



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE (DINFO) CORSO DI DOTTORATO IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE CURRICULUM: AUTOMATICA, OTTIMIZZAZIONE E SISTEMI ELETTRICI SETTORE SCIENTIFICO-DISCIPLINARE ING-IND/31

Progressi nell'Analisi di Testabilità e nella Teoria Generale dei Circuiti Analogici

Candidato Giuseppe Fontana *Tutor* Prof. Stefano Manetti

Prof.ssa Maria Cristina Piccirilli

Coordinatore del Dottorato Prof. Luigi Chisci

CICLO XXX, 2014-2017

Università degli Studi di Firenze, Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DINFO).

Tesi presentata a parziale adempimento dei requisiti per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca in Ingegneria dell'Informazione. Copyright © 2017 by Giuseppe Fontana

Alla cara memoria dei miei genitori Libertà Salvatore e Rita

Ringraziamenti

Desidero esprimere il mio più profondo ringraziamento ai miei Tutor, Prof. Stefano Manetti e Prof.ssa Maria Cristina Piccirilli, per i preziosi consigli, l'arricchimento culturale e il continuo sostegno. Un vivo ringraziamento va anche agli altri Ricercatori con cui ho avuto l'onore e il piacere di collaborare: Prof. Antonio Luchetta, Prof. Alberto Reatti, Prof. Francesco Grasso. Un ringraziamento particolare devo al Responsabile del Laboratorio di Elettrotecnica, Sig. Maurizio Monticelli, per la paziente disponibilità e la gentilezza.

Sommario

Capitolo 1 Introduzione (1)

- 1.1 Obiettivi (2)
- 1.2 Contributi (2)
- 1.3 Notazioni (5)

Capitolo 2 Rassegna della letteratura (7)

2.1 Il concetto di testabilità nella letteratura (9)

- 2.1.1 Il contributo pionieristico di Berkowitz (9)
- 2.1.2 Condizione di Navid e Willson per l'identificabilità (10)
- 2.1.3 Uno sguardo agli approcci topologici (12)
- 2.1.4 Diagnosticabilità secondo Liu e Visvanathan (14)
- 2.1.5 Misura di risolvibilità secondo Sen e Saeks (16)
- 2.1.6 Diagnosticabilità per circuiti non lineari

secondo Visvanathan, Sangiovanni-Vincentelli e Saeks (20)

- 2.1.7 Misura di testabilità secondo Priester e Clary (23)
- 2.1.8 Definizione di testabilità secondo Steinbaken e Souders (24)

2.2 Il problema dell'automatizzazione dell'analisi di testabilità (25)

- 2.2.1 Impostazione del problema (25)
- 2.2.2 Approcci basati su tecniche interamente numeriche (26)
- 2.2.3 Approcci basati su tecniche simboliche (29)
- 2.2.4 Analisi di testabilità a livello di circuito e a livello di componente (36)

Capitolo 3 Algoritmo perfezionato per l'analisi di testabilità di circuiti lineari tempoinvarianti (45)

3.1 Introduzione (49)

3.2 Revisione dei principi fondamentali

dell'analisi di testabilità per circuiti lineari tempo-invarianti (51)

- 3.2.1 Generalità (51)
- 3.2.2 Equazioni di diagnosi di guasto e loro risolvibilità (53)
- 3.2.3 Massimizzazione della risolvibilità delle equazioni di diagnosi di guasto (56)
- 3.2.4 Definizioni di Testabilità e di analisi di testabilità (58)

3.3 Automatizzazione dell'analisi di testabilità (61)

- 3.3.1 Introduzione (61)
- 3.3.2 Dal dominio di Laplace al campo reale (61)
- 3.3.3 Uno sguardo agli approcci proposti in letteratura per l'automatizzazione dell'analisi di testabilità (64)

3.4 Algoritmo perfezionato per l'analisi di testabilità (67)

- 3.4.1 Introduzione (67)
- 3.4.2 Il nuovo algoritmo (68)
- 3.4.3 Implementazione software: il programma TALIC (69)
- 3.5 Versioni semplificate e relative condizioni di validità. Legami con l'approccio descritto in [7] (72)

- 3.5.1 Introduzione (72)
- 3.5.2 Condizioni per l'applicabilità di versioni semplificate (73)
- 3.5.3 Il ruolo degli zeri a comune fra numeratori delle funzioni di rete e polinomio caratteristico (77)

3.6 Esempi (80)

- 3.6.1 Esempio 1 (80)
- 3.6.2 Esempio 2 (84)
- 3.6.3 Esempio 3 (87)
- 3.6.4 Esempio 4 (88)

3.7 Dimostrazioni (89)

- 3.7.1 Lemma 3.1 (89)
- 3.7.2 Dimostrazione del Teorema 3.1 (91)
- 3.7.3 Dimostrazione del Teorema 3.2 (93)
- 3.7.4 Dimostrazione del Corollario 3.1 (94)
- 3.7.5 Lemma 3.2 (94)
- 3.7.6 Dimostrazione del Teorema 3.3 (98)
- 3.7.7 Dimostrazione del Corollario 3.2 (102)
- 3.7.8 Dimostrazione del Teorema 3.4 (103)
- 3.7.9 Dimostrazione del Teorema 3.5 (105)

Capitolo 4

Una teoria e un algoritmo per l'analisi di testabilità dei circuiti a commutazione periodica eccitati da segnali costanti (112)

- 4.1 Introduzione (116)
- 4.2 Definizioni e risultati preliminari (117)
 - 4.2.1 Generalità (117)
 - 4.2.2 Calcolo degli istanti di commutazione, dei corrispondenti valori di *x* e delle rispettive sensitività (120)
- 4.3 Fondamenti teorici per l'analisi di testabilità dei circuiti a commutazione periodica eccitati da segnali costanti (123)
 - 4.3.1 Introduzione (123)
 - 4.3.2 Equazioni di diagnosi di guasto e loro risolvibilità (123)
 - 4.3.3 Massimizzazione della risolvibilità delle equazioni di diagnosi di guasto (125)
 - 4.3.4 Definizioni di Testabilità e di analisi di

testabilità (129)

4.4 Matrice di testabilità (132)

- 4.4.1 Dal dominio del tempo al campo reale (passando per il dominio di Laplace) (132)
- 4.4.2 Espressione in forma chiusa della matrice di testabilità (134)
- 4.4.3 Forma ridotta della matrice di testabilità (135)
- 4.5 Automatizzazione dell'analisi di testabilità per circuiti a commutazione periodica eccitati da segnali costanti (137)
 - 4.5.1 Algoritmo per il calcolo della matrice di testabilità (137)
 - 4.5.2 Implementazione software: il programma TAPSLIN (140)

4.6 Esempi (142)

- 4.6.1 Esempio 1 (142)
- 4.6.2 Esempio 2 (144)
- 4.6.3 Esempio 3: analisi di testabilità per il Convertitore Buck operante in modalità a corrente ininterrotta (148)
- 4.6.4 Esempio 4: analisi di testabilità per il Convertitore Boost operante in modalità a corrente ininterrotta (152)
- 4.6.5 Esempio 5: analisi di testabilità per il Convertitore Buck-Boost operante in modalità

a corrente ininterrotta (155)

4.7 Dimostrazioni (157)

- 4.7.1 Dimostrazione della (4.8) (157)
- 4.7.2 Lemma 4.1 (158)
- 4.7.3 Lemma 4.2 (160)
- 4.7.4 Dimostrazione del Teorema 4.1 (161)
- 4.7.5 Dimostrazione del Lemma 4.3 (165)
- 4.7.6 Lemma 4.4 (167)
- 4.7.7 Dimostrazione del Teorema 4.2 (168)
- 4.7.8 Dimostrazione del Corollario 4.1 (173)
- 4.7.9 Dimostrazione del Teorema 4.3 (173)

Capitolo 5 Nuovi algoritmi rapidi per l'Analisi di Testabilità di circuiti analogici di grandi dimensioni (175)

- 5.1 Introduzione (178)
- 5.2 Richiami ai principi fondamentali

di analisi di testabilità per circuiti lineari tempo-invarianti e al problema della sua automatizzazione (178)

- 5.2.1 Definizioni di Testabilità e di analisi di testabilità (179)
- 5.2.2 Dal dominio di Laplace al campo reale (182)
- 5.2.3 Revisione del problema della automatizzazione dell'analisi di testabilità (184)

5.3 Nuovi algoritmi numerici (189)

- 5.3.1 Momenti della risposta impulsiva (189)
- 5.3.2 Derivazione di un primo algoritmo ricorsivo per il calcolo della matrice di testabilità (189)
- 5.3.3 Implementazione software: il programma LINFTA (193)
- 5.3.4 Un algoritmo ricorsivo alternativo e nuova espressione della matrice di testabilità (195)
- 5.3.5 Espressione in forma chiusa della nuova matrice di testabilità (197)
- 5.3.6 Implementazione software: il programma LINFTA.2 (198)
- 5.3.7 Valutazione dell'onere di elaborazione e confronto con precedenti approcci (201)
- 5.4 Esempio (205)

Capitolo 6 Analisi di testabilità come guida al progetto e all'affinamento di strategie di identificazione e diagnosi di guasto dei parametri (210)

- 6.1 Introduzione (213)
- 6.2 Richiami ai principi fondamentali di analisi di testabilità per circuiti lineari tempo-invarianti (214)
 - 6.2.1 Impostazione dei problemi di identificazione e diagnosi di guasto (214)
 - 6.2.2 Equazioni di identificazione e di diagnosi di guasto (215)
 - 6.2.3 Risolvibilità dei problemi di identificazione e di diagnosi di guasto (216)
 - 6.2.4 Analisi di testabilità a livello di circuito e a livello di componente (220)
- 6.3 Analisi di testabilità e strategia di identificazione parametrica per harvester elettromagnetici (221)
 - 6.3.1 Premesse (221)

- 6.3.2 Deduzione di un circuito elettrico equivalente per l'harvester elettromagnetico (222)
- 6.3.3 Analisi di testabilità per l'harvester elettromagnetico (225)
- 6.3.4 Strategia di identificazione dei parametri (227)

6.4 Analisi critica di un metodo di diagnosi basato sulla modellizzazione del guasto nel piano complesso (228)

- 6.4.1 Impostazione della trattazione (228)
- 6.4.2 Caratterizzazione della curva di guasto (230)
 - 6.4.2.1 L'approccio alla caratterizzazione della curva di guasto descritto in [2] (230)
 - 6.4.2.2 Una proposta di approccio alternativo alla caratterizzazione della curva di guasto (231)
- 6.4.3 Marginalità del problema dell'aliasing (233)
- 6.4.4 Importanza del problema delle coppie di ambiguità (234)
 - 6.4.4.1 Coppie di ambiguità e gruppi di ambiguità di ordine due (234)
 - 6.4.4.2 Individuazione dei gruppi di ambiguità di ordine due per ispezione (235)
- 6.4.5 Grappoli di ambiguità e loro effetto sulla diagnosi di guasto (240)

Capitolo 7 Un teorema di sostituzione generalizzato e alcune sue ripercussioni sulla Teoria e sull'Analisi dei Circuiti Analogici (243)

- 7.1 Introduzione (249)
- 7.2 Questioni preliminari (252)
 - 7.2.1 Multipoli, multiporti e circuiti (252)
 - 7.2.2 Digrafo ed equazioni costitutive di un *M*-polo (253)
 - 7.2.3 Digrafo ed equazioni costitutive di un *N*porto (255)
 - 7.2.4 Multiporti lecitamente connessi, multiporti assolutamente lecitamente connettibili e multiporti ben definiti (257)
 - 7.2.5 Digrafi isomorfi, digrafi identici, multiporti isomorfi (260)
 - 7.2.6 Digrafo del circuito (260)
 - 7.2.7 Circuiti risolvibili, soluzioni globali di un circuito, circuiti globalmente univocamente risolvibili, circuiti univocamente risolvibili

rispetto a un sottovettore, soluzione unica di un circuito rispetto a un sottovettore (261)

7.2.8 Circuiti globalmente equivalenti, circuiti equivalenti rispetto a un insieme di elementi (261)

7.3 Teorema di sostituzione generalizzato rivisto (262)

- 7.3.1 Teorema di Sostituzione Generalizzato Rivisto Debole (262)
- 7.3.2 Teorema di Sostituzione Generalizzato Rivisto Forte (265)

7.4 Estensioni del Teorema di Sostituzione basato su batteria di generatori (266)

- 7.4.1 Estensione del Teorema di Sostituzione basato su batteria di generatori: versione senza nullori (Teorema 7.4.1) (266)
- 7.4.2 Commenti (269)
- 7.4.3 Estensione del Teorema di Sostituzione basato su batteria di generatori: versione con nullori (Teorema 7.4.2) (271)
- 7.4.4 Commenti (273)
- 7.5 Nuova derivazione dei teoremi di shift dei generatori (274)

- 7.5.1 Teorema di shift del generatore di tensione: caso di insieme di taglio (Teorema 7.5.1) (274)
- 7.5.2 Teorema di shift del generatore di tensione: caso nodale (Teorema 7.5.2) (275)
- 7.5.3 Teorema di shift del generatore di corrente (Teorema 7.5.3) (276)
- 7.5.4 Commenti (278)

7.6 Teoremi di Thévenin-Norton generalizzati (279)

- 7.6.1 Teorema di Thevénin-Norton generalizzato: versione senza nullori (Teorema 7.6.1) (279)
- 7.6.2 Commenti (282)
- 7.6.3 Teorema di Thevénin-Norton generalizzato: versione con nullori (Teorema 7.6.2) (283)
- 7.6.4 Commenti (286)

7.7 Teoremi di Miller generalizzati (286)

- 7.7.1 Teorema di Miller per tensioni multiple (Teorema 7.7.1) (286)
- 7.7.2 Teorema Duale di Miller per correnti multiple: caso dell'insieme di taglio (Teorema 7.7.2) (289)
- 7.7.3 Teorema Duale di Miller per correnti multiple: caso nodale (Teorema 7.7.3) (292)

- 7.7.4 Teorema di Miller generalizzato per multiporti: versione senza nullori (Teorema 7.7.4) (294)
- 7.7.5 Teorema di Miller generalizzato per multiporti: versione con nullori (Teorema 7.7.5) (297)
- 7.7.6 Commenti (300)

7.8 Generalizzazione del Principio di Aumento (302)

7.8.1 Principio di Aumento generalizzato (Teorema 7.8.1) (302)

7.8.2 Commenti (305)

7.9 Applicazioni ed esempi (305)

- 7.9.1 Estensioni del TS basato su batteria di generatori come strumento per il calcolo del punto di lavoro in circuiti a singolo transistore (305)
- 7.9.2 Estensioni del TS basato su batteria di generatori come strumento per il calcolo del punto di lavoro in un circuito contenente due JFET (310)
- 7.9.3 Estensioni del TS basato su batteria di generatori come strumento per il calcolo

della caratteristica ingresso-uscita di un raddrizzatore a doppia semionda (314)

- 7.9.4 Un esempio di applicazione del Teorema 7.7.2 (Teorema duale di Miller generalizzato al caso di correnti multiple) (319)
- 7.9.5 Un esempio di applicazione del Teorema 7.6.3 (versione con nullori del Teorema di Thevénin-Norton generalizzato) (322)

Capitolo 8 Conclusioni (327)

8.1 Sintesi dei contributi presentati (328)

8.2 Possibili sviluppi del presente lavoro (329)

Appendice A: Pubblicazioni (329)

Capitolo 1

Introduzione

- 1.1 Obiettivi
- 1.2 Contributi
- 1.3 Notazioni

1.1 Obiettivi

I principali obiettivi del presente lavoro possono essere riassunti nei seguenti punti.

- a) A partire da una approfondita revisione dei principi fondamentali dell'analisi di testabilità per circuiti lineari tempo-invarianti, mettere a punto un nuovo algoritmo finalizzato a questo scopo, in grado di superare i principali inconvenienti da cui i precedenti algoritmi descritti in letteratura risultano affetti.
- b) Costruire *ex novo* i fondamenti teorici per la definizione di una rigorosa misura di testabilità per circuiti a commutazione periodica eccitati da segnali costanti e su tali basi mettere a punto un algoritmo efficiente per l'analisi di testabilità completamente automatizzata per la suddetta classe di circuiti, indagandone, in particolare, le applicazioni ai convertitori statici di energia, sì da colmare la lacuna riscontrata, al proposito, nella letteratura.
- c) Mettere a punto nuovi algoritmi efficienti quanto a tempi di elaborazione e robustezza per l'analisi di testabilità di circuiti analogici di grandi dimensioni, compito per il quale i precedenti approcci si rivelano poco adeguati.
- d) Enfatizzare il ruolo cruciale dell'analisi di testabilità quale stadio preliminare di qualsivoglia strategia di diagnosi di guasto e di identificazione parametriche, indagandone gli impieghi come guida al progetto e al raffinamento delle summenzionate strategie in casi concreti.
- e) Presentare un nuovo teorema di sostituzione, e indagarne i molteplici impieghi quale strumento per generalizzare, perfezionare e derivare rigorosamente numerosi risultati classici della Teoria dei Circuiti, come pure per mettere a punto nuove tecniche di analisi intuitiva per ispezione di circuiti lineari e non lineari.

1.2. Contributi

Nel Capitolo 2 si passano in rassegna le principali definizioni di testabilità proposte in Letteratura e i relativi algoritmi per l'automatizzazione dell'analisi di testabilità, al fine di definire il contesto nel quale i contributi descritti nel presente lavoro si inseriscono e far apprezzare l'avanzamento dello stato dell'arte che essi consentono.

Il Capitolo 3 inizia con una approfondita revisione dei principi fondamentali dell'Analisi di Testabilità per circuiti lineari tempo-invarianti. Servendosi di nuove notazioni, si giunge a una impostazione teorica alternativa a quella classica reperibile in letteratura e alla generalizzazione e dimostrazione rigorosa di alcuni risultati fondamentali. Poggiando su tali basi e traendo partito dall'impiego di tecniche simboliche, si descrivono poi un nuovo algoritmo e la sua traduzione software, atti all'analisi di testabilità di circuiti lineari tempo-invarianti e in grado di aggirare i principali inconvenienti da cui i metodi precedentemente presentati in Letteratura risultano affetti: l'algoritmo aui descritto, in particolare, consente notevoli progressi in termini di (i) riduzione dell'onere di calcolo e dei tempi di elaborazione; (ii) robustezza rispetto agli effetti degli errori di arrotondamento e di peculiarità delle funzioni di rete; (iii) snellezza concettuale e implementativa. Si identificano quindi le condizioni sotto le quali diviene lecito l'impiego di versioni ulteriormente semplificate, utili nell'analisi per ispezione o nella derivazione di risultati teorici di carattere generale e si mostra come i metodi precedenti, laddove sia corretto applicarli, possano essere derivati quali casi particolari. Vengono infine illustrati vari esempi di applicazione del nuovo metodo, operando un confronto diretto con metodi precedenti, sì da mostrare come il primo, a differenza di questi ultimi, conduca sempre a risultati corretti.

Nel Capitolo 4, si mette a punto, sia a livello di circuito che di componente, una rigorosa misura quantitativa di testabilità per la classe dei Circuiti a Commutazione Periodica Eccitati da Segnali Costanti (CCPESC), che comprende i Convertitori Statici di Energia (CSE) quale membri di notevole importanza nelle applicazioni: tale misura consente di stabilire a priori per quanti e quali parametri siano possibili una diagnosi di guasto o una univoche, configurandosi come limite superiore identificazione alle prestazione di qualsivoglia algoritmo possa essere concepito per i summenzionati scopi. La misura teorica messa a punto viene quindi tradotta in un software efficiente per l'analisi di testabilità completamente automatizzata dei CCPESC e, in particolare, dei CSE: tanto tale misura teorica quanto il software in questione rappresentano strumenti di notevole utilità ai fini della progettazione o della rifinitura di metodi di diagnosi di guasto o identificazione parametrica per la classe di circuiti in questione. A chiusura del capitolo, si discutono vari esempi illustrativi, nei quali i risultati forniti da un'applicazione diretta dell'algoritmo messo a punto vengono confrontati con quelli ottenibili per mezzo della sua traduzione software: in particolare, classiche topologie di CSE vengono analizzate in dettaglio. Si discutono altresì raffronti con la misura di testabilità per circuiti lineari presentata nel Capitolo 3.

Nel Capitolo 5 si impiega un approccio di tipo numerico per derivare un primo algoritmo atto all'analisi di testabilità di circuiti di grandi dimensioni: tale algoritmo riduce in modo drastico tanto i tempi di elaborazione quanto l'onere di calcolo rispetto ai precedenti approcci, siano essi basati su tecniche simboliche o su tecniche numeriche; in più, rispetto a questi ultimi, il metodo descritto consente di contenere gli effetti degli errori di arrotondamento. Si presenta inoltre, per la prima volta, una variante del metodo in questione, che – oltre che una maggiore snellezza concettuale – consente una ulteriore riduzione dei tempi di elaborazione, in tal modo configurandosi come uno strumento di particolare efficacia ai fini del progetto di algoritmi di diagnosi di guasto o identificazione parametrica per reti di dimensioni ragguardevoli.

Nel Capitolo 6 si sottolinea il ruolo cruciale ricoperto dall'Analisi di Testabilità, quale viatico al progetto e/o al raffinamento di strategie per la diagnosi di guasto e l'identificazione parametriche, mostrando la sua concreta applicazione a due casi di studio tratti dalla recente letteratura. Nel primo caso di studio, si impiega l'Analisi di Testabilità per derivare rigorose indicazioni circa la identificabilità dei parametri pertinenti al modello elettrico equivalente di un harvester elettromagnetico e, sulla scorta di esse, derivare una strategia di identificazione alternativa ad una reperibile in letteratura, che consente di ottenere rappresentazioni più snelle ed espressive. Nel secondo caso di studio, l'Analisi di Testabilità è congiunta all'impiego di strumenti propri dell'approccio simbolico all'analisi circuitale, per correggere alcune discrepanze rilevabili in una tecnica per la diagnosi del guasto singolo recentemente proposta in letteratura e individuare azioni efficaci per il suo affinamento.

Nel Capitolo 7 si presentano due nuovi teoremi di sostituzione generalizzati per multiporti. Si mostra poi come tali risultati possano essere impiegati quali potenti strumenti teorici per generalizzare, perfezionare e derivare rigorosamente diversi risultati classici della Teoria dei Circuti, quali: il Teorema di Sostituzione per Circuiti Multiterminali (TSCM), il Teorema di Shift dei Generatori (TSG), il Teorema di Thévenin-Norton (TTN), il Teorema di Miller (TM) assieme al suo Duale (TMD) e il Principio di Aumento (PA). Più specificamente, il TSCM è esteso a una batteria arbitraria di generatori con e senza l'uso di nullori. Il TSG è derivato rigorosamente per altra via e possibili ambiguità sono rimosse. Inoltre, tutte le possibili forme ibride del TTN per multiporti sono individuate e precise procedure operative per il calcolo delle entità ad esse pertinenti sono fornite per tutti i casi. Ancora, il TM e il TMD sono estesi a un numero qualsivoglia di variabili elettriche e a multiporti, con e senza l'uso di nullori. Quanto al PA, il vincolo concernente la linearità dei resistori additivi è rimosso. Accanto ad altri esempi che illustrano applicazioni dei summenzionati risultati, si derivano procedure generali e sistematiche atte a un approccio "carta e matita" per il calcolo del punto di lavoro e di caratteristiche di trasferimento (o, anche, ai terminali di bipolo) per circuiti non lineari e le si impiegano per l'analisi di circuiti di notevole complessità.

1.3 Notazioni

Si introducono qui alcune notazioni che saranno impiegate nel seguito.

Per cominciare, dati due naturali n_1 e n_2 , con $n_1 \le n_2$, si impiegherà la notazione

$$\{a_i\}_{i=n_1}^{n_2} \triangleq \{a_{n_1}, a_{n_1+1}, \dots, a_{n_2}\}$$
(1.1)

per indicare l'insieme i cui elementi sono $a_{n_1}, a_{n_1+1}, \dots, a_{n_2}$. Analogamente, si scriverà

$$\left\langle f_i = 0 \right\rangle_{i=n_1}^{n_2} \tag{1.2}$$

per indicare il sistema di equazioni $\langle f_{n_1} = 0, f_{n_1+1} = 0, \dots, f_{n_2} \rangle$. I vettori colonna, inoltre, saranno indicati con una lettera minuscola in grassetto e gli apici "T" o "t" (ove occorra evitare confusioni con l'indice di testabilità *T*) o "tr" (ove occorra evitare confusioni con la variabile indicante il tempo) saranno impiegati per indicare la trasposizione di matrici.

Siano ora $A_1, A_2, ..., A_n$ matrici con le medesime dimensioni (eventualmente, vettori riga o vettori colonna o scalari) e siano, ancora, $n_1 \in n_2$ due naturali, con $n_1 \leq n_2$; si impiegheranno le notazioni

$$col[A_i]_{i=n_1}^{n_2} \triangleq \begin{bmatrix} A_{n_1} \\ A_{n_1+1} \\ \vdots \\ A_{n_2} \end{bmatrix}$$
(1.3)

e

$$row[A_i]_{i=n_1}^{n_2} \triangleq [A_{n_1} \ A_{n_1+1} \ \cdots \ A_{n_2}]$$
 (1.4)

Si assumerà, inoltre:

$$O_{m,n} \stackrel{\triangle}{=} \text{matrice nulla} \, m \, \text{per} \, n \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{\theta}_m \triangleq O_{m,1} = \text{vettore colonna nullo a } m \text{ componenti}$$
 (1.6)

con la convenzione che il simbolo nella (1.6) deve essere ignorato quando m=0; si scriverà, poi, semplicemente $\boldsymbol{\theta}$ in luogo di $\boldsymbol{\theta}_m$ quando non vi sia una particolare esigenza di precisare le dimensioni del vettore nullo in questione.

Sia, ora, A una matrice m per $n \in k$ un naturale diverso da zero. Si introduce allora la matrice km per kn definita da

$$diag[A]^{k} \triangleq \begin{bmatrix} A & O_{m,n} & \cdots & O_{m,n} \\ O_{m,n} & A & \cdots & O_{m,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m,n} & O_{m,n} & \cdots & A \end{bmatrix}$$
(1.7)

Infine, posto $z = col[z_i]_{i=0}^m$, si definiscono la matrice (2m+1) per (m+1)

$$pad[z] \triangleq row \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_i \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{\theta}_{m-i} \end{bmatrix}_{i=0}^m$$
(1.8)

e la matrice (m+1) per (m+1)

$$tri[z] = \begin{bmatrix} z_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z_1 & z_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z_2 & z_1 & z_0 & 0 & \cdots & 0 \\ z_3 & z_2 & z_1 & z_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_m & z_{m-1} & z_{m-2} & z_{m-3} & \cdots & z_0 \end{bmatrix}$$
(1.9)

Capitolo 2

Rassegna della letteratura

La diagnosi di guasto e l'identificazione dei parametri rappresentano aspetti fondamentali per l'analisi, il progetto, la modellizzazione e la manutenzione dei circuiti analogici. Al fine di affrontare tali problemi con efficacia, è di cruciale importanza che l'operatore disponga di una stima a priori del loro grado di risolvibilità in relazione alle informazioni che possono trarsi da misure effettuate sul circuito in esame: tale stima può ottenersi valutando l'attitudine del circuito a "fornire" tali informazioni, ossia la sua "testabilità". D'altra parte, affinché una tale entità acquisti reale valore applicativo, è necessario, in primo luogo, definirne una misura che abbia al contempo un rigoroso fondamento concettuale e un preciso carattere quantitativo e, in secondo luogo, implementare strumenti efficaci atti a una sua valutazione automatica per mezzo del calcolatore. A tal proposito, in questo capitolo si passano prima in rassegna le principali definizioni di testabilità (o solvibilità o diagnosticabilità) proposte dalla letteratura e quindi si esaminano i principali algoritmi concepiti per la automatizzazione della misura di testabilità: ciò servirà a definire il contesto nel quale i contributi descritti nel presente lavoro si inseriscono e l'entità dell'avanzamento dello stato dell'arte che essi consentono

2.1 Il concetto di testabilità nella letteratura

2.1.1 Il contributo pionieristico di Berkowitz

2.1.2 Condizione di Navid e Willson per l'identificabilità

- 2.1.3 Uno sguardo agli approcci topologici
- 2.1.4 Diagnosticabilità secondo Liu e Visvanathan
- 2.1.5 Misura di risolvibilità secondo Sen e Saeks
- 2.1.6 Diagnosticabilità per circuiti non lineari secondo Visvanathan, Sangiovanni-Vincentelli e Saeks
- 2.1.7 Misura di testabilità secondo Priester e Clary
- 2.1.8 Definizione di testabilità secondo Steinbaken e Souders

2.2 Il problema dell'automatizzazione dell'analisi di testabilità

- 2.2.1 Impostazione del problema
- 2.2.2 Approcci basati su tecniche interamente numeriche
- 2.2.3 Approcci basati su tecniche simboliche
- 2.2.4 Analisi di testabilità a livello di circuito e a livello di componente

2.1 Il concetto di testabilità nella letteratura

2.1.1 Il contributo pionieristico di Berkowitz

Il titolo di pioniere degli studi sulla testabilità spetta certamente a Berkowitz [1]: a questo autore deve, anzitutto, essere riconosciuto il merito di aver definito per primo i termini del problema della identificazione dei parametri a partire da misure effettuate su punti di misura selezionati e di averne sottolineato l'importanza, almeno pari a quella dei più convenzionali problemi di analisi e sintesi circuitale. Gli si deve, inoltre, un notevole risultato rappresentato da una condizione necessaria di *solvibilità* (che egli impiega come sinonimo di *identificabilità*) per circuiti lineari tempo-invarianti, che può essere enunciata al modo seguente.

Nel circuito lineare e tempo-invariante allo studio - risultato della interconnessione di n_R resistenze, n_L induttanze ed n_C capacità - si considerino A terminali *accessibili* (ai quali, cioè, sia simultaneamente possibile imporre uno stimolo in tensione e misurare la corrente) e P terminali *parzialmente accessibili* (ai quali, cioè, sia possibile imporre uno stimolo in tensione, ma non misurare la corrente). Introdotta la quantità

$$Q = \frac{1}{2}A(A+2P-1)$$
 (2.1)

si trova che condizione *necessaria* affinché i valori degli elementi summenzionati siano univocamente desumibili da misure di corrente effettuate in corrispondenza degli A terminali accessibili, quando stimoli in tensione siano applicati in corrispondenza di questi ultimi e dei P terminali parzialmente accessibili, è

$$n_R + n_L + n_C \le Q + (Q+1)\min\{n_R + n_L, n_R + n_C, n_L + n_C\}$$
(2.2)

Lo stesso Berkowitz sottolinea che tale condizione necessaria di solvibilità ha carattere intrinsecamente *teorico*, poiché prescinde dalla precisione delle misure e degli stimoli impiegati: tale caratteristica, tuttavia, non deve riguardarsi come una limitazione, ma, piuttosto, come una qualità desiderabile, che conferisce alla condizione in questione carattere di universalità. In altri termini, è proprio perché tale condizione presuppone una precisione infinita delle misure e degli stimoli, che essa rappresenta una condizione *necessaria* per qualsivoglia *pratica* solvibilità.

In un lavoro successivo [2], Berkowitz e Wexelblat accennano alla necessità di tenere in conto condizioni legate al rango di opportune matrici legate allo jacobiano del vettore delle grandezze elettriche relative ai punti di misura, intuizione che risulterà, nel futuro, di grande ispirazione per molti ricercatori.

2.1.2 Condizione di Navid e Willson per l'identificabilità

Qualche anno più tardi, i risultati di Berkowitz vengono sviluppati da Navid e Willson [3] che – limitatamente a reti lineari composte di bipoli puramente resistivi - individuano condizioni necessarie e sufficienti per la risolvibilità secondo Berkowitz.

Per illustrare tali condizioni, si indichi con n_t il numero totale di nodi della rete (escluso un nodo di riferimento 0): di questi, n_m siano accessibili e $n_t - n_m$ siano interni (ossia, inaccessibili). Sia, inoltre, n_b il numero dei rami della rete: questi ultimi si distinguono in n_{lib} rami liberi, ossia i rami esclusivamente connessi a nodi accessibili, e n_{fon} rami fondamentali, vale a dire i rami che hanno almeno un terminale connesso con un nodo interno. Siano, infine, $\{y_i\}_{i=1}^{n_{lib}}$ il set delle conduttanze pertinenti ai rami liberi e $\{y_{fond,j}\}_{j=1}^{n_{fom}}$ il set delle conduttanze relative ai rami fondamentali. Dal punto di vista del comportamento ai suoi nodi accessibili, la rete in esame resta compiutamente descritta dalla sua matrice indefinita delle ammettenze $\mathcal{H} = [h_{ij}]_{i,j=1}^{n_m}$, nella quale la generica transconduttanza h_{ij} fra il nodo j e il nodo i ha un'espressione del tipo

$$h_{ij} = \begin{cases} y_k + \frac{\sum_{h} g_h}{\Delta} & \text{se esiste un ramo libero (di con} \\ & \text{duttanza } y_k) \text{ che connette } i \text{ e } j \\ \frac{\sum_{h} g_h}{\Delta} & \text{altrimenti} \end{cases}$$
(2.3)

Nella (2.3) il generico termine g_h è esprimibile come prodotto di $n_t - n_m + 1$ conduttanze pertinenti a rami fondamentali, ossia

$$g_{h} = \prod_{l=1}^{n_{t}-n_{m}+1} y_{fond,h_{l}}$$
(2.4)

e Δ è il determinante della matrice indefinita delle ammettenze, il quale può, a sua volta, esprimersi come somma di prodotti di $n_t - n_m$ induttanze fondamentali, ossia

$$\Delta = \sum_{h} \prod_{l=1}^{n_{l}-n_{m}} y_{fond,h_{l}}$$
(2.5)

Dalla (2.3) è chiaro, inoltre, che nel caso di presenza di ramo libero fra nodo *i* e nodo *j*, l'espressione di h_{ij} introduce una incognita non presente nelle restanti equazioni: l'analisi può pertanto limitarsi a considerare le sole h_{ij} per cui un tale ramo libero è assente, salvo poi impiegare la seconda delle (2.3) per esprimere gli elementi dell'insieme $\{y_i\}_{i=1}^{n_{lib}}$ in termini degli elementi dell'insieme $\{y_{fond,j}\}_{j=1}^{n_{fon}}$.

Per proseguire, si considerino le entità definite da

$$\Delta' = \Delta^{\frac{1}{n_{t} - n_{m} + 1}}, \ y'_{fond, j} = y_{fond, j} / \Delta', \ g'_{h} = g_{h} / \Delta$$
(2.6)

per mezzo delle quali le (2.4) divengono

$$g'_{h} = \prod_{l=1}^{n_{t}-n_{m}+1} y'_{fond,h_{l}}$$
(2.7)

mentre la seconda delle (2.3) può scriversi

$$h_{ij} = \sum_{h} g'_{h} \tag{2.8}$$

Introdotti i vettori

$$\boldsymbol{h} = col \left[col \left[h_{ij} \right]_{j} \right]_{i} \boldsymbol{g}' = col \left[\boldsymbol{g}'_{h} \right]_{h}$$
(2.9)

la (2.8) può scriversi

$$\boldsymbol{h} = \mathcal{A}\boldsymbol{g}' \tag{2.10}$$

ove \mathcal{A} è una opportuna matrice i cui elementi sono unicamente "1" e "0".

Prendendo poi il logaritmo naturale di ambo i membri della (2.7) si ottiene

$$ln(g'_{h}) = \sum_{l=1}^{n_{l}-n_{m}+1} ln(y'_{fond,h_{l}})$$
(2.11)

che in forma vettoriale può scriversi

$$col \left[ln(g'_{h}) \right]_{h} = \mathcal{B}col \left[ln(y'_{fond,j}) \right]_{j}$$
(2.12)

ove \mathcal{B} è una matrice ogni riga della quale contiene esattamente $n_t - n_m + 1$ elementi uguali a "*1*" e ciascuno dei restanti elementi è *0*. Introdotte, infine, le ulteriori matrici

$$G = diag \left[g'_i \right]_i, \Upsilon = diag \left[\frac{1}{y'_{fond,j}} \right]_j$$
(2.13)

si può ora enunciare la seguente proposizione.

Teorema 2.1

Il sistema di equazioni (2.3) è univocamente risolubile rispetto agli elementi del set $\{y_i\}_{i=1}^{n_{lib}} \bigcup \{y_{fond,j}\}_{j=1}^{n_{fon}}$ delle conduttanze di ramo se e solo se la matrice *AGB* ha rango pieno n_{fon} per ogni *G* con elementi diagonali tutti positivi.

2.1.3 Uno sguardo agli approcci topologici

Il problema della identificabilità dei parametri è affrontato da taluni autori ricorrendo a considerazioni di carattere topologico. Un esempio interessante è rappresentato dall'approccio descritto in [4], la cui idea di base può, con riferimento alle notazioni introdotte nel paragrafo precedente, essere descritta al modo seguente.

Si consideri dapprima un generico circuito C caratterizzato da un *unico nodo* non accessibile. Per un tale circuito le (2.3) divengono

$$h_{ij} = \begin{cases} y_k + \frac{y_{fond,a_{ij}} y_{fond,b_{ij}}}{\sum_{r=1}^{n_{fond}} y_{fond,r}} & \text{se esiste un ramo libero (di con} \\ & & \text{duttanza } y_k) \text{ che connette } i \text{ e } j \\ & & \text{duttanza } y_k) \text{ che connette } i \text{ e } j \\ & & \text{duttanza } y_k) \text{ che connette } i \text{ e } j \end{cases}$$

$$(2.14)$$

Delle (2.14) l'analisi può, ancora una volta senza ledere la generalità, limitarsi a considerare la sola seconda. A partire da quest'ultima si costruisce un grafo \mathcal{G} per il quale l'*r*-esimo nodo v_r è univocamente associato a $y_{fond,r}$; inoltre per ogni h_{ij} (data dalla seconda delle (2.14)), è in \mathcal{G} presente un lato che congiunge $v_{a_{ij}}$ con $v_{b_{ij}}$. Si definisce poi *dendroide* un sottografo \mathcal{G}' di \mathcal{G} tale che: (a) \mathcal{G}' contiene tutti i nodi di \mathcal{G} e (b) ciascuno dei componenti connessi di G' contiene esattamente un ciclo con un numero dispari di lati. Sussiste allora la seguente proposizione.

Teorema 2.2

Se \mathcal{G} contiene un dendroide, allora le conduttanze di \mathcal{C} possono essere univocamente individuate a partire da misure ai suoi terminali accessibili.

Si consideri ora il circuito originario \mathcal{N}_0 caratterizzato da n_m nodi accessibili e da $n_t - n_m$ nodi non accessibili, si consideri la successione di circuiti $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, ..., \mathcal{N}_{n_t - n_m}$ in cui, per $k = 0, 1, ..., n_t - n_m - 1$, \mathcal{N}_k sia ottenuto da \mathcal{N}_{k+1} eliminando un nodo inaccessibile per mezzo di una opportuna trasformazione stella-poligono. Sulla proposizione precedente è fondato il seguente teorema.

Teorema 2.3

Esista una sequenza $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, ..., \mathcal{N}_{n_t-n_m}$ tale che per ogni $k = 0, 1, ..., n_t - n_m - 1$ le equazioni del tipo (2.14) che definiscono la trasformazione stella-poligono che porta da \mathcal{N}_k a \mathcal{N}_{k+1} abbiano il grafo associato \mathcal{G}_k contenente un dendroide. Allora gli elementi del circuito originario sono univocamente identificabili da misure ai suoi terminali accessibili.

Un altro esempio di approccio topologico è descritto da Lin ed altri [5], che forniscono la seguente condizione di testabilità.

Teorema 2.4

Dato un circuito C nel quale non compaiano elementi in parallelo, si consideri un nodo e ausiliario esterno a C e sia C_e il circuito ottenuto da C connettendo tutti i nodi *accessibili* di quest'ultimo a e. C è *testabile per k guasti di ramo* se per ogni nodo non accessibile n di C esistono in C_e almeno k+1 cammini disgiunti che connettono n a e.

Di natura affine a quelli testé delineati sono poi gli approcci che si occupano della testabilità di *guasti nodali*, concettualmente distinti (anche se in pratica legati) ai guasti di ramo, come precisato dalla seguenti definizioni.

Definizione 2.1

Un nodo si dice affetto da guasto (di nodo) non appena qualcuno degli elementi incidenti in esso sia difettoso.

Definizione 2.2

Un circuito si dice *testabile per k guasti di nodo* quando (a) da misure sui nodi accessibili sia possibile determinare se esso sia o meno affetto da più di *k* guasti di nodo e (b) sia possibile identificare univocamente i nodi affetti da guasto, quando il numero di detti nodi non superi *k*.

A tal proposito sussiste la seguente proposizione

Teorema 2.5

Un circuito è *testabile per k guasti di nodo* se e solo se esistono almeno k+1 cammini disgiunti (ossia non aventi nodi a comune distinti dal nodo iniziale) da ciascun nodo non accessibile a k+1 nodi accessibili.

Questi risultati sono poi estesi a circuiti lineari attivi in [6], ove si impiega un approccio basato su un duplice grafo e si indagano altresì le relazioni fra guasti nodali e guasti di ramo. Considerazioni ancora di natura topologica, ma decisamente più complesse, sono impiegate in [7] per individuare condizioni necessarie e sufficienti per la *testabilità*, definita come la possibilità di calcolare variabili elettriche incognite a partire da misure di variabili elettriche note.

2.1.4 Diagnosticabilità secondo Liu e Visvanathan

Per ottenere condizioni sufficienti di diagnosticabilità, Liu e Visvanathan [8] considerano circuiti risultanti dalla interconnessione di n_p componenti SISO, l'i-esimo dei quali κ_i è descritto da una funzione del tipo $p_i g_i(s)$ ove $g_i(s) = n_i(s)/d_i(s)$ è una opportuna funzione di trasferimento (per la quale $n_i(s)$ e $d_i(s)$ sono i polinomi numeratore e denominatore, rispettivamente), cui corrisponde una descrizione tramite equazione di stato del tipo

$$\begin{cases} \dot{\chi}_i = \mathcal{A}_i \chi_i + \mathcal{B}_i \mathfrak{p}_i \mathfrak{a}_i \\ \mathfrak{b}_i = C_i \chi_i + \mathcal{D}_i \mathfrak{p}_i \mathfrak{a}_i \end{cases}$$
(2.15)

L'intero circuito è allora rappresentato nel dominio del tempo attraverso il cosiddetto *modello ad interconnessione di componenti* che si traduce nelle equazioni

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + BP\mathbf{a} \\ \mathbf{b} = C\mathbf{x} + DP\mathbf{a} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ab} & L_{au} \\ L_{yb} & L_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$$
(2.16)

ove

 $\boldsymbol{x} = col[\boldsymbol{x}_i]_{i=1}^{n_p}, \boldsymbol{a} = col[\boldsymbol{a}_i]_{i=1}^{n_p}, \boldsymbol{b} = col[\boldsymbol{b}_i]_{i=1}^{n_p}, \boldsymbol{A} = diag[\boldsymbol{A}_i]_{i=1}^{n_p}, \boldsymbol{B} = diag[\boldsymbol{B}_i]_{i=1}^{n_p}, \boldsymbol{C} = diag[\boldsymbol{C}_i]_{i=1}^{n_p}, \boldsymbol{D} = diag[\boldsymbol{D}_i]_{i=1}^{n_p}, \boldsymbol{P} = diag[\boldsymbol{p}_i]_{i=1}^{n_p}, \text{ mentre } \boldsymbol{u} = col[\boldsymbol{u}_i]_{i=1}^{n_p} \text{ e}$ $\boldsymbol{y} = col[\boldsymbol{y}_i]_{i=1}^{n_p} \text{ sono i vettori delle grandezze elettriche (accessibili) di ingresso ed uscita del sistema allo studio, rispettivamente.$

ſ

L'approccio procede poi introducendo, per il generico i-esimo componente, *un ordine di ritardo minimo m*_i definito dalla relazione

$$m_{i} = deg\left[d_{i}\left(s\right)\right] - deg\left[n_{i}\left(s\right)\right]$$
(2.17)

ed effettuando una partizione dell'intero insieme dei componenti *S* in classi di equivalenza $S_0, S_1, ..., S_K$ - ove $K = \max_i \{m_i\}$ - in modo che - per j = 0, 1, ..., K - alla classe S_j appartengano tutti e soli i componenti aventi ordine di ritardo minimo pari a *j*.

Si effettua poi una corrispondente partizione delle entità che compaiono nella (2.16), le quali possono allora scriversi come

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} = col[\mathbf{x}_{i}]_{i=0}^{K}, \mathbf{a} = col[\mathbf{a}_{i}]_{i=0}^{K}, \mathbf{b} = col[\mathbf{b}_{i}]_{i=0}^{K} A = diag[A_{i}]_{i=0}^{K}, \\ B = diag[B_{i}]_{i=0}^{K}, C = diag[C_{i}]_{i=0}^{K}, D = diag[D_{i}]_{i=0}^{K}, P = diag[P_{i}]_{i=0}^{K} (2.18) \\ L_{ab} = row[col[L_{lm}]_{l=0}^{K}]_{m=0}^{K}, L_{au} = col[L_{iu}]_{i=0}^{K}, L_{yb} = row[L_{yi}]_{i=0}^{K} \end{cases}$$

Introdotte le ulteriori entità

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{0} \triangleq A_{0} + B_{0}P_{0}\left(I - L_{00}P_{0}\right)^{-1}L_{00}C_{0}, \tilde{B}_{0} \triangleq B_{0}P_{0}\left(I - L_{00}P_{0}\right)^{-1}\\ \tilde{C}_{0} \triangleq C_{0} + P_{0}\left(I - L_{00}P_{0}\right)^{-1}L_{00}C_{0}, \tilde{P}_{0} \triangleq P_{0}\left(I - L_{00}P_{0}\right)^{-1}\hat{L}_{00} \triangleq 0, \quad (2.19) \\ \hat{D}_{0} = \tilde{P}_{0} \end{cases}$$

e

$$\begin{pmatrix} \hat{A} = diag \left[\hat{A}_i \right]_{i=0}^{K}, \hat{B} = diag \left[\hat{B}_i \right]_{i=0}^{K}, \hat{C} = diag \left[\hat{C}_i \right]_{i=0}^{K}, \\ \hat{D} = diag \left[\hat{D}_i \right]_{i=0}^{K}, \hat{L}_{ab} = row \left[col \left[\hat{L}_{lm} \right]_{l=0}^{K} \right]_{m=0}^{K} \end{cases}$$

$$(2.20)$$

con

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_i = A_i, \hat{B}_i = B_i P_i, \hat{C}_i = C_i, \\ \hat{D}_i = 0 \quad (i \neq 0), \hat{L}_{lm} = L_{lm} (l \neq 0, m \neq 0) \end{cases}$$

e infine

$$\psi(\boldsymbol{p}_0) \triangleq L_{y0} \tilde{P}_0 L_{0u}, N_i = \left[L_{iu} + L_{i0} \tilde{P}_0 L_{ou}\right]^T \odot \left[L_{yk} + L_{y0} \tilde{P}_0 L_{0k}\right]$$
(2.21)

ove \odot è il prodotto fra matrici introdotto da Khatri e Rao [9], si ha il seguente

Teorema 2.6

Il vettore p è diagnosticabile se $\psi(p_0)$ è iniettiva quasi ovunque e – per *i* = 1, 2, ..., *K* - *N_i* ha rango pieno quasi ovunque.

2.1.5 Misura di risolvibilità secondo Sen e Saeks

Come risulta subito evidente anche a un rapido esame, l'approccio di Liu e Visvanathan testé descritto, ancorché rigoroso, risulta notevolmente complesso tanto sul piano concettuale quanto su quello computazionale. Esso, inoltre, fornisce condizioni solo sufficienti per la diagnosticabilità e mal si presta a dare una precisa misura quantitativa dell'attitudine del circuito allo studio a essere testato. Un tale risultato è invece raggiunto da Sen e Saeks [10] col loro approccio alla testabilità basato su misure nel dominio della frequenza.

Il punto di partenza è ancora un modello ad interconnessione di componenti, ma ora le relazioni che lo definiscono sono riferite al dominio della trasformata di Laplace e si scrivono

$$\begin{cases} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\mathcal{Z}}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{11}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{12}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{21}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{22}\boldsymbol{u} \end{cases}$$
(2.22)

qui $\boldsymbol{b} = col[\boldsymbol{b}_i]_{i=1}^{n_c}, \boldsymbol{a} = col[\boldsymbol{a}_i]_{i=1}^{n_c}, \boldsymbol{Z} = diag[\boldsymbol{Z}_i]_{i=1}^{n_c}$ e $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{Z}_i(s, \boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{a}_i$ sono le equazioni costitutive dell'*i*-esimo componente, mentre $\boldsymbol{r} = col[\boldsymbol{r}_i]_{i=1}^{n_c} = col[\boldsymbol{r}_j]_{j=1}^{n_p}$ è il vettore dei parametri per i quali si deve formulare una diagnosi: merita osservare che il numero n_c dei componenti è concettualmente distinto da quello $n_p \ge n_c$ dei parametri. Inoltre, $\boldsymbol{y} = col[\boldsymbol{y}_i]_{i=1}^{n_y}$ è il vettore delle variabili elettriche accessibili per le misure e $\boldsymbol{u} = col[\boldsymbol{u}_j]_{j=1}^{n_u}$ il vettore delle variabili elettriche accessibili per l'iniezione di stimoli.

Dalle (2.22) si trova la seguente relazione

$$\mathbf{y} = S(s, \mathbf{r})\mathbf{x} \tag{2.23}$$

ove

$$S(s,\boldsymbol{r}) = \mathcal{L}_{22} + \mathcal{L}_{21} \left(I - \mathcal{Z}(s,\boldsymbol{r}) \mathcal{L}_{11} \right)^{-1} \mathcal{Z}(s,\boldsymbol{r}) \mathcal{L}_{12}$$
(2.24)

è una matrice di funzioni di rete.

Poiché il sistema allo studio è lineare tempo-invariante, la (2.23) rappresenta una descrizione completa del sistema MIMO avente le componenti di xquali ingressi e quelle di y quali uscite. Inoltre, ciascuno degli elementi di S(s,r) e una funzione razionale di s, che rimane univocamente individuata dal valore assunto in corrispondenza di un opportuno insieme di valori assunti da detta variabile complessa. In virtù di tali osservazioni, si può assumere, senza perdita di generalità, che tutta la informazione desumibile da misure sugli elementi di y quando il sistema è stimolato in corrispondenza degli elementi di x sia rappresentata dagli elementi di un'opportuna matrice $col [S(s_i,r)]_{i=1}^{n_s}$, ottenuta misurando S(s,r) in corrispondenza di n_s pulsazioni complesse $\{s_i\}_{i=1}^{n_s}$.

Eguagliando tali elementi alle corrispondenti espressioni analitiche ottenibili dalla (2.24) si ottengono le cosiddette equazioni di diagnosi di guasto
$$col \left[\mathcal{L}_{22} + \mathcal{L}_{21} \left(I - \mathcal{Z} \left(s_i, \boldsymbol{r} \right) \mathcal{L}_{11} \right)^{-1} \mathcal{Z} \left(s_i, \boldsymbol{r} \right) \mathcal{L}_{12} \right]_{i=1}^{n_s} = col \left[\mathcal{S} \left(s_i, \boldsymbol{r}_f \right) \right]_{i=1}^{n_s} \quad (2.25)$$

dove r_f è il (ricercato) valore vero di r. Piuttosto che con matrici, in [10] si preferisce ragionare in termini di vettori: per tale motivo l'equazione matriciale (2.25) viene trasformata in equazione vettoriale applicando ad ambo i membri l'operatore vec[] al modo seguente

$$vec \left[col \left[\mathcal{L}_{22} + \mathcal{L}_{21} \left(I - \mathcal{Z} \left(s_i, \boldsymbol{r} \right) \mathcal{L}_{11} \right)^{-1} \mathcal{Z} \left(s_i, \boldsymbol{r} \right) \mathcal{L}_{12} \right]_{i=1}^{n_s} \right]$$

= $vec \left[col \left[\mathcal{S} \left(s_i, \boldsymbol{r}_f \right) \right]_{i=1}^{n_s} \right]$ (2.26)

Indicando con F(r) il primo membro della (2.26), Sen e Saeks invocano il teorema della funzione implicita per ottenere la seguente misura dell'ambiguità che sorge nella risoluzione della (2.26) in un intorno di r_f :

$$\delta(\mathbf{r}_{f}) = n - rank \left[\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{r}_{f})}{d\mathbf{r}} \right]$$
(2.27)

ove $dF(r_f)/dr$ indica lo Jacobiano di F(r)rispetto ad r valutato per $r = r_f$. Il significato della entità al primo membro della (2.27) è il seguente: quando lo Jacobiano di F(r) valutato per $r = r_f$ ha rango pieno, $\delta(r_f) = 0$ e le equazioni di diagnosi di guasto sono localmente risolubili univocamente; in caso contrario le soluzioni di dette equazioni costituiscono una varietà $\delta(r_f) - dimensionale$. Tale parametro indica quindi se la soluzione è (localmente) unica o, in caso contrario, quanto "lontani" da una soluzione unica si sia: ciò giustifica la sua scelta quale misura dell'ambiguità caratterizzante le (2.25) e quindi dell'attitudine del circuito ad essere "testato" (in relazione alla peculiare scelta dei punti di iniezione e test).

Le seguenti due importanti questioni sono legate alla definizione testè data: a) la misura di ambiguità ottenuta sembra avere carattere squisitamente locale (legato, cioè, al particolare valore $\mathbf{r} = \mathbf{r}_f$); b) come devono essere scelte le frequenze di misura affinché la (2.27) sia minima? Tali questioni sono risolte in [10] dai sopraccitati autori attraverso due teoremi, il primo dei quali recita come segue.

Teorema 2.7 $\delta(\mathbf{r})$ è *quasi* costante rispetto ad \mathbf{r} .

Qui l'avverbio *quasi* ha il preciso significato di "per tutti i valori di r, eccettuati – al più – quelli appartenenti a una varietà algebrica, ossia allo spazio delle soluzioni di un sistema di equazioni polinomiali (non banali) in r". Il secondo teorema risolve il problema della scelta delle frequenze, come di seguito descritto.

Teorema 2.8 Sia Z razionale rispetto a s ed r. Allora $min\delta(r) = n - rankcol \left[dvec \left[S(s, r) \right] / dr \right]$ e tale minimo valore è raggiunto per quasi ogni scelta di un numero di frequenze complesse distinte pari a $rankcol \left[dvec \left[S(s, r) \right] / dr \right]$.

In tale enunciato l'avverbio *quasi* ha significato analogo a quello assunto nell'enunciato del Teorema 2.7; inoltre, come già accennato sopra, rankcol[dvec[S(s,r)]/dr]indica il massimo numero di colonne linearmente indipendenti (in senso funzionale) della matrice dvec[S(s,r)]/dr per la quale Sen e Saeks ricavano la seguente espressione esplicita

$$dvec \left[S(s, \boldsymbol{r}) \right] / d\boldsymbol{r} = \left\{ \left[\left(I + \mathcal{L}_{21} \left(I - Z(s, \boldsymbol{r}) \mathcal{L}_{11} \right)^{-1} Z(s, \boldsymbol{r}) \mathcal{L}_{12} \right) \right]^{T} \otimes \mathcal{L}_{21} \left(I - Z(s, \boldsymbol{r}) \mathcal{L}_{11} \right)^{-1} \right\}$$

• $dvec \left[Z(s, \boldsymbol{r}) \right] / d\boldsymbol{r}$

Merita accennare, quale utile elemento di confronto, al risultato presentato in [11], che mostra una qualche analogia con quelli precedentemente descritti. Nel suddetto lavoro, il punto di partenza è ancora il CCM rappresentato dalle (2.22), ma si evita di impiegare il concetto di funzione di trasferimento quale mezzo per esprimere le relazioni ingresso-uscita, preferendo la seguente forma alternativa delle equazioni di diagnosi di guasto

$$col\left[\left[\mathcal{Z}(s_{i},\boldsymbol{r}) \quad -\mathcal{V}\right]\left[\begin{array}{c}\mathcal{L}_{11}\mathcal{V}\boldsymbol{\alpha}(s_{i})+\boldsymbol{a}_{0}(s_{i})\\\boldsymbol{\alpha}(s_{i})\end{array}\right]-\boldsymbol{b}_{0}(s_{i})\right]_{i=1}^{q}=\boldsymbol{0}$$
(2.28)

ove \mathcal{V} è la matrice di p vettori colonna costituenti una base di $ker[\mathcal{L}_{21}]$; $\boldsymbol{\alpha}(s) = col[\alpha_j(s)]_{j=1}^p$ è un vettore di funzioni arbitrarie;

$$\boldsymbol{b}_{0}(s) = \left(\mathcal{L}_{21}^{T}\mathcal{L}_{21}\right)^{-1}\mathcal{L}_{21}^{T}\left[\boldsymbol{y}_{M}(s) - \mathcal{L}_{22}\boldsymbol{u}(s)\right]; \qquad \boldsymbol{a}_{0}(s) = \mathcal{L}_{11}\boldsymbol{b}_{0}(s) + \mathcal{L}_{12}\boldsymbol{u}(s).$$

Indicando con $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ il primo membro di (2.28) in cui $\mathbf{x} = col[x_k]_{k=1}^{qp+n_r} = \left[col^T \left[\boldsymbol{\alpha}(s_i)\right]_{i=1}^{q} \mathbf{r}^T\right]^T$, e con

 $S = \{\sigma / \sigma = \{s_1, s_2, ..., s_q\}, q \in \mathbb{N}^+\}$, una misura di testabilità del circuito può ottenersi a partire dalla (2.28) come

$$\mathcal{T} = \max_{\sigma \in \mathcal{S}} \operatorname{rank} \left[\mathcal{I}_{\mathcal{F}} \right]$$
(2.29)

ove $\mathcal{J}_{\mathcal{F}} = row \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_k} \right]_{k=1}^{qp+n_r}$ è lo jacobiano di $\mathcal{F}(\boldsymbol{x})$.

Si osserva immediatamente come la (2.29) sia una definizione più involuta, meno espressiva e meno agile rispetto a quella rappresentata da (2.27), la quale fornisce direttamente una misura di testabilità in forma chiusa, non richiedendo, al contrario della (2.29), la ricerca del massimo del rango dello Jacobiano al variare del set di frequenze impiegate.

