ANDREA CANTINI

Oggetti ideali, dimostrazioni e pratica matematica

1. *Introduzione: stato dell'arte*

Nel secolo scorso la filosofia della matematica[1] ha seguito, per un verso, la via tracciata dalle scuole fondazionali – logicismo, intuizionismo, formalismo e relative variazioni – appoggiandosi alla logica matematica, mentre, per l'altro, ha costituito una sorta di palestra per le riflessioni filosofiche in stile analitico, in direzione sia ontologica sia epistemologica. Basti pensare alla discussione, nata all'inizio degli anni Sessanta, dei problemi sollevati da Paul Benaceraff intorno a una concezione realistica della matematica e allo strutturalismo, oppure alla perdurante discussione sul cosiddetto «argomento di indispensabilità» *à la* Quine-Putnam[2]. Successivamente, ma già dai primi anni Settanta, e in particolare nei primi tre lustri di questo secolo, si è verificato un sensibile spostamento degli interessi dei filosofi della matematica verso la cosiddetta «pratica matematica» – un'espressione che possiamo cercare di precisare servendoci della definizione di Josè

[1] Si veda *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, a cura di S. Shapiro, Oxford, Oxford University Press, 2007. Tra i testi in italiano cfr. E. Casari, *La filosofia della matematica del '900*, Firenze, Sansoni, 1973; nonché, più recenti, G. Lolli, *Filosofia della matematica. L'eredità del Novecento*, Bologna, il Mulino, 2002; C. Cellucci, *La filosofia della matematica del Novecento*, Bari, Laterza, 2007; M. Panza – A. Sereni, *Il problema di Platone,* Roma, Carocci, 2010.

[2] I contributi di Benaceraff sono ristampati in *Philosophy of Mathematics*, a cura di P. Benaceraff e H. Putnam, Cambridge, Cambridge University Press, 1983[2]; su Quine-Putnam cfr. M. Colyvan: *Indispensability Argument in the Philosophy of Mathematics*, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2015 Edition), a cura di E.N. Zalta, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/mathphil-indis/>.

Ferreiròs: «per "pratica matematica" s'intende il complesso di azioni messe in atto dalla comunità dei matematici quando, sulla base delle loro risorse cognitive, impiegano risorse come cornici teoriche e altri strumenti, al fine di risolvere problemi, dimostrare teoremi, dar forma a teorie e qualche volta elaborare nuove cornici»[3].

Fra le caratteristiche salienti delle nuove ricerche, le cui radici affondano nel secolo scorso, si incontra in primo luogo la centralità della dimensione storica della matematica, intesa come impresa culturale in senso lato, e dotata di un ruolo importante nell'evoluzione dell'umanità e della società. L'accento viene qui posto sulle maniere di 'fare matematica' e sulle sue 'pratiche cognitive', quali l'uso dei diagrammi o del computer, la visualizzazione mediante strumenti grafici, le strategie euristiche e i ragionamenti plausibili. Si passa, quindi, dall'ontologia degli enti matematici intesi staticamente all'attenzione per le loro caratteristiche procedurali e all'attività del matematico. Si assiste insomma a una sorta di processo di 'naturalizzazione': la matematica viene assimilata alle altre scienze per quel che riguarda la dimensione della crescita delle conoscenze, le sue applicazioni alla fisica e a tutte le altre discipline, comprese le scienze sociali e le scienze della vita. Al contrario di quanto accade con l'impostazione tradizionale, si auspica – e talvolta si realizza – un confronto serrato tra la filosofia della matematica e gli sviluppi più recenti della ricerca avanzata[4].

Si possono ovviamente formulare alcune riserve su questa «svolta pratica» (*practical turn*), in quanto essa comporta lo spostamento dell'interesse dai risultati matematici in senso stretto ad elementi esterni, quali la psicologia del matematico, la dimensione sociale del suo lavoro e le sue procedu-

[3] J. Ferreiròs, *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*, Princeton, Princeton University Press, 2015, p. 33 (la traduzione italiana è dell'autore). Sulla «svolta pratica» cfr. *From Logic to Practice*, a cura di G. Lolli, M. Panza e G. Venturi, Berlin-Heidelberg, Springer, 2015; *The Philosophy of Mathematical Practice*, a cura di P. Mancosu, Oxford, Oxford University Press, 2008.

