore assunto da  $\sigma^2$  che è reso possibile tramite l'integrale della distribuzione di probabilità scritta nella relazione (72), su tutti i possibili livelli di rumore. Proseguendo nell'analisi e considerando da ora in poi per il rumore la distribuzione di probabilità gaussiana

appena introdotta, la funzione di verosimiglianza può, in questo caso, essere calcolata attraverso la seguente relazione che rappresenta un primo traguardo nella teoria della stima spettrale bayesiana:

$$P(D|\omega, \sigma, c, H, I) \propto \sigma^{-N} \exp \frac{-NQ}{2\sigma^2} \quad (75)$$

nella relazione il termine  $N$  si riferisce semplicemente al numero di dati sperimentali a disposizione mentre per il termine  $Q$  la definizione risulta leggermente più complessa essendo definito nel modo seguente:

$$Q = \bar{d}^2 - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^N c_j d_i \varphi_j(\omega, t_i) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \Phi_{jk} c_j c_k \quad (76)$$

dove con  $\bar{d}^2$  indichiamo la media quadratica dei dati sperimentali così definito  $\bar{d}^2 = \frac{(\sum_{i=1}^N d_i^2)}{N}$ . Il termine  $\Phi_{jk}$  rappresenta invece la matrice delle funzioni del modello, definite in precedenza, e per il quale vale la relazione seguente:

$$\Phi_{jk} = \sum_{i=1}^N \varphi_j(\omega, t_i) \varphi_k(\omega, t_i) \quad (77)$$

A questo punto abbiamo trovato la funzione verosimiglianza che ci potrebbe permettere di calcolare l'incognita probabilità a posteriori. Rimane però un'ultima considerazione da fare relativamente alla dipendenza di tale funzione di verosimiglianza dal parametro relativo al rumore  $\sigma^2$ . Anche questo parametro rappresenta un "disturbo" nel processo di analisi bayesiana e come tale dobbiamo cercare di svincolarci dalla sua parametrizzazione. A tal proposito sono reperibili in letteratura varie tecniche numeriche ed approcci tesi a togliere la presenza di tale

parametro dalla definizione di probabilità a posteriori. Nell'attività presentata in questo elaborato abbiamo preso spunto da un metodo presentato in letterature (*Bayesian Spectrum Analysis and Parameter Estimation*, G. Larry Bretthorst) il quale, ipotizzando per il rumore una distribuzione di probabilità gaussiana, permette di giungere all'espressione della probabilità a posteriori rispetto ai parametri di interesse nella forma di una distribuzione di tipo *t-student* di seguito riportata:

$$P(\omega|D, H, I) \propto \left[1 - \frac{m\bar{h}^2}{Nd^2}\right]^{-\frac{m-N}{2}} \quad (78)$$

Nella relazione appena scritta possiamo individuare con  $h$  la proiezione dei dati osservati sullo spazio ortonormale delle funzioni del modello  $h_j = \sum_{i=1}^N d_i \varphi_j(\omega, t_i)$  e con  $\bar{h}^2 = \frac{(\sum_{i=1}^m h_j^2)}{m}$  che rappresenta la media quadratica dei termini  $h_j$ .

In conclusione sarà proprio l'espressione appena fornita a permettere di estrapolare il parametro di interesse, ovvero le frequenze più probabili (o se vogliamo più "forti") dall'insieme dei dati di misura.

Quanto appena mostrato rappresenta il punto di forza dell'analisi bayesiana la quale offre il vantaggio di potersi concentrare sulla stima dei parametri di interesse del modello in maniera indipendente dai valori degli altri parametri del sistema che abbiamo peraltro definito come parametri di "disturbo". Sono proprio queste le caratteristiche principali che ci hanno spinto ad utilizzare questo metodo come il primo possibile in un approccio di analisi spettrale allo scopo di migliorare la risoluzione del nostro sistema radar FMCW.

Una volta ricavata una relazione compatta e facilmente utilizzabile per la probabilità a posteriori come riportato nell'ultima relazione scritta, passiamo adesso a contestualizzare i concetti espressi rispetto al caso radar FMCW. Per il caso radar che andremo a presentare ci poniamo in una condizione del tutto generica in cui ipotizziamo che il sistema radar si trovi ad irradiare in presenza di una struttura generica nella quale possono essere presenti un certo numero di



discontinuità (o riflettori).

Come fatto per il caso generale ripartiamo dalla definizione di un modello che in questo caso, visto il segnale radar in gioco, può essere rappresentato come una sovrapposizione di armoniche, della forma:

$$A\cos(\omega d_k) + B\sin(\omega d_k) \quad (79)$$

dove identifichiamo con  $k$  la  $k$ -esima discontinuità posta a distanza  $d_k$  dal piano principale di riferimento del sistema radar e dove  $\omega$  rappresenta in generale una funzione della frequenza  $\omega(f)$ . Generalizzando al caso di  $K$  riflettori possiamo quindi dare la seguente definizione del nostro modello per il segnale radar:

$$s(f) = \sum_{k=1}^K [A_k \cos(\omega \cdot d_k) + B_k \sin(\omega \cdot d_k)] \quad (80)$$

Come abbiamo ampiamente evidenziato in tutto il paragrafo, l'obiettivo dell'approccio probabilistico è quello di valutare la probabilità a posteriori dei parametri del problema,  $P(\omega|D,I)$ , una volta noti l'insieme delle osservazioni di misura  $D$  e tutte le informazioni pregresse acquisite  $I$ . I parametri da stimare  $\omega$  coincidono con il set  $\{d_k\}$  delle possibili distanze dei riflettori.

Anche in questo caso possiamo ritenere la funzione di verosimiglianza marginale come una sola costante di normalizzazione della probabilità per cui possiamo affermare che la probabilità a posteriori può essere calcolata attraverso la seguente relazione:

$$P(\omega|D,I) \propto P(\omega|I)P(D|\omega,I) \quad (81)$$

Anche nel caso radar, come fatto durante la descrizione del modello generale,

possiamo assumere per il rumore una distribuzione di tipo gaussiano e conseguentemente fornire per la probabilità a posteriore la seguente relazione dove la stessa probabilità a posteriori risulta proporzionale ad una distribuzione *t-student*:

$$P(\{d_k\}|D, H, I) \propto \left[1 - \frac{m\bar{h}^2}{N\bar{d}^2}\right]^{-\frac{m-N}{2}} \quad (82)$$

Rispetto al caso generale in cui avevamo già definito questa quantità, resta da precisare che in questo caso dovrà essere  $m=2K$  (numero delle funzioni del modello) dove  $K$  è il numero dei riflettori presenti. Ricordiamoci inoltre che il nostro segnale di interesse  $s(f)$  può essere linearizzato; infatti anche per questo è possibile definire una combinazione di funzioni lineari a partire da un set di funzioni ortogonali  $\varphi$  come fatto nella relazione (4) e che possiamo scrivere nella seguente forma:

$$s(f) = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(w, \{d_k\}) \quad (83)$$

A questo punto abbiamo a disposizione tutte le grandezze necessarie al calcolo della probabilità a posteriori incognita.

