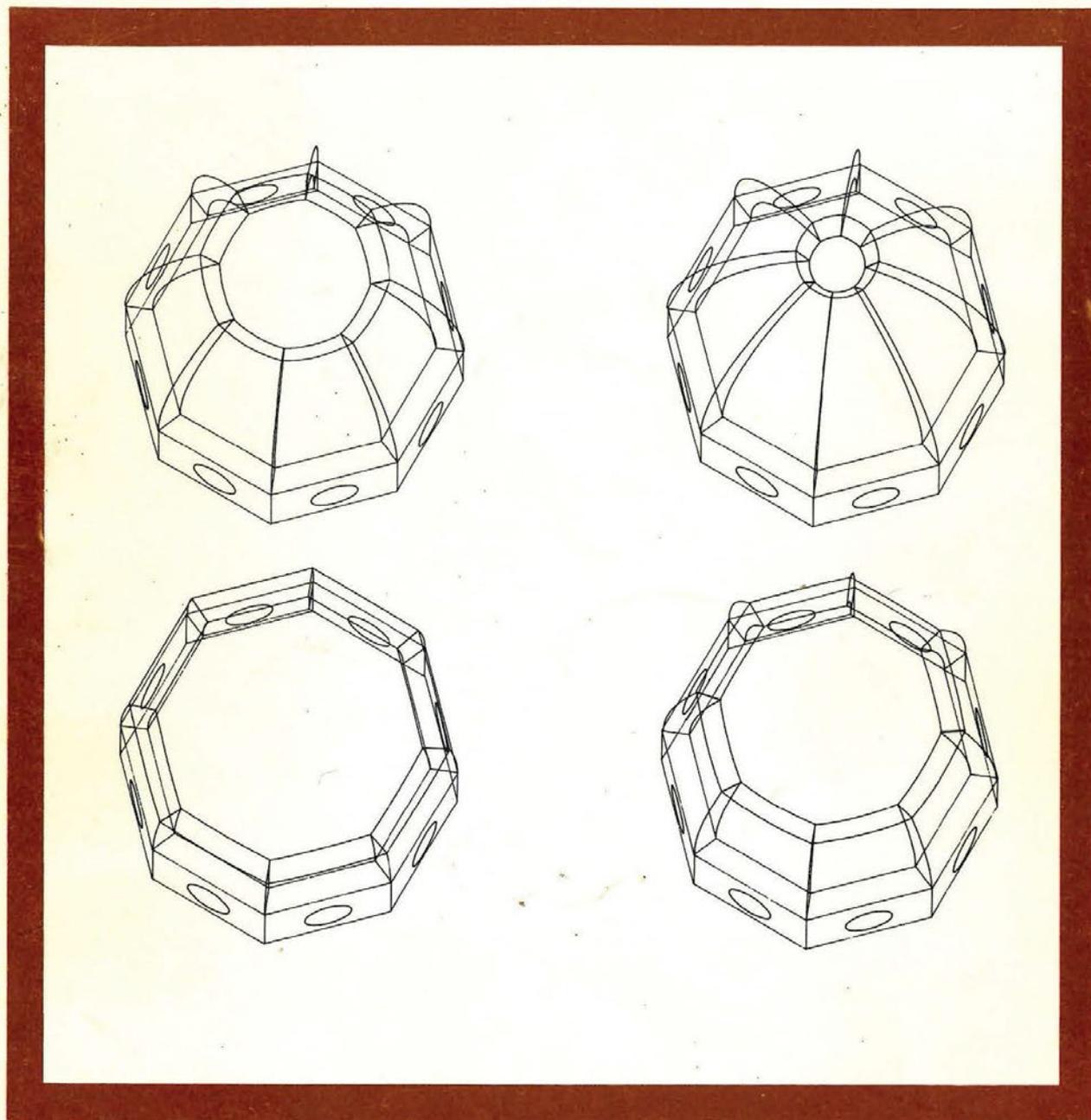


Rappresentazione analitica e grafica della cupola di Santa Maria del Fiore

SALVATORE DI PASQUALE
PIER LUIGI BANDINI
GIACOMO TEMPESTA



università degli studi di firenze
facoltà di architettura
istituto di costruzioni
clusf - cooperativa editrice universitaria

clu
sf

RAPPRESENTAZIONE ANALITICA E GRAFICA DELLA CUPOLA DI
SANTA MARIA DEL FIORE

Salvatore Di Pasquale

Pier Luigi Bandini

Giacomo Tempesta

Edizioni CLUSF

Si desidera esprimere la propria gratitudine al Prof. Ray Masters della Pennsylvania State University per le indicazioni fornite in occasione del seminario su "Computer Graphics" tenuto presso l'Istituto di Costruzioni dell'Università di Firenze nel marzo del corrente anno.

Un ringraziamento particolare va alla Olivetti S.p.A. che ha cortesemente fornito gli strumenti elettronici e l'assistenza tecnica.

Copyright ©
Cooperativa Libreria Universitatis Studii Florentini
Via S. Gallo, 25 - Firenze

I diritti di traduzione,
di riproduzione e di adattamento, totale o parziale e con qualsiasi mezzo
(comprese le copie fotostatiche
ed i microfilm) sono riservati per tutti i paesi.

RAPPRESENTAZIONE ANALITICA E GRAFICA DELLA CUPOLA DI
SANTA MARIA DEL FIORE

Salvatore Di Pasquale

Pier Luigi Bandini

Giacomo Tempesta

Scopo di questa nota è fornire una serie di rappresentazioni grafiche del modello teorico della cupola di Santa Maria del Fiore così come esso scaturisce dalla ipotesi (1) fatta circa la sua costruzione. Si tratta in sostanza di una serie di disegni che mostrano la disposizione dei mattoni o delle pietre, durante le fasi costruttive ed a costruzione ultimata.

Tali disegni sono da considerarsi come ausilio per una più immediata interpretazione di quella ipotesi che, allo stato attuale, resta ancora tale sebbene ulteriori misurazioni e rilievi effettuati, o in via di effettuazione, portino nuove conferme alla sua validità.

Da più parti erano venute richieste di arricchire quel "Primo rapporto" con qualche disegno; dopo vari tentativi effettuati con l'ausilio dei metodi della Geometria Descrittiva, tentativi risultati tutti insoddisfacenti ai fini di una corretta e rigorosa rappresentazione grafica, si è ritenuto opportuno ricorrere all'uso di un tracciatore automatico collegato ad un elaboratore elettronico.

La scelta potrà forse apparire dissacrante, data la particolarità dell'oggetto sottoposto ad indagine; tuttavia, a parte le giustificazioni che potrebbero essere addotte circa il rapporto tra le nuove tecnologie e le problematiche della Storia e del Restauro, essa è ampiamente giustificabile alla luce delle successive indagini in campo statico, dinamico, di termoelasticità non lineare, già programmate, e che solo con l'ausilio di tali strumenti potranno essere ragionevolmente condotte a termine.

Naturalmente, per poter usare questi strumenti è stato necessario "regolarizzare" le dimensioni della cupola, specialmente per quanto concerne le misure dei lati del tamburo che sono notoriamente molto diverse tra di loro. Operazione, questa della regolarizzazione, indispensabile proprio per poter proseguire le indagini poichè non è possibile tener conto dell'oggetto quale realmente esso è, ma occorre procedere, attraverso successive approssimazioni, alla definizione di un modello teorico sufficientemente chiaro e semplice.

Allo stato attuale, poichè non esiste un rilievo preciso delle superfici interne ed esterne della cupola e poichè non si conosce ancora quale sia la loro collocazione reciproca si è supposto, in accordo con i documenti sulla costruzione della cupola, che il suo spessore sia costante. Nè si sono volute rappresentare tutte quelle particolarità costruttive che sono visibili all'interno, tra le due cupole, poichè sono state ritenute non essenziali agli scopi prefissi; di queste si terrà opportuno conto in occasione della indagine statica.

Ciò premesso appaiono chiari i limiti di questa operazione: essa ha lo scopo di fornire una visione della struttura della cupola nel suo insieme e nelle sue presumibili fasi costruttive.

Tuttavia un particolare appare degno di nota; è quello che

scaturisce dal confronto tra la disposizione dei filari di pie tra o di mattoni in questi disegni e quanto si è potuto osser vare direttamente su una porzione dell'estradosso della cupola liberata dal manto di tegole: l'accordo, a livello qualitativo, appare perfetto.

Così anche il fatto che il basamento di marmo bianco della lanterna abbia un andamento curvilineo - riportato peraltro sol tanto dal rilievo effettuato dal Fondelli (2) e dal suo gruppo di studio - ha perfetto riscontro nella costruzione del modello.

Quanto segue può anche essere visto come un "esercizio com binato" di geometria analitica, proiettiva e descrittiva; ma nelle nostre intenzioni esso è qualche cosa di più. E' un tentati vo per comprendere la "geometria costruttiva" della cupola al la luce di tutte le osservazioni ed i rilievi fatti, osser vazio ni e rilievi che a loro volta hanno permesso la formulazione della ipotesi di lavoro.

Ipotesi sulla geometria costruttiva

Si assume come dato di fatto che le superfici, interna ed esterna, della cupola siano generate dalle intersezioni di otto cilindri a direttrici ellittiche le cui singole sezioni con i piani passanti per i vertici dell'ottagono di base del tamburo siano archi di cerchio i cui raggi siano, a loro volta, $\frac{4}{5}$ del diametro del cerchio circoscritto all'ottagono interno; questo ottagono viene immaginato "regolare" con la misura del lato desunta dalla media dei valori rilevati.

Si assumono inoltre costanti gli spessori delle due cupo-

le, interna ed esterna, nonchè dell'interspazio tra le medesime.

Si premette che i disegni vogliono mettere in luce ciò che, in accordo con l'ipotesi, è nascosto sotto il manto di tegole all'esterno, e gli affreschi all'interno. Per questo occorre tracciare le linee di intersezione delle superfici cilindriche anzidette con i coni i cui vertici sono situati sull'asse della cupola. Per ottenere queste linee occorre dunque individuare prima i cilindri, poi i coni; naturalmente l'operazione può essere limitata ad una sola vela, compresa tra due costoloni, poiché, con successive rotazioni del sistema cartesiano di riferimento, sistema al quale è resa solidale la vela stessa, si ottengono le altre.

Con riferimento alla fig. 1 si consideri l'ottagono interno riferito ad un sistema cartesiano $O x, y, z$ con x perpendicolare al piano del disegno. L'asse z contiene i centri C_1 e C_2 dei due archi di cerchio che passano per i punti 1 e 2 dell'ottagono stesso.

L'equazione del generico cilindro il cui asse è z vale:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [1]$$

dove a e b sono parametri da determinare. Il parametro a viene determinato dal fatto che l'intersezione del cilindro [1] con il piano π (la cui traccia su y, z è indicata con ξ) è il cerchio di raggio $a = 4/5 D$ (con D diametro della circonferenza circoscritta all'ottagono interno); il parametro b viene determinato con la condizione che l'intersezione del cilindro con lo stesso piano π , o con un piano ad esso parallelo e passante per l'origine O (vedi tav. 1 e 2)

$$\begin{cases} y = qz \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \text{con } q = \cot \omega$$

debba essere un cerchio di raggio a ; ciò è verificato se e solo se $b = a \cos \omega$

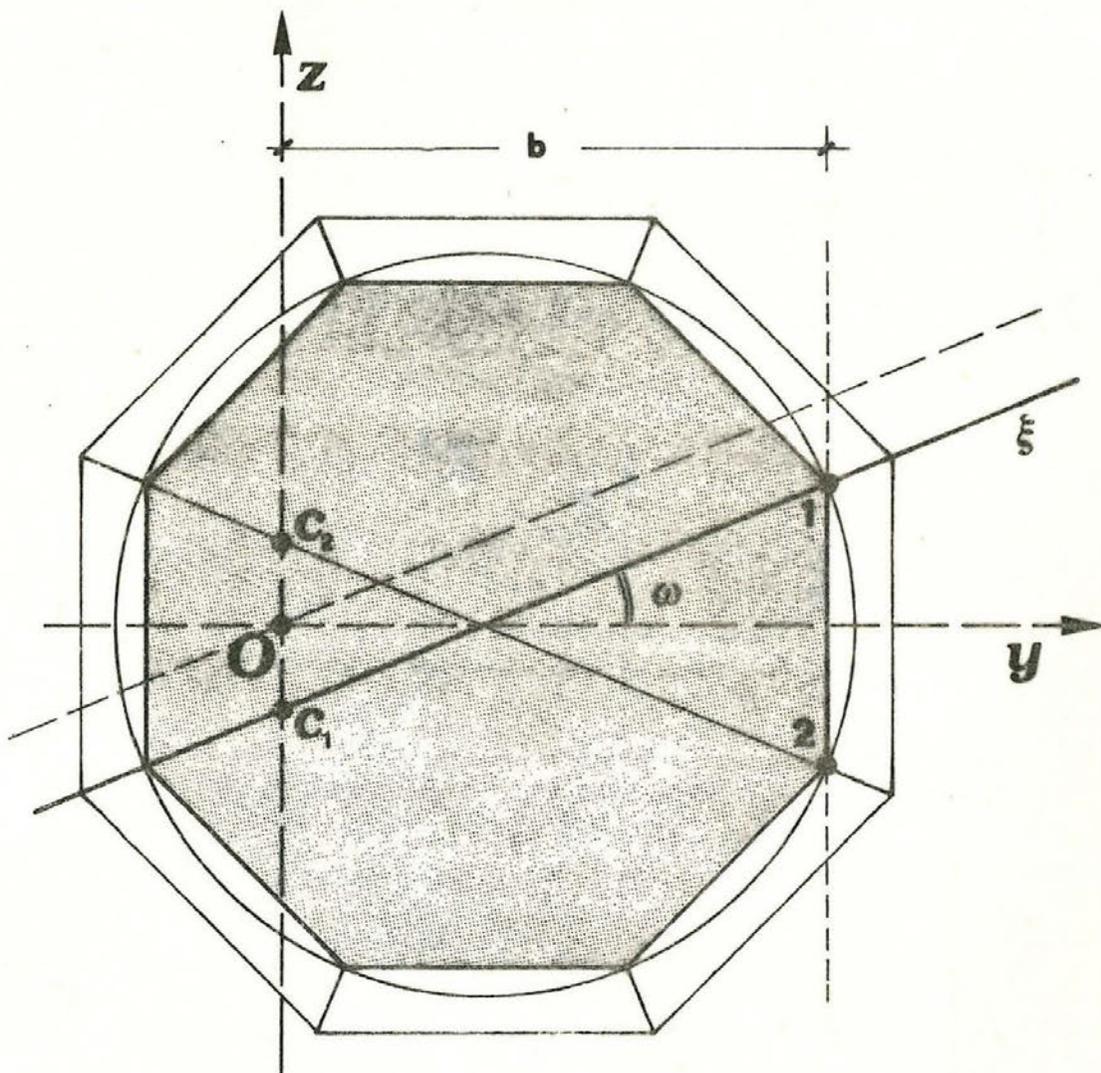


fig.1

Quindi l'equazione del cilindro diviene:

$$x^2 + \frac{y^2}{c^2} = a^2$$

avendo posto $c = \cos \omega$ ($\omega = 22^\circ, 30$)

e la sua intersezione con il piano del disegno è rappresentata nella tav. 3.