[4] A questo proposito, sull'«Ultimo Teorema di Fermat», si veda J. Avigad*, Number Theory and Elementary Arithmetic*, «Philosophia Mathematica», XI, 2003, pp. 257-84, e C. McLarty, *What does it take to prove Fermat's last theorem? Grothendieck and the logic of number theory*, «Bulletin of Symbolic Logic», XVI, 2010, pp. 59-77.

re cognitive. Oppure la riflessione filosofica sulla matematica rischia di ridursi a una sorta di 'narrazione' dei risultati principali[5], come se questi fossero di per sé dotati di una autonoma rilevanza concettuale. In maniera più esplicita, la «svolta pratica» pone l'accento su un atteggiamento *descrittivo* più che *normativo* nei confronti dell'attività matematica. Ma, come scrive Mancosu nel capitolo introduttivo di *The Philosophy of Mathematical Practice*, è innegabile che la svolta porti un po' di aria fresca in filosofia della matematica e che essa stia di fatto rappresentando una posizione dominante[6].

Dobbiamo dunque immaginarci per il futuro una transizione verso una situazione in cui le posizioni fondazionalistiche e quelle legate alla filosofia analitica si estingueranno o verranno riassorbite nella filosofia della pratica matematica? La previsione è ovviamente aperta, ma si ritiene plausibile che sia più corretto pensare, per quanto attiene agli sviluppi più interessanti, a situazioni di fruttuosa interazione. La tesi implicita in queste brevi riflessioni è che in realtà ci sono punti di raccordo fra le varie posizioni, soltanto in apparenza polemicamente e filosoficamente disgiunte. In quel che segue cercheremo di segnalare qualche punto a conferma di questa convinzione, avvertendo comunque il lettore che il presente lavoro si concentra sugli aspetti del rapporto tra filosofia e matematica mediati dalla logica, tralasciandone quindi di proposito molti altri, seppur meritevoli di maggiore attenzione.

Il prossimo paragrafo considera, secondo una prospettiva tradizionale, il problema degli oggetti ideali, del loro rapporto con le dimostrazioni e della loro funzione. Il terzo paragrafo affronta la questione dell'analisi logica della pratica matematica. In quello conclusivo verrà discusso il significato delle analisi logico-fondazionali, traendo ispirazione da idee di Paul Bernays e Bertrand Russell, ancora decisamente attuali.

[5] Cfr. la recensione di A. Arana al volume di D. Corfield, *Towards a Philosophy of Real Mathematics*, Cambridge, Cambridge University Press, 2003, apparsa in «The Mathematical Intelligencer», XXIX, 2007, pp. 80-83.

[6] *The Philosophy of Mathematical Practice*, a cura di P. Mancosu, cit., p. 1.

2. *Sulla natura degli enti matematici*

Come ha scritto Michael Dummett, le due discipline intellettuali più astratte, la filosofia e la matematica, suscitano la medesima perplessità in merito alla natura dei rispettivi oggetti di studio, nel senso che non si sa bene di che cosa si occupino[7]. Pur senza addentrarci nella trattazione dei due corni della questione, occorre però osservare che a monte della riflessione filosofica sulla matematica si pone un fatto problematico: gli oggetti della matematica sono oggetti ideali e astratti, come gli insiemi infiniti che pure i logici incontrano molto presto nelle loro indagini o le categorie che emergono in diverse aree del pensiero matematico (dalla topologia all'algebra, alla stessa logica e all'informatica teorica). Evitando esempi sofisticati, è sufficiente pensare agli oggetti matematici più semplici e apparentemente concreti, come quelli della geometria elementare: rette, triangoli, punti, a cui non abbiamo accesso diretto 'mediante i sensi'. Il triangolo che si usa per un ragionamento alla lavagna è solo uno schema, ma non è l'oggetto di cui si dimostrano le proprietà. Questa caratteristica solleva il ben noto problema dell'accesso al mondo matematico, già messo in evidenza da Platone. Come si legge nella *Repubblica*:

> [i geometri] si servono e discorrono di specie visibili, ma non pensando a queste, bensì invece a quelle cui queste assomigliano; parlano del quadrato in sé e della diagonale in sé, non già di quella che tracciano, e così via; utilizzano quelle figure che plasmano e disegnano, e di cui esistono ombre e riflessi in acqua, solo come immagini, cercando di vedere e cogliere quelle cose in sé, che non si possono afferrare se non mediante *diànoia*[8].