2.1.6 Diagnosticabilità per circuiti non lineari secondo Visvanathan, Sangiovanni-Vincentelli e Saeks

La misura di risolubilità proposta da Sen and Saeks è fondata sul concetto di funzione di rete, il che ne restringe inevitabilmente la validità ai soli circuiti lineari tempo-invarianti; sue estensioni a circuiti tempo-invarianti non lineari, nel caso statico (circuiti senza memoria) e nel caso dinamico (circuiti con elementi reattivi) si devono rispettivamente a Visvanathan & Sangiovanni-Vincentelli [12] e a Saeks, Visvanathan & Sangiovanni-Vincentelli [13].

Considerando dapprima il caso statico, il punto di partenza naturale è costituito dalle equazioni di diagnosi di guasto: indicando con y il vettore delle variabili relative ai punti di test, con x il vettore delle variabili relative ai punti di iniezione e con p il vettore dei parametri incogniti, le relazioni ingresso uscita possono scriversi in forma compatta al modo seguente

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \tag{2.30}$$

Si danno quindi le seguenti definizioni.

Definizione 2.3

Due diverse determinazioni $p_1 e p_2$ di p sono dette *indistinguibili* rispetto alla scelta dei punti di iniezione e test operata se accade che $\forall x (h(x, p_1) = h(x, p_2)).$

Definizione 2.4

Una determinazione p^* di p è detta *localmente diagnosticabile*, se esiste un intorno aperto di p^* che non contiene valori di p indistinguibili da p^* .

Definizione 2.5

Se la definizione precedente vale per quasi ogni p, il circuito è detto *localmente diagnosticabile*.

Definizione 2.6

Sia $w(\mathbf{x})$ una funzione continua non negativa (cioè, $\forall \mathbf{x}(w(\mathbf{x}) \ge 0)$) e sia $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = row [\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) / \partial p_i]_{i=1}^{n_p}$ lo Jacobiano di $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ rispetto \mathbf{p} . Si dice *matrice di testabilità* la matrice definita da

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} w(\boldsymbol{x}) \mathcal{H}^{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \mathcal{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) dx_{1} dx_{2} \cdots dx_{n_{x}}$$
(2.31)

Definizione 2.7

Una determinazione p^* di p è detta *un punto regolare per* $\mathcal{R}(p)$ se esiste un intorno aperto di p^* nel quale $\mathcal{R}(p)$ ha rango costante.

Si possono ora enunciare le seguenti proposizioni.

Teorema 2.9

Sia w(x) continua, non negativa e tale che la matrice $\mathcal{R}(p)$ definita da (2.31) esista per ogni p e sia p^* un punto regolare per $\mathcal{R}(p)$. Allora p^* è localmente diagnosticabile se e solo se $\mathcal{R}(p^*)$ è definita positiva.

Teorema 2.10
Sia
$$r = \max_{p} rank [\mathcal{R}(p)]$$

Allora: (a) quasi tutti i p sono punti regolari per $\mathcal{R}(p)$ e $rank[\mathcal{R}(p)] = r$ per quasi ogni p; (b) il circuito è localmente diagnosticabile se e solo se $r = n_p$.

Corollario 2.1 Se h(x, p) è analitica in p allora $rank[\mathcal{R}(p)] = r$ per quasi ogni p.

Sotto le condizioni del precedente corollario, risulta naturale introdurre l'entità $T = rank \left[\mathcal{R}(\boldsymbol{p}^*) \right]$, ove \boldsymbol{p}^* è un valore di \boldsymbol{p} scelto in modo casuale, come misura della testabilità del circuito. Difatti se $T = n_p$ allora il circuito è localmente diagnosticabile, ossia (quasi) ogni valore di \boldsymbol{p} risulta univocamente identificabile. Se invece $T < n_p$, per ogni \boldsymbol{p} esiste una varietà $(n_p - T)$ -dimensionale di valori indistinguibili da \boldsymbol{p} : la differenza $(n_p - T)$ misura quindi l'ambiguità che sorge nel tentativo di identificare il generico valore di \boldsymbol{p} , in analogia a quanto la (2.27) faceva nel caso di circuiti lineari.

D'altra parte, l'esame della (2.31) rivela subito che il calcolo di $\mathcal{R}(p^*)$ comporta notevoli difficoltà, richiedendo la valutazione di integrali multipli con dominio di integrazione infinito: una notevole semplificazione si ottiene nel caso h(x, p) sia analitica in x oltre che in p, come descritto nella seguente proposizione.

Corollario 2.2 Sia h(x, p) è analitica in x (oltre che in p) e si consideri la matrice

$$\widetilde{\mathcal{R}}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},...,\boldsymbol{x}^{(n_p)}\right) = \sum_{i=1}^{n_p} \mathcal{H}^T\left(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{p}\right) \mathcal{H}\left(\boldsymbol{x}^{(i)},\boldsymbol{p}\right)$$
(2.32)

Allora per quasi ogni p e quasi ogni determinazione del set $\{x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n_p)}\}$ di valori del vettore di ingresso, si ha

$$T = rank \left[\mathcal{R} \left(\boldsymbol{p} \right) \right] = rank \left[\tilde{\mathcal{R}} \left(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, ..., \boldsymbol{x}^{(n_p)} \right) \right]$$
(2.33)

Le ripercussioni pratiche del precedente corollario sono evidenti: se p^* e $\left\{ \boldsymbol{x}^{(1)*}, \boldsymbol{x}^{(2)*}, ..., \boldsymbol{x}^{(n_p)*} \right\}$ sono, rispettivamente, determinazioni di p e $\left\{ \boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, ..., \boldsymbol{x}^{(n_p)} \right\}$ scelte in modo casuale, si ha

$$T = rank \left[\tilde{\mathcal{R}} \left(\boldsymbol{p}^{*}, \boldsymbol{x}^{(1)^{*}}, \boldsymbol{x}^{(2)^{*}}, ..., \boldsymbol{x}^{(n_{p})^{*}} \right) \right]$$

$$= rank \left[\sum_{i=1}^{n_{p}} \mathcal{H}^{T} \left(\boldsymbol{x}^{(i)^{*}}, \boldsymbol{p}^{*} \right) \mathcal{H} \left(\boldsymbol{x}^{(i)^{*}}, \boldsymbol{p}^{*} \right) \right]$$
(2.34)

L'estensione dei precedenti risultati al caso dinamico è descritta in [13]. In tale caso tanto il vettore di ingresso $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ che il vettore di uscita $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ devono riguardarsi come vettori di funzioni continue a tratti su un intervallo di osservazione $[0, \tau]$ e la (2.31) diviene

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{\tau} w(\boldsymbol{x}(t)) \mathcal{H}^{T}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}) \mathcal{H}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}) dt dx_{1} dx_{2} \cdots dx_{n_{x}}$$
(2.35)

le difficoltà analitiche presentata dalla (2.35) possono essere mitigate ricorrendo alla controparte della (2.34) valida nel caso in esame, ossia

$$T = rank\left[\sum_{i=1}^{n_p} \int_0^\tau \mathcal{H}^T\left(\boldsymbol{x}^{(i)^*}(t), \boldsymbol{p}^*\right) \mathcal{H}\left(\boldsymbol{x}^{(i)^*}(t), \boldsymbol{p}^*\right) dt\right]$$
(2.36)

2.1.7 Misura di testabilità secondo Priester e Clary

Tornando al caso dei circuiti lineari tempo-invarianti, si osserva che la misura di testabilità messa a punto da Sen e Saeks [10] è intrinsecamente indipendente dalle frequenze di test e dalla precisione delle misure: così come per la condizione necessaria di solvibilità secondo Berkowitz [1], una tale indipendenza è una qualità desiderabile, che consente alla misura in oggetto di fornire un limite superiore alle prestazione di qualsivoglia algoritmo sia di fatto impiegato per l'identificazione dei parametri o la diagnosi di guasto. D'altra parte, nelle applicazioni pratiche può rendersi necessario disporre di una misura di testabilità che tenga conto dei fattori suddetti, come pure della entità degli stimoli adottati, in modo che questi ultimi possano essere scelti in modo opportuno: la misura di testabilità proposta da Priester e Clary [14], per l'appunto, tiene conto di tali aspetti ed è brevemente descritta nel seguito.

Il punto di partenza è una classica descrizione del circuito tramite un modello nello spazio degli stati

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x} + D(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{n} \end{cases}$$
(2.37)

ove $\boldsymbol{\beta} = col[\beta_i]_{i=1}^p$ è il vettore dei parametri che devono essere stimati ed \boldsymbol{n} è un vettore stocastico che tiene conto dei fenomeni rumorosi legati al processo di misura. Dalla (2.37) si ricava immediatamente la matrice

$$T(s,\boldsymbol{\beta}) = C(sI - A)^{-1}B + D \qquad (2.38)$$

di funzioni di rete fra gli ingressi u e le ucite y accessibili (nel secondo membro della (2.38) è sottintesa, per semplicità di notazione, la dipendenza delle varie matrici da β) e il relativo Jacobiano

$$Q(s,\boldsymbol{\beta}) = row \left[\partial T(s,\boldsymbol{\beta}) / \partial \beta_l \right]_{l=1}^p$$
(2.39)

La misura di testabilità T_{ζ} proposta dagli Autori ha allora la seguente espressione analitica

$$\mathbb{T}_{\zeta} = det \left[M_{\beta} \right] \tag{2.40}$$

con

$$\bar{\boldsymbol{M}}_{\beta} = \int_{-\infty}^{+\infty} Q^{T} \left(-j2\pi f, \boldsymbol{\beta}\right) \boldsymbol{\psi}^{-1}(f) Q\left(-j2\pi f, \boldsymbol{\beta}\right) d\xi(f)$$
(2.41)

ove $\psi(f)$ e $\xi(f)$ sono le densità spettrali di potenza del rumore e del segnale, rispettivamente. Accanto alla (2.40), Priester e Clay introducono la *complessità del test* C_{ξ} definita da

$$C_{\xi} = \left[\mathcal{I} \cdot det \left(\bar{M}_{\beta} \right) \right]^{-1/p}$$
(2.42)

la quale acquista il significato di tempo necessario per identificare β con accuratezza specificata dallo scalare \mathcal{I} .

2.1.8 Definizione di testabilità secondo Steinbaken e Souders

Steinbaken e Souders [15] propongono invece una definizione di testabilità che, oltre che degli errori di misura, tiene conto degli scostamenti dei parametri dal loro valore nominale, considerati come variabili aleatorie.

Le equazioni di diagnosi di guasto linearizzate possono scriversi

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{b} \tag{2.43}$$

ove \mathcal{A} è lo Jacobiano del vettore delle relazioni ingresso uscita valutato in corrispondenza del valore nominale dei parametri, $\boldsymbol{\varepsilon}$ è il vettore degli errori

di misura supposti gaussiani con media nulla e varianza σ^2 , **b** è lo scostamento fra il valore teorico e quello misurato delle grandezze relative ai punti di misura selezionati e $\mathbf{x} = col[x_i]_{i=1}^{n_x}$ è il vettore degli scostamenti dei parametri dai rispettivi valori nominali.

Il vettore delle varianze delle stime è allora dato da

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{x}}^{2} = col \left[\boldsymbol{\sigma}_{x_{i}}^{2}\right]_{i=1}^{n_{x}} = \boldsymbol{\sigma}^{2} col \left[\boldsymbol{e}_{i}^{T} \left(\boldsymbol{\mathcal{A}}^{T} \boldsymbol{\mathcal{A}}\right)^{-1} \boldsymbol{e}_{i}\right]_{i=1}^{n_{x}}$$
(2.44)

ove e_i è il vettore che ha nulle tutte le componenti eccetto la *i*-esima, che è pari all'unità. La *testabilità dell'i-esimo* componente T_i è allora definita come

$$T_i = \frac{\sigma}{\sigma_{x_i}} \tag{2.45}$$

Fissato poi un parametro di riferimento τ , detto *fattore di testabilità*, la *testabilità del circuito* (in corrispondenza dell'insieme dei punti di misura considerati) T è definita come la percentuale dei parametri la cui testabilità (data dalla (2.45)) risulta maggiore di τ , in simboli

$$T = \frac{card\left[\left\{x_i / T_i > \tau\right\}\right]}{n_x} 100 \%$$

ove card[A] indica la cardinalità dell'insieme A.

2.2 Il problema della automatizzazione dell'analisi di testabilità

2.2.1 Impostazione del problema

Il confronto fra le varie definizioni di testabilità prese in esame nei paragrafi precedenti fa chiaramente emergere quella proposta da Sen e Saeks [10] in forza della sua semplicità e, al tempo stesso, del rigoroso carattere quantitativo della misura di testabilità che da essa si trae: tali caratteristiche rendono conto del fatto che, a dispetto della molteplicità di proposte dianzi delineata, la misura di testabilità di Sen e Saeks continua ad essere quella maggiormente adottata.

A tal proposito, un problema di fondamentale importanza è quello di tradurre una tale definizione in un algoritmo atto a essere efficacemente convertito, a sua volta, in un software per l'analisi automatica di testabilità: difatti, la definizione di Sen e Saeks è basata sulla lineare indipendenza di vettori di funzioni della variabile di Laplace, il che la rende poco adatta, nella sua formulazione originaria, a essere implementata attraverso un programma per computer. Tale problema è stato oggetto di ricerca per numerosi anni, secondo le linee essenziali brevemente richiamate nel seguito.

2.2.2 Approcci basati su tecniche interamente numeriche

Iuculano et al. [16] prendono le mosse dal vettore

$$\boldsymbol{h}(s, \boldsymbol{p}) = col \left[col \left[h_i^{(j)}(s, \boldsymbol{p}) \right]_{i=1}^{n_y} \right]_{j=1}^{n_x} = col \left[h_r(s, \boldsymbol{p}) \right]_{r=1}^{n_x n_y},$$
 dove

 $h_i^{(j)}(s, \boldsymbol{p}) = \Delta_i^{(j)}(s, \boldsymbol{p}) / \Delta(s, \boldsymbol{p})$ è la funzione di rete dal *j*-esimo punto di iniezione $(j = 1, 2, ..., n_x)$ all' *i*-esimo punto di misura $(i = 1, 2, ..., n_y)$, ribattezzata $h_r(s, \boldsymbol{p})(r = 1, 2, ..., n_x n_y)$ per comodità di trattazione. Come noto, è $\langle h_r(s, \boldsymbol{p}) = \Delta_r(s, \boldsymbol{p}) / \Delta(s, \boldsymbol{p}) \rangle_{r=1}^{n_x n_y}$, ove $\Delta(s, \boldsymbol{p}) = \{\Delta_r(s, \boldsymbol{p})\}_{r=1}^{n_x n_y}$ sono polinomi nella variabile *s*, il cui grado è maggiorato dal numero ρ degli elementi reattivi presenti nel circuito in esame.

Con le suddette notazioni, le equazioni di diagnosi di guasto si scrivono $col[h(s_i, p)]_{i=1}^{n_s} = col[\mu_i]_{i=1}^{n_s}$ (2.46) ove, per $i=1,2,\dots,n_s$, μ_i è la controparte di $h(s_i, p)$ rilevata sperimentalmente. Viene quindi considerato lo jacobiano $\Phi(s, p) = row[\partial h(s, p)/\partial p_k]_{k=1}^{n_p}$ per mezzo del quale, in accordo con le considerazioni in [10], la definizione di testabilità *T* è espressa come

$$T = colrank \left[\Phi(s, \boldsymbol{p}^{*}) \right] = colrank \left[row \left[\frac{\partial \boldsymbol{h}(s, \boldsymbol{p})}{\partial p_{k}} \right|_{\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{*}} \right]_{k=1}^{n_{p}} \right]$$
(2.47)

ove p^* è un valore di p scelto in modo casuale.

L'approccio in [16] prosegue poi con l'osservazione che può scriversi

$$\Phi(s, \boldsymbol{p}) = row \left[\frac{\partial \boldsymbol{h}(s, \boldsymbol{p})}{\partial p_k} \right]_{k=1}^{n_p} = \frac{1}{\Delta^2(s, \boldsymbol{p})} \Psi(s, \boldsymbol{p})$$
$$= \frac{1}{\Delta^2(s, \boldsymbol{p})} row \left[\boldsymbol{\psi}_k(s, \boldsymbol{p}) \right]_{k=1}^{n_p}$$
$$= \frac{1}{\Delta^2(s, \boldsymbol{p})} row \left[col \left[\boldsymbol{\psi}_{rk}(s, \boldsymbol{p}) \right]_{r=1}^{n_x n_y} \right]_{k=1}^{n_p}$$
(2.48)

dove

$$\left\langle \left\langle \psi_{rk}\left(s,\boldsymbol{p}\right) \\ = \Delta(s,\boldsymbol{p})\partial\Delta_{r}\left(s,\boldsymbol{p}\right)/\partial p_{k} - \Delta_{r}\left(s,\boldsymbol{p}\right)\partial\Delta(s,\boldsymbol{p})/\partial p_{k} \right\rangle_{r=1}^{n_{x}n_{y}} \right\rangle_{k=1}^{n_{y}}$$
(2.49)

Il passo successivo consiste nel considerare gli sviluppi

$$\left\langle \boldsymbol{\psi}_{k}\left(s,\boldsymbol{p}\right) = \sum_{h=0}^{d} S_{h}\left(s\right) \boldsymbol{b}_{hk}\left(\boldsymbol{p}\right) \right\rangle_{k=1}^{n_{p}}$$
 (2.50)

dei vettori $\{\boldsymbol{\psi}_k(s, \boldsymbol{p})\}_{k=1}^{n_p}$ rispetto al set di polinomi di Newton descritti dalla relazione

$$\left\langle S_{h}\left(s\right) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \prod_{l=0}^{h} \left(s - s_{l}\right) & h > 0 \end{cases} \right\rangle_{h=0}^{d}$$
(2.51)

Nelle (2.50) e (2.51) si ha

$$d = 2\rho \tag{2.52}$$

e

$$\left\langle \left\langle \boldsymbol{b}_{hk}\left(\boldsymbol{p}\right) = \boldsymbol{0} \right\rangle_{d_{k}+1}^{d} \right\rangle_{k=1}^{n_{p}}$$
 (2.53)

ove – per $k = 1, 2, \dots, n_p$ - d_k è il massimo fra i gradi dei polinomi che costituiscono le componenti di $\psi_k(s, p)$; inoltre

$$\mathcal{S} = \left\{ s_i \right\}_{i=0}^d \tag{2.54}$$

è un insieme di pulsazioni complesse in linea di principio arbitrarie. Nel caso queste siano scelte equispaziate lungo una retta parallela all'asse reale, ossia

$$\left\langle s_{l} = s_{0} + lh \right\rangle_{l=0}^{d} \tag{2.55}$$

per i coefficienti che compaiono sotto il simbolo di sommatoria nella (2.50) si trova

$$\left\langle \left\langle \boldsymbol{b}_{lk}\left(\boldsymbol{p}\right) = \frac{1}{l!h^{l}} \sum_{i=0}^{l} \left(-1\right)^{i} {l \choose i} \boldsymbol{\psi}_{k}\left(\boldsymbol{s}_{l-i}, \boldsymbol{p}\right) \right\rangle_{l=0}^{d} \right\rangle_{k=1}^{n_{p}}$$

Con tali premesse, si può enunciare il seguente notevole risultato.

Teorema 2.11

Posto

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{p}) = row \left[col \left[\boldsymbol{b}_{hk} \left(\boldsymbol{p} \right) \right]_{h=0}^{\rho} \right]_{k=1}^{n_{p}}, \quad si \quad ha$$

 $T = colrank \left[\Phi(s, \boldsymbol{p}^*) \right] = rank \left[\mathcal{B}(\boldsymbol{p}^*) \right] \text{ ove } \boldsymbol{p}^* e \text{ un valore di } \boldsymbol{p} \text{ scelto in modo casuale.}$

Il teorema appena enunciato ha risvolti applicativi di notevole importanza ai fini della automatizzazione della analisi di testabilità: infatti, esso consente di trasformare la ricerca del rango di un insieme di vettori funzioni della variabile di Laplace *s* nel calcolo del rango di una matrice completamente numerica, compito atto ad essere eseguito da computer.

Per $k = 1, 2, ..., n_p$, il calcolo dei coefficienti $\{b_{hk}\}_{h=0}^d$ pertinenti alla colonna $\psi_k(s, p)$ di $\Psi(s, p)$ richiede la conoscenza di $\psi_k(s, p)$ in corrispondenza delle d+1 pulsazioni complesse del set (2.54), il che, qualora la (2.49) fosse applicata direttamente, comporterebbe il calcolo di un gran numero di determinanti assieme alle relative derivate parziali. In [16] tale onere computazionale è alleviato ricorrendo ad un espediente simile a quello utilizzato per il calcolo delle sensitività e che consiste, essenzialmente, nell'impiegare una decomposizione LU della matrice del sistema lineare "aumentato" il cui vettore delle incognite comprende – oltre le variabili elettriche atte ad esprimere l'equilibrio del circuito in esame – le rispettive derivate parziali rispetto al parametro di volta in volta considerato.

Resta tuttavia l'importante problema della scelta delle pulsazioni (2.54): difatti, quantunque in linea di principio arbitraria, tale scelta è in realtà molto delicata, poiché condiziona fortemente l'errore di arrotondamento commesso nel calcolo degli elementi di $\mathscr{B}(p^*)$ e dunque la valutazione del rango di quest'ultima: ad esempio, la scelta rappresentata dalle (2.55) è conveniente quando il grado dei polinomi non sia eccessivo; in caso contrario, diviene preferibile scegliere le pulsazioni complesse equispaziate su un cerchio di raggio unitario, come raccomandato da Vlach e Singhal [17].

I problemi legati agli errori di arrotondamento possono essere ridotti ove si disponga di informazioni più precise circa i gradi dei polinomi (2.49). Per seguire una tale idea, Catalani et al. [18] affiancano alle (2.50) i corrispondenti sviluppi

$$\left\langle \boldsymbol{\psi}_{k}\left(s,\boldsymbol{p}\right)=\sum_{h=0}^{d}T_{h}\left(s\right)\boldsymbol{c}_{hk}\left(\boldsymbol{p}\right)\right\rangle _{k=1}^{n_{p}}$$

$$(2.56)$$

secondo un insieme di polinomi di Chebycheff, definiti da

$$\left\langle T_{h}\left(s\right) = \begin{cases} \cos\left(harccos\left(s\right)\right) & |s| \le 1 \\ \cosh\left(harccosh\left(s\right)\right) & |s| > 1 \end{cases} \right\rangle_{h=0}^{d}$$
(2.57)

Dal confronto fra i due sviluppi, si traggono quindi indicazioni che consentono una stima del grado dei singoli polinomi, il che consente di inserire "zeri rigorosi" in corrispondenza degli opportuni elementi della matrice di testabilità. Tuttavia, quantunque mitigati rispetto all'approccio originario descritto in [16], gli effetti degli errori numerici permangono, il che inevitabilmente rende il valore di testabilità ottenuto una stima approssimata.

2.2.3 Approcci basati su tecniche simboliche

Nonostante i miglioramenti ottenuti attraverso la strategia testé descritta, i programmi basati sulle tecniche numeriche dianzi delineate rimangono notevolmente complessi sul piano computazionale. In primo luogo, essi richiedono la conoscenza dei polinomi (2.49) in corrispondenza di almeno d+1 valori della pulsazione complessa *s*, ove *d* è il massimo fra i gradi dei polinomi in questione, valore che deve essere stimato preliminarmente sulla base della conoscenza dei componenti reattivi presenti nella rete: ciò comporta il calcolo di un elevato numero di sensitività, oltre all'onere legato alla necessità di stimare il grado dei polinomi. A ciò si aggiungono gli inevitabili errori di arrotondamento commessi nel calcolo dei coefficienti che compaiono sotto il simbolo di sommatoria in (2.50) e (2.56): detti errori sono di entità tale che il valore di testabilità ottenuto deve considerarsi solo una stima di quello effettivo.

I problemi legati agli inevitabili errori di arrotondamento commessi nella costruzione della matrice di testabilità $\mathscr{B}(p^*)$ menzionati dianzi vengono superati con l'approccio descritto in [19], che si avvale di tecniche

simboliche, intrinsecamente immuni ai suddetti errori. Il punto di partenza di tale approccio è rappresentato dal seguente

Teorema 2.12 Con riferimento alla (2.49), sia

$$\left\langle \left\langle \psi_{rk}\left(s,\boldsymbol{p}\right) = \sum_{q=0}^{d} f_{rk}^{\left(q\right)}\left(\boldsymbol{p}\right) s^{q} \right\rangle_{r=1}^{n_{x}n_{y}} \right\rangle_{k=1}^{n_{p}}$$
(2.58)

e

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{p}) = row \left[col \left[col \left[f_{rk}^{(q)}(\boldsymbol{p}) \right]_{q=0}^{d} \right]_{r=1}^{n_{x}n_{y}} \right]_{k=1}^{n_{p}}$$
(2.59)

Allora

$$T = colrank \left[\Phi(s, \boldsymbol{p}^*) \right] = rank \left[\mathcal{F}(\boldsymbol{p}^*) \right]$$
(2.60)

ove p^* è un valore di p scelto in modo casuale.

Tale risultato di notevole interesse teorico acquista grande importanza pratica grazie a un programma per computer in grado di generare $\mathcal{F}(p)$ in forma simbolica, denominato SAPTES. Quest'ultimo combina tecniche già impiegate con successo per l'analisi dei circuiti elettrici [20] e il calcolo delle sensitività [21] in forma simbolica, ed è essenzialmente basato sull'applicazione dell'Analisi Nodale Modificata e di un algoritmo appositamente studiato per la risoluzione simbolica di sistemi lineari: in tal modo i polinomi (2.58) sono direttamente ottenuti in forma canonica, adatta a una costruzione diretta della matrice $\mathcal{F}(p)$.

Una notevole semplificazione - tanto sul piano concettuale che su quello computazionale – rispetto ai risultati precedenti è costituita dall'elegante risultato presentato in [22]. Per descriverlo, si considerino per le funzioni di rete $\{h_r(s, \boldsymbol{p})\}_{r=1}^{n_s n_y}$ le seguenti espressioni esplicite

$$\left\langle h_r(s, \boldsymbol{p}) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i^{(r)}(\boldsymbol{p}) s^i}{\sum_{j=0}^{n} b_j(\boldsymbol{p}) s^j} \right\rangle_{r=1}^{n_x n_y}$$
(2.61)

e si introducano i vettori

$$\left\langle \boldsymbol{a}^{(r)}(\boldsymbol{p}) = col \left[a_i^{(r)}(\boldsymbol{p}) \right]_{i=0}^m \right\rangle_{r=1}^{n_x n_y}$$
(2.62)

$$\boldsymbol{b}'(\boldsymbol{p}) = col \left[b_j(\boldsymbol{p}) \right]_{j=0}^{n-1}$$
(2.63)

sussiste allora la seguente proposizione.

Teorema 2.13 Con riferimento alle (2.61), (2.62) sia

$$G(\boldsymbol{p}) = row \left[\frac{\partial}{\partial p_k} \left[\frac{col \left[\boldsymbol{a}^{(r)}(\boldsymbol{p}) / b_n(\boldsymbol{p}) \right]_{r=1}^{n_x n_y}}{\boldsymbol{b}'(\boldsymbol{p}) / b_n(\boldsymbol{p})} \right]_{k=1}^{n_p}$$
(2.64)

Allora risulta

$$T = colrank \left[\Phi(s, \boldsymbol{p}^*) \right] = rank \left[\mathcal{G}(\boldsymbol{p}^*) \right]$$
(2.65)

ove p^* è un valore di p scelto in modo casuale.

Come il risultato rappresentato dalla (2.60), anche quello espresso dalla (2.65) si fonda sull'utilizzo di tecniche simboliche, ma – a differenza del primo – il secondo consente di evitare il calcolo delle varie sensitività necessarie per ottenere i polinomi (2.58), con notevole alleggerimento dell'onere computazionale e riduzione dei tempi di elaborazione. In più, il risultato espresso dalla (2.65) è più semplice ed espressivo e consente di ricavare immediatamente ulteriori considerazioni generali sulla testabilità, espresse dai seguenti corollari [22].

Corollario 2.3

Condizione necessaria affinché la testabilità sia massima è che il numero dei parametri considerati potenzialmente difettosi non ecceda il numero totale dei coefficienti delle funzioni di rete considerate diminuito di una unità.

Corollario 2.4

Per un circuito di ordine *N*, indicato con n_p il numero dei parametri potenzialmente difettosi e con $n = n_x n_y$ il prodotto fra il numero n_x dei punti di iniezione e il numero n_y dei punti di test, condizione necessaria affinché la testabilità sia massima è che risulti

 $n_p \leq N + n(N+1)$

Corollario 2.5

Se le funzioni di rete considerate sono adimensionali e tutti i parametri della rete sono assunti come potenzialmente difettosi, allora la testabilità non può essere massima.

Un inconveniente legato alla (2.64) è rappresentato dalla necessità di dover calcolare derivate parziali di funzioni fratte negli elementi del vettore p: è facile intuire come – rispetto al caso del calcolo di derivate di polinomi nei medesimi elementi – tale necessità comporti una maggiore complessità dell'algoritmo e della sua implementazione software, l'aumento dei tempi di elaborazione e l'introduzione di errori di arrotondamento, i quali (seppure in misura minore rispetto a quanto accadeva per gli approcci totalmente numerici descritti in [16], [17) possono influire negativamente sulla corretta valutazione della testabilità. Muovendo da tali considerazioni, in [23] viene messo a punto un metodo che richiede unicamente il calcolo di derivate di polinomi, in tal modo aggirando gli inconvenienti dianzi discussi.

Per illustrare tale metodo, si cominci col considerare il caso di sistema SISO: valgono allora alcuni risultati, il primo dei quali è rappresentato dal seguente teorema.

Teorema 2.14

Nel caso SISO, la matrice
$$B_{C}^{test}(\boldsymbol{p}) = row \left[\frac{\partial}{\partial p_{k}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{p}) \\ \boldsymbol{b}'(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix} \right]_{k=1}^{n_{p}}$$
 ottenuta da $\mathcal{G}(\boldsymbol{p})$

in (2.64) denormalizzando i vettori derivandi rispetto a $b_n(p)$ e il vettore $v(p) = row \left[\frac{\partial b_n(p)}{\partial p_k} \right]_{r_{-}}^{n_p}$. Se v(p) è linearmente indipendente dalle righe di

 $\begin{bmatrix} \partial p_k \end{bmatrix}_{k=1}$ $B_C^{test}(\mathbf{p}) \text{ allora}$

$$rank \left[B_{C}^{test} \left(\boldsymbol{p} \right) \right] = rank \left[G \left(\boldsymbol{p} \right) \right] = T$$
(2.66)

Sempre nel caso SISO, dal teorema precedente discendono i seguenti corollari.

Corollario 2.6

Se v(p) è linearmente indipendente dalle righe di $B_C^{test}(p)$ e qualcuna di queste ultime è nulla, allora $rank[B_C^{test}(p)] = rank[G(p)] - 1 = T - 1$.

Corollario 2.7

Sia v(p) linearmente dipendente dalle righe di $B_C^{test}(p)$ e nessuna di queste ultime sia nulla. Allora:

(a) Se esistono costanti $\{\gamma_h\}_{h=0}^{m+n}$ non tutte nulle e una costante non nulla k_0 indipendenti da **p** e tali che si abbia

$$b_n(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i b_i(\boldsymbol{p}) + \sum_{j=0}^m \gamma_{j+n} a_j(\boldsymbol{p}) + k_0$$
(2.67)

allora si ha

$$rank \left[B_C^{test} \left(\boldsymbol{p} \right) \right] = rank \left[\mathcal{G} \left(\boldsymbol{p} \right) \right] = T$$
(2.68)

(b) Se esistono costanti $\{\gamma_h\}_{h=0}^{m+n}$ non tutte nulle tali che si abbia

$$b_{n}(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_{i} b_{i}(\boldsymbol{p}) + \sum_{j=0}^{m} \gamma_{j+n} a_{j}(\boldsymbol{p})$$
(2.69)

allora si ha

$$rank \left[B_C^{test} \left(\boldsymbol{p} \right) \right] = rank \left[\mathcal{G} \left(\boldsymbol{p} \right) \right] + 1 = T + 1$$
(2.70)

Corollario 2.8

Sia v(p) linearmente dipendente dalle righe di $G^{test}(p)$ e qualcuna di queste ultime sia nulla. Allora è

$$b_n(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i b_i(\boldsymbol{p}) + \sum_{j=0}^m \gamma_{j+n} a_j(\boldsymbol{p}) + k_0$$
(2.71)

ove $\{\gamma_h\}_{h=0}^{m+n}$ e k_0 sono costanti non tutte nulle, e

$$rank \left[B_{C}^{test} \left(\boldsymbol{p} \right) \right] = rank \left[\mathcal{G} \left(\boldsymbol{p} \right) \right] = T$$
(2.72)

Al fine di verificare se la (2.67) sia soddisfatta, si impiega una matrice \mathcal{A} in cui ciascuna riga corrisponde a un coefficiente della funzione di rete considerata e a ciascuna colonna corrisponde uno degli addendi che compaiono nella espressione dei coefficienti stessi. Si introduce poi il concetto di *dipendenza funzionale* fra i coefficienti, che intende riferirsi alla circostanza in cui i coefficienti γ_i nella (2.67) siano a loro volta funzioni di

p; per contro, la locuzione *dipendenza statica* si riferisce al caso in cui coefficienti in questione siano costanti rispetto a p, come supposto nelle proposizioni enunciate. I risultati precedenti consentono allora di pervenire a un algoritmo per il calcolo della testabilità nel caso SISO che richiede unicamente il calcolo di derivate di polinomi ed è rappresentato dallo schema seguente, ripreso da [23]



Fig. 2.1 – Schema dell'algoritmo descritto in [23] per il calcolo della testabilità (ripreso da [23]).

La generalizzazione al caso MIMO del Teorema 2.14 è rappresentata dalla seguente proposizione.

Teorema 2.15

Sia
$$\left\langle h_r(s, \boldsymbol{p}) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i^{(r)}(\boldsymbol{p}) s^i}{\sum_{j=0}^{n} b_j^{(r)}(\boldsymbol{p}) s^j} \right\rangle_{r=1}^{n_x n_y}$$
 e si introducano i vettori

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^{(r)}(\boldsymbol{p}) = col \left[a_{i}^{(r)}(\boldsymbol{p}) \right]_{i=0}^{m}, \\ \boldsymbol{b}^{\prime(r)}(\boldsymbol{p}) = col \left[b_{j}^{(r)}(\boldsymbol{p}) \right]_{j=0}^{n-1}, \\ \boldsymbol{c}^{(r)}(\boldsymbol{p}) = \left[\boldsymbol{a}^{(r)t}(\boldsymbol{p}) \boldsymbol{b}^{\prime(r)t}(\boldsymbol{p}) \right]^{t} = col \left[c_{l}^{(r)} \right]_{l=1}^{m+n+1} \end{pmatrix}_{r=1}^{n_{x}n_{y}}$$
(2.73)

Posto inoltre

$$\begin{cases}
B_{C,r}^{\text{test}}(\mathbf{p}) = \\
\left[row \left[\frac{\partial}{\partial p_{k}} \left[\mathbf{c}^{(r)}(\mathbf{p}) \right] \right]_{k=1}^{n_{p}} & \text{se } h_{r}(s, \mathbf{p}) \text{ cade nei casi } 1, 4-7, 9 \\
row \left[\frac{\partial}{\partial p_{k}} \left[\mathbf{c}^{(r)}(\mathbf{p}) \right] \right]_{k=1}^{n_{p}} & \text{se } h_{r}(s, \mathbf{p}) \text{ cade nei casi } 2, 3 \\
row \left[\frac{\partial}{\partial p_{k}} \left[\mathbf{\tilde{c}}^{(r)}(\mathbf{p}) \right] \right]_{k=1}^{n_{p}} & \text{se } h_{r}(s, \mathbf{p}) \text{ cade nei caso } 8 \\
\operatorname{con} \mathbf{\tilde{c}}^{(r)}(\mathbf{p}) \\
= col \left[c_{l}^{(r)} \right]_{l=1}^{m+n+1} \Big|_{l \neq q^{(r)}} \left[\operatorname{rank} \left[\operatorname{row} \left[\frac{\partial \mathbf{\tilde{c}}^{(r)}(\mathbf{p})}{\partial p_{k}} \right]_{k=1}^{n_{p}} \right] = \operatorname{rank} \left[\operatorname{row} \left[\frac{\partial \mathbf{c}^{(r)}(\mathbf{p})}{\partial p_{k}} \right]_{k=1}^{n_{p}} \right] \right] \right] \right] \\ r=1 \\$$

(2.74)

e

$$B_{C}^{test}\left(\boldsymbol{p}\right) = col\left[B_{C,r}^{test}\left(\boldsymbol{p}\right)\right]_{r=1}^{n_{x}n_{y}}$$
(2.75)

Allora è

$$T = rank \left[B_C^{test} \left(\boldsymbol{p} \right) \right]$$
(2.76)

2.2.4 Analisi di testabilità a livello di circuito e a livello di componente

L'entità *T* definita dalla (2.47) assume il chiaro significato di *misura di* solvibilità delle equazioni di diagnosi di guasto (2.46): difatti, se $T = n_p$ allora dette equazioni sono univocamente risolvibili in un intorno di (quasi) ogni valore effettivo di *p*; se, invece, è $T < n_p$, le equazioni non sono univocamente risolubili e la differenza $n_p - T$ fornisce una indicazione dell'ambiguità che sorge nel tentativo di risolverle, perché nel caso in esame le loro soluzioni costituiscono una varietà $(n_p - T) - dimensionale$. In tale ultima situazione - definita *di bassa testabilità* – una soluzione unica può ottenersi unicamente assumendo non difettosi opportuni gruppi costituiti da $n_p - T$ parametri: diviene allora importante stabilire per quali sottoinsiemi di parametri considerati simultaneamente potenzialmente difettosi sia possibile ottenere una diagnosi non ambigua.

Tale problema può essere affrontato considerando che ciascuna colonna della matrice jacobiana $\Phi(s, p)$ è univocamente associata a un ben preciso parametro: perciò per un certo gruppo di parametri sarà possibile una diagnosi univoca se e solo se le corrispondenti colonne di detta matrice sono linearmente indipendenti. In più – come risulta chiaro dalle considerazioni fatte nei paragrafi precedenti – la matrice numerica $\mathcal{G}(p)$ data dalla (2.64) risulta equivalente a $\Phi(s, p)$ non solo per la valutazione della testabilità T – o, come si dice, per effettuare un'analisi di testabilità a livello di circuito – ma anche per la individuazione dei summenzionati gruppi di parametri – ossia, come si dice, per effettuare un'analisi di testabilità a livello di componente: il vantaggio dell'impiegare la prima in luogo della seconda è ancora una volta costituito dalla maggiore facilità con la quale possono implementarsi su computer procedure automatiche per testare la lineare indipendenza di vettori numerici piuttosto che di vettori di funzioni.

I principi fondamentali dell'analisi di testabilità sono codificati rigorosamente in [24] ed ivi impiegati per la determinazione di un sottoinsieme ottimale di parametri testabili. Il punto di partenza è rappresentato dalle seguenti definizioni.

Definizione 2.8

Un insieme di *j* parametri è detto un gruppo d'ambiguità di ordine *j* se le corrispondenti colonne della matrice $G(\mathbf{p})$ data dalla (2.64) sono linearmente dipendenti.

Definizione 2.9

Un insieme di *k* parametri costituisce un gruppo di ambiguità canonico di ordine *k* se le corrispondenti colonne della matrice $G(\mathbf{p})$ data dalla (2.64) costituiscono un insieme *minimale* di vettori linearmente dipendenti.

Definizione 2.10

Un insieme di *m* parametri costituisce un *gruppo di ambiguità globale di ordine m* se esso è ottenuto dall'unione di gruppi canonici di ambiguità aventi almeno un elemento a comune.

Definizione 2.11

Un insieme di *n* parametri ciascuno dei quali non appartiene ad alcun gruppo di ambiguità costituisce un *gruppo certamente testabile di ordine n*.

Definizione 2.12

Un circuito è detto *testabile per k guasti* se tutte le combinazioni di *k* parametri sono fra loro *distinguibili* (ossia danno luogo ad uscite distinte per almeno una determinazione dei valori dei rispettivi elementi).

Vengono quindi presentati i seguenti lemmi.

Lemma 2.1

Due combinazioni $\gamma_i e \gamma_j$ di *k* elementi appartenenti ad un gruppo certamente testabile (di ordine maggiore di *k*) sono *distinguibili*.

Lemma 2.2

Due combinazioni $\gamma_i e \gamma_j di k$ elementi appartenenti ad un gruppo di ambiguità canonico di ordine k+1 non sono distinguibili.

Lemma 2.3

Due combinazioni $\gamma_i e \gamma_j di k$ elementi appartenenti ad un gruppo di ambiguità canonico di ordine maggiore di k+1 sono distinguibili

Si perviene poi alla seguente proposizione.

Teorema 2.16

Un circuito per il quale i gruppi di ambiguità canonici siano privi di elementi a comune è testabile per k guasti se il più piccolo gruppo di ambiguità ha ordine maggiore o uguale di k+2.

Nel caso di gruppi di ambiguità a due a due disgiunti, un insieme ottimale di componenti testabili viene quindi individuato attraverso la seguente definizione.

Definizione 2.13

Un gruppo di componenti è un gruppo ottimale di componenti testabili se esso rappresenta tutti i componenti del circuito e dà luogo a soluzione unica delle equazioni di diagnosi sotto l'ipotesi di k guasti.

Sulla base dei risultati precedenti viene fornita la seguente procedura per l'individuazione di un insieme ottimale di componenti testabili.

Procedura per l'individuazione di un gruppo ottimale di componenti testabili (caso di gruppi di ambiguità canonici disgiunti)

- I. Calcolo della testabilità *T*.
- II. Determinazione di tutti i gruppi canonici di ambiguità.
- III. Conseguente determinazione del gruppo di componenti certamente testabili.
- IV. Formulazione dell'ipotesi di k guasti con $k \le k_a 2$, k_a indicando l'ordine del più piccolo gruppo canonico di ambiguità.
- V. Inclusione nel gruppo ottimale di tutti i componenti del gruppo certamente testabile
- VI. Per ogni gruppo canonico di ambiguità, scelta di al più $k_i 2$ componenti, k_i indicando l'ordine del gruppo canonico in questione.

Nel caso invece vi siano gruppi canonici di ambiguità non disgiunti il Teorema 1 deve modificarsi come segue.

Teorema 2.17

Un circuito è testabile per k guasti se tutti i gruppi globali di ambiguità sono ottenuti dall'unione di gruppi canonici di ambiguità di ordine almeno pari a k+2.

Allo stesso tempo, la procedura descritta dianzi deve essere corretta come segue

Procedura per l'individuazione di un gruppo ottimale di componenti testabili (caso di gruppi di ambiguità canonici non disgiunti)

- I. Calcolo della testabilità *T*.
- II. Determinazione tutti i gruppi canonici di ambiguità.
- III. Conseguente determinazione di tutti i gruppi globali di ambiguità.

- IV. Conseguente determinazione del gruppo di componenti certamente testabili.
- V. Formulazione dell'ipotesi di k guasti con $k \le k_a 2$, k_a indicando l'ordine del più piccolo gruppo canonico di ambiguità.
- VI. Inclusione nel gruppo ottimale di tutti i componenti del gruppo certamente testabile.
- VII. Per l'*i*-esimo gruppo globale di ambiguità, scelta di al più $k_i 2$ componenti, k_i indicando l'ordine del minimo gruppo canonico contenuto nel gruppo globale in questione.

Le procedure dianzi descritte richiedono l'individuazione dei gruppi di ambiguità: ciò, al pari della individuazione dei gruppi testabili, può in linea di principio essere ottenuto testando la lineare dipendenza di tutte le possibili combinazioni di colonne della matrice di testabilità, come descritto in [25]. Una tale strategia, tuttavia, comporta un onere di calcolo dell'ordine di $O(2^{n_p}n_p^3)$ e che quindi richiede tempi di elaborazione che crescono esponenzialmente col numero di parametri testati. Una strategia più efficiente - basata su una decomposizione QR della matrice di testabilità - è descritta in [26]: quest'ultima comporta invece un onere di calcolo dell'ordine di $O(n_p^3)$ e dunque una drastica riduzione tempi di elaborazione che ora crescono in modo polinomiale col numero di parametri testati. Nonostante tale notevolissimo risultato e altri interessanti proprietà, la strategia in questione risulta piuttosto complessa e particolarmente vulnerabile agli effetti nocivi degli errori di arrotondamento, in misura crescente con le dimensioni del circuito allo studio, il che comporta che il valore di testabilità ottenuto debba essere considerato come una mera stima e, più in generale, che i risultati dell'analisi di testabilità ottenuti debbano essere necessariamente considerati come puramente indicativi. Tali inconvenienti vengono superati con l'approccio descritto in [27], basato su una decomposizione ai valori singolari della matrice di testabilità, notevolmente più robusta della scomposizione QR

Un interessante approccio alternativo per la determinazione dei gruppi di ambiguità è descritto in [28], ove il punto di partenza è la seguente definizione.

rispetto agli effetti degli errori di arrotondamento cui si accennava dianzi.

Definizione 2.14

d parametri $F_1, F_2, ..., F_d$ costituiscono un gruppo canonico di ambiguità di ordine *d* se la variazione di $d_1 < d$ parametri del gruppo determina una variazione della funzione di rete indistinguibile da quella prodotta da una variazione degli altri $d - d_1$ parametri.

Si prosegue mettendo a punto una definizione alternativa, fornita dalla seguente proposizione.

Teorema 2.18

d parametri $F_1, F_2, ..., F_d$ costituiscono un gruppo canonico di ambiguità di ordine *d* se per ogni variazione di $d_1 < d$ parametri del gruppo esiste una variazione dei restanti $d - d_1$ parametri tale che, nel complesso, la funzione di rete resti invariata.

Viene quindi fatta l'osservazione che un gruppo di parametri non può costituire un gruppo canonico di ambiguità se esiste qualche coefficiente della funzione di rete in cui figurano solamente gli elementi di un sottoinsieme proprio del gruppo suddetto. Per formalizzare tale osservazione e conferire ad essa un valore operativo si introduce quindi una *matrice di incidenza* $\Upsilon = row \left[col \left[y_{ij} \right]_{i=1}^{n_p} \right]_{j=1}^{n+m+1}$ nella quale ciascuna colonna corrisponde a un coefficiente della funzione di rete e ciascuna riga corrisponde a un parametro e i cui elementi sono definiti dalle relazioni

$$\left| \left| \left| \begin{array}{c} y_{ij} = \begin{cases} 1 & se \ il \ parametro \ i - esimo \ com \\ pare \ nel \ j - esimo \ coefficiente \\ 0 & altrimenti \\ \end{array} \right|_{i=1}^{n_p} \right|_{j=1}^{n+m+1}$$

$$(2.77)$$

Tale matrice è impiegata per effettuare una prima scrematura dei candidati gruppi canonici di ambiguità: difatti, alla luce delle considerazioni precedenti, condizione necessaria affinché un gruppo di parametri $F_1, F_2, ..., F_d$ possa costituire un gruppo canonico di ambiguità è che almeno due parametri di tale gruppo compaiano in ciascuno dei coefficienti che da detti parametri esplicitamente dipendono. Traendo partito dalle entità introdotte sopra, la precedente condizione può tradursi analiticamente al modo seguente

$$\left\langle \sum_{i=1}^{d} y_{ij} \neq 1 \right\rangle_{j=1}^{m+n+1}$$
 (2.78)

I candidati gruppi di ambiguità canonici individuati dopo la scrematura vengono quindi testati attraverso una procedura operativa direttamente ricavata dal teorema precedente e che può riassumersi al modo seguente

I parametri $F_1, F_2, ..., F_d$ costituiscono un gruppo canonico di ambiguità se il sistema

$$\begin{cases} c_{1}(F_{1}, F_{2}, ..., F_{d}, F'_{d+1}, F'_{d+2}, ..., F'_{n_{p}}) \\ = c_{1}(F'_{1}, F'_{2}, ..., F'_{d}, F'_{d+1}, F'_{d+2}, ..., F'_{n_{p}}) \\ c_{2}(F_{1}, F_{2}, ..., F_{d}, F'_{d+1}, F'_{d+2}, ..., F'_{n_{p}}) \\ = c_{2}(F'_{1}, F'_{2}, ..., F'_{d}, F'_{d+1}, F'_{d+2}, ..., F'_{n_{p}}) \\ \vdots & \vdots \\ c_{m+n+1}(F_{1}, F_{2}, ..., F_{d}, F'_{d+1}, F'_{d+2}, ..., F'_{n_{p}}) \\ = c_{m+n+1}(F'_{1}, F'_{2}, ..., F'_{d}, F'_{d+1}, F'_{d+2}, ..., F'_{n_{p}}) \end{cases}$$

$$(2.79)$$

nelle incognite $F_1, F_2, ..., F_d$ ammette infinite soluzioni.

Nella pratica il sistema (2.79) potrà consistere di un numero di equazioni minore di m+n+1, perché le relazioni relative a coefficienti nei quali le incognite non compaiono esplicitamente si riducono ad identità e possono essere avulse: per la sua risoluzione, in [28] si fa ricorso alla teoria delle basi di Gröbner. In [29] il precedente metodo è esteso in modo naturale a circuiti non lineari rimpiazzando i coefficienti delle funzioni di rete con quelli delle relazioni ingresso-uscita atte a descrivere il comportamento del circuito in esame.

Bibliografia

1. R. Berkowitz, "Conditions for Network-Element-Value Solvability," *IRE Transactions on Circuit Theory*, vol. 9, no. 1, pp. 24-29, Mar. 1962.

2. R. S. Berkowitz and R. L. Wexelblat, "Statistical Considerations in Element Value Solutions," *IRE Transactions on Military Electronics*, vol. MIL-6, no. 3, pp. 282-288, Jul. 1962.

3. N. Navid and A. Willson, "A theory and an algorithm for analog circuit fault diagnosis," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 26, no. 7, pp. 440-457, Jul. 1979.

4. T. Ozawa, S. Shinoda and M. Yamada, "An equivalent-circuit transformation and its application to network-element-value calculation," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 30, no. 7, pp. 432-441, Jul. 1983.

5. Z. F. Huang, C. Lin, and R. Liu, "Topological Conditions on Multiple-Fault Testability of Analog Circuits," Proc. 1982 ISCAS, pp. 1152–1155.

6. J. A. Starzyk and M. A. El-Gamal, "Diagnosability of analog circuits-a graph theoretical approach," *1988.*, *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Espoo, Finland, 1988, pp. 945-948, vol.1.

7. T. Ozawa and Y. Kajitani, "Diagnosability of linear active networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 26, no. 7, pp. 485-489, Jul. 1979.

8. Ruey-Wen Liu and V. Visvanathan, "Sequentially linear fault diagnosis: Part I-Theory," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 26, no. 7, pp. 490-496, Jul. 1979.

9. Khatri, C. G., and C. Radhakrishna Rao. "Solutions to some functional equations and their applications to characterization of probability distributions." *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A* (1968): 167-180.

10. N. Sen and R. Saeks, "Fault diagnosis for linear systems via multifrequency measurements," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 26, no. 7, pp. 457-465, Jul. 1979.

11. L. Rapisarda and R. de Carlo, "Analog multifrequency fault diagnosis," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 30, no. 4, pp. 223-234, Apr. 1983.

12. V. Visvanathan and A. Sangiovanni-Vincentelli, "Diagnosability of nonlinear circuits and systems-Part I: The dc case," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 28, no. 11, pp. 1093-1102, Nov. 1981.

13. R. Saeks, A. Sangiovanni-Vincentelli and V. Visvanathan, "Diagnosability of nonlinear circuits and systems-Part II: Dynamical systems," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 28, no. 11, pp. 1103-1108, Nov. 1981.

14. R. Priester and J. Clary, "New measures of testability and test complexity for linear analog failure analysis," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 28, no. 11, pp. 1088-1092, Nov. 1981.

15. G. N. Stenbakken and T. M. Souders, "Test-point selection and testability measures via QR factorization of linear models," in *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. IM-36, no. 2, pp. 406-410, Jun. 1987. 16. G. Iuculano, A. Liberatore, S. Manetti and M. Marini, "Multifrequency measurement of testability with application to large linear analog systems," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 33, no. 6, pp. 644-648, Jun. 1986.

17. J. Vlach and K. Singhal, Computer Methods for Circuits Analysis and Design. New York: Van Nostrand Reinhold, 1983.

18. M. Catelani, G. Iuculano, A. Liberatore, S. Manetti and M. Marini, "Improvements to numerical testability evaluation," in *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. IM-36, no. 4, pp. 902-907, Dec. 1987.

19. R. Carmassi, M. Catelani, G. Iuculano, A. Liberatore, S. Manetti and M. Marini, "Analog network testability measurement: a symbolic formulation approach," in *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 40, no. 6, pp. 930-935, Dec. 1991.

20. A. Liberatore and S. Manetti, "SAPEC-A personal computer program for the symbolic analysis of electric circuits," in Proc. 1988 Int. Symp. Circuits and Syst., Helsinki, Finland, Jun. 1988.

21. A. Liberatore and S. Manetti, "Network sensitivity analysis via symbolic formulation," presented at the 1989 IEEE Int. Symp. Circuits and Syst., Portland, OR, May 1989.

22. A. Liberatore, S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A new efficient method for analog circuit testability measurement," *Conference Proceedings. 10th Anniversary. IMTC/94. Advanced Technologies in I & M. 1994 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference (Cat. No.94CH3424-9)*, Hamamatsu, 1994, pp. 193-196 vol.1.

23. G. Fedi, A. Luchetta, S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A new symbolic method for analog circuit testability evaluation," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 47, no. 2, pp. 554-565, Apr. 1998.

24. G. Fedi, S. Manetti, M. C. Piccirilli and J. Starzyk, "Determination of an optimum set of testable components in the fault diagnosis of analog linear circuits," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 46, no. 7, pp. 779-787, Jul. 1999.

25. G. Fedi, R. Giomi, A. Luchetta, S. Manetti and M. C. Piccirilli, "On the application of symbolic techniques to the multiple fault location in low testability analog circuits," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 45, no. 10, pp. 1383-1388, Oct. 1998.

26. J. A. Starzyk, J. Pang, S. Manetti, M. C. Piccirilli and G. Fedi, "Finding ambiguity groups in low testability analog circuits," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 47, no. 8, pp. 1125-1137, Aug. 2000.

27. S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A singular-value decomposition approach for ambiguity group determination in analog circuits," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 50, no. 4, pp. 477-487, Apr. 2003.

28. B. Cannas, A. Fanni and A. Montisci, "Testability evaluation for analog linear circuits via transfer function analysis," *2005 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 2005, pp. 992-995, Vol. 2.

29. B. Cannas, A. Fanni and A. Montisci, "Algebraic Approach to Ambiguity-Group Determination in Nonlinear Analog Circuits," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 57, no. 2, pp. 438-447, Feb. 2010.

Capitolo 3

Algoritmo perfezionato per l'analisi di testabilità di circuiti lineari tempoinvarianti

Questo capitolo inizia con una approfondita revisione dei fondamenti teorici dell'analisi di testabilità basata su misure nel dominio della frequenza: con l'ausilio di nuove notazioni, si perviene a una impostazione concettuale alternativa a quella classica reperibile nella letteratura e alla generalizzazione di alcuni risultati ivi riportati. Poggiando su tali basi, si descrivono un nuovo algoritmo e la relativa implementazione software recentemente proposti per l'analisi di testabilità dei circuiti lineari tempo-invarianti, in grado di superare i principali inconvenienti dai quali i metodi precedentemente presentati in letteratura risultano affetti, consentendo notevoli progressi in termini di riduzione dell'onere di calcolo e dei tempi di elaborazione, robustezza rispetto agli effetti degli errori di arrotondamento e di peculiarità delle funzioni di rete, snellezza concettuale. Si discutono poi le condizioni sotto le quali è lecito impiegarne versioni ulteriormente semplificate, utili nell'analisi per ispezione o nella deduzione di risultati teorici di carattere generale, e si mostra come i precedenti metodi, quando correttamente applicabili, possano riguardarsi come casi particolari delle stesse. Si discutono, infine, esempi di applicazione del nuovo metodo, mostrando – attraverso un confronto diretto con approcci precedenti – come il primo, a differenza di questi ultimi, conduca sempre a risultati corretti.¹

¹ Una versione preliminare del presente capitolo è stata pubblicata in G. Fontana, A. Luchetta, S. Manetti, and M. C. Piccirilli, "An unconditionally sound algorithm for

3.1 Introduzione

3.2 Revisione dei principi fondamentali dell'analisi di testabilità per circuiti lineari tempo-invarianti

- 3.2.1 Generalità
- 3.2.2 Equazioni di diagnosi di guasto e loro risolvibilità
- 3.2.3 Massimizzazione della risolvibilità delle equazioni di diagnosi di guasto
- 3.2.4 Definizioni di Testabilità e di analisi di testabilità

3.3 Automatizzazione dell'analisi di testabilità

- 3.3.1 Introduzione
- 3.3.2 Dal dominio di Laplace al campo reale
- 3.3.3 Uno sguardo agli approcci proposti in letteratura per l'automatizzazione dell'analisi di testabilità

3.4 Algoritmo perfezionato per l'analisi di testabilità

3.4.1 Introduzione

3.4.2 Il nuovo algoritmo

testability analysis in linear time-invariant electrical networks," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 44, no. 6, pp. 1308–1340, Jun. 2016.

3.4.3 Implementazione software: il programma TALIC

3.5 Versioni semplificate e relative condizioni di validità. Legami con l'approccio descritto in [7]

- 3.5.1 Introduzione
- 3.5.2 Condizioni per l'applicabilità di versioni semplificate
- 3.5.3 Il ruolo degli zeri a comune fra numeratori delle funzioni di rete e polinomio caratteristico

3.6 Esempi

- 3.6.1 Esempio 1
- 3.6.2 Esempio 2
- 3.6.3 Esempio 3
- 3.6.4 Esempio 4

3.7 Dimostrazioni

- 3.7.1 Lemma 3.1
- 3.7.2 Dimostrazione del Teorema 3.1
- 3.7.3 Dimostrazione del Teorema 3.2
- 3.7.4 Dimostrazione del Corollario 3.1
- 3.7.5 Lemma 3.2
- 3.7.6 Dimostrazione del Teorema 3.3

- 3.7.7 Dimostrazione del Corollario 3.2 (101)
- 3.7.8 Dimostrazione del Teorema 3.4 (102)
- 3.7.9 Dimostrazione del Teorema 3.5 (104)

3.1 Introduzione

La diagnosi di guasto e l'identificazione dei parametri costituiscono aspetti fondamentali per il progetto, la realizzazione e la manutenzione dei circuiti elettronici. Eppure, mentre per i circuiti digitali esistono, a tali fini, metodi ben consolidati ed universalmente accettati, per i circuiti analogici tale obbiettivo appare ancora lontano, il che rende conto della notevole attenzione che la Ricerca continua a riservare a questo argomento.