Dunque, riassumendo, il metodo di stima spettrale basato sull'approccio bayesiano nel contesto del segnale radar FMCW può essere riassunto nei seguenti punti:

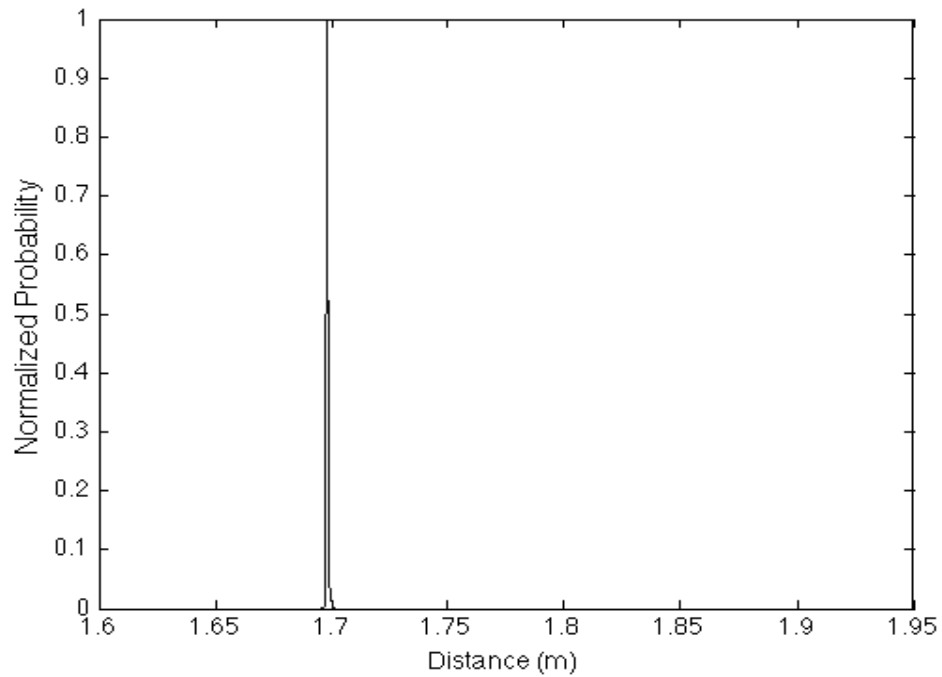
- Una volta assunto un numero di riflessioni “principali” per ogni possibile parametro  $d_k$ , si ricavano le funzioni  $\varphi_j(w, \{d_k\})$  a partire dall'analisi della funzione armonica definita per il modello.
- Successivamente per ogni valore di distanza si calcola la statistica  $\bar{h}^2 = \frac{(\sum_{i=1}^m h_i^2)}{m}$  e la relativa probabilità secondo la relazione (80).

### 3.5 Primi test in laboratorio

Come validazione del metodo, in maniera analoga a quanto fatto per il caso del riflettometro, è stato condotto un test di laboratorio su di una struttura campione rappresentativa di un mezzo stratificato. Durante tutte le verifiche effettuate il segnale radar, prima dell'elaborazione numerica, è stato preventivamente filtrato al fine di attenuare le distorsioni introdotte dal clutter originate dalle discontinuità presenti nel sistema radar (transceiver ed antenna). Ad ogni modo per ottenere una verifica del sistema il più possibile esente da fonti di incertezza derivanti da clutter eccessivo abbiamo deciso di effettuare i primi test in camera anecoica. Il radar utilizzato, come già detto anche nell'introduzione, è il modello Siversima RS3400X operante appunto in banda X. Il sistema software di pilotaggio del sistema radar e di elaborazione dei dati di misura è stato sviluppato in linguaggio Python.

Durante questo primo esperimento abbiamo voluto simulare un modello di struttura stratificata composta da una prima superficie in legno, una tavola dello spessore di circa 3 cm, a cui abbiamo fatto seguire una superficie metallica (lastra piana di alluminio) a distanza di circa 25 cm. Lo scopo di questo test è stato quello di verificare che, attraverso l'applicazione dell'algoritmo di super-risoluzione, si riescono ad identificare tutte le interfacce presenti nella successione di materiali appena presentata. In particolare si vorrebbe essere in grado di identificare lo spessore della tavola in legno che essendo di 3 cm risulta molto al di sotto della capacità risolutiva del radar che come detto nel paragrafo di presentazione del sistema FMCW è di circa 10 cm nel vuoto.

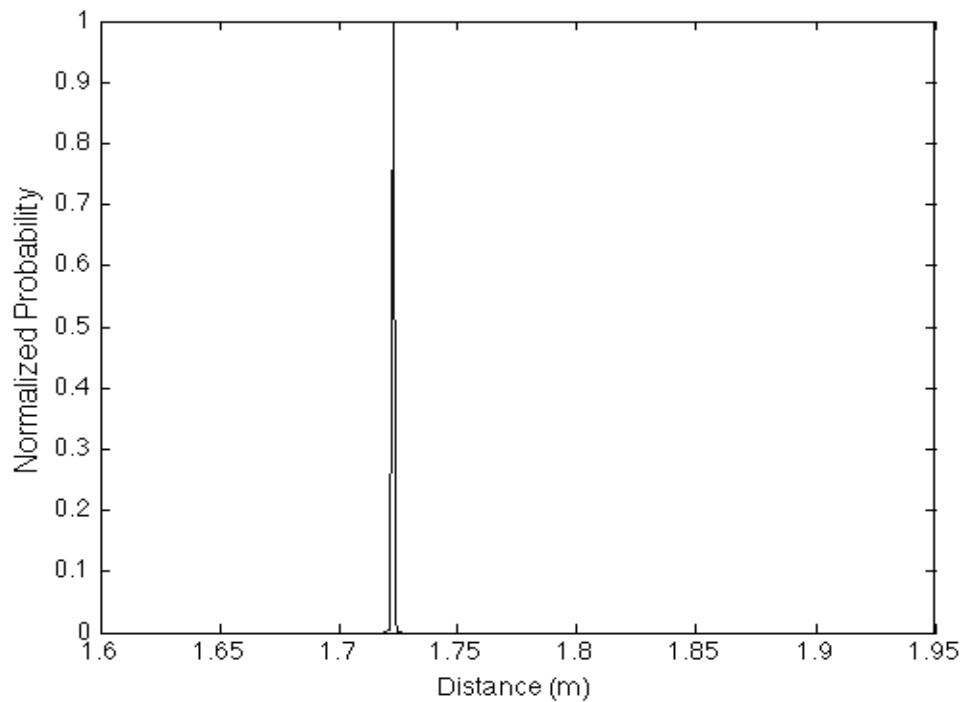
Prima però di valutare la situazione complessiva abbiamo preso in considerazione un caso che potremmo definire di riferimento, nel quale abbiamo fatto radiare il radar in presenza della sola lastra metallica, posto ad una distanza di circa 45 cm dall'antenna; con questa operazione abbiamo voluto tarare il sistema radar. Applicando l'algoritmo di stima spettrale appena presentato ai dati di misura abbiamo ottenuto la seguente probabilità a posteriori normalizzata:



*Figura 38 –Test lastra piana metallica*

La distanza di 1.7 m a cui si riferisce il picco è relativa alla distanza, in termini di lunghezza elettrica, esistente tra l'uscita del transceiver e la lastra piana metallica.