L'accesso agli oggetti della matematica avviene dunque per mezzo di una «conoscenza discorsiva fondata sul ragionamento» e – si potrebbe dire forzando un po' la mano – la *diànoia* si esplica nella costruzione di argomentazioni razionali, ovvero di *dimostrazioni*. Le dimostrazioni mettono a frutto e utilizzano le entità astratte, e ne fissano implicitamente le

[7] M. Dummett, *What is Mathematics about?*, in *Mathematics and Mind*, a cura di A. George, Oxford; Oxford University Press, 1994, p. 11.

[8] Platone, *Resp.* VI, 510d-511a (trad. it. di F. Sartori in Platone, *Opere Complete*, Bari, Laterza, 1971, vol. VI, pp. 233-35).

caratteristiche *oggettive* mediante *ipotesi*[9]. All'interno delle dimostrazioni le entità astratte, assieme ai loro principi, acquistano una funzione operativa e inferenziale: le ipotesi e le entità della matematica, diversamente da quelle della metafisica, sono concepite al fine di consentire operazioni e costruzioni.

Sulla base della presenza degli oggetti ideali e della loro compenetrazione con le dimostrazioni, ci si può allora domandare quale sia il fine principale dell'idealizzazione in matematica. Questo fine consiste generalmente nel creare un quadro teorico appropriato – ossia l'inserimento di problemi difficili in contesti più astratti – in modo da disporre di metodi dimostrativi efficaci e potenti. Solitamente l'immaginazione matematica non si limita a creare nuovi oggetti che rendono più facili i calcoli o più semplice l'enunciazione dei teoremi, ma mira a fornire nuovi domini concettuali e, in ultima analisi, *spiegazioni.* Ad esempio, le soluzioni delle usuali equazioni algebriche, e in particolare l'unità immaginaria, danno luogo a una struttura apposita: il campo dei numeri complessi. A un più alto livello di astrazione, avvalendosi della teoria dei gruppi, si è in grado di spiegare quando e perché la soluzione di equazioni algebriche è possibile mediante radicali. Ruffini e Abel hanno dimostrato l'impossibilità della risolubilità mediante radicali delle equazioni dal quinto grado in poi, ma è stato Galois a creare una teoria in grado di spiegarne il perché (*demonstratio propter quod*) e non semplicemente di certificarla come un fatto (*demonstratio quia*)[10].

Un altro caso familiare riguarda i cosiddetti principi di scelta nella teoria degli insiemi, che sono stati alla radice di un dibattito acceso agli inizi del Novecento. Essi permettono di asserire l'esistenza di enti ideali che in generale non sappiamo costruire esplicitamente. Nella versione classica si po-

[9] Sull'oggettività cfr. W. Tait, *Beyond the Axioms: The Question of Objectivity in Mathematics*, «Philosophia Mathematica», IX, 2001, pp. 21-36. Sul nesso *oggetti/ipotesi* si veda C. Cellucci, *Top-Down and Bottom-Up Philosophy of Mathematics*, «Foundations of Science», XVIII, 2013, pp. 93-106: «There is no more to mathematical existence than the fact that mathematical objects are hypotheses tentatively introduced to solve problems» (ivi, p. 104).

[10] Si veda E. Casari, *Matematica e Verità*, «Rivista di Filosofia», LXXVIII, 1987, pp. 329-50. Una ricognizione sistematica delle funzioni delle dimostrazioni si trova in G. Lolli, *QED. Fenomenologia della dimostrazione*, Torino, Bollati Boringhieri, 2005.

stula la possibilità di estrarre da una qualsiasi collezione di insiemi non vuoti F – in generale infinita – una collezione che contiene un elemento rappresentante di ciascun insieme di F. Il punto fondamentale è che la postulazione esistenziale non è fine a se stessa: la scelta diventa uno strumento di prova, al fine di garantire che ci sono sempre enti matematici che godono di proprietà *speciali ed estremali*, per esempio ultrafiltri, ideali massimali etc. Da un punto di vista storico e metodologico, il principio di scelta permette poi di unificare diverse costruzioni astratte in settori disparati, come l'algebra, la topologia, l'analisi, e ha senso in quanto autorizza a compiere determinate mosse nelle dimostrazioni.

Cercando di sintetizzare, l'allargamento ontologico in matematica è associato a un duplice ruolo. I principi (che postulano oggetti) ideali sono infatti *creatori di struttura*, ma sul versante epistemologico – e pensiamo ancora alla scelta – essi sono motivati da *esigenze teoriche e dimostrative*[11].