Uno dei motivi alla base di una siffatta discrepanza fra ambito analogico e ambito digitale deve probabilmente identificarsi nella mancanza, nel contesto del primo, di un modello di guasto univoco. A tal proposito, una prima distinzione viene fatta fra guasti catastrofici e guasti parametrici: i primi si verificano quando il componente interessato si comporta ad alcuni suoi terminali come un circuito aperto o un corto circuito; i secondi, quando il valore di qualche parametro relativo al componente in questione devia da quello nominale fino ad abbandonare il relativo intervallo di tolleranza, ma senza che la topologia del circuito ne risulti alterata. Corrispondentemente, i metodi di diagnosi di guasto vengono distinti in approcci basati su simulazioni precedenti il test (SPT) ed approcci basati su simulazioni successive al test (SST). I primi sono basati sulla costruzione di dizionari off-line e risultano adeguati nell'ipotesi di singolo guasto catastrofico, perché nel caso di guasti multipli di tipo parametrico le dimensioni del dizionario risulterebbero eccessive per la sua implementazione. Invece, gli approcci SST sono considerati i metodi di elezione nel caso di guasti parametrici, nonostante il maggior tempo di elaborazione che essi, generalmente, richiedono: detti approcci si basano sull'esecuzione, su punti di prelievo precedentemente selezionati, di misure, nel dominio del tempo o in quello della frequenza, e sul confronto fra i risultati di tali misure e le corrispondenti espressioni analitiche onde costruire e risolvere le cosiddette equazioni di diagnosi di guasto, in tal modo individuando l'effettivo valore dei parametri.

In relazione a una certa scelta dei punti di stimolo e dei punti di misura, il *grado di risolvibilità* di tali equazioni rappresenta, in modo naturale, una misura dell'attitudine del circuito a fornire informazioni circa il valore dei suoi parametri, qualità che può essere, con vocabolo intuitivo, denominata *testabilità*. Ove sia opportunamente tradotta in termini quantitativi, tale misura di risolvibilità fornisce indicazioni precise circa quanti e quali parametri possano essere oggetto di diagnosi univoca e dunque un rigoroso limite teorico alle prestazioni di qualsivoglia metodo di diagnosi o identificazione si avvalga di misure ai predetti punti di misura quando il circuito sia stimolato in corrispondenza dei summenzionati punti di iniezione. Tali informazioni sono di evidente fondamentale importanza tanto

per il progettista, che deve rendere disponibili opportuni punti di misura per i test, quanto per l'ingegnere diagnostico, che deve, a sua volta, sapere quanti e quali parametri possono essere univocamente individuati attraverso detti test.

E' d'uopo, a questo punto, sottolineare la differenza fra testabilità pratica e testabilità *teorica*: la prima tiene conto della precisione delle misure e degli stimoli impiegati, mentre la seconda assume una precisione infinita per le une e gli altri. Tuttavia, come già sottolineato da Berkowitz [1] agli albori degli studi sulla solvibilità, questo prescindere dalla precisione delle misure e degli stimoli non deve riguardarsi come una limitazione, ma, piuttosto, come la condizione necessaria in forza della quale la testabilità teorica può assumere la connotazione di limite superiore universale cui si accennava dianzi: la testabilità teorica è, dunque, condizione necessaria per ogni testabilità pratica. In apparente contraddizione col suo carattere rigoroso, essa assume una fondamentale importanza sul piano pragmatico, perché consente una stima a priori delle possibilità di successo di qualsivoglia metodo di diagnosi, evitando lo spreco di risorse ed energie conseguente al tentativo di identificare o diagnosticare parametri a priori indistinguibili. Nel contesto della presente discussione giova, inoltre, rimarcare - in accordo alla osservazione di Visvanathan e Sangiovanni-Vincentelli [2] - la differenza concettuale fra la testabilità, vale a dire una misura del grado di risolvibilità delle equazioni di diagnosi, e l'algoritmo effettivamente impiegato per la soluzione di queste ultime, la prima costituendo in ogni caso un prerequisito fondamentale per la seconda.

Come mostrato nel Capitolo 2, varie definizioni di testabilità sono state descritte in letteratura, ma – per quanto concerne i circuiti lineari tempoinvarianti – quella basata su misure nel dominio della frequenza proposta da Sen e Saeks [3] rimane probabilmente la più popolare, in ragione della sua semplicità e, al contempo, della sua natura rigorosamente quantitativa: la misura di testabilità che da essa si trae consente di sapere a priori se il problema di diagnosi/identificazione ha soluzione localmente unica e, in caso contrario, quanto "lontani" da una soluzione unica si sia.

Il problema di tradurre la definizione di Sen e Saeks in un algoritmo efficiente per l'analisi di testabilità completamente automatizzata interessa la Ricerca da oltre un trentennio. Inizialmente furono proposti approcci basati su tecniche interamente numeriche [4]-[5], i quali, tuttavia, presentavano una certa vulnerabilità rispetto agli effetti degli errori di arrotondamento, cosa che conduceva a stime inevitabilmente approssimate del valore di testabilità. Per tali motivi, gli approcci numerici furono abbandonati in favore di un approccio basato su tecniche simboliche [6], che si avvaleva della possibilità, offerta da appositi software, di disporre delle espressioni delle funzioni di rete in forma totalmente simbolica. Successivamente, tale approccio simbolico fu notevolmente semplificato sul piano concettuale [7], ma il relativo algoritmo comportava che le funzioni di rete fossero poste in una forma particolare, il che di nuovo conduceva a complicazioni di calcolo e vulnerabilità rispetto agli effetti degli errori numerici. Per aggirare tali inconvenienti, fu proposto un nuovo approccio [9], ancora basato su tecniche simboliche, il quale però richiedeva di discriminare fra numerosi casi e sottocasi e risultava pertanto piuttosto complicato sia concettualmente che dal punto di vista computazionale. Inoltre, entrambi i summenzionati approcci conducono a risultati erronei in presenza di situazioni particolari, quali la presenza di zeri a comune fra numeratore e denominatore delle funzioni di rete considerate.

In questo capitolo si rivedono dapprima i fondamenti teorici dell'analisi di testabilità basata su misure nel dominio della frequenza, proponendo, con l'ausilio di nuove notazioni, una impostazione concettuale alternativa a quella in [3] e generalizzazioni di alcuni risultati ivi riportati. Poggiando su tali basi, si descrive il nuovo algoritmo per l'analisi di testabilità presentato in [10], il quale aggira gli inconvenienti legati agli approcci simbolici dianzi delineati: in particolare, non ponendo restrizioni sulla forma delle funzioni di rete considerate, esso consente di scegliere quella che conduce ai calcoli più agevoli e precisi, evitando le complicazioni computazionali e gli effetti degli errori di arrotondamento legati all'approccio in [7] e al tempo stesso le complicazioni concettuali del metodo in [9]. Di pari importanza, l'approccio qui descritto è per sua stessa natura intrinsecamente immune agli effetti di situazioni particolari, quali la presenza di fattori a comune fra numeratore e denominatore delle funzioni di rete, caso nel quale tanto il metodo in [7] quanto quello in [9] producono risultati inesatti. Si studiano inoltre le condizioni sotto cui il nuovo algoritmo possa essere ulteriormente semplificato, mostrando come i summenzionati metodi di [7] e [9], quando corretti, possano essere considerati suoi casi particolari. Si propongono infine alcuni esempi che illustrano le potenzialità del nuovo algoritmo, anche tramite un confronto con i summenzionati approcci precedenti.

3.2 Revisione dei principi fondamentali dell'analisi di testabilità per circuiti lineari tempo-invarianti

3.2.1 Generalità

Si consideri il generico Circuito Lineare Analogico Tempo-Invariante(CLATI) \mathcal{N} rappresentato simbolicamente in Fig. 3.1 e sia $\boldsymbol{p} = col \left[p_j \right]_{j=1}^{n_p}$ un vettore di parametri pertinenti alle equazioni costitutive dei suoi componenti, il cui valore nominale potrà, all'occorrenza, supporsi noto. L'insieme degli elementi di \boldsymbol{p} potrà coincidere con l'intero insieme dei parametri che caratterizzano il comportamento di \mathcal{N} oppure con un suo sottoinsieme proprio: in tal caso i parametri che non compaiono in \boldsymbol{p} sono supposti noti e fissati ai rispettivi valori nominali. Invece, il valore effettivo $\boldsymbol{p}_0 = col \left[p_{j,0} \right]_{j=1}^{n_p}$ di \boldsymbol{p} è incognito, salvo assumere – intendendosi limitare la presente discussione ai guasti parametrici - che ciascun elemento di \boldsymbol{p}_0 sia in ogni caso strettamente positivo e finito, ossia che $\boldsymbol{p}_0 \in \mathbb{R}^{n_p}_+$.



Fig. 3.1 – Rappresentazione concettuale di un CLATI \mathcal{N} col relativo generico algoritmo di identificazione dei parametri.

Si considerino altresì in \mathcal{N} un insieme di n_x punti di iniezione degli stimoli e un insieme di n_y punti di misura, ai quali competano, rispettivamente, il set di variabili di ingresso $\{x_i\}_{i=1}^{n_x}$ e il set di variabili di uscita $\{y_j\}_{i=1}^{n_y}$, come mostrato in Fig. 3.1: tali variabili potranno essere, indifferentemente e indipendentemente le une dalle altre, tensioni o correnti.

Poiché \mathcal{N} è un CLATI, a ciascun elemento dell'insieme $\left\{\left\{\left(x_{i}, y_{j}\right)\right\}_{i=1}^{n_{x}}\right\}_{j=1}^{n_{y}}$ delle coppie ingresso-uscita (x_{i}, y_{j}) resta univocamente associato il corrispondente elemento dell' insieme $\left\{\left\{h_{j}^{(i)}(s, \boldsymbol{p})\right\}_{i=1}^{n_{x}}\right\}_{j=1}^{n_{y}}$ delle funzioni di rete, descritte dalle relazioni

$$\left\langle \left\langle h_{j}^{(i)}(s,\boldsymbol{p}) = \frac{y_{j}(s,\boldsymbol{p})}{x_{i}(s)} \right|_{x_{k}=0, k\neq i} \right\rangle_{i=1}^{n_{x}} \right\rangle_{j=1}^{n_{y}}$$
(3.1)

ove $y_j(s, \mathbf{p})$ è la \mathcal{L} -trasformata della *j*-esima uscita, $x_i(s)$ è \mathcal{L} -trasformata dell' *i*-esimo ingresso e il rapporto in (3.1) è calcolato con gli ingressi diversi dall' *i*-esimo "annullati" in accordo alla natura delle rispettive variabili. Ai fini delle considerazioni che seguono, è conveniente raccogliere le funzioni di rete definite da (3.1) in un vettore

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}) = col \left[col \left[h_{j}^{(i)}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{x}} = col \left[h_{r}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}) \right]_{r=1}^{n}$$
(3.2)

ove, per comodità di trattazione, $h_j^{(i)}(s, \mathbf{p})$ è stata rinominata come $h_r(s, \mathbf{p})$ e si è posto $n = n_x n_y$.

3.2.2 Equazioni di diagnosi di guasto e loro risolvibilità

Si supponga ora di aver misurato i valori $\{h_{\mu i}\}_{i=1}^{n_{\mu}}$ assunti dal vettore h(s,p) definito da (3.2) quando *s* assume, ordinatamente, i valori del seguente insieme di pulsazioni complesse

$$\sigma = \{s_i\}_{i=1}^{n_{\mu}}$$
(3.3)

il quale può riguardarsi come il generico membro della classe

$$S = \left\{ \sigma / \sigma = \left\{ s_i \right\}_{i=1}^m, m \in \mathbb{N}^+ \right\}$$
(3.4)

di tutti i possibili sottoinsiemi non vuoti del campo complesso.

Da un punto di vista operativo - per $i = 1, 2, ..., n_{\mu}$ - il vettore $h_{\mu,i}$ può essere ottenuto da misure sulle uscite selezionate quando, a turno, ciascuno ingresso è eccitato con un segnale cisoidale $x(t) = \varepsilon Re[e^{s_i t}] = \varepsilon Re[e^{(\sigma_i + j\omega_i)t}]$ mentre gli altri ingressi sono annullati in accordo alla natura delle rispettive variabili elettriche: ovviamente, tale stimolo diviene una sinusoide pura quando $\sigma_i = 0$ e $\omega_i \neq 0$ e si reduce a un segnale in continua quando $\sigma_i = 0$ e $\omega_i = 0$; in ogni caso, la quantità ε è supposta piccola a sufficienza per preservare la linearità del sistema.
Ora, ci si può proporre di risalire al valore vero p_0 di p risolvendo il sistema di equazioni

$$\langle \boldsymbol{h}(\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{h}_{\mu i} \rangle_{i=1}^{n_{\mu}}$$
 (3.5)

nel vettore incognito p: le (3.5) sono solitamente denominate *equazioni di diagnosi di guasto* e – a dispetto della linearità di \mathcal{N} – esse sono, in generale, non lineari rispetto a p e dunque ammettono, in generale, più soluzioni in $\mathbb{R}^{n_p}_+$. Tuttavia, ammettendo che queste siano in numero finito e quella corrispondente al valore effettivo p_0 possa essere univocamente individuata, si può pensare di decidere sullo "stato di salute" di un certo componente confrontando i pertinenti elementi di p_0 con i rispettivi valori nominali, il che rende conto del nome con cui le equazioni in questione vengono designate in letteratura. D'altra parte, le (3.5) possono essere impiegate anche in assenza di informazioni circa tali valori nominali, come accade nei problemi di identificazione dei parametri relativi ad un certo modello circuitale.

Ovviamente, per risolvere le (3.5) occorrerà mettere a punto un opportuno algoritmo: tuttavia, almeno in questo capitolo, non ci occuperemo di ricercare un siffatto algoritmo, ma, piuttosto, di fornire una misura quantitativa delle sue possibilità di successo e un limite teorico alle sue prestazioni: in altri termini, in accordo con la distinzione concettuale già sottolineata da Visvanathan e Sangiovanni-Vincentelli [2], non ci occuperemo qui della soluzione delle (3.5), ma, piuttosto, della loro *risolvibilità*. A tal proposito, una ovvia considerazione scaturirebbe dal confronto fra numero di equazioni e numero di incognite in (3.5): dalla discussione precedente è subito visto che – pensando di operare con coefficienti complessi – il sistema delle (3.5) consta di $n_x n_y n_{\mu}$ equazioni in n_p incognite, cosicché una condizione necessaria perché le sue soluzioni siano in numero finito è che

$$n_x n_y n_\mu \ge n_p \tag{3.6}$$

Supponendo n_p fissato a priori, si può pensare di soddisfare la (3.6) agendo sui fattori al primo membro di quest'ultima. Tuttavia, occorre tenere presente che tanto il numero che la natura degli ingressi e delle uscite sono soggetti a vincoli di carattere tecnico ed economico (la iniezione degli stimoli e la misura delle risposte, ad esempio, risultano in genere più onerose se coinvolgono correnti piuttosto che tensioni), il che rende in genere più conveniente aumentare il numero di equazioni elevando il numero n_u di

frequenze di test. Il valore ottimale di n_{μ} , d'altro canto, non può essere determinato semplicemente considerando la (3.6). Per indagare ulteriormente tale aspetto, si cominci con l'introdurre i vettori

$$\boldsymbol{h}_{\sigma}(\boldsymbol{p}) = col[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{s}_{i},\boldsymbol{p})]_{i=1}^{n_{\mu}}, \, \boldsymbol{h}_{\mu} = col[\boldsymbol{h}_{\mu,i}]_{i=1}^{n_{\mu}}$$
(3.7)

per mezzo dei quali le (3.5) si riscrivono

Ì

$$\boldsymbol{h}_{\sigma}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{h}_{\mu} \tag{3.8}$$

Come gia osservato, la (3.8) è un'equazione non lineare in p, il che impedisce di impiegare i risultati propri della teoria dei sistemi lineari per indagare sulla sua risolvibilità. Tale compito, al contrario, può essere affrontato invocando il teorema della funzione implicita, secondo il quale la (3.8) è univocamente risolubile in un intorno del valore effettivo p_0 di pnon appena

$$rank \left[\boldsymbol{\Phi}_{\sigma} \left(\boldsymbol{p}_{0} \right) \right] = n_{p} \tag{3.9}$$

ove

$$\boldsymbol{\Phi}_{\sigma}(\boldsymbol{p}_{0}) = row \left[\frac{\partial \boldsymbol{h}_{\sigma}(\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}_{j}} \right]_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{0}} \right]_{j=1}^{n_{p}}$$
(3.10)

è lo Jacobiano di $h_{\sigma}(p)$ valutato per $p = p_0$. D'altra parte, anche se la (3.9) non è soddisfatta, la quantità $rank[\Phi_{\sigma}(p_0)]$ dà informazioni sul grado di risolvibilità della (3.8), perché allora le soluzioni della stessa in un intorno di p_0 costituiscono una varietà $(n_p - rank[\Phi_{\sigma}(p_0)])$ -dimensionale: dunque, tanto maggiore è l'ambiguità che sorge nel tentativo di risolvere la (3.8) in un intorno di p_0 quanto minore è $rank[\Phi_{\sigma}(p_0)]$.

Merita osservare che la precedente discussione non implica alcuna linearizzazione delle (3.8) come la locuzione *intorno di* p_0 potrebbe indurre a pensare di primo acchito: difatti il summenzionato intorno non ha – tanto dal punto di vista concettuale quanto da quello pratico – nulla a che vedere con l'intorno di p_0 all'interno del quale rimpiazzare $h_{\sigma}(p)$ con il suo sviluppo arrestato al primo ordine garantirebbe un errore accettabile nella soluzione della (3.8) stessa. Invece, l'intorno in questione coincide con quello – la cui esistenza è assicurata, appunto, dal citato teorema della funzione implicita - nel quale detta equazione risulta univocamente risolubile rispetto a p.

3.2.3 Massimizzazione della risolvibilità delle equazioni di diagnosi di guasto

Come risulta chiaro dalle (3.10), (3.7), $rank[\Phi_{\sigma}(\mathbf{p}_0)]$ dipende dalla scelta dell'insieme di frequenze σ nella classe *S* definita dalla (3.4): ovviamente, alla luce delle considerazioni precedenti, sarebbe desiderabile scegliere σ in modo da massimizzare $rank[\Phi_{\sigma}(\mathbf{p}_0)]$ e quindi massimizzare la risolvibilità delle equazioni di diagnosi di guasto.

Per vedere come ciò possa ottenersi, si cominci coll'introdurre la matrice

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}_{0}) = row \left[\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}_{j}} \right]_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{0}} \right]_{j=1}^{n_{p}} = row \left[\boldsymbol{\varphi}_{j}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}_{0}) \right]_{j=1}^{n_{p}}$$
(3.11)

ove, naturalmente, è

$$\boldsymbol{\varphi}_{j}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}_{0}) = col\left[\boldsymbol{\varphi}_{rj}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}_{0})\right]_{r=1}^{n} = \frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}_{j}}\Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{0}} = col\left[\frac{\partial \boldsymbol{h}_{r}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}_{j}}\Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{0}}\right]_{r=1}^{n}$$
(3.12)

Merita osservare che $\Phi(s, \mathbf{p}_0)$ è una matrice di funzioni della variabile *s*, mentre $\Phi_{\sigma}(\mathbf{p}_0)$ è una matrice di numeri complessi; tuttavia, quest'ultima può pensarsi ottenuta a partire dalla prima collezionando i suoi campioni corrispondenti ai valori di *s* appartenenti all'insieme σ , ossia

$$\boldsymbol{\Phi}_{\sigma}(\boldsymbol{p}_{0}) = col \left[\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{s}_{i}, \boldsymbol{p}_{0})\right]_{i=1}^{n_{\mu}}$$
(3.13)

Per procedere, indichiamo con *colrank*[$\boldsymbol{\Phi}(s, \boldsymbol{p}_0)$] il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di $\boldsymbol{\Phi}(s, \boldsymbol{p}_0)$ e, per chiarezza, confrontiamo questa entità con *rank*[$\boldsymbol{\Phi}_{\sigma}(\boldsymbol{p}_0)$]. Dal momento che $\boldsymbol{\Phi}_{\sigma}(\boldsymbol{p}_0)$ è una matrice di numeri, si ha *rank*[$\boldsymbol{\Phi}_{\sigma}(\boldsymbol{p}_0)$] = r quando (a) *rank*[$\boldsymbol{\Phi}_{\sigma}(\boldsymbol{p}_0)$] = r ha un minore non nullo di ordine r e (b) tutti i suoi minori di ordine maggiore sono nulli. Invece, è *colrank*[$\boldsymbol{\Phi}(s, \boldsymbol{p}_0)$] = r quando (a) si possono trovare in $\boldsymbol{\Phi}(s, \boldsymbol{p}_0)$ r colonne (si supponga, senza ledere la generalità, che siano le prime r: { $\boldsymbol{\varphi}_i(s, \boldsymbol{p}_0)$ }^r_{i=1}) tali che – per qualunque r-upla di numeri non tutti nulli

 $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$ - la somma $\sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi_i(s, p_0)$ non sia identicamente nulla rispetto a *s* e (b) per qualunque gruppo consistente di un numero di colonne maggiore di *r* la suddetta proprietà non sia vera.

Siamo ora pronti per fornire la soluzione al problema della massimizzazione di $rank[\Phi_{\sigma}(\mathbf{p}_0)]$ per mezzo della seguente proposizione.

Teorema 3.1
Sia colrank
$$\left[\Phi(s, \boldsymbol{p}_0)\right] = r$$
. Allora
(a) $\max_{\sigma \in S} rank \left[\Phi_{\sigma}(\boldsymbol{p}_0)\right] = r$;

(b) tale massimo è raggiunto in corrispondenza di *quasi* ogni scelta di un insieme $\sigma = \{s_i\}_{i=1}^r$ di *r* frequenze (distinte). Qui il termine *quasi* significa "eccettuati al più valori di $s_1, s_2, ..., s_r$ appartenenti ad una varietà algebrica."

La dimostrazione del precedente teorema è riportata nel Paragrafo 3.7.2; qui si fanno invece le seguenti osservazioni.

- 1. Il precedente teorema afferma che il valor massimo di $rank[\Phi_{\sigma}(\boldsymbol{p}_0)]$ al variare di σ in S è fissato a priori da $colrank[\Phi(s, \boldsymbol{p}_0)]$.
- 2. Per raggiungere tale valore massimo è *sufficiente* scegliere (in maniera *quasi* arbitraria) un numero di frequenze pari a $colrank[\Phi(s, p_0)]$. In altri termini, non si può escludere che detto valor massimo possa essere raggiunto per mezzo di un numero di frequenze minore di *r*. Una eccezione notevole è rappresentata dal caso di singolo ingresso e singola uscita, in cui un numero di frequenze pari a *colrank* $[\Phi(s, p_0)]$ è necessario oltre che sufficiente.
- 3. Nelle applicazioni pratiche, la (quasi totale) arbitrarietà di σ può essere sfruttata scegliendo frequenze che minimizzino gli effetti degli errori di misura e delle tolleranze dei componenti [11].

Il Teorema 1 mostra quindi che $colrank[\Phi(s, p_0)]$ può essere assunto come limite superiore – al variare di σ in *S* - alla risolvibilità delle (3.8) in un intorno di p_0 . Tale indice esibisce la desiderabile caratteristica di essere intrinsecamente indipendente dalle frequenze di misura, ma, al tempo stesso, esso sembra affetto da un duplice inconveniente: il primo risiede nel fatto che, per sua stessa definizione, l'indice in questione sembrerebbe dipendere da p_0 , ossia proprio dall'incognito valore vero di p; il secondo è che, quand'anche questo valore fosse noto, la validità di detto indice sembrerebbe avere carattere *locale*, perché limitata a un intorno di p_0 . Fortunatamente, è possibile superare entrambi questi (apparenti) inconvenienti attraverso la seguente proposizione.

Teorema 3.2 $colrank[\Phi(s, p)]$ è quasi costante rispetto p. Precisamente, si ha $colrank[\Phi(s, p)] \equiv \max_{z \in \mathbb{R}^{n_p}_+} colrank[\Phi(s, z)]$ per ogni p, eccettuati, al più, i valori di p appartenenti ad una varietà algebrica.

La dimostrazione è rimandata al Paragrafo 3.7.3; nel prossimo paragrafo ci occuperemo, invece, di discutere alcuni importanti conseguenze dei precedenti risultati.

3.2.4 Definizioni di Testabilità e di analisi di testabilità

Il precedente Teorema 2 mostra che la misura di risolvibilità dei problemi della diagnosi di guasto o identificazione dei parametri a partire da misure nel dominio della frequenza rappresentata da $colrank[\Phi(s, p_0)]$ ha solo in apparenza carattere locale. Si tratta, invece, di una misura *globale*: essa dipende dalla natura dei componenti e dalla topologia del circuito, ma è *quasi* (nel significato rigoroso che tale avverbio assume nell'enunciato del teorema in questione) indipendente dal valore effettivo dei parametri.

Questo fatto ha la seguente notevole conseguenza pratica. Generato un valore p^* di p in modo casuale, si avrà, *con probabilità unitaria*, $colrank\left[\Phi(s,p^*)\right] \equiv \max_{p} colrank\left[\Phi(s,p)\right]$, cosa che consente di introdurre, in modo (*quasi*) univoco, l'indice

$$T = colrank \left[\Phi(s, \boldsymbol{p}^*) \right]$$
(3.14)

e denominarlo *Testabilità* del circuito in esame (in relazione alla operata scelta dei punti di stimolo e misura): tale indice rappresenta il massimo numero di parametri il cui valore possa essere (almeno localmente) simultaneamente identificato in modo univoco. D'altra parte, l'indice *T* testé definito, pur costituendo una preziosa indicazione, ha carattere *relativo*,

perché non ritiene l'informazione riguardante il numero totale dei parametri: sotto questo aspetto, ai fini di una misura *assoluta* dell'attitudine del circuito ad essere "testato", l'indice definito da

$$\rho = T/n_p \tag{3.15}$$

e denominato Rapporto di Testabilità è più significativo.

Come risulta dalla trattazione fin qui delineata, gli indici $T e \rho$, oltre che dal valore effettivo dei parametri, risultano indipendenti dalle frequenze di stimolo. Per contro, essendo tali indici derivati da ragionamenti condotti sulle (3.8), potrebbe sorgere il convincimento che la loro validità sia limitata a misure, nel dominio della frequenza, di segnali generati dal circuito in risposta a stimoli di natura cisoidale. A questo punto della discussione è invece di capitale importanza sottolineare come tali indici risultino indipendenti dal tipo di stimoli impiegati, come pure dal dominio nel quale le misure sono condotte, che può anche essere quello temporale. Per convincersi di ciò, si considerino i seguenti fatti:

- (a) la generica funzione di rete $h_r(s, p)$ descrive univocamente la relazione ingresso-uscita relativa alla coppia ingresso-uscita considerata;
- (b) $h_r(s, p)$ è una funzione razionale di *s* e come tale resta univocamente individuata dalla conoscenza dei valori che essa assume in corrispondente di un adeguato membro della classe definita da (3.4).

In virtù dei fatti sopraccitati, si giunge facilmente alla conclusione che tutta l'informazione estraibile dal circuito può essere rappresentata dalle (3.8) per una opportuna scelta di σ nella classe *S* definita dalla (3.4). La cruciale conseguenza di questa osservazione è che – fissati i punti di stimolo e quelli di misura - gli indici summenzionati rappresentano una misura di risolvibilità - dei problemi della diagnosi di guasto parametrica e della identificazione dei parametri - indipendente tanto dagli stimoli impiegati quanto dal dominio in cui le misure sono condotte, e un limite superiore alle prestazioni di qualunque algoritmo che, allo scopo di risolvere detti problemi, impieghi i summenzionati punti di stimolo e misura.

L'analisi fin qui condotta consente di affrontare il problema della testabilità a livello *di circuito*: opportunamente raffinata, tuttavia, essa può essere altresì impiegata per ottenere informazioni circa la testabilità a livello *di componente*. Per approfondire tale aspetto, si cominci col considerare il fatto che, come spesso accade, T può essere strettamente minore di n_p , caso nel quale il problema di diagnosi/identificazione non ha soluzione unica. Si potrebbe allora pensare di aggirare tale condizione cambiando la scelta dei punti di stimolo e/o di misura: occorre tener presente, tuttavia, che detti

punti sono soggetti a vincoli di natura tecnica ed economica, il che richiede di escogitare una soluzione alternativa.

Quest'ultima può consistere nell'assumere che solo $k - \operatorname{con} k \leq T$ - degli n_p parametri possano essere simultaneamente difettosi (o, semplicemente, incogniti a priori) mentre i restanti $n_p - k$ sono fissati ai rispettivi valori nominali: tale assunzione è nota come ipotesi di guasto k-uplo. Sotto tale ipotesi, diviene importante individuare i gruppi testabili (GT) ossia gli insiemi massimali (di cardinalità pari a T) per i quali possa formularsi una diagnosi univoca e i gruppi di ambiguità canonici (GAC), ossia gli insiemi minimali (di cardinalità variabile, ma in ogni caso non maggiore di T) di parametri per i quali una diagnosi univoca non sia possibile. Pensando di limitare al sottoinsieme di parametri in esame i ragionamenti condotti per l'intero insieme originario, si vede che ciascuno dei parametri di tale sottoinsieme resta univocamente associato ad una precisa colonna della matrice $\Phi(s, p_0)$: pertanto un insieme di T parametri costituirà un gruppo testabile se e solo se le corrispondenti colonne di detta matrice sono linearmente indipendenti, mentre un insieme di $k \leq T$ parametri sarà un gruppo canonico di ambiguità se le corrispondenti colonne costituiscono un insieme minimale di elementi linearmente dipendenti. Come per il calcolo della Testabilità, affinché le summenzionate definizioni acquisiscano valore pratico occorre mostrare che esse sono quasi indipendenti dall'incognito valore effettivo dei parametri: ciò è stabilito dalla seguente proposizione.

Corollario 3.1

Sia $\{\varphi_{k_i}(s, p)\}_{i=1}^r$ un insieme costituito da $r (1 \le r \le T)$ colonne di $\Phi(s, p)$, ove $k_i : \{1, 2, ..., r\} \rightarrow \{1, 2, ..., n_p\}$ è una iniezione. Allora $\{\varphi_{k_i}(s, p)\}_{i=1}^r$ è un insieme di elementi linearmente indipendenti per *quasi* ogni p oppure $\{\varphi_{k_i}(s, p)\}_{i=1}^r$ è un insieme di elementi linearmente dipendenti per ogni p.

Si rinvia al Paragrafo 3.7.4 per la dimostrazione. Qui ci si limita ad osservare che sui concetti di GAC e di GT si fonda il metodo, descritto in [12], per la individuazione di gruppi di parametri atti a rappresentare in modo ottimale l'intero insieme dei parametri oggetto di indagine. A conclusione del presente paragrafo, è d'uopo, inoltre, rimarcare la capitale importanza dell'analisi di testabilità sia a livello di circuito (determinazione della Testabilità T e del Rapporto di Testabilità ρ) che di componente (determinazione dei GAC): essa infatti fissa un limite superiore alle possibilità di successo di qualsivoglia metodo diagnostico o identificativo e

si configura come una guida preziosa nel progetto dello stesso, consentendo una scelta oculata dei punti di stimolo e di misura o, qualora questi ultimi siano a priori fissati da esigenze realizzative, una scelta giudiziosa dei parametri oggetto di indagine, in tal modo evitando sterili e dispendiosi sprechi di tempo e risorse derivanti dal vano tentativo di diagnosticare guasti a priori indistinguibili.

3.3 Automatizzazione dell'analisi di testabilità

3.3.1 Introduzione

Nel capitolo precedente sono state date le definizioni di Testabilità e di analisi di testabilità ed è stata sottolineata la loro importanza concettuale. Occorre ora affrontare il problema della messa a punto di un algoritmo atto a una loro completa automatizzazione. Difatti, le definizioni di Testabilità e di analisi di testabilità date nel precedente capitolo sono basate sulla lineare dipendenza di insiemi di funzioni vettoriali della variabile complessa di Laplace *s*, cosa che rende difficile la loro traduzione in un programma per computer.

3.3.2 Dal dominio di Laplace al campo reale

Per aggirare le difficoltà cui si accennava dianzi, si cominci col considerare un'espressione esplicita della generica funzione di rete $h_r(s, \mathbf{p})$ che compare nella (3.2):

$$h_r(s, \boldsymbol{p}) = \frac{N_r(s, \boldsymbol{p})}{\Delta(s, \boldsymbol{p})}$$
(3.16)

ove

$$\left\langle N_r(s,\boldsymbol{p}) = \sum_{k=0}^d a_r^{(k)}(\boldsymbol{p}) s^k \right\rangle_{r=1}^n, \Delta(s,\boldsymbol{p}) = \sum_{m=0}^d b^{(m)}(\boldsymbol{p}) s^m \quad (3.17)$$

sono polinomi in s a coefficienti reali.

61

Allora - in virtù delle (3.12), (3.16) - il generico elemento $\varphi_{rj}(s, p)$ della matrice $\Phi(s, p)$ può scriversi

$$\left\langle \left\langle \left\langle \frac{\phi_{j}(s,\boldsymbol{p}) = \partial h_{r}(s,\boldsymbol{p})}{\partial p_{j}} \Delta(s,\boldsymbol{p}) - \frac{\partial \Delta(s,\boldsymbol{p})}{\partial p_{j}} N_{r}(s,\boldsymbol{p})}{\Delta^{2}(s,\boldsymbol{p})} = \frac{\psi_{rj}(s,\boldsymbol{p})}{\Delta^{2}(s,\boldsymbol{p})} \right\rangle \right\rangle_{r=1}^{n_{x}} \right\rangle_{j=1}^{n_{y}}$$
(3.18)

Si può ora introdurre la matrice

$$\Psi(s,\boldsymbol{p}) = row \left[\boldsymbol{\psi}_{j}(s,\boldsymbol{p})\right]_{j=1}^{n_{p}} = row \left[col \left[\boldsymbol{\psi}_{rj}(s,\boldsymbol{p})\right]_{r=1}^{n}\right]_{j=1}^{n_{p}}$$
(3.19)

il cui generico elemento $\psi_{rj}(s, p)$ coincide col polinomio a numeratore del secondo membro della (3.18), vale a dire

$$\left\langle \left\langle \psi_{rj}(s,\boldsymbol{p}) = \frac{\partial N_r(s,\boldsymbol{p})}{\partial p_j} \Delta(s,\boldsymbol{p}) - \frac{\partial \Delta(s,\boldsymbol{p})}{\partial p_j} N_r(s,\boldsymbol{p}) \right\rangle_{r=1}^{n_x} \right\rangle_{j=1}^{n_p}$$
(3.20)

Mettendo assieme le (3.11), (3.18)-(3.20) si ha

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\Delta^2(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p})} \Psi(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p})$$
(3.21)

La (3.21) mostra che – per ogni p – le colonne di $\Phi(s,p)$ differiscono da quelle di $\Psi(s,p)$ solo per il medesimo fattore moltiplicativo $1/\Delta^2(s,p)$ che non ha alcuna pratica influenza sui test di lineare indipendenza: ciò implica che $\Psi(s,p)$ è equivalente a $\Phi(s,p)$ ai fini dell'analisi di testabilità, tanto a livello di circuito che a livello di componente.

Dalla (3.20) è inoltre evidente che il generico elemento $\psi_{rj}(s, p)$ di $\Psi(s, p)$ può essere espresso al modo seguente

$$\left\langle \left\langle \psi_{rj}(s, \boldsymbol{p}) = \sum_{l=0}^{2d} c_{rj}^{(l)}(\boldsymbol{p}) s^l \right\rangle_{r=1}^{n_x} \right\rangle_{j=1}^{n_p}$$
(3.22)

La (3.22) mostra che $\psi_{rj}(s, \mathbf{p})$ appartiene a Π_{2d} (ossia lo spazio vettoriale (2d+1)-dimensionale dei polinomi di grado non superiore a 2d). Ne

consegue che ciascuna delle colonne $\langle \boldsymbol{\psi}_{j}(s,\boldsymbol{p}) = col[\boldsymbol{\psi}_{rj}(s,\boldsymbol{p})]_{r=1}^{n} \rangle_{j=1}^{n_{p}}$ di $\Psi(s,\boldsymbol{p})$ appartiene a Π_{2d}^{n} (ossia il prodotto cartesiano di Π_{2d} per sé stesso *n* volte) che è subito visto essere, a sua volta, uno spazio vettoriale n(2d+1)-dimensionale.

E' evidente, inoltre, che (i) una base $\mathcal{B}^{(n)}$ di Π_{2d}^n può essere ottenuta a partire da una base $\mathcal{B} = \left\{ \pi_k(s) \right\}_{l=0}^{2d}$ di Π_{2d} costruendo il seguente insieme $\mathcal{B}^{(n)} = \left\{ \left[\Gamma = (s) O_{1} O_{1}^{T} \right]^{2d} + \left[\left[\Gamma O_{2} = (s) O_{1}^{T} O_{1}^{T} \right]^{2d} + \left[\left[\Gamma O_{2} O_{2} O_{1}^{T} O_{1}^{T} \right]^{2d} + \left[\left[\Gamma O_{2} O_{2} O_{1}^{T} O_{1}^{T} \right]^{2d} + \left[\left[\Gamma O_{2} O_{2} O_{1}^{T} O_{1}^{T} O_{2}^{T} \right]^{2d} + \left[\left[\Gamma O_{2} O_{2} O_{1}^{T} O_{1}^{T} O_{2}^{T} O_{2}^{$

$$\mathcal{B}^{(n)} = \left\{ \left[\pi_{l}(s) \ 0...0 \right]^{l} \right\}_{l=0}^{\infty} \cup \left\{ \left[0 \ \pi_{l}(s) ...0 \right]^{l} \right\}_{l=0}^{\infty} \cup \cdots \cup \left\{ \left[0 \ 0...\pi_{l}(s) \right]^{l} \right\}_{l=0}^{\infty} \quad \text{di}$$

$$n(2d+1)$$
 vettori e (ii) se $\left\langle \left\langle {}^{\mathscr{B}}\boldsymbol{c}_{rj}(\boldsymbol{p}) = col \left[{}^{\mathscr{B}}\boldsymbol{c}_{rj}^{(l)}(\boldsymbol{p}) \right]_{l=0}^{2d} \right\rangle_{r=1}^{n_x} \right\rangle_{j=1}^{n_p}$ sono,

ordinatamente, i vettori delle coordinate di $\left\{\left\{\psi_{ij}(s,\boldsymbol{p})\right\}_{i=1}^{n_{p}}\right\}_{j=1}^{n_{p}}$ rispetto a \mathcal{B} , allora i vettori delle coordinate di $\left\langle\psi_{ij}(s,\boldsymbol{p})=col\left[\psi_{ij}(s,\boldsymbol{p})\right]_{r=1}^{n}\right\rangle_{i=1}^{n_{p}}$ rispetto a

$$\mathcal{B}^{(n)}$$
 sono, ordinatamente, dati da $\left\langle {}^{\scriptscriptstyle B}\boldsymbol{c}_{j}(\boldsymbol{p}) = col\left[{}^{\scriptscriptstyle B}\boldsymbol{c}_{rj}(\boldsymbol{p})\right]_{r=1}^{n}\right\rangle_{j=1}^{n_{p}}$.

Ora, come noto, studiare la lineare dipendenza di un insieme di elementi di un certo spazio vettoriale è equivalente a studiare la lineare dipendenza dell'insieme dei rispettivi vettori delle coordinate rispetto a una qualunque base in questione. Da questa osservazione segue dello spazio immediatamente che – per ogni \mathcal{B} e per ogni p - la matrice ${}^{\mathscr{B}}C(\boldsymbol{p}) = row \left[{}^{\mathscr{B}}\boldsymbol{c}_{j}(\boldsymbol{p}) \right]_{j=1}^{n_{p}} = row \left[col \left[{}^{\mathscr{B}}\boldsymbol{c}_{j}(\boldsymbol{p}) \right]_{r=1}^{n} \right]_{r=1}^{n_{p}} \mathring{e}$ equivalente a $\Psi(s, \boldsymbol{p})$ ai fini dell'analisi di testabilità, tanto a livello di circuito che a livello di componente. In forza dei precedenti Teorema 3.2 e Corollario 3.1, infine, dette analisi potranno essere eseguita sulla matrice ${}^{B}C(p^{*})$, ove p^{*} è un valore di p generato in modo aleatorio. Il chiaro beneficio è che, al contrario di $\Psi(s, p^*)$, matrice di funzioni di s, ${}^{B}C(p^*)$ è una matrice interamente numerica, per la quale ben noti efficienti algoritmi - atti ad essere facilmente implementati in programmi per calcolatore - esistono per il calcolo del rango e i test di lineare indipendenza sulle colonne.

3.3.3 Uno sguardo agli approcci proposti in letteratura per l'automatizzazione dell'analisi di testabilità

In linea di principio le possibili scelte di \mathcal{B} (e, corrispondentemente, di $\mathcal{B}^{(n)}$) sono, evidentemente, infinite; dal punto di vista pratico, tuttavia, si tratta di individuare quelle \mathcal{B} per le quali la corrispondente ${}^{\mathscr{B}}C(p^*)$ possa ottenersi attraverso un algoritmo che sia il più possibile robusto, rapido e di facile implementazione.

In [4] si adotta la scelta $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{Newt}$, ove \mathcal{B}_{Newt} è un insieme di polinomi di Newton, essendo tale scelta adatta all'approccio totalmente numerico ivi adottato: difatti, generato (in accordo con il Teorema 2) un valore p^* di pin modo aleatorio, il calcolo della corrispondente ${}^{\mathcal{B}_{Stirl}}C(p^*)$ attraverso un algoritmo ricorsivo richiede unicamente la conoscenza dei vettori $\{\psi_j(s, p^*)\}_{i=1}^{n_p}$ in corrispondenza di un insieme di 2d+1 frequenze complesse. Al crescere delle dimensioni del circuito in esame, tuttavia, detto algoritmo si rivela considerevolmente oneroso sul piano computazionale, richiedendo il calcolo di un numero di sensitività crescente con l'ordine del circuito stesso, e particolarmente soggetto agli effetti nocivi degli errori di arrotondamento. Tale inconveniente è, in una qualche misura, mitigato con la modifica descritta in [5] ove si affianca a \mathcal{B}_{Newt} una base \mathcal{B}_{Cheb} costituita da polinomi di Chebycheff: a dispetto dell'aggravio dell'onere computazionale che tale strategia comporta, tuttavia, gli effetti degli errori numerici permangono e sono, in generale, di entità tale per cui i risultati ottenuti devono inevitabilmente essere considerati mere stime.

Tali problemi possono essere aggirati qualora sia possibile generare i vettori $\{\boldsymbol{\psi}_{j}(s,\boldsymbol{p}^{*})\}_{j=1}^{n_{p}}$ in forma simbolica rispetto a *s*. In tal caso è evidente che la scelta più naturale per *B* è rappresentata dalla base canonica \mathcal{B}_{Can} di Π_{2d} , ossia dall'insieme $\mathcal{B}_{Can} = \{s^{l}\}_{l=0}^{2d}$. Rispetto alla corrispondente base $\mathcal{B}_{Can}^{(n)}$ di Π_{2N}^{n} , è subito visto che i vettori $\{\mathcal{B}_{Can}^{(n)}\boldsymbol{c}_{j}(\boldsymbol{p})\}_{j=1}^{n_{p}}$ delle coordinate di $\langle\boldsymbol{\psi}_{j}(s,\boldsymbol{p}^{*}) = col[\boldsymbol{\psi}_{rj}(s,\boldsymbol{p}^{*})]_{r=1}^{n}\rangle_{j=1}^{n_{p}}$ sono, ordinatamente, dati da

$$\left\langle {}^{\mathcal{B}_{Can}^{(n)}}\boldsymbol{c}_{j}(\boldsymbol{p}^{*}) = col \left[{}^{\mathcal{B}_{Can}}\boldsymbol{c}_{j}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{r=1}^{n} = col \left[col \left[c_{j}^{(l)}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{l=0}^{2d} \right]_{r=1}^{n} \right\rangle_{j=1}^{n} \quad - \quad \text{ove} \quad \text{gli}$$

elementi dell'insieme $\left\{c_{rj}^{(l)}(\boldsymbol{p})\right\}_{l=0}^{2d}$ coincidono con i coefficienti che compaiono nella (3.22) - e che, di conseguenza, per la corrispondente matrice ${}^{g_{Car}}C(\boldsymbol{p}^{*})$ risulta

$$C(\boldsymbol{p}^{*}) = row \left[\boldsymbol{c}_{j}(\boldsymbol{p}^{*})\right]_{j=1}^{n_{p}} = row \left[col \left[\boldsymbol{c}_{rj}(\boldsymbol{p}^{*})\right]_{r=1}^{n}\right]_{j=1}^{n_{p}}$$

$$= row \left[col \left[col \left[c_{rj}^{(l)}(\boldsymbol{p}^{*})\right]_{l=0}^{2d}\right]_{r=1}^{n}\right]_{j=1}^{n_{p}}$$
(3.23)

ove – come si farà d'ora innanzi – per semplicità di notazione si è scritto $C(\mathbf{p}^*)$ in luogo di ${}^{\mathcal{B}_{Can}}C(\mathbf{p}^*)$, $\mathbf{c}_j(\mathbf{p}^*)$ in luogo di ${}^{\mathcal{B}_{Can}^{(n)}}\mathbf{c}_j(\mathbf{p}^*)$ e

$$\left\langle \left\langle \boldsymbol{c}_{rj} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) = col \left[c_{rj}^{(l)} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) \right]_{l=0}^{2d} \right\rangle_{r=1}^{n} \right\rangle_{j=1}^{n_{p}}$$
(3.24)

in luogo di $\left\langle \left\langle {}^{\mathcal{B}_{Can}} \boldsymbol{c}_{rj}(\boldsymbol{p}^*) \right\rangle_{r=1}^{n_p} \right\rangle_{j=1}^{n_p}$: nel seguito ci si riferirà a $C(\boldsymbol{p}^*)$ come la *matrice di testabilità*.

Come accennato dianzi, affinché tali ultimi risultati abbiano concreti risvolti pratici è necessario disporre di un programma software in grado di generare i polinomi $\psi_{rj}(s, p^*)$ in forma simbolica (rispetto ad s). L'approccio descritto in [6] è basato per l'appunto su una tale idea: generato (in accordo al Teorema 2 e al Corollario 1) un valore p^* di p in modo aleatorio, tecniche di risoluzione simbolica dei sistemi lineari già impiegate con successo per l'analisi simbolica dei circuiti elettrici lineari sono ivi combinate con ben noti artifici atti ad ottenere le sensitività evitando il calcolo esplicito di derivate parziali.

Sfortunatamente un tale approccio, ancorché rigoroso, è altresì notevolmente oneroso sul piano computazionale, richiedendo la risoluzione simbolica di sistemi lineari le cui dimensioni e il cui numero sono crescenti con le dimensioni del circuito e il numero di parametri coinvolti: per tali motivi, l'elegante semplificazione descritta in [7] acquisisce notevole importanza, tanto sul piano concettuale che su quello pratico. Per generalizzare al caso MIMO il risultato ivi presentato ed euristicamente giustificato nel caso SISO, si cominci con l'introdurre, in riferimento alla (3.17), i vettori

$$\left\langle \boldsymbol{a}_{r}(\boldsymbol{p}) = col \left[a_{r}^{(k)}(\boldsymbol{p}) \right]_{k=0}^{d} \right\rangle_{r=1}^{n},$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{p}) = col \left[b^{(m)}(\boldsymbol{p}) \right]_{m=0}^{d-1},$$

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}) = col \left[b^{(m)}(\boldsymbol{p}) \right]_{m=0}^{d}$$

$$(3.25)$$

Si ha allora che la matrice definita da

$$B_{c}(\boldsymbol{p}^{*}) = row \left[\frac{\partial}{\partial p_{j}} \left[col \left[\boldsymbol{a}_{r}(\boldsymbol{p}) \right]_{r=1}^{n} \right]_{p=p^{*}} \right]_{j=1}^{n_{p}}$$
(3.26)

è equivalente a $C(\mathbf{p}^*)$ definita da (3.23) ai fini dell'analisi di testabilità tanto a livello di circuito che di componente. Il vantaggio che si consegue con la (3.26) rispetto alla (3.23) in termini di riduzione dell'onere computazionale risiede nel fatto che la prima non richiede come la seconda il calcolo esplicito dei polinomi $\left\{\left\{\psi_{rj}(s, \mathbf{p}^*)\right\}_{r=1}^n\right\}_{j=1}^{n_p}$, ma unicamente il calcolo delle derivate parziali dei coefficienti definiti dalle (3.25). Per quest'ultimo compito, considerevolmente meno oneroso del precedente, si traeva partito dalla possibilità, offerta dal software per la simulazione circuitale SapWin [8], di disporre dei coefficienti (3.25) in forma simbolica rispetto a \mathbf{p} e dal fatto che tali coefficienti sono funzioni bilineari rispetto a ciascuna componente di quest'ultimo vettore.

Si deve rimarcare tuttavia che l'equivalenza fra $C(\mathbf{p}^*)$ e $B_c(\mathbf{p}^*)$ ai fini dell'analisi di testabilità è vera solo a patto che sussistano precise condizioni che sono rigorosamente dimostrate nella Sezione 3.7 e che verranno enunciate e discusse approfonditamente nella prossima sezione. Per il momento ci si limita ad anticipare che una di tali condizioni (nella sua formulazione più stringente) è che risulti $b_d(\mathbf{p}) \equiv 1$: poiché tale condizione è, in generale, non soddisfatta a priori ove si impieghi l'Analisi Nodale Modificata (ANM) quale metodo risolutivo delle reti (come accade nel summenzionato software per l'analisi simbolica SapWin), essa deve essere imposta normalizzando denominatore e numeratore di ciascuna delle funzioni di rete $\{h_r(s, \mathbf{p})\}_{r=1}^n$ rispetto all'originario $b_d(\mathbf{p})$. In conseguenza di

una tale operazione, i coefficienti originari
$$\left\{ \left\{ a_r^{(k)}(\boldsymbol{p}) \right\}_{k=0}^d \right\}_{r=1}^n e \left\{ b^{(j)}(\boldsymbol{p}) \right\}_{j=0}^d$$
 -

che, in virtù dell'ANM, sono funzioni polinomiali di p - vengono trasformati

nei coefficienti
$$\left\{ \left\{ \hat{a}_{r}^{(k)}(\boldsymbol{p}) \right\}_{k=0}^{d} \right\}_{r=1}^{n} = \left\{ \left\{ a_{r}^{(k)}(\boldsymbol{p}) \middle/ b^{(d)}(\boldsymbol{p}) \right\}_{k=0}^{d} \right\}_{r=1}^{n}$$

 $\left\{\hat{b}^{(j)}(\boldsymbol{p})\right\}_{j=0}^{d} = \left\{b^{(j)}(\boldsymbol{p})/b^{(d)}(\boldsymbol{p})\right\}_{j=0}^{d}$ che sono invece (con l'ovvia eccezione di $\hat{b}^{(d)}(\boldsymbol{p}) = 1$) in generale funzioni *razionali fratte* di \boldsymbol{p} : ciò rende il calcolo delle derivate in (3.26) più oneroso sul piano della complessità e dei tempi di esecuzione e maggiormente soggetto agli effetti degli errori di arrotondamento.

Per ovviare a questi problemi, in [9] la necessità di una tale normalizzazione è evitata ricorrendo a un opportuno algoritmo: quest'ultimo, tuttavia, richiede di distinguere numerosi casi e sottocasi e risulta quindi piuttosto complicato sul piano concettuale e oneroso su quello computazionale. Inoltre, fatto almeno altrettanto importante, tanto l'algoritmo in questione quanto la versione originaria descritta in [7] presentano una vulnerabilità rispetto agli effetti di fattori simbolici a comune fra numeratore e denominatore delle funzioni di rete considerate, tale da condurli, in presenza di siffatti fattori, a fornire inevitabilmente risultati scorretti.

3.4 Algoritmo perfezionato per l'analisi di testabilità

3.4.1 Introduzione

In questa sezione verrà descritto il nuovo algoritmo per l'analisi di testabilità presentato in [10]. Come quelli riportati in [6]-[9], questo nuovo algoritmo è basato su tecniche simboliche, ma, al contempo, si rivela in grado di aggirare i principali inconvenienti, posti in evidenza nel precedente capitolo, da cui i primi risultano affetti.

In particolare, esso

(a) non richiede il calcolo esplicito di sensitività onde ottenere i polinomi in forma simbolica, per contro necessario con l'approccio in [6], evitando l'onere di calcolo e i lunghi tempi di elaborazione connessi a quest'ultimo;

(b) non richiede che le funzioni di rete siano poste in una forma rigidamente predefinita, in tal modo aggirando la normalizzazione delle funzioni di rete necessaria con l'approccio in [7];

(c) evita le complessità concettuali, di implementazione e di calcolo da cui è affetto il metodo presentato in [9];

(d) fornisce risultati corretti indipendentemente da ogni peculiarità delle funzioni di rete considerate. In particolare, esso risulta assolutamente immune agli effetti di fattori comuni fra numeratore e denominatore, che invece conducono gli approcci in [7] e [9] a risultati scorretti.

3.4.2 Il nuovo algoritmo

In questo paragrafo ci occuperemo di derivare un'espressione di C(p) in forma chiusa, in termini dei coefficienti delle funzioni di rete e delle rispettive derivate parziali rispetto ai parametri in esame. A tale scopo, dal confronto fra (3.22), (3.20) e (3.17) si trova anzitutto:

$$\left\langle \left\langle \left\langle \sum_{l=0}^{2d} c_{rj}^{(l)}(\boldsymbol{p}) s^{j} \\ = \frac{\partial \sum_{k=0}^{d} a_{r}^{(k)}(\boldsymbol{p}) s^{k}}{\partial p_{j}} \sum_{m=0}^{d} b^{(m)}(\boldsymbol{p}) s^{m} - \sum_{k=0}^{d} a_{r}^{(k)}(\boldsymbol{p}) s^{k} \frac{\partial \sum_{m=0}^{d} b^{(m)}(\boldsymbol{p}) s^{m}}{\partial p_{j}} \\ = \sum_{k=0}^{d} \frac{\partial a_{r}^{(k)}(\boldsymbol{p})}{\partial p_{j}} s^{k} \sum_{m=0}^{d} b^{(m)}(\boldsymbol{p}) s^{m} - \sum_{k=0}^{d} a_{r}^{(k)}(\boldsymbol{p}) s^{k} \sum_{m=0}^{d} \frac{\partial b^{(m)}(\boldsymbol{p})}{\partial p_{j}} s^{m} \\ \left\langle \left\langle z \right\rangle \right\rangle_{r=1}^{n} \right\rangle_{j=1}^{n} \right\rangle \right\rangle$$
(3.27)

Applicando alla (3.27) il principio di identità dei polinomi si trova poi

$$\left\langle \left\langle \left\langle c_{rj}^{(l)}\left(\boldsymbol{p}\right) = \sum_{m=0}^{l} \left\{ b^{(l-m)}\left(\boldsymbol{p}\right) \frac{\partial a_{r}^{(m)}\left(\boldsymbol{p}\right)}{\partial p_{j}} - a_{r}^{(l-m)}\left(\boldsymbol{p}\right) \frac{\partial b^{(m)}\left(\boldsymbol{p}\right)}{\partial p_{i}} \right\} \right\rangle_{l=0}^{2d} \left\rangle_{r=1}^{n} \right\rangle_{j=1}^{n}$$
(3.28)

Con riferimento alla (3.25) si introducono poi le matrici

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{p}) = pad[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p})]$$

$$\left\langle \mathcal{A}_{r}(\boldsymbol{p}) = pad[\boldsymbol{a}_{r}(\boldsymbol{p})] \right\rangle_{r=1}^{n}$$

$$\left\langle \mathcal{F}_{r}(\boldsymbol{p}) = \left[\mathcal{B}(\boldsymbol{p}) - \mathcal{A}_{r}(\boldsymbol{p})\right] \right\rangle_{r=1}^{n}$$
(3.29)

con le quali, ricordando le (3.25) e (3.24), le (3.28) possono scriversi

$$\left\langle \left\langle \boldsymbol{c}_{rj}\left(\boldsymbol{p}\right) = \mathcal{F}_{r}\left(\boldsymbol{p}\right) \frac{\partial}{\partial p_{j}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{r}\left(\boldsymbol{p}\right) \\ \boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{p}\right) \end{bmatrix} \right\rangle_{r=1}^{n} \right\rangle_{j=1}^{n}$$
(3.30)

Inserendo la (3.30) nella (3.23) si trova infine

$$C(\boldsymbol{p}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{p}) \mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p})$$
(3.31)

ove

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{p}) = \left[diag \left[\mathcal{B}(\boldsymbol{p}) \right]^{n} - col \left[\mathcal{A}_{r}(\boldsymbol{p}) \right]_{r=1}^{n} \right]$$
$$\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p}) = row \left[\frac{\partial}{\partial p_{j}} \left[col \left[\boldsymbol{a}_{r}(\boldsymbol{p}) \right]_{r=1}^{n} \right] \right]_{j=1}^{j_{p}}$$
(3.32)

Per comodità di trattazione è utile altresì considerare le matrici

$$\left\langle \mathcal{M}_{D,r}\left(\boldsymbol{p}\right) = row \left[\frac{\partial}{\partial p_{j}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{r}\left(\boldsymbol{p}\right) \\ \boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{p}\right) \end{bmatrix} \right]_{j=1}^{n_{p}} \right\rangle_{r=1}^{n}$$
(3.33)

Considerando nuovamente la (3.23) assieme alle (3.29), si trova anche la seguente espressione alternativa di C(p)

$$C(\boldsymbol{p}) = col \left[\mathcal{F}_r(\boldsymbol{p}) \mathcal{M}_{D,r}(\boldsymbol{p}) \right]_{r=1}^n$$
(3.34)

3.4.3 Implementazione software: il programma TALIC

Si possono ora invocare il Teorema 2 e il Corollario 1: generato in modo casuale un valore p^* di p l'analisi di testabilità, tanto a livello di circuito che a livello di componente, può essere condotta utilizzando la matrice $C(p^*) = \mathcal{F}(p^*)\mathcal{M}_D(p^*)$, in accordo alla (3.31).