Per le successive operazioni è essenziale la traslazione degli assi di riferimento parallelamente all'asse z, che porta O in O' (fig. 2):

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y + \frac{3}{8} ac \\ z = Z \end{cases}$$

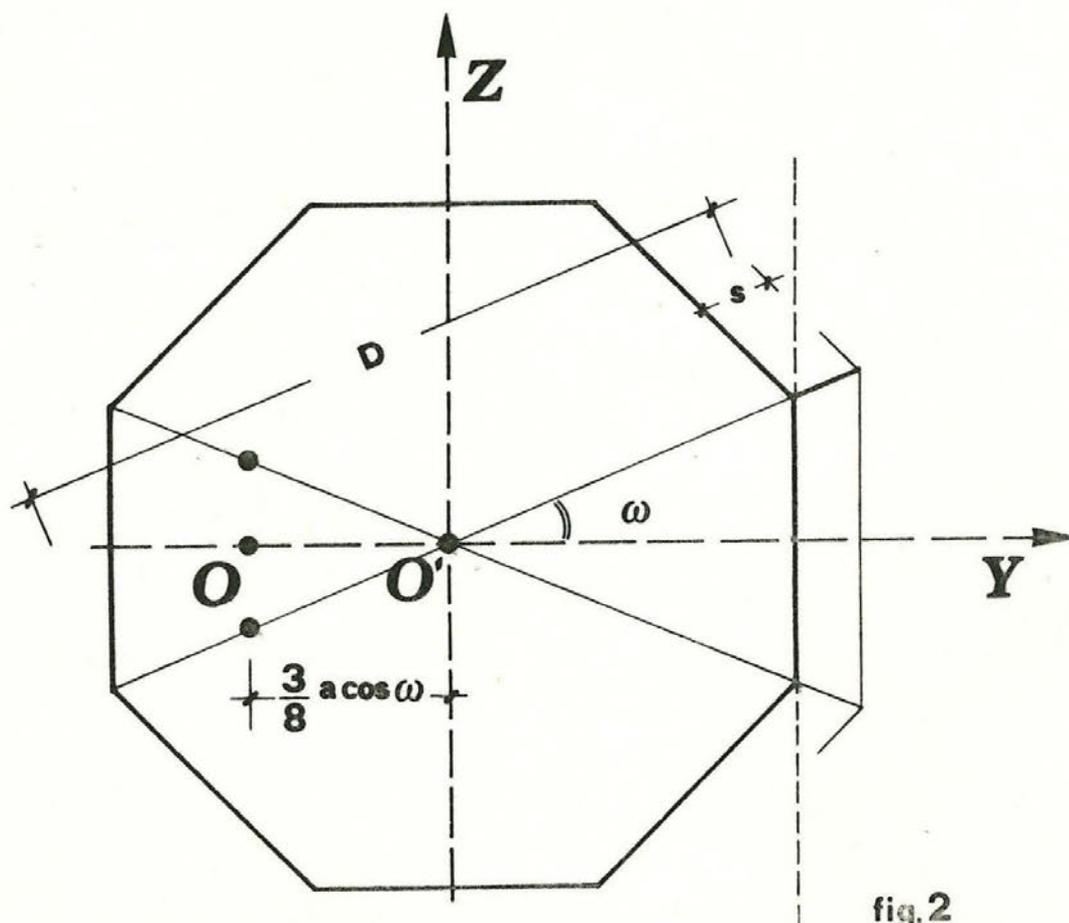


fig.2

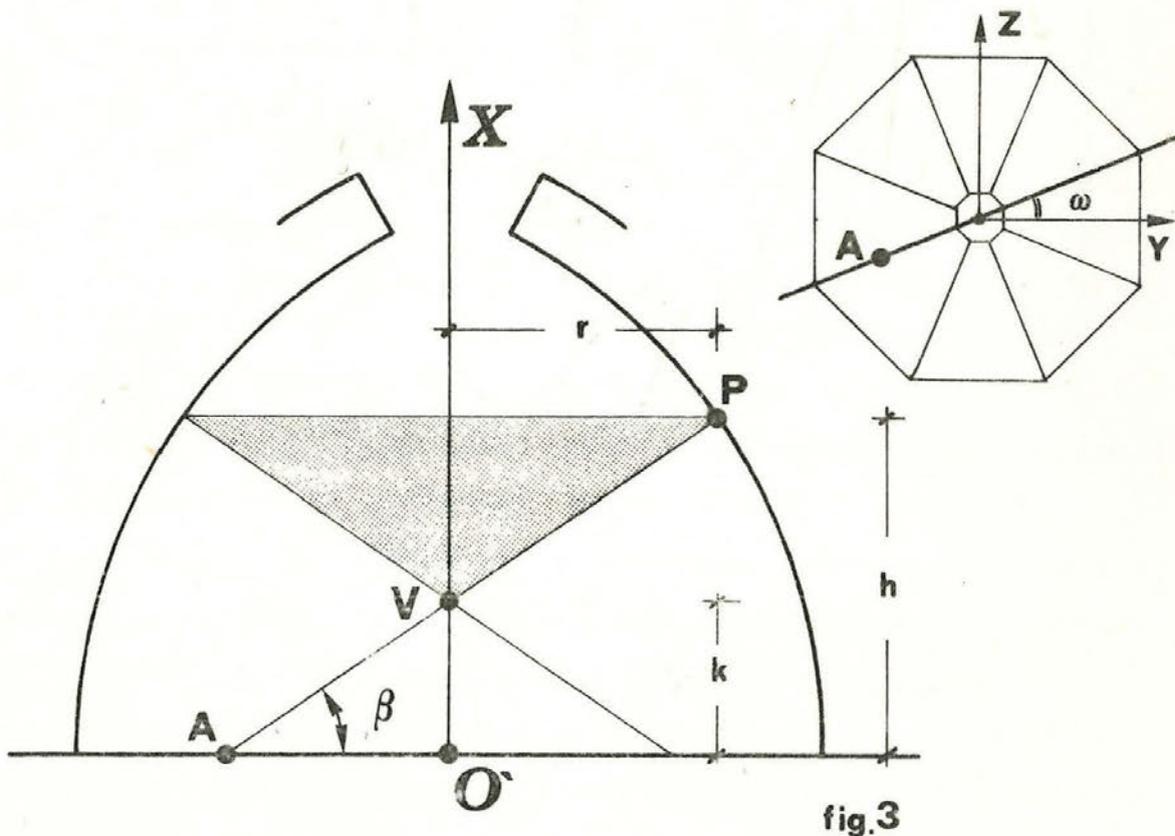
Con ciò il cilindro assume l'equazione

$$X^2 + \frac{(Y+3/8 ac)^2}{c^2} = a^2 \quad [2]$$

Quest'ultima è l'equazione del cilindro che descrive la superficie dell'intradosso della cupola interna. Per ottenere la equazione del cilindro corrispondente alla superficie della vela esterna è sufficiente mettere in conto l'aumento s di spessore misurato sul costolone di spigolo; si ottiene in tal modo:

$$X^2 + \frac{(Y+3/8 ac)^2}{c^2} = (a+s)^2 \quad [3]$$

Con riferimento alla fig. 3 si faccia ruotare la retta AP intorno all'asse X; sia V l'intersezione di AP con l'asse della



cupola e β l'angolo che la stessa retta AP forma col piano $X = 0$: si ottiene così un cono le cui generatrici risultano inclinate di β rispetto al piano orizzontale.

In vista dei successivi sviluppi l'equazione del cono generico è scritta nella forma:

$$Z^2 (h-k)^2 - r^2 (X-k)^2 + Y^2 (h-k)^2 = 0 \quad [4]$$

in cui sono da determinare i parametri h , k , r . Con riferimento alla fig. 3 detti parametri valgono:

$$\begin{cases} h = a \operatorname{sen} \beta \\ k = 3/8 a \operatorname{tg} \beta \\ r = a(\cos \beta - 3/8) \end{cases}$$

Occorre ora determinare l'intersezione della generica vela con il generico cono; come è noto tale intersezione è la curva sghemba del quarto ordine di equazione:

$$\begin{cases} X^2 + \frac{(Y + 3/8 ac)^2}{c^2} = a^2 \\ Z^2 (h-k)^2 - r^2 (X-k)^2 + Y^2 (h-k)^2 = 0 \end{cases} \quad [5]$$

Per la rappresentazione grafica di questa curva ci si è valse di una costruzione per punti individuati dalla intersezione della superficie cilindrica con le rette che descrivono il cono stesso. Tale operazione permette, evidentemente, di superare le difficoltà connesse alla determinazione delle soluzioni del sistema [5] che è non lineare.

La retta appartenente al cono è individuata dall'intersezione del cono [4] con il piano $Z = Y \operatorname{tg} \varphi$, dove con φ si è indicato l'angolo compreso tra il piano $Z = 0$ ed il generico

piano che ruota intorno all'asse X. Ne deriva quindi il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = Y \operatorname{tg} \varphi \\ X^2 + \frac{(Y + 3/8 \operatorname{ac})^2}{c^2} = a^2 \\ Z^2 (h-k)^2 - r^2 (X-k)^2 + Y^2 (h-k)^2 = 0 \end{array} \right. \quad [6]$$

che al variare degli angoli β e φ descrive, con le sue soluzioni, tutte le curve intersezione.

Con lo stesso procedimento è possibile, evidentemente, individuare i punti appartenenti ai costoloni intermedi.

L'uso dell'elaboratore elettronico per le rappresentazioni grafiche

Il programma utilizzato per la realizzazione dei grafici è stato messo a punto su un minicomputer Olivetti P 6060, equipaggiato con:

- stampante termica integrata
- doppia unità floppy disk (sistema + utente) con dischi da 240 K
- unità centrale da 32 K

e collegato col tracciatore automatico piano (plotter) Goertz-Servogor 211 caratterizzato da:

- dimensioni massime del foglio : 28 x 36 cm
- precisione migliore di ± 0.10 mm
- tracciamento mediante rapidograph ad inchiostro.

Il programma consta di circa 400 istruzioni BASIC ed è di
viso in due parti:

- calcolo delle coordinate dei punti significativi della
figura riferite ad un sistema cartesiano $O x,y,z$.
- trasformazione di tali coordinate, conseguente alla di-
rezione di osservazione ed al tipo di vista prescelto.

In coda al programma si trova poi il software di base per la
gestione del plotter.

Data la facilità di "dialogare" con la macchina è possibi-
le operare la scelta delle varie opzioni, nonché introdurre i
pochi dati richiesti, durante l'esecuzione del programma.

Mentre per i segmenti di linea retta (es: spigoli del tam-
buro, ottagono di base) è sufficiente calcolare le coordinate
del punto di partenza e di quello di arrivo, per le linee curve
si è resa necessaria una preventiva "linearizzazione" secondo
una spezzata. Il numero dei segmenti di tale spezzata, e dunque
la precisione del disegno delle linee curve, può essere variato
nel programma (3); ciascun vertice della spezzata viene succes-
sivamente trattato come un qualsiasi altro punto generico.

Per la restituzione grafica, si sono usati due tipi di
proiezione:

- Assonometria (isometrica o non)
- Prospettiva

Non è stato affrontato il problema delle linee nascoste.

Assonometria

Le coordinate spaziali di un generico punto P riferite al
sistema $O x,y,z$ vengono dapprima modificate in base all'incli-
nazione della direzione di osservazione rispetto al piano x,y
(azimuth).