Alla luce di quanto scrive Bernays in riferimento all'esistenza matematica[12], questo ci permette di ritornare al problema di partenza proponendo la nozione di *bezogene Existenz* (o «esistenza relativa»). In matematica la singola entità – si pensi per l'appunto proprio agli oggetti che esistono per il principio di scelta – non si presenta in altro senso se non come *oggetto conforme a un sistema di relazioni date da certe leggi*: non c'è sostanzialmente differenza tra oggettualità e legalità (*Gesetzlichkeit*), costituita da un complesso di assunzioni o ipotesi, come avrebbe detto proprio Platone. Quindi l'affermazione di *esistenza* o *non-esistenza* di entità ideali può essere fatta soltanto in riferimento a una struttura (*Gebilde*) di cui le entità fanno parte come costitutive. Può trattarsi di una semplice figura geometrica, quando diciamo che un cubo ha 12 spigoli, o invece di una complessa organizzazione di diagrammi che coinvolge spazi astratti con le loro corrispondenze strutturali – oggi si direbbe una «ca-

[11] Cfr. E. Giusti, *Ipotesi alla base dell'esistenza matematica*, Torino, Bollati Boringhieri 1999, p. 26.

[12] P. Bernays, *Mathematische Existenz und Widerspruchsfreiheit*, in *Etudes de Philosophie des Sciences en Hommage à Ferdinand Gonseth*, Neuchatel, Editions du Griffon, 1950, pp. 11-25. Si cita dalla ristampa in Id., *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1976, pp. 92-106.

tegoria» in senso matematico – come avviene, per esempio, nell'algebra astratta o nella topologia algebrica. Filosoficamente – osserva Bernays – questo tipo di esistenza è comunque caratteristico dell'attività teorica in quanto tale, proprio come le affermazioni di esistenza nell'ambito di una composizione drammaturgica o come le «determinazioni» (*Bestimmungen*) del Diritto Romano[13].

3. *L'analisi logica della «core mathematics» e le sue conseguenze filosofiche*

Se si assume il punto di vista della filosofia analitica della matematica risulta naturale approfondire il tema della precedente sezione interrogandosi sulla cosiddetta *necessit*à *degli oggetti ideali* in matematica e sulla questione filosofica della loro *indispensabilit*à. La «svolta pratica» di cui abbiamo parlato nel primo paragrafo suggerisce di considerare il problema in una forma più specifica: la matematica scientificamente applicabile (*core mathematics*) ha davvero bisogno di entità astratte? E se sì, in che misura? La domanda, seppur un po' vaga, è di notevole interesse generale, soprattutto per una filosofia della matematica aperta verso la filosofia della scienza e le applicazioni; per questa ragione si pone sullo sfondo di molte indagini degli ultimi cinquant'anni. C'è però ancora un punto da chiarire: con quali metodi s'intende affrontare e rendere più definito il problema? A questo punto entra in scena una terza direzione di ricerca, già menzionata nell'introduzione: la componente dell'analisi logica, più legata agli studi fondazionali e alla logica matematica. In questa maniera si realizza insieme una sintesi e un'interazione dei tre aspetti menzionati nel primo paragrafo.

Nel caso concreto – con tutti i limiti imposti dallo spazio a disposizione e dalla sede che ospita il presente contributo – ci soffermeremo brevemente sul cosiddetto fenomeno della *reverse mathematics*[14], ovvero su un complesso di ricer-

[13] P. Bernays, *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, cit., pp. 94-95.

[14] S.G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Cambridge, Cambridge University Press, 2009².

che, inaugurate negli anni Settanta dallo studioso americano Harvey Friedman, che sono state successivamente sviluppate in maniera sistematica da Stephen Simpson e dai suoi allievi. Supponiamo di fissare una teoria minimale T, che include le operazioni aritmetiche elementari (come somma e prodotto) e permette la definizione di insiemi effettivamente decidibili[15]. Quando un *principio logico di esistenza* per insiemi o predicati – per esempio, un principio di comprensione – implica a partire dalla base teorica minimale T un *teorema matematico* genuino, risulta non di rado assai istruttivo cercare di 'invertire la freccia', ovvero chiedersi se il teorema matematico non implichi a sua volta il principio logico da cui discende. Se ciò si verifica e si prova dunque una doppia implicazione, il principio logico di esistenza che si è applicato risulta non solo sufficiente, ma anche necessario al risultato matematico; e se, com'è naturale presupporre, il principio di esistenza in questione condensa in sé l'elemento astratto o ideale per eccellenza di una determinata dimostrazione, è ragionevole concludere che quello specifico uso di concetti astratti è indispensabile[16]. Il risultato sorprendente del programma di ricerca della *reverse mathematics* è che il processo di calibrazione e classificazione ha portato ora come ora a isolare una gerarchia di cinque teorie *soltanto*, nelle quali trovano posto in ordine di forza logica crescente i principi di esistenza coinvolti, e che sono in grado di rappresentare e dimostrare teoremi significativi della *matematica ordinaria*.