A questo primo esperimento abbiamo fatto seguire il caso in cui è stata posta, alla medesima distanza del caso precedente, la tavola di legno seguita, a contatto, dalla piastra metallica. Il risultato in questo caso è stato il seguente:

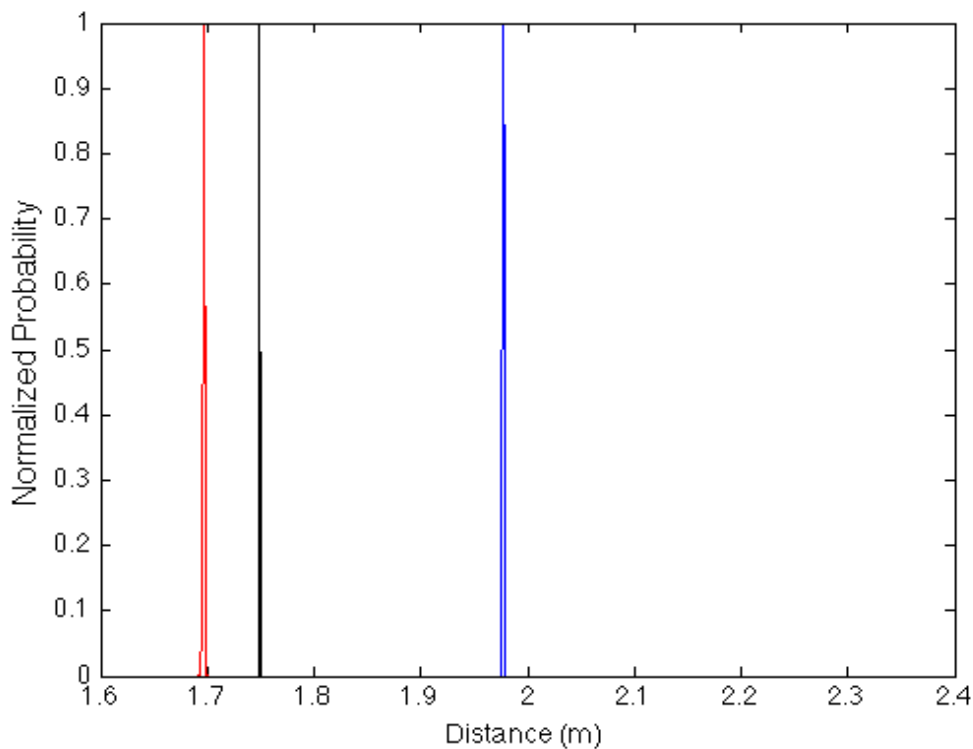


*Figura 39 – Test tavola legno a contatto con la lastra metallica*

In questo caso il picco, che risulta 3 cm più indietro rispetto al caso precedente è relativo alla sola interfaccia legno-metallo senza però dare evidenza della prima interfaccia ovvero quella aria-legno. Evidentemente in questo caso il modello utilizzato tende a massimizzare la probabilità a posteriori relativa proprio alla lastra metallica a discapito della risoluzione e rilevazione della prima interfaccia.

Sicuramente però più interessante risulta la terza prova effettuata che ha visto appunto il caso in cui la distanza tra tavola di legno e lastra metallica è stata portata a circa 25 cm.

In questo caso il risultato fornito dall'applicazione dell'algoritmo di super-risoluzione ai dati di misura è stato il seguente:



*Figura 40 –Test sui 3 mezzi stratificati: tavola in legno, aria, lastra metallica*

in questo caso, come evidenzia il grafico, sono facilmente identificabili i tre picchi, di cui il primo relativo all'interfaccia ari-legno, 5 cm dopo troviamo invece il picco relativo all'interfaccia legno-aria (considerando per il legno una costante dielettrica  $\epsilon=2.5$  tale distanza risulta effettivamente di circa 3 cm) ed infine alla distanza di circa 25 cm da questo ultimo troviamo il picco relativo alla presenza della lastra metallica.

In conclusione, anche se i dati forniti provengono da uno studio poco più che preliminare, il sistema radar, coadiuvato dalla presenza dell'algoritmo di risoluzione con approccio bayesiano, risulta fornire indicazioni interessanti circa il suo possibile impiego nell'ambito dell'indagine strutturale.

## Capitolo 4: Conclusioni

---





L'attività di ricerca svolta durante il dottorato ha avuto come obiettivo quello di studiare e sviluppare nuovi metodi di indagine non distruttiva e non invasiva a microonde con particolare attenzione all'ambito della conservazione dei Beni Culturali.

Infatti, allo stato dell'arte, risulta di particolare importanza proprio nel settore della conservazione dei Beni Culturali, la possibilità di utilizzare strumenti di indagine in grado fornire informazioni circa la "composizione" dei primi centimetri della struttura da investigare al fine di individuare alterazioni strutturali quali, ad esempio, cavità di aria o porzioni di materiale ad elevato contenuto di umidità. Inoltre viste le condizioni in cui è richiesto spesso di operare, il sistema deve essere poco ingombrante, facilmente trasportabile ed in grado di fornire i risultati della misura quasi in tempo reale.

Il sistema a microonde studiato e sviluppato, attualmente ancora in fase prototipale, permette un'investigazione sub-superficiale della struttura sotto test, ovvero offre la possibilità di indagare la struttura da una profondità di circa 1 cm, al di sotto della superficie, fino ad un massimo di circa 30 cm. Il sistema risulta facilmente trasportabile quindi adatto a prove in "cantiere" e di facile utilizzo grazie anche al software (scritto in linguaggio Matlab) con interfaccia grafica che permette di impostare i parametri con cui è stata effettuata la misura e fornisce i risultati come "slice" in falsi colori.

Alla luce dei primi risultati ottenuti dalle misure effettuate in laboratorio prima su di un campione di trave lignea con alterazioni strutturali artificiali e dopo su di un campione proveniente da una struttura architettonica reale e con alterazioni strutturali da scoprire, ci è stata offerta dall'Opificio delle Pietre Dure la possibilità di testare il nostro sistema in situ. L'attività richiesta è stata quella di supportare un gruppo di restauratori durante l'attività di analisi di un affresco (Figura 27 - Pietro da Cortona, "Allegoria della quiete") con sospetto distacco dell'intonaco affrescato. Durante tutta la campagna di misura l'attività è stata seguita dagli stessi restauratori che una volta ricevuti i dati hanno proceduto ad ispezioni della stessa opera con metodi alternativi ed in particolare con il metodo endoscopico. I

risultati ottenuti dal confronto hanno evidenziato le buone capacità del sistema di indagine riflettometrico il quale ha fornito risultati circa lo stato del distacco e la composizione strutturale dell'opera del tutto confermati anche dai risultati ottenuti con metodi alternativi ed anche in base alle informazioni circa la struttura stessa di cui era a conoscenza il gruppo di restauro.

Per quanto riguarda invece il sistema di indagine strutturale non distruttiva basato sull'impiego del modulo radar FMCW, l'attività di studio è obiettivamente ancora troppo allo stadio iniziale e nonostante la prova effettuata in laboratorio non possiamo dire con effettiva certezza che il metodo possa essere applicato anche a casi di studio e prove *in situ* equivalenti a quelli effettuati nel caso del riflettometro a microonde. In tal senso può essere conveniente valutare altri tipi di approcci di super risoluzione anche nella direzione di quelli che si basano su algoritmi non parametrici per i quali cioè non è necessaria nessuna conoscenza a priori riguardo la struttura o eventuali altre informazioni aggiuntive. Ad ogni modo, già da questo primo esperimento, possiamo affermare che nel caso di strutture complesse in cui possono essere inclusi un numero sensibilmente elevato di riflettori l'approccio bayesiano di super risoluzione rischia di essere computazionalmente oneroso e non portare ad un risultato significativo.