Detta α tale inclinazione, le coordinate del punto P nel

nuovo sistema $O' x', y', z'$ risultano:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 \cos \alpha & - \sin \alpha \\ 0 \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad [7]$$

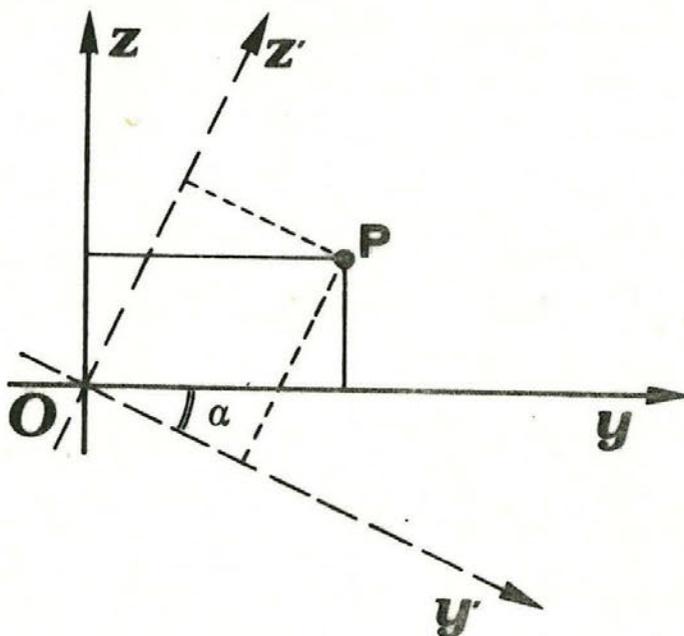


fig. 4

Le coordinate finali che il punto P assume sul piano di proiezione P.P. (coincidente col piano y', z') vengono quindi determinate in base all'angolo di ribaltamento ϑ :

$$\begin{aligned} y'' &= y' \\ z'' &= z' + x' \operatorname{sen} \vartheta \end{aligned} \quad [8]$$

Sia a che ϑ vengono introdotti come dati in fase di esecuzione.

In particolare, per $\vartheta = 90^\circ$ si ottiene un ribaltamento completo delle altezze (assonometria isometrica); per $\vartheta = 0^\circ$ una vista in pianta.

Prospettiva

La direzione di osservazione viene specificata con due angoli: l'inclinazione rispetto al piano x, z e rispetto al piano y, z . Dette rispettivamente α e γ tali inclinazioni, la prima trasformazione di coordinate consiste in una rotazione intorno ad x analoga alla [7] (vedi fig. 4)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad [9]$$

Viene poi effettuata la seconda rotazione, di ampiezza γ , intorno ad y' :

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & \text{sen}\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad [10]$$

Le due rotazioni possono essere effettuate contemporaneamente, come mostrato nella [11] :

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \text{sen}\alpha & \text{sen}\gamma & \cos\alpha & \text{sen}\gamma \\ 0 & \cos\alpha & & -\text{sen}\alpha & \\ -\text{sen}\gamma & \text{sen}\alpha & \cos\gamma & \cos\alpha & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad [11]$$

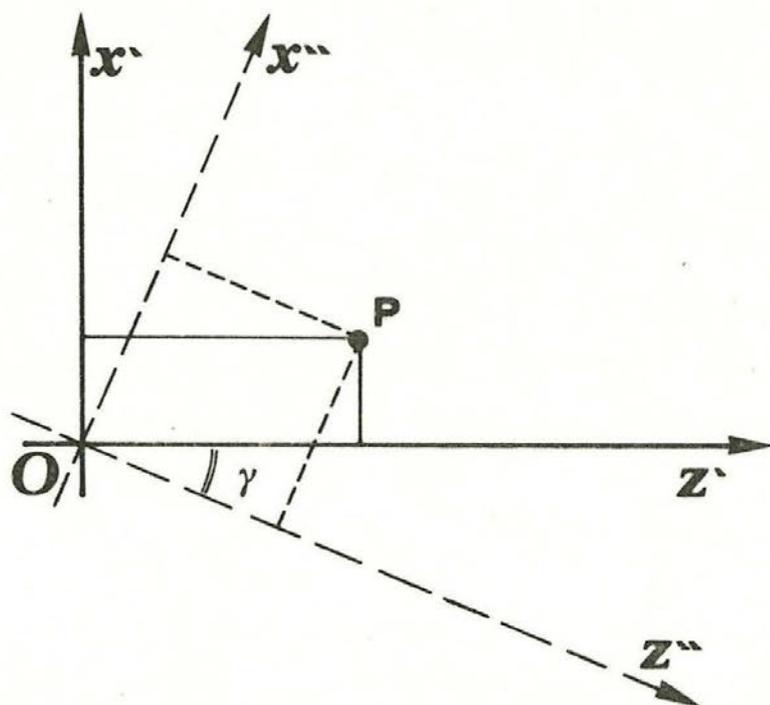


fig. 5

Le coordinate finali che il punto P assume sul piano di proiezione P.P. (coincidente col piano x'', y'') vengono ulteriormente modificate in base alla distanza del punto P dal piano di proiezione e di questo dal punto di osservazione P.O., secondo le usuali formule di riduzione prospettica (vedi fig. 6):

$$x''' = x'' \frac{1}{1 + \frac{z''}{D}}$$

[12]

$$y''' = y'' \frac{1}{1 + \frac{z''}{D}}$$

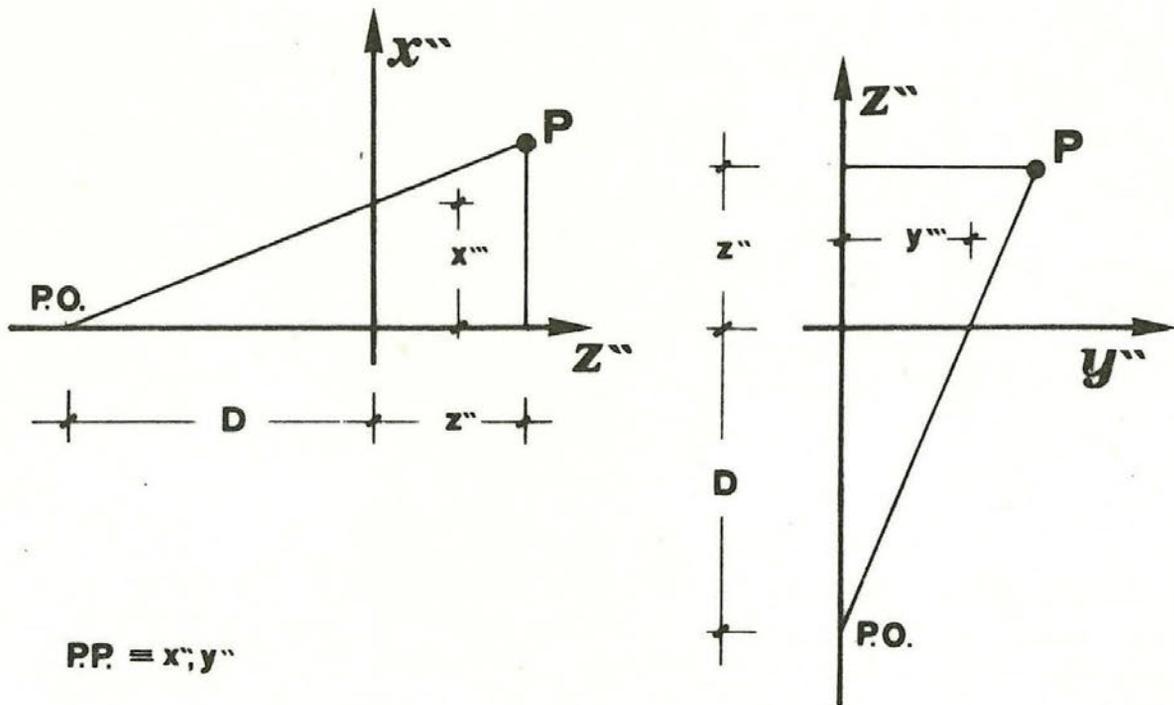


fig. 6

In particolare, per $D = \infty$, risulta:

$$x''' = x''$$

$$y''' = y''$$

si ha cioè la proiezione di P secondo una retta ortogonale al piano x'', y'' .

Inoltre con opportune scelte dei parametri α , γ , D si possono ottenere le proiezioni ortogonali o di Monge:

	α	γ	D
Prospetto frontale	0°	0°	∞
Prospetto laterale	$\pm 90^\circ$	0°	∞
Pianta	0°	90°	∞

Ovviamente tutte le operazioni analitiche vengono effettuate dall'elaboratore che trasmette poi le necessarie istruzioni al tracciatore automatico.

Firenze, 12 ottobre 1977

Note

- (1) - Salvatore Di Pasquale, "Primo rapporto sulla cupola di Santa Maria del Fiore", C.L.U.S.F., Firenze, 20-1-1977.
- (2) - M. Fondelli, W. Ferri, P. Franchi, F. Greco, "Il rilevamento fotogrammetrico della cupola di Santa Maria del Fiore in Firenze", I.G.M., 1971.
- (3) - Risulta comunque inutile aumentare i lati delle spezzate che approssimano le curve oltre i limiti di precisione del tracciatore automatico.

Tavole

Le tavole che seguono illustrano alcuni aspetti della geometria della cupola.

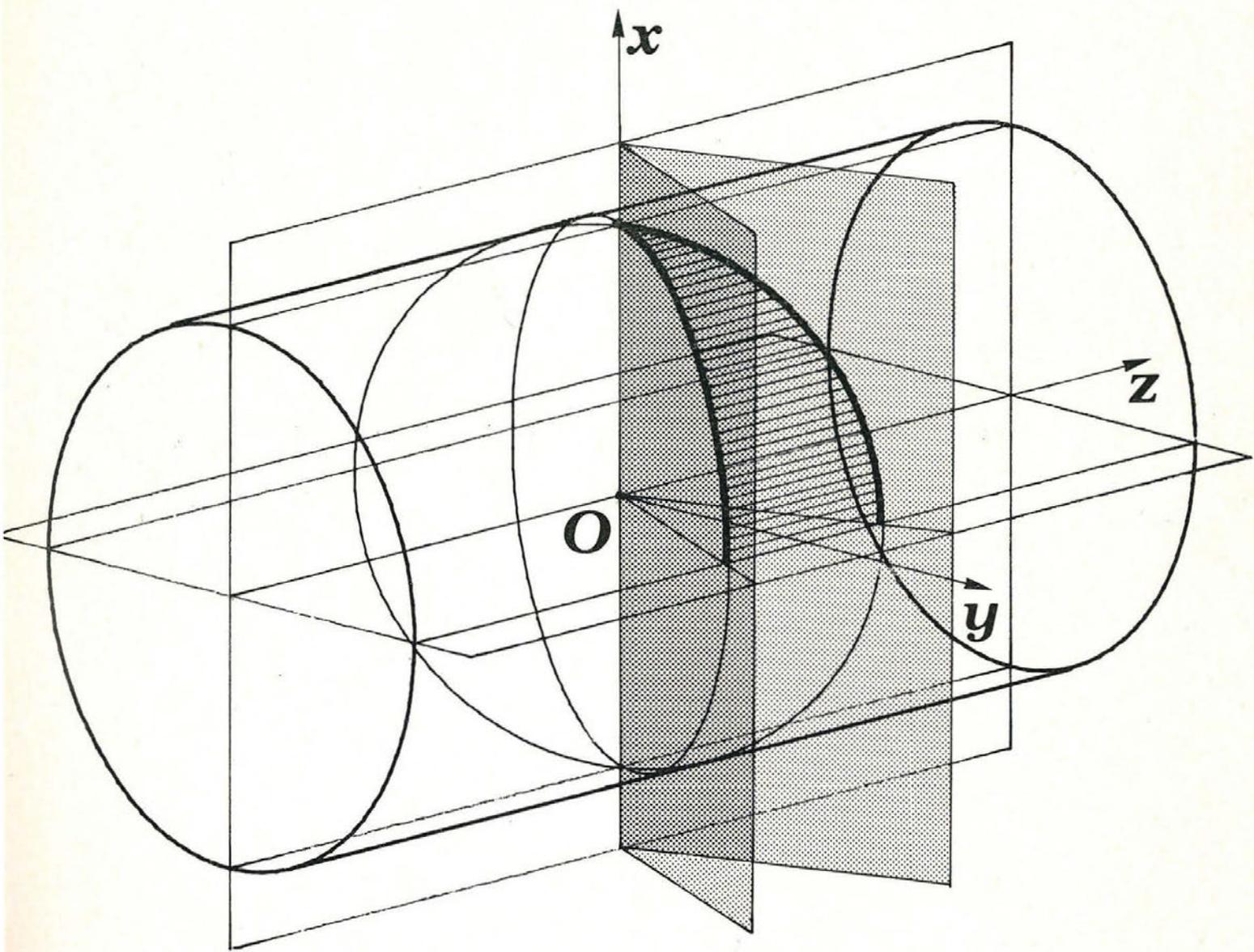
Le tavole 4, 5, 6 e 7 sono assonometrie ricavate con gli stessi parametri e mostrano presumibili fasi costruttive della cupola a quattro diversi livelli. In rosso sono le superfici coniche lungo le quali sono disposti i mattoni; il procedimento costruttivo ipotizzato è quello delle cupole di rotazione: a partire da un centro fisso una randa o corda permette di ottenere, per rotazione, i letti di posa dei mattoni. Nelle tavole 8, 9, 10 e 11 mancano i coni costruttivi.

Le successive due tavole 12 e 13 mostrano, in rosso, le intersezioni dei coni con le vele cilindriche, rispettivamente esterne ed interne, della cupola.