Se si considera la valutazione del significato filosofico di questo programma, va osservato che le prime due teorie della gerarchia sono legate alla codifica del peculiare formalismo di Hilbert, che accettava solo l'infinito potenziale e operazioni finitarie, e che sono molti i risultati matematicamente rilevanti che si lasciano ricostruire all'interno di una cornice teorica finitaria. Risulta inoltre che i due successivi livelli della gerarchia sono naturalmente adeguati a codificare idee della filosofia della matematica predicativistica, da Weyl a Poincaré e Russell. Si tratta di quelle posizioni che – *contra* Gödel – non ammettono la legittimità del definire insiemi di numeri

[15] *Ibidem*.

[16] Si veda il classico lavoro di H. Friedman, *On the necessary use of abstract set theory*, «Advances in Mathematics», XLI, 1981, pp. 209-80.

naturali quantificando su tutti i possibili insiemi dei naturali, per timore di una circolarità viziosa. Il quinto livello rimanda invece a costruzioni più astratte e a definizioni impredicative, ma pur reinterpretabili secondo una *concezione genetica e intuizionistica* delle entità astratte della matematica.

La conseguenza sembra dunque essere che lo studio della teoria degli insiemi nella sua veste di genuina teoria delle infinità superiori «è largamente irrilevante per la pratica matematica di base»[17]. Ora, secondo l'impostazione naturalistica e secondo l'argomento d'indispensabilità di Quine-Putnam, siamo autorizzati ad assumere l'esistenza di quelle entità che vengono implicate dalle teorie che ci servono a indagare il mondo che ci circonda. La classificazione ottenuta con la *reverse mathematics* condurrebbe dunque a un drastico ridimensionamento del peso ontologico della *core mathematics*.

In realtà ci si può chiedere quanto le argomentazioni dipendano dalle scelte formali e dal taglio empirico della ricerca, dato che si tratta in ultima analisi sempre di studi di casi esemplari. Va ricordato che vi sono *altri* programmi che portano alle *medesime* conclusioni da direzioni completamente distinte, ma per ragioni di spazio e di complessità tecnica non è possibile trattarli esplicitamente in questa sede. Ci limitiamo a rimandare il lettore ai lavori di Feferman[18] ispirati a Hermann Weyl, alle teorie di Kohlenbach[19] che estendono le idee gödeliane legate alla cosiddetta *Dialectica Interpretation*, o alla teorie costruttive dei tipi alla Martin-Löf[20]. Quan-

[17] S.G. Simpson, *Toward Objectivity in Mathematics*, in *Infinity and Truth*, Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, XXV, 2014, pp. 157-69.

[18] S. Feferman, *In the Light of Logic*, Oxford, Oxford University Press, 1998, in particolare p. 207.

[19] U. Kohlenbach, *Applied proof theory: proof interpretations and their use in mathematics*, Berlin, Springer, 2008. Riguardo alle intersezioni della *reverse mathematics* con le altre linee di ricerca, si vedano: U. Kohlenbach, *Higher Order Reverse Mathematics*, in *Reverse Mathematics 2001*, a cura di S.G. Simpson, Cambridge, Cambridge University Press, 2017, pp. 281-95; J. Avigad – S. Feferman, *Gödel's functional («Dialectica») interpretation*, in *Handbook of Proof Theory*, a cura di S.R. Buss, Amsterdam, Elsevier, 1998, pp. 337-406.

[20] P. Martin-Löf, *An intuitionistic theory of types*, in *Twenty-five Years of Constructive Type Theory (Venice, 1995)*, Oxford, Oxford University Press, 1998, pp. 127-72.