# Appendice I: Richiami di elettromagnetismo

---



Il presente paragrafo ha lo scopo di ripercorrere molto velocemente i concetti basilari di elettromagnetismo utili alla comprensione degli effetti che sono alla base dei due sistemi di indagine presentati.

## I.I Equazioni del campo in forma differenziale

Il comportamento del campo elettromagnetico, come noto, può essere determinato a partire da un sistema di equazioni differenziali fra i vettori E, H, D e B che per un mezzo qualsiasi, può essere espresso come di seguito:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (4)$$

Oltre ai vettori del campo, nel sistema di equazioni (1)-(4), appaiono altri due termini, la densità di corrente J e la densità di carica elettrica  $\rho$  i quali risultano in relazione tra loro in base alla seguente relazione nota anche come equazione di continuità :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{-\partial \rho}{\partial t} \quad (5)$$

Esprime cioè il concetto di conservazione della carica elettrica. C'è da precisare inoltre che le equazioni (2) e (4), peraltro derivabili dalle (1) e (3), non rappresentano due equazioni indipendenti. A dimostrazione di quanto appena affermato consideriamo per l'equazione (1) la proprietà che la divergenza di un rotore è sempre nulla, conseguentemente si ottiene l'equazione (2); in modo del tutto analogo, sfruttando cioè la stessa proprietà per l'equazione (3) e considerando l'equazione di continuità (5) si ottiene l'equazione (4).

Generalmente i parametri  $\rho$  e  $J$  risultano essere funzione dei vettori del campo elettromagnetico in virtù del principio fisico per cui cariche e correnti libere possono modificare la loro posizione e distribuzione nello spazio sotto l'azione delle forze esercitate dal campo.

Nel caso in cui, i parametri  $\rho$  e  $J$  possono essere considerati imposti dall'esterno possiamo invece affermare che le cariche e/o le correnti rappresentano le sorgenti da cui si origina il campo. Possiamo affermare che da un punto di vista matematico, le equazioni (1) e (3), insieme alle equazioni costitutive (6) e (7), formano un sistema di quattro equazioni in quattro incognite  $E$ ,  $H$ ,  $D$  e  $B$ , di cui  $\rho$  e  $J$  sono il termine noto. Il sistema a cui abbiamo fatto appena riferimento risulta determinato se sono note le condizioni al contorno del volume in cui si cerca la soluzione e sono noti i valori dei campi all'istante iniziale.

### I.I.I Equazioni costitutive

Per quanto detto nel precedente paragrafo, dei quattro vettori  $E, H, D$  e  $B$  solo due risultano effettivamente indipendenti. Infatti, i vettori  $D$  e  $B$  risultano dipendere da  $E, H$  secondo quanto espresso anche dall'*equazioni costitutive*. Nella maggior parte dei casi, ad esclusione di quelli in cui mezzi sono ferromagnetici, plasmi ecc.,  $B$  risulta proporzionale ad  $H$  mentre  $D$  risulta proporzionale ad  $E$ ; le equazioni costitutive possono quindi essere così espresse:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \tag{6}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (7)$$

Nel caso in cui i mezzi risultino conduttori, la densità di corrente risulta proporzionale al campo elettrico, come espresso dalla relazione seguente nota anche come legge di Ohm:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (8)$$

I simboli introdotti nelle relazioni fino qui presentate rappresentano le grandezze di seguito elencate:

$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  F/m, costante dielettrica del vuoto (Farad/metro)

$\epsilon_r$ , costante dielettrica relativa o permittività; nello spazio vuoto è  $\epsilon_r = 1$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m, permeabilità magnetica del vuoto (henry/metro);

$\mu_r$ , permeabilità magnetica relativa; nello spazio vuoto è  $\mu_r = 1$

$\sigma$  = conducibilità elettrica (siemens/metro); ad es., per il rame,  $\sigma_{Cu} = 5.8 \times 10^7$  S/m

## I.I.II Rappresentazione nel dominio delle frequenze

La soluzione delle equazioni di Maxwell risulta di notevole difficoltà, anche nel caso più semplice di un mezzo come il vuoto per cui possono essere definite equazioni costitutive lineari, quali sono le equazioni (6) - (8), che permettono di eliminare D e B per semplice sostituzione. In ogni caso la soluzione del problema elettromagnetico passa attraverso la risoluzione di due equazioni differenziali nelle due incognite vettoriali E ed H, quindi sei componenti scalari, che dipendono sia dalle coordinate spaziali che dal tempo.

Una semplificazione del problema si può ottenere utilizzando la notazione fasoriale, attraverso la quale possiamo rappresentare un vettore ad esempio il campo elettrico nella forma  $E e^{j\omega t}$ , dove E può scritto nella forma  $E = E_r + jE_i$ . Tale

approccio resta valido per tutti i vettori che compaiono nelle equazioni equazioni fino qui introdotte.

Utilizzando il metodo simbolico per le equazioni scritte in precedenza possiamo scrivere, partendo ad esempio dell'equazione (1), che per quanto riguarda il membro a destra dell'uguale si ha,  $\vec{\nabla} \times (\vec{E}e^{j\omega t}) = e^{j\omega t}\vec{\nabla} \times \vec{E}$ , dato che l'operatore  $\vec{\nabla}$  agisce soltanto sulla dipendenza spaziale di E; per la parte a sinistra dell'uguale possiamo invece scrivere  $\partial (\vec{B}e^{j\omega t})/\partial t = e^{j\omega t}j\omega\vec{B}$  (il vettore-fasore B non dipende da t). Si giunge quindi alla seguente equazione:  $e^{j\omega t}\vec{\nabla} \times \vec{E} = -e^{j\omega t}j\omega\vec{B}$ . Da cui semplificando il termine esponenziale si ottiene,  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\vec{B}$ .

Facciamo un'ulteriore passo avanti nella comprensione dei fenomeni elettromagnetici partendo dal considerare il termine a destra dell'uguale nella (3), noto come densità di corrente totale  $\vec{J}_t$ . Tale termine può essere considerato come composto da tre contributi:

1. corrente di spostamento ( $\partial \vec{D}/\partial t = j\omega\vec{D}$ )
2. corrente di conduzione  $\vec{J}_c = \sigma\vec{E}$
3. corrente impressa  $\vec{J}_{imp}$ ;

e tenendo conto dell'equazioni costitutive riportate nella relazione (7) possiamo esprimere la densità di corrente totale attraverso la seguente espressione:

$$\vec{J}_t = [\sigma(\omega) + j\omega\epsilon_0\epsilon_r(\omega)]\vec{E} + \vec{J}_{imp} = j\omega\epsilon_0\tilde{\epsilon}_r(\omega)\vec{E} + \vec{J}_{imp} \quad (9)$$

dove con quantità  $\tilde{\epsilon}_r(\omega)$  si vogliono riassumere tutte le proprietà dielettriche e di conduzione del materiale. Ricordiamo molto velocemente che quando si vuol mettere in evidenza il contributo dei dipoli del materiale  $\epsilon_r$ , questa viene scritta  $\epsilon_r = 1 + \chi$ , dove  $\chi$  rappresenta la suscettibilità elettrica. Solitamente la suscettibilità è un numero complesso ( $\chi = \chi_1 - j\chi_2$ ) la cui quantità positiva (parte immaginaria di  $\chi$ ) è rappresentativa delle perdite di potenza causate dai fenomeni dissipativi del moto dei dipoli.