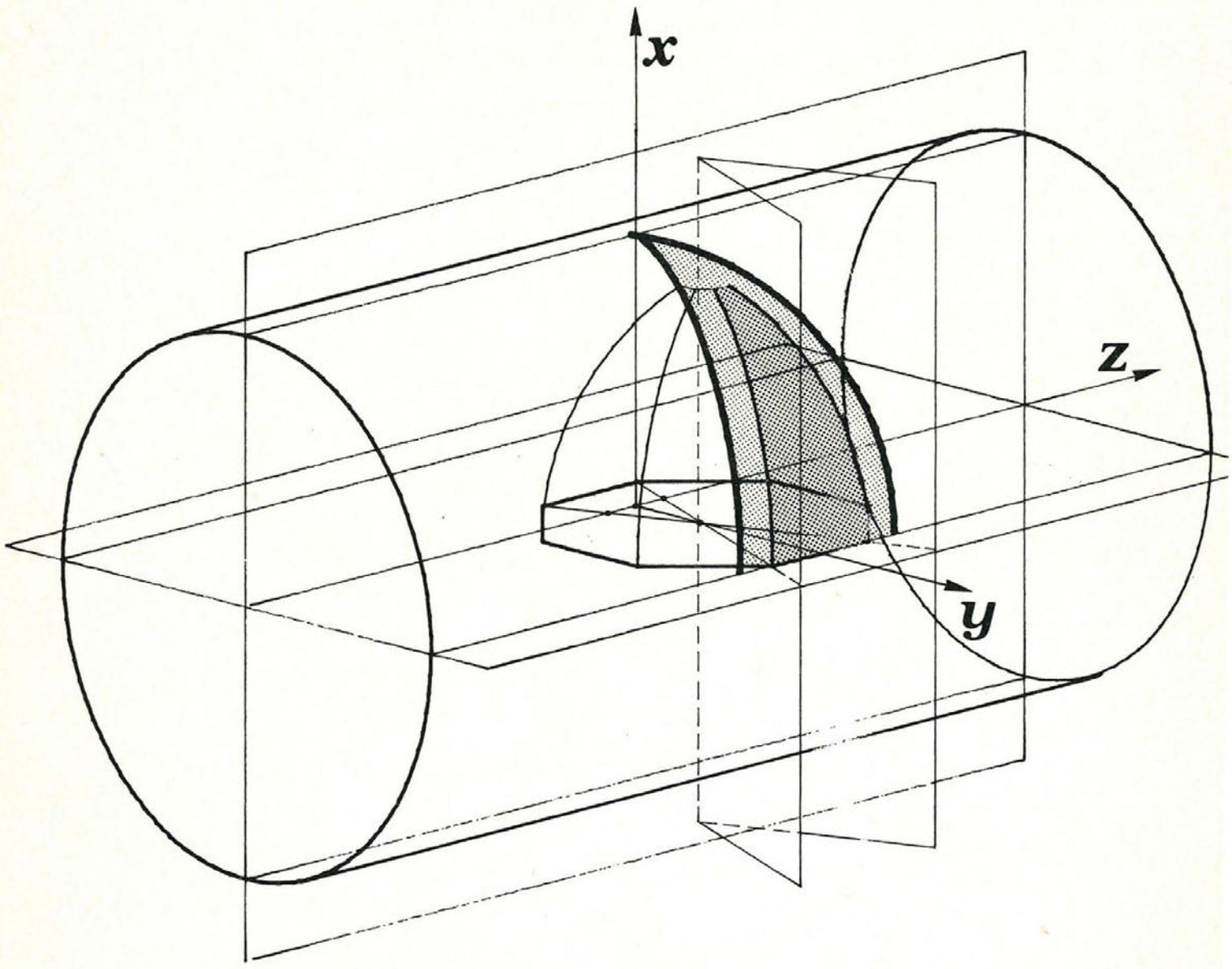
La tavola 14 mostra in particolare uno spicchio della cupola con le linee generate dalle intersezioni con i coni: coincidono con le linee osservate all'esterno della cupola, attualmente nascoste sotto il manto di tegole.

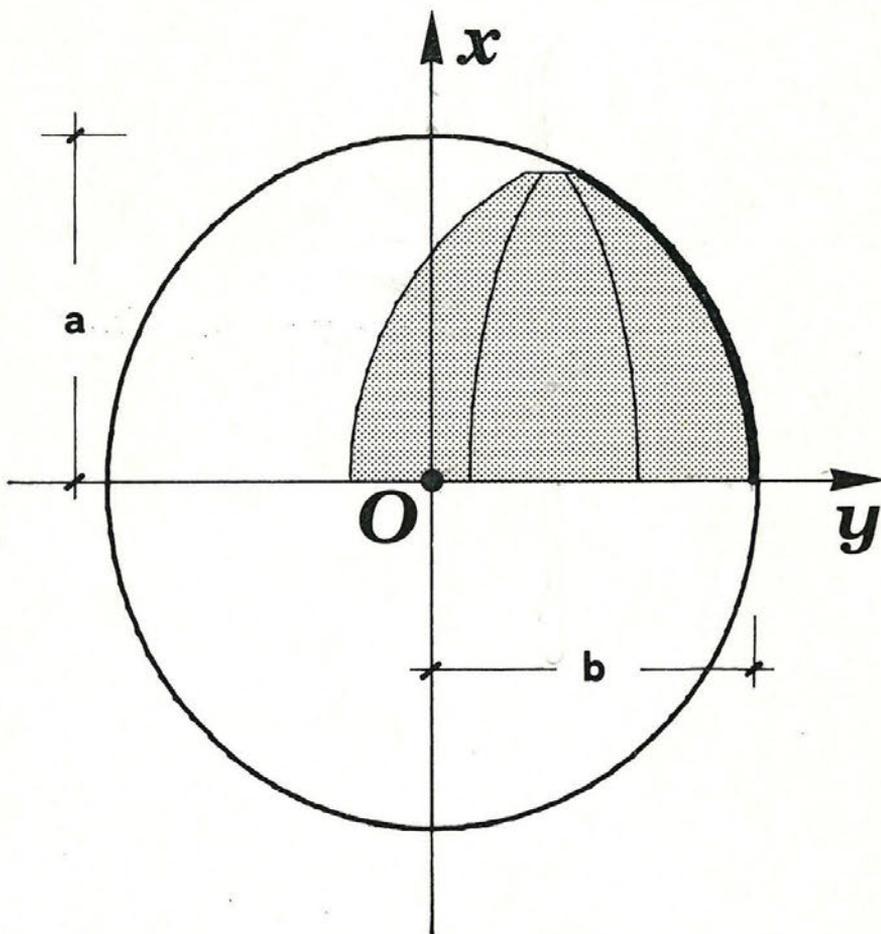
Con un procedimento di successive approssimazioni la descrizione della struttura della cupola è documentata nelle tavole 15 e 16 ove assieme alle immagini complete della cupola compaiono i particolari del generico spicchio con la struttura definita dalle costole di angolo e dalle costole intermedie.

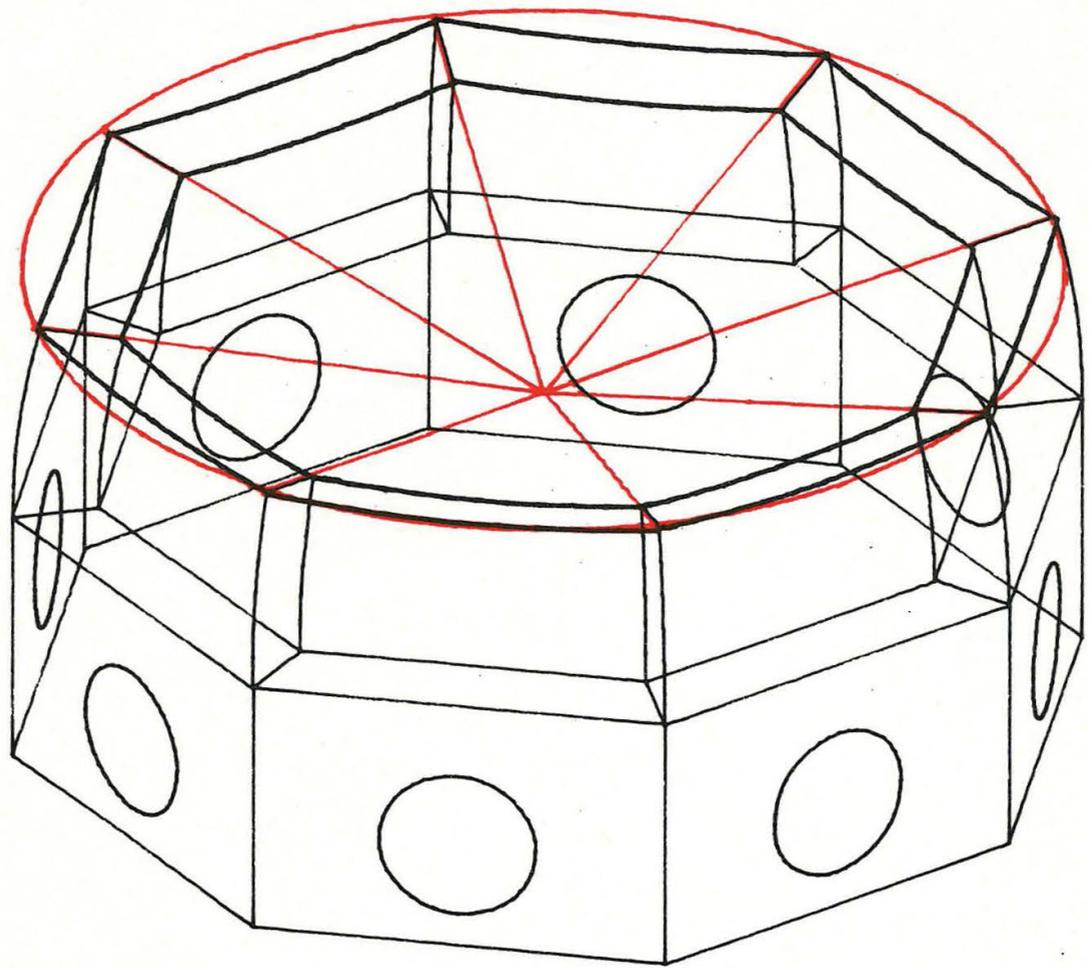
Nelle tavole 17, 18, 19 e 20, infine, tale struttura è stata completata con quella degli archi trasversali che collegano costole di spigolo e costole intermedie.