to agli ultimi due casi ci sia permesso di ricordare che lo sfondo filosofico è quello della «semantica delle dimostrazioni» (*proof-theoretic semantics*), alternativa alla classica teoria tarskiana della verità e legata, da un lato, all'intuizionismo, in particolare alle idee dei matematici Brouwer, Heyting, Kolmogorov, e, dall'altro, alla teoria del significato elaborata da Michael Dummett, Prawitz *et al.*, prendendo spunto da idee di Frege e del secondo Wittgenstein. In quella teoria comprendere il significato di una proposizione matematica vuol dire saper spiegare cosa conta come «prova di A», dove quest'ultima espressione va intesa informalmente, come costruzione che produce evidenza a favore dell'accettazione di A; e infine «A è vero» è sinonimo di «c'è una prova di A», essendo l'esistenziale «c'è» inteso costruttivamente, nel senso che si può effettivamente esibire il *proof-object* che certifica A. Anzi, secondo la lettura di Kolmogorov, una proposizione matematica è essenzialmente (la posizione di) un *problema* e le dimostrazioni ne sono le *soluzioni*; e una data proposizione A viene identificata con il tipo – qui inteso estensionalmente come collezione – delle sue prove.

Si tratta di un fondamentale mutamento di prospettiva concettuale: le dimostrazioni non sono entità meramente linguistico-formali, ma diventano veri e propri oggetti autonomi, dotati di struttura matematica non banale; com'è noto, ciò ha portato a sviluppi di grande importanza sia teorica sia applicativa. Basti osservare che la tradizionale contrapposizione fra indagini sintattiche e semantiche – che caratterizza la grande metalogica degli anni Trenta – diviene progressivamente meno netta e ci sono studi e ricerche nella direzione di un suo superamento, come la già citata teoria costruttiva dei tipi di Martin-Löf e altri sviluppi nella direzione della recentissima *Homotopy Type Theory* HoTT e della *Geometry of Interactions* di J.Y.Girard[21] motivati da applicazioni sia matematiche sia informatiche.

Nonostante le indicazioni sopra menzionate nella direzione di una *dispensabilità* di molti principi astratti, è tuttavia ne-

[21] Per HoTT e il suo significato filosofico cfr. S. Awodey, *Structuralism, invariance and univalence*, «Philosophia Mathematica», XXII, 2014, pp. 1-11; J.Y. Girard, *The Blindspot. Lectures on Logic*, Zürich, European Mathematical Society (EMS), 2011.

cessario essere molto cauti e lasciare aperta la direzione infinitaria della ricerca per due ordini di motivi.

In primo luogo sappiamo dai teoremi d'incompletezza di Gödel che l'insieme delle verità aritmetiche elementari non è effettivamente descrivibile mediante algoritmi o calcoli logici di un qualche tipo, e che l'uso di principi astratti può avere ricadute sulle parti elementari, nel senso che si possono usare concetti non-elementari e non-numerici per ottenere conoscenze *sui numeri stessi*, in violazione della cosiddetta «purezza dei metodi».

In secondo luogo, sussiste un dato storico e teorico filosoficamente (e cognitivamente) interessante: ancora oggi si ha la sensazione di non aver ben compreso come sfruttare appieno gli oggetti astratti e i principi che li governano, e rimane aperto il problema di applicazioni che utilizzino al meglio il potere delle ipotesi infinitarie più astratte.

4. *Conclusioni: sulla natura della ricerca fondazionale*

La riflessione sulla matematica che muove dagli studi fondazionali e logici ha in realtà alcuni punti di contatto con le posizioni anti-fondazionalistiche, non-conformistiche[22] o legate alla «svolta pratica». Vediamo perché.

A prescindere dalla funzione di certificazione dei teoremi e d'individuazione delle loro «ragioni», le dimostrazioni non di rado poggiano su ipotesi ardite nella direzione del «non-effettivo» o «non-calcolabile», o assumono uniformità ideali molto forti sulla struttura teorica di sfondo, per esempio sull'universo degli insiemi. Inoltre, a livello di pratica matematica, ci sono fatti elementari che sono sì intuitivi da un punto di vista geometrico, ma la cui prova analitica rigorosa fa un uso essenziale di ipotesi astratte e non sempre evidenti[23].

[22] R. Hersh, *What is Mathematics, Really?*, Oxford, Oxford University Press, 1997, trad. it. a cura di R. Giomi col titolo *Cos'è davvero la matematica*, Roma-Milano, Baldini-Castoldi-Dalai, 2003.

[23] Il classico teorema secondo il quale ogni trasformazione continua dell'intervallo chiuso unitario in sé ammette un punto fisso poggia sul cosiddetto lemma di Heine-Borel e quindi sull'*Unendlichkeitslemma*. Per i dettagli cfr. S.G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, cit., p. 150.