Per quanto detto anche la costante dielettrica  $\epsilon_r = \epsilon_{r1} - j\epsilon_{r2}$  sarà un numero complesso di parte reale uguale a  $1 + \chi_1$  e parte immaginaria uguale  $\chi_2$ . Si giunge dunque ad una nuova forma del termine  $\tilde{\epsilon}_r(\omega)$  introdotto nella relazione (9) e che può adesso essere espresso come di seguito:

$$\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_{r1} - j\left(\epsilon_{r2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}\right) \quad (10)$$

Quest'ultima relazione scritta riveste un'importanza particolare in quanto permette di descrivere mezzi materiali anche notevolmente complessi. Per completezza dunque si riscrivono qui di seguito le Eq.ni fondamentali del campo EM (1) – (4) in termini di vettori e scalari complessi:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} + \vec{J}_{imp} \quad (13)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{imp} \quad (14)$$

### I.I.III Energia e potenza nel campo EM

La presenza di campo elettromagnetico in una certa zona dello spazio comporta che ad esso sia associata una certa quantità di energia, di seguito sono riportate le relazioni fondamentali che quantificano tale energia. Per semplicità facciamo l'ipotesi di aver a che fare con un mezzo omogeneo e non dispersivo.

Assumiamo poi che nel mezzo considerato, oltre alla corrente di spostamento e di conduzione siano presenti sorgenti di corrente impressa  $\overrightarrow{J_{imp}}$ . Applicando alcune identità vettoriali, di cui tralasciamo la dimostrazione, al prodotto dei campi  $\vec{E} \times \overrightarrow{H^*}$  si ottiene  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \overrightarrow{H^*}) = \overrightarrow{H^*} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \overrightarrow{H^*})$ .

Utilizzando poi le equazioni di Maxwell espresse nella relazione (11) e (13) possiamo eliminare i rotori e una volta riordinati i termini otteniamo:

$$\sigma \vec{E} \cdot \overrightarrow{E^*} + j\omega(\mu \vec{H} \cdot \overrightarrow{H^*} - \epsilon \vec{E} \cdot \overrightarrow{E^*}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \overrightarrow{H^*})$$

Se adesso consideriamo un volume V arbitrario, racchiuso da una superficie S con normale diretta verso l'esterno del volume stesso, integrando poi i membri dell'equazione appena scritta sul volume V ed applicando il teorema della divergenza al termine che contiene  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \overrightarrow{H^*})$  e dividendo poi per 2, si arriva alla seguente espressione:

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \overrightarrow{J_{imp}^*} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \sigma \vec{E} \cdot \overrightarrow{E^*} dV + 2j\omega \int_V \frac{\mu \vec{H} \cdot \overrightarrow{H^*} - \epsilon \vec{E} \cdot \overrightarrow{E^*}}{4} dV \\ &+ \frac{1}{2} \oint_S \vec{E} \times \overrightarrow{H^*} \cdot \hat{n} dS \end{aligned} \quad (15)$$

Da cui, considerando il prodotto vettoriale interno all'integrale di superficie, possiamo esplicitare il *vettore di Poynting* :

$$S = E \times H^* \quad (16)$$

La relazione appena scritta riassume il teorema del vettore di Poynting complesso, il quale a sua volta esprime un bilancio energetico per il volume V. Riprendendo la relazione (15), possiamo aggiungere che l'uguaglianza delle parti reali può essere interpretata come potenza media immessa nel volume V dalle sorgenti, la quale

viene in parte dissipata all'interno del volume e in parte (riferendosi alla parte reale del flusso di S) trasportata all'esterno del volume dal vettore di Poynting. Per quanto appena affermato possiamo dare al vettore di Poynting il significato di densità di flusso di potenza elettromagnetica. Sempre facendo riferimento alla relazione (15), la parte immaginaria può essere interpretata come la potenza reattiva che le sorgenti e il mondo esterno scambiano con il volume V, tale scambio risulta pari alla differenza fra l'energia media immagazzinata nel campo magnetico meno quella media immagazzinata nel campo elettrico.

#### **I.I.IV Propagazione del campo elettromagnetico: onde elettromagnetiche**

Nel presente paragrafo verranno richiamate alcune proprietà del fenomeno della propagazione delle onde elettromagnetiche con particolare riferimento al più semplice modello di onda ovvero l'onda piana. Questo particolare tipo di onda nella sua semplicità concettuale riveste un ruolo importante nella teoria delle onde elettromagnetiche in quanto la gran parte dei fenomeni propagativi, in particolari condizioni, può essere ricondotto ad uno studio basato proprio su questo tipo di onde. L'introduzione di questi concetti, anche se molto superficiale, risulta necessaria ai fini della comprensione dei principi di base del sistema di indagine presentato in questo elaborato.

Consideriamo dunque, ancora per semplicità, un mezzo omogeneo, indefinito e privo di sorgenti ( $\vec{J} = 0, \rho = 0$ ). Per l'ipotesi appena fatte possiamo poi affermare che sarà nulla la quantità  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$  oltre che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ . Andando adesso a calcolare il rotore di ambedue i termini della relazione (1), ed usando ancora una volta delle proprietà vettoriali, di cui tralasciamo ancora la dimostrazione, e ricordando che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}/\epsilon) = 0$ , si ottiene  $-\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times (\mu \partial \vec{H} / \partial t)$ .

Una volta poi sostituito nell'ultima relazione scritta la definizione di  $\vec{\nabla} \times \vec{H}$  data nella relazione (3), arriviamo a poter scrivere la seguente espressione  $\nabla^2 \vec{E} = \epsilon \mu \partial^2 \vec{E} / \partial t^2$ . Operando in modo analogo per nel caso del campo magnetico  $\vec{H}$  possiamo riscrivere le due equazioni nel modo seguente:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

dove:

$$v = \frac{1}{\sqrt{(\epsilon\mu)}} \quad (19)$$

Le equazioni appena scritte sono note anche sotto il nome di *Equazioni delle onde*. Se per le relazioni (17) e (18) appena scritte consideriamo un'oscillazione di tipo armonico otteniamo come risultato le seguenti equazioni che vanno sotto il nome di *Equazioni di Helmholtz*:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (20)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad (21)$$

dove:

$$k = \omega \sqrt{\epsilon\mu} \quad (22)$$

Risulta adesso interessante cercare una soluzione costituita da un vettore complesso che ha una dipendenza dalle coordinate spaziali della forma  $e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$  ad

esempio per il campo elettrico del tipo:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (23)$$

dove:

- $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  è il vettore che individua il punto di coordinate  $x, y, z$ ;
- $\vec{k}$  è un vettore tale che il suo modulo  $\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$  è uguale al valore dato dalla (22);
- $\vec{E}_0$  è un vettore (in genere complesso) indipendente rispetto a  $x, y, z$ .