Quest'ultima matrice è immediatamente calcolabile ove si disponga dei suoi fattori $\mathcal{F}(\boldsymbol{p}^*)$ e $\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}^*)$. Come risulta dalle (3.32), (3.29), (3.25), $\mathcal{F}(\boldsymbol{p}^*)$ potrà essere costruita non appena si conoscano i coefficienti delle funzioni di rete $\left\{ \left\{ a_r^{(k)}(\boldsymbol{p}) \right\}_{k=0}^d \right\}_{r=1}^n$ e $\left\{ b^{(m)}(\boldsymbol{p}) \right\}_{m=0}^d$ in corrispondenza di $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^*$. Poiché la validità della (3.31) non è condizionata da alcuna peculiare caratteristica delle funzioni di rete e, in particolare, dalla loro espressione algebrica, allo scopo di ottenere i detti coefficienti si può impiegare con vantaggio il software SapWin [8], basato sull'ANM e quindi in grado di fornire i coefficienti in questione in forma simbolica, come polinomi in \boldsymbol{p} .

69

Questa stessa proprietà di SapWin può essere vantaggiosamente sfruttata per ottenere agevolmente anche $\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}^*)$. Per comprendere come ciò sia possibile, si osservi che – poiché i coefficienti $\left\{\left\{a_r^{(k)}(\boldsymbol{p})\right\}_{k=0}^d\right\}_{r=1}^n \in \left\{b^{(m)}(\boldsymbol{p})\right\}_{m=0}^d$ hanno espressione polinomiale in \boldsymbol{p} – essi risultano in particolare funzioni lineari di ciascun elemento di $\boldsymbol{p} = col[p_j]_{j=1}^{n_p}$. Allora è subito visto che le colonne di $\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}^*)$ possono essere ottenute come

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial p_{j}} \begin{bmatrix} col \left[\boldsymbol{a}_{r} \left(\boldsymbol{p} \right) \right]_{r=1}^{n} \\ \boldsymbol{b} \left(\boldsymbol{p} \right) \end{bmatrix}_{\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{*}} = \begin{bmatrix} col \left[\boldsymbol{a}_{r} \left(\boldsymbol{p}^{*} + \boldsymbol{e}_{j} \right) \right]_{r=1}^{n} \\ \boldsymbol{b} \left(\boldsymbol{p}^{*} + \boldsymbol{e}_{j} \right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} col \left[\boldsymbol{a}_{r} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) \right]_{r=1}^{n} \\ \boldsymbol{b} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) \end{bmatrix} \right\rangle_{j=1}^{n_{p}}$$
(3.35)

ove - per $j = 1, \dots, n_p$ - e_j è il vettore che ha nulli tutti gli elementi ad eccezione del *j*-esimo, che è pari ad 1. La (3.35) mostra quindi che - per $j = 1, \dots, n_p$ - il calcolo della *j*-esima colonna di $\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}^*)$ richiede, in aggiunta al calcolo dei coefficienti $\left\{\left\{a_r^{(k)}(\boldsymbol{p}^*)\right\}_{k=0}^d\right\}_{r=1}^n e \left\{b^{(m)}(\boldsymbol{p}^*)\right\}_{m=0}^d$, unicamente l'ulteriore calcolo dei coefficienti $\left\{\left\{a_r^{(k)}(\boldsymbol{p}^*+\boldsymbol{e}_j)\right\}_{k=0}^d\right\}_{r=1}^n e$ $\left\{b^{(m)}(\boldsymbol{p}^*+\boldsymbol{e}_j)\right\}_{m=0}^d$, che possono ottenersi a partire dalle medesime espressioni simboliche $\left\{\left\{a_r^{(k)}(\boldsymbol{p})\right\}_{k=0}^d\right\}_{r=1}^n e \left\{b^{(m)}(\boldsymbol{p})\right\}_{m=0}^d$ tramite la semplice sostituzione $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^* + \boldsymbol{e}_j$.

Nel modo testé descritto la matrice $C(p^*)$ può essere ottenuta al solo costo di una simulazione con SapWin: si evita così il calcolo diretto dei polinomi (3.20) e, quindi, le onerose procedure di calcolo simbolico che caratterizzano l'approccio descritto in [6]. Il calcolo di $\mathcal{M}_D(p^*)$ risulta inoltre notevolmente più semplice e rapido rispetto a quello delle matrice $B_c(p^*)$ in (3.26), impiegata nell'approccio [7], e altresì privo degli errori di arrotondamento che affliggono quest'ultima, in conseguenza del fatto che gli elementi di $\mathcal{M}_D(p^*)$ sono, come evidenziato, funzioni lineari rispetto a ciascun elemento di $p = col[p_j]_{j=1}^{n_p}$, piuttosto che funzioni bilineari dello stesso, come accade per gli elementi di $B_c(p^*)$. Al contempo, si evitano le severe complicazioni concettuali, di implementazione e di calcolo che nell'approccio descritto in [9] costituiscono il prezzo per un analogo risultato. Cosa di pari importanza, tramite la (3.31) si tiene automaticamente conto di ogni possibile peculiarità delle funzioni di rete, ivi compresa la presenza di fattori simbolici a comune fra numeratore e denominatore, che, come si esemplificherà nel seguito, conduce gli approcci in [6] e [7] a fornire risultati erronei.

L'algoritmo sopra descritto è stato direttamente implementato tramite un software denominato TALIC (Testability Analysis of Linear time-Invariant Circuits), che trae partito dalle potenzialità di SapWin. TALIC accetta il file di uscita di SapWin e da esso estrae i vettori $\{a_r(p)\}_{r=1}^n$ e b(p). Poi, dopo aver generato un valore aleatorio p^* di p, esso calcola le matrici $\mathcal{F}(p^*)$ e $\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p}^{*})$ secondo la procedura dianzi delineata e, quindi, la matrice $C(\mathbf{p}^*) = \mathcal{F}(\mathbf{p}^*) \mathcal{M}_D(\mathbf{p}^*)$ in accordo con la (3.31). TALIC impiega quindi gli argomenti descritti in [13] per ottenere una decomposizione ai valori singolari di $C(p^*)$, a partire dalla quale l'analisi di testabilità è eseguita a livello di *circuito* (determinazione della Testabilità $T = rank | C(\mathbf{p}^*) |$ e del Rapporto di Testabilità $\rho = 100T/n_p \%$) e, tenendo conto che ciascun parametro è associato ad una ed una sola colonna di $C(p^*)$, a livello di componente (determinazione dei gruppi testabili – insiemi massimali di T parametri per i quali le corrispondenti colonne di $C(p^*)$ sono linearmente indipendenti - e dei gruppi canonici di ambiguità - insiemi minimali di parametri per i quali le corrispondenti colonne di $C(p^*)$ sono linearmente dipendenti). In forza poi del fatto che ciascuna riga di $C(p^*)$ resta associata ad una ed una sola funzione di rete, TALIC è in grado di indicare eventuali punti di stimolo e/o misura ridondanti ai fini dell'analisi.

I passi fondamentali di TALIC possono essere elencati come segue.

STEP 1: In corrispondenza della scelta fatta di n_x punti di stimolo e n_y punti di misura, valutare le relative $n = n_x \cdot n_y$ funzioni di rete

$$\left\langle h_r(s, \boldsymbol{p}) = \frac{a_r^{(d)}(\boldsymbol{p})s^d + a_r^{(d-1)}(\boldsymbol{p})s^{d-1} + \dots + a_r^{(0)}(\boldsymbol{p})}{b^{(d)}(\boldsymbol{p})s^d + b^{(d-1)}(\boldsymbol{p})s^{d-1} + \dots + b^{(0)}(\boldsymbol{p})} \right\rangle_{r=1}^n \text{ in } \text{ forma}$$

completamente simbolica per mezzo di SapWin. STEP 2: Dal file di uscita di SapWin estrarre i vettori

71

$$\left\langle \boldsymbol{a}_{r}(\boldsymbol{p}) = col\left[a_{r}^{(k)}(\boldsymbol{p})\right]_{k=0}^{d}\right\rangle_{r=1}^{n}, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}) = col\left[b^{(m)}(\boldsymbol{p})\right]_{m=0}^{d}$$
.

STEP 3: Assegnare un valore aleatorio p^* a p.

STEP4: Costruire la matrice
$$\mathcal{F}(\boldsymbol{p}^*) = \left[diag \left[\mathcal{B}(\boldsymbol{p}^*) \right]^n - col \left[\mathcal{A}_r(\boldsymbol{p}^*) \right]_{r=1}^n \right]$$

con $\mathcal{B}(\boldsymbol{p}^*) = nad \left[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}^*) \right] / \mathcal{A}(\boldsymbol{p}^*) = nad \left[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{p}^*) \right]^n$

$$\operatorname{con} \mathcal{B}(\boldsymbol{p}^*) = pad \lfloor \boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}^*) \rfloor, \langle \mathcal{A}_r(\boldsymbol{p}^*) = pad \lfloor \boldsymbol{a}_r(\boldsymbol{p}^*) \rfloor \rangle_{r=1}.$$

STEP 5: Impiegando la (3.35), calcolare la matrice

$$\mathcal{M}_{D}\left(\boldsymbol{p}^{*}\right) = row \left[\frac{\partial}{\partial p_{j}} \left[col\left[\boldsymbol{a}_{r}\left(\boldsymbol{p}\right)\right]_{r=1}^{n}\right]_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^{*}}\right]_{j=1}^{n_{p}}$$

STEP 6: Calcolare la matrice $C(\boldsymbol{p}^*) = \mathcal{F}(\boldsymbol{p}^*) \mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}^*)$.

- STEP 7: Eseguire una decomposizione ai valori singolari di $C(p^*)$ in accordo alla procedura descritta in [13].
- STEP 8: Determinare (a) Testabilità $T = rank \left[C(p^*) \right]$ e Rapporto di Testabilità $\rho = 100T/n_p$ %, (b) GT (insiemi di *T* parametri per i quali le corrispondenti colonne di $C(p^*)$ sono linearmente indipendenti), (c) GAC (insiemi minimali di parametri per i quali le corrispondenti colonne di $C(p^*)$ sono linearmente dipendenti), e (d) punti di stimolo e/o misura ridondanti (punti di stimolo e/o misura per i quali le corrispondenti righe di $C(p^*)$ possono essere eliminate senza alterare le relazioni di dipendenza lineare fra le colonne di $C(p^*)$).

3.5 Versioni semplificate e relative condizioni di validità. Legami con l'approccio descritto in [7]

3.5.1 Introduzione

Il nuovo algoritmo descritto nel precedente capitolo presenta, rispetto a quello proposto in [7], i notevoli vantaggi ivi discussi. Nondimeno, quest'ultimo algoritmo conserva una notevole importanza concettuale,

poiché consente di cogliere in maniera più diretta e intuitiva le modalità con le quali le relazioni fra i parametri e i coefficienti delle funzioni di rete coinvolte influenzano la testabilità del circuito allo studio e di ricavare facilmente alcuni risultati di carattere generale, aspetti preziosi, ad esempio, quando sia necessario effettuare un'analisi preliminare per ispezione (vedasi, a tal proposito, la Sezione 3.6). Diviene allora importante studiare le condizioni sotto le quali l'algoritmo in questione possa essere correttamente applicato, cosa che costituisce l'argomento della presente sezione.

3.5.2 Condizioni per l'applicabilità di versioni semplificate

Per cominciare, si studieranno condizioni sufficienti sotto le quali $\mathcal{M}_D(\mathbf{p})$ risulta equivalente a $C(\mathbf{p})$ ai fini dell'analisi di testabilità e possa quindi rimpiazzare quest'ultima matrice a tale scopo. Tali condizioni sono fornite dalla seguente proposizione.

Teorema 3.3

Esista *almeno* un intero r per il quale le seguenti due condizioni siano soddisfatte :

- (a) esista un valore p_0 di p tale che $N_r(s, p_0)$ e $\Delta(s, p_0)$ non abbiano zeri a comune;
- (b) per le due matrici

$$\mathcal{M}_{D,r}(\boldsymbol{p}) = row \left[\frac{\partial}{\partial p_j} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_r(\boldsymbol{p}) \\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix} \right]_{j=1}^{n_p},$$

$$\mathcal{M}_{D,r}^{aug}(\boldsymbol{p}) = \left[\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_r(\boldsymbol{p}) \\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix} \mathcal{M}_{D,r}(\boldsymbol{p}) \right]$$
(3.36)

sussista l'ineguaglianza

$$\max_{p} rank \left[\mathcal{M}_{D,r} \left(\boldsymbol{p} \right) \right] \neq \max_{p} rank \left[\mathcal{M}_{D,r}^{aug} \left(\boldsymbol{p} \right) \right]$$
(3.37)

Allora $C(\mathbf{p}) \in \mathcal{M}_D(\mathbf{p})$ sono equivalenti ai fini dell'analisi di testabilità, sia a livello di circuito che di componente.

Si rimanda al Paragrafo 3.7.6 per la dimostrazione di tale proposizione; per il momento, ci occupiamo di discuterne il significato e le implicazioni. Per

cominciare, si osserva che, in forza di argomenti simili a quelli che possono impiegarsi per la dimostrazione del Teorema 3.2, si ha che verificare se la sia soddisfatta è in pratica equivalente a verificare se lo sia (3.37)l'ineguaglianza $rank \left[\mathcal{M}_{D,r}(\boldsymbol{p}^*) \right] \neq rank \left[\mathcal{M}_{D,r}^{aug}(\boldsymbol{p}^*) \right]$, ove \boldsymbol{p}^* è un valore di p generato in modo casuale: non v'è quindi, in pratica, la necessità di calcolare i valori massimi che compaiono nella (3.37). Per ragioni perfettamente analoghe, le conseguenze pratiche della proposizione precedente sono che (sotto le condizioni ivi specificate), indicato ancora una volta $\operatorname{con} p^*$ un valore di *p* generato in modo casuale, si ha $T = rank \left\lceil C(\boldsymbol{p}^*) \right\rceil = rank \left\lceil \mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}^*) \right\rceil$ e la determinazione tanto dei gruppi testabili quanto dei gruppi canonici di ambiguità può determinarsi impiegando $\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p}^{*})$ in luogo di $C(\boldsymbol{p}^{*})$. Si sottolinea infine che il teorema in questione fornisce condizioni solo sufficienti per l'equivalenza di C(p) e $\mathcal{M}_{p}(\boldsymbol{p})$ ai fini dell'analisi di testabilità: in altri termini, può accadere che dette matrici diano gli stessi risultati per l'analisi di testabilità anche se - per $r = 1, \dots, n$ - la condizione (a) o la condizione (b) menzionate nell'ipotesi non sono soddisfatte.

L'enunciato del precedente Teorema 3.3 è immediatamente adattato al caso SISO semplicemente elidendo l'indice r. Tuttavia, in tale notevole caso particolare è possibile ottenere risultati ulteriori, come specificato nella prossima proposizione.

Corollario3.2

Nel caso SISO, sia p_{θ} un valore di p tale che $N(s,p_{\theta}) \equiv N_1(s,p_{\theta})$ e $\Delta(s,p_{\theta})$ non abbiano zeri a comune. Allora, se $\max_{p} rank \left[\mathcal{M}_D(p) \right] = \max_{p} rank \left[\mathcal{M}_D^{aug}(p) \right], \qquad \text{si} \qquad \text{ha}$ $\max_{p} rank \left[C(p) \right] = \max_{p} rank \left[\mathcal{M}_D(p) \right] - 1.$

La dimostrazione della proposizione è rinviata al Paragrafo 3.7.7; qui ci si limita a discutere le sue implicazioni. In primo luogo, anche in questo caso ciascun *max* che compare nell'enunciato può essere rimpiazzato in pratica col valore assunto dal rispettivo argomento in corrispondenza di una determinazione p^* di p generata in modo casuale. Si ha perciò che – se $rank \left[\mathcal{M}_D(p^*) \right] = rank \left[\mathcal{M}_D^{aug}(p^*) \right]$ - allora è $T = rank \left[\mathcal{M}_D(p^*) \right]$ -1: tale risultato vuol dire in sostanza che l'analisi di testabilità a livello di *circuito*

può effettuarsi impiegando $\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}^*)$, pur di apportare al rango di quest'ultima la correzione indicata nel secondo membro della espressione di *T*. Tuttavia, quando impiegata per l'analisi di testabilità a livello di *componente*, $\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}^*)$ fornirà risultati erronei per i quali non esiste alcuna ovvia correzione.

Torniamo ora al Teorema 3.3 e discutiamo il peso di ciascuna delle due condizioni in ipotesi. Quanto alla condizione (b), è *sempre* possibile fare in modo che sia verificata ponendo le funzioni di rete in una forma opportuna. Difatti, se (i) si sceglie arbitrariamente un coefficiente non identicamente nullo $\eta_r^{(l)}(\boldsymbol{p})$ pertinente ad una certa $h_r(s, \boldsymbol{p})$ (potrà essere indifferentemente un coefficiente del numeratore, caso in cui $\eta_r^{(l)}(\boldsymbol{p}) = a_r^{(l)}(\boldsymbol{p})$, oppure un coefficiente del denominatore, caso in cui $\eta_r^{(l)}(\boldsymbol{p}) = b^{(l)}(\boldsymbol{p})$, per un certo $l \in \{0, \dots, d\}$) e (ii) si dividono per $\eta_r^{(l)}(\boldsymbol{p})$ numeratore e denominatore di *ciascuna* delle funzioni di rete $\{h_r(s, \boldsymbol{p})\}_{r=1}^n$ date dalle (3.16), (3.17), si otterranno nuove espressioni

$$\left\{ \hat{h}_{i}(s,\boldsymbol{p}) = \frac{\sum_{k=0}^{N} \hat{a}_{i}^{(k)}(\boldsymbol{p}) s^{k}}{\sum_{j=0}^{N} \hat{b}^{(j)}(\boldsymbol{p}) s^{j}} = \frac{\sum_{k=0}^{N} \left(a_{i}^{(k)}(\boldsymbol{p}) / \eta_{r}^{(l)}(\boldsymbol{p}) \right) s^{k}}{\sum_{j=0}^{N} \left(b^{(j)}(\boldsymbol{p}) / \eta_{r}^{(l)}(\boldsymbol{p}) \right) s^{j}} \right\}_{i=1}^{n}$$
(3.38)

equivalenti alle originarie per *quasi ogni* **p** (sono, al più, eccettuati i **p** appartenenti alla varietà algebrica definita da $\eta_r^{(l)}(\mathbf{p}) = 0$).

Si indichi allora $\hat{\mathcal{M}}_{D,r}^{(\hat{\eta}_{r}^{(l)})}(\boldsymbol{p})$ la peculiare forma che la matrice definita in (3.36) assume quando, in luogo del generico originario insieme di funzioni di rete $\{h_{i}(s,\boldsymbol{p})\}_{i=1}^{n}$, si consideri l'insieme $\{\hat{h}_{i}(s,\boldsymbol{p})\}_{i=1}^{n}$ dianzi definito. Allora il vettore $[\hat{a}_{r}(\boldsymbol{p})^{t} \ \hat{b}(\boldsymbol{p})^{t}]^{t}$ dei coefficienti di $\hat{h}_{r}(s,\boldsymbol{p})$ avrà automaticamente $\hat{\eta}_{r}^{(l)}(\boldsymbol{p}) = 1$ e, quindi, tutte le colonne di $\hat{\mathcal{M}}_{D,r}^{(\hat{\eta}_{r}^{(l)})}(\boldsymbol{p})$ avranno il corrispondente elemento pari a zero, il che impedisce a detto vettore di essere combinazione lineare di dette colonne, in tal modo rendendo certamente vera la (3.37). Per ragioni analoghe, se qualche $\eta_{r}^{(l)}(\boldsymbol{p})$ è costante *rispetto a* \boldsymbol{p} , la condizione (b) del Teorema 3.3 è certamente soddisfatta senza il bisogno dell'operazione di normalizzazione dianzi descritta. Naturalmente, se si sceglie $\eta_r^{(l)}(\boldsymbol{p}) = b^{(l)}(\boldsymbol{p})$ per qualche *l*, allora la condizione (b) risulterà soddisfatta automaticamente per tutte le funzioni di rete $\{h_r(s, \boldsymbol{p})\}_{r=1}^n$.

In particolare si può scegliere

$$\eta_r^{(l)}(\boldsymbol{p}) = b_d(\boldsymbol{p}) \tag{3.39}$$

Sia allora $\hat{\mathcal{M}}_{D}^{(b_{d})}(p)$ la particolare espressione assunta dalla matrice $\mathcal{M}_{D}(p)$ definita in (3.32) in conseguenza della scelta (3.39). In virtù di quanto detto dianzi, è chiaro che la riga di $\hat{\mathcal{M}}_{D}^{(b_d)}(\boldsymbol{p})$ costituita da $row \left[\partial \hat{b}_d / \partial p_j\right]_{j=1}^{n_p}$ è identicamente nulla e può dunque essere avulsa senza alterare le relazioni di lineare dipendenza fra le colonne. Ma, ricordando le (3.26)-(3.25), si vede quest'ultima operazione trasforma $\hat{\mathcal{M}}_{D}^{(b_d)}(\boldsymbol{p})$ nella che matrice $B_{c}(\mathbf{p})$ definita da (3.26): pertanto $\hat{\mathcal{M}}_{D}^{(b_{d})}(\mathbf{p})$ e $B_{c}(\mathbf{p})$ sono equivalenti ai fini dell'analisi di testabilità sia a livello di circuito che di componente e l'algoritmo descritto in [7] può dunque riguardarsi come un caso particolare di quello che impiega la generica matrice $\mathcal{M}_{D}(p)$. Per quanto detto, ai fini di detta analisi, sarà lecito rimpiazzare C(p) con $B_c(p)$ se e solo se è lecito rimpiazzare $C(\mathbf{p}) \operatorname{con} \hat{\mathcal{M}}_{D}^{(b_d)}(\mathbf{p})$.

Dal momento che per $\hat{\mathcal{M}}_{D}^{(b_{d})}(\boldsymbol{p})$ la condizione (b) è soddisfatta per costruzione, ne segue che la liceità dello scambio di $C(\boldsymbol{p})$ con $\hat{\mathcal{M}}_{D}^{(b_{d})}(\boldsymbol{p})$ - e, dunque, di $C(\boldsymbol{p})$ con $B_{c}(\boldsymbol{p})$ - sarà assicurata non appena la condizione (a) del Teorema 3.3 risulti soddisfatta. Prima di indagare più a fondo quest'ultima questione, si nota esplicitamente che la (3.39) rappresenta solo una delle possibili scelte, le quali sono, in linea di principio, tante quanti sono gli elementi non nulli dell'insieme $\{b^{(j)}\}_{j=0}^{d} \bigcup_{r=1}^{n} \{a_{r}^{(l)}\}_{l=0}^{d}$ di tutti i coefficienti che compaiono nelle funzioni di rete considerate. Detto, come sopra, $\eta_{r}^{(l)}(\boldsymbol{p})$ il generico di tali elementi non nulli, è chiaro che in corrispondenza di esso possono ottenersi matrici $\hat{\mathcal{M}}_{D}^{(\eta_{r}^{(l)}(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{p}) \in B_{c}^{(\eta_{r}^{(l)}(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{p})$ - rispettivamente analoghe a $\hat{\mathcal{M}}_{D}^{(b_{d})}(\boldsymbol{p})$ e $B_{c}(\boldsymbol{p})$ - per le quali valgono considerazioni del tutto simili alle precedenti circa la possibilità di rimpiazzare $C(\boldsymbol{p})$ con una di esse: in ogni caso, il prezzo da pagare affinché la condizione (b) del Teorema 3.3 sia automaticamente soddisfatta è una complicazione nel calcolo delle derivate parziali, perché i coefficienti normalizzati sono in generale funzioni razionali fratte invece che polinomi in p. Tale prezzo, sicuramente oneroso nel contesto di un'analisi automatizzata di circuiti di cospicue dimensioni, diviene invece conveniente laddove l'interesse sia rivolto, piuttosto, a un'analisi per ispezione di circuiti di dimensioni ridotte o alla ricerca di risultati teorici di carattere generale.

3.5.3 Il ruolo degli zeri a comune fra numeratori delle funzioni di rete e polinomio caratteristico

Si passi ora a considerare la condizione (a) del Teorema 3.3. Si vede facilmente che l'essere detta condizione soddisfatta o meno non dipende da un'operazione di normalizzazione quale quella discussa nel paragrafo precedente. Inoltre, la presenza di fattori simbolici a comune fra numeratore e denominatore delle funzioni di rete influenza fortemente la possibilità di rimpiazzare $C(\mathbf{p})$ con $\mathcal{M}_D(\mathbf{p})$ (e, in particolare, con $\hat{\mathcal{M}}_D^{(b_d)}(\mathbf{p})$ e $B_c(\mathbf{p})$ o, più in generale, con $\hat{\mathcal{M}}_D^{(\eta_r^{(i)}(\mathbf{p}))}(\mathbf{p})$ e $B_c^{(\eta_r^{(i)}(\mathbf{p}))}(\mathbf{p})$ sopra definite). Questo aspetto è chiarito dalla prossima proposizione.

Teorema 3.4

Sia $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_c^t \ \boldsymbol{p}_q^t \end{bmatrix}^t$ una partizione di \boldsymbol{p} e sia $g(\boldsymbol{p}_c, s)$ un fattore esplicitamente dipendente da \boldsymbol{p}_c ma indipendente da \boldsymbol{p}_q - a comune tra gli elementi dell'insieme $\{N_r(s, \boldsymbol{p})\}_{r=1}^n \cup \{\Delta(s, \boldsymbol{p})\}$ costituito da tutti i numeratori delle funzioni di rete e il polinomio caratteristico, di modo che si possa scrivere

$$\left\langle N_r(s, \boldsymbol{p}) = g(\boldsymbol{p}_c, s) \tilde{N}_r(s, \boldsymbol{p}_q) \right\rangle_{r=1}^n$$

$$\Delta(s, \boldsymbol{p}) = g(\boldsymbol{p}_c, s) \tilde{\Delta}(s, \boldsymbol{p}_q)$$
 (3.40)

con $\left\{\tilde{N}_{r}(s, \boldsymbol{p}_{q})\right\}_{r=1}^{n}$ e $\tilde{\Delta}(s, \boldsymbol{p}_{q})$ opportuni polinomi indipendenti da \boldsymbol{p}_{c} . Allora si ha max $rank\left[C(\boldsymbol{p})\right] \leq \max_{\boldsymbol{p}} rank\left[\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p})\right] - 1$.

La dimostrazione di tale proposizione è rimandata al Paragrafo 3.7.8; ci si limita qui ai commenti che seguono. Il precedente teorema afferma che se fra *tutti* i numeratori e il denominatore delle funzioni di rete esiste un fattore

a comune che contiene unicamente parametri che non compaiano altrove, allora max $rank \left[\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p}) \right]$ differirà inevitabilmente da max $rank \left[C(\boldsymbol{p}) \right]$. Si osservi che - se le ipotesi del teorema sono verificate per una certa generica espressione delle $\{h_r(s, p)\}_{r=1}^n$ - ciò risulterà in generale vero per ogni versione normalizzata delle stesse $\{\hat{h}_r(s, \boldsymbol{p})\}_{r=1}^n$, e quindi, in virtù del teorema allo studio, per qualunque scelta di $\eta_r^{(l)}(p)$, né $\hat{\mathcal{M}}_D^{(\eta_r^{(l)}(p))}(p)$ nè $B_{c}^{(\eta_{r}^{(l)}(p))}(p)$ (e in particolare $B_{c}(p)$) potranno rimpiazzare C(p) ai fini dell'analisi di testabilità, tanto a livello di circuito che a livello di componente. L'unica eccezione è costituita dal caso particolare in cui, per $le\{h_r(s, \boldsymbol{p})\}_{r=1}^n$ originarie, $g(\boldsymbol{p}_c, s)$ sia un Massimo Comun Divisore per gli elementi dell'insieme $\{N_r(s, \boldsymbol{p})\}_{r=1}^n \cup \{\Delta(s, \boldsymbol{p})\}$ e risulti al contempo $g(\mathbf{p}_{c},s) = \alpha(\mathbf{p}_{c})g(s) \operatorname{con} \alpha(\mathbf{p}_{c})$ indipendente da s e g(s) indipendente da p_c : difatti, è subito visto che, in tal caso, per ogni versione normalizzata $\{\hat{N}_r(s, \boldsymbol{p})\}_{r=1}^n \cup \{\hat{\Delta}(s, \boldsymbol{p})\}$ del suddetto insieme, i rispettivi elementi non avranno fattori simbolici a comune. Per studiare tale caso particolare, occorrono le proposizioni seguenti.

Teorema 3.5

Sia g(s) un fattore indipendente da p a comune tra gli elementi dell'insieme $\{N_r(s, p)\}_{r=1}^n \cup \{\Delta(s, p)\}$ di modo che si possa scrivere

$$\left\langle N_r(s, \boldsymbol{p}) = g(s) \tilde{N}_r(s, \boldsymbol{p}) \right\rangle_{r=1}^n$$

$$\Delta(s, \boldsymbol{p}) = g(s) \tilde{\Delta}(s, \boldsymbol{p})$$

$$(3.41)$$

con $\{\tilde{N}_r(s, \boldsymbol{p})\}_{r=1}^n \in \tilde{\Delta}(s, \boldsymbol{p})$ opportuni polinomi. Sia inoltre

$$\left\langle \tilde{h}_{r}(s,\boldsymbol{p}) = \tilde{N}_{r}(s,\boldsymbol{p}) / \tilde{\Delta}(s,\boldsymbol{p}) \right\rangle_{r=1}^{n}$$
 (3.42)

e siano $\tilde{C}(\boldsymbol{p})$ e $\tilde{\mathcal{M}}_{D}(\boldsymbol{p})$ le matrici corrispettive di $C(\boldsymbol{p}) \in \mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p})$ associate a detto insieme di funzioni di rete. Allora, ai fini dell'analisi di testabilità tanto a livello di circuito che di componente è lecito rimpiazzare C(p) con $\mathcal{M}_{D}(p)$ se e solo se lo è rimpiazzare $\tilde{C}(p)$ con $\tilde{\mathcal{M}}_{D}(p)$.

Teorema 3.6

Con riferimento alla matrice $\tilde{\mathcal{M}}_{D}(\boldsymbol{p})$ definite nell'enunciato del precedente Teorema 5, la condizione (b) del Teorema 3 è soddisfatta per $\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p})$ se e solo se lo è per $\tilde{\mathcal{M}}_{D}(\boldsymbol{p})$.

Il Teorema 3.5 – per la cui dimostrazione si rimanda al Paragrafo 3.7.8 dice in sostanza che l'esistenza di un fattore a comune fra i numeratori e il polinomio caratteristico che non dipenda (in senso stretto) da elementi di pnon ha alcuna influenza sulla possibilità di rimpiazzare C(p) con $\mathcal{M}_D(p)$ (o con matrici analoghe a quest'ultima quali $B_c(p)$). Utilizzando le medesime notazioni, si dimostra poi facilmente il Teorema 3.6. Una interessante conseguenza si ottiene combinando i risultati summenzionati: se è noto a priori che, per un certo k, il fattore comune g(s) menzionato nell'ipotesi del Teorema 5 è anche un Massimo Comun Divisore fra $N_k(s, p)$ e $\Delta(s, p)$, allora la condizione (a) del Teorema 5 è certamente soddisfatta per l'insieme $\langle \tilde{h}_r(s, p) \rangle_{r=1}^n$; è sufficiente allora, in virtù del Teorema 3.6, controllare che la condizione (b) sia, indifferentemente, soddisfatta per $\langle \tilde{h}_r(s, p) \rangle_{r=1}^n$ o per l'originario $\langle h_r(s, p) \rangle_{r=1}^n$ onde poter concludere che è lecito rimpiazzare C(p) con $\mathcal{M}_D(p)$.

Si consideri ora la situazione, già prospettata poc'anzi, in cui per $\langle h_r(s, \boldsymbol{p}) \rangle_{r-1}^n$ insieme il l'originario fattore comune sia $g(\mathbf{p}_{c},s) = \alpha(\mathbf{p}_{c})g(s)$ con $\alpha(\mathbf{p}_{c})$ indipendente da s e g(s) indipendente da \boldsymbol{p}_{c} . L'algoritmo che impiega $\hat{\mathcal{M}}_{D}^{(b_{d})}(\boldsymbol{p})$ implicitamente considera $\left\{\hat{h}_r(s, \boldsymbol{p})\right\}_{r=1}^n$ - ottenuto dall'insieme l'insieme originario ${h_r(s, \mathbf{p})}_{r=1}^n$ dividendo numeratore e denominatore di ciascun elemento per $b_d(\mathbf{p})$ - per il quale g(s) è un fattore comune. Ora, poiché la condizione (b) del Teorema 3 è certamente soddisfatta per l'insieme $\left\{\hat{h}_r(s, \boldsymbol{p})\right\}_{-1}^n$, lo è (come si deduce in virtù del Teorema 6 o, nel caso $\eta_r^{(l)}(\mathbf{p}) = b_d(\mathbf{p})$, anche con ragionamento diretto applicato al caso particolare) altresì per l'insieme $\{\tilde{h}_r(s, \boldsymbol{p})\}_{r=1}^n$ ottenuto dall'insieme $\{\hat{h}_r(s, \boldsymbol{p})\}_{r=1}^n$ dividendo numeratore e denominatore di ciascun elemento per g(s). Perciò, in forza delle precedenti considerazioni, se g(s) risulta un Massimo Comun Divisore per $h_l(s, \boldsymbol{p})$ allora $\hat{\mathcal{M}}_D^{(b_d)}(\boldsymbol{p})$, e quindi $B_c(\boldsymbol{p})$ (alla prima del tutto equivalente), possono essere certamente usate per l'analisi di testabilità tanto a livello di circuito che di componente. Si vede che le precedenti considerazioni possono essere riassunte nella seguente proposizione.

Corollario 3.3

Per i polinomi dell'insieme $\{N_r(s, \boldsymbol{p})\}_{r=1}^n \cup \{\Delta(s, \boldsymbol{p})\}$ non esistano zeri comuni dipendenti da \boldsymbol{p} . Allora la matrice $\hat{\mathcal{M}}_D^{(b_d)}(\boldsymbol{p})$ o la matrice $B_c(\boldsymbol{p})$ (o più in generale, le rispettive analoghe $\hat{\mathcal{M}}_D^{(\eta_r^{(l)}(\boldsymbol{p}))}(\boldsymbol{p})$ e $B_c^{(\eta_r^{(l)}(\boldsymbol{p}))}(\boldsymbol{p})$ per un generico $\eta_r^{(l)}(\boldsymbol{p})$) possono essere impiegate in luogo di $C(\boldsymbol{p})$ per l'analisi di testabilità sia a livello di circuito che di componente.

3.6 Esempi

3.6.1 Esempio 1



Fig. 3.2 – Circuito predisposto per l'analisi di testabilità.

Quale primo esempio, si consideri il semplice circuito rappresentato in Fig. 3.2, ove l'Amplificatore Operazionale (AO) è supposto ideale (impedenza d'ingresso infinita, impedenza d'uscita nulla, guadagno infinito). Si

assumano inizialmente i parametri R, L, e C come potenzialmente difettosi (o, semplicemente, incogniti) e il parametro R_{kn} come noto e fissato al suo valore nominale $R_{kn,0}$: in tale situazione si ha evidentemente $p = [R L C]^t$. Inoltre, sia la tensione v_1 , indicata in figura, la sola variabile d'ingresso x_1 , mentre la tensione v_R e la corrente i_L ancora indicate nella medesima figura siano assunte come le variabili d'uscita y_1 e y_2 relative ai punti di misura indicati. Il software SapWin porge le seguenti espressioni per le relative funzioni di rete

$$h_{1}(s, \boldsymbol{p}) = \frac{y_{1}}{x_{1}} = \frac{v_{R}}{v_{1}} = \frac{R_{kn,0}RCs + LRCs^{2}}{R_{kn,0}RC + L)s + LRCs^{2}}$$

$$h_{2}(s, \boldsymbol{p}) = \frac{y_{2}}{x_{1}} = \frac{i_{L}}{v_{1}} = \frac{RCs}{R_{kn,0} + (R_{kn,0}RC + L)s + LRCs^{2}}$$
(3.43)

Dal confronto fra (3.43) e (3.25), (3.16), (3.17) si trova subito

$$b(p) = [b_0(p) \ b_1(p) \ b_2(p)]^t$$

$$= [R_{kn,0} \ (R_{kn,0}RC + L) \ LRC]^t,$$

$$a_1(p) = [a_1^{(0)}(p) \ a_1^{(1)}(p) \ a_1^{(2)}(p)]^t$$

$$= [0 \ R_{kn,0}RC \ LRC]^t,$$

$$a_2(p) = [a_2^{(0)}(p) \ a_2^{(1)}(p) \ a_2^{(2)}(p)]^t$$

$$= [0 \ RC \ 0]^t$$
(3.44)

Inserendo le (3.44) in (3.29), (3.32) si trovano le matrici $\mathcal{F}(\mathbf{p}) \in \mathcal{M}_D(\mathbf{p})$ mostrate in Fig. 3.3(a) e 3.3(b) rispettivamente; da queste, attraverso la (3.31) si ottiene la matrice $C(\mathbf{p})$ mostrata in Fig. 3.3(c). Si osserva che, poiché $b_0 = R_{kn,0}$ non dipende da \mathbf{p} , la condizione (b) del Teorema 3.3 è certamente soddisfatta sia per $h_1(s, \mathbf{p})$ che per $h_2(s, \mathbf{p})$; d'altra parte, la condizione (a) dello stesso teorema è soddisfatta solo per $h_2(s, \mathbf{p})$, dal momento che, a causa della presenza del buffer ideale, il numeratore e il denominatore di $h_1(s, \mathbf{p})$ hanno il fattore $(R_{kn} + Ls)$ a comune.



Fig. 3.3 - Varie matrici pertinenti all'analisi di testabilità del circuito di Fig. 3.2.

Nondimeno, poiché l'ipotesi di tale teorema richiede che dette condizioni siano soddisfatte per almeno una delle funzioni di rete in gioco, il teorema può applicarsi nel caso in esame, il che implica che le due matrici $\mathcal{M}_{D}(p)$ and C(p) devono fornire i medesimi risultati quando impiegate per l'analisi di testabilità tanto a livello di circuito che di componente. Difatti, per entrambe tali matrici tanto gli elementi dell'insieme { prima colonna, seconda colonna} quanto gli elementi dell'insieme {seconda colonna, terza colonna} risultano linearmente indipendenti, mentre gli elementi dell'insieme { prima colonna, terza colonna } sono linearmente dipendenti, come si verifica immediatamente assegnando (in accordo al Teorema 3.2 e al Corollario 3.1) un valore (quasi) arbitrario a $p = [R L C]^{t}$, quale $p^* = [111]^t$. I precedenti risultati implicano che la Testabilità del circuito è pari a $T = rank \left[C(\boldsymbol{p}^*) \right] = rank \left[\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}^*) \right] = 2$ cui corrisponde una Rapporto di Testabilità $\rho = 100T/n_p \% = 66.67\%$; da entrambe le matrici si desume poi che $\{C, L\} \in \{R, L\}$ sono i gruppi testabili, mentre $\{R, C\}$ è (l'unico) gruppo di ambiguità canonico. Ai medesimi risultati si perviene utilizzando la matrice $B_c(p)$ - mostrata in Fig. 3.3(d) e costruita in accordo con la (3.26), in cui tuttavia i vettori $a_1(p)$, $a_2(p)$, e $\tilde{b}(p)$ devono considerarsi normalizzati rispetto a $b_2(p)$ - o anche matrici analoghe ottenute a partire da una certa $\hat{\mathcal{M}}_D^{(\eta_r^{(l)}(p))}(p)$ eliminandone la riga nulla, come descritto nel Paragrafo 3.5.2.

Invece, se $y_1 = v_R$ è assunta come la sola variabile d'uscita, ricordando le (3.32)-(3.33) si vede che ora $\mathcal{M}_{D}(p) \equiv \mathcal{M}_{D,1}(p)$ coincide con la matrice rappresentata in Fig. 3.3(b) non appena, in detta figura, la sottomatrice centrale sia avulsa. In virtù della (3.26), si vede che la corrispondente $B_{c}(p)$ può essere ottenuta dalla matrice in Fig. 3.3(d) per mezzo di un'operazione analoga. Infine, in forza della (3.34) si vede che, nella fattispecie, la matrice $C(\mathbf{p})$ si ottiene dalla matrice in Fig. 3.3(c) eliminando la sottomatrice inferiore. Come è sempre vero, l'analisi di testabilità condotta impiegando C(p) conduce a risultati corretti: nella fattispecie si ha $T = rank \left[C(\mathbf{p}) \right] = 1$ e $\rho = 100T/n_p \% = 33.33\%$; a livello di componente si trovano i gruppi testabili $\{R\}, \{L\}, \{C\}$ e i gruppi canonici di ambiguità $\{R, C\}, \{R, L\}, \{C, L\}$. Invece, l'impiego di $\mathcal{M}_{D}(p)$ or $B_{c}(p)$ conduce, nel caso in esame, a risultati scorretti, sia a livello di circuito - avendosi $T = rank \left[\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p}) \right] = rank \left[B_{c}(\boldsymbol{p}) \right] = 2$ - che a livello di componente – trovandosi $\{C, L\}$ e $\{R, L\}$ quali gruppi testabili e $\{R, C\}$ quale unico gruppo di ambiguità: infatti, tanto per $\mathcal{M}_{D}(p)$ che per $B_{c}(p)$ gli elementi {*prima colonna, terza colonna*} risultano dell'insieme linearmente dipendenti sia elementi dell'insieme mentre gli { prima colonna, seconda colonna} che gli elementi dell'insieme {seconda colonna, terza colonna} sono linearmente indipendenti. Tale difformità di risultati, dovuta alla presenza del summenzionato fattore a comune fra il numeratore e il denominatore di $h_1(s, \mathbf{p})$, è in accordo col Teorema 4.

Inoltre, con la stessa scelta dell'ingresso e dell'uscita del caso precedente, se anche il parametro *L* è assunto noto e fissato al suo valore nominale L_0 (cosicché è ora $p = [R C]^t$), le matrici $C(p), \mathcal{M}_D(p) \equiv \mathcal{M}_{D,1}(p)$, e $B_c(p)$ risultano coincidere con le rispettive omonime del caso precedente non

appena in ciascuna di quest'ultime si cancelli la colonna relativa a L (ossia la seconda). E' subito visto che l'analisi di testabilità che impieghi $\mathcal{M}_{D}(p) \equiv \mathcal{M}_{D1}(p)$ o $B_{c}(p)$ fornisce nuovamente gli stessi (corretti) $C(\mathbf{p}),$ risultati di vale dire: a $T = rank \left\lceil \mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p}) \right\rceil = rank \left\lceil B_{c}(\boldsymbol{p}) \right\rceil = rank \left\lceil C(\boldsymbol{p}) \right\rceil = 1 \text{ e } \rho = 100T/n_{p} \% = 50\%,$ cui corrispondono i gruppi testabili $\{R\}$ e $\{C\}$ e il gruppo canonico di ambiguità $\{R, C\}$. Questo fatto poteva essere previsto a priori impiegando le considerazioni a commento del Teorema 3.5: difatti - come è subito visto per ispezione in Fig. 3.2 – il fattore $(R_{kn,0} + L_0 s)$, che non dipende da $p = [R C]^{t}$, è un Massimo Comun Divisore fra numeratore e denominatore di $h_1(s, p) = \left[R_{kn,0}RCs + L_0RCs^2 \right] / \left[R_{kn,0} + (R_{kn,0}RC + L_0)s + L_0RCs^2 \right]$ e per quest'ultima, ovviamente la condizione (b) del Teorema 3.3 continua ad essere soddisfatta.

3.6.2 Esempio 2

In relazione al circuito mostrato in Fig. 3.4, vogliamo ora confrontare i risultati forniti dall'analisi di testabilità basata sulla matrice $B_c(p)$ data dalla (3.26) con quelli – sempre corretti – forniti dal nuovo algoritmo descritto nel paragrafo precedente, al variare del vettore dei parametri incogniti e dei punti di misura considerati. Si suppongano gli amplificatori operazionali ideali (impedenza d'ingresso infinita, impedenza d'uscita nulla, guadagno infinito) e per il BJT si assuma un modello semplificato a parametri ibridi a emettitore comune comprendente i soli parametri h_{ie} e h_{fe} . Si assuma inoltre la tensione v_{in} mostrata nella medesima Fig. 3.4 quale unico punto di iniezione.

a) Si consideri dapprima il caso in cui l'insieme dei punti di misura sia rappresentato dalle tensioni $\{v_1, v_2\}$ indicate in Fig. 3.4 e il vettore pdei parametri considerati potenzialmente difettosi sia $p = [L_1 C_1 R_1 R_2 C_2 R_3]^t$; i parametri che non compaiono in p sono invece supposti noti e fissati ai rispettivi valori nominali. Applicando il Teorema 4 si può subito concludere per ispezione che il software TAGA – che implementa un algoritmo per l'analisi di testabilità basato sulla matrice $B_c(p)$ data dalla (3.26) – fornirà risultati scorretti, sia a livello di circuito che di componente: difatti i numeratori delle funzioni di rete relative ai punti di misura considerati e il polinomio caratteristico forniti da SapWin hanno a comune zeri (e quindi fattori) dipendenti da p (fra i quali, $s = -1/(R_3C_2)$. In effetti TAGA fornisce i seguenti valori: $T_{TAGA} = 4$, $\rho_{TAGA} = 66.66\%$, $n_{CAG,TAGA} = 2$, $n_{TG,TAGA} = 8$ mentre i risultati corretti, forniti dal nuovo software TALIC, risultano $T_{TALIC} = 3$, $\rho_{TALIC} = 37.5\%$. $n_{CAG,TALIC} = 8$, $n_{TG,TALIC} = 4$.



Fig. 3.4 – Circuito relativo all'analisi di testabilità dell'esempio 2.

b) Si includa ora la tensione v_3 mostrata in Fig. 3.4 nell'insieme dei punti di misura, che ora diviene $\{v_1, v_2, v_3\}$. Allo stesso tempo, si includa l'ulteriore parametro R_4 nell'insieme dei parametri potenzialmente difettosi, che diventa quindi $\boldsymbol{p} = [L_1 C_1 R_1 R_2 C_2 R_3 R_4]^t$. Di nuovo, considerazioni intuitive basate sulla diretta osservazione del circuito unite al Teorema 4, fanno prevedere che TAGA fornirà risultati scorretti: difatti i numeratori delle tre funzioni di rete in gioco e il polinomio caratteristico forniti da SapWin hanno a comune zeri dipendenti da *p* (per la precisione. da R_{4}). In effetti TAGA dà : $T_{TAGA} = 5$, $\rho_{TAGA} = 71.43\%$, $n_{CAG,TAGA} = 2$, $n_{TG,TAGA} = 8$ mentre i risultati corretti, forniti dal nuovo software TALIC, risultano $T_{TALIC} = 4$, $\rho_{TALIC} = 57.15\%$. $n_{CAG,TALIC} = 8$, $n_{TG,TALIC} = 8$ (ovviamente, pur avendosi $n_{TG,TALIC} = n_{TG,TAGA}$ i gruppi testabili rilevati dai due software risultano diversi)

- c) Mantenendo lo stesso insieme di punti di misura, si includano in p L_2 , di modo che $p = [L_1 C_1 R_1 R_2 C_2 R_3 R_4 L_2]^t$. Le anche medesime considerazioni intuitive unite al Teorema 4 fanno prevedere che TALIC fornirà ancora una volta risultati non corretti. In effetti ora l'errore è maggiore che nel caso precedente, avendosi $T_{TAGA} = 6$, $\rho_{TAGA} = 75\%$, $n_{CAG,TAGA} = 2$, $n_{TG,TAGA} = 8$, mentre i risultati corretti. forniti dal nuovo software TALIC. risultano $T_{TALIC} = 4$, $\rho_{TALIC} = 50\%$. $n_{CAG,TALIC} = 14$, $n_{TG,TALIC} = 8$ (ovviamente, pur avendosi $n_{TG,TALIC} = n_{TG,TAGA}$ i gruppi testabili rilevati dai due software risultano diversi).
- Si mantenga ancora il set di punti di misura $\{v_1, v_2, v_3\}$, ma si ritorni d) nuovamente a $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} L_1 & C_1 & R_1 & R_2 & C_2 & R_3 \end{bmatrix}^t$. Nuovamente per ispezione diretta e invocando il Corollario 3, si può prevedere che nello scenario allo studio, TAGA fornirà risultati corretti. Difatti i numeratori delle tre funzioni di rete e il polinomio caratteristico hanno ora a comune un fattore che non ammette zeri dipendenti da p e che è un Massimo Comun Divisore fra il numeratore di $h_3(s, p)$ (funzione di rete pertinente al punto di misura v_3) e il polinomio caratteristico. Si trova in effetti $T_{TAGA} = T_{TALIC} = 4$, $\rho_{TAGA} = \rho_{TALIC} = 66.67\%$, i medesimi con GAC $(n_{CAG,TALIC} = n_{CAG,TAGA} = 2)$ e GT $(n_{TG,TALIC} = n_{TG,TAGA} = 8)$.
- e) Ancora considerando $\{v_1, v_2, v_3\}$ come l'insieme dei punti di misura, si includano gli ulteriori parametri L_3 e C_4 in p, di modo che ora $p = [L_1 C_1 R_1 R_2 C_2 R_3 L_3 C_4]^t$. Di nuovo ricorrendo a considerazioni intuitive basate sulla diretta osservazione, si può prevedere che TAGA fornirà ancora risultati corretti: difatti si rileva immediatamente che i detti parametri, pur entrando ora a far parte di p, non introducono zeri simbolici (precisamente, ciascuno contribuisce con un zero nell'origine) nel fattore a comune fra i numeratori delle funzioni di rete in gioco e il polinomio, fattore a comune che è subito visto rimanere un Massimo Comun Divisore per

 $h_3(s, \boldsymbol{p})$. In effetti TAGA e TALIC danno $T_{TAGA} = T_{TALIC} = 4$, $\rho_{TAGA} = \rho_{TALIC} = 50\%$, con i medesimi CAG ($n_{CAG,TALIC} = n_{CAG,TAGA} = 14$) e TG. ($n_{TG,TALIC} = n_{TG,TAGA} = 8$).

f) Sempre con $\{v_1, v_2, v_3\}$ si includano in p anche R_6 , R_7 ed h_{ie} di modo che sia ora $p = [L_1 C_1 R_1 R_2 C_2 R_3 L_3 C_4 R_6 R_7 h_{ie}]^t$. Si vede che possono ripetersi le considerazioni del punto precedente, perché i nuovi parametri introdotti in p non alterano il valore degli zeri del fattore comune ivi menzionato, che rimangono indipendenti da p stesso. Si trova infatti $T_{TAGA} = T_{TALIC} = 4$, $\rho_{TAGA} = \rho_{TALIC} = 36.36\%$, con i medesimi CAG ($n_{CAG,TALIC} = n_{CAG,TAGA} = 36$) e TG. ($n_{TG,TALIC} = n_{TG,TAGA} = 9$).

3.6.3 Esempio 3

Per un ulteriore esempio di applicazione del nuovo algoritmo, si consideri lo stadio differenziale mostrato in Fig. 3.5, in cui per i BJT si assume ancora un modello semplificato a parametri ibridi ad emettitore comune comprendente i soli parametri h_{ie} and h_{fe} (non mostrati esplicitamente).



Fig. 3.5 – Circuito relativo all'analisi di testabilità dell'esempio 3.

Si assumano come potenzialmente difettosi le resistenze indicate con simboli in figura e i parametri dei BJT, mentre le capacità e le due resistenze relative alle terminazioni di sorgente e carico siano assunte note e fissate ai rispettivi valori nominali, come indicato in Fig. 3.5: è quindi $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} h_{fe1} & h_{ie1} & h_{fe2} & h_{ie2} & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_C & R_E \end{bmatrix}^t$. Nella stessa figura sono anche indicate le variabili relative ai punti di misura - vale a dire le tensioni v_{out} e v_E e la corrente i_C – e la variabile relativa all'unico punto di iniezione, vale a dire la tensione d'ingresso v_{in} . TALIC porge: T = 8, $\rho = 80\%$, $n_{CAG,TALIC} = 2$, $n_{TG,TALIC} = 4$.

3.7.10Esempio 4



Fig. 3.6 – (a) Circuito allo studio, (b) Risultati dell'analisi di testabilità forniti da
 TALIC nel caso che gli AO siano modellati come nullori, e (c) lo stesso che in (b) ma con gli AO modellati con guadagno finito a singolo polo.

Quale esempio finale di applicazione dell'algoritmo presentato, si consideri il circuito mostrato in Fig. 3.6(a), che realizza un filtro passa-basso del terzo ordine per mezzo della tecnica di sostituzione dei blocchi applicata a una

rete passiva LC a scala comprendente le terminazioni di sorgente e carico: qui si assumono come potenzialmente difettosi i dieci parametri indicati con simboli e, come variabili relative ai punti di misura, le tensioni v_1 , v_2 , e v_3 , anch'esse indicate in Fig. 3.6(a). Le resistenze residue sono supposte note e fissate ai rispettivi valori nominali, mentre gli AO sono, in un primo momento, supposti ideali, ossia modellati come nullori. In tale situazione, TALIC dà i seguenti risultati relativi all'analisi di testabilità: T = 7, $\rho = 70\%$, $n_{CAG} = 3$, $n_{TG} = 36$, come rappresentato in Fig. 3.6(b). Per contro - se per gli AO si assume, in luogo di quello menzionato dianzi, un modello caratterizzato da impedenza d'ingresso infinita, impedenza d'uscita nulla e guadagno ad anello aperto $A_{\alpha}\alpha/(s+\alpha)$ potenzialmente difettoso - allora il numero totale degli elementi di p sale a 20 e, per la medesima scelta dei punti di misura, TALIC porge ora: T = 13, $\rho = 65\%$, $n_{CAG} = 27$, $n_{TG} = 9100$ (Fig. 3.6(c)). Questo esempio mostra chiaramente come – nonostante l'indice di T sia di cruciale importanza, indicando il numero massimo di parametri per i quali si possa simultaneamente fornire una diagnosi univoca - esso rischi di essere fuorviante se usato come misura assoluta di testabilità. Difatti, qualunque scelta si decida di fare in tal senso, essa non può non soddisfare le esigenze dell'intuizione, secondo la quale - a parità di punti di prelievo – la misura di testabilità deve essere una funzione non crescente del numero dei parametri incogniti, caratteristica, questa, esibita da ρ piuttosto che da T.

3.7 Dimostrazioni

Questa sezione è interamente dedicata alle dimostrazioni dei risultati presentati in quelle precedenti. Quale passo preliminare alla dimostrazione del Teorema 3.1, si enuncerà e dimostrerà il lemma che segue.

3.7.1 Lemma 3.1

Enunciato

Sia $F(s) = row [f_i(s)]_{i=1}^n$ una matrice di *n* vettori colonna linearmente indipendenti $\langle f_i(s) = col [f_{ji}(s)]_{j=1}^k \rangle_{i=1}^n$ i cui elementi sono funzioni razionali della variabile complessa *s*. Allora esiste un insieme di *n* valori distinti $S = \{s_l\}_{l=1}^n$ tali che la matrice
$$col\left[F\left(s_{l}\right)\right]_{l=1}^{n} = col\left[row\left[f_{i}\left(s_{l}\right)\right]_{i=1}^{n}\right]_{l=1}^{n}$$
(3.45)

abbia rango pari a n.

Dimostrazione

Si proverà la tesi per induzione su *n*.

Per n=1, in forza della supposta lineare indipendenza, $f_1(s)$ non può essere identicamente nullo: deve perciò esistere un s_1 tale che $f_1(s_1) \neq 0$. Si supponga ora la tesi vera per n=k; si mostrerà che essa è vera altresì per n=k+1.

Difatti, se la tesi è vera per n = k, deve esistere un insieme di k valori distinti $S_k = \{s_l\}_{l=1}^k$ tali che la matrice

$$\mathcal{F}_{k} = col \left[row \left[f_{i}(s_{l}) \right]_{i=1}^{k} \right]_{l=1}^{k}$$
(3.46)

abbia rango pari a k. Per assurdo, si supponga la tesi falsa per n = k+1: ciò equivale ad assumere che i vettori $\{f_i(s)\}_{i=1}^{k+1}$ siano linearmente indipendenti e, al tempo stesso, la matrice

$$\mathcal{F}_{k+1}(s) = \begin{bmatrix} col \left[row \left[f_i(s_l) \right]_{i=1}^{k+1} \right]_{l=1}^{k} \\ row \left[f_i(s) \right]_{i=1}^{k+1} \end{bmatrix}$$
(3.47)

abbia rango minore di k+1 per ogni valore di s. Ciò vuol dire che, comunque si scelga s, si può trovare, in corrispondenza, un vettore $z(s) = col[z_i(s)]_{i=1}^{k+1} \neq 0$ tale che

$$\mathcal{F}_{k+1}(s)\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{0} \tag{3.48}$$

Segue allora che deve aversi $z_{k+1}(s) \neq 0$; altrimenti – dovendo comunque essere $z(s) \neq 0$ - dal confronto fra (3.48), (3.47) e (3.46) seguirebbe che esiste un vettore $z'(s) = col[z_i(s)]_{i=1}^k \neq 0$ tale che $\mathcal{F}_k z'(s) = 0$, contro il fatto che \mathcal{F}_k ha rango pieno. Per la linearità di (3.48), si può inoltre supporte che sia $z_{k+1}(s) = 1$. Siano ora $s_a e s_b$ due valori distinti di s; in base a quanto sopra concluso, esistono, in corrispondenza, vettori $z(s_a) = \begin{bmatrix} z'(s_a)^t & 1 \end{bmatrix}^t e$ $z(s_b) = \begin{bmatrix} z'(s_b)^t & 1 \end{bmatrix}^t$ tali che

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{k+1}(s_a)\boldsymbol{z}(s_a) = \boldsymbol{0} \\ \mathcal{F}_{k+1}(s_a)\boldsymbol{z}(s_a) = \boldsymbol{0} \end{cases}$$
(3.49)

Dal confronto fra (3.49), (3.47) e (3.46) segue allora

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{k}\boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{s}_{a}\right) + col\left[\boldsymbol{f}_{k+1}\left(\boldsymbol{s}_{l}\right)\right]_{l=1}^{k} = \boldsymbol{0} \\ \mathcal{F}_{k}\boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{s}_{a}\right) + col\left[\boldsymbol{f}_{k+1}\left(\boldsymbol{s}_{l}\right)\right]_{l=1}^{k} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$
(3.50)

Sottraendo le (3.50) si ottiene allora

$$\mathcal{F}_{k}\left(\boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{s}_{a}\right)-\boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{s}_{b}\right)\right)=\boldsymbol{0} \tag{3.51}$$

ma, dal momento che \mathcal{F}_k ha rango pieno, dalla (3.51) segue necessariamente

$$\boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{s}_{a}\right) = \boldsymbol{z}\left(\boldsymbol{s}_{b}\right) \tag{3.52}$$

Mettendo assieme la (3.48) e la (3.52) si conclude allora che esiste un vettore $z = \begin{bmatrix} row[z_i]_{i=1}^k & 1 \end{bmatrix}^t$ non nullo e indipendente da s tale che

$$\mathcal{F}_{k+1}(s)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \tag{3.53}$$

Confrontando la (3.53) e la (3.47) si ha in particolare

$$\sum_{n=1}^{k} z_i f_i(s) + f_{k+1}(s) = 0$$
(3.54)

contro la supposta lineare indipendenza delle funzioni vettoriali $\{f_i(s)\}_{i=1}^n$.