Se ci troviamo a ragionare su entità «al di là di ogni possibile esperienza», e si assumono principi problematici di estensione dell'ontologia, si può intravedere un'altra funzione – più recondita e altrettanto importante – per le dimostrazioni (formali e non) e più in generale per le cornici teoriche (assiomatiche e non) che le sostengono. Quale sia questa funzione lo si evince dal testo già menzionato di Bernays[24], nel quale si argomenta a favore della *natura duale della conoscenza matematica* che combina fattori razionali ed empirici proprio come le scienze naturali. Per i domini astratti della logica e della matematica – si sostiene – *la formazione dei concetti non* è *puramente a priori, ma emerge da una sperimentazione ideale (geistiges Experimentieren).* Questa concezione trova conferma proprio nel lavoro fondazionale, in cui il quadro metodologico viene adattato alle esigenze della ricerca *mediante tentativi ed errori*[25]. Anzi, parte del lavoro fondazionale e formale è sperimentale almeno nel senso in cui gli esperimenti ideali (*Gedankenexperimente*) vengono usati nella scienza. Secondo Bernays, anche i vari progetti fondazionali a cui abbiamo fatto riferimento all'inizio vanno visti in questa luce, ossia come esperimenti ideali, complessi e articolati, che ci dicono fino a che punto si riescono a implementare – a diretto confronto con l'esperienza e la pratica matematica – alcune idee filosofiche.

Un'interpretazione del lavoro fondazionale non divergente da quella bernaysiana è presente anche in uno scritto inedito di Russell sul cosiddetto «metodo regressivo» e nella prefazione ai *Principia Mathematica* del 1910[26], dove si sostiene che il nostro procedere per scoprire i principi è sostanzialmente assimilabile al metodo di scoperta delle leggi generali di ogni altra scienza. Le nostre ragioni per credere alla logica

[24] P. Bernays, *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, cit., p. 102. Si riprendono qui brevemente alcune riflessioni già contenute in A. Cantini, *On formal proofs*, in *Deduction, Computation, Experiment*, a cura di R. Lupacchini e G. Corsi, Milano, Springer Verlag Italia, 2008, pp. 29-48.

[25] P. Bernays, *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, cit., p. 102.

[26] B. Russell, *The regressive method of discovering the premises of mathematics*, in Id., *Essays on Analysis*, London, Allen and Unwin, 1973, pp. 272-83. Si veda anche quanto Russell scrive nella Prefazione ai *Principia Mathematica* del 1910. Cfr. in particolare *Introduzione ai «Principia Mathematica»*, a cura di P. Parrini, Firenze, La Nuova Italia, 1977, p. 6.

e alla matematica sono, almeno parzialmente, soltanto induttive e probabili. I fondamenti sono congetturali, basati su sostegni – ipotesi – da saggiare nel procedimento concreto della comprensione e della conoscenza.

Le idee cui si è fatto cenno fanno pensare a posizioni inserite nella cosiddetta rinascita di una qualche forma di empirismo in filosofia della matematica (da Lakatos all'antifondazionalismo di Hersh etc.). Secondo l'empirista, poiché le dimostrazioni sono spesso sbagliate e imperfette, tanto vale rimpiazzare il ruolo centrale delle dimostrazioni con quello più vago di procedura euristica, evidenza induttiva o ragionamento plausibile, fare appello sempre più di frequente alle «dimostrazioni assistite dal computer»; e concludere, infine, che non c'è differenza fra la certezza della matematica e quella delle altre scienze.

Ma allora la dimostrazione non sarebbe più il risultato del lavoro matematico per eccellenza? Stiamo sposando una posizione empiristica? No, non è così; e dovrebbe essere chiaro perché. Gli esperimenti ideali a cui si sta pensando, e a cui pensa anche Bernays, sono effettuati per mezzo dell'armamentario tipico e specifico della logica e della matematica. In quest'ottica, i sistemi formali hanno senso proprio perché sono come «laboratori»[27] in cui si allestiscono esperimenti ideali: la loro funzione precipua è studiare «in forma» combinazioni di principi, inferenze e le loro possibili derivazioni, in modo da individuarne proprietà e interpretazioni che non sarebbero altrimenti apprezzabili, soprattutto nella loro generalità. L'utilità di questi peculiari laboratori edificati dalla logica del Novecento sta nel fatto che essi ci permettono di vedere che cosa succede quando si compiono operazioni di revisione o si avanzano ipotesi filosofiche.