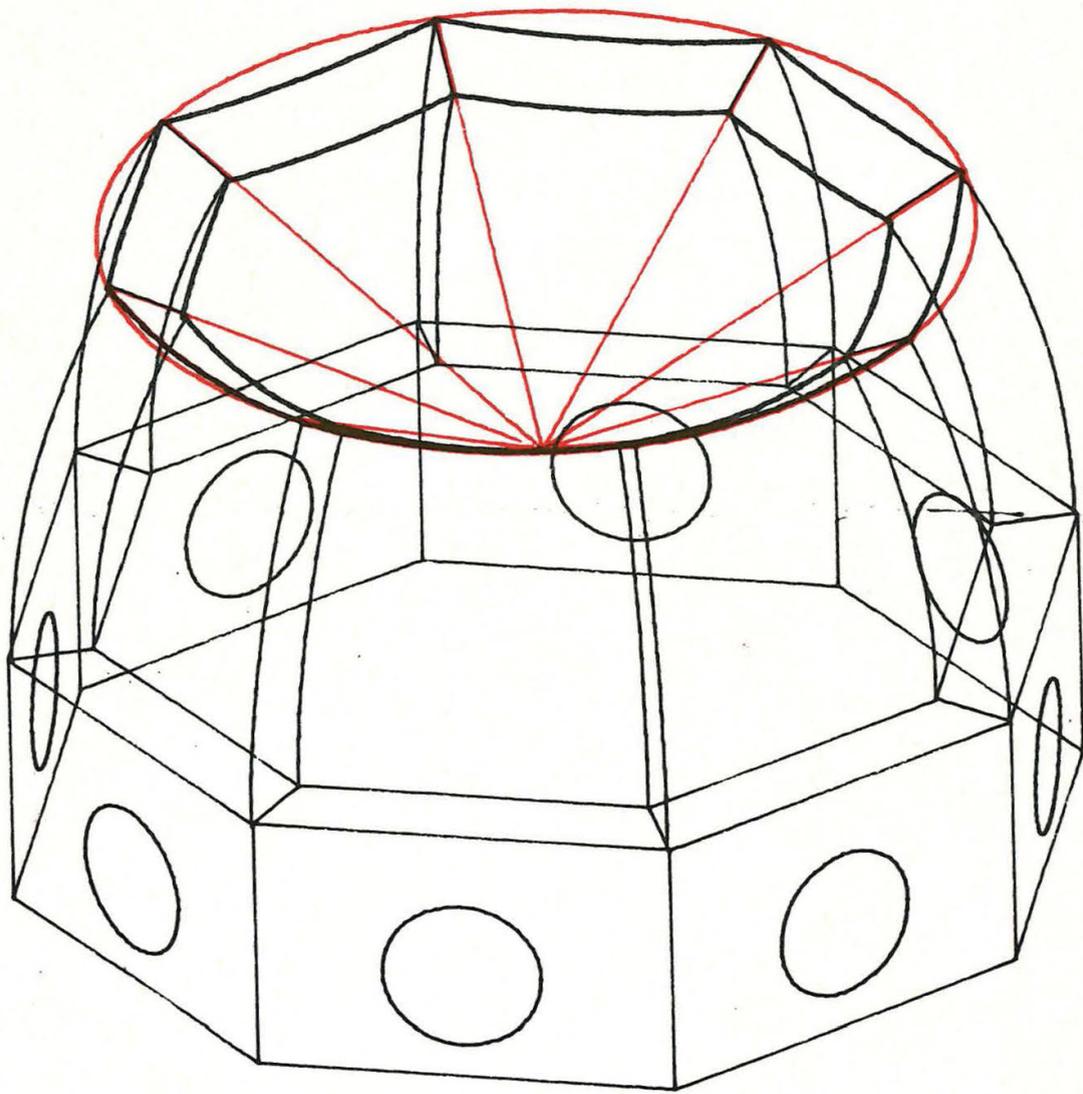
tav.1



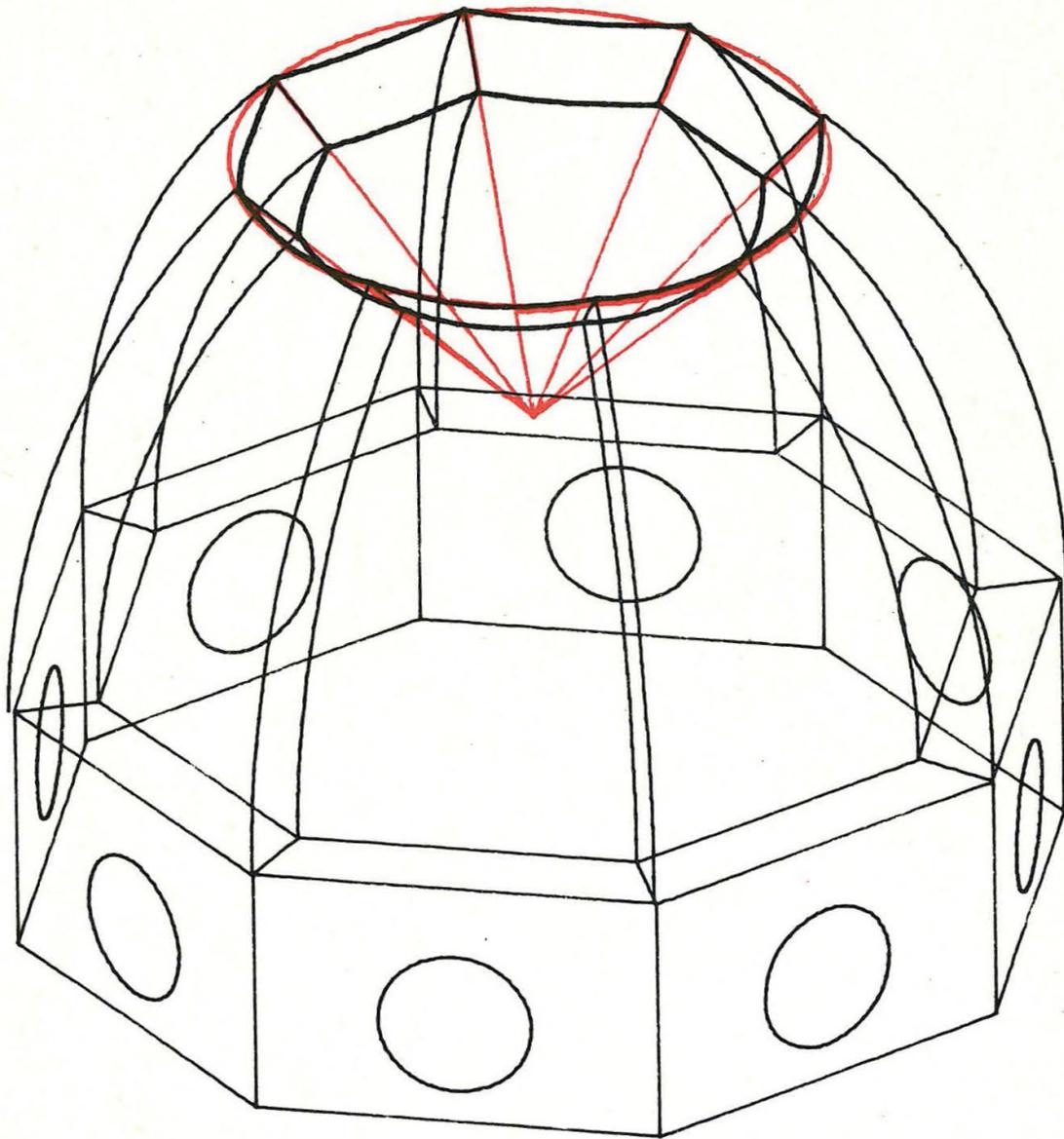




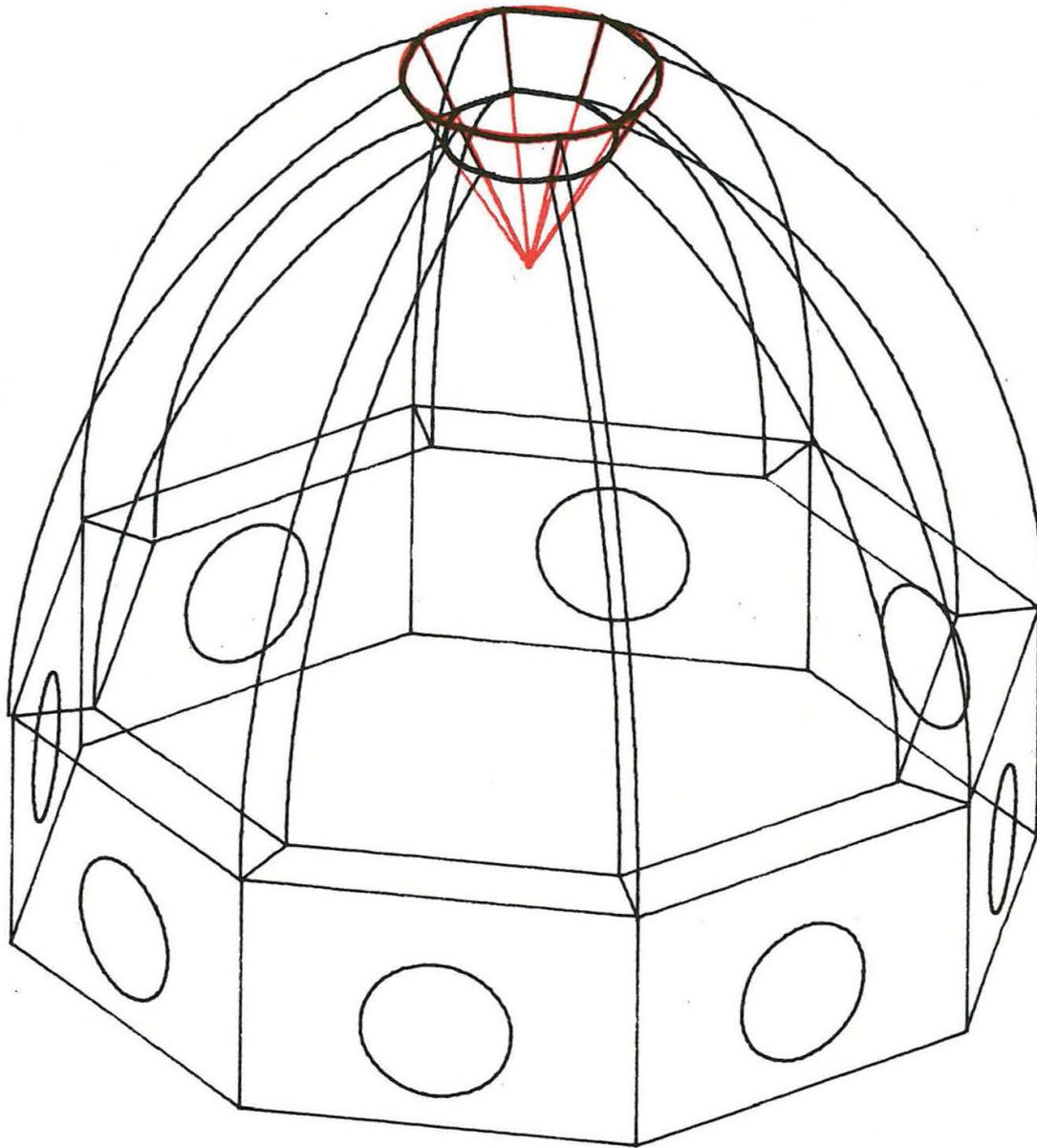
ISOM -10 , 30 BMAX = 15
ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977



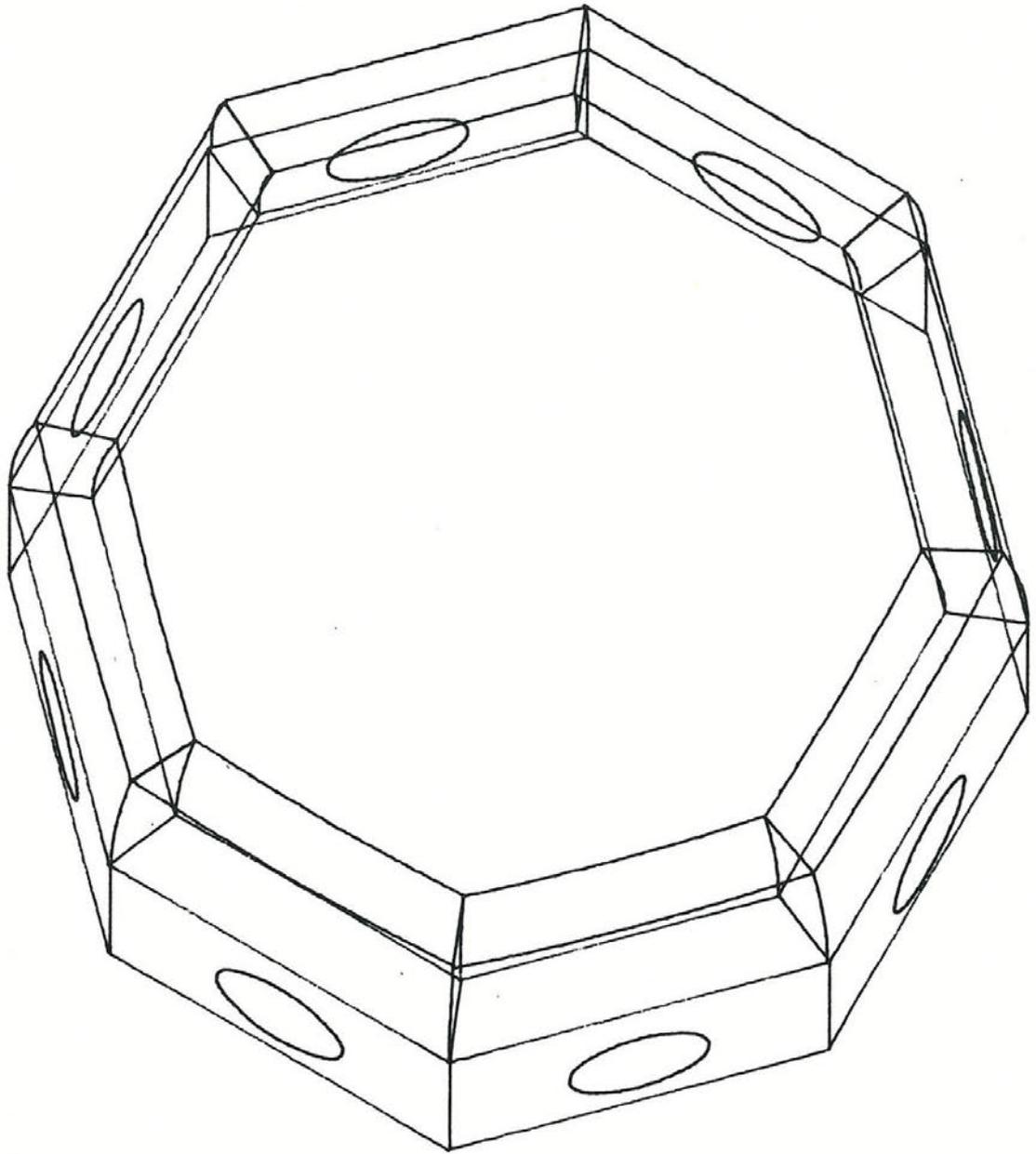
ISOM -10 , 30 BMAX = 30
ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977