È chiaro che, con  $k$  definito come in (22), la (23) rappresenta una soluzione della (17). Sarà quindi sufficiente eseguire le derivate seconde rispetto a  $x, y$  e  $z$ , contenute in  $\nabla^2$ , per verificarlo. Con un ragionamento del tutto analogo,  $\vec{H}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$  sarà soluzione della (18).

Notiamo ora che, per funzioni la cui dipendenza da  $x, y, z$  ha la forma  $e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ , con passaggi non difficili, si ha:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -j\vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -j\vec{k} \cdot \vec{E}$ . Operando in maniera analogo anche per il rotore possiamo scrivere che per i campi definiti nella relazione (23) possiamo scrivere:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -j\vec{k} \cdot \vec{E} \quad (24)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\vec{k} \times \vec{E} \quad (25)$$

Avendo considerato il mezzo privo di cariche possiamo affermare che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , dunque dalla relazione (24) si evince il vettore campo elettrico risulta perpendicolare al vettore  $k$ . Analogo discorso vale per il vettore del campo magnetico, la sua divergenza è nulla quindi risulta perpendicolare al vettore  $k$ .

Confrontando poi la (25) con la (11) e ponendo per comodità di scrittura  $\vec{k} = k\hat{k}$ , possiamo scrivere:

$$-j\omega\mu\vec{H} = -jk\hat{k} \times \vec{E} \quad (26)$$

da cui:

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega\mu} \hat{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E} \quad (27)$$

In cui  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  è definita come l'impedenza d'onda (nel caso del vuoto  $\eta\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377$ ).

La relazione (27) mostra che il vettore del campo magnetico H risulta perpendicolare al vettore k ed inoltre perpendicolare anche al vettore campo elettrico E, pertanto E, H e k costituiscono una terna destrorsa, come è mostrato in Figura 41:

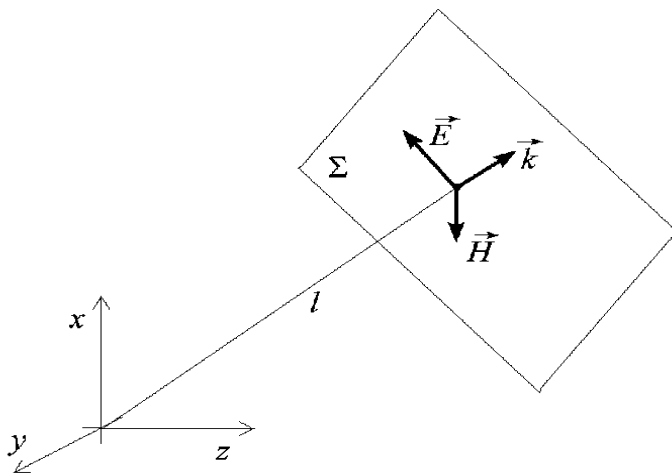


Figura 41 – Vettori E ed H di un'onda piana definita dal vettore d'onda k

Inoltre, poiché  $\eta$  è una quantità reale, la fase del vettore intensità di campo magnetico sarà in ogni punto uguale a quella del vettore intensità di campo

elettrico.

Andando ad esprimere il valore istantaneo per il fasore introdotto nella relazione (23) otteniamo:

$$\Re(\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kl) \quad (28)$$

Senza perdita alcuna di generalità poniamo che vettore d'onda sia diretto come l'asse  $z$  (versore di  $\vec{k} = \hat{z}$ ), quindi il piano  $\Sigma$  risulta parallelo al piano  $(x,y)$  ed  $l$  coincidente con  $z$ . Ipotizziamo inoltre che il vettore campo elettrico  $\vec{E}_0$  sia diretto lungo l'asse  $x$  e conseguentemente, per quanto fino qui detto, il campo magnetico  $\vec{H}_0$  sia diretto come  $y$ . Possiamo quindi scrivere i valori istantanei di tali vettori secondo le seguenti espressioni:

$$\vec{E} = \hat{x} \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz) \quad (29)$$

$$\vec{H} = \hat{y} \vec{H}_0 \cos(\omega t - kz) \quad (30)$$

Introduciamo poi l'espressione della velocità di fase:

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (31)$$

Ricordando adesso come era stata definita in precedenza possiamo giungere ad una nuova espressione della stessa:

$$\left| \frac{E}{H} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (32)$$

Andando a considerare, ad esempio la (29), possiamo dire che si tratta di una funzione armonica della variabile spaziale  $z$  e del tempo  $t$ , la quale è identica a sé stessa dopo una distanza  $\lambda=2\pi/k$  lungo  $z$  e dopo un periodo di tempo  $T=2\pi/\omega$ . Possiamo poi aggiungere che il valore della funzione non cambia se non cambia il suo argomento, cioè se  $t$  e  $z$  crescono in modo tale che  $\omega t - kz = \omega(t + \Delta t) - k(z + \Delta z)$ , ovvero se  $\Delta z / \Delta t = \omega / k$ . Riassumendo possiamo affermare che la configurazione di ventri e nodi, che le (29) e (30) rappresentano, avanza nello spazio proprio alla velocità di fase  $v$  così come definita nella (31).

La soluzione dell'equazione delle onde appena presentata rappresenta proprio un'onda piana. Nello specifico possiamo definire la superficie  $\Sigma$ , contenente i vettori  $E$  ed  $H$  come il fronte d'onda mentre il vettore  $\vec{k}$  perpendicolare ad essi è noto vettore d'onda (il modulo di tale vettore è noto invece come numero d'onda).

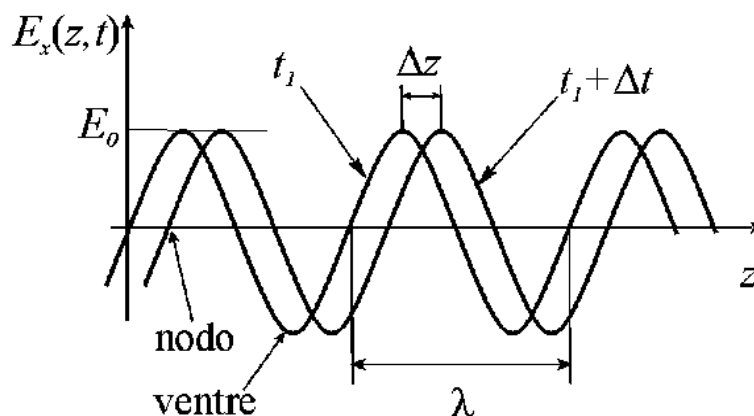


Figura 42 – Andamento del campo elettrico di un'onda piana che si propaga lungo l'asse  $z$  visualizzata in due istanti successivi  $t_1$  e  $t_1 + \Delta t$

Ripensando a come avevamo definito il vettore di Poynting e considerando, come abbiamo appena detto, che per un'onda piana  $H$  è perpendicolare ad  $E$  (e con esso in fase) ed ha modulo  $|E|/\eta$ , allora possiamo riscrivere lo stesso vettore di Poynting, come un vettore reale di modulo pari ad  $|E| |H|/2 = |E|^2/(2\eta)$ .