3.7.2 Dimostrazione del Teorema 3.1

Sia $colrank [\Phi(s, p_0)] = r$: allora, senza perdita di generalità, si può scrivere $\Phi(s, p_0) = [\Phi_{ind}(s, p_0) \quad \Phi_{dep}(s, p_0)]$, ove le *r* colonne della sottomatrice $\Phi_{ind}(s, p_0) = row [\varphi_j(s, p_0)]_{j=1}^r$ sono linearmente indipendenti, mentre ciascuna colonna della sottomatrice $\Phi_{dep}(s, \mathbf{p}_0) = row [\boldsymbol{\varphi}_j(s, \mathbf{p}_0)]_{j=r+1}^{n_p}$ è combinazione lineare di quelle.

Sia

$$\sigma = \left\{s_i\right\}_{i=1}^{n_m} \tag{3.55}$$

un insieme *generico* di frequenze di misura (senza vincoli, quindi, sul loro numero n_m o il loro valore): si mostrerà che

$$rank \left[\boldsymbol{\Phi}_{\sigma} \left(\boldsymbol{p}_{0} \right) \right] \leq r \tag{3.56}$$

Difatti, confrontando la (3.13) con le notazioni sopra introdotte, si ha

$$\mathcal{\Phi}_{\sigma}(\boldsymbol{p}_{0}) = \left[\mathcal{\Phi}(\boldsymbol{s}_{i},\boldsymbol{p}_{0})\right]_{i=1}^{n_{m}} = \left[\mathcal{\Phi}_{ind}(\boldsymbol{s}_{i},\boldsymbol{p}_{0}) \quad \mathcal{\Phi}_{dep}(\boldsymbol{s}_{i},\boldsymbol{p}_{0})\right]_{i=1}^{n_{m}}$$

$$= \left[\mathcal{\Phi}_{\sigma,ind}(\boldsymbol{p}_{0}) \quad \mathcal{\Phi}_{\sigma,dep}(\boldsymbol{p}_{0})\right]$$
(3.57)

ove $\Phi_{\sigma,ind[dep]}(p_0) = \left[\Phi_{ind[dep]}(s_i, p_0)\right]_{i=1}^{n_m}$. Ora - poiché ciascuna colonna di $\Phi_{dep}(s, p_0)$ è combinazione lineare delle colonne di $\Phi_{ind}(s, p_0)$ - per ogni m con $r+1 \le m \le n_p$, deve esistere un insieme di scalari $\left\{\alpha_l^{(m)}\right\}_{l=1}^r$ tali che

$$\boldsymbol{\varphi}_{m}(s) = \sum_{l=1}^{r} \alpha_{l}^{(m)} \boldsymbol{\varphi}_{l}(s)$$
(3.58)

Campionando la (3.58) in corrispondenza degli elementi dell'insieme (3.55) si trova

$$col\left[\boldsymbol{\varphi}_{m}(s_{i})\right]_{i=1}^{n_{m}} = \sum_{l=1}^{r} \alpha_{l}^{(m)} col\left[\boldsymbol{\varphi}_{l}(s_{i})\right]_{i=1}^{n_{m}}$$
(3.59)

Alla luce delle notazioni introdotte più sopra, la (3.59) mostra che la generica colonna di $\Phi_{\sigma,dep}(\boldsymbol{p}_0)$ è combinazione lineare delle colonne di $\Phi_{\sigma,ind}(\boldsymbol{p}_0)$. Segue, quindi, che $rank[\Phi_{\sigma}(\boldsymbol{p}_0)] = rank[\Phi_{\sigma,ind}(\boldsymbol{p}_0)]$ e - poiché $\Phi_{\sigma,ind}(\boldsymbol{p}_0)$ ha *r* colonne – si perviene infine alla (3.56) e la parte (a) della tesi è provata.

Ora, applicando il precedente Lemma 3.1 a $\Phi_{ind}(s, \mathbf{p}_0)$, si ottiene che deve esistere un insieme $\overline{\sigma} = \{\overline{s}_i\}_{i=1}^r$ di r frequenze tali che $rank[\Phi_{\overline{\sigma},ind}(\mathbf{p}_0)] = rank[col[\Phi_{ind}(\overline{s}_i, \mathbf{p}_0)]_{i=1}^r] = r$ e, poiché $\Phi_{\overline{\sigma},ind}(\mathbf{p}_0)$ è una sottomatrice di $\Phi_{\bar{\sigma}}(\boldsymbol{p}_0)$, deve necessariamente aversi $rank[\Phi_{\bar{\sigma}}(\boldsymbol{p}_0)] \ge r$. D'altro canto in forza della (3.56), si ha anche $rank[\Phi_{\bar{\sigma}}(\boldsymbol{p}_0)] \le r$ e quindi, infine

$$rank \left[\boldsymbol{\Phi}_{\bar{\sigma}} \left(\boldsymbol{p}_0 \right) \right] = r \tag{3.60}$$

Per completare la dimostrazione occorre provare che $rank[\Phi_{\sigma}(\mathbf{p}_0)] = r$ per *quasi* ogni scelta di un insieme $\sigma = \{s_i\}_{i=1}^r$ di r frequenze di misura. Difatti, in forza della (3.60), deve esistere in $\Phi_{\sigma}(\mathbf{p}_0)$ un minore di ordine r $M(s_1, s_2, ..., s_r)$ tale che $M(\overline{s_1}, \overline{s_2}, ..., \overline{s_r}) \neq 0$. Quest'ultima relazione mostra che $M(s_1, s_2, ..., s_r)$ non è identicamente nullo; inoltre - essendo gli elementi di $\Phi_{\sigma}(\mathbf{p}_0)$ funzioni razionali delle variabili $s_1, s_2, ..., s_r$ - tale è anche $M(s_1, s_2, ..., s_r)$. In quanto funzione razionale delle sue variabili, $M(s_1, s_2, ..., s_r)$ si annulla in corrispondenza delle soluzioni di un'equazione polinomiale in dette variabili: può quindi, al più, risultare $rank[\Phi_{\sigma}(\mathbf{p}_0)] < r$ per valori di $s_1, s_2, ..., s_r$ appartenenti a una varietà algebrica (ossia, lo spazio delle soluzioni di un sistema di equazioni polinomiali nelle suddette variabili). La prova è così completa.

3.7.3 Dimostrazione del Teorema 3.2

Per quanto visto nei Paragrafi 3.3.2 e 3.3.3, si ha

$$\forall \boldsymbol{p}(colrank[\boldsymbol{\Phi}(s,\boldsymbol{p})] = rank[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p})])$$
(3.61)

Ora, fissato p, C(p) è una matrice numerica con n_p colonne: perciò, qualunque sia p, deve aversi $1 \le rank[C(p)] \le n_p$. Sia p^* tale che $rank[C(p^*)] = \max_p rank[C(p)] = \rho$: ciò vuol dire che esiste in C(p) un minore M(p) di ordine ρ tale che

$$M\left(\boldsymbol{p}^{*}\right) \neq 0 \tag{3.62}$$

Poiché gli elementi di C(p) sono funzioni razionali delle componenti di p, tale è, a sua volta, M(p): perciò, dal momento che, in forza della (3.62),

M(p) non è identicamente nullo, esso si annulla solo in corrispondenza delle soluzioni di un'equazione polinomiale nelle componenti di p.

Ne deriva che si avrà

$$rank[C(\boldsymbol{p})] = \max_{\boldsymbol{q}} rank[C(\boldsymbol{q})] = \rho$$
(3.63)

per tutti i valori di p, eccettuati, al più, quelli appartenenti a una varietà algebrica; la tesi segue allora immediatamente dal confronto fra (3.63) e (3.61).

3.7.4 Dimostrazione del Corollario 3.1

Senza ledere la generalità, si può assumere $k_i = i$, ossia che l'insieme allo studio sia costituito dalle prime *r* colonne di $\Phi(s, p)$.

Allora, ricalcando gli argomenti dei Paragrafi 3.3.2 e 3.3.3, si conclude che studiare la lineare dipendenza degli elementi dell'insieme $\{\varphi_l(s, p)\}_{l=1}^r$ equivale a studiare la lineare dipendenza delle colonne della matrice $C_{sub}(p) = [c_l(p)]_{l=1}^r$.

Ora, se esiste qualche p^* tale che $rank \left[C_{sub}(p^*) \right] = r$ (vale a dire, gli elementi dell'insieme $\left\{ c_l(p^*) \right\}_{l=1}^r$ sono linearmente indipendenti), ricalcando le argomentazioni del precedente Paragrafo 3.7.3, si ottiene che ciò deve valere per *quasi* ogni p. Se, invece, una tale p^* non esiste, allora gli elementi di $\left\{ c_l(p) \right\}_{l=1}^r$ sono linearmente dipendenti per ogni p. Ciò completa la dimostrazione.

3.7.5 Lemma 3.2

Enunciato

Sia $\mathcal{F}^{(r)}(\boldsymbol{p}) = \left[\mathcal{B}(\boldsymbol{p}) \mid -\mathcal{A}^{(r)}(\boldsymbol{p})\right]$ la matrice definita in (3.29) in relazione alla generica funzione di rete $h_r(s, \boldsymbol{p}) = N_r(s, \boldsymbol{p})/\Delta(s, \boldsymbol{p})$, con

$$N_r(s,\boldsymbol{p}) = \sum_{k=0}^{N} a_k^{(r)}(\boldsymbol{p}) s^k, \ \Delta(s,\boldsymbol{p}) = \sum_{j=0}^{N} b_j(\boldsymbol{p}) s^j$$
(3.64)

Sia, inoltre, per *quasi* ogni
$$p$$
, $g^{(r)}(s, p)$ il Massimo Comun Divisore Monico
(MCDM) fra i polinomi $N_r(s, p) = g^{(r)}(s, p)\tilde{N}_r(s, p)$ e
 $\Delta(s, p) = g^{(r)}(s, p)\tilde{\Delta}_r(s, p)$, con deg $\left[g^{(r)}(s, p)\right] = G^{(r)}$ ($0 \le G^{(r)} \le N$).
Sia, ancora, $g^{(r)}(s, p) = \left(\prod_{k=1}^{\rho} (s - s_k)\right) \left(\prod_{h=\rho+1}^{G^{(r)}} (s - s_h)\right)$, ove gli elementi di
 $\{s_i\}_{i=1}^{\rho}$ sono numeri reali² mentre gli elementi di $\{s_j\}_{j=\rho+1}^{G^{(r)}}$ sono numeri
complessi (a parte immaginaria non nulla)³ e, per $1 \le k \le (G^{(r)} - \rho)/2$,
 $s_{\rho+2k} = \hat{s}_{\rho+2k-1}^4$. Si considerino, inoltre, i polinomi (a coefficienti reali)
definiti da

$$\begin{cases} g_{i}^{(r)}(s,\boldsymbol{p}) = \\ \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ \prod_{k=1}^{i} (s-s_{k}) & \text{se } 1 \le i \le \rho \text{ o } (i-\rho) \text{ è un intero positivi pari} \\ (s-\operatorname{Re}[s_{i}]) \prod_{k=1}^{i-1} (s-s_{k}) & \text{se } (i-\rho) \text{ è un intero positivo dispari} \\ \alpha_{i}^{(r)}(s,\boldsymbol{p}) = g_{i}^{(r)}(s,\boldsymbol{p}) \tilde{N}_{r}(s,\boldsymbol{p}) \\ \beta_{i}^{(r)}(s,\boldsymbol{p}) = g_{i}^{(r)}(s,\boldsymbol{p}) \tilde{\Delta}_{r}(s,\boldsymbol{p}) \end{cases}$$

(3.65)

Infine, per $i = 0, 1, 2, ..., G^{(r)}$, siano $\left\{ \boldsymbol{\alpha}_{i}^{(r)}(\boldsymbol{p}) \right\}_{i=0}^{G^{(r)}}$ e $\left\{ \boldsymbol{\beta}_{i}^{(r)}(\boldsymbol{p}) \right\}_{i=0}^{G^{(r)}}$, rispettivamente, i vettori delle coordinate di $\left\{ \boldsymbol{\alpha}_{i}^{(r)}(s, \boldsymbol{p}) \right\}_{i=0}^{G^{(r)}}$ e $\left\{ \boldsymbol{\beta}_{i}^{(r)}(s, \boldsymbol{p}) \right\}_{i=0}^{G^{(r)}}$ rispetto alla base canonica $\left\{ s^{n} \right\}_{n=0}^{N}$.

² Se $g^{(r)}(s, \mathbf{p})$ non ha radici reali, si ignori la prima produttoria e si ponga $\rho = 0$ nella seconda.

³ Se $g^{(r)}(s, p)$ non ha radici complesse (a parte immaginaria non nulla), si ignori la seconda produtoria e si ponga $\rho = G^{(r)}$ nella prima.

⁴ Qui \hat{z} rappresenta il complesso coniugato di z.

Allora, per *quasi* ogni p^5 ,

$$\dim \ker \left[\mathcal{F}^{(r)}(\boldsymbol{p}) \right] = G^{(r)} + 1 \tag{3.66}$$

e una base per ker $\left[\mathcal{F}^{(r)}(\boldsymbol{p})\right]$ è costituita dall'insieme di vettori

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{i}^{(r)}(\boldsymbol{p}) \\ \boldsymbol{\beta}_{i}^{(r)}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix}_{i=0}^{G^{(r)}}$$
(3.67)

Dimostrazione

Si consideri la matrice di Sylvester $S^{(r)}(\boldsymbol{p})$ associata alla coppia di polinomi $\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k^{(r)}(\boldsymbol{p}) s^k, \sum_{j=0}^{N} b_j(\boldsymbol{p}) s^j\right\}$: si tratta, come noto, di una matrice quadrata 2N per 2N definita da

Sia V_r la varietà algebrica tale che per ogni $p \notin V_r$, $g^{(r)}(s,p)$ è il MCDM fra $N_r(s,p)$ e $\Delta(s,p)$. Allora, in virtù di un ben noto risultato riguardante $S^{(r)}(p)$, per tali p si ha

$$rank \left[S^{(r)}(\boldsymbol{p}) \right] = 2N - G^{(r)}$$
(3.69)

⁵ Qui e nel resto del capitolo, ker[A] denota il nucleo della matrice A, ossia l'insieme dei vettori v tali che Av=0.

Si osservi che in (3.67) è

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{0}^{(r)}(\boldsymbol{p}) \\ \boldsymbol{\beta}_{0}^{(r)}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{(r)}(\boldsymbol{p}) \\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix}$$
(3.70)

e, come si verifica facilmente, per ognip si ha

$$\mathcal{F}^{(r)}(\boldsymbol{p})\left[\frac{\boldsymbol{a}^{(r)}(\boldsymbol{p})}{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p})}\right] = \boldsymbol{0}$$
(3.71)

Ora, sia $V_{b_{y}}$ la varietà algebrica in cui

$$b_N(\boldsymbol{p}) = 0 \tag{3.72}$$

Allora per ogni $p \notin V_{b_N}$, da (3.71) segue che la 2N+2-esima colonna di $\mathcal{F}^{(r)}(p)$ è combinazione lineare degli elementi dell'insieme Θ delle restanti 2N+1 e può dunque essere cancellata senza alterare $rank \Big[\mathcal{F}^{(r)}(p) \Big]$. Inoltre, la N+1-esima colonna di $\mathcal{F}^{(r)}(p)$ non può esprimersi come combinazione lineare degli altri elementi di Θ , perché $\mathcal{F}^{(r)}(p)$ ha la sua 2N+1-esima componente diversa da zero, mentre per ognuno di detti residui elementi tale componente è nulla. Perciò – se si indica con $\tilde{\mathcal{F}}^{(r)}(p)$ la matrice quadrata 2N ottenuta da $\mathcal{F}^{(r)}(p)$ cancellando le colonne N+1-esima $e \ 2N+2$ -esima assieme alla 2N+1-esima riga – si ottiene che, per ogni $p \notin V_{b_N}$, è $rank \Big[\mathcal{F}^{(r)}(p) \Big] = rank \Big[\tilde{\mathcal{F}}^{(r)}(p) \Big] + 1$.

D'altro canto, è subito visto che $\tilde{\mathcal{F}}^{(r)}(\boldsymbol{p})$ coincide – a meno di permutazioni di righe e colonne e un cambiamento di segno nelle ultime N righe – con $(S^{(r)}(\boldsymbol{p}))^{t}$. Poiché dette operazioni non hanno influenza sul rango, si deduce che per ogni $\boldsymbol{p} \notin V_{b_{N}}$, deve aversi $rank \left[\tilde{\mathcal{F}}^{(r)}(\boldsymbol{p}) \right] = rank \left[S^{(r)}(\boldsymbol{p}) \right]$. Dai risultati precedenti segue

$$rank\left[\mathcal{F}^{(r)}(\boldsymbol{p})\right] = rank\left[\mathcal{S}^{(r)}(\boldsymbol{p})\right] + 1$$
(3.73)

Allora, per ogni $p \notin V_r \bigcup V_{b_N}$, sia la (3.69) che la (3.73) risultano vere. Perciò, poiché $\mathcal{F}^{(r)}(p)$ ha 2N+2 colonne, la (3.66) segue immediatamente dalla relazione fra rango e dimensione del nucleo di una matrice. Ora, sia Q l'insieme delle coppie ordinate $\left(N_q^{(r)}(s, \boldsymbol{p}), \Delta_q^{(r)}(s, \boldsymbol{p})\right)$ di polinomi per i quali esista un terzo polinomio $q(s, \boldsymbol{p})$ tale che, per ogni $\boldsymbol{p} \notin V_r \bigcup V_{b_N}$, $q(s, \boldsymbol{p})N_q^{(r)}(s, \boldsymbol{p}) = N_r(s, \boldsymbol{p}), q(s, \boldsymbol{p})\Delta_q^{(r)}(s, \boldsymbol{p}) = \Delta(s, \boldsymbol{p})$. Da queste equazioni segue

$$\Delta(s,\boldsymbol{p})N_q^{(r)}(s,\boldsymbol{p}) - N_r(s,\boldsymbol{p})\Delta_q^{(r)}(s,\boldsymbol{p}) = 0$$
(3.74)

Siano $\mathbf{n}_{q}^{(r)}(\mathbf{p}) \in \mathbf{d}_{q}^{(r)}(\mathbf{p})$, rispettivamente, i vettori delle coordinate di $N_{q}^{(r)}(s,\mathbf{p})$ and $\Delta_{q}^{(r)}(s,\mathbf{p})$ rispetto alla base canonica $\{s^{n}\}_{n=0}^{N}$. Allora, ricordando la (3.29) assieme alla (3.64) e applicando il principio di identità dei polinomi, si trova $\mathcal{F}^{(r)}(\mathbf{p}) \Big[\mathbf{n}_{q}^{(r)T}(\mathbf{p}) \mathbf{d}_{q}^{(r)T}(\mathbf{p}) \Big]^{T} = \mathbf{0}$.

Tale equazione mostra che per ogni elemento $\left(N_q^{(r)}(s, \boldsymbol{p}), \Delta_q^{(r)}(s, \boldsymbol{p})\right)$ di Q il corrispondente vettore $\left[\boldsymbol{n}_q^{(r)T}(\boldsymbol{p}) \ \boldsymbol{d}_q^{(r)T}(\boldsymbol{p})\right]^T \in \ker\left[\mathcal{F}^{(r)}(\boldsymbol{p})\right]$ per ogni $\boldsymbol{p} \notin V_r \cup V_{b_N}$. Ricordando la (3.65), si trova che per i = 0, 1, 2, ..., G la coppia $\left(\alpha_i^{(r)}(s, \boldsymbol{p}), \beta_i^{(r)}(s, \boldsymbol{p})\right)$ è o un elemento di Q o la semisomma di due elementi di Q. In virtù delle considerazioni precedenti, si ha, in entrambi i casi, che il corrispondente vettore $\left[\boldsymbol{\alpha}_i^{(r)T}(\boldsymbol{p}) \ \boldsymbol{\beta}_i^{(r)T}(\boldsymbol{p})\right]^T \in \ker\left[\mathcal{F}^{(r)}(\boldsymbol{p})\right]$.

Inoltre gli elementi dell'insieme (3.67) sono linearmente indipendenti perché tali sono quelli dell'insieme $\{\boldsymbol{b}_i^{(r)}(\boldsymbol{p})\}_{i=0}^{G^{(r)}}$ essendo questi ultimi i vettori delle coordinate di polinomi aventi gradi differenti. La prova è così completa.

3.7.6 Dimostrazione del Teorema 3.3

Si proverà, dapprima, che C(p) e $\mathcal{M}_D(p)$ sono equivalenti ai fini dell'analisi di testabilità a livello di *componente*. Alla luce del Corollario 7.1, ciò equivale a mostrare che, per ogni sottoinsieme non vuoto (anche improprio) dell'insieme dei parametri incogniti, le corrispondenti colonne di C(p) sono linearmente indipendenti per *quasi* ogni p se e solo se lo stesso vale per le corrispondenti colonne di $\mathcal{M}_D(p)$. Inoltre, essendo la numerazione dei parametri arbitraria, ci si può limitare, senza perdita di generalità, a mostrare che le prime k colonne di C(p) sono linearmente indipendenti se e solo se lo stesso vale per le prime k colonne di $\mathcal{M}_D(\mathbf{p})$, k essendo un generico intero positivo tale che $1 \le k \le n_p$.

Siano, dunque, le prime k colonne di C(p) linearmente indipendenti per quasi ogni p. Esiste allora una varietà algebrica V_c tale che, se un certo $p^* \notin V_c$, risulti

$$\forall \boldsymbol{v} = \left[row \left[\boldsymbol{v}_i \right]_{i=1}^k row \left[\boldsymbol{0} \right]_{i=1}^{n_p - k} \right]^T \neq \boldsymbol{\theta} \left(C \left(\boldsymbol{p}^* \right) \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{\theta} \right)$$
(3.75)

Per assurdo, si supponga che le prime *k* colonne di $\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p})$ siano linearmente dipendenti. Esiste quindi un vettore $\overline{\boldsymbol{v}} = \left[row[\overline{\boldsymbol{v}}_i]_{i=1}^k row[0]_{i=1}^{n_p-k} \right]^T \neq \boldsymbol{0}$ tale che $\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}^*)\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}$. Premoltiplicando tale ultima uguaglianza per $\mathcal{F}(\boldsymbol{p}^*)$ e ricordando la (3.31) si ottiene allora $C(\boldsymbol{p}^*)\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}$, in contraddizione con la (3.75).

Si supponga ora, invece, che le prime k colonne di $\mathcal{M}_D(p)$ siano linearmente indipendenti per *quasi* ogni p. Esiste, allora, una varietà algebrica $V_{\mathcal{M}}$ tale che per ogni $p \notin V_{\mathcal{M}}$ si abbia

$$\forall \boldsymbol{v} = \left[row \left[\boldsymbol{v}_i \right]_{i=1}^k row \left[0 \right]_{i=1}^{n_p - k} \right]^T \neq \boldsymbol{\theta} \left(\mathcal{M}_D \left(\boldsymbol{p} \right) \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{\theta} \right)$$
(3.76)

Per i = 1, 2, ..., n, sia, inoltre, $V_{q^{(i)}}$ la varietà algebrica tale che per ogni $p \notin V_{q^{(i)}}, g^{(i)}(s, p)$ è il MCDM fra $N_i(s, p)$ e $\Delta(s, p)$, con $deg[g^{(i)}(s, p)] = G^{(i)}$. Infine, siano $V_{\mathcal{M}_D^{(r)}}$ e $V_{\mathcal{M}_D^{(r)}}$ le varietà algebriche tali che per ogni $p \notin V_{\mathcal{M}_{D,r}}$ sia $rank[\mathcal{M}_{D,r}(p)] = \max_{p} rank[\mathcal{M}_{D,r}(p)]$ e per ogni $p \notin V_{\mathcal{M}_{D,r}^{aug}(p)}$ sia $rank[\mathcal{M}_{D,r}(p)] = \max_{p} rank[\mathcal{M}_{D,r}^{aug}(p)]$. Sia

$$p^* \notin V_{\mathcal{M}_{D,r}(p)} \bigcup V_{\mathcal{M}_{D,r}^{aug}} \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^n V_{\mathcal{F}^{(i)}}\right)$$
(3.77)

Per assurdo, si supponga che le prime k colonne di $C(\mathbf{p})$ siano linearmente dipendenti. Esiste allora un vettore $\overline{\mathbf{v}} = \left[row \left[\overline{v}_i \right]_{i=1}^k row \left[0 \right]_{i=1}^{n_p - k} \right]^T \neq \mathbf{0}$ tale che

$$C(\boldsymbol{p}^*)\boldsymbol{\overline{v}} = \boldsymbol{0} \tag{3.78}$$

Confrontando la (3.78) con la (3.29) si trova poi

$$\left\langle \mathcal{F}_{i}\left(\boldsymbol{p}^{*}\right)\mathcal{M}_{D,i}\left(\boldsymbol{p}^{*}\right)\overline{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{\theta}\right\rangle_{i=1}^{r}$$
, (3.79)
La (3.79) equivale a

$$\left\langle \mathcal{M}_{D,i}\left(\boldsymbol{p}^{*}\right)\overline{\boldsymbol{v}}\in\ker\left[\mathcal{F}_{i}\left(\boldsymbol{p}^{*}\right)\right]\right\rangle_{i=1}^{n}$$
(3.80)

Tenendo a mente la (3.77) e invocando il precedente Lemma 7.2, si ottiene allora

$$\left\langle \mathcal{M}_{D,i}\left(\boldsymbol{p}^{*}\right)\boldsymbol{\overline{v}} = \sum_{k=0}^{G^{(i)}} \varepsilon_{k}^{(i)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{k}^{(i)}\left(\boldsymbol{p}^{*}\right) \\ \boldsymbol{b}_{k}^{(i)}\left(\boldsymbol{p}^{*}\right) \end{bmatrix} \right\rangle_{i=1}^{n}$$
(3.81)

dove $\left\{ \left\{ \varepsilon_{k}^{(i)} \right\}_{k=0}^{G^{(i)}} \right\}_{i=1}^{n}$ sono costanti opportune.

In particolare, in forza delle ipotesi, deve aversi $G^{(r)} = 0$. Difatti, ricalcando gli argomenti impiegati per la dimostrazione del Lemma 3.2, si trova che – poiché il numeratore e il denominatore di $h_r(s, p_0^{(r)})$ non hanno zeri a comune – esiste una varietà algebrica V_0 tale che per ogni $p \notin V_0$ si abbia dim ker $[\mathcal{F}_r(p)] = 1$. D'altro canto, in virtù del medesimo Lemma 3.2, se fosse $G^{(r)} \neq 0$, esisterebbe una varietà algebrica V_G tale che per ogni $p \notin V_G$ si avrebbe dim ker $[\mathcal{F}_r(p)] = 1 + G^{(r)}$. Quindi, per ogni $p \notin V_0 \cup V_G$ si avrebbe dim ker $[\mathcal{F}_r(p)] = 1 + G^{(r)}$ e dunque $G^{(r)} = 0$.

Perciò da (3.81) e (3.70) segue

$$\mathcal{M}_{D,r}(\boldsymbol{p}^{*})\boldsymbol{\overline{v}} = \varepsilon_{0}^{(r)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{0}^{(r)}(\boldsymbol{p}^{*}) \\ \boldsymbol{\beta}_{0}^{(r)}(\boldsymbol{p}^{*}) \end{bmatrix} = \varepsilon_{0}^{(r)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{(r)}(\boldsymbol{p}^{*}) \\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}^{*}) \end{bmatrix}$$
(3.82)

per qualche $\varepsilon_0^{(r)}$. D'altro canto, in virtù di (3.77), si deve avere $rank\left[\mathcal{M}_{D,r}\left(\boldsymbol{p}^*\right)\right] = \max_{\boldsymbol{p}} rank\left[\mathcal{M}_{D,r}\left(\boldsymbol{p}\right)\right]$ e $rank\left[\mathcal{M}_{D,r}^{aug}\left(\boldsymbol{p}^*\right)\right] = \max_{\boldsymbol{p}} rank\left[\mathcal{M}_{D,r}^{aug}\left(\boldsymbol{p}\right)\right]^6$ onde, ricordando (3.37), si ha

⁶ Dal momento che, in forza di (3.77), è $p^* \in \arg\max_p rank \left[\mathcal{M}_{D,r}(p) \right] e$ $p^* \in \arg\max_p rank \left[\mathcal{M}_{D,r}^{aug}(p) \right].$ $rank \left[\mathcal{M}_{D,r} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) \right] \neq rank \left[\mathcal{M}_{D,r}^{aug} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) \right].$ Quest'ultima ineguaglianza implica che nella (3.82) deve aversi $\varepsilon_{0}^{(r)} = 0.$ Difatti, se fosse $\varepsilon_{0}^{(r)} \neq 0$, tramite la (3.82) si potrebbe esprimere $\left[\boldsymbol{a}^{(r)T} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) \boldsymbol{b}^{T} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) \right]^{T}$ come combinazione lineare delle colonne di $\mathcal{M}_{D}^{(r)} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right),$ il che comporterebbe $rank \left[\mathcal{M}_{D,r} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) \right] = rank \left[\mathcal{M}_{D,r}^{aug} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) \right].$ Perciò, da (3.82) segue $\mathcal{M}_{D,r} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) \overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}$ (3.83)

Ricordando la (3.33), si vede che la (3.83) implica, in particolare

$$row\left[\frac{\partial}{\partial p_{j}}\boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{p}^{*}\right)\right]_{j=1}^{n_{p}} \overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}$$
(3.84)

Ricordando ancora una volta la (3.33) e confrontando la (3.84) con la (3.81) si ha

$$\left\langle \sum_{k=0}^{G^{(i)}} \varepsilon_k^{(i)} \boldsymbol{b}_k^{(i)} \left(\boldsymbol{p}^* \right) = \boldsymbol{0} \right\rangle_{i=1}^n$$
(3.85)

D'altro canto, come mostrato nella prova del Lemma 7.2, per i = 1, 2, ..., ngli elementi di $\{\boldsymbol{b}_{j}^{(i)}(\boldsymbol{p})\}_{i=0}^{G^{(i)}}$ sono linearmente indipendenti. Perciò nella (3.85) deve essere

$$\left\langle \left\langle \mathcal{E}_{k}^{(i)} = 0 \right\rangle_{k=0}^{G^{(i)}} \right\rangle_{i=1}^{n}$$
(3.86)

Inserendo la (3.86) nella (3.81), segue

$$\left\langle \mathcal{M}_{D,i}\left(\boldsymbol{p}^{*}\right)\overline{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{0}\right\rangle _{i=1}^{n}$$
(3.87)

Ricordando le (3.32) e (3.33) si vede subito che le (3.87) equivalgono a

$$\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p}^{*})\boldsymbol{\overline{v}}=\boldsymbol{0}$$
(3.88)

che contraddice la (3.76). La prova della parte (i) della tesi è quindi completa.

Rimane da provare la parte (ii), ossia che $C(\mathbf{p})$ e $\mathcal{M}_D(\mathbf{p})$ sono equivalenti ai fini dell'analisi di testabilità a livello di *circuito*: ciò equivale

a mostrare che $\max_{p} rank[C(p)] = \max_{p} rank[\mathcal{M}_{D}(p)]$. Si supponga allora, per assurdo, che $\max_{p} rank[C(p)] \neq \max_{p} rank[\mathcal{M}_{D}(p)]$. Deve allora essere

$$\rho_{C} = \max_{p} rank \left[C(p) \right] < \max_{p} rank \left[\mathcal{M}_{D}(p) \right] = \rho_{\mathcal{M}}$$
(3.89)

(difatti dalla (3.31) segue immediatamente che per ogni p deve essere $\operatorname{ker}[\mathcal{M}_D(p)] \subseteq \operatorname{ker}[C(p)]$ e quindi, in forza della relazione fra rango e nucleo di una matrice e dell'assunto, $\operatorname{rank}[C(p)] < \operatorname{rank}[\mathcal{M}_D(p)]$).

La (3.89) implica che il massimo numero di colonne linearmente indipendenti per quasi ogni $p \mathcal{M}_D(p)$ è $\rho_{\mathcal{M}}$: senza perdita di generalità si può supporre che si tratti delle prime $\rho_{\mathcal{M}}$. Allora, in virtù della già dimostrata parte (i) della tesi allo studio, le prime $\rho_{\mathcal{M}}$ colonne di C(p) sono, a loro volta, linearmente indipendenti per quasi ogni p: questo contraddice la (3.89), secondo cui $\max_p rank [C(p)] = \rho_c < \rho_{\mathcal{M}}$. La prova è quindi completa.

3.7.7 Dimostrazione del Corollario 3.2

Dall'ipotesi, ricalcando le argomentazioni del precedente Paragrafo 3.7.6, si trae che esiste una varietà algebrica $V_{\mathcal{F}}$ tale che per ogni $p \notin V_{\mathcal{F}}$, sia abbia⁷

$$\ker\left[\mathcal{F}(\boldsymbol{p})\right] = span\left\langle \left[\frac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{p})}{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p})}\right] \right\rangle$$
(3.90)

Inoltre, di nuovo ricalcando le argomentazioni del Paragrafo 3.7.6, si conclude che esistono varietà algebriche V_b , V_c , $V_{\mathcal{M}}$, and $V_{\mathcal{M},aug}$ tali che per ogni $p \notin V_b \bigcup V_c \bigcup V_{\mathcal{M}} \bigcup V_{\mathcal{M},aug}$ si abbia simultaneamente

$$b_N \neq 0 \tag{3.91}$$

$$rank[C(\boldsymbol{p})] = \max_{\boldsymbol{p}} rank[C(\boldsymbol{p})]$$
(3.92)

$$rank \left[\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p}) \right] = \max_{\boldsymbol{p}} rank \left[\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p}) \right],$$

$$rank \left[\mathcal{M}_{D,aug}(\boldsymbol{p}) \right] = \max_{\boldsymbol{p}} rank \left[\mathcal{M}_{D,aug}(\boldsymbol{p}) \right]$$
(3.93)

Si consideri allora un

⁷ Qui e nel seguito, $span\langle u \rangle$ indica il sottospazio vettoriale generato dal vettore u.

$$\boldsymbol{p}^* \notin V_{\mathcal{F}} \bigcup V_b \bigcup V_C \bigcup V_{\mathcal{M}} \bigcup V_{\mathcal{M},aug}$$
(3.94)

allora le (3.90)-(3.93) sono simultaneamente soddisfatte. Mettendo assieme la (3.31) e la (3.90) si trova

$$\mathbf{v} \in \ker \left[C\left(\mathbf{p}^{*} \right) \right] \Leftrightarrow \mathcal{M}_{D}\left(\mathbf{p}^{*} \right) \mathbf{v} = \alpha \left[\frac{\mathbf{a}\left(\mathbf{p}^{*} \right)}{\mathbf{b}\left(\mathbf{p}^{*} \right)} \right], \alpha \in \mathbb{R}$$
(3.95)

Confrontando (3.94), (3.93) e la condizione in ipotesi, si ottiene $rank \left[\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}^*) \right] = rank \left[\mathcal{M}_{D,aug}(\boldsymbol{p}^*) \right];$ quindi, ricordando (3.36) (e ivi omettendo l'indice r = 1 nel caso in specie) si ha che $\left[\boldsymbol{a} \left(\boldsymbol{p}^* \right)^t \ \boldsymbol{b} \left(\boldsymbol{p}^* \right)^t \right]^t$ deve essere combinazione lineare delle colonne di $\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}^*)$.

Esiste, dunque, un vettore \mathbf{v}^* tale che $\mathcal{M}_D(\mathbf{p}^*)\mathbf{v}^* = \left[\mathbf{a}\left(\mathbf{p}^*\right)^t \quad \mathbf{b}\left(\mathbf{p}^*\right)^t\right]^t$; inoltre, in forza della (3.91), questo $\mathbf{v}^* \notin \ker\left[\mathcal{M}_D(\mathbf{p}^*)\right]$. Perciò, applicando a (3.95) la teoria elementare dei sistemi di equazioni lineari, si ottiene $\ker\left[C(\mathbf{p}^*)\right] = span\langle \mathbf{v}^* \rangle \oplus \ker\left[\mathcal{M}_D(\mathbf{p}^*)\right]$, ove \oplus indica la somma diretta di sottospazi. Perciò dim $\ker\left[C(\mathbf{p}^*)\right] = 1 + \dim \ker\left[\mathcal{M}_D(\mathbf{p}^*)\right]$, vale a dire $rank\left[C(\mathbf{p}^*)\right] = rank\left[\mathcal{M}_D(\mathbf{p}^*)\right] - 1$. La tesi segue allora immediatamente dal confronto fra tale ultima equazione e (3.92)-(3.94).

3.7.8 Dimostrazione del Teorema 3.4

Per ipotesi, in corrispondenza di ogni (lecito) valore di s e per ogni p, si può scrivere

$$\left\langle h_r(s,\boldsymbol{p}) = \frac{N_r(s,\boldsymbol{p})}{\Delta(s,\boldsymbol{p})} = \frac{\tilde{N}_r(s,\boldsymbol{p}_q)g(\boldsymbol{p}_c,s)}{\tilde{\Delta}(s,\boldsymbol{p}_q)g(\boldsymbol{p}_c,s)} = \frac{\tilde{N}_r(s,\boldsymbol{p}_q)}{\tilde{\Delta}(s,\boldsymbol{p}_q)}\right\rangle_{r=1}^n$$
(3.96)

ove p_q è il vettore che raccoglie le componenti di p che non appartengono a p_c ed $\tilde{N}_r(s, p_q)$ e $\tilde{\Delta}(s, p_q)$ sono opportuni polinomi nella variabile s.

Ora, sia p_{ci} una componente di p_c ; da (3.96), si ha allora che, per ogni (lecito) valore di *s* e per ogni *p*

$$\left\langle \frac{\partial h_r(s, \boldsymbol{p})}{\partial p_{c,i}} = 0 \right\rangle_{r=1}^n$$
(3.97)

Confrontando, ora, la (3.97) con (3.96), (3.17), (3.20), (3.22) e (3.28)-(3.30) si ha che, per ogni p,

$$\left\langle \left[\mathcal{B}(\boldsymbol{p}) \mid -\mathcal{A}_{r}(\boldsymbol{p}) \right] \frac{\partial}{\partial p_{c,i}} \left[\frac{\boldsymbol{a}_{r}(\boldsymbol{p})}{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p})} \right] = \boldsymbol{0} \right\rangle_{r=1}^{n}$$
(3.98)

Inoltre, confrontando la (3.98) con (3.31) e (3.32), si trova che, per ogni p, deve risultare

$$C(\boldsymbol{p})\boldsymbol{e}_{i} = \mathcal{F}(\boldsymbol{p})\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{e}_{i} = \boldsymbol{0}$$
(3.99)

ove

$$\boldsymbol{e}_{i} = \begin{bmatrix} e_{1i} \ e_{2i} \dots e_{n_{p}i} \end{bmatrix}^{t}, \ \boldsymbol{e}_{ki} = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1 & k = i \end{cases} (3.100)$$

Dalla (3.99) segue allora che per ognip

$$\boldsymbol{e}_i \in \ker\left[C\left(\boldsymbol{p}\right)\right] \tag{3.101}$$

Inoltre, com'è subito visto, per ogni p si ha anche

$$\ker \left[\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p}) \right] \subseteq \ker \left[C(\boldsymbol{p}) \right]$$
(3.102)

D'altro canto, poiché qualche componente di $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p})$ deve esplicitamente dipendere da $p_{c,i}$ - si ha $\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p})\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial}{\partial p_{c,i}} \left[row \left[\boldsymbol{a}_j^t(\boldsymbol{p}) \right]_{j=1}^n \boldsymbol{b}^t(\boldsymbol{p}) \right]^t \neq 0$ e dunque

$$span\langle \boldsymbol{e}_i \rangle \cap \ker \left[\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}) \right] = \{ \boldsymbol{0} \}$$
(3.103)

Confrontando le (3.101)-(3.103) si ottiene allora

$$span\langle \boldsymbol{e}_i \rangle \oplus \ker \left[\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}) \right] \subseteq \ker \left[C(\boldsymbol{p}) \right]$$
(3.104)

onde

$$1 + \dim \ker \left[\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p}) \right] \leq \dim \ker \left[C(\boldsymbol{p}) \right]$$
(3.105)

In virtù della relazione fra rango e nucleo di una matrice si ha poi

$$\operatorname{rank}\left[C(\boldsymbol{p})\right] \leq \operatorname{dim}\operatorname{ker}\left[\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p})\right] - 1 \qquad (3.106)$$

Prendendo infine il max di entrambi i membri dell'ultima ineguaglianza si perviene alla tesi.

3.7.9 Dimostrazione del Teorema 3.5

Sia

$$\left\langle \tilde{N}_{r}(s, \boldsymbol{p}_{q}) = \sum_{k=0}^{\tilde{d}} \tilde{a}_{r}^{(k)}(\boldsymbol{p}_{q}) s^{k} \right\rangle_{r=1}^{n}$$

$$\tilde{\Delta}(s, \boldsymbol{p}_{q}) = \sum_{j=0}^{\tilde{d}} \tilde{b}^{(j)}(\boldsymbol{p}_{q}) s^{j}$$

$$g(s) = \sum_{i=0}^{G} \gamma_{i} s^{i}, \gamma_{G} \neq 0$$

$$(3.107)$$

Dalla (3.42) - per analogia con (3.18), (3.20) e (3.22) - si può scrivere

$$\left\langle \left\langle \tilde{\phi}_{ri}(s,\boldsymbol{p}) = \frac{\partial \tilde{h}_{r}(s,\boldsymbol{p})}{\partial p_{i}} = \frac{\sum_{j=0}^{2\tilde{d}} \tilde{c}_{ri}^{(j)}(\boldsymbol{p})s^{j}}{\tilde{\Delta}^{2}(s,\boldsymbol{p})} = \frac{\tilde{\psi}_{ri}(s,\boldsymbol{p})}{\tilde{\Delta}^{2}(s,\boldsymbol{p})} \right\rangle_{i=1}^{n_{p}} \right\rangle_{r=1}^{n}$$
(3.108)

Mettendo assieme le (3.18), (3.22), (3.41), e (3.108) si ottiene

$$\left\langle \left\langle \psi_{ri}(s, \boldsymbol{p}) = \sum_{j=0}^{2d} c_{ri}^{(j)}(\boldsymbol{p}) s^{j} \\ = g^{2}(s) \tilde{\psi}_{ri}(s, \boldsymbol{p}) = g^{2}(s) \sum_{j=0}^{2\tilde{d}} \tilde{c}_{ri}^{(j)}(\boldsymbol{p}) s^{j} \right\rangle_{i=1}^{n} \right\rangle_{r=1}^{n}$$
(3.109)

Ora, siano

$$\left\langle \left\langle \tilde{\boldsymbol{c}}_{ri}\left(\boldsymbol{p}\right) = col\left[c_{ri}^{(j)}\left(\boldsymbol{p}\right)\right]_{j=1}^{2\tilde{d}} \right\rangle_{i=1}^{n_{p}} \right\rangle_{r=1}^{n}$$
(3.110)

Ordinatamente gli omologhi, rispetto a $\{\tilde{h}_r(s, \boldsymbol{p})\}_{r=1}^n$ dei vettori definiti in (3.24) e si introducano i seguenti vettori con 2d+1 componenti

$$\left\langle \left\langle \tilde{\boldsymbol{c}}_{ri}^{pad} \left(\boldsymbol{p} \right) = \left[row \left[\tilde{c}_{ri}^{(j)} \left(\boldsymbol{p} \right) \right]_{j=1}^{2\tilde{d}} \quad \boldsymbol{\theta}_{2\left(d-\tilde{d}\right)}^{t} \right]^{t} \right\rangle_{i=1}^{n_{p}} \right\rangle_{r=1}^{n}$$
(3.111)

Con riferimento alla (3.107), si introducano, altresì, il vettore

$$col\left[\tilde{\gamma}_{i}\right]_{i=0}^{d} = \left[row\left[\gamma_{i}\right]_{i=0}^{G} \quad \boldsymbol{\theta}_{d-g}^{t}\right]^{t}$$
(3.112)

e le matrici 2d+1 per 2d+1

$$G = \begin{bmatrix} pad \left[col \left[\tilde{\gamma}_{j} \right]_{j=0}^{d} \right] & row \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\theta}_{d+k} \\ col \left[\tilde{\gamma}_{j} \right]_{j=0}^{d-k} \\ \end{bmatrix}_{k=1}^{d} \end{bmatrix}$$
(3.113)
$$Q = G^{2}$$

Applicando alla (3.109) il principio di identità dei polinomi, in forza delle (3.24), (3.107), (3.111) e (3.113), si ottiene

$$\left\langle \left\langle \boldsymbol{c}_{ri}\left(\boldsymbol{p}\right) = Q \; \tilde{\boldsymbol{c}}_{ri}^{pad}\left(\boldsymbol{p}\right) \right\rangle_{i=1}^{n_{p}} \right\rangle_{r=1}^{n}$$
 (3.114)

Si ponga ora

$$\tilde{C}^{pad}(\boldsymbol{p}) = row \left[col \left[\tilde{\boldsymbol{c}}_{ri}^{pad}(\boldsymbol{p}) \right]_{r=1}^{n} \right]_{i=1}^{n_{p}}$$

$$Q_{tot} = diag \left[Q \right]^{n}$$
(3.115)

allora, confrontando le (3.23), (3.115) e (3.114) si trova

$$C(\boldsymbol{p}) = Q_{iot} \tilde{C}^{pad}(\boldsymbol{p})$$
(3.116)

Analogamente, siano

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{a}}_{r}\left(\boldsymbol{p}\right) = col\left[\tilde{\boldsymbol{a}}_{r}^{(k)}\left(\boldsymbol{p}\right)\right]_{k=0}^{\tilde{d}}\right\rangle_{r=1}^{n}$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}}\left(\boldsymbol{p}\right) = col\left[\tilde{\boldsymbol{b}}^{(k)}\left(\boldsymbol{p}\right)\right]_{k=0}^{\tilde{d}}$$
(3.117)

gli omologhi, rispetto ad $\tilde{h}_r(s, \mathbf{p})$ dei vettori definiti in (3.25), e si introducano i vettori

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{a}}_{r}^{pad} \left(\boldsymbol{p} \right) = \left[\tilde{\boldsymbol{a}}_{r} \left(\boldsymbol{p} \right)^{t} \quad \boldsymbol{\theta}_{d-\tilde{d}}^{t} \right]^{t} \right\rangle_{r=1}^{n}$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}}^{pad} \left(\boldsymbol{p} \right) = \left[\tilde{\boldsymbol{b}} \left(\boldsymbol{p} \right)^{t} \quad \boldsymbol{\theta}_{d-\tilde{d}}^{t} \right]^{t}$$

$$(3.118)$$

e la matrice

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} col \left[\tilde{\gamma}_i \right]_{i=0}^d & row \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_{j+1} \\ col \left[\tilde{\gamma}_i \right]_{i=0}^{d-j} \end{bmatrix}_{j=0}^d \end{bmatrix}$$
(3.119)

Si trova allora

$$\left\langle \boldsymbol{a}_{r}(\boldsymbol{p}) = \mathcal{W} \tilde{\boldsymbol{a}}_{r}^{pad}(\boldsymbol{p}) \right\rangle_{r=1}^{n}$$

$$\left\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}) = \mathcal{W} \tilde{\boldsymbol{b}}^{pad}(\boldsymbol{p}) \right\rangle_{r=1}^{n}$$

$$(3.120)$$

Introdotte le matrici

$$\tilde{\mathcal{M}}_{D}^{pad}(\boldsymbol{p}) = row \left[\frac{\partial}{\partial p_{j}} \left[col \left[\tilde{\boldsymbol{a}}_{r}^{pad}(\boldsymbol{p}) \right]_{r=1}^{n} \right] \right]_{j=1}^{n_{p}}$$
(3.121)

$$\mathcal{W}_{tot} = diag \left[\mathcal{W} \right]^n \tag{3.122}$$

Dal confronto fra (3.32) e (3.120)-(3.122) segue allora

$$\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p}) = \mathcal{W}_{tot} \tilde{\mathcal{M}}_{D}^{pad}(\boldsymbol{p})$$
(3.123)

Si mostrerà ora che

1.
$$\max_{p} rank [C(p)] = \max_{p} rank [\mathcal{M}_{D}(p)] \quad \text{se} \quad \text{e} \quad \text{solo} \quad \text{se}$$
$$\max_{p} rank [\tilde{C}(p)] = \max_{p} rank [\tilde{\mathcal{M}}_{D}(p)] \text{ and}$$

2. (α) la classe degli insiemi di parametri per i quali le corrispondenti colonne di C(p) sono linearmente indipendenti per quasi ogni p coincide la classe degli insiemi di parametri per i quali le corrispondenti colonne di $\mathcal{M}_D(p)$ sono linearmente indipendenti per quasi ogni p se e solo se (β) lo stesso vale per $\tilde{C}(p)$ and $\tilde{\mathcal{M}}_D(p)$.

Si supponga dapprima $g(0) \neq 0$. Poiché $g(0) = \gamma_0$ e, come è subito visto, $det[Q_{tot}] = \gamma_0^{2n(2d+1)} e det[\mathcal{W}_{tot}] = \gamma_0^{(n+1)(d+1)}$, si ha che $Q_{tot} e \mathcal{W}_{tot}$ hanno rango pieno; perciò dalle (3.116) e (3.123) segue che

$$rank[C(\boldsymbol{p})] = rank[\tilde{C}^{pad}(\boldsymbol{p})]$$
$$rank[\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p})] = rank[\tilde{\mathcal{M}}_{D}^{pad}(\boldsymbol{p})]$$
(3.124)

Inoltre, dal momento che le matrici

$$\tilde{C}(\boldsymbol{p}) = row \left[col \left[\tilde{\boldsymbol{c}}_{ri}(\boldsymbol{p}) \right]_{r=1}^{n} \right]_{i=1}^{n_{p}}$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{D}(\boldsymbol{p}) = row \left[\frac{\partial}{\partial p_{j}} \left[col \left[\tilde{\boldsymbol{a}}_{r}(\boldsymbol{p}) \right]_{r=1}^{n} \right]_{j=1}^{n_{p}}$$
(3.125)

menzionate nell'enunciato possono ottenersi da $\tilde{C}_{pad}(\boldsymbol{p}) \in \tilde{\mathcal{M}}_{D,pad}(\boldsymbol{p})$, rispettivamente, cancellando righe nulle, e tale operazione non influenza il rango, si ha anche

$$rank\left[\tilde{C}^{pad}\left(\boldsymbol{p}\right)\right] = rank\left[\tilde{C}\left(\boldsymbol{p}\right)\right]$$
$$rank\left[\tilde{\mathcal{M}}_{D}^{pad}\left(\boldsymbol{p}\right)\right] = rank\left[\tilde{\mathcal{M}}_{D}\left(\boldsymbol{p}\right)\right]$$
(3.126)

Prendendo il max di entrambi i membri nelle (3.124) e (3.126), e confrontando le equazioni così ottenute si trova

$$\max_{p} rank \left[C(p) \right] = \max_{p} rank \left[\tilde{C}(p) \right]$$

$$\max_{p} rank \left[\mathcal{M}_{D}(p) \right] = \max_{p} rank \left[\tilde{\mathcal{M}}_{D}(p) \right]$$
(3.127)

onde il punto 1 segue immediatamente.

Si supponga ora, per assurdo, che la proposizione (β) del punto 2 sia falsa. Esiste dunque un insieme di parametri per i quali le corrispondenti colonne di $\tilde{\mathcal{M}}_D(\boldsymbol{p})$ sono linearmente indipendenti per quasi ogni \boldsymbol{p} e, al contempo, le corrispondenti colonne di $\tilde{C}(\boldsymbol{p})$ sono linearmente dipendenti per ogni \boldsymbol{p} (si osservi che non può essere il contrario, perchè, vale una relazione analoga alla (3.31)); senza perdita di generalità, si può supporre che l'insieme in questione sia costituito dalle prime r componenti di \boldsymbol{p} .

Esiste, allora, una varietà algebrica $V_{\tilde{\mathcal{M}}}$ t ale che per ogni $p \notin V_{\tilde{\mathcal{M}}}$ e per ogni

vettore a
$$n_p$$
 componenti $\mathbf{v} = \left[row \left[v_i \right]_{i=1}^r \boldsymbol{\theta}_{n_p - r} \right]^t \neq \boldsymbol{\theta}$ si abbia
 $\tilde{\mathcal{M}}_D(\boldsymbol{p}) \mathbf{v} \neq \boldsymbol{\theta}$ (3.128)

Poiché $\tilde{\mathcal{M}}_{D}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v}$ è un sottovettore di $\tilde{\mathcal{M}}_{D}^{pad}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v}$ dalla (3.128) segue anche

$$\tilde{\mathcal{M}}_{D}^{pad}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{\nu}\neq\boldsymbol{0}$$
(3.129)

Premoltiplicando ambo i membri della (3.129) per \mathcal{W}_{tot} , tenendo conto che quest'ultima è a rango pieno, e ricordando la (3.123) si conclude che, per ogni $p \notin V_{\tilde{\mathcal{M}}}$ e per ogni vettore $\boldsymbol{v} = \left[row \left[v_i \right]_{i=1}^r \boldsymbol{\theta}_{n_p-r} \right]^i \neq \boldsymbol{\theta}$, si ha

$$\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0} \tag{3.130}$$

La (3.130) implica che le prime *r* colonne di $\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p})$ sono, a loro volta, linearmente indipendenti per quasi ogni \boldsymbol{p} . Inoltre – giacché le prime *r* colonne di $\tilde{C}(\boldsymbol{p})$ sono linearmente dipendenti – per ogni \boldsymbol{p} , esiste un vettore $\boldsymbol{u} = \left[row[\boldsymbol{u}_i]_{i=1}^r \boldsymbol{\theta}_{n_p-r} \right]^t \neq \boldsymbol{\theta}$ (in generale dipendente da \boldsymbol{p}) tale che

$$\tilde{C}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$
(3.131)

Confrontando le (3.125), (3.115) e (3.111), dalla (3.131) segue

$$\tilde{C}^{pad}\left(\boldsymbol{p}\right)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{3.132}$$

Premoltiplicando ambo i membri della (3.132) per Q_{tot} e ricordando la (3.116), si ottiene che esiste un vettore $\boldsymbol{u} = \left[row \left[u_i \right]_{i=1}^r \boldsymbol{\theta}_{n_p-r} \right]^t \neq \boldsymbol{\theta}$ tale che per ogni \boldsymbol{p} , si abbia

$$C(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{3.133}$$

La (3.133) implica che le prime *r* colonne di $C(\mathbf{p})$ sono, a loro volta, linearmente dipendenti. Accade quindi che per il gruppo dei primi *r* parametri, le corrispondenti colonne di $\mathcal{M}_D(\mathbf{p})$ sono linearmente indipendenti per quasi ogni \mathbf{p} e, al contempo, le corrispondenti colonne di $C(\mathbf{p})$ sono linearmente dipendenti per ogni \mathbf{p} , in contraddizione con la proposizione (α). Argomentazioni del tutto simili (che traggono partito dal fatto che sia Q_{tot} che \mathcal{W}_{tot} possiedono un'inversa) consentono di dimostrare, ancora per assurdo, che (β) implica (α).

Si consideri ora il caso g(0)=0. Si supponga, inizialmente, che $g(s)=s^{L}$: si ha allora che è $\gamma_{i}=0$ per ogni *i*, ad eccezione di $\gamma_{L}=1$ e, in tale ultimo caso, è subito visto che $\tilde{C}^{pad}(\boldsymbol{p})$ e $\tilde{\mathcal{M}}_{D}^{pad}(\boldsymbol{p})$ differiscono da $C(\boldsymbol{p})$ e $\mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p})$, rispettivamente, solo per permutazioni di righe. Inoltre $\tilde{C}(\boldsymbol{p})$ e $\tilde{\mathcal{M}}_{D}(\boldsymbol{p})$ possono essere ottenute da $\tilde{C}^{pad}(\boldsymbol{p})$ e $\tilde{\mathcal{M}}_{D}^{pad}(\boldsymbol{p})$, rispettivamente, eliminando righe nulle. Dal momento che le summenzionate

operazioni non alterano il rango, ricalcando le argomentazioni del caso $g(0) \neq 0$ si ottiene che il punto 1 segue anche nel caso in specie. Quanto al punto 2, le argomentazioni impiegate nel caso $g(0) \neq 0$ possono essere, di nuovo, facilmente adattate al caso in esame, osservando che le condizioni vettoriali $\tilde{\mathcal{M}}_D(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ [$\tilde{C}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$] e $\mathcal{M}_D(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ [$C(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$] possono ottenersi l'una dall'altra cambiando opportunamente l'ordine delle rispettive componenti scalari e aggiungendo o togliendo ininfluenti condizioni del tipo " $0 \neq 0$ "["0 = 0"].

Infine, il caso in cui $g(s) = s^{L}k(s)$ con $k(0) \neq 0$ può essere riguardato come una combinazione dei casi precedenti e affrontato applicando i rispettivi risultati in successione. Ciò completa la dimostrazione.

Bibliografia

1. R. Berkowitz, "Conditions for Network-Element-Value Solvability," *IRE Transactions on Circuit Theory*, vol. 9, no. 1, pp. 24-29, Mar. 1962.

2. V. Visvanathan and A. Sangiovanni-Vincentelli, "Diagnosability of nonlinear circuits and systems-Part I: The dc case," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 28, no. 11, pp. 1093-1102, Nov. 1981.

3. N. Sen and R. Saeks, "Fault diagnosis for linear systems via multifrequency measurements," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 26, no. 7, pp. 457-465, Jul. 1979.

4. G. Iuculano, A. Liberatore, S. Manetti and M. Marini, "Multifrequency measurement of testability with application to large linear analog systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 33, no. 6, pp. 644-648, Jun. 1986.

5. M. Catelani, G. Iuculano, A. Liberatore, S. Manetti and M. Marini, "Improvements to numerical testability evaluation," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. IM-36, no. 4, pp. 902-907, Dec. 1987.

6. R. Carmassi, M. Catelani, G. Iuculano, A. Liberatore, S. Manetti and M. Marini, "Analog network testability measurement: a symbolic formulation approach," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 40, no. 6, pp. 930-935, Dec. 1991.