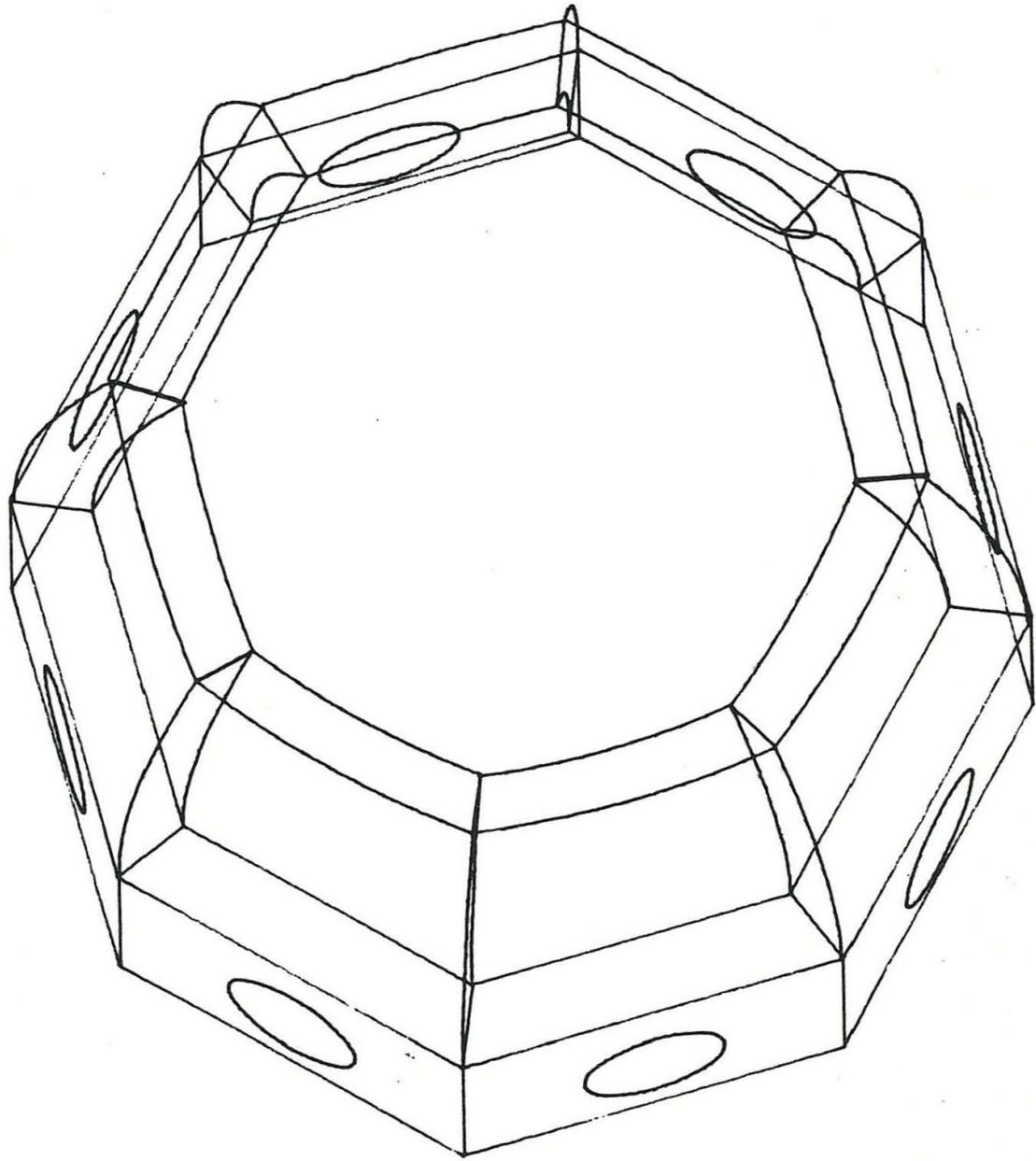
ISOM -10 , 30 BMAX = 45
ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977



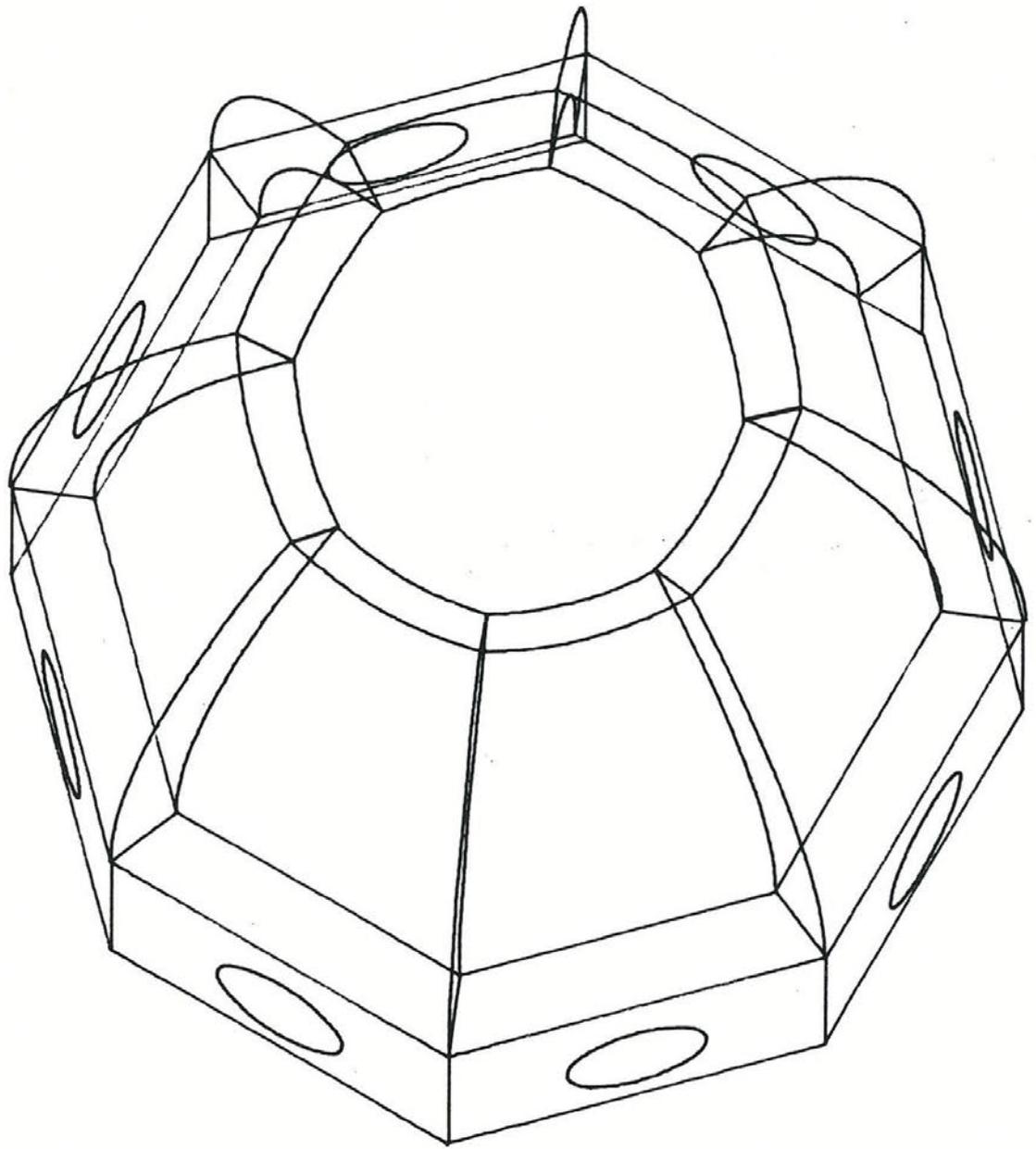
ISOM -10 , 30 BMAX = 60
ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977



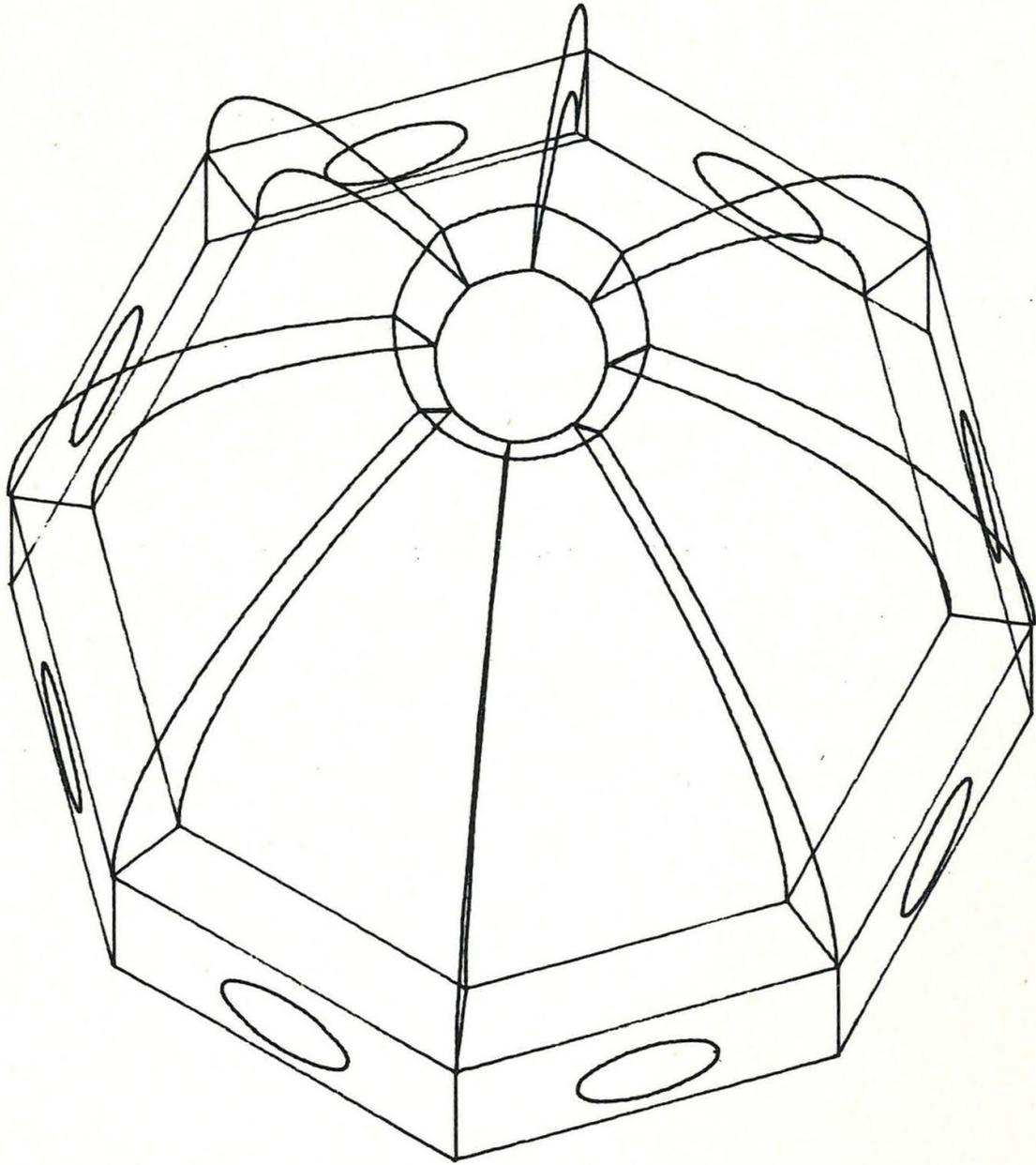
ASSON 15 , 20 BMAX = 15
ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977