Un esempio significativo di *geistiges Experimentieren* è stato di recente applicato per contestare la tesi del «realismo rispetto ai valori di verità» (*truth-value-realism*), secondo la quale gli enunciati matematici hanno comunque un valore di

[27] Nella letteratura si trova la definizione della matematica come «laboratorio di pensiero»: cfr. G. Lolli, *La questione dei fondamenti tra matematica e filosofia*, in *Matematica e filosofia*, a cura di S. Albeverio e F. Minazzi, «Note di Matematica, Storia, Cultura», Milano, Pristem/Storia, Università Bocconi, XIV-XV, 2006, pp. 17-35.

verità classico ben determinato. Come enunciato specifico si considera la celeberrima «Ipotesi del Continuo» (CH), ovverosia l'enunciato secondo cui, data una qualsiasi collezione infinita X di punti della retta, o X è numerabile (esiste cioè una corrispondenza biunivoca fra X e l'insieme di numeri naturali 0, 1, 2,…), oppure X ha la stessa cardinalità del continuo (ovvero X è in corrispondenza biunivoca con i punti di *tutta* la retta).

Dal punto di vista del filosofo realista e del logico classico, CH è vera o falsa. E questo giustifica le ardue indagini attualmente in corso con armi assai sofisticate nell'ambito della teoria superiore degli insiemi. Ma per il concettualista CH è «inerentemente vaga», perché vaga risulterebbe a tutt'oggi la nostra concezione della nozione di «sottoinsieme arbitrario del continuo». Per giustificare questa critica, un illustre studioso concettualista, Solomon Feferman, ha delineato un'apposita teoria semi-costruttiva degli insiemi che individua una sorta di terza via tra costruttivismo radicale e atteggiamento classico. In essa sono *ben definite* le totalità dei numeri naturali e del continuo per cui vale la logica classica, ma *non la collezione dei sottoinsiemi del continuo*, la quale è invece vista invece *come totalità aperta e potenzialmente data*. Si congettura allora che il principio del terzo escluso non valga per CH, con il conseguente fallimento del *truth value realism*; e la congettura è stata di recente dimostrata con tecniche semantiche costruttive da Michael Rathjen[28].

Le conseguenze filosofiche del risultato tecnico sono ovviamente in discussione[29]: il punto di Feferman si riduce, secondo Koellner, a sostenere che, mentre la nostra concezione dei naturali è *chiara* – e ci autorizza a usare la logica classica – non altrettanto può dirsi della nozione di «insieme arbitrario». Ma non si fa qui riferimento a un concetto – quello di *chiarezza* – soggettivo?

[28] S. Feferman, *On the strength of some semi-constructive theories*, in *Logic, Construction, Computation*, a cura di U. Berger *et al.*, Frankfurt, Ontos Verlag, 2012, pp. 201-25. M. Rathjen, *Indefiniteness in semi-intuitionistic theories: on a conjecture of Feferman*, «The Journal of Symbolic Logic», LXXXI, 2016, pp. 742-53.

[29] P. Koellner ha avanzato alcune controdeduzioni in *Feferman on the Indefiniteness of CH*, URL = http://logic.harvard.edu/EFI_Feferman_comments.pdf/.

Si aprirebbe lo spazio per un'analisi di ben altra portata, ma dobbiamo fermarci. Resta però evidente il significato generale del risultato: metterci in guardia contro l'attribuzione acritica e a priori di uno *status* semantico ben definito a un *qualsiasi* enunciato matematico, soprattutto quando sono coinvolte strutture ideali. E ci invita infine a riflettere a fondo sui meccanismi che portano a definire *le caratteristiche logiche* di una determinata teoria, e sulla loro intrinseca dipendenza dagli enti che si teorizzano.

Summary. Ideal Object, Proof, and Mathematical Practice

In the present philosophy of mathematics, we can distinguish three different styles of philosophical analysis: the normal or standard style, logically and foundationally oriented; the analytical style considering the philosophy of mathematics as a branch of analytic philosophy, primarily focused on philosophical issues about ontology and epistemology; and, more recently, a mixed style, trying to capture the many facets of mathematics as a cultural system and anchored to the so-called mathematical practice. After a start focusing on the traditional ontological questions, we deal with the interaction between logical analysis, foundational themes and mathematical practice, and we conclude by suggesting an interpretation of foundational research.

Keywords: Ideal Object, Proof, Mathematical Practice, Philosophy of Mathematics, Logic, Foundations.

Andrea Cantini è professore ordinario di Logica nel Dipartimento di Lettere e Filosofia dell'Università degli Studi di Firenze, via Bolognese 52, I-50139 Firenze.
e-mail: andrea.cantini@unifi.it