7. A. Liberatore, S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A new efficient method for analog circuit testability measurement," *Conference Proceedings. 10th Anniversary. IMTC/94. Advanced Technologies in I & M. 1994 IEEE Instrumentation and Measurement Technolgy Conference (Cat. No.94CH3424-9)*, Hamamatsu, 1994, pp. 193-196 vol.1.

8. G. Fontana, F. Grasso, A. Luchetta, S. Manetti, M. C. Piccirilli and A. Reatti, "A new simulation program for analog circuits using symbolic analysis techniques," 2015 International Conference on Synthesis, Modeling, Analysis and Simulation Methods and Applications to Circuit Design (SMACD), Istanbul, 2015, pp. 1-4.

9. M. Catelani, G. Fedi, A. Luchetta, S. Manetti, M. Marini and M. C. Piccirilli, "A new symbolic approach for testability measurement of analog networks," *Proceedings of 8th Mediterranean Electrotechnical Conference on Industrial Applications in Power Systems, Computer Science and Telecommunications (MELECON 96)*, Bari, 1996, pp. 517-520, vol.1.

10. G. Fontana, A. Luchetta, S. Manetti and M. C. Piccirilli, "An unconditionally sound algorithm for testability analysis in linear time-invariant electrical networks," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 44, no. 6, pp. 1308–1340, Jun. 2016.

11. F. Grasso, A. Luchetta, S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A Method for the Automatic Selection of Test Frequencies in Analog Fault Diagnosis," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 56, no. 6, pp. 2322-2329, Dec. 2007.

12. G. Fedi, S. Manetti, M. C. Piccirilli and J. Starzyk, "Determination of an optimum set of testable components in the fault diagnosis of analog linear circuits," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 46, no. 7, pp. 779-787, Jul. 1999.

13. S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A singular-value decomposition approach for ambiguity group determination in analog circuits," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 50, no. 4, pp. 477-487, Apr. 2003.

Capitolo 4

Una teoria e un algoritmo per l'analisi di testabilità dei circuiti a commutazione periodica eccitati da segnali costanti

Nei capitoli precedenti è stato sottolineato il ruolo fondamentale dell'analisi di testabilità quale prerequisito per la diagnosi di guasto e l'identificazione dei parametri. Tuttavia, se per i circuiti lineari tempo-invarianti questo aspetto è stato oggetto di considerevole attenzione da parte della Ricerca (e il Capitolo 3) rappresenta un contributo in tal senso), lo stesso non può dirsi per i circuiti che non rientrano nella suddetta categoria. In questo capitolo è descritto un approccio che colma tale lacuna in relazione alla classe dei Circuiti a Commutazione Periodica Eccitati da Segnali Costanti (CCPESC), la quale annovera i convertitori statici di energia (CSE) quali membri di considerevole importanza nelle applicazioni. A partire da una impostazione nel dominio del tempo, si perviene, in primo luogo, a una rigorosa misura quantitativa di testabilità, sia a livello di circuito che di componente, in grado di stabilire per quanti e quali parametri siano a priori possibili una diagnosi o una identificazione univoche e di configurarsi come limite superiore alle prestazioni di qualsivoglia metodo possa essere concepito per tali scopi. Questa misura teorica viene quindi tradotta in un algoritmo atto alla implementazione su calcolatore, la quale consente di ottenere un software efficiente per l'analisi di testabilità completamente automatizzata dei CCPESC e, in dei CSE: tanto la suddetta misura che la particolare. summenzionata realizzazione software rappresentano strumenti di notevole utilità per il progetto e la rifinitura di strategie di diagnosi

o identificazione parametriche per la classe di circuiti in questione. Il capitolo si chiude con vari esempi illustrativi, in cui i risultati dell'applicazione diretta dell'algoritmo messo a punto vengono confrontati con quelli ottenibili attraverso il programma per computer summenzionato: in particolare, ben noti schemi di convertitori DC-DC sono analizzati in dettaglio. Raffronti con la misura di testabilità per circuiti lineari tempo-invarianti presentata nel Capitolo 3 sono altresì discussi.¹

4.1 Introduzione

4.2 Definizioni e risultati preliminari

- 4.2.1 Generalità
- **4.2.2** Calcolo degli istanti di commutazione, dei corrispondenti valori di *x* e delle rispettive sensitività
- 4.3 Fondamenti teorici per l'analisi di testabilità dei circuiti a commutazione periodica eccitati da segnali costanti
 - 4.3.1 Introduzione
 - 4.3.2 Equazioni di diagnosi di guasto e loro risolvibilità
 - 4.3.3 Massimizzazione della risolvibilità delle equazioni di diagnosi di guasto
 - 4.3.4 Definizioni di Testabilità ed analisi di testabilità

¹ Questo capitolo ha contribuito alla pubblicazione G. Fontana, A. Luchetta, S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A Testability Measure for DC-Excited Periodically Switched Networks With Applications to DC-DC Converters," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 65, no. 10, pp. 2321-2341, Oct. 2016.

4.4 Matrice di testabilità

- 4.4.1 Dal dominio del tempo al campo reale (passando per il dominio di Laplace)
- 4.4.2 Espressione in forma chiusa della matrice di testabilità
- 4.4.3 Forma ridotta della matrice di testabilità

4.5 Automatizzazione dell'analisi di testabilità per circuiti a commutazione periodica eccitati da segnali costanti

- 4.5.1 Algoritmo per il calcolo della matrice di testabilità
- 4.5.2 Implementazione software: il programma TAPSLIN

4.6 Esempi

- 4.6.1 Esempio 1
- 4.6.2 Esempio 2
- 4.6.3 Esempio 3: analisi di testabilità per il Convertitore Buck operante in modalità a corrente ininterrotta
- 4.6.4 Esempio 4: analisi di testabilità per il Convertitore Boost operante in modalità a corrente ininterrotta
- 4.6.5 Esempio 5: analisi di testabilità per il Convertitore Buck-Boost operante in modalità a corrente ininterrotta

4.7 Dimostrazioni (155)

- 4.7.1 Dimostrazione della (4.8) (155)
- 4.7.2 Lemma 4.1 (156)
- 4.7.3 Lemma 4.2 (158)
- 4.7.4 Dimostrazione del Teorema 4.1 (159)
- 4.7.5 Dimostrazione del Lemma 4.3 (164)
- 4.7.6 Lemma 4.4 (165)
- 4.7.7 Dimostrazione del Teorema 4.2 (166)
- 4.7.8 Dimostrazione del Corollario 4.1 (171)
- 4.7.9 Dimostrazione del Teorema 4.3 (172)

4.1 Introduzione

Come si è avuto modo di sottolineare nei capitoli precedenti, l'analisi di testabilità riveste un ruolo cruciale ai fini della diagnosi di guasto e della modellazione dei circuiti analogici. Tuttavia, mentre molta attenzione è stata dedicata dalla Ricerca al problema dell'analisi di testabilità dei circuiti lineari tempo-invarianti, decisamente meno studiato, salvo alcune rare (quanto importanti) eccezioni [1]-[3], è stato il medesimo problema in relazione ai circuiti che esulano dalla suddetta categoria.

In questo capitolo viene descritto un approccio che, per la prima volta, ha affrontato e risolto il problema dell'analisi di testabilità per la classe costituita dai Circuiti a Commutazione Periodica Eccitati da Segnali Costanti (CCPESC), della quale i Convertitori Statici di Energia (CSE) rappresentano membri di ben nota importanza nelle applicazioni. A partire da una impostazione basata su misure nel dominio del tempo, si deriva, in primo luogo, un rigoroso indice quantitativo del grado di identificabilità dei parametri: fissato lo stato degli interruttori, l'insieme dei punti di iniezione e quello dei punti di prelievo, tale indice è in grado di predire quanti e quali parametri possono essere oggetto di diagnosi o identificazioni univoche e quanti campioni temporali sono sufficienti a tali scopi. In ragione della sua intrinseca indipendenza dagli errori di misura, dagli istanti di campionamento e dall'effettivo valore dei parametri, l'indice in questione si configura come un limite superiore alle prestazione di qualsivoglia algoritmo per la diagnosi o la identificazione parametriche.

Il passo successivo è quello di tradurre tale definizione teorica in un algoritmo atto a essere implementato in un efficiente programma per computer capace di effettuare un'analisi di testabilità completamente automatizzata dei CCPESC: un punto chiave di questo processo di traduzione è rappresentato da un risultato teorico ulteriore, il quale consente di trasferire la misura di testabilità messa a punto dal dominio del tempo a quello della frequenza e quindi di trarre partito dai risultati presentanti nel Capitolo 3. A partire dallo schema del circuito, il software così ottenuto è in grado di fornire il massimo numero di parametri per i quali sia possibile la diagnosi o la identificazione univoche, come pure i gruppi di parametri che, se considerati simultaneamente potenzialmente difettosi o incogniti, possono o meno essere oggetto di diagnosi o identificazione non ambigue.

In ragione di quanto detto dianzi, tale programma si configura come un efficiente strumento di misura della testabilità per i CCPESC (e, in particolare, per i CSE) e può essere impiegato come guida al progetto o al raffinamento delle strategie per la diagnosi o la identificazione parametriche per la suddetta classe di circuiti: esso rappresenta, pertanto, uno strumento prezioso tanto per il progettista, che deve individuare quali punti del circuito rendere disponibili per il prelievo, che per l'ingegnere della diagnosi, che deve, a sua volta, sapere quali parametri possono essere univocamente isolati da misure effettuate ai punti suddetti.

Il resto del capitolo è strutturato al modo seguente. Il paragrafo 4.2 si occupa di dare alcune definizioni generali e mettere a punto alcuni risultati preliminari concernenti i CCPESC. Nel paragrafo 4.3 si costruiscono i fondamenti teorici su cui poggiano le definizioni di testabilità proposte. Nel paragrafo 4.4 si derivano l'espressione in forma chiusa della matrice di testabilità e una sua versione semplificata, esplicitando altresì le condizioni sotto le quali quest'ultima possa essere correttamente impiegata. Il paragrafo 4.5 descrive come detta matrice di testabilità possa essere derivata automaticamente ed impiegata ai fini della completa automatizzazione dell'analisi di testabilità e presenta il software, denominato TAPSLIN, che realizza quest'ultima. Il paragrafo 4.6, infine, è interamente dedicato alla illustrazione di esempi di analisi di testabilità di vari circuiti, con particolare riguardo agli schemi più noti di convertitori DC-DC, anche considerando confronti con l'analisi di testabilità per circuiti lineari tempo-invarianti presentata nel Capitolo 3.

4.2 Definizioni e risultati preliminari

4.2.1 Generalità

Si consideri il generico CCPESC \mathcal{N} , costituito da componenti lineari tempoinvarianti e da interruttori, come simbolicamente rappresentato in Fig. 4.1.



Fig. 4.1 – Rappresentazione simbolica di un circuito a commutazione periodica eccitato da segnali costanti con il relativo generico algoritmo di identificazione dei parametri.

Sia

$$\boldsymbol{p} = col\left[p_i\right]_{i=1}^{n_p} \tag{4.1}$$

un vettore n_p -dimensionale di parametri relativi alle equazioni costitutive di detti componenti, il cui valore nominale può ritenersi, all'occorrenza, noto, ma il cui valore effettivo è incognito. L'insieme degli elementi di p potrà coincidere con l'intero insieme dei parametri caratterizzanti \mathcal{N} o con un suo sottoinsieme proprio: in quest'ultimo caso i parametri non compresi in p sono assunti noti e fissati ai rispettivi valori nominali. Inoltre, poiché la presente trattazione intende limitarsi a guasti di tipo parametrico, si assumerà che, in ogni caso, ciascun elemento di p sia finito e strettamente positivo, ossia che $p \in D \subseteq \mathbb{R}^{n_p}_+$, essendo D un opportuno dominio e \mathbb{R}_+ l'insieme dei numeri reali positivi.

Ancora, contenga \mathcal{N} un numero n_{sw} di interruttori. Per $i = 1, \dots, n_{sw}$, si associ all'*i*-esimo interruttore una variabile booleana $\sigma_i(t)$ a valori nell'insieme $S = \{off, on\}$, in maniera che lo stato dell'interruttore possa essere descritto, a ogni istante, in modo ovvio. Se tali variabili sono raccolte nel vettore $\sigma(t) = col[\sigma_i(t)]_{i=1}^{n_{sw}}$, allora esso assumerà valori nell'insieme $S^{n_{sw}} = \{col[\sigma_i]_{i=1}^{n_{sw}}/\sigma_i \in \{off, on\}, i=1,2,...,n_{sw}\}$; poiché quest'ultimo consta di $2^{n_{sw}}$ elementi, si potrà considerare una iniezione $\mathcal{K}: S^{n_{sw}} \rightarrow \{1,2,...,2^{n_{sw}}\}$, di modo che lo stato degli interruttori possa essere globalmente descritto, a ogni istante t, per mezzo della funzione scalare $k(t) = \mathcal{K}[\sigma(t)]$, a valori nell'insieme

$$\mathcal{K} = \left\{1, 2, ..., 2^{n_{sv}}\right\}$$
 (4.2)

dei primi $2^{n_{sw}}$ interi positivi.

Si assumerà, inoltre, che \mathcal{N} sia in regime periodico permanente di periodo T e che si sia scelto un riferimento temporale tale che ogni intervallo [nT,(n+1)T) - con $n \in \mathbb{Z}$, insieme dei numeri interi relativi – possa essere diviso in P sottointervalli $\{[nT + \tau_{m-1}, nT + \tau_m)\}_{m=1}^{P}$, con gli elementi $\{\tau_m\}_{m=1}^{P}$ indipendenti da t. Sarà, quindi, in particolare

$$\tau_0 = 0 \quad , \ \tau_P = T \tag{4.3}$$

In ciascuno di tali sottointervalli, denominati *fasi*, lo stato degli interruttori è costante e può solo cambiare agli istanti $\{nT + \tau_m\}_{m=0}^{P-1}$. Sotto tali ipotesi $k(t) = \mathcal{K}[\sigma(t)]$ risulta essere una funzione periodica di periodo *T* costante a tratti, ossia

$$\left\langle k(t) \equiv k_m, k_m \in \mathcal{K}, t \in \left[nT + \tau_{m-1}, nT + \tau_m \right) \right\rangle_{m=1}^P \tag{4.4}$$

ove \mathcal{K} è l'insieme definito in (4.2).

Si considerino, altresì, in \mathcal{N} un insieme di n_u punti di iniezione degli stimoli e un insieme di n_y punti di misura, cui rimangano associati, rispettivamente, gli insiemi di variabili elettriche $\{e_i\}_{i=1}^{n_u}$ e $\{y_j\}_{j=1}^{n_y}$: tali variabili potranno essere, indifferentemente e indipendentemente le una dalle altre, tensioni o correnti. Nella presente trattazione, si assumerà inoltre che ciascuno stimolo sia costante, vale a dire

$$\left\langle e_i(t) \equiv u_i, u_i \in \mathbb{R}_+, -\infty < t < +\infty \right\rangle_{i=1}^{n_u}$$

$$(4.5)$$

Si raccoglieranno inoltre le summenzionate variabili in opportuni vettori, ossia

$$\boldsymbol{u} = col[\boldsymbol{u}_i]_{i=1}^{n_u}, \ \boldsymbol{y} = col[\boldsymbol{y}_i]_{i=1}^{n_y}$$
(4.6)

Ora, sia $\{\mu_k\}_{k=1}^{n_x}$ l'insieme degli elementi reattivi in \mathcal{N} . Allora, indipendentemente dalla fase considerata, per $j=1,2,\dots,n_x$ una variabile elettrica x_j sarà associata a μ_j in accordo alla seguente regola: $x_j=v_j$ è la tensione su μ_j se quest'ultimo è un capacitore; $x_j=i_j$ è la corrente attraverso μ_j se quest'ultimo è un induttore. Merita osservare che x_j è concettualmente differente dalla variabile di stato associata a μ_j in una certa fase: difatti, v_j $[i_j]$ potrà essere sempre assunta come variabile di stato in detta fase solo se, in riferimento a quest'ultima, non vi sono maglie [insiemi di taglio], comprendenti μ_j , che siano composte [composti] unicamente da capacitori [induttori] e generatori di tensione [corrente]. Se le variabili precedentemente definite sono raccolte nel vettore

$$\boldsymbol{x} = col \left[x_j \right]_{j=1}^{n_x} \tag{4.7}$$

allora, per $m = 1, 2, \dots, P$, nella *m*-esima fase, si può scrivere la seguente equazione

$$\begin{cases} d\mathbf{x}/dt = A^{(m)}\mathbf{x} + B^{(m)}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C^{(m)}\mathbf{x} + D^{(m)}\mathbf{u} \end{cases}, \ t \in [nT + \tau_{m-1}, nT + \tau_m], n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
(4.8)

La derivazione delle (4.8) è discussa nel Paragrafo 4.7.1. Qui si desidera invece sottolineare che tanto il numero P delle fasi quanto la sequenza ordinata $\{k_1, k_2, ..., k_P\}$ dipendono, in generale, dai valori assunti dai vettori ped u. Inoltre, ciascuno degli elementi dell'insieme $\{\tau_m\}_{m=1}^{P-1}$ di istanti di commutazione potrà essere o imposto dall'esterno, nel qual caso l'interruttore corrispondente si dirà *esternamente controllato* (*EC*) e l'istante di commutazione risulterà indipendente da p ed u, oppure derivare dal comportamento intrinseco di \mathcal{N} , nel qual caso l'istante di commutazione dipenderà (in generale) da p ed u e l'interruttore corrispondente si dirà *internamente controllato* (*IC*). In quest'ultimo caso si assumerà che l'istante di commutazione sia univocamente individuato come soluzione di un'equazione ottenuta eguagliando a zero una opportuna variabile elettrica relativa all'interruttore in questione.

Nel seguito, infine, si supporrà che il vettore composto

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \left[\boldsymbol{p}^{tr} \, \boldsymbol{u}^{tr} \right]^{tr} \tag{4.9}$$

assuma valori in un dominio \mathcal{W} nel quale tanto P quanto la sequenza ordinata $\{k_1, k_2, ..., k_P\}$ sono costanti e corrispondono alla particolare modalità di funzionamento di \mathcal{N} che è di interesse per l'analisi. Ovviamente, anche con una tale restrizione su \tilde{p} , i valori degli istanti di commutazione relativi a interruttori IC continueranno a dipendere da \tilde{p} stesso.

4.2.2 Calcolo degli istanti di commutazione, dei corrispondenti valori di x e delle rispettive sensitività

Sotto le ipotesi del precedente paragrafo, si ha che, per m = 1, 2, ..., P, nella m-esima fase $[\tau_{m-1}, \tau_m)$ dell'intervallo [0, T) (che, data la periodicità, può, senza perdita di generalità, essere assunto come intervallo di riferimento) il valore di x all'istante immediatamente precedente la commutazione di fine-fase è dato da

$$\left\langle \boldsymbol{x}(\tau_{m}^{-}) = e^{A^{(m)}(\tau_{m}^{-}\tau_{m-1})} \boldsymbol{x}(\tau_{m-1}^{+}) + \int_{0}^{(\tau_{m}^{-}\tau_{m-1})} e^{A^{(m)}(\tau_{m}^{-}\tau_{m-1}^{-}-\tau)} d\tau B^{(m)} \boldsymbol{u} \right\rangle_{m=1}^{P}$$
(4.10)

ove τ_{m-1}^+ è l'istante immediatamente seguente la commutazione di iniziofase: la (4.10) si ottiene applicando alla (4.8) ben noti risultati della teoria dei sistemi lineari dotati di una rappresentazione nello spazio degli stati. Inoltre, gli istanti di commutazione $\{\tau_m\}_{m=0}^{P}$ dovranno soddisfare a relazioni del tipo

$$\left\langle \begin{cases} E^{(m)} \mathbf{x} \left(\tau_m^- \right) + F^{(m)} \mathbf{u} = 0 & se \ l'interruttore \ e \ IC \\ \tau_m = \tau_{m,0} & se \ l'interruttore \ e \ EC \end{cases} \right\rangle_{m=0}^{P}$$
(4.11)

ove – per $m = 0, 1, \dots, P$ – $E^{(m)}$ e $F^{(m)}$ sono opportune matrici riga (eventualmente coincidenti con qualche riga di $C^{(m)}$ e $D^{(m)}$, rispettivamente), $x(\tau_m)$ è dato da (4.10) e $\tau_{m,0}$ è una quantità nota a priori: si osservi che le (4.3) rientrano nelle (4.11) come casi particolari.

In generale, a causa di eventuali correnti o tensioni di natura impulsiva che possono originarsi agli istanti di commutazione, per $m = 0, 1, \dots, P$ potrà aversi $\mathbf{x}(\tau_m^+) \neq \mathbf{x}(\tau_m^-)$; perciò, si scriverà

$$\left\langle \boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{\tau}_{m}^{+}\right) = \boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{\tau}_{m}^{-}\right) + \Delta \boldsymbol{x}_{m}\right\rangle_{m=0}^{P}$$
(4.12)

ove - per $m = 0, 1, \dots, P$ - $\Delta \mathbf{x}_m = \Delta \mathbf{x}_m(\tilde{\mathbf{p}})$ è una funzione virtualmente nota del vettore definito dalla (4.9): è ovvio che, se non vi sono impulsi in corrispondenza di $t = \tau_m$, si avrà $\Delta \mathbf{x}_m = 0$. Infine, in forza della periodicità, si dovrà avere

$$\boldsymbol{x}(T^+) = \boldsymbol{x}(0^+) \tag{4.13}$$

Le (4.10)-(4.13) assieme alla (4.3) costituiscono un sistema di $(P+1)(2n_x+1)$ equazioni nelle $(P+1)(2n_x+1)$ incognite dell'insieme

$$\bigcup_{j=0}^{P} \left\{ x_i \left(\tau_j^{\pm} \right), \tau_j \right\}_{i=1}^{n_x}$$
(4.14)

Si assumerà che, per ogni \tilde{p} appartenente all'insieme W menzionato alla fine del paragrafo precedente, detto sistema sia univocamente risolubile; quest'ultimo, poi, può essere riscritto in forma vettoriale come

$$\boldsymbol{w}\left(\tilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{x}\left(\tau_{0}^{\pm}\right),\boldsymbol{x}\left(\tau_{1}^{\pm}\right),...,\boldsymbol{x}\left(\tau_{P}^{\pm}\right),\tau_{0},\tau_{1},...,\tau_{P}\right)=\boldsymbol{0}$$
(4.15)

ove $\mathbf{w} = col[w_i]_{i=1}^{(P+1)(2n_x+1)}$.

In virtù dell'ipotesi di univoca risolubilità della (4.15), quest'ultima definisce gli elementi dell'insieme (4.14) come funzioni implicite di \tilde{p} . D'altra parte, per ispezione delle (4.10)-(4.13), si deduce che la funzione vettoriale al primo membro della (4.15) è una funzione analitica di ciascuno dei suoi argomenti: dalla teoria delle funzioni analitiche reali segue allora che gli elementi dell'insieme (4.14) sono funzioni analitiche di \tilde{p} e tali sono le loro derivate parziali rispetto a ciascun elemento di tale vettore. In particolare le funzioni definite da

$$\left\langle \partial \boldsymbol{x} \left(\tau_{0}^{+} \right) \middle/ \partial p_{i} = \partial \boldsymbol{x} \left(0^{+} \right) \middle/ \partial p_{i} = \partial \boldsymbol{x} \left(0^{+}, \tilde{\boldsymbol{p}} \right) \middle/ \partial p_{i} \right\rangle_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.16)

sono vettori funzioni analitiche di \tilde{p} . Le derivate parziali in questione (e, in particolare, le (4.16)) possono essere calcolate dalla (4.15) attraverso una ben nota formula della teoria delle funzioni implicite, che coinvolge le derivate parziali di w rispetto agli elementi di (4.14) e p.

Infine, merita osservare che - quando tutti gli interruttori sono EC (o, più in generale, quando tutti gli elementi di $\{\tau_m\}_{m=0}^P = \{\tau_{m,0}\}_{m=0}^P$ sono noti a priori) - manipolando opportunamente le (4.10), si perviene alla seguente espressione in forma chiusa di $\boldsymbol{x}(0^+, \tilde{\boldsymbol{p}})$:

$$\boldsymbol{x}(0^{+}, \tilde{\boldsymbol{p}}) = \left[I - \left(\prod_{m=1}^{P} e^{A^{(m)}(\boldsymbol{p})(\tau_{m,0} - \tau_{m-1,0})} \right) \right]^{-1}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{P} \left[\left(\prod_{i=k}^{P} e^{A^{(i)}(\boldsymbol{p})(\tau_{i,0} - \tau_{i-1,0})} \right) + \left(\prod_{i=k}^{P} e^{A^{(i)}(\boldsymbol{p})(\tau_{i,0} - \tau_{i-1,0})} \right) + \left(\prod_{i=k}^{P} e^{-A^{(k)}(\boldsymbol{p})\tau} d\tau B^{(k)}(\boldsymbol{p}) \boldsymbol{u} + \Delta \boldsymbol{x}_{k}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \right) \right]$$
(4.17)

ove *I* è la matrice identità con le stesse dimensioni delle matrici $\{A^{(m)}\}_{m=1}^{P}$ e $\langle \Delta \mathbf{x}_{k} \left(\tilde{\mathbf{p}} \right) = \mathbf{x} \left(\tau_{k,0}^{+}, \tilde{\mathbf{p}} \right) - \mathbf{x} \left(\tau_{k,0}^{-}, \tilde{\mathbf{p}} \right) \rangle_{k=1}^{P}$. La (4.17) troverà impiego nella Sezione 4.6.

4.3 Fondamenti teorici per l'analisi di testabilità di circuiti a commutazione periodica eccitati da segnali costanti

4.3.1 Introduzione

In questo paragrafo si pongono le basi teoriche dell'analisi di testabilità per CCPESC. A tale scopo, si concentrerà l'attenzione su una particolare fase dell'intervallo di riferimento [0, T), fase che – senza perdita di generalità – potrà essere assunta coincidere con $[\tau_0, \tau_1)$. Per comodità di trattazione, inoltre, si terrà conto della (4.3) e si ometterà l'indice *I*, di modo che la fase in questione verrà semplicemente designata con $[0, \tau)$.

4.3.2 Equazioni di diagnosi di guasto e loro risolvibilità

Si cominci con l'attribuire a u una particolare determinazione u_0 . Allora – per $j = 1, 2, ..., n_y$ - l'evoluzione di y_j in $[0, \tau)$ potrà essere descritta da una funzione

$$y_j = y_j^{[0,\tau)}(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_0)$$
 (4.18)

coincidente con la restrizione all'intervallo $[0, \tau)$ di una opportuna funzione $y_j = y_j(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_0)$ definita per ogni $t \in [0, +\infty)$.

Fisicamente, questa $y_j(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_0)$ rappresenta la maniera in cui y_j evolverebbe qualora non vi fossero commutazioni successive all'istante t = 0. Per comodità di trattazione, si raccoglieranno le funzioni nel secondo membro della (4.18) in un vettore

$$\mathbf{y}^{(0,\tau)}(t,\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}_0) = col \left[y_j^{(0,\tau)}(t,\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}_0) \right]_{j=1}^{n_y}$$
(4.19)

e si farà uso, altresì, della versione "non ristretta" della (4.19), vale a dire

$$\mathbf{y}(t, \mathbf{p}, \mathbf{u}_0) = col \left[y_j(t, \mathbf{p}, \mathbf{u}_0) \right]_{j=1}^{n_y}$$
(4.20)

Si consideri ora l'insieme di istanti

$$\mathcal{T} = \left\{ t_k \right\}_{k=1}^{n_t}, \left\langle t_k \in (0, \tau) \right\rangle_{k=1}^{n_t}$$
(4.21)

e il vettore ottenuto collezionando i campioni, presi a tali istanti, del vettore definito in (4.19), vale a dire

$$\mathbf{y}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_0) = col \left[\mathbf{y}^{(0,\tau)}(t_k, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_0) \right]_{k=1}^{n_t} = col \left[\mathbf{y}_{(r)}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_0) \right]_{r=1}^{n}$$
(4.22)

si osservi che, per comodità di esposizione, in (4.22) i campioni $\left\{ \left\{ y_{j}^{(0,\tau)}(t_{k},\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}_{0})\right\}_{k=1}^{n_{t}}\right\} _{j=1}^{n_{y}}$ sono stati ribattezzati in modo che

$$\left\langle y_{(r)}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_{0}) = y_{r-n_{y} \text{ int}\left[(r-1) / n_{y}\right]}^{(0,\tau)} \left(t_{1+\text{int}\left[(r-1) / n_{y}\right]}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_{0} \right) \right\rangle_{r=1}^{n}$$
(4.23)

ove

$$n = n_y \bullet n_t \tag{4.24}$$

e *int[a]* indica il massimo intero non maggiore di *a*.

Ora, ottenuta una misura $\mathbf{y}_{\mathcal{T}}^* = col \left[\mathbf{y}_{(r)}^* \right]_{r=1}^n di \mathbf{y}_{\mathcal{T}}(\mathbf{p}, \mathbf{u}_0)$, ci si può proporre di risalire al vero valore \mathbf{p}_0 di \mathbf{p} risolvendo l'equazione vettoriale

$$\mathbf{y}_{\mathcal{T}}(\mathbf{p}, \mathbf{u}_0) = \mathbf{y}_{\mathcal{T}}^* \tag{4.25}$$

nell'incognita p. Ricordando (4.25), (4.24) e (4.1), si vede che la (4.25) è equivalente a un sistema di $n = n_y \cdot n_t$ equazioni in n_p incognite che possono denominarsi *equazioni di diagnosi di guasto*: difatti, supponendo che la soluzione di interesse p_0 possa essere univocamente individuata, si potrà decidere circa lo "stato di salute" di un certo componente circuitale confrontando i corrispondenti elementi di p_0 con i rispettivi valori nominali. Nondimeno, la (4.25) può impiegarsi anche qualora non si disponga di informazioni riguardo al valore nominale dei parametri, come può accadere quando si debba affrontare il problema di identificare il valore dei parametri di un certo modello circuitale.

In ogni caso, dalle precedenti considerazioni discende immediatamente la seguente condizione necessaria per l'univoca risolvibilità della (4.25)

$$n_y \bullet n_t \ge n_p \tag{4.26}$$

Se si considera n_p come fissato, si potrebbe pensare di rendere la (4.26) soddisfatta agendo sui fattori al primo membro. Si deve considerare, tuttavia che il numero di punti di misura disponibili n_y è limitato da vincoli di natura sia tecnica che economica, il che rende, in generale, più conveniente elevare il numero di istanti di misura n_t . Il valore ottimale di quest'ultimo, d'altra parte, non può essere scelto semplicemente in base alla (4.26).

In termini più generali il problema che si pone è scegliere l'insieme degli istanti di misura \mathcal{T} definito dalla (4.21) (dunque, tanto il loro numero n_t che i rispettivi valori) in modo da massimizzare la risolvibilità della (4.25). Quest'ultima, in generale, risulta un'equazione non lineare in p, il che impedisce di impiegare la ben nota teoria dei sistemi lineari. Invece, la risolvibilità della (4.25) può essere studiata ricorrendo al teorema della funzione implicita, secondo il quale detta equazione è univocamente risolubile in un intorno del vero valore p_0 di p non appena

$$rank\left[\Psi_{\mathcal{T}}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}\right)\right] = n_{p} \tag{4.27}$$

ove sono stati introdotti il vettore

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_0 = \left[\boldsymbol{p}_0^{tr} \ \boldsymbol{u}_0^{tr} \right]^{tr} \tag{4.28}$$

per analogia con (4.9) e lo Jacobiano $\Psi_{\mathcal{T}}(\tilde{p}_0)$ di $y_{\mathcal{T}}(p, u_0)$ valutato per $p = p_0$, ossia

$$\mathcal{\Psi}_{\mathcal{T}}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}\right) = row\left[\partial \boldsymbol{y}_{\mathcal{T}}\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}_{0}\right)/\partial p_{i}\Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{0}}\right]_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.29)

D'altra parte, anche se la (4.27) non è soddisfatta, il primo membro fornisce informazioni su quanto "distanti" si sia da una soluzione unica: difatti, in tale eventualità, le soluzioni della (4.25) sono determinate a meno di una varietà $\left(n_p - rank\left[\Psi_T(\tilde{p}_0)\right]\right)$ -dimensionale in un intorno di p_0 .

4.3.3 Massimizzazione della risolvibilità delle equazioni di diagnosi di guasto

Dalle considerazioni precedenti risulta chiaro che per massimizzare la risolvibilità delle (4.25) in un intorno di p_0 occorre scegliere l'insieme \mathcal{T} definito dalla (4.21) in modo da massimizzare $rank \left[\Psi_{\mathcal{T}} \left(\tilde{p}_0 \right) \right]$: difatti, tanto maggiore è quest'ultimo, tanto minore sarà l'ambiguità che sorge nel tentativo di risolvere le (4.25) in un tale intorno.

Per mostrare come ciò possa ottenersi, si introduce la matrice
$$\Psi^{(0,\tau)}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) = row \left[\partial \boldsymbol{y}^{(0,\tau)}(t,\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}_{0}) / \partial \boldsymbol{p}_{i} \right|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{0}} \right]_{i=1}^{n_{p}}$$

$$= row \left[\boldsymbol{\phi}_{i}^{(0,\tau)}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \right]_{i=1}^{n_{p}} = row \left[col \left[\boldsymbol{\phi}_{ji}^{(0,\tau)}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{p}}$$

$$(4.30)$$

ove, naturalmente, è

$$\left\langle \boldsymbol{\phi}_{i}^{(0,\tau)}\left(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}\right) = \partial \boldsymbol{y}^{(0,\tau)}\left(t,\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}_{0}\right) / \partial \boldsymbol{p}_{i} \Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{0}} \right\rangle_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.31)

Si considererà altresì la versione "non ristretta" della (4.30), vale a dire

$$\Psi(t, \tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) = row \left[\frac{\partial \boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_{0})}{\partial p_{i}} \right]_{i=1}^{n_{p}} = row \left[\frac{\partial \boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_{0})}{\partial p_{i}} \right]_{i=1}^{n_{p}} = row \left[col \left[\phi_{ji}(t, \tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \right]_{j=1}^{n_{p}} \right]_{i=1}^{n_{p}}$$

$$(4.32)$$

in cui $t \in [0, +\infty)$.

Merita osservare che $\Psi^{(0,\tau)}(t, \tilde{p}_0)$ è una matrice di funzioni del tempo t, mentre $\Psi_{\mathcal{T}}(\tilde{p}_0)$ è una matrice di numeri; d'altra parte, dal confronto fra (4.22), (4.29) e (4.30) segue che $\Psi_{\mathcal{T}}(\tilde{p}_0)$ può pensarsi ottenuta collezionando i campioni di $\Psi^{(0,\tau)}(t, \tilde{p}_0)$ agli istanti (4.21), vale a dire

$$\Psi_{\mathcal{T}}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}\right) = col\left[\Psi^{\left(0,\tau\right)}\left(t_{k},\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}\right)\right]_{k=1}^{n_{t}}$$
(4.33)

Per procedere, si indicherà con $colrank \left[\Psi^{(0,\tau)}(t, \tilde{p}_0) \right]$ il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di $\Psi^{(0,\tau)}(t, \tilde{p}_0)$ e, per chiarezza, si confronterà brevemente tale entità con $rank \left[\Psi_{\mathcal{T}}(\tilde{p}_0) \right]$. Poiché $\Psi_{\mathcal{T}}(\tilde{p}_0)$ è una matrice di numeri, si avrà $rank \left[\Psi_{\mathcal{T}}(\tilde{p}_0) \right] = r$ allorquando: (a) esista in $\Psi_{\mathcal{T}}(\tilde{p}_0)$ un minore non nullo di ordine r e (b) tutti i minori di ordine superiore siano nulli. Per contro, sarà $colrank \left[\Psi^{(0,\tau)}(t,\tilde{p}_0) \right] = r$ allorché: (a) esistano in $\Psi^{(0,\tau)}(t,\tilde{p}_0)$ r colonne (si supponga, per fissare le idee, che siano le prime r: $\left\{ \phi_i^{(0,\tau)}(t,\tilde{p}_0) \right\}_{i=1}^r$) tali che - per qualunque insieme $\left\{ \alpha_i \right\}_{i=1}^r$ di *r* numeri non tutti nulli - la somma $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \phi_i^{(0,\tau)}(t, \tilde{p}_0)$ risulti non identicamente nulla (rispetto a $t \in (0,\tau)$) e (b) per ciascun gruppo comprendente un numero di colonne maggiore di *r* la precedente proprietà non risulti soddisfatta.

Con tali premesse, la soluzione al problema della massimizzazione di $rank \left[\Psi_{\mathcal{T}}(\tilde{p}_0) \right]$ è fornita dalla seguente proposizione.

Teorema 4.1
Sia colrank
$$\left[\Psi^{(0,\tau)}(t, \tilde{p}_0) \right] = r$$
. Allora
(a) max rank $\left[\Psi_{\mathcal{T}}(\tilde{p}_0) \right] = r$;

(b) tale valor massimo è raggiunto per *quasi* ogni scelta di un insieme $\mathcal{T} = \{t_k\}_{k=1}^r$ di *r* istanti distinti appartenenti all'intervallo di osservazione $[0, \tau)$. Qui il termine *quasi* significa *eccettuato, al più, un insieme finito di istanti.*

La dimostrazione del teorema è rimandata al Paragrafo 4.7.4; ci si limita qui alle seguenti osservazioni.

- (i) Il Teorema 1 afferma che il massimo valore di $rank \left[\Psi_{\mathcal{T}} \left(\tilde{\boldsymbol{p}}_{0} \right) \right]$ al variare di \mathcal{T} nella classe dei sottoinsiemi finiti non vuoti di $\left[0, \tau \right)$ è fissato a priori da $r = colrank \left[\Psi^{(0, \tau)} \left(t, \tilde{\boldsymbol{p}}_{0} \right) \right]$.
- (ii) Per raggiungere tale massimo valore, è *sufficiente* scegliere in maniera *quasi* arbitraria un numero di istanti di misura pari al valore *r* dianzi definito. In altri termini, praticamente qualunque scelta di un insieme $\mathcal{T} = \{t_k\}_{k=1}^r$ di *r* istanti distinti rende massimo $rank \left[\Psi_{\mathcal{T}} \left(\tilde{p}_0 \right) \right]$, ma è possibile che tale massimo possa essere raggiunto per mezzo di un insieme \mathcal{T} di cardinalità minore di *r*. Una importante eccezione è rappresentata dal caso di singolo punto di stimolo e singolo punto di prelievo, caso in cui impiegare un insieme di cardinalità pari a *r* diviene necessario, oltre che sufficiente. In ogni caso, comunque si scelga la cardinalità di \mathcal{T} , questa non potrà mai condurre a un $rank \left[\Psi_{\mathcal{T}} \left(\tilde{p}_0 \right) \right]$ maggiore di *r*.

(iii) La (quasi) totale arbitrarietà nella scelta degli r istanti può essere sfruttata scegliendo quegli istanti che minimizzano gli effetti degli errori di misura e delle tolleranze dei componenti.

Dalla trattazione precedente segue che colrank $\left[\Psi^{(0,\tau)}(t,\tilde{p}_0)\right] = colrank \left[\Psi^{(0,\tau)}(t,p_0,u_0)\right]$ può essere assunto come misura del grado di risolvibilità delle equazioni di diagnosi di guasto (4.25) in un intorno del valore vero p_0 di p quando il vettore u degli stimoli assume la particolare determinazione u_0 . Tale misura, tuttavia, sembra essere affetta dal seguente duplice inconveniente: (a) essa appare dipendere da p_0 , ossia proprio dalla soluzione delle (4.25) che si vorrebbe individuare e (b) quand'anche detta soluzione fosse nota, la misura in questione parrebbe avere validità meramente locale (limitata, cioè, a un intorno di p_0) e dipendente dal particolare valore u_0 scelto per il vettore di ingresso; parrebbe quindi, in definitiva, dipendere dal peculiare valore $\tilde{p}_0 = \left[p_0^{tr} u_0^{tr}\right]^{tr}$ assunto dal vettore \tilde{p} definito in (4.9). Tale inconveniente, tuttavia, è solo apparente, come mostrato dalla proposizione seguente.

Teorema 4.2

$$colrank \left[\Psi^{(0,\tau)}(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}) \right] = colrank \left[\Psi^{(0,\tau)}(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right]$$
 è quasi indipendente da
 $\tilde{\boldsymbol{p}} = \left[\boldsymbol{p}^{tr} \boldsymbol{u}^{tr} \right]^{tr}$. Precisamente si ha
 $colrank \left[\Psi^{(0,\tau)}(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right] \equiv \max_{\tilde{p}} colrank \left[\Psi^{(0,\tau)}(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right]$ per ogni $\tilde{\boldsymbol{p}}$, eccettuati,
al più, valori di $\tilde{\boldsymbol{p}}$ costituenti un insieme di misura nulla.

Si rinvia al Paragrafo 4.7.7 per la dimostrazione della proposizione precedente; qui se ne discute brevemente il significato. Il Teorema 4.2 afferma che la misura di risolvibilità delle (4.25) rappresentata da $colrank \left[\Psi^{(0,\tau)}(t, \tilde{p}_0) \right]$ è solo in apparenza dipendente dal particolare valore $\tilde{p}_0 = \left[p_0^{tr} u_0^{tr} \right]^{tr}$. Si tratta, invece, di una misura globale: fissati la fase di interesse, i punti di iniezione e quelli di misura, essa dipende dalla natura dei componenti e dalla topologia del circuito ma è, in pratica, indipendente tanto dal valore dei parametri che da quello degli ingressi.

Si indichi ora, in modo naturale, con $colrank \left[\Psi(t, \tilde{p})\right]$ il massimo numero di colonne linearmente indipendenti della matrice *non ristretta* $\Psi(t, \tilde{p})$ definita in (4.32); si può così enunciare la seguente proposizione.

Lemma 4.1

Con riferimento alle entità sopra definite $\Psi^{(0,\tau)}(t,\tilde{p}) \in \Psi(t,\tilde{p})$, si ha

$$\forall \tilde{\boldsymbol{p}} \left(colrank \left[\boldsymbol{\Psi}^{(0,\tau)} \left(t, \tilde{\boldsymbol{p}} \right) \right] = colrank \left[\boldsymbol{\Psi} \left(t, \tilde{\boldsymbol{p}} \right) \right] \right)$$
(4.34)

La dimostrazione della precedente proposizione è illustrata nel Paragrafo 4.7.2.

4.3.4 Definizioni di Testabilità e di analisi di testabilità

Mettendo assieme il Teorema 4.2 e la (4.34), si perviene alla seguente definizione (*quasi*) univoca. Generato un valore $\tilde{p}^* = [p^{*tr} u^{*tr}]^{tr}$ di \tilde{p} in modo casuale, si denominerà *Testabilità* del circuito allo studio (rispetto ai prescelti fase, punti di iniezione e punti di misura) la quantità

$$\mathcal{T} = colrank[\Psi(t, \tilde{\boldsymbol{p}}^*)]$$
(4.35)

Tale entità rappresenta il massimo numero di parametri che possono essere oggetto di diagnosi o identificazione univoche a partire da misure effettuate, nella fase prescelta, sui punti di prelievo selezionati: essa costituisce, dunque, una misura dell'attitudine del circuito a essere *testato*, il che rende conto del nome che a essa si attribuisce.

Un'altra entità significativa è definita dalla relazione

$$\rho = 100 \cdot \mathcal{T} / n_p \% \tag{4.36}$$

e può essere denominata *Rapporto di Testabilità*: questa pone in relazione il massimo numero di parametri simultaneamente diagnosticabili (o identificabili) col numero totale di parametri considerati potenzialmente difettosi (o, semplicemente, incogniti) e rappresenta, dunque, una misura globale assoluta di testabilità.

Fissati la fase di interesse, l'insieme dei punti di stimolo e quello dei punti di misura, sia τ che ρ risultano indipendenti dal valore degli stimoli, dall'effettivo valore dei parametri, dagli istanti di campionamento e dagli errori di misura: perciò gli indici summenzionati possono riguardarsi come caratteristiche intrinseche del circuito in esame, così come individuato dalla sua topologia e dalla natura dei suoi componenti.

L'analisi fin qui condotta consente di affrontare il problema della testabilità a livello di circuito; opportunamente estesa, tuttavia, essa consente di valutare altresì la testabilità a livello di componente. Per comprendere tale ultimo aspetto, occorre considerare che, come spesso accade, può aversi $T < n_p$, ossia ($\rho < 100\%$): in tale condizione, che può dirsi di bassa testabilità, il problema della diagnosi di guasto (o identificazione) dei parametri non può risolversi univocamente. Si potrebbe, allora, pensare di aggirare tale condizione cambiando il numero e/o la natura dei punti di iniezione e di prelievo: tuttavia, come già ricordato, sia gli uni che gli altri risultano in pratica soggetti a vincoli di natura sia tecnica che economica, il che richiede di escogitare strategie alternative.

Per analogia con l'approccio multifrequenziale adottato per i circuiti lineari tempo-invarianti nel Capitolo 3, una tale strategia può consistere nell'assumere che, degli n_p parametri considerati, solo k - con $1 \le k \le T$ possano essere simultaneamente guasti (o, semplicemente, siano simultaneamente incogniti), mentre i restanti $n_p - k$ sono considerati noti e fissati ai rispettivi valori nominali: una tale ipotesi, in verità abbastanza realistica, può denominarsi, di nuovo per analogia col citato approccio multifrequenziale, *ipotesi di guasto k-uplo*.

Perché tale ipotesi possa essere efficacemente formulata, diviene fondamentale individuare i gruppi testabili (GT) - ossia gli insiemi massimali (di cardinalità pari a T) di parametri che, se considerati simultaneamente difettosi (o incogniti), possono essere oggetto di diagnosi univoca - e i gruppi di ambiguità canonici (GAC), ossia gli insiemi minimali (di cardinalità variabile, ma, comunque, non superiore a T) di parametri che, se considerati simultaneamente difettosi (o incogniti), non possono essere identificati univocamente. Ora, sia – come di consueto - p_0 il valore vero di p e u_0 il valore attribuito al vettore degli ingressi u allo scopo di individuare p_0 , di modo che risulti $\tilde{p}_0 = \left[p_0^{tr} u_0^{tr} \right]^{tr}$ la corrispondente determinazione del vettore \tilde{p} . Dal momento che – come si desume immediatamente dalle (4.30), (4.31) - ciascun parametro rimane associato a una e una sola colonna di $\Psi^{(0,\tau)}(t, \tilde{p}_0)$ e, in virtù di argomentazioni analoghe a quelle che consentono di provare il Lemma 1, un gruppo di colonne di $\Psi^{(0,\tau)}(t, \tilde{p}_0)$ è linearmente indipendente se e solo se lo è il gruppo delle corrispondenti colonne di $\Psi(t, \tilde{\boldsymbol{p}}_0)$, risulta che un insieme di parametri

costituirà, rispettivamente, un GT se e solo le corrispondenti colonne di $\Psi(t, \tilde{p}_0)$ costituiscono un insieme massimale di elementi linearmente dipendenti e un GAC se e solo se le corrispondenti colonne di $\Psi(t, \tilde{p}_0)$ costituiscono un insieme minimale di elementi linearmente dipendenti.

Tuttavia, in analogia con quanto accade per $colrank \left[\Psi(t, \tilde{p}_0) \right]$, affinché le precedenti definizioni acquistino un reale valore concettuale e un concreto significato operativo, occorre mostrare che esse sono, in pratica, indipendenti dall'incognito valore vero p_0 di p: ciò è garantito dalla proposizione seguente.

Corollario 4.1

Sia $1 \le r \le n_p$ e sia $\{\phi_{k_i}(t, \tilde{p})\}_{i=1}^r$ un insieme di r colonne di $\Psi(t, \tilde{p})$, ove $k_i : \{1, 2, ..., r\} \rightarrow \{1, 2, ..., n_p\}$ è una iniezione. Allora $\{\phi_{k_i}(t, \tilde{p})\}_{i=1}^r$ è o un insieme di elementi linearmente dipendenti per ogni \tilde{p} o un insieme di elementi linearmente indipendenti per *quasi* ogni \tilde{p} , ove il termine *quasi* assume il significato di "eccettuati, al più, i valori di \tilde{p} appartenenti a un insieme di misura nulla".

Per la dimostrazione della precedente proposizione si rimanda al Paragrafo 4.7.8; qui ci si limita a sottolinearne la seguente importante conseguenza. Il Corollario 1 afferma, in sostanza, che, detto $\tilde{p}^* = [p^{*tr} u^{*tr}]^{tr}$ un valore di \tilde{p} generato in modo casuale, la matrice $\Psi(t, \tilde{p}^*)$ può, in linea di principio, essere impiegata non solo per l'analisi di testabilità a livello di circuito (determinazione di $\mathcal{T} \in \rho$), ma anche per l'analisi di testabilità a livello di componente (determinazione dei GT e dei GAC).

E' fondamentale sottolineare che – fissati la fase e i punti di prelievo l'analisi di testabilità descritta dianzi fornisce un limite superiore alle prestazioni di qualsivoglia algoritmo intenda servirsi, per la diagnosi dei parametri o la loro identificazione, di misure effettuate in corrispondenza di tale fase e tali punti di prelievo. D'altra parte, i concetti summenzionati si basano sulla lineare dipendenza di un insieme di vettori funzioni del tempo e quindi, così come sono stati espressi, essi non si prestano a una agevole traduzione in un programma per computer. Nel prossimo paragrafo, quale primo passo verso una procedura completamente automatizzata, si descriverà come possa ottenersi una matrice completamente numerica, equivalente a $\Psi(t, \tilde{p}^*)$ ai fini dell'analisi di testabilità sia a livello di circuito che di componente.

4.4 Matrice di testabilità

4.4.1 Dal dominio del tempo al campo reale (passando per il dominio di Laplace)

Si cominci con l'osservare che – in forza della loro stessa definizione – il vettore

$$\mathbf{y}(t,\tilde{\mathbf{p}}) = col\left[y_{j}(t,\tilde{\mathbf{p}})\right]_{j=1}^{n_{y}}$$
(4.37)

e quindi la matrice

$$\Psi(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) = row \left[\partial \boldsymbol{y}(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) / \partial p_i \right]_{i=1}^{n_p}$$

= $row \left[\boldsymbol{\phi}_i(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right]_{i=1}^{n_p} = row \left[col \left[\boldsymbol{\phi}_{ji}(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right]_{j=1}^{n_y} \right]_{i=1}^{n_p}$ (4.38)

ottenuti, rispettivamente, dalla (4.20) e dalla (4.32) rimpiazzando formalmente il valore peculiare \tilde{p}_0 con il generico \tilde{p} , sono Laplace-trasformabili come funzioni del tempo *t*.

Si denoti, quindi, con $\mathcal{L}[\bullet]$ l'operatore "trasformata di Laplace". Allora, dalla (4.38), in forza di argomentazioni analoghe a quelle impiegate nella dimostrazione del Teorema 4.2 (vedasi il Paragrafo 4.7.7), si ottiene

$$\Theta(s, \tilde{\boldsymbol{p}}) \triangleq row \left[\boldsymbol{\theta}_{i}(s, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right]_{i=1}^{n_{p}} \triangleq \mathcal{L} \left[\boldsymbol{\Psi}(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right]$$

= $row \left[\mathcal{L} \left[\boldsymbol{\phi}_{i}(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right] \right]_{i=1}^{n_{p}} = row \left[\boldsymbol{C}_{i}(s, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right]_{i=1}^{n_{p}} / \left(s\Delta^{2}(s, \boldsymbol{p}) \right)$
= $row \left[col \left[\boldsymbol{C}_{ji}(s, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{p}} / \left(s\Delta^{2}(s, \boldsymbol{p}) \right)$ (4.39)

ove

$$\left\langle \boldsymbol{C}_{i}\left(\boldsymbol{s},\tilde{\boldsymbol{p}}\right) = col\left[\boldsymbol{C}_{ji}\left(\boldsymbol{s},\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right]_{j=1}^{n_{y}}\right\rangle_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.40)

con

$$\left\langle \left\langle C_{ji}\left(s,\tilde{\boldsymbol{p}}\right) = \sum_{h=0}^{2G} c_{h}^{(ji)}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\right) s^{h} \right\rangle_{j=1}^{n_{y}} \right\rangle_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.41)

e

$$\Delta(s, \boldsymbol{p}) = \sum_{h=0}^{G} b_h(\boldsymbol{p}) s^h \tag{4.42}$$

polinomi nella variabile complessa *s*, i cui coefficienti sono funzioni analitiche di $p \in \tilde{p}$, rispettivamente. Si consideri, inoltre, la matrice

$$C(\tilde{\boldsymbol{p}}) = row \left[\boldsymbol{c}_{i}(\tilde{\boldsymbol{p}})\right]_{i=1}^{n_{p}} = row \left[col \left[\boldsymbol{c}^{(ji)}(\tilde{\boldsymbol{p}})\right]_{j=1}^{n_{y}}\right]_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.43)

ove, con riferimento alla (4.41), si sono introdotti i vettori

$$\left\langle \left\langle \boldsymbol{c}^{(ji)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = col \left[c_h^{(ji)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \right]_{h=0}^{2G} \right\rangle_{j=1}^{n_y} \right\rangle_{i=1}^{n_p}$$
(4.44)

Allora, un passo fondamentale verso l'automatizzazione dell'analisi di testabilità per CCPESC è rappresentato dalla proposizione seguente.

Teorema 4.3

Sia $1 \le r \le n_p$ e sia $k_i : \{1, 2, ..., r\} \rightarrow \{1, 2, ..., n_p\}$ una iniezione. Allora, con riferimento a (4.38) e (4.43), sussiste quanto segue.

(i)
$$\forall \tilde{\boldsymbol{p}} \left(\left\{ \boldsymbol{\phi}_{k_i} \left(t, \tilde{\boldsymbol{p}} \right) \right\}_{i=1}^r \text{ è un ILD } \Leftrightarrow \left\{ \boldsymbol{c}_{k_i} \left(\tilde{\boldsymbol{p}} \right) \right\}_{i=1}^r \text{ è un ILD} \right)$$

(ii)
$$\forall \tilde{\boldsymbol{p}} \left(colrank \left\lfloor \Psi(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right\rfloor = rank \left\lfloor C(\tilde{\boldsymbol{p}}) \right\rfloor \right)$$

ove ILD è l'acronimo di Insieme Linearmente Dipendente.

La dimostrazione è rinviata al Paragrafo 4.7.9. Qui, invece, importa notare esplicitamente che, mettendo assieme il Teorema 4.3 con i risultati del precedente paragrafo, si ottiene che – indicato con \tilde{p}^* un valore di \tilde{p} generato in modo casuale – l'analisi di testabilità, sia a livello di circuito che a livello di componente, può essere condotta impiegando $c(\tilde{p}^*)$ in luogo di

$$\Psi(t, \tilde{\boldsymbol{p}}^*).$$

In particolare, dal confronto fra la proposizione (ii) della tesi e la (4.35) segue

$$\mathcal{T} = rank \left[C(\tilde{\boldsymbol{p}}^*) \right] \tag{4.45}$$

Inoltre, confrontando la proposizione (i) della medesima tesi con il Corollario 4.1, si ha che - se $k_i : \{1, 2, ..., r\} \rightarrow \{1, 2, ..., n_p\}$ è una iniezione – allora

$$\left\{ p_{k_{i}} \right\}_{i=1}^{r} \stackrel{\text{eun GAC di ordine } r \Leftrightarrow \left\{ c_{k_{i}} \left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{*} \right) \right\}_{i=1}^{r} \stackrel{\text{eun ILD minimale}}{=}$$

$$\left\{ p_{k_{i}} \right\}_{i=1}^{T} \stackrel{\text{eun GT}}{=} \left\{ c_{k_{i}} \left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{*} \right) \right\}_{i=1}^{T} \stackrel{\text{eun ILI}}{=}$$

$$(4.46)$$

ove ILI è l'acronimo di Insieme Linearmente Indipendente.

I risultati presentati dianzi sono di notevole importanza, perché - al contrario di $\Psi(t, \tilde{p}^*)$ - $C(\tilde{p}^*)$ è una matrice completamente numerica, per la quale procedure efficienti per il calcolo del rango e i test di lineare indipendenza sono facilmente implementabili su computer, cosa che rende possibile un'analisi di testabilità completamente automatizzata: per tale motivo, nel seguito si farà riferimento a $C(\tilde{p}^*)$ come la *matrice di testabilità*.

4.4.2 Espressione in forma chiusa della matrice di testabilità

A dispetto della loro notevole importanza concettuale, le (4.45), (4.46) non acquisiscono utilità pratica finché non si disponga di un'espressione in forma chiusa di $C(\tilde{p}^*)$. Per pervenire a quest'ultima, si inizi col porre

$$Y_{j}(s,\tilde{\boldsymbol{p}}) \triangleq \mathcal{L}\left[y_{j}(t,\tilde{\boldsymbol{p}})\right] = N_{j}(s,\tilde{\boldsymbol{p}})/(s\Delta(s,\boldsymbol{p}))$$

$$= \sum_{h=0}^{G} a_{h}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}})s^{h}/(s\Delta(s,\boldsymbol{p}))$$
(4.47)

Dal confronto delle (4.37)-(4.40), (4.47) e scambiando - per $i = 1, 2, \dots, n_p$ l'ordine degli operatori $\mathcal{L}[\bullet] \in \partial(\bullet) / \partial p_i$ segue allora

$$\left\langle \left\langle C_{ji}\left(s,\tilde{\boldsymbol{p}}\right) = s\Delta^{2}\left(s,\boldsymbol{p}\right)\partial Y_{j}\left(s,\tilde{\boldsymbol{p}}\right)/\partial p_{i}\right\rangle_{j=1}^{n_{y}}\right\rangle_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.48)

Confrontando (4.48) e (4.47), si ottiene poi

$$\left\langle \left\langle C_{ji}(s,\tilde{\boldsymbol{p}}) = \Delta(s,\boldsymbol{p}) \partial N_{j}(s,\tilde{\boldsymbol{p}}) / \partial p_{i} - N_{j}(s,\tilde{\boldsymbol{p}}) \partial \Delta(s,\boldsymbol{p}) / \partial p_{i} \right\rangle_{j=1}^{n_{y}} \right\rangle_{i=1}^{n_{p}} (4.49)$$

Dalla (4.49) - ricordando le (4.41), (4.42), (4.44), (4.47) e impiegando il principio di identità dei polinomi - si trae

$$\left\langle \left\langle \boldsymbol{c}^{(ji)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \left[\mathcal{B}(\boldsymbol{p}) \mid \mathcal{A}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \right] \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{\boldsymbol{a}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}})}{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p})} \right] \right\rangle_{j=1}^{n_y} \right\rangle_{i=1}^{n_p}$$
(4.50)

ove, accanto ai (4.44), sono stati introdotti i vettori

$$\left\langle \boldsymbol{a}^{(j)}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\right) = col\left[a_{h}^{(j)}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right]_{h=0}^{G}\right\rangle_{j=1}^{n_{y}}$$

$$\boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{p}\right) = col\left[b_{h}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right]_{h=0}^{G}$$
(4.51)

e le matrici (2G+1) per(G+1)

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{p}) \triangleq pad[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p})] \\ \left\langle \mathcal{A}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \triangleq pad[\boldsymbol{a}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}})] \right\rangle_{j=1}^{n_{y}}$$
(4.52)

Confrontando poi (4.50) e (4.43) si trova

$$C(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \mathcal{F}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{p}})$$
(4.53)

avendo posto

$$\mathcal{F}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \left[diag \left[\mathcal{B}(\boldsymbol{p}) \right]^{n_{y}} \quad col \left[-\mathcal{A}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]$$
(4.54)

e

$$\mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = row \left[\frac{\partial}{\partial p_i} \left[col \left[\boldsymbol{a}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \right]_{j=1}^{n_y} \right]_{i=1}^{n_p} \right]_{i=1}^{n_p}$$
(4.55)

Le equazioni (4.53)-(4.55) danno $C(\tilde{p})$ in forma chiusa, come si desiderava.