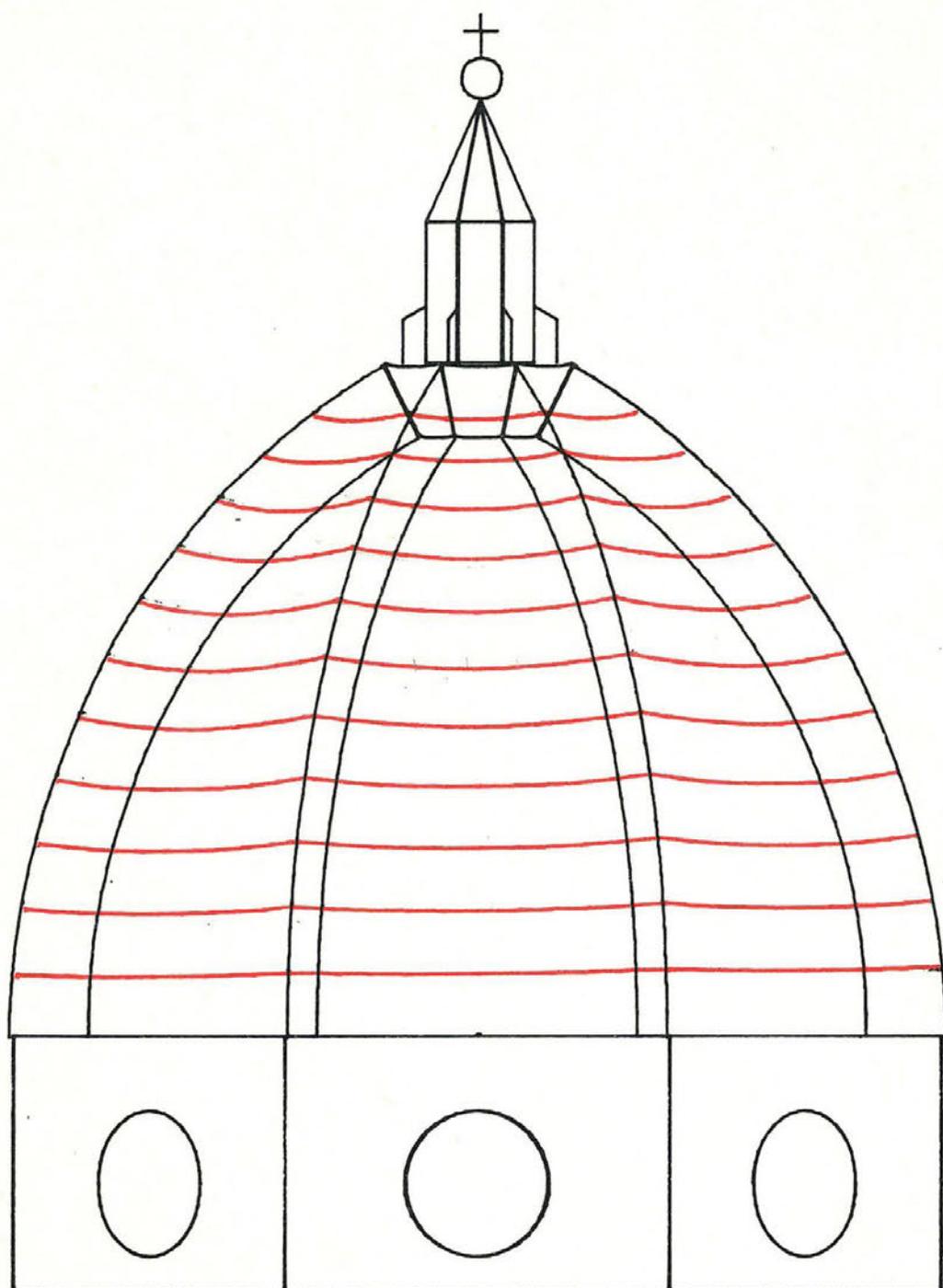
ASSON 15 , 20 BMAX = 30



ASSON 15 , 20 BMAX = 45
ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977

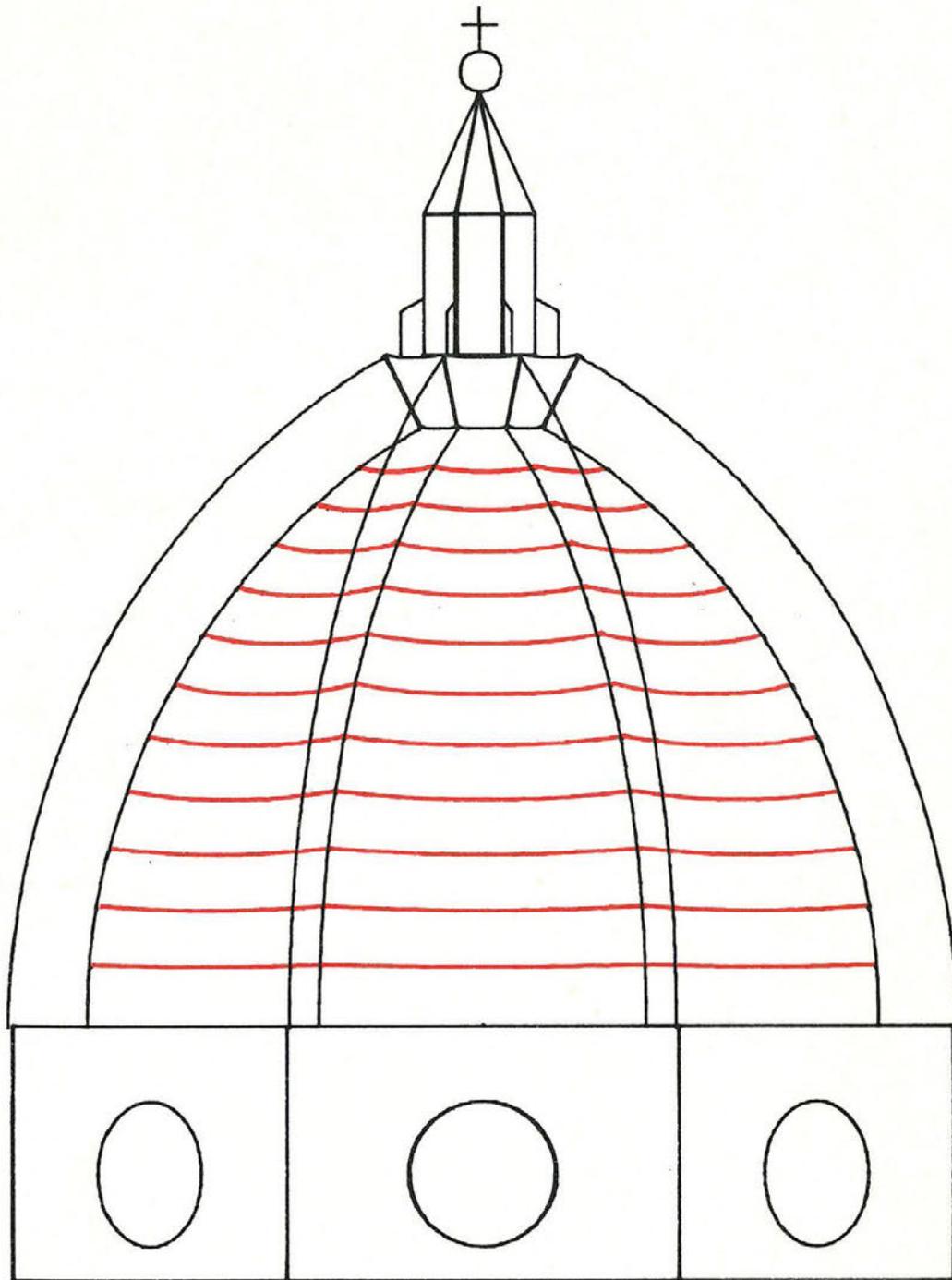


ASSON 15 , 20 BMAX = 60



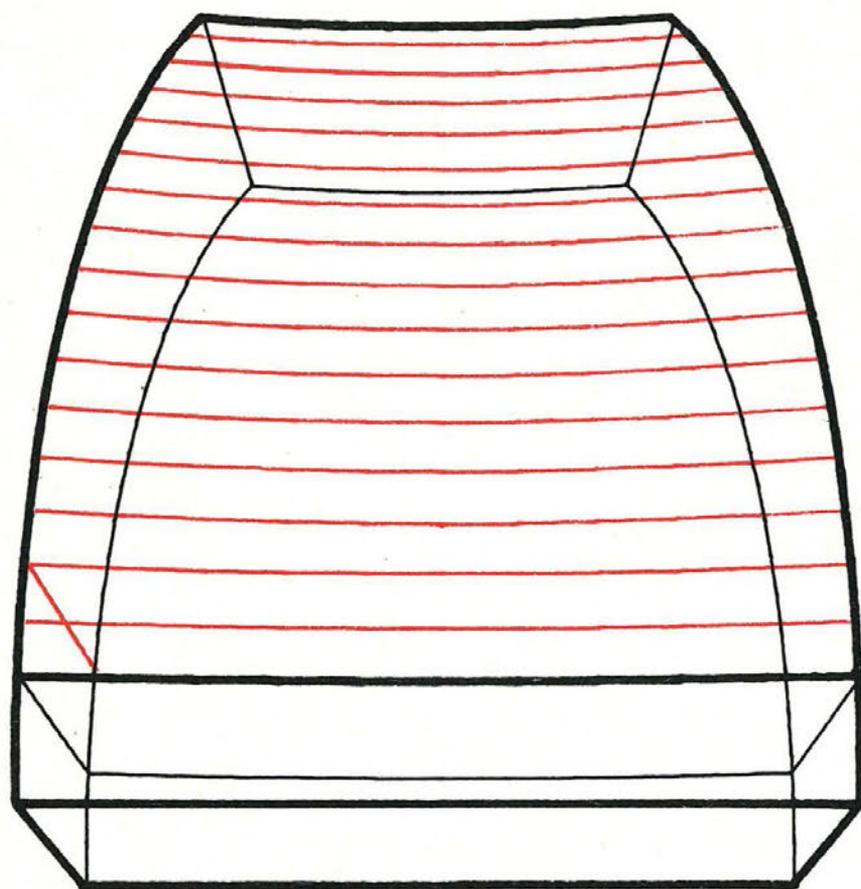
ISOM \emptyset , \emptyset BMAX = 62

ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977

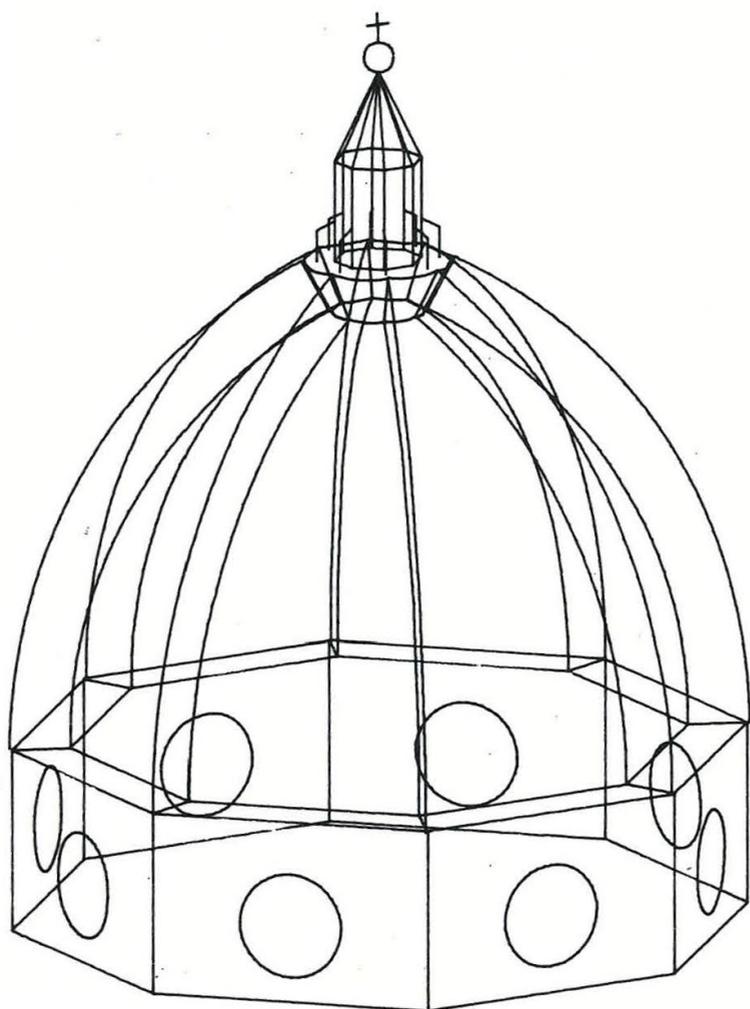


ISOM 0 , 0 BMAX = 62

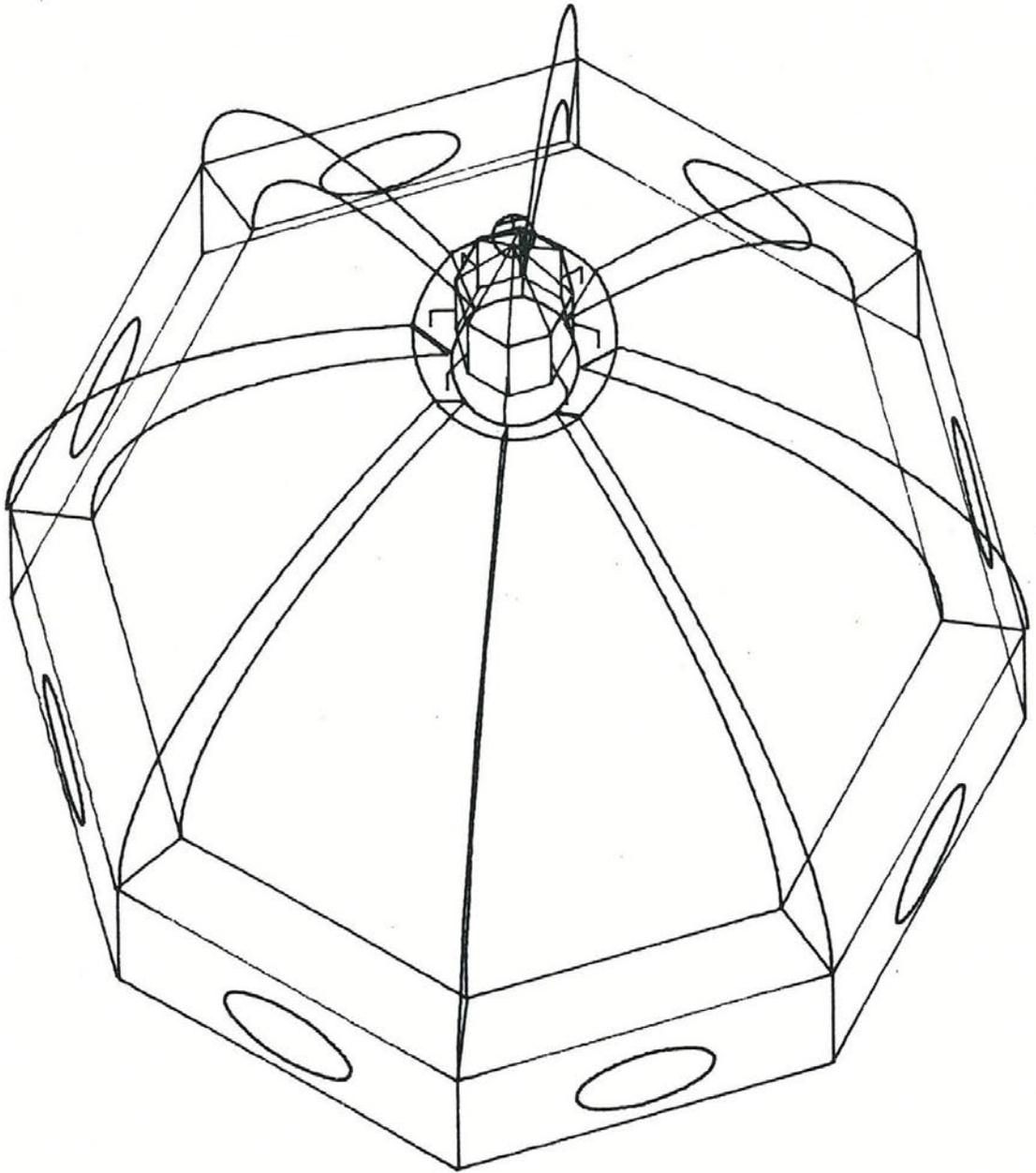
ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977