Riassumiamo qui di seguito le proprietà dell'onda piana in un mezzo omogeneo:

- La propagazione dell'onda piana risulta concorde alla direzione del vettore



d'onda  $\vec{k} = \omega\sqrt{\epsilon\mu}\hat{k}$  e conseguentemente perpendicolare ai vettori campo elettrico e magnetico

- Fase e ampiezza di vettore campo elettrico  $E$  risultano costanti su piani perpendicolari alla direzione di propagazione e tali piani risultano spostarsi nello spazio ad una velocità pari a  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ ; nel vuoto è pari alla velocità della luce  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 2.997992 \times 10^8 \text{ m/s} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$
- Il vettore di Poynting  $S$  risulta reale ( $E$  ed  $H$  sono fra loro in fase) e la densità di potenza ( $\text{W/m}^2$ ) trasportata dall'onda si scrive:

$$S = \frac{|E| |H|}{2} = \frac{|E|^2}{2\eta} = \eta \frac{|H|^2}{2} \quad (33)$$

La conoscenza di una qualsiasi delle tre grandezze  $S$ ,  $E$  o  $H$ , insieme al vettore d'onda  $\vec{k}$ , è sufficiente a caratterizzare completamente il campo EM.

- I vettori  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  ed  $\vec{S}$  risultano tra loro perpendicolari.

Il vantaggio di utilizzare certi tipi di onde, quando possibile, per lo studio dei fenomeni propagativi risiede nel fatto di avere i vettori campo elettrico  $E$  e campo magnetico  $H$  fra loro perpendicolari e allo stesso tempo perpendicolari alla direzione di propagazione.

## I.I.V Riflessione e rifrazione delle onde EM

Alla luce di quanto visto fino adesso può essere utile, anche per la comprensione di concetti che verranno espressi in seguito, considerare cosa avviene nel caso in cui l'onda elettromagnetica incida sulla superficie di separazione tra due mezzi di caratteristiche elettromagnetiche diverse. Per semplicità possiamo considerare due mezzi separati da una superficie  $\Sigma$  piana, estesa fino all'infinito. La geometria a prima vista potrebbe sembrare molto distante dalla realtà ma risulta di fatto

utilizzabile in tutti quei casi in cui eventuali curvature della superficie di separazione tra i due mezzi risultino con raggio molto maggiore rispetto alla lunghezza d'onda  $\lambda$ .

Si considerino dunque due materiali di caratteristiche  $\epsilon_1, \mu_1$  ed  $\epsilon_2, \mu_2$ , che riempiono i due semispazi (1) e (2) come riportato in figura sotto:

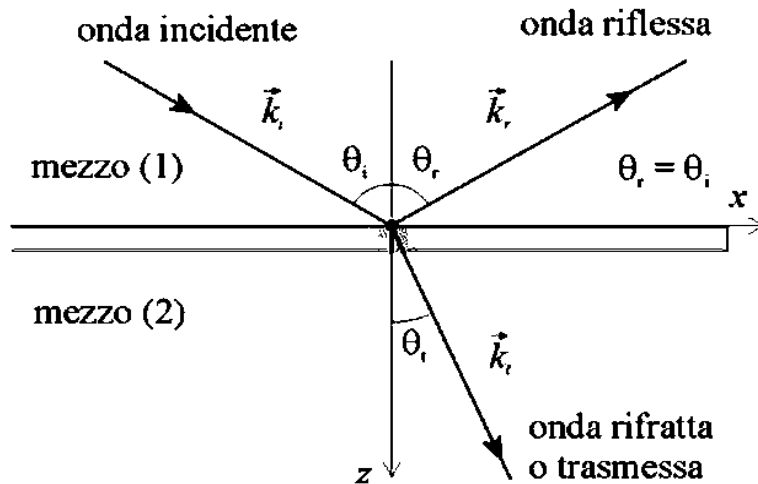


Figura 43 – Riflessione e rifrazione all'interfaccia fra due dielettrici con caratteristiche  $(\epsilon_1, \mu_1)$  e  $(\epsilon_2, \mu_2)$

Visto quanto riportato in figura sopra si definisce superficie di separazione il piano  $(x,y)$  e mentre il piano  $(x,z)$  identifica il piano di incidenza sul quale giace anche il vettore d'onda  $\vec{k}_i$ . La soluzione del problema elettromagnetico passa attraverso la definizione di tre onde, un'onda incidente ed un'onda riflessa nel mezzo (1) e un'onda rifratta nel mezzo (2).

Come noto tutte le componenti tangenziali dei vettori del campo devono essere sull'interfaccia e questo significa che  $\vec{k}_r$  e  $\vec{k}_i$  abbiano componenti lungo l'asse  $y$  ed inoltre deve valere, in corrispondenza di qualsiasi  $x$ , la seguente relazione  $xk_i \sin\theta_i = xk_r \sin\theta_r = xk_t \sin\theta_t$  da cui derivano poi le più note leggi di Snell per la riflessione e rifrazione:

$$\theta_t = \theta_i \tag{34}$$

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{k_i}{k_t} = \frac{n_1}{n_2} \quad (35)$$

Vediamo adesso come sono legate tra loro le intensità delle tre onde appena introdotte. Iniziamo con il definire *coefficiente di riflessione*  $\Gamma$  il rapporto fra l'ampiezza del campo elettrico dell'onda riflessa  $E_r$  e quella del campo incidente  $E_i$ , cioè  $\Gamma = E_r/E_i$ . In modo del tutto analogo definiamo il coefficiente di trasmissione  $T$  come il rapporto fra l'ampiezza del campo elettrico dell'onda trasmessa  $E_t$  e quella del campo incidente  $E_i$ , cioè  $T = E_t/E_i$ . Il calcolo di  $\Gamma$  e  $T$  è possibile una volta imposta la continuità delle componenti di  $E$  ed  $H$  all'interfaccia di separazione tra i due mezzi e tenendo presente che nel mezzo (1) il campo risulta dalla somma dell'onda incidente e di quella riflessa. Di particolare interesse risultano due casi: (a) onde TE, in cui il vettore  $E$  è perpendicolare al piano di incidenza e (b) onde TM, dove invece  $E$  giace nel piano di incidenza con il vettore  $H$  perpendicolare ad esso. Le relazioni sotto riportate descrivono la soluzione per il coefficiente di riflessione e per quello di trasmissione nei due casi a cui abbiamo fatto appena riferimento.

- Caso TE (prima coppia di equazioni di Fresnel)

$$\Gamma_{TE} = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} \quad (36)$$

$$T_{TE} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} \quad (37)$$

- Caso TM (seconda coppia di equazioni di Fresnel)

$$\Gamma_{TM} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}$$

(38)

$$T_{TM} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}$$

(39)

Considerando la semplificazione del caso di onda piana incidente normalmente e quindi  $\vartheta_i = \vartheta_r = 0$ , il coefficiente di riflessione e quello di trasmissione possono essere nuovamente così definiti:

$$\Gamma_{TE} = \Gamma_{TM} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

(40)

$$\Gamma_{TE} = \Gamma_{TM} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

(41)

Dall'espressione generalizzata data per l'impedenza in funzione dei parametri caratteristici di un mezzo dissipativo, possiamo esprimere con semplici passaggi matematici il coefficiente di riflessione. Nel caso di mezzi dielettrici, che poi sono quelli che nel caso pratico incontriamo con più frequenza, il coefficiente di riflessione può essere espresso in funzione della costante dielettrica dei rispettivi mezzi:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}}$$

(42)