4.4.3 Forma ridotta della matrice di testabilità

In questo paragrafo si mostrerà che, sotto certe condizioni individuate nel seguito, la matrice $C(\tilde{p}) = \mathcal{F}(\tilde{p}) \mathcal{M}(\tilde{p})$ può essere rimpiazzata da $\mathcal{M}(\tilde{p})$ ai fini dell'analisi di testabilità.

Per procedere in tale direzione, si introducono le matrici

$$\left\langle \mathcal{M}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \triangleq row \left[\frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{\boldsymbol{a}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}})}{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p})} \right] \right]_{i=1}^{n_p}, \mathcal{M}^{(j)}_{aug}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \triangleq \left[\frac{\boldsymbol{a}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}})}{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p})} \mathcal{M}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \right] \right\rangle_{j=1}^{n_y}$$
(4.56)

e, invocando l'analogia formale con l'approccio alla testabilità dei circuiti lineari tempo-invarianti presentato nel Capitolo 3, si adatta in modo naturale il Teorema 3.5 del paragrafo 3.5.2, ottenendo quanto segue.

Con riferimento alle (4.42), (4.47), (4.51), (4.56), esista *almeno* un intero j tale che

(i) per almeno un valore $\tilde{\boldsymbol{p}}^* = \left[\boldsymbol{p}^{*tr} \boldsymbol{u}^{*tr} \right]^{tr} \operatorname{di} \tilde{\boldsymbol{p}}$, $N_j(s, \tilde{\boldsymbol{p}}^*) \in \Delta(s, \boldsymbol{p}^*)$ non abbiano zeri a comune;

(ii)
$$\max_{\boldsymbol{p}} rank \left[\mathcal{M}_{D}^{(j)}\left(\tilde{\boldsymbol{p}} \right) \right] \neq \max_{\boldsymbol{p}} rank \left[\mathcal{M}_{D,aug}^{(j)}\left(\tilde{\boldsymbol{p}} \right) \right]$$

allora $\mathcal{M}(\tilde{p})$ può essere impiegata in luogo di $C(\tilde{p})$ per l'analisi di testabilità sia a livello di circuito che a livello di componente.

Merita discutere le condizioni summenzionate. A tale scopo, si comincia con l'osservare che, come può intuirsi (e sarà giustificato in dettaglio nel prossimo paragrafo), si potrà scrivere

$$\left\langle N_{j}(s,\tilde{\boldsymbol{p}}) = \sum_{m=1}^{n_{u}} N_{K,m}^{(j)}(s,\boldsymbol{p}) u_{m} + \sum_{l=1}^{n_{x}} N_{H,l}^{(j)}(s,\boldsymbol{p}) x_{l} \left(0^{+},\tilde{\boldsymbol{p}}\right) \right\rangle_{j=1}^{n_{y}}$$
(4.57)

ove $\left\{ \left\{ N_{K,m}^{(j)}(s, \boldsymbol{p}) \right\}_{m=1}^{n_u} \right\}_{j=1}^{n_y} e \left\{ \left\{ N_{H,l}^{(j)}(s, \boldsymbol{p}) \right\}_{l=1}^{n_x} \right\}_{j=1}^{n_y}$ sono i polinomi al numeratore

di opportune funzioni di rete (rispettivamente, dall'*m*-esimo ingresso al *j*esimo punto di prelievo, $1 \le m \le n_u e_1 \le j \le n_y$; e dall'*l*-esimo generatore fittizio relativo alla condizione iniziale $x_l(0^+, \tilde{p})$ al *j*-esimo punto di prelievo, $1 \le l \le n_x e_1 \le j \le n_y$).

Alla luce della (4.57), si evince facilmente che, per un certo j, la summenzionata condizione (i) è non soddisfatta se e solo se tutti gli elementi dell'insieme $\left\{N_{K,m}^{(j)}(s,p)\right\}_{m=1}^{n_u} \cup \left\{N_{H,l}^{(j)}(s,p)\right\}_{l=1}^{n_x} \cup \left\{\Delta(s,p)\right\}$ hanno uno zero a comune per ogni p. Quanto alla condizione (ii), essa è certamente soddisfatta non appena (a) qualche $a_k^{(j)}(\tilde{p})$ è una costante non nulla (rispetto a p) oppure (b) qualche $b_h(p)$ è una costante non nulla (rispetto a p). Se tale ultima condizione non è soddisfatta dalla originaria espressione di $\Delta(s,p)$,

essa può essere realizzata normalizzando $\Delta(s, \boldsymbol{p})$ e ciascun polinomio dell'insieme $\{N_j(s, \tilde{\boldsymbol{p}})\}_{j=1}^{n_y}$ rispetto a un arbitrario $b_h(\boldsymbol{p}) \neq 0$. Infine, per mezzo di argomenti analoghi a quelli impiegati nella dimostrazione del Teorema 4.2, si evince che la condizione (ii) è in pratica equivalente a $rank \left[\mathcal{M}_D^{(r)}(\tilde{\boldsymbol{p}}^*)\right] \neq rank \left[\mathcal{M}_{D,aug}^{(r)}(\tilde{\boldsymbol{p}}^*)\right]$, ove $\tilde{\boldsymbol{p}}^*$ è un valore di $\tilde{\boldsymbol{p}}$ generato in modo casuale.

4.5 Automatizzazione dell'analisi di testabilità per circuiti a commutazione periodica eccitati da segnali costanti

4.5.1 Algoritmo per il calcolo della matrice di testabilità

La (4.53) presuppone la conoscenza dei coefficienti $\left\{\left\{a_{k}^{(j)}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right\}_{k=0}^{G}\right\}_{j=1}^{n_{y}}$ e

 $\{b_h(\boldsymbol{p})\}_{k=0}^G$. In questo paragrafo si forniranno le modalità con le quali tali coefficienti possono essere generati automaticamente, prerequisito cruciale ai fini di una completa automatizzazione dell'analisi di testabilità per CCPESC.

Per procedere in tale direzione, si consideri la versione " \mathcal{L} -trasformata" $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}$ di \mathcal{N} considerato nella sua evoluzione a partire dall'istante $t = 0^+$ immediatamente successivo alla commutazione che lo porta nella configurazione allo studio, supponendo che non ne intervengano altre in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$. Formalmente, $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}$ può pensarsi ottenuto da \mathcal{N} tramite le seguenti operazioni.

- (i) Ciascun generatore indipendente di valore $u_i(t) \equiv u_i$ è rimpiazzato da un generatore indipendente della medesima natura e di valore $U_i(s) = u_i/s$.
- (ii) Ciascun capacitore di capacità C_r è rimpiazzato dalla serie di un'ammettenza complessa $C_r s$ e un generatore indipendente fittizio di tensione, di valore pari a $x_r (0^+, \tilde{p})/s = v_r (0^+, \tilde{p})/s$.
- (iii) Ciascuna induttore non accoppiato magneticamente di induttanza L_q è rimpiazzato dal parallelo di una impedenza complessa L_qs e

un generatore indipendente fittizio di corrente, di valore pari a $x_q (0^+, \tilde{p})/s = i_q (0^+, \tilde{p})/s$.

- (iv) Ciascun induttore di induttanza L_q magneticamente accoppiato con l'induttore di induttanza L_r , in ragione di un coefficiente di accoppiamento M, è rimpiazzato dal parallelo di (a) un generatore indipendente fittizio di corrente di valore pari a $x_q \left(0^+, \tilde{p}\right)/s = i_q \left(0^+, \tilde{p}\right)/s$ e (b) una impedenza complessa $L_q s$ con in serie un generatore fittizio di tensione controllato in corrente, di valore pari a $MsI_r(s)$, ove $I_r(s)$ è la \mathcal{L} -trasformata della corrente che scorre attraverso l'induttore di induttanza L_r .
- (v) Ciascun elemento privo di memoria è formalmente lasciato inalterato (salvo rimpiazzare le relative variabili elettriche con le rispettive \mathcal{L} -trasformate).

Allora la (4.47) può esplicitarsi al modo seguente

$$\left\langle Y_j(s,\tilde{\boldsymbol{p}}) = \left[\sum_{m=1}^{n_u} K_m^{(j)}(s,\boldsymbol{p}) u_m + \sum_{l=1}^{n_x} H_l^{(j)}(s,\boldsymbol{p}) x_l \left(0^+, \tilde{\boldsymbol{p}}\right) \right] \middle/ s \right\rangle_{j=1}^{n_y}$$
(4.58)

ove

$$\begin{pmatrix}
\left\langle K_{m}^{(j)}(s,\boldsymbol{p}) = N_{K,m}^{(j)}(s,\boldsymbol{p}) \middle| \Delta(s,\boldsymbol{p}) = \sum_{i=0}^{G} a_{K,im}^{(j)}(\boldsymbol{p}) s^{i} \middle| \Delta(s,\boldsymbol{p}) \middle\rangle_{m=1}^{n_{u}} \right\rangle_{m=1}^{n_{y}} \\
\left\langle H_{l}^{(j)}(s,\boldsymbol{p}) = N_{H,l}^{(j)}(s,\boldsymbol{p}) \middle| \Delta(s,\boldsymbol{p}) = \sum_{i=0}^{G} a_{H,il}^{(j)}(\boldsymbol{p}) s^{i} \middle| \Delta(s,\boldsymbol{p}) \middle\rangle_{l=1}^{n_{x}} \right\rangle_{j=1}^{n_{y}}$$
(4.59)

sono, in $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}$, rispettivamente, la funzione di rete dall'*m*-esimo ingresso al *j*esimo punto di prelievo $(1 \le m \le n_u e_1 \le j \le n_y)$ e la funzione di rete dall'*l*esimo generatore fittizio relativo alla condizione iniziale $x_l(0^+, \tilde{p})$ al *j*-esimo punto di prelievo $(1 \le l \le n_x e_1 \le j \le n_y)$.

Si ponga ora

$$\left\langle Z_j(s, \tilde{\boldsymbol{p}}) = sY_j(s, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right\rangle_{j=1}^{n_y}$$
 (4.60)

Dal confronto fra (4.42), (4.47), (4.58), (4.60) si ha allora

$$\left\langle Z_{j}(s,\tilde{\boldsymbol{p}}) = N_{j}(s,\tilde{\boldsymbol{p}}) / \Delta(s,\boldsymbol{p}) = \sum_{h=0}^{G} a_{h}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) s^{h} / \sum_{h=0}^{G} b_{h}(\boldsymbol{p}) s^{h} \right\rangle^{n_{y}}$$

$$= \sum_{m=1}^{n_{u}} K_{m}^{(j)}(s,\boldsymbol{p}) u_{m} + \sum_{l=1}^{n_{x}} H_{l}^{(j)}(s,\boldsymbol{p}) x_{l}(0^{+},\tilde{\boldsymbol{p}})$$

$$(4.61)$$

Si introducano, quindi, con riferimento alla (4.59), le entità

$$\begin{pmatrix}
A_{K}^{(j)}(\boldsymbol{p}) = row \left[col \left[a_{K,im}^{(j)}(\boldsymbol{p}) \right]_{i=0}^{G} \right]_{m=1}^{n_{u}}, \\
A_{H}^{(j)}(\boldsymbol{p}) = row \left[col \left[a_{H,il}^{(j)}(\boldsymbol{p}) \right]_{i=0}^{G} \right]_{l=1}^{n_{x}}, \\
A^{(j)}(\boldsymbol{p}) = \left[A_{K}^{(j)}(\boldsymbol{p}) A_{H}^{(j)}(\boldsymbol{p}) \right], \\
\tilde{\boldsymbol{u}}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \left[\boldsymbol{u}^{tr} \ \boldsymbol{x}^{tr} \left(0^{+}, \tilde{\boldsymbol{p}} \right) \right]^{tr}
\end{cases}$$
(4.62)

Allora, inserendo le (4.59) nelle (4.61), applicando il principio di identità dei polinomi e tenendo conto delle (4.62) assieme alle (4.51) si trova

$$\left\langle \boldsymbol{a}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \left[A_{K}^{(j)}(\boldsymbol{p}) \quad A_{H}^{(j)}(\boldsymbol{p}) \right] \left[\begin{matrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{x}(0^{+}, \tilde{\boldsymbol{p}}) \end{matrix} \right] = A^{(j)}(\boldsymbol{p}) \tilde{\boldsymbol{u}}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \right\rangle_{j=1}^{n_{y}}$$
(4.63)

Ricordando i significati di $O_{m,n}$ e O_m definiti nel Capitolo 1, si possono introdurre le seguenti ulteriori entità

$$A(\boldsymbol{p}) = col \begin{bmatrix} A^{(j)}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix}_{j=1}^{n_{y}}, A_{aug}(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} A(\boldsymbol{p}) & \boldsymbol{0}_{(G+1)} \\ O_{(G+1),(n_{x}+n_{u})} & \boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix}$$

$$A_{H}(\boldsymbol{p}) = col \begin{bmatrix} A_{H}^{(i)}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix}_{i=1}^{n_{y}}, \tilde{\boldsymbol{u}}_{aug}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{u}}^{tr}(\tilde{\boldsymbol{p}}) & 1 \end{bmatrix}^{tr}$$
(4.64)

Allora, raccogliendo i vettori $\{a^{(j)}(\tilde{p})\}_{j=1}^{n_y}$ assieme a b(p) in unico vettore, dal confronto fra le (4.63) e le (4.64) si ottiene

$$\begin{bmatrix} col \left[\boldsymbol{a}^{(j)} \left(\tilde{\boldsymbol{p}} \right) \right]_{j=1}^{n_{y}} \\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix} = A_{aug} \left(\boldsymbol{p} \right) \tilde{\boldsymbol{u}}_{aug} \left(\tilde{\boldsymbol{p}} \right)$$
(4.65)

Prendendo le derivate parziali di (4.65) rispetto ai parametri $\{p_i\}_{i=1}^{n_p}$ e tenendo conto delle (4.62) e (4.64), si trova

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial p_i} \begin{bmatrix} col \left[\boldsymbol{a}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \right]_{j=1}^{n_y} \\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial p_i} A_{aug}(\boldsymbol{p}) \tilde{\boldsymbol{u}}_{aug}(\tilde{\boldsymbol{p}}) + \begin{bmatrix} A_H(\boldsymbol{p}) \\ O_{(G+1),n_x} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial p_i} \boldsymbol{x}(0^+, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right\rangle_{i=1}^{n_p} (4.66)$$

Infine, confrontando (4.66) e (4.55) e impiegando la notazione introdotta nel Capitolo 1, si trova altresì

$$\mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = row \left[\partial A_{aug} \left(\boldsymbol{p} \right) / \partial p_i \right]_{i=1}^{n_p} diag \left[\tilde{\boldsymbol{u}}_{aug} \left(\tilde{\boldsymbol{p}} \right) \right]^{n_p} + \left[\begin{array}{c} A_H \left(\boldsymbol{p} \right) \\ O_{(G+1),n_x} \end{array} \right] row \left[\partial \boldsymbol{x} \left(0^+, \tilde{\boldsymbol{p}} \right) / \partial p_i \right]_{i=1}^{n_p}$$

$$(4.67)$$

4.5.2 Implementazione software: il programma TAPSLIN

L'algoritmo descritto nel precedente paragrafo è stato implementato in un programma per computer denominato TAPSLIN (Testability Analysis for Periodically Switched Linear Invariant Networks), il quale si avvale delle funzionalità dei software SapWin e SapWinPE, che sono in grado di eseguire, rispettivamente, l'analisi simbolica di circuiti lineari tempo-invarianti e l'analisi di circuiti elettronici di potenza.

Il principio di funzionamento di TAPSLIN può essere descritto al modo seguente. Tramite SapWin le funzioni di rete (4.59) sono generate in forma completamente simbolica, il che consente di costruire, in accordo con le (4.51), (4.62) e (4.64), il vettore b(p) e le matrici $\left\{A^{(j)}(p)\right\}_{j=1}^{n_y}$ e $A_H(p)$ in forma simbolica rispetto a p. Generato in modo casuale un valore $\tilde{p}^* = [p^{*tr} u^{*tr}]^{tr}$ di \tilde{p} , si possono quindi calcolare il corrispondente valore $b(p^*)$ e le determinazioni $\left\{A^{(j)}(p^*)\right\}_{j=1}^{n_y}$ e $A_H(p^*)$.

SapWinPE fornisce ora il valore $\mathbf{x}(0^+, \tilde{\mathbf{p}}^*)$ di $\mathbf{x}(0^+, \tilde{\mathbf{p}})$, onde TAPSLIN può costruire il vettore $\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{p}}^*) = \left[\mathbf{u}^{*tr} \mathbf{x}^{tr}(0^+, \tilde{\mathbf{p}}^*)\right]^{tr}$ e quindi, mettendo assieme i risultati fin qui ottenuti, calcolare le determinazioni $\langle \boldsymbol{a}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}}^*) = A^{(j)}(\boldsymbol{p}^*)\tilde{\boldsymbol{u}}(\tilde{\boldsymbol{p}}^*) \rangle_{j=1}^{n_y}$ dei vettori $\{\boldsymbol{a}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}})\}_{j=1}^{n_y}$ tramite la (4.63) e la determinazione $\tilde{\boldsymbol{u}}_{aug}(\tilde{\boldsymbol{p}}^*)$ del vettore $\tilde{\boldsymbol{u}}_{aug}(\tilde{\boldsymbol{p}})$ tramite la (4.64). Inoltre, disponendo dei già calcolati $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}^*) \in \{\boldsymbol{a}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}}^*)\}_{j=1}^{n_y}$, TAPSLIN può costruire la matrice $\mathcal{F}(\tilde{\boldsymbol{p}}^*)$ per mezzo delle (4.52), (4.54). A partire dalla conoscenza di $\{A^{(j)}(\boldsymbol{p})\}_{j=1}^{n_y}$ e $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p})$, esso può altresì costruire, per mezzo della (4.64), le matrici $A_{aug}(\boldsymbol{p}^*)$ e $\{A_{aug}(\boldsymbol{p}^*+\boldsymbol{e}_i)\}_{i=1}^{n_y}$, ove \boldsymbol{e}_i è il vettore che ha tutte le componenti nulle, eccetto la *i*-esima, che è pari ad *1*. Da qui le matrici $\{\partial A_{aug}(\boldsymbol{p})/\partial p_i|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^*}\}_{i=1}^{n_p}$ sono calcolate da TAPSLIN mediante le equazioni

$$\left\langle \partial A_{aug}\left(\boldsymbol{p}\right) / \partial p_{i} \Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^{*}} = A_{aug}\left(\boldsymbol{p}^{*}+\boldsymbol{e}_{i}\right) - A_{aug}\left(\boldsymbol{p}^{*}\right) \right\rangle_{i=1}^{n_{p}}$$
 (4.68)

Si osservi che la validità delle (4.68) è garantita dal fatto che (in forza del principio di funzionamento di SapWin) gli elementi di $A_{aug}(p)$ sono funzioni lineari rispetto a ciascun elemento di p.

Ora, di nuovo tramite SapWinPE, vengono calcolati i valori $\{\boldsymbol{x}(0^+, \tilde{\boldsymbol{p}}^* + \delta_i \boldsymbol{e}_i)\}_{i=1}^{n_p}$, ove $\{\delta_i\}_{i=1}^{n_p}$ sono valori sufficientemente piccoli perché le approssimazioni

$$\left\langle \partial \boldsymbol{x} \left(0^{+}, \tilde{\boldsymbol{p}} \right) / \partial p_{i} \Big|_{\tilde{\boldsymbol{p}} = \tilde{\boldsymbol{p}}^{*}} \approx \left[\boldsymbol{x} \left(0^{+}, \tilde{\boldsymbol{p}}^{*} + \delta_{i} \boldsymbol{e}_{i} \right) - \boldsymbol{x} \left(0^{+}, \tilde{\boldsymbol{p}}^{*} \right) \right] / \delta_{i} \right\rangle_{i=1}^{n_{p}}$$
 (4.69)

risultino adeguate. Inserendo i valori così ottenuti nella (4.67) considerata per $\tilde{p} = \tilde{p}^*$, TAPSLIN ottiene la matrice $\mathcal{M}(\tilde{p}^*)$ e, infine, ancora dai risultati precedenti e dalla (4.53) considerata per $\tilde{p} = \tilde{p}^*$, la matrice di testabilità $C(\tilde{p}^*) = \mathcal{F}(\tilde{p}^*)\mathcal{M}(\tilde{p}^*)$. Infine, per mezzo di un algoritmo simile a quello basato su una decomposizione ai valori singolari descritto in [4], TAPSLIN effettua l'analisi di testabilità a livello di circuito (fornendo i valori di $\tau \in \rho$) e a livello di componente (fornendo i GT e i GAC).

4.6 Esempi

4.6.1 Esempio 1



Fig. 4.2 – Circuito relativo all'esempio 1.

Si consideri, quale primo esempio, il circuito mostrato in Fig. 4.2, nel quale, in ogni intervallo di ampiezza T, per un tempo t_c l'interruttore sw_1 è chiuso e l'interruttore sw_2 è aperto, mentre, per il restante tempo $T - t_c$, sw_1 è aperto e sw_2 è chiuso.

Si scelga la fase in cui sw_1 è chiuso e sw_2 è aperto come *fase 1*, ossia, in base alla convenzione adottata, la fase di interesse per l'analisi di testabilità: l'intervallo temporale relativo è allora $[0,\tau)=[0,t_c)$. Di conseguenza, l'intervallo temporale in cui sw_1 è aperto e sw_2 è chiuso ,vale a dire $[t_c,T)$, diviene la *fase 2*.

Il sistema allo studio risulta dotato di un unico punto di iniezione (vale a dire, in Fig. 4.2, i terminali a cui la batteria risulta connessa): il vettore u definito in (4.6) si riduce dunque nella fattispecie a $u=[u_1]=[u]$. Si scelga la tensione v_L sull'induttore (si veda, ancora, la Fig. 4.2) quale unico punto di misura, di modo che il vettore y definito in (4.6) coincida, nel caso in esame, semplicemente con $y=[y_1]=[y]=[v_L]$. Inoltre, poiché l'induttore è il solo elemento con memoria, il vettore x definito in (4.7) si riduce nella fattispecie a $x=[x_1]=[x]=[i_L]$, ove i_L è la corrente nell'induttore. Per ragioni analoghe le matrici che compaiono nelle (4.8) sono date per il caso in esame da $A^{(1)} = A^{(2)} = [-R/L], B^{(1)} = [1/L], B^{(2)} = [0]$. Infine, si assumano tutti i parametri in gioco come potenzialmente difettosi (o, semplicemente, incogniti) di modo che i vettori definiti da (4.1) e (4.9) siano, nel caso in

specie, rispettivamente dati da $\boldsymbol{p} = [R L]^{tr}$ e $\tilde{\boldsymbol{p}} = [R L u]^{tr}$ e si abbia, evidentemente, $n_p = 2$.

Un semplice esame del circuito rivela l'assenza di impulsi per entrambe le fasi. Tenendo conto di ciò e dei precedenti risultati nella (4.17), si trova

$$\boldsymbol{x}(0^+, \tilde{p}) = \left[i_L(0^+, R, L, u)\right] = \left\lfloor \frac{u\left(1 - \exp\left(Rt_c/L\right)\right)}{R\left(1 - \exp\left(RT/L\right)\right)}\right\rfloor$$
(4.70)

Dal momento che si hanno un solo punto di iniezione, un solo elemento con memoria ed un solo punto di prelievo, le funzioni di rete definite dalla (4.59) sono date nel caso in esame da

$$K_{1}^{(1)}(s,R,L) = s/(s+R/L), H_{1}^{(1)}(s,R,L) = -Rs/(s+R/L)$$
(4.71)

Dalla (4.61) si trova quindi

$$Z_{1}(s,\tilde{p}) = \left(a_{0}^{(1)} + a_{1}^{(1)}s\right) / (b_{0} + b_{1}s) = uK_{1}^{(1)}(s,p) + i_{L}\left(0^{+},\tilde{p}\right) H_{1}^{(1)}(s,p) = \left[u + Li_{L}\left(0^{+},\tilde{p}\right)s\right] / (Ls + R_{1} + R_{2})$$

$$(4.72)$$

da cui, in virtù delle (4.51) e (4.55), si perviene alla seguente espressione della matrice $\mathcal{M}(\tilde{p})$

$$\mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ \partial(-RLi_L)/\partial R & \partial(-RLi_L)/\partial L\\ 1/L & -R/L^2\\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(4.73)

ove, per brevità, si è scritto (e così si farà d'ora innanzi) i_L in luogo di $i_L(0^+, \tilde{p})$. Se in (4.73) si assume (arbitrariamente) $\tilde{p} = [R L u]^{tr} = \tilde{p}^* = [123]^{tr}, \ \tau = 4 \text{ e } T = 8, \text{ si trova}$ $\mathcal{M}(\tilde{p}^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.630 & 0.315 \\ 0.500 & -0.250 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (4.74)

Ora, se – in accordo alle premesse generali del Paragrafo 4.2.1- si assume che $p = [R L]^{tr}$ appartenga a \mathbb{R}^2_+ , allora i numeratori e il denominatore delle funzioni di rete in (4.71) non hanno fattori in comune. E' subito visto, inoltre, che $b_1(p)=1$ è in realtà indipendente da p. In virtù dei risultati presentati nel Paragrafo 4.4.3, segue allora che $\mathcal{M}(\tilde{p}^*)$ data dalla (4.74) può correttamente impiegarsi per l'analisi di testabilità sia a livello di circuito che di componente. In particolare, a livello di circuito, si trova una Testabilità $\mathcal{T} = rank \left[\mathcal{M}(\tilde{p}^*) \right] = 1$ e quindi (per la (4.36)) un Rapporto di Testabilità $\rho = 100 \cdot \mathcal{T}/n_p \% = 50\%$; a livello di componente, si trovano i GT $\{R\}$ ed $\{L\}$ e il GAC $\{R, L\}$. Quest'ultimo risultato indica che – se R ed L sono considerati simultaneamente potenzialmente difettosi (o, semplicemente, incogniti) – non potranno essere oggetto di diagnosi (o identificazione) univoca basata su misure nel dominio del tempo condotte sul punto di prelievo selezionato nella fase considerata.

Si verifica inoltre agevolmente che i medesimi risultati sono ottenuti se l'analisi di testabilità è condotta scambiando i ruoli delle due fasi, ossia assumendo come fase di interesse (ossia, per convenzione, la *fase 1*) quella in cui sw_1 è aperto e sw_2 è chiuso, cui corrisponde il nuovo intervallo di riferimento $[0,\tau)=[0,T-t_c)$. Tutti i risultati descritti sono confermati dal software TAPSLIN.

Merita infine osservare che se il bipolo comprendente la batteria, l'interruttore e il cortocircuito fosse avulso e i terminali in tal modo creatisi fossero impiegati come unico punto di iniezione (in tensione) per il circuito lineare tempo-invariante così ottenuto, l'analisi di testabilità a partire dal medesimo punto di prelievo secondo i criteri descritti nel Capitolo 3 fornirebbe risultati identici a quelli dell'analisi di testabilità condotta dianzi. Ciò può essere facilmente giustificato considerando che, in realtà, il circuito a commutazione originario può essere riguardato come il summenzionato circuito lineare tempo-invariante pilotato da un'onda quadra e che - come sottolineato nel Capitolo 3 – fissati i punti di iniezione degli stimoli e quelli di prelievo, la testabilità per tale classe di circuiti è una proprietà intrinseca, indipendente dagli stimoli impiegati e dal dominio in cui le misure sono effettuate. D'altra parte, come si mostrerà nel prossimo paragrafo, tale circostanza non può generalizzarsi: anzi, l'analisi di testabilità per CCPESC può condurre a risultati che possono apparire paradossali all'operatore avvezzo all'analisi di testabilità dei circuiti lineari tempo-invarianti.

4.6.2 Esempio 2

Si consideri ora il circuito mostrato in Fig. 4.3 nel quale, in ogni intervallo temporale di ampiezza *T*, per un tempo t_c il tasto sw_1 è chiuso e il tasto sw_2

è aperto, mentre, nel restante tempo $T-t_c$, sw_1 è aperto e sw_2 è chiuso. Si scelga $p = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & L \end{bmatrix}^{tr}$, cui corrisponde $n_p = 3$, e quale *fase 1* – vale a dire, per convenzione, la fase di interesse per l'analisi di testabilità – quella in cui sw_1 è chiuso e sw_2 è aperto.



Fig. 4.3 – Circuito relativo all'esempio 2.

Per il caso in esame, le matrici che appaiono in (4.8) risultano $A_2 = [-R_2/L], B_2 = [0], A_2 = [-R_2/L], B_2 = [0]$ (4.75)

Il sistema è dotato di un unico punto di iniezione (i terminali a cui è connessa la batteria in Fig. 4.3) e di un unico elemento con memoria, rappresentato dall'induttore; si scelga, inoltre, la corrente che scorre in quest'ultimo come unico punto di prelievo. Come nel precedente esempio, si ha quindi $u=[u_1]=[u]$, $x=[x_1]=[x]=[i_L]$, ma è ora $y=[y_1]=[y]=[i_L]$. Una semplice ispezione del circuito consente di escludere la presenza di impulsi che si originino negli istanti di commutazione.

Tenendo conto dei precedenti fatti nella (4.17), si trova

$$i_{L}(0^{+}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}) = \frac{u \left[1 - \exp((R_{1} + R_{2})t_{c}/L)\right]}{(R_{1} + R_{2}) \left[1 - \exp((R_{1}t_{c} + R_{2}T)/L)\right]}$$
(4.76)

Inoltre, nel caso in esame le funzioni di rete definite in (4.59) risultano

$$K_{1}^{(1)}(s,\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(Ls+R_{1}+R_{2})}, H_{1}^{(1)}(s,\boldsymbol{p}) = \frac{Ls}{(Ls+R_{1}+R_{2})}$$
(4.77)

Dalla (4.61) segue quindi

$$Z_{j}(s,\tilde{\boldsymbol{p}}) = \left(a_{0}^{(1)} + a_{1}^{(1)}s\right) / (b_{0} + b_{1}s) = uK_{1}^{(1)}(s,\boldsymbol{p}) + i_{L}(0^{+},\tilde{\boldsymbol{p}})H_{1}^{(1)}(s,\boldsymbol{p}) = \left[u + Li_{L}(0^{+},\tilde{\boldsymbol{p}})s\right] / (Ls + R_{1} + R_{2})$$

$$(4.78)$$

da cui, in forza delle (4.51) e (4.55), si ha

$$\mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \partial(Li_L) / \partial R_1 & \partial(Li_L) / \partial R_2 & \partial(Li_L) / \partial L \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(4.79)

ove, per semplicità, si è scritto (come si continuerà a fare nel seguito) i_L in luogo di $i_L(0^+, \tilde{p})$.

Si verifica immediatamente che – come accadeva nel precedente esempio – anche in questo caso le condizioni menzionate nel Paragrafo 4.4.3 per l'impiego di $\mathcal{M}(\tilde{p})$ quale matrice di testabilità sono soddisfatte (si osservi in particolare che $a_0^{(1)} = u$ non dipende da p). Per ispezione diretta si trova facilmente che per quasi ogni \tilde{p} è $\mathcal{T} = rank \left[\mathcal{M}(\tilde{p}) \right] = 3$ (difatti da (4.76) si vede facilmente che non è identicamente $\partial i_L / \partial R_1 = \partial i_L / \partial R_2$), cui corrisponde una $\rho = 100 \cdot \mathcal{T}/n_p \% = 100\%$: questi risultati indicano che il circuito allo studio, in riferimento alla fase e al punto di prelievo selezionati, è pienamente testabile, vale a dire che i tre parametri considerati possono essere univocamente identificati nella fase in questione (per mezzo di tre campioni temporali della corrente $i_L quasi$ arbitrariamente selezionati, in accordo al Teorema 1).

Si scambino ora i ruoli delle due fasi, vale a dire si assuma come *fase* 1 - 1a fase di interesse per l'analisi di testabilità - quella in cui sw_1 è aperto e sw_2 è chiuso e come *fase* 2 quella in cui sw_1 è chiuso e sw_2 è aperto. Ciò comporta che devono essere scambiati i pedici nella (4.75), che diviene

$$A_{1} = \left[-\frac{R_{2}}{L}\right], B_{1} = [0], A_{2} = \left[-\frac{R_{1} + R_{2}}{L}\right], B_{2} = \left[\frac{1}{L}\right]$$
(4.80)

Ancora una volta, per ispezione si conclude che non vi sono impulsi nella fase in esame. Tenendo conto di tale fatto e della (4.80), dalla (4.17) segue

$$i_{L} = \frac{u \exp[R_{2}(T-t_{c})/L] \left[1-\exp((R_{1}+R_{2})t_{c}/L)\right]}{(R_{1}+R_{2}) \left[1-\exp((R_{1}t_{c}+R_{2}T)/L)\right]}$$
(4.81)

Nel caso in specie, le funzioni di rete definite dalla (4.59) risultano

$$K_1^{(1)}(s, \boldsymbol{p}) = 0, H_1^{(1)}(s, \boldsymbol{p}) = s/(s + R_2/L)$$
 (4.82)

Inserendo le (4.82) in (4.61) si trova quindi

$$Z_{1}(s,\tilde{\boldsymbol{p}}) = \left(a_{0}^{(1)} + a_{1}^{(1)}s\right) / \left(b_{0} + b_{1}s\right) = uK_{1}^{(1)}(s,\boldsymbol{p}) + i_{L}H_{1}^{(1)}(s,\boldsymbol{p}) = i_{L}s / \left(s + R_{2}/L\right)$$
(4.83)

Confrontando la (4.83) con (4.51) e (4.55), si ottiene

$$\mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \partial i_L / \partial R_1 & \partial i_L / \partial R_2 & \partial i_L / \partial L \\ 0 & 1/L & -R_2 / L^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(4.84)

L'esame delle (4.82), (4.83) rivela immediatamente che, anche nel caso in esame, le condizioni menzionate nel Paragrafo 4.4.3 per l'impiego di $\mathcal{M}(\tilde{p})$ come matrice di testabilità sono soddisfatte (si osservi in particolare che $b_1=u$ non dipende da p). A tal proposito, è subito visto che, per *quasi* ogni \tilde{p} , è $\mathcal{T} = rank \left[\mathcal{M}(\tilde{p}) \right] = 2$ (perché, ad esempio, non è identicamente $\partial i_L / \partial R_1 = 0$) e quindi $\rho = 100 \cdot \mathcal{T}/n_p \% = 66.67\%$. Si trova poi facilmente che i GT sono $\{R_1, R_2\}, \{R_1, L\}, \{R_2, L\}$ (perché, oltre a non essere identicamente $\partial i_L / \partial R_1 = 0$, non è nemmeno $(\partial i_L / \partial R_2) \left(-R_2 / L^2 \right) - (\partial i_L / \partial L) (1/L) = 0$ identicamente) e che, di conseguenza, $\{R_1, R_2, L\}$ è l'unico GAC.

Merita fare i seguenti commenti.

(a) A differenza di quanto accadeva per il circuito analizzato nell'esempio precedente, nella fattispecie la testabilità dipende dalla fase considerata.

(b) Si consideri la topologia corrispondente a sw_1 chiuso e sw_2 aperto e si mantenga la stessa scelta del punto di iniezione e di quello di prelievo, ma si sostituisca la batteria con un generatore arbitrario. Allora, l'analisi di testabilità secondo l'approccio presentato nel Capitolo 3 del circuito lineare tempo-invariante così ottenuto produrrebbe quali risultati una testabilità pari a 2, con $\{R_1, R_2\}$ quale unico GAC. Tale risultato è in accordo con il ben noto fatto che in un circuito lineare tempo-invariante due resistori in serie, se considerati simultaneamente potenzialmente difettosi, non possono essere oggetto di diagnosi (o identificazione) univoca ove si impieghi un unico punto di prelievo.

Ci si trova quindi di fronte alla interessante (seppure apparentemente paradossale) circostanza che - rispetto a quanto si otterrebbe con il suddetto

approccio del Capitolo 3 applicato al summenzionato circuito lineare tempoinvariante - con l'approccio descritto nel presente capitolo, applicato al circuito a commutazione periodica, la testabilità migliora sia a livello di circuito (il valore di T è maggiore del valore di Testabilità relativo al circuito lineare tempo-invariante) che a livello di componente ($\{R_1, R_2\}$ non è più un GAC).

Tale fatto può essere euristicamente giustificato come segue. L'approccio all'analisi di testabilità dei circuiti lineari tempo-invarianti presentato nel Capitolo 3 è basato sul concetto di funzione di rete, la misura della quale presuppone uno stato di regime sinusoidale, in cui ogni informazione "iniziale" immagazzinata negli elementi con memoria all'istante di applicazione degli stimoli viene inevitabilmente perduta e non ha alcuna influenza sulle rilevazioni. Al contrario, quantunque globalmente in una condizione di regime permanente, il circuito a commutazione periodica non lo è se si restringe l'analisi a una certa fase: difatti, l'informazione immagazzinata negli elementi di memoria durante la fase precedente a quella in esame è mantenuta e influenza le misurazioni durante quest'ultima. Ciò può aumentare la testabilità del circuito a commutazione rispetto a quella del circuito lineare tempo-invariante ottenuto dal primo fissando una volta per tutte lo stato degli interruttori: questo fatto suggerisce che un circuito originariamente lineare tempo-invariante potrebbe essere dotato di interruttori e stimolato con forme d'onda costanti al fine di migliorarne la testabilità.

4.6.3 Esempio 3: analisi di testabilità per il Convertitore Buck operante in modalità a corrente ininterrotta



Fig. 4.4 – Convertitore Buck ideale.

Si consideri ora il Convertitore Buck rappresentato in Fig. 4.4, ove il diodo è assunto ideale, e si supponga che il sistema operi in Modalità a Corrente Ininterrotta (MCI), con l'interruttore chiuso per un tempo t_c e aperto per un tempo $T - t_c$ in ogni intervallo di ampiezza T. Sotto tali ipotesi si hanno due fasi: si assuma come *fase 1* - vale a dire la fase di interesse per l'analisi di

testabilità – quella in cui l'interruttore è chiuso e il diodo è interdetto (Fig. 4.5 (a)) e come *fase* 2 quella in cui l'interruttore è aperto e il diodo è in conduzione (ossia, si comporta come un cortocircuito ideale, Fig. 4.5 (b)): l'intervallo di riferimento per l'analisi è dunque $[0,\tau)=[0,t_c)$.



Fig. 4.5 – (a) Topologia del circuito di Fig. 4.5 quando l'interruttore è chiuso e il diodo è interdetto e (b) Topologia del circuito di Fig. 4.5 quando l'interruttore è aperto e il diodo è in conduzione.

Nel circuito sono presenti due elementi con memoria; si assuma, inoltre, l'ingresso convenzionale del circuito come unico punto di iniezione e la sua uscita convenzionale come unico punto di prelievo. In base a tali premesse, i vettori u, y e x rispettivamente definiti in (4.6) e (4.7) risultano nella fattispecie

$$\boldsymbol{u} = [u_1] = [u], \ \boldsymbol{y} = [y_1] = [v_{out}], \ \boldsymbol{x} = [x_1 \ x_2]^{tr} = [i_L \ v_C]^{tr}$$
(4.85)

mentre, se tutti i parametri in gioco sono assunti come potenzialmente difettosi (o, semplicemente, incogniti), si ha $p = [R L C]^{tr}$ e $n_p = 3$. Inoltre, le matrici definite in (4.8) risultano, nel caso in esame, le seguenti

$$A^{(1)} = A^{(2)} = A = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix}, B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, B^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
(4.86)

Dal momento che, come si constata per ispezione, non si generano impulsi nelle commutazioni, tenendo conto che, in base alle (4.3), è $\tau_0 = 0$, $\tau_2 = T$ e inserendo le (4.85) e (4.86) nella (4.17), si trova

$$\boldsymbol{x}(0^+, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}) = \left(I - e^{AT}\right)^{-1} e^{AT} A^{-1} \left(I - e^{-At_c}\right) B^{(1)} \boldsymbol{u}$$
(4.87)

Inoltre, le funzioni di rete definite in (4.59) risultano, per il caso allo studio, le seguenti

$$K_{1}^{(1)}(s, \mathbf{p}) = R / (RLCs^{2} + Ls + R), H_{1}^{(1)}(s, \mathbf{p}) = RLs / (RLCs^{2} + Ls + R),$$

$$H_{2}^{(1)}(s, \mathbf{p}) = RLCs^{2} / (RLCs^{2} + Ls + R)$$
(4.88)

Nel seguito si scriverà, per semplicità, i_L in luogo di $i_L(0^+, \tilde{p})$ e v_C in luogo di $v_C(0^+, \tilde{p})$. Allora dalle (4.51) e (4.61) segue

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} R & L & RLC \end{bmatrix}^{tr}, \boldsymbol{a}^{(1)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \begin{bmatrix} Ru & RLi_L & RLCv_C \end{bmatrix}^{tr}$$
(4.89)

Inserendo la (4.89) nella (4.55) si ha così

$$\mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ \partial(RLi_L)/\partial R & \partial(RLi_L)/\partial L & \partial(RLi_L)/\partial C \\ \partial(RLCv_C)/\partial R & \partial(RLCv_C)/\partial L & \partial(RLCv_C)/\partial C \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ LC & RC & RL \end{bmatrix}$$
(4.90)

Si osservi che le condizioni sufficienti per l'impiego di $\mathcal{M}(\tilde{p})$ quale matrice di testabilità, menzionate in chiusura del Paragrafo 4.4.3, non risultano soddisfatte da (4.89) e (4.90). Perciò, dapprima si inseriscono le (4.89) nelle (4.52) e (4.54), ottenendo

$$\mathcal{F}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & | & -Ru & 0 & 0 \\ L & R & 0 & | & -RLi_L & -Ru & 0 \\ RLC & L & R & | & -RLCv_C & -RLi_L & -RE \\ 0 & RLC & L & 0 & -RLCv_C & -RLi_L \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & -RLCv_C \end{bmatrix}$$
(4.91)

quindi la (incondizionatamente corretta) matrice di testabilità $C(\tilde{p}) = \mathcal{F}(\tilde{p})\mathcal{M}(\tilde{p})$ è ottenuta dal confronto fra (4.53), (4.90) e (4.91). Assegnando a \tilde{p} un valore aleatorio \tilde{p}^* , si trova quindi una Testabilità $\mathcal{T} = rank \left[C(\tilde{p}^*) \right] = 2$ e dunque un Rapporto di Testabilità $\rho = 100 \cdot \mathcal{T}/n_p \% = 66.67\%$. Si trova, inoltre, che ogni coppia di colonne di $C(\tilde{p}^*)$ costituisce un insieme di elementi linearmente indipendenti, il che consente di individuare i GT, vale a dire $\{R,L\}$, $\{R,C\}$ e $\{L,C\}$, e (l'unico) GAC, cioè $\{R,L,C\}$.

Questi risultati indicano che – se considerati simultaneamente potenzialmente difettosi (o, semplicemente, incogniti) – i 3 parametri in gioco non possono essere oggetto di diagnosi (o identificazione) univoca. Tuttavia, non appena uno qualsiasi fra essi possa essere ritenuto di valore

noto, la diagnosi (o l'identificazione) univoca diviene possibile per i restanti due. Merita osservare che l'analisi di testabilità del circuito lineare tempoinvariante, ottenuto rimuovendo il complesso batteria-interruttore-diodo e utilizzando i terminali così ottenuti per lo stimolo in tensione, produrrebbe i medesimi risultati di quella condotta dianzi: ciò è in accordo col fatto che il circuito a commutazione analizzato può riguardarsi, in analogia a quanto accadeva per il circuito del Paragrafo 4.6.1, come il circuito lineare tempoinvariante summenzionato pilotato in ingresso da una tensione a onda quadra. Si osservi altresì, infine, che, se direttamente impiegata per l'analisi di testabilità, la (4.90) fornirebbe il risultato *scorretto* $\mathcal{T} = rank \left[\mathcal{M}(\tilde{p}^*) \right] = 3$.



Fig. 4.6 – Il Convertitore Buck nell'ambiente capture di TAPSLIN, il software per l'analisi di testabilità dei CCPESC.

L'analisi fin qui condotta richiede una considerevole mole di calcoli, che diviene rapidamente proibitiva al crescere delle dimensioni del circuito allo studio. Il software TAPSLIN consente di aggirare tali difficoltà di calcolo, realizzando la totale automatizzazione dell'analisi di testabilità, come si esemplificherà nel seguito con riferimento al circuito in esame. Quest'ultimo viene dapprima disegnato nell'ambiente *capture* come mostrato in Fig. 4.6; quindi la fase di interesse per l'analisi – individuata dallo stato degli interruttori – viene selezionata per mezzo del menù visibile nell'angolo superiore sinistro della medesima figura. Si avvia quindi la simulazione e, raggiunta la condizione di regime, si rende disponibile un ulteriore menù dal quale può essere selezionata l'opzione "Analisi di Testabilità", come

mostrato in Fig. 4.7. Tale azione produce i risultati visibili nella medesima figura, i quali sono in pieno accordo con l'analisi manuale condotta dianzi.

법 SapwinPE 1.0
File Window Help Output Freq. Resp. Time Resp. Post Analysis
📑 🔁 🖶 🖨 📦 🗛 🔍 🛛 Testability Analysis
List of Val/Monte Carlo
Chema: C:\Users\GuseppeFontana\Desktop\SAFWBFET\FKOVA_BOCK_NDOVO.sci
Taga per SapWin 4.0
File
🗸 Open Edt 🛛 😲 Go 🛛 🖄 Save 🛛 🗶 Clear
E da va
Fdt vi
3 Components: C, L, R
Testability = 2
Canonical Ambiguity Groups: 1
LRC
Testable Groups: 3
CL CR LR

Fig. 4.7 – I risultati dell'analisi di testabilità per il circuito di Fig. 4.6, forniti da TAPSLIN.

Invece, se accanto all'uscita convenzionale del sistema si considera la corrente che fluisce nell'induttore quale ulteriore punto di prelievo, ripetendo la procedura sopra indicata si trova $\mathcal{T}=3$ e quindi $\rho=100\cdot\mathcal{T}/n_p\%=100\%$, il che significa che con tali due punti di prelievo il sistema allo studio diviene pienamente testabile nella fase considerata. L'esempio mostra come la testabilità possa essere migliorata ampliando l'insieme dei punti di prelievo; d'altra parte, la scelta di questi ultimi - quando il problema della diagnosi di guasto (o della identificazione dei parametri) debba essere affrontato in pratica - non può prescindere da vincoli di natura tecnica ed economica (le misure di corrente, ad esempio, sono in generale più impegnative di quelle di tensione). Infine, TAPSLIN mostra che si ottengono i medesimi risultati anche se i ruoli delle fasi vengono invertiti, ossia si sceglie quale *fase 1* – ossia la fase di riferimento per l'analisi di testabilità - quella cui compete la topologia mostrata in Fig. 4.5 (b).

4.6.4 Esempio 4: analisi di testabilità per il Convertitore Boost operante in modalità a corrente ininterrotta

In questo paragrafo si descriverà come il software TAPSLIN possa essere impiegato per l'analisi di testabilità del Convertitore Boost rappresentato in Fig. 4.8, nell'ipotesi di funzionamento in MCI.



Fig. 4.8 – Convertitore Boost ideale.

Sotto tale ipotesi, in ogni intervallo di ampiezza T, per un tempo t_c il diodo (supposto ideale) conduce e l'interruttore è aperto, mentre per il restante tempo $T - t_c$ il diodo è interdetto e l'interruttore è chiuso. Si assumerà inizialmente come *fase 1* – vale a dire, per convenzione, la fase di interesse per l'analisi di testabilità – quella in cui il diodo è interdetto e l'interruttore è chiuso, cui compete l'intervallo $[0,\tau)=[0,t_c)$, e come *fase 2*, quella in cui il diodo è in conduzione e l'interruttore è aperto, cui compete l'intervallo $[t_c,T)$. Si assumerà, inoltre, che tutti i parametri in gioco siano simultaneamente potenzialmente difettosi (o, semplicemente, incogniti), vale a dire che $p=[R L C]^{tr}$, cui corrisponde $n_p=3$.

Se si considerano, infine, l'ingresso convenzionale del circuito come unico punto di iniezione e l'uscita convenzionale come unico punto di prelievo, TAPSLIN fornisce una Testabilità $\mathcal{T}=2$, un Rapporto di Testabilità $\rho=100\cdot \mathcal{T}/n_p\%=66.67\%$, i GT $\{R,L\}$, $\{R,C\}$ e $\{L,C\}$, e (l'unico) GAC $\{R,L,C\}$. D'altra parte, se accanto all'uscita convenzionale del sistema si considera la corrente che scorre nell'induttore quale ulteriore punto di prelievo, TAPSLIN restituisce ora $\mathcal{T}=3$ e $\rho=100\%$, il che vuol dire che il sistema diviene, con la nuova scelta dei punti di prelievo, completamente testabile e il valore dei parametri può essere (almeno localmente) univocamente individuato a partire dalla conoscenza di tre campioni dell'uscita convenzionale e tre campioni della corrente nell'induttore.

Si supponga ora di invertire i ruoli delle due fasi, considerando come *fase* 1 - ossia la fase di riferimento per l'analisi di testabilità – quella in cui il diodo è interdetto e l'interruttore è chiuso, cui compete l'intervallo $[0,T-t_c)$. Se si assume, inizialmente, l'uscita convenzionale del circuito quale unico punto di prelievo, TAPSLIN fornisce nuovamente una Testabilità $\mathcal{T}=2$, un Rapporto di Testabilità $\rho=100\cdot \mathcal{T}/n_p\%=66.67\%$, i GT $\{R,L\}$, $\{R,C\}$ e $\{L,C\}$, e (l'unico) GAC $\{R,L,C\}$; tali risultati, d'altra parte, possono essere ritrovati attraverso un calcolo diretto, secondo le modalità di seguito descritte.

Per ispezione, si vede anzitutto che le matrici definite in (4.59) sono nella fattispecie date da

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/RC \end{bmatrix}, A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix}, B^{(1)} = B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}$$
(4.92)

Se nella (4.17), assieme alle (4.92), si tiene conto che non si generano impulsi nella commutazione di inizio-fase e che, oltre a $\tau_0 = 0, \tau_2 = T$, è nella fattispecie $\tau_1 = T - t_c$, si perviene all'espressione della tensione $v_c = v_c (0^+, \tilde{p})$ sul condensatore all'istante di inizio-fase. A partire dalla conoscenza di v_c , con riferimento alla (4.61), si trova, ancora per ispezione

$$Z_{1}(s,\tilde{p}) = RCv_{c}s/(RCs+1) = (a_{0}^{(1)}+a_{1}^{(1)}s)/(b_{0}+b_{1}s)$$
(4.93)

Dal confronto fra (4.93), (4.51) e (4.55) si ottiene quindi

$$\mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \partial (RCv_c) / \partial R & \partial (RCv_c) / \partial L & \partial (RCv_c) / \partial C \\ 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & R \end{bmatrix}$$
(4.94)

Se nella (4.94) si pone arbitrariamente $\tilde{\boldsymbol{p}} = [R \ L \ C \ u]^{tr} = \tilde{\boldsymbol{p}}^* = [3 \ 1 \ 4 \ 1]^{tr}$, si trova

$$\mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{*}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5.8085 & 4.2807 & 5.4266 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.0000 & 0 & 3.0000 \end{bmatrix}$$
(4.95)

Dalla (4.93) è subito visto che le condizioni, menzionate in chiusura del Paragrafo 4.4.3, per l'impiego di (4.95) quale matrice di testabilità sono soddisfatte dalla (4.93), (4.94) (in particolare, la condizione (ii) è certamente soddisfatta, essendo $b_0=1$ indipendente da p): l'esame della (4.95) consente quindi di riottenere i risultati summenzionati.

Qualora, invece, accanto all'uscita convenzionale del sistema, si consideri la corrente che scorre nell'induttore quale ulteriore punto di prelievo, TAPSLIN fornisce un valore di Testabilità pari a T=3 e un corrispondente Rapporto di Testabilità dato da $\rho=100\%$: ciò indica che, con la nuova scelta dei punti di prelievo, il sistema diviene completamente testabile e i parametri possono essere (almeno localmente) univocamente identificati a partire dalla conoscenza di tre campioni della tensione di uscita e tre campioni della corrente nell'induttore.

4.6.5 Esempio 5: analisi di testabilità per il Convertitore Buck-Boost operante in modalità a corrente ininterrotta

In questo paragrafo si procederà all'analisi di testabilità di un Convertitore Buck-Boost ideale, mostrato in Fig. 4.9, sotto l'ipotesi che lo stesso operi in MCI.



Fig. 4.9 – Convertitore Buck-Boost ideale.

In tal caso, in ogni intervallo di ampiezza T, per un tempo t_c il diodo (supposto ideale) conduce e l'interruttore è aperto, mentre, per il restante tempo $T - t_c$ il diodo è interdetto e l'interruttore è chiuso. Si assumerà, inizialmente, come *fase* 1 – vale a dire, per convenzione, la fase di interesse per l'analisi di testabilità – quella in cui il diodo è interdetto e l'interruttore è chiuso, cui compete l'intervallo $[0,\tau)=[0,t_c)$, e come fase 2, quella in cui il diodo è in conduzione e l'interruttore è aperto, cui compete l'intervallo $[t_c,T)$. Si assumerà, inoltre, che tutti i parametri in gioco siano simultaneamente potenzialmente difettosi (o, semplicemente, incogniti), vale a dire che $p = [R L C]^{tr}$, cui corrisponde $n_p = 3$. Se l'uscita convenzionale del circuito viene scelta come unico punto di prelievo, TAPSLIN fornisce un Testabilità T=2, un di Rapporto di Testabilità valore $\rho = 100 \cdot T/n_p \% = 66.67\%$, i GT $\{R,L\}$, $\{R,C\}$ e $\{L,C\}$, e (l'unico) GCA $\{R,L,C\}$.

I risultati precedenti possono essere ritrovati attraverso calcoli diretti, come descritto di seguito. Essendo l'induttore e il condensatore gli unici due elementi con memoria presenti nel circuito, il vettore definito dalla (4.7) risulta nella fattispecie $\mathbf{x} = [i_L v_C]^{tr}$. Si trova, quindi, per ispezione che le matrici definite in (4.59) sono per il caso in esame date da

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{bmatrix}, A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/RC \end{bmatrix}, B^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}$$
(4.96)

Se, assieme alla (4.96), nella (4.17) si tiene conto che è $\tau_0 = 0, \tau_1 = t_c, \tau_2 = T$ e $\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{u}_1] = [\boldsymbol{u}]$ si perviene all'espressione di $\boldsymbol{x}(0, \tilde{\boldsymbol{p}}) = [i_L(0, \tilde{\boldsymbol{p}}) v_C(0, \tilde{\boldsymbol{p}})]^{tr}$, d'ora innanzi per brevità indicata con $[i_L v_C]^{tr}$. Ancora per ispezione, con riferimento alla (4.61), si trova la seguente espressione

$$Z_{1}(s, \tilde{p}) = \left(-Li_{L}s + LCv_{C}s^{2}\right) / \left(1 + Ls/R + LCs^{2}\right)$$

= $\left(a_{0}^{(1)} + a_{1}^{(1)}s + a_{2}^{(1)}s^{2}\right) / \left(b_{0} + b_{1}s + b_{2}s^{2}\right)$ (4.97)

Confrontando (4.97) e (4.51) e (4.55) si ha quindi

$$\mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \partial(-Li_L)/\partial R & \partial(-Li_L)/\partial L & \partial(-Li_L)/\partial C \\ \partial(LCv_C)/\partial R & \partial(LCv_C)/\partial L & \partial(LCv_C)/\partial C \\ 0 & 0 & 0 \\ -L/R^2 & 1/R & 0 \\ 0 & C & L \end{bmatrix}$$
(4.98)

Se nella (4.98) si pone arbitrariamente $\tilde{p} = [R \ L \ C \ u]^{tr} = \tilde{p}^* = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^{tr},$ $t_c = 5 \ e \ T = 10$, si trova

$$\mathcal{M}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{*}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.1904 & 0.8574 & 1.0478 \\ 1.1078 & -0.2782 & 0.8296 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1.0000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$
(4.99)

Ora, è subito visto che le (4.97) e (4.98) soddisfano le condizioni sufficienti, enunciate in chiusura del Paragrafo 4.4.3, per l'impiego della (4.99) come matrice di testabilità (in particolare, la condizione (ii) è certamente soddisfatta, essendo $b_0 = 1$ indipendente da p): dall'esame della stessa, è subito visto che le conclusioni ottenute per mezzo di TAPSLIN sono confermate.

Se, invece, accanto all'uscita convenzionale del sistema, si sceglie la corrente che fluisce nell'induttore come ulteriore punto di prelievo, TAPSLIN dà una Testabilità T = 3 e un Rapporto di Testabilità $\rho = 100\%$: ciò indica che, con la nuova scelta dei punti di prelievo, il sistema diviene

pienamente testabile e i parametri incogniti possono essere univocamente identificati (almeno localmente) a partire dalla conoscenza di tre campioni della tensione d'uscita e tre campioni della corrente nell'induttore.

D'altro canto, se si invertono i ruoli delle due fasi – assumendo così quale *fase 1* (ossia la fase di interesse per l'analisi di testabilità) quella in cui il diodo è interdetto e l'interruttore è chiuso - mantenendo le stesse scelte dei punti di prelievo (la sola tensione d'uscita o quest'ultima unitamente alla corrente nell'induttore), TAPSLIN fornisce esattamente gli stessi risultati.