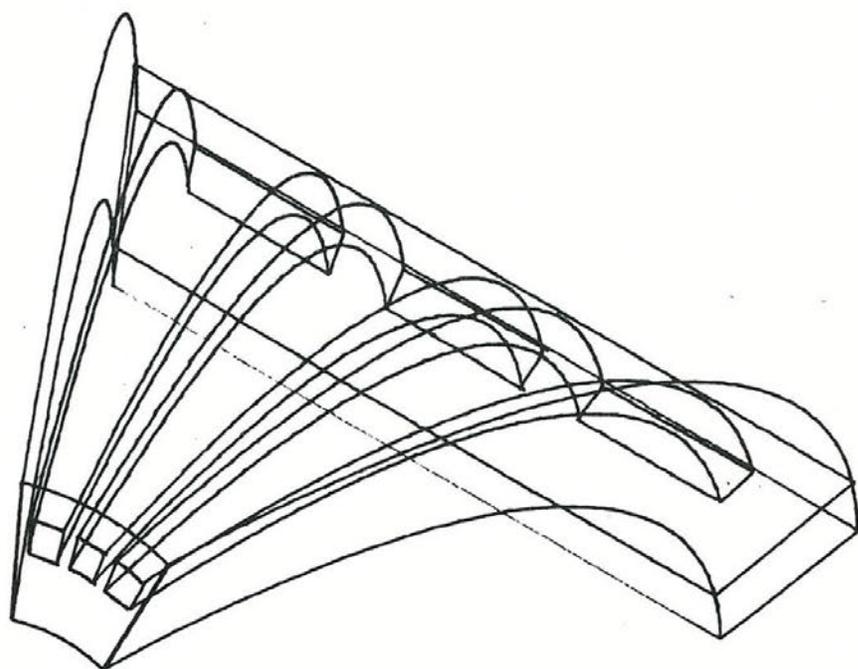
ISOM 90 , 30 BMAX = 45
ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977



ISOM 30 , 15 BMAX = 62
ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977

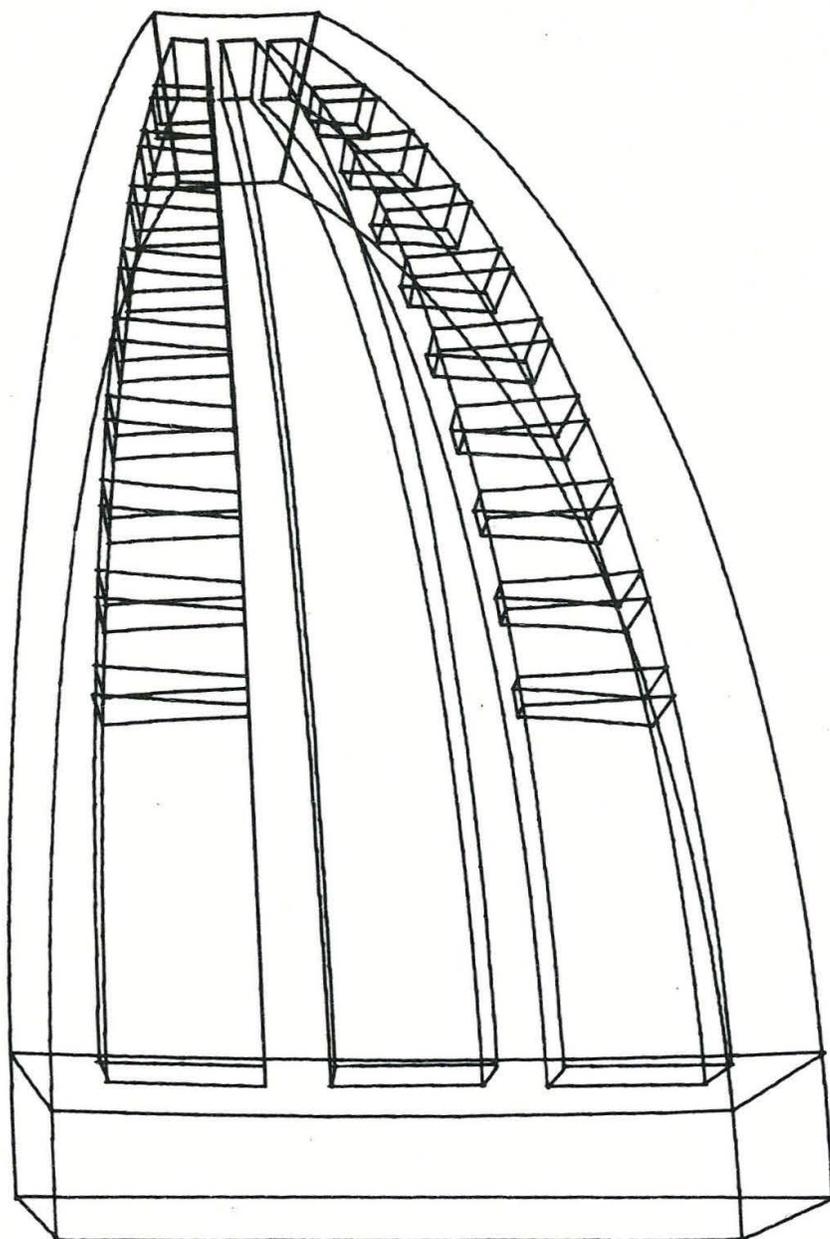


ASSON 15 , 20 BMAX = 62
ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977



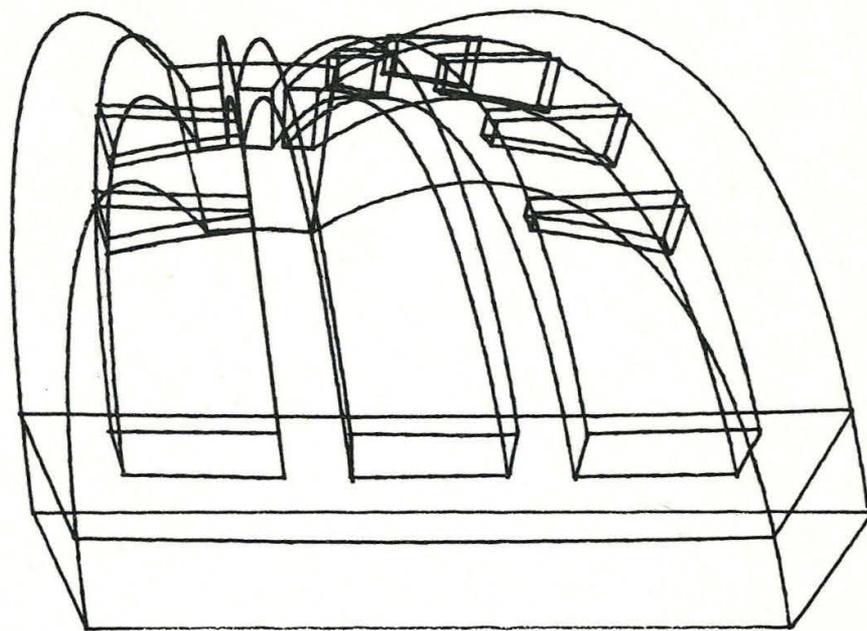
ASSON 60 , 20 BMAX = 62

ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977



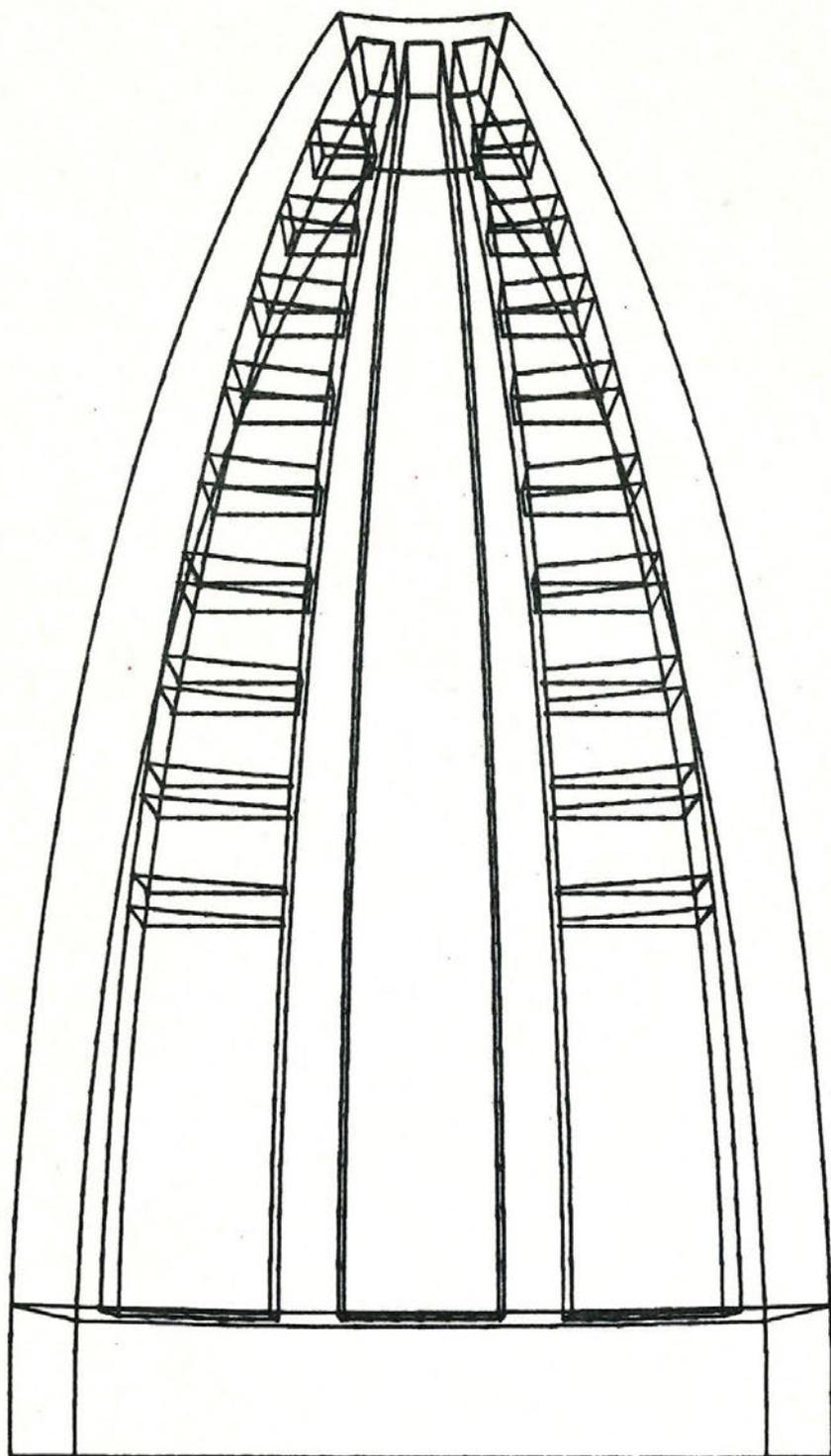
ISOM 80 , 15 BMAX = 62

ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977



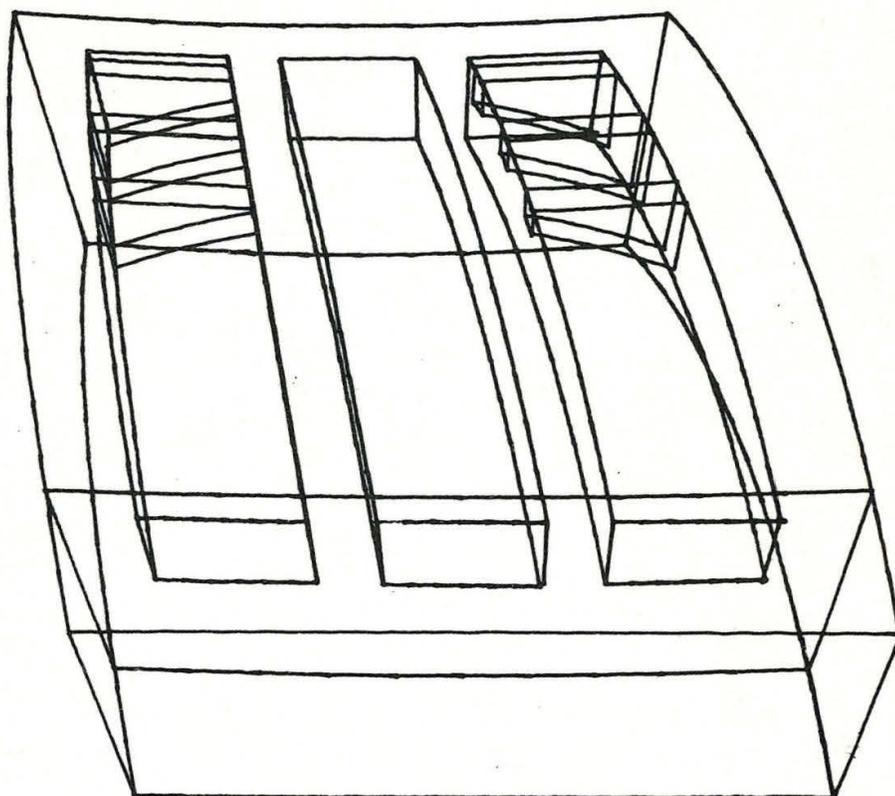
ISOM 80 , 45 BMAX = 62

ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977



ISOM -90 , 0 BMAX = 62

ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977



ASSON 80 , 90 BMAX = 31

ISTITUTO DI COSTRUZIONI, FAC. ARCHITETTURA, FIRENZE 1977

Finito di stampare
presso il Centro 2P FIRENZE
il 14 Ottobre 1977