Può essere altrettanto utile definire, sempre in maniera analoga, lo stesso coefficiente di riflessione, nel caso in cui il primo mezzo sia un dielettrico ed il secondo un mezzo conduttore, un mezzo quindi ad alta conducibilità. Questo caso è esemplificativo di situazioni reali in cui all'interno del mezzo ospite ci siano

appunto conduttori metallici oppure porzioni di materiale ad alto contenuto di umidità:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2(1 - j \frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2})}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2(1 - j \frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2})}}$$

(43)



## Appendice II: Interfaccia Software Matlab per l'elaborazione dati

---





Lo scopo di questa appendice è quello di fornire una breve descrizione dell'interfaccia del software utilizzato per l'elaborazione dei dati di misura del riflettometro a microonde. Come descritto nel capitolo dedicato al riflettometro, la procedura di investigazione consiste in una scansione punto-punto della superficie della struttura sotto test effettuando ad ogni step la misura del coefficiente riflessione. Al termine della scansione avremmo quindi una matrice di N colonne ed M righe contenente i valori del coefficiente di riflessione. Grazie al software per il controllo remoto dell'analizzatore di reti, fornito dalla casa produttrice Anritsu, è possibile archiviare le misure in modo automatico nella destinazione prescelta e con un progressivo che tiene conto proprio della posizione all'interno della matrice a cui abbiamo fatto appena riferimento. Al termine della scansione della struttura sarà possibile utilizzare una interfaccia, sviluppata ad hoc in ambiente Matlab, per inserire tutti i parametri necessari all'elaborazione dei dati e alla presentazione dei risultati. Di seguito è riportata la Figura 44 contenente l'interfaccia software.



*Figura 44 – Interfaccia Software elaborazione dati*

Al fine di fornire una descrizione dell'interfaccia, procedendo dall'alto, troviamo la "text box" dove è possibile inserire il percorso della cartella nella quale sono state

archivate le misure del coefficiente di riflessione. Proseguendo nella descrizione, passiamo ai campi “N° colonne” e “N° righe” nei quali deve essere inserita la dimensione della matrice delle misure proprio in termine del numero di colonne N e numero di righe M. Nei campi contraddistinti invece dall'etichette “int dist x” e “int dist y” andranno invece inseriti i valori relativi alla distanza tra due misure adiacenti sia in direzione verticale che orizzontale. L'interfaccia offre poi la possibilità di inserire il numero di punti di misura impostati per l'analizzatore di reti la cui conoscenza è necessaria per l'elaborazione dei dati e la per la verifica preliminare che tutte le misure siano state salvate correttamente. Il campo etichettato invece con “cost dielettrica” sarà invece destinato a contenere il valore di costante dielettrica di riferimento da utilizzare durante il processo di elaborazione dati.

Nella sezione riferimento è richiesto invece di inserire la posizione all'interno della matrice delle misure del segnale di riferimento da utilizzare nell'operazione di deconvoluzione, solitamente risulterà essere la prima misura ad ogni modo abbiamo lasciato la possibilità di effettuare la misura di tale segnale anche in corso d'opera.

Una volta impostati correttamente tutti i parametri sarà possibile lanciare, tramite il pulsante “Elabora”, la parte software dedicata all'elaborazione dei dati. Al termine dell'elaborazione il software fornirà i risultati finali nella forma di “slice” in falsi colori.

## Bibliografia

---



- S Beni, N Macchioni, M Mannucci, R Olmi, S Palanti, C Riminesi; *First Trials for a Microwave Reflectometric Tool to Survey Decay in Historic Timber Structures*, 2015, International Journal of Architectural Heritage, 9(6):665-673
- S Beni, F Micheletti, R Olmi, C Riminesi; *Time-Domain approach for Non-Destructive assessment of embedded anomalies in architectural structures based on microwave reflectometry*, 2015 8th International Workshop on Advanced Ground Penetrating Radar (IWAGPR). Ed. IEEE. 7/7/2015 Firenze, Italy
- S Beni, F Micheletti, R Olmi, C Riminesi; *Setup of a microwave reflectometer for the subsurface survey of masonry structures*, Radio Science Conference (URSI AT-RASC), 2015 1st URSI Atlantic
- R Olmi, F Micheletti, C Riminesi, S Beni; *Bayesian analysis of stepped-frequency CW radar: SFCW radar applied to masonry diagnostics*, European Radar Conference (EuRAD), 2014 11th, 601-604
- S Beni, F Micheletti, R Olmi, C Riminesi; *Preliminary results on using of microwave reflectometer system for the diagnostic of embedded structural anomalies in timber structure*, European Microwave Conference (EuMC), 2014 44th, 155-158
- S Beni, R Olmi, F Micheletti, C Riminesi; *Preliminary Study of Embedded Structural Anomalies in Architectural Structures*, Microwave Subsurface Tomography PIERS Proceedings
- M Luise, G M Vitetta; *Teoria dei segnali*, 1999, McGraw-Hill, ISBN 88-386-0809-1
- R E Collin; *Foundations for Microwave Engineering*, 2nd ed. Piscataway, NJ:IEEE Press, 1992.
- MATLAB R. 12 by MathWorks, Inc.
- S Ramo, J R Whinnery, T Van Duzer; *Campi e onde nell'elettronica per le comunicazioni*, 2005, Franco Angeli, ISBN 88-204-7385-2

- C Atzeni, V Cappellini; *Teoria delle Comunicazioni*, 1971, G. & G. Editrice
- C R Paul; *Compatibilità Elettromagnetica*, 2004, Hoepli ISBN 88-203-2210-2
- M Bertocco, A Sona; *Introduzione alle Misure Elettroniche*, 2010
- J W Cooley, J W Tukey; *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*, 1965, Mathematics of Computation
- SiversIMA - FMCW transceiver –  
<http://www.siversima.com/products/fmcw-transceiver/>
- G Larry Bretthorst; *Bayesian Spectrum Analysis and Parameter Estimation*, Springer-Verlag, 1998, ISBN 0-387-96871-7
- E T Jaynes; *Bayesian Spectrum and Chirp Analysis*, 1996
- E Granqvist, G ED Oldroyd, R J Morris; *Automated Bayesian Model development for frequency detection in biological time series*, 2011, BMC Systems Biology
- S B Cohn; *Properties of Ridge Wave Guide* , 1947, Proceedings of the IRE, IEEE
- P Pramanick, P Bhartia; *Analysis and Synthesis of Tapered Fin-Lines*, 1984, Microwave Symposium Digest, IEEE
- R Olmi, M Bini, A Ignesti, C Riminesi; *Non-destructive permittivity measurement of solid materials*, Measurement Science and Technology, Vol. 11, No. 11, 2000, pp. 1623-1629
- G Giunta; *Indagini Ground Penetrating Radar (GPR) su Monumenti Architettonici: Facciata della Basilica di San Pietro e Duomo di Milano*, 2008, Il Giornale delle Prove non Distruttive Monitoraggio Diagnostica
- R Aljasm; *FMCW-radar Signal Processing and Parameter Estimation*, 2002, Swedish Defence Research Agency FOI, ISSN 1650-1942
- <https://www.maximintegrated.com/en/app-notes/index.mvp/id/729>
- D Andreuccetti, M Bini, A Checcucci, A Ignesti, L Millanta, R Olmi, N Rubino; *Protezione dai Campi Elettromagnetici Non Ionizzanti*, 2001, IROE “Nello Carrara” CNR