4.7 Dimostrazioni

4.7.1 Dimostrazione della (4.8)

La (4.8) può derivarsi tramite le seguenti considerazioni.

Contenga \mathcal{N} , il circuito allo studio, $n_C [n_L]$ capacitori [induttori] con rispettive capacità [induttanze] $\{C_i\}_{i=1}^{n_C} [\{L_i\}_{i=1}^{n_L}]$. Per $m = 1, 2, \dots, P$, sia $\mathcal{N}^{(m)}$ il circuito ottenuto da \mathcal{N} ponendo ciascun interruttore nello stato corrispondente alla *m*-esima fase. Se in $\mathcal{N}^{(m)}$ non vi sono maglie [insiemi di taglio] esclusivamente composte [composti] da generatori di [corrente] e capacitori [induttori] allora la (4.8) coincide con la rappresentazione nello spazio degli stati di $\mathcal{N}^{(m)}$ e le matrici $A^{(m)}, B^{(m)}, C^{(m)}, D^{(m)}$ possono calcolarsi tramite ben noti metodi.

Altrimenti, se esistono in $\mathcal{N}^{(m)}$ maglie [insiemi di taglio] del tipo summenzionato, si assuma per semplicità che esse [essi] non comprendano generatori *controllati* di tensione [corrente] (tale limitazione può essere rimossa, al prezzo di qualche complicazione, estendendo opportunamente le argomentazioni che seguono) e si consideri la rete $\mathcal{N}_{cap}^{(m)}[\mathcal{N}_{ind}^{(m)}]$ ottenuta da $\mathcal{N}^{(m)}$ rimpiazzando ciascun elemento che non è un capacitore [induttore] o un generatore *indipendente* di tensione [corrente] con un circuito aperto [cortocircuito]. In $\mathcal{N}_{cap}^{(m)}[\mathcal{N}_{ind}^{(m)}]$ si individui un albero [coalbero] contenente un numero minimo $n_{C,alb}[n_{L,coalb}]$ di capacitori [induttori]. Senza ledere la generalità, si possono numerare i capacitori [induttori] in modo tale che quelli compresi in detto albero [coalbero] siano gli ultimi $n_{C,alb} [n_{L,coalb}]$, vale a dire $\{C_i\}_{i=n_C-n_{C,alb}+1}^{n_C}[\{L_i\}_{i=n_L-n_{L,coalb}+1}^{n_L}]$: di conseguenza, i primi $n_C-n_{C,alb}$ $[n_L-n_{L,coalb}]$ sono nel coalbero [albero]. Allora, ben noti risultati della teoria dei grafi consentono di ottenere univocamente

$$\left\langle v_{k} = \sum_{i=n_{C}-n_{C,alb}+1}^{n_{C}} \alpha_{i} v_{i} + \sum_{j=1}^{n_{u}} \beta_{j} u_{j} \right\rangle_{k=1}^{n_{C}-n_{C,alb}} \left[\left\langle i_{k} = \sum_{i=n_{L}-n_{L,coalb}+1}^{n_{L}} \alpha_{i} i_{i} + \sum_{j=1}^{n_{u}} \beta_{j} u_{j} \right\rangle_{k=1}^{n_{L}-n_{L,coalb}} \right]$$
(4.100)

ove gli elementi di $\{\alpha_i\}_{i=n_c-n_{c,alb}+1}^{n_c} [\{\alpha_i\}_{i=n_L-n_{L,coalb}+1}^{n_L} e \{\beta_j\}_{j=1}^{n_u}$ assumono i valori dell'insieme $\{0,-1,1\}$. Derivando (4.100) rispetto a t e impiegando le relazioni

$$\langle i_j = C_j dv_j / dt \rangle_{j=1}^{n_c} [\langle v_j = L_j di_j / dt \rangle_{j=1}^{n_L}]$$
 (4.101)

si trova

$$\left\langle i_{k} = \sum_{i=n_{C}-n_{C,alb}+1}^{n_{C}} (\alpha_{i}C_{k}/C_{i})i_{i} \right\rangle_{k=1}^{n_{C}-n_{C,alb}} \left[\left\langle v_{k} = \sum_{i=n_{L}-n_{L,coalb}+1}^{n_{L}} (\alpha_{i}L_{k}/L_{i})v_{i} \right\rangle_{k=1}^{n_{L}-n_{L,coalb}} \right]$$
(4.102)

Ora, sia $\mathcal{N}_{sub}^{(m)}$ il circuito ottenuto da $\mathcal{N}^{(m)}$ rimpiazzando, per $k=1, \dots, n_L - n_{CL,alb}[n_L - n_{L,coalb}]$, il *k*-esimo capacitore [induttore] con un generatore di corrente [tensione] controllato dato dalla (4.102). Allora, applicando a $\mathcal{N}_{sub}^{(m)}$ le summenzionate tecniche standard per la derivazione del modello nello spazio degli stati, si perviene alla (4.8). Si osservi che, nel caso allo studio, sia per $A^{(m)}$ che per $C^{(m)}$, le colonne corrispondenti a $\{v_k\}_{k=1}^{n_C-n_{C,alb}} \left[\{i_k\}_{k=1}^{n_L-n_{L,coalb}}\right]$ hanno elementi tutti nulli.

4.7.2 Lemma 4.1

Enunciato

Sia $F(t) = row [f_i(t)]_{i=1}^n = row [col [f_{ji}(t)]_{j=1}^m]_{i=1}^n$ una matrice di funzioni reali della variabile reale t, definite sull'intervallo $(0, \tau)$, le cui n colonne $\langle f_i(t) = col [f_{ji}(t)]_{j=1}^m \rangle_{i=1}^n$ siano linearmente indipendenti. Esiste, allora, un insieme $\{t_i\}_{i=1}^n$ di n valori distinti appartenenti a $(0, \tau)$ tali che la matrice

$$col\left[F\left(t_{l}\right)\right]_{l=1}^{n} = col\left[row\left[f_{i}\left(t_{l}\right)\right]_{i=1}^{n}\right]_{l=1}^{n}$$

$$(4.103)$$

abbia rango pari a n.

Dimostrazione

Si proverà la tesi per induzione su n.

Per n=1, in forza della ipotesi di lineare indipendenza, $f_1(t)$ non può essere identicamente nulla: deve esistere quindi un $t_1 \in (0, \tau)$ tale che $f_1(t_1) \neq 0$. Si supponga ora che la tesi sia vera per n=k: si mostrerà che essa è vera altresì per n=k+1.

Difatti, se la tesi è vera per n = k, devono esistere k valori $\{t_l\}_{l=1}^k$ appartenenti a $(0, \tau)$ tali che la matrice

$$\mathcal{F}_{k} = col \left[row \left[\boldsymbol{f}_{i} \left(t_{l} \right) \right]_{i=1}^{k} \right]_{l=1}^{k}$$
(4.104)

abbia rango pari a k.

Si supponga ora, per assurdo, che la tesi sia falsa per n = k+1. Ciò equivale ad assumere che i vettori $\{f_i(t)\}_{i=1}^{k+1}$ siano linearmente indipendenti e, al contempo, la matrice

$$\mathcal{F}_{k+1}(t) = \begin{bmatrix} col \left[row \left[\mathbf{f}_i(t_l) \right]_{l=1}^{k+1} \right]_{l=1}^k \\ row \left[\mathbf{f}_i(t) \right]_{l=1}^{k+1} \end{bmatrix}$$
(4.105)

abbia rango minore di k+1 comunque si scelga t in $(0,\tau)$. In tal caso, per ogni $t \in (0,\tau)$, deve esistere un vettore $z(t) = col[z_i(t)]_{i=1}^{k+1} \neq 0$ tale che

$$\mathcal{F}_{k+1}(t)\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{0} \tag{4.106}$$

D'altro canto, per ogni $t \in (0, \tau)$, deve essere $z_{k+1}(t) \neq 0$. Difatti, se per qualche \overline{t} fosse $z_{k+1}(\overline{t}) = 0$, allora dal confronto fra (4.104)-(4.106) seguirebbe che il vettore *non nullo* $\mathbf{z}' = col [z_i(\overline{t})]_{i=1}^k$ è tale che $\mathcal{F}_k \mathbf{z}' = \mathbf{0}$, contro il fatto che \mathcal{F}_k ha rango pari a k. Allora, tenendo a mente la (4.105), dalla (4.106) si deduce che, per ogni $t \in (0, \tau)$, deve essere

$$col \left[\mathbf{f}_{k+1}(t_l) \right]_{l=1}^{k} = \sum_{i=1}^{k} \left(-z_i(t) / z_{k+1}(t) \right) col \left[\mathbf{f}_i(t_l) \right]_{l=1}^{k}$$
(4.107)

La (4.107) dice che il vettore nel membro sinistro può essere rappresentato come combinazione lineare delle colonne di \mathcal{F}_k ; d'altra parte, essendo quest'ultima matrice a rango pieno, dette colonne sono linearmente

indipendenti e la rappresentazione in questione deve essere unica. Ciò implica che devono esistere *k costanti* $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$ tali che

$$\left\langle -z_i(t) / z_{k+1}(t) = \alpha_i \right\rangle_{i=1}^k \tag{4.108}$$

Da (4.105), (4.106), and (4.108) segue allora che per ogni t si abbia

$$\boldsymbol{f}_{k+1}(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{f}_i(t)$$
(4.109)

La (4.109) mostra che $f_{k+1}(t) \in span \langle f_i(t) \rangle_{i=1}^k$; ma ciò contraddice l'assunto che i vettori $\{f_i(t)\}_{i=1}^{k+1}$ siano linearmente indipendenti. La prova è quindi completa.

4.7.3 Lemma 4.2

Enunciato

Si consideri la classe di funzioni

$$S = \left\{ z(t) : z(t) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i(t) e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i), N \ge 1 \right\}$$
(4.110)

ove i coefficienti dei polinomi in $t \{\rho_i(t)\}_{i=1}^N$ sono funzioni reali delle componenti di $\boldsymbol{p} = \left[p_j\right]_{j=1}^{n_p}$ così come le entità $\{\sigma_i\}_{i=1}^N, \{\omega_i\}_{i=1}^N e\{\varphi_i\}_{i=1}^N$. Allora

(a) *S* è chiusa rispetto alle operazioni di combinazione lineare e derivazione rispetto a ciascuna componente <u>di</u> $\boldsymbol{p} = \left[p_j \right]_{i=1}^{n_p}$.

(b) Ciascun membro di *S* che non sia identicamente nullo sull'intervallo finito $(0, \tau)$ ha, al più, un numero finito di zeri in $(0, \tau)$.

Dimostrazione

Il punto (a) è una diretta conseguenza della definizione di S.

Quanto al punto (b), si consideri il generico membro di *S* e la sua restrizione $z_{(0,\tau)}(t)$ a $(0,\tau)$. Allora $z_{(0,\tau)}(t)$ è analitica su $(0,\tau)$, perché ottenuta moltiplicando e sommando funzioni che sono, a loro volta, analitiche su tale intervallo. Un ben noto risultato della teoria delle funzioni analitiche assicura allora che - se $z_{(0,\tau)}(t)$ non è identicamente nulla su $(0,\tau)$ - allora gli zeri di $z_{(0,\tau)}(t)$ (se esistono) sono punti isolati di $(0,\tau)$. Poichè tale

intervallo è finito, altresì finito (eventualmente nullo) deve risultare il numero di detti zeri. Ciò conclude la dimostrazione.

4.7.4 Dimostrazione del Teorema 4.1

Sia $colrank \left[\Psi^{(0,\tau)}(t, \tilde{p}_0) \right] = r < n_p^2$. Allora, senza perdita di generalità, si può scrivere

$$\Psi^{(0,\tau)}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_0) = \left[\Psi^{(0,\tau)}_{ind}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_0) \ \Psi^{(0,\tau)}_{dep}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_0) \right]$$
(4.111)

ove le r colonne della sottomatrice

$$\Psi_{ind}^{(0,\tau)}\left(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}\right) = row\left[\boldsymbol{\phi}_{i}^{(0,\tau)}\left(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}\right)\right]_{i=1}^{r}$$
(4.112)

sono linearmente indipendenti, mentre ciascuna colonna di

$$\Psi_{dep}^{(0,\tau)}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) = row \left[\boldsymbol{\phi}_{i}^{(0,\tau)}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_{0})\right]_{i=r+1}^{n_{p}}$$
(4.113)

è combinazione lineare di quelle.

Sia $\mathcal{T} = \{t_k\}_{k=1}^{n_t}$ un insieme arbitrario di istanti di campionamento appartenenti a $(0,\tau)$ (non si pongono quindi, con l'eccezione di tale ultima condizione, vincoli sul loro numero n_t o il loro valore); si mostrerà allora che

$$rank \left[\Psi_{\mathcal{T}} \left(\tilde{\boldsymbol{p}}_0 \right) \right] \le r \tag{4.114}$$

Difatti confrontando la (4.33) e la (4.111) si può scrivere

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{T}}(\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) &= col \left[\Psi_{ind}^{(0,\tau)}(t_{k}, \tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \right]_{k=1}^{n_{t}} \\ &= col \left[\Psi_{ind}^{(0,\tau)}(t_{k}, \tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \ \Psi_{dep}^{(0,\tau)}(t_{k}, \tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \right]_{k=1}^{n_{t}} \\ &= \left[\Psi_{\mathcal{T},ind}(\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \ \Psi_{\mathcal{T},dep}(\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \right] \end{aligned}$$
(4.115)

ove

$$\Psi_{\mathcal{T},ind[dep]}(\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) = col \left[\Psi_{ind[dep]}^{(0,\tau)}(t_{k},\tilde{\boldsymbol{p}}_{0})\right]_{k=1}^{n_{t}}$$
(4.116)

² La dimostrazione si adatta al caso $r = n_p$ con ovvie modifiche.
Inoltre – dal momento che ciascuna colonna di $\Psi_{dep}^{(0,\tau)}(t, \tilde{p}_0)$ è combinazione lineare delle colonne di $\Psi_{ind}^{(0,\tau)}(t, \tilde{p}_0)$ - per ogni *m* tale che $r+1 \le m \le n_p$, deve esistere un insieme di scalari $\{\alpha_i^{(m)}\}_{i=1}^r$ tali da avere

$$\boldsymbol{\phi}_{m}^{(0,\tau)}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}^{(m)} \boldsymbol{\phi}_{i}^{(0,\tau)}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_{0})$$

$$(4.117)$$

Ponendo ordinatamente $\langle t = t_k \rangle_{k=1}^{n_t}$ nella (4.117) (considerata per $r+1 \le m \le n_p$), si ottiene allora

$$\left\langle col \left[\boldsymbol{\phi}_{m}^{(0,\tau)}(\boldsymbol{t}_{k}, \tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \right]_{k=1}^{n_{t}} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}^{(m)} col \left[\boldsymbol{\phi}_{i}^{(0,\tau)}(\boldsymbol{t}_{k}, \tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \right]_{k=1}^{n_{t}} \right\rangle_{m=r+1}^{n_{p}}$$
(4.118)

Il confronto fra (4.116), (4.113) e (4.118) mostra che ciascuna colonna di $\Psi_{\mathcal{T},dep}(\tilde{p}_0)$ è combinazione lineare delle colonne di $\Psi_{\mathcal{T},ind}(\tilde{p}_0)$. Si ha quindi che $rank[\Psi_{\mathcal{T}}(\tilde{p}_0)] = rank[\Psi_{\mathcal{T},ind}(\tilde{p}_0)]$ e, poichè $\Psi_{\mathcal{T},ind}(\tilde{p}_0)$ ha r colonne, segue subito la (4.114).

Inoltre, applicando il Lemma 4.1 a $\Psi_{ind}^{(0,\tau)}(t, \tilde{p}_0)$, si ottiene che deve esistere un insieme $\overline{\mathcal{T}} = \{\bar{t}_k\}_{k=1}^r$ di r istanti di campionamento tali che $rank \Big[\Psi_{\overline{\mathcal{T}},ind}(\tilde{p}_0) \Big] = r$. Ora, giacché $\Psi_{\overline{\mathcal{T}},ind}(\tilde{p}_0)$ è una sottomatrice di $\Psi_{\overline{\mathcal{T}}}(\tilde{p}_0)$, dall'ultima equazione segue che

$$rank\left[\Psi_{\overline{\mathcal{T}}}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}\right)\right] \ge r \tag{4.119}$$

D'altro canto – in forza della arbitrarietà di \mathcal{T} in (4.114) – da quest'ultima equazione segue che deve aversi

$$rank\left[\boldsymbol{\Psi}_{\overline{\mathcal{T}}}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}\right)\right] \leq r \tag{4.120}$$

Dal confronto fra (4.119) e (4.120) si trae infine $rank \left[\Psi_{\overline{T}} \left(\tilde{\boldsymbol{p}}_{0} \right) \right] = r$, che completa la prova del punto (a).

Si fornirà ora una prova del punto (b) di tipo costruttivo. A tale scopo, si cominci col notare che si ha

$$\left\langle y_r(t, \tilde{\boldsymbol{p}}_0) \in \mathcal{S} \right\rangle_{r=1}^{n_y}$$
 (4.121)

ove S è la classe definita in (4.110); dalla (4.121), in forza della (4.31) e del Lemma 4.2, segue

$$\left\langle \left\langle \phi_{ji}^{(0,\tau)}\left(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}\right) \in S \right\rangle_{j=1}^{n_{y}} \right\rangle_{i=1}^{n_{p}}$$

$$(4.122)$$

Si consideri poi l'insieme di elementi linearmente indipendenti costituito dalle colonne di $\Psi_{ind}^{(0,\tau)}(t,\tilde{p}_0)$, vale a dire $\left\{ \phi_i^{(0,\tau)}(t,\tilde{p}_0) \right\}_{i=1}^r$. In forza della lineare indipendenza, il vettore $\phi_1^{(0,\tau)}(t,\tilde{p}_0)$ non è identicamente nullo, il che implica che deve esistere un indice k_1 tale che la funzione $\phi_{k_11}^{(0,\tau)}(t,\tilde{p}_0)$ non sia, a sua volta, identicamente nulla. Poiché, come mostra la (4.122), $\phi_{k_11}^{(0,\tau)}(t,\tilde{p}_0)$ è un membro di *S* e non è identicamente nullo, invocando il Lemma 4.2, si ottiene che per ogni $t_1 \in (0,\tau)$ - eccettuato, al più, un insieme finito $v_1 = \left\{ t_1^{(l)} \right\}_{l=1}^{m_l}$ - si ha

$$\phi_{k_{1}1}^{(0,\tau)}(t_{1},\tilde{p}_{0}) \neq 0$$
(4.123)

Si scelga allora $t_1 \notin V_1$ e si consideri la matrice $(n_y + 1)$ per 2 data da

$$Q_{2}(t_{1},t) = \begin{bmatrix} \phi_{k_{1}1}^{(0,\tau)}(t_{1},\tilde{p}_{0}) & \phi_{k_{1}2}^{(0,\tau)}(t_{1},\tilde{p}_{0}) \\ \phi_{1}^{(0,\tau)}(t,\tilde{p}_{0}) & \phi_{2}^{(0,\tau)}(t,\tilde{p}_{0}) \end{bmatrix}$$
(4.124)

poiché, per costruzione, vale la (4.123), ricalcando le argomentazioni impiegate nella prova del Lemma 4.1, si conclude che deve esistere un $\overline{t_2} \in (0,\tau)$ tale che

$$rank\left[Q_{2}\left(t_{1},\overline{t}_{2}\right)\right]=2 \tag{4.125}$$

Poiché, in forza della (4.123), la prima riga di $Q_2(t_1, \overline{t_2})$ è non nulla, si vede facilmente da (4.125) che deve esistere un indice k_2 tale che per la matrice 2 per 2 data da

$$Q_{k_{2}}(t_{1}, \overline{t}_{2}) = \begin{bmatrix} \phi_{k_{1}1}^{(0,\tau)}(t_{1}, \tilde{p}_{0}) & \phi_{k_{1}2}^{(0,\tau)}(t_{1}, \tilde{p}_{0}) \\ \phi_{k_{2}1}^{(0,\tau)}(\overline{t}_{2}, \tilde{p}_{0}) & \phi_{k_{2}2}^{(0,\tau)}(\overline{t}_{2}, \tilde{p}_{0}) \end{bmatrix}$$
(4.126)

si abbia

$$det\left[Q_{k_2}(t_1, \overline{t_2})\right] \neq 0 \tag{4.127}$$

Ora, ricorrendo nuovamente al Lemma 4.2 e ricordando ancora la (4.122), si trova subito che $det[Q_{k_2}(t_1,t)]$ è un membro di *S*, in quanto combinazione lineare di membri di tale classe; essendo, inoltre, come mostrato, $det[Q_{k_2}(t_1,\overline{t_2})] \neq 0$, si conclude che $det[Q_{k_2}(t_1,t)]$ non è identicamente nullo. Da qui, invocando ancora il Lemma 4.2, si deduce che deve essere

$$det\left[Q_{k_2}(t_1,t_2)\right] \neq 0 \tag{4.128}$$

per ogni $t_2 \in (0,\tau)$ con l'eccezione, al più, di un insieme finito $\mathcal{V}_2(t_1) = \left\{ t_2^{(l)}(t_1) \right\}_{l=1}^{m_2}$; si osservi che, come posto in luce dalla notazione, gli elementi di $\mathcal{V}_2(t_1)$ dipendono, in generale, dal t_1 precedentemente scelto.

Si scelga, quindi, un $t_2 \notin \mathcal{V}_2(t_1)$ e si consideri la matrice $(n_y + 2)$ per 3 definita da

$$Q_{3}(t_{1},t_{2},t) = \begin{bmatrix} \phi_{k_{1}1}^{(0,\tau)}(t_{1},\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \ \phi_{k_{1}2}^{(0,\tau)}(t_{1},\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \ \phi_{k_{1}3}^{(0,\tau)}(t_{1},\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \\ \phi_{k_{2}1}^{(0,\tau)}(t_{2},\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \ \phi_{k_{2}2}^{(0,\tau)}(t_{2},\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \ \phi_{k_{2}3}^{(0,\tau)}(t_{2},\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \\ \phi_{1}^{(0,\tau)}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \ \phi_{2}^{(0,\tau)}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \ \phi_{3}^{(0,\tau)}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}_{0}) \end{bmatrix}$$
(4.129)

Poiché la sottomatrice di $Q_3(t_1,t_2,t)$ - costituita dagli elementi a comune fra le prime due righe e le prime due colonne – coincide con $Q_{k_2}(t_1,t_2)$ e quest'ultima soddisfa la (4.128) per costruzione, ricalcando ancora una volta gli argomenti impiegati nella prova del Lemma 4.1, si ottiene che deve esistere un $\overline{t_3} \in (0,\tau)$ tale che

$$rank \left[Q_3(t_1, t_2, \overline{t_3}) \right] = 3$$
 (4.130)

Giacché, in forza della (4.128), $Q_{k_2}(t_1,t_2)$ ha rango pieno, la (4.130) implica che deve potersi trovare un indice k_3 tale che per la matrice

$$Q_{k_{3}}(t_{1},t_{2},\overline{t}_{3}) = \begin{bmatrix} \phi_{k_{1}1}(t_{1},\tilde{p}_{0}) & \phi_{k_{1}2}(t_{1},\tilde{p}_{0}) & \phi_{k_{1}3}(t_{1},\tilde{p}_{0}) \\ \phi_{k_{2}1}(t_{2},\tilde{p}_{0}) & \phi_{k_{2}2}(t_{2},\tilde{p}_{0}) & \phi_{k_{2}3}(t_{2},\tilde{p}_{0}) \\ \phi_{k_{3}1}(\overline{t}_{3},\tilde{p}_{0}) & \phi_{k_{3}2}(\overline{t}_{3},\tilde{p}_{0}) & \phi_{k_{3}3}(\overline{t}_{3},\tilde{p}_{0}) \end{bmatrix}$$
(4.131)

si abbia

$$det\left[Q_{k_3}(t_1,t_2,\overline{t_3})\right] \neq 0 \tag{4.132}$$

Ricalcando le argomentazioni più sopra impiegate per $Q_{k_2}(t_1, \overline{t_2})$, si trova che deve aversi $det[Q_{k_3}(t_1, t_2, t_3)] \neq 0$ per ogni $t_3 \in (0, \tau)$, con la possibile eccezione di un insieme finito $\mathcal{V}_3(t_1, t_2) = \left\{ t_3^{(l)}(t_1, t_2) \right\}_{l=1}^{m_3}$, i cui elementi dipendono dai precedentemente scelti membri della coppia $\{t_1, t_2\}$.

Continuando a questo modo, si ottiene infine che la matrice r per r definita da

$$Q_{k_{r}}(t_{1},t_{2},...,t_{r}) = \begin{bmatrix} \phi_{k_{1}1}^{(0,\tau)}(t_{1},\tilde{p}_{0}) & \phi_{k_{1}2}^{(0,\tau)}(t_{1},\tilde{p}_{0}) & \cdots & \phi_{k_{1}r}^{(0,\tau)}(t_{1},\tilde{p}_{0}) \\ \phi_{k_{2}1}^{(0,\tau)}(t_{2},\tilde{p}_{0}) & \phi_{k_{2}2}^{(0,\tau)}(t_{2},\tilde{p}_{0}) & \cdots & \phi_{k_{2}r}^{(0,\tau)}(t_{2},\tilde{p}_{0}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{k_{r}1}^{(0,\tau)}(t_{r},\tilde{p}_{0}) & \phi_{k_{r}2}^{(0,\tau)}(t_{r},\tilde{p}_{0}) & \cdots & \phi_{k_{r}r}^{(0,\tau)}(t_{r},\tilde{p}_{0}) \end{bmatrix}$$

$$(4.133)$$

ha rango pieno per ogni scelta di $t_r \in (0,\tau)$ con l'eccezione, al più, di un insieme finito $\mathcal{V}_r(t_1,t_2,...,t_{r-1}) = \left\{ t_r^{(l)}(t_1,t_2,...,t_{r-1}) \right\}_{l=1}^{m_r}$, i cui elementi dipendono, in generale, dai precedentemente scelti $\{t_l\}_{l=1}^{r-1}$.

Ora, evidentemente $Q_{k_r}(t_1, t_2, ..., t_r)$ è una sottomatrice di $\Psi_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{u}_0)$ quando $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, ..., t_r\}$. Questa osservazione completa la dimostrazione.

4.7.5 Dimostrazione del Lemma 4.3

Per il generico \tilde{p} , sia

$$r = colrank \left[\Psi^{(0,\tau)}(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right]$$

$$R = colrank \left[\Psi(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right]$$
(4.134)

Per assurdo, si supponga dapprima che sia R < r. Allora, senza perdita di generalità, dalla (4.134), ricordando la (4.30), si deduce che, per ogni insieme $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$ di r elementi non tutti nulli si ha $\sum_{i=1}^r \alpha_i \phi_i^{(0,\tau)}(t,\tilde{p}) \neq 0$. Ma, in forza delle definizione stessa dei vettori $\{\phi_i^{(0,\tau)}\}_{i=1}^{n_p}$, l'ultima condizione implica chiaramente $\sum_{i=1}^r \alpha_i \phi_i(t,\tilde{p}) \neq 0$, la quale, congiunta alle (4.32) e (4.134), fornisce a sua volta $R \ge r$. Si supponga ora r < R. Allora, ricordando ancora la (4.32), si può assumere senza ledere la generalità che gli elementi dell'insieme $\{\phi_i(t,\tilde{p})\}_{i=1}^{R}$ siano linearmente indipendenti. Dal momento che r < R, il precedente assunto implica che gli elementi dell'insieme $\{\phi_i(t,\tilde{p})\}_{i=1}^{R}$ siano, a loro volta, linearmente indipendenti. Inoltre, in forza della (4.134), si ha che deve esistere un insieme $\{\alpha_i\}_{i=1}^{r+1}$ di elementi non tutti nulli tali che

 $\sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i \phi_i^{(0,\tau)}(t, \tilde{p}) \equiv \boldsymbol{0}$. Alla luce della (4.30), l'ultima condizione è equivalente a

$$\left\langle \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i \phi_{ji}^{(0,\tau)}(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \equiv \boldsymbol{\theta} \right\rangle_{j=1}^{n_y}$$
(4.135)

Dunque, in forza della (4.135), per le funzioni

$$\left\langle f_{j}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}) = \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_{i} \phi_{ji}(t,\tilde{\boldsymbol{p}}) \right\rangle_{j=1}^{n_{y}}$$
(4.136)

sussistono, per $j=1,2,...,n_y$, i seguenti fatti: (i) l'insieme $\mathcal{Z} = \left\{ z : z = \tau \left(2^{n+1} + 1 \right) / \left(2^{n+2} + 1 \right), n \in \mathbb{N} \right\}$ è una successione di zeri di $f_j(t)$ che converge a $\tau/2 \in \mathbb{R}_+$; (ii) \mathbb{R}_+ è un insieme aperto e connesso; (iii) $f_j(t)$ è analitica su \mathbb{R}_+ (in quanto combinazione lineare di funzioni analitiche).

Allora, invocando la teoria delle funzioni analitiche, dai summenzionati fatti segue che deve aversi

$$\left\langle f_{j}\left(t\right) \equiv 0, t \in \mathbb{R}_{+} \right\rangle_{j=1}^{n_{y}}$$

$$(4.137)$$

Poiché

$$\left\langle \boldsymbol{\phi}_{i}\left(t,\tilde{\boldsymbol{p}}\right) = col\left[\phi_{ji}\left(t,\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right]_{j=1}^{n_{x}}\right\rangle_{i=1}^{n_{p}}$$

$$(4.138)$$

il confronto fra (4.135)-(4.138) porge

$$\sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i \left(t, \tilde{\boldsymbol{p}} \right) \equiv \boldsymbol{0}$$
(4.139)

La (4.139) contraddice la lineare indipendenza degli elementi dell'insieme $\{\phi_i(t, \tilde{p})\}_{i=1}^{r+1}$, il che completa la dimostrazione.

4.7.6 Lemma 4.4

Enunciato

Sia $\mathcal{G} = \{g_i(t)\}_{i=1}^k$ un insieme di funzioni reali della variabile reale *t*, definite e continue su $[0,+\infty)$, dotate di trasformata di Laplace monolatera; siano $\langle \gamma_i(s) = \mathcal{L}[g_i(t)] = \int_0^\infty g_i(t)e^{-st}dt \rangle_{i=1}^k$ le rispettive trasformate. Allora gli elementi di \mathcal{G} sono linearmente indipendenti se e solo se tali sono gli elementi dell'insieme $\Gamma = \{\gamma_i(s)\}_{i=1}^k$.

Dimostrazione Sia

$$g(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i(t) \tag{4.140}$$

una combinazione lineare di elementi di \mathcal{G} , ove gli elementi di $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$ sono costanti reali. Allora, in virtù della proprietà di linearità, g(t) è Laplace-trasformabile e la sua trasformata è data da

$$\gamma(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_i(s)$$
(4.141)

Inoltre, in forza del teorema di Lerch

$$g(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \gamma(s) \equiv 0 \tag{4.142}$$

Inserendo (4.140) e (4.141) in (4.142) si ha allora

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_{i} g_{i}(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i} \gamma_{i}(s) = 0$$
(4.143)

il che completa la dimostrazione.

4.7.7 Dimostrazione del Teorema 4.2

Si cominci con l'osservare che – essendo gli elementi di $\Psi(t, \tilde{p})$ funzioni analitiche su \mathbb{R}_+ - in forza del Lemma 4.3 si ha

$$colrank\left[\Psi^{(0,\tau)}(t,\tilde{\boldsymbol{p}})\right] = colrank\left[\Psi(t,\tilde{\boldsymbol{p}})\right]$$
 (4.144)

Inoltre, ricordando la definizione delle funzioni $\{y_j(t, \tilde{p})\}_{j=1}^{n_y}$, si deduce che le stesse sono Laplace-trasformabili e dunque tali sono il vettore $y(t, \tilde{p})$, le sue derivate

$$\langle \boldsymbol{\phi}_i(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) = \partial \boldsymbol{y}(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) / \partial p_i \rangle_{i=1}^{n_p}$$
 (4.145)

e la matrice

$$\Psi(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) = row \left[\boldsymbol{\phi}_i(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right]_{i=1}^{n_p}$$
(4.146)

Sia

$$\Theta(s, \tilde{\boldsymbol{p}}) = \mathcal{L}\left[\Psi(t, \tilde{\boldsymbol{p}})\right] = row \left[\mathcal{L}\left[\boldsymbol{\phi}_{i}\left(t, \tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right]\right]_{i=1}^{n_{p}}$$

$$= row \left[\boldsymbol{\theta}_{i}\left(s, \tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right]_{i=1}^{n_{p}} = row \left[col\left[\boldsymbol{\theta}_{ji}\left(s, \tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right]_{j=1}^{n_{p}}\right]_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.147)

si proverà per assurdo che

$$colrank \left[\Psi(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right] = colrank \left[\Theta(s, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right]$$
 (4.148)

Difatti, sia $r_{\psi} = colrank \left[\Psi(t, \tilde{p}) \right]$, $r_{\Theta} = colrank \left[\Theta(s, \tilde{p}) \right]$ e $r_{\psi} > r_{\Theta}$. Senza perdita di generalità, si può allora assumere che le prime r_{ψ} colonne di $\Psi(t, \tilde{p})$, vale a dire $\{ \phi_i(t, \tilde{p}) \}_{i=1}^{r_{\psi}}$, siano linearmente indipendenti. Dalla (4.147), in forza del Lemma 4.4, segue quindi che tali devono essere altresì le prime r_{ψ} colonne di $\Theta(s, \tilde{p})$, vale a dire $\{ \theta_i(s, \tilde{p}) \}_{i=1}^{r_{\psi}}$, il che contraddice l'assunto $r_{\Theta} = colrank \left[\Theta(s, \tilde{p}) \right] < r_{\psi}$. In modo perfettamente analogo si prova che non può aversi $r_{\Theta} > r_{\psi}$.

Sia, ora

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s}, \tilde{\boldsymbol{p}}) = col \left[\boldsymbol{Y}_{i}(\boldsymbol{s}, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right]_{i=1}^{n_{y}} = \mathcal{L} \left[\boldsymbol{y}(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right] = col \left[\mathcal{L} \left[\boldsymbol{y}_{i}(t, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right] \right]_{i=1}^{n_{y}}$$
(4.149)

Confrontando le (4.145)-(4.147), (4.149) e invertendo – per $i = 1, 2, \dots, n_p$ l'ordine degli operatori $\mathcal{L}[\bullet] \in \partial(\bullet)/\partial p_i$, si ha

$$\left\langle \boldsymbol{\theta}_{i}\left(s,\tilde{\boldsymbol{p}}\right) = col\left[\boldsymbol{\theta}_{ji}\left(s,\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right]_{j=1}^{n_{y}} = col\left[\partial Y_{j}\left(s,\tilde{\boldsymbol{p}}\right)/\partial p_{i}\right]_{j=1}^{n_{y}}\right\rangle_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.150)

D'altro canto – tenendo presente la natura delle funzioni $\{y_j(t, \tilde{p})\}_{j=1}^{n_y}$ – si potrà scrivere

$$\left\langle Y_j(s,\tilde{\boldsymbol{p}}) = N_j(s,\tilde{\boldsymbol{p}}) / (s\Delta(s,\boldsymbol{p})) = \sum_{h=0}^G a_h^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) s^h / \left(s \sum_{h=0}^G b_h(\boldsymbol{p}) s^h \right) \right\rangle_{j=1}^{n_y}$$
(4.151)

ove la *s* che appare al denominatore deriva dall'aver raccolto 1/s a fattor comune fra i termini $\{u_m/s\}_{m=1}^{n_u} e\{x_l(0^+, \tilde{p})/s\}_{l=1}^{n_x}$, che rappresentano, rispettivamente, le L-trasformate degli stimoli reali e degli stimoli fittizi relativi alle condizioni iniziali.

Inoltre, in (4.151) è

$$\left\langle \left\langle a_{h}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \sum_{m=1}^{n_{u}} a_{K,hm}^{(j)}(\boldsymbol{p}) u_{m} + \sum_{l=1}^{n_{x}} a_{H,hl}^{(j)}(\boldsymbol{p}) x_{l}(0^{+}, \tilde{\boldsymbol{p}}) \right\rangle_{h=0}^{G} \right\rangle_{j=1}^{n_{y}}$$
(4.152)

ove le entità $\left\{\left\{a_{K,hm}^{(j)}(\boldsymbol{p})\right\}_{m=1}^{n_u}\right\}_{h=0}^{G}\right\}_{j=1}^{n_y}$, al pari delle entità $\left\{\left\{a_{H,hl}^{(j)}(\boldsymbol{p})\right\}_{l=1}^{n_x}\right\}_{h=0}^{G}\right\}_{j=1}^{n_y}$, sono funzioni razionali (e dunque analitiche) delle componenti di

 $\boldsymbol{p} = col[p_i]_{i=1}^{n_p}$ e le entità $\left\{x_l(0^+, \tilde{\boldsymbol{p}})\right\}_{l=1}^{n_x}$ come mostrato nella Sezione 4.2, sono funzioni analitiche delle componenti di $\tilde{\boldsymbol{p}}$. La (4.152) mostra quindi che i coefficienti $\left\{\left\{a_h^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}})\right\}_{h=0}^{G}\right\}_{j=1}^{n_y}$ nella (4.151) sono ottenuti combinando algebricamente funzioni analitiche di $\tilde{\boldsymbol{p}}$ e sono dunque tali a loro volta.

Combinando la (4.150) con la (4.151) si ha

$$\left\langle \left\langle \theta_{ji}\left(s,\tilde{\boldsymbol{p}}\right) = \frac{\partial Y_{j}\left(s,\tilde{\boldsymbol{p}}\right)}{\partial p_{i}} = \frac{C_{ji}\left(s,\tilde{\boldsymbol{p}}\right)}{s\Delta^{2}\left(s,\boldsymbol{p}\right)} = \frac{\sum_{h=0}^{2G} c_{h}^{(ji)}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\right)s^{h}}{s\Delta^{2}\left(s,\boldsymbol{p}\right)} \right\rangle_{j=1}^{n_{y}} \right\rangle_{i=1}^{n_{y}} \left\langle 4.153\right\rangle$$

ove è

$$\left\langle \left\langle C_{ji}\left(s,\tilde{\boldsymbol{p}}\right) = \sum_{h=0}^{2G} c_{h}^{(ji)}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\right) s^{h} \right\rangle_{j=1}^{n_{y}} \right\rangle_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.154)

con

$$\left\langle \left\langle \left\langle c_{h}^{(ji)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) = \sum_{q=0}^{h} \left(b_{q}(\boldsymbol{p}) \frac{\partial a_{h-q}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}})}{\partial p_{i}} - a_{q}^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}}) \frac{\partial b_{h-q}(\boldsymbol{p})}{\partial p_{i}} \right) \right\rangle_{h=0}^{2G} \right\rangle_{j=1}^{n_{y}} \right\rangle_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.155)

Ora, giacché i coefficienti $\{b_q(\boldsymbol{p})\}_{q=0}^G$ sono funzioni razionali (e dunque analitiche) degli elementi di \boldsymbol{p} e i coefficienti $\{\{a_h^{(j)}(\tilde{\boldsymbol{p}})\}_{h=0}^G\}_{j=1}^{n_y}$ sono, come appena mostrato, funzioni analitiche degli elementi di $\tilde{\boldsymbol{p}}$, tali sono le derivate parziali che compaiono in (4.155). La (4.155) stessa mostra dunque che gli elementi $\langle\langle\langle\langle c_h^{(ji)}(\tilde{\boldsymbol{p}})\rangle_{h=0}^{2G}\rangle_{j=1}^{n_y}\rangle_{i=1}^{n_y}$ sono ottenuti combinando algebricamente

funzioni analitiche di \tilde{p} e sono perciò tali a loro volta.

Si raccolgano, adesso, i polinomi definiti in (4.154) in una matrice

$$\mathcal{X}(s,\tilde{\boldsymbol{p}}) = row \left[\boldsymbol{C}_{i}(s,\tilde{\boldsymbol{p}})\right]_{i=1}^{n_{p}} = row \left[col\left[\boldsymbol{C}_{ji}(s,\tilde{\boldsymbol{p}})\right]_{j=1}^{n_{y}}\right]_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.156)

Confrontando (4.147), (4.153) e (4.157) si trova

 $\Theta(s, \tilde{\boldsymbol{p}}) = X(s, \tilde{\boldsymbol{p}}) / (s\Delta^2(s, \boldsymbol{p})) (4.157)$

La (4.157) mostra che ciascuna colonna di $\Theta(s, \tilde{p})$ differisce dalla corrispondente colonna di $\chi(s, \tilde{p})$ solo per il medesimo fattore moltiplicativo $1/(s\Delta^2(s, p))$ e quest'ultimo ha il solo effetto di far differire i rispettivi domini di dette colonne solo in corrispondenza dell'insieme finito (e ininfluente) descritto da $\{s:s\Delta^2(s,p)=0\}$. Dalla stessa (4.157) segue allora

$$colrank\left[\Theta(s, \tilde{p})\right] = colrank\left[\chi(s, \tilde{p})\right]$$
 (4.158)

Inoltre, la (4.154) mostra che gli elementi $\left\{ \left\{ C_{ji}\left(s,\tilde{p}\right) \right\}_{j=1}^{n_y} \right\}_{i=1}^{n_y}$ of $X(s,\tilde{p})$ sono membri di Π_{2G} , ossia lo spazio vettoriale dei polinomi di grado non superiore a 2*G*. Ne deriva immediatamente che le colonne $\left\{ C_i(s,\tilde{p}) \right\}_{i=1}^{n_y}$ sono elementi di $\Pi_{2G}^{n_y}$, vale a dire il prodotto cartesiano di Π_{2G} per sé stesso n_y volte. Ora, studiare la lineare dipendenza degli elementi di uno spazio vettoriale è equivalente a studiare la lineare dipendenza dei corrispondenti vettori delle coordinate rispetto a una qualsivoglia base dello stesso. Come è subito visto, una base per $\Pi_{2G}^{n_y}$ è costituita dall'insieme \mathcal{B} , consistente di $n_y(2G+1)$ vettori, dato da

$$\mathcal{B} = \left\{ \left[s^{i} \ 0 \cdots 0 \right]^{tr} \right\}_{i=0}^{2G} \cup \left\{ \left[0 \ s^{i} \cdots 0 \right]^{tr} \right\}_{i=0}^{2G} \cup \cdots \cup \left\{ \left[0 \ 0 \cdots s^{i} \right]^{tr} \right\}_{i=0}^{2G} \right\}$$
(4.159)

Rispetto a tale base, i vettori delle coordinate degli elementi di $\{C_i(s, \tilde{p})\}_{i=1}^{n_p}$ sono rispettivamente dati da

$$\left\langle \boldsymbol{c}_{i}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\right) = col\left[\boldsymbol{c}^{(ji)}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right]_{j=1}^{n_{y}} = col\left[col\left[\boldsymbol{c}_{h}^{(ji)}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right]_{h=1}^{2G}\right]_{j=1}^{n_{y}}\right\rangle_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.160)

ove gli elementi

$$\left\{\left\{\left\{c_{h}^{(ji)}\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right\}_{h=1}^{2G}\right\}_{j=1}^{n_{y}}\right\}_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.161)

coincidono con i coefficienti che appaiono nelle (4.154).

Sia ora

$$C(\tilde{\boldsymbol{p}}) = row \left[\boldsymbol{c}_{i}(\tilde{\boldsymbol{p}})\right]_{i=1}^{n_{p}} = row \left[col \left[\boldsymbol{c}^{(ji)}(\tilde{\boldsymbol{p}})\right]_{j=1}^{n_{y}}\right]_{i=1}^{n_{p}}$$
(4.162)

allora, dalla discussione precedente segue

$$colrank \left[X(s, \tilde{p}) \right] = rank \left[C(\tilde{p}) \right]$$
(4.163)

Confrontando (4.144), (4.148), (4.158), and (4.163) si ha quindi

$$colrank\left[\Psi^{(0,\tau)}(t,\tilde{\boldsymbol{p}})\right] = rank\left[C(\tilde{\boldsymbol{p}})\right]$$
(4.164)

Ora, poiché $C(\tilde{p})$ ha n_p colonne, $rank[C(\tilde{p})]$ deve assumere valori nell'insieme (finito) di interi $\{0, 1, 2, ..., n_p\}$: deve dunque esistere un \tilde{p}^* tale da avere

$$rank\left[C\left(\tilde{\boldsymbol{p}}^{*}\right)\right] = \max_{\tilde{\boldsymbol{p}}} rank\left[C\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right] = r, 0 \le r \le n_{p}$$
(4.165)

La (4.165) implica che esiste in $C(\tilde{p})$ un minore $M(\tilde{p})$ di ordine r per il quale è $M(\tilde{p}^*) \neq 0$. Ma $M(\tilde{p})$ è combinazione algebrica degli elementi (4.161), che si è dianzi mostrato essere funzioni analitiche di \tilde{p} . Perciò, $M(\tilde{p})$ risulta essere, a sua volta, una funzione analitica di \tilde{p} e, non essendo identicamente nullo, (perché $M(\tilde{p}^*) \neq 0$), esso può annullarsi, al più, per i valori di \tilde{p} appartenenti ad un insieme $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{V}_i$, ove $n = n_p + n_u$ e, per i = 1, 2, ..., n-1, \mathcal{V}_i è una varietà *i*-dimensionale (eventualmente vuota) dello spazio *n*-dimensionale \mathcal{W} . Poiché una varietà i-dimensionale di uno spazio *n*-dimensionale con i < n ha misura nulla, \mathcal{V} risulta essere costituita dall'unione di un numero finito di insiemi aventi misura nulla e ha dunque misura nulla a sua volta

In forza del precedente argomento, si ha

$$\forall \ \tilde{\boldsymbol{p}} \notin \mathcal{V}\left(rank\left[C\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right] \equiv \max_{\tilde{\boldsymbol{p}}} rank\left[C\left(\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right]\right)$$
(4.166)

Dal confronto fra (4.164) e (4.166) segue allora

$$\forall \, \tilde{p} \notin \mathcal{V}\left(colrank\left[\Psi^{(0,\tau)}(t,\tilde{p})\right] \equiv \max_{\tilde{p}} colrank\left[\Psi^{(0,\tau)}(t,\tilde{p})\right]\right)$$
(4.167)

che completa la dimostrazione.

4.7.8 Dimostrazione del Corollario 4.1

Senza ledere la generalità, si può assumere che sia $k_i = i$ e considerare le prime *r* colonne di $\Psi(t, \tilde{p})$. Ora, in virtù del Lemma 4.4 e adottando le medesime notazioni del precedente Paragrafo 4.7.7, si ha che – per un certo \tilde{p} - gli elementi $\{\phi_i(t, \tilde{p})\}_{i=1}^r$ sono linearmente indipendenti se e solo se tali sono gli elementi

$$\left\{ \mathcal{L}\left[\boldsymbol{\phi}_{i}\left(t,\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right] \right\}_{i=1}^{r} = \left\{ \boldsymbol{\theta}_{i}\left(s,\tilde{\boldsymbol{p}}\right) \right\}_{i=1}^{r}$$
(4.168)

D'altro canto, ricalcando le argomentazioni del precedente Paragrafo 4.7.7, si ottiene che - per un certo \tilde{p} - gli elementi dell'insieme nel secondo membro della (4.168) sono linearmente indipendenti se e solo se tale sono gli elementi dell'insieme $\{c_i(\tilde{p})\}_{i=1}^r$. Ora, se esiste un \tilde{p}^* tale che gli elementi $\{c_i(\tilde{p}^*)\}_{i=1}^r$ siano linearmente indipendenti, ricalcando ancora una volta le argomentazioni del precedente Paragrafo 4.7.7, si conclude che gli elementi $\{c_i(\tilde{p})\}_{i=1}^r$ devono essere linearmente indipendenti per *quasi* ogni \tilde{p} . Invece, se un tale \tilde{p}^* non esiste, allora gli elementi $\{c_i(\tilde{p})\}_{i=1}^r$ sono linearmente indipendenti per ogni \tilde{p} . Ciò completa la dimostrazione.

4.7.9 Dimostrazione del Teorema 4.3

Dalla (4.39), in forza del Lemma 4, si ha

$$\left\langle \forall \, \tilde{\boldsymbol{p}}\left(\left\{\boldsymbol{\phi}_{k_{i}}\left(t,\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right\}_{i=1}^{r} \, \mathrm{\check{e}} \, \mathrm{un} \, \mathrm{ILD} \Leftrightarrow \left\{\boldsymbol{\theta}_{k_{i}}\left(s,\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right\}_{i=1}^{r} \, \mathrm{\check{e}} \, \mathrm{un} \, \mathrm{ILD}\right) \right\rangle_{r=1}^{n_{p}}$$
(4.169)

Ancora dalla (4.39), ricalcando le argomentazioni del precedente Paragrafo 4.7.7, si trova

$$\left\langle \forall \, \tilde{\boldsymbol{p}}\left(\left\{\boldsymbol{\theta}_{k_{i}}\left(s,\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right\}_{i=1}^{r} \, \text{\`{e}}\, \text{un ILD} \Leftrightarrow \left\{\boldsymbol{C}_{k_{i}}\left(s,\tilde{\boldsymbol{p}}\right)\right\}_{i=1}^{r} \, \text{\`{e}}\, \text{un ILD}\right)\right\rangle_{r=1}^{n_{p}}$$
(4.170)

Inoltre, ricordando (4.40), (4.41), (4.43) e (4.44) e ricalcando ancora gli argomenti del Paragrafo 4.7.7, si ottiene

$$\left\langle \forall \, \tilde{\boldsymbol{p}} \left(\left\{ \boldsymbol{C}_{k_i} \left(s, \tilde{\boldsymbol{p}} \right) \right\}_{i=1}^r \, \text{e} \, \text{un ILD} \, \Leftrightarrow \left\{ \boldsymbol{c}_{k_i} \left(\tilde{\boldsymbol{p}} \right) \right\}_{i=1}^r \, \text{e} \, \text{un ILD} \right) \right\rangle_{r=1}^{n_p}$$
(4.171)

Confrontando ora (4.169)-(4.171) si perviene al punto (i) della tesi.

Infine, a partire da detto punto (i), per mezzo di un argomentazione per assurdo simile a quella impiegate per provare la (4.148), si prova il punto (ii).

Bibliografia

1. V. Visvanathan and A. Sangiovanni-Vincentelli, "Diagnosability of nonlinear circuits and systems-Part I: The dc case," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 28, no. 11, pp. 1093-1102, Nov. 1981.

2. R. Saeks, A. Sangiovanni-Vincentelli and V. Visvanathan, "Diagnosability of nonlinear circuits and systems-Part II: Dynamical systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 28, no. 11, pp. 1103-1108, Nov. 1981.

3. G. Fedi, R. Giomi, S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A symbolic approach for testability evaluation in fault diagnosis of nonlinear analog circuits," *Proceedings of the 1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1998. ISCAS '98*, Monterey, CA, 1998, pp. 9-12 vol.6.

4. S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A singular-value decomposition approach for ambiguity group determination in analog circuits," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 50, no. 4, pp. 477-487, Apr. 2003.

Capitolo 5

Nuovi algoritmi rapidi per l'Analisi di Testabilità di circuiti analogici di grandi dimensioni

Nel Capitolo 3, tecniche simboliche sono state vantaggiosamente impiegate per ottenere un robusto ed efficiente algoritmo atto all'analisi di testabilità dei circuiti lineari, in grado di aggirare i principali inconvenienti da cui i precedenti approcci di tipo numerico risultavano affetti e, al contempo, di evidenziare le modalità con le quali le peculiarità delle funzioni di rete influiscono sulla testabilità, consentendo la derivazione di numerosi risultati di carattere generale. Tuttavia, accanto agli innegabili benefici che esse offrono, un serio inconveniente legato alle tecniche simboliche applicate all'analisi circuitale è che gli algoritmi basati su esse comportano tempi di elaborazione rapidamente crescenti con le dimensioni del circuito allo studio, fino a divenire praticamente inaccettabili per grandi circuiti. In questo capitolo si impiega un nuovo approccio numerico per derivare un algoritmo - oggetto di recente pubblicazione - per l'analisi di testabilità di circuiti analogici di grandi dimensioni, che riduce drasticamente tanto l'onere di calcolo che i tempi di elaborazione caratterizzanti sia i precedenti approcci simbolici che quelli numerici, riducendo altresì rispetto a questi ultimi i nocivi effetti degli errori di arrotondamento. Viene qui inoltre presentata per la prima volta una variante di detto algoritmo, che – oltre a essere concettualmente più snella - consente una ulteriore notevole riduzione dei tempi di elaborazione, configurarsi sì da come uno strumento particolarmente adatto al progetto di strategie di diagnosi di guasto o identificazione parametrica per reti di dimensioni ragguardevoli.¹

5.1 Introduzione

- 5.2 Richiami ai principi fondamentali di analisi di testabilità per circuiti lineari tempo-invarianti e al problema della sua automatizzazione
 - 5.2.1 Definizioni di Testabilità e di analisi di testabilità
 - 5.2.2 Dal dominio di Laplace al campo reale
 - 5.2.3 Revisione del problema della automatizzazione dell'analisi di testabilità

5.3. Nuovi algoritmi numerici

- 5.3.1 Momenti della risposta impulsiva
- 5.3.2 Derivazione di un primo algoritmo ricorsivo per il calcolo della matrice di testabilità
- 5.3.3 Implementazione software: il programma LINFTA

5.3.4 Un algoritmo ricorsivo alternativo e nuova espressione della matrice di

¹ Parte dei risultati presentati in questo capitolo sono apparsi in Giuseppe Fontana, Antonio Luchetta, Stefano Manetti and Maria Cristina Piccirilli, "A Fast Algorithm for Testability Analysis of Large Linear Time-Invariant Networks," IEEE Transactions on Circuits and Systems: Regular Papers, vol. 64, no. 6, pp. 1564-1575, Jan. 2017.

testabilità

- 5.3.5 Espressione in forma chiusa della nuova matrice di testabilità
- 5.3.6 Implementazione software: il programma LINFTA.2
- 5.3.7 Valutazione dell'onere di elaborazione e confronto con precedenti approcci
- 5.4 Esempio

5.1 Introduzione

Nei precedenti Capitoli 3 e 4, l'impiego di tecniche simboliche ha consentito di derivare rigorose misure di testabilità ed efficienti algoritmi per l'analisi di testabilità di circuiti analogici lineari tempo-invarianti e a commutazione periodica con stimoli costanti.

Oltre a garantire una intrinseca immunità dai problemi legati agli approcci numerici, le tecniche simboliche hanno consentito di cogliere aspetti generali e derivare risultati teorici di notevole importanza. D'altra parte, la natura combinatoria degli algoritmi che su dette tecniche si basano determina una crescita esponenziale dei tempi di elaborazione con le dimensioni del circuito allo studio, tempi che divengono ben presto, in pratica, inaccettabili non appena dette dimensioni superino quelle medio-piccole dei circuiti discreti.

Simili considerazioni riguardanti i tempi di elaborazione possono farsi, del resto, anche in relazione a precedenti approcci numerici che – pur basati su algoritmi di complessità polinomiale – richiedono l'esecuzione di un elevato numero di decomposizioni LU ed annesse coppie di sostituzioni "avantiindietro", oltre a essere gravemente condizionati dai nocivi effetti degli errori di arrotondamento, che riducono i loro risultati a mere stime.

Queste considerazioni hanno portato alla ricerca di nuovi algoritmi, ancora basati su tecniche numeriche, ma in grado di superare, al contempo, tanto i summenzionati inconvenienti inficianti gli approcci numerici precedenti quanto quelli caratterizzanti i suddetti approcci simbolici. I risultati di tale ricerca sono presentati nel seguito: in particolare sono descritti un efficiente algoritmo numerico che consente, di per sé, una drastica riduzione dei tempi di elaborazione e degli effetti degli errori di arrotondamento caratteristici dei succitati approcci, e una sua variante, che – oltre a essere dotata di una maggiore snellezza concettuale – permette una ulteriore notevole riduzione dei tempi di elaborazione, sì da configurarsi come un efficiente e pratico strumento per l'analisi e il progetto di strategie per la diagnosi di guasto e l'identificazione dei parametri nei circuiti lineari analogici di grandi dimensioni.

5.2. Richiami ai principi fondamentali di analisi di testabilità per circuiti lineari tempo-invarianti e al problema della sua automatizzazione

5.2.1 Definizioni di Testabilità e di analisi di testabilità

Si consideri il generico circuito lineare analogico tempo-invariante (CLATI) \mathcal{N} e sia $\boldsymbol{p} = col[p_k]_{k=1}^{n_p}$ un vettore di parametri relativi alle equazioni costitutive dei suoi componenti, come rappresentato simbolicamente in Fig. 5.1. L'insieme degli elementi di \boldsymbol{p} può coincidere con l'intero insieme $\mathcal{P} = \{p_k\}_{k=1}^{n_{tot}}$ dei parametri che caratterizzano il comportamento di \mathcal{N} o con un suo sottoinsieme proprio: in quest'ultimo caso, i parametri non compresi in \boldsymbol{p} sono assunti noti e fissati ai rispettivi valori nominali.



Fig. 5.1 – Un generico CLATI N in cui sono posti in evidenza un insieme di variabili di ingresso, un insieme di variabili di uscita e un insieme di parametri di interesse.

Siano in \mathcal{N} altresì individuati n_x ingressi e n_y uscite, cui corrispondano, rispettivamente, gli insiemi di variabili elettriche $\{x_i\}_{i=1}^{n_x}$ e $\{y_j\}_{j=1}^{n_y}$. Poiché \mathcal{N} è un CLATI, per $i=1,2,...,n_x$ e $j=1,2,...,n_y$ alla coppia ingresso-uscita (x_i, y_j) rimane univocamente associata la funzione di rete

$$h_j^{(i)}(s, \boldsymbol{p}) \triangleq y_j / x_i \Big|_{x_k = 0, \forall k \neq i}$$
(5.1)

dall'*i*-esimo ingresso alla *j*-esima uscita nelle condizioni operative in cui solo detto ingresso è stimolato mentre gli altri sono annullati in accordo alla natura delle rispettive variabili elettriche, come mostrato in Fig. 5.2: nel seguito si indicherà con $\mathcal{N}^{(i)}$ la peculiare determinazione di \mathcal{N} relativa alle predette condizioni operative.



Fig. 5.2 – Rappresentazione simbolica della peculiare configurazione $\mathcal{N}^{(i)}$ assunta dal circuito \mathcal{N} di Fig. 5.1 quando l'*i*-esimo ingresso è stimolato da un segnale unitario

e gli altri ingressi sono annullati in accordo alla natura delle rispettive variabili elettriche.

Si raccolgano le funzioni di rete definite dalla (5.1) per $i=1,2,...,n_x$ e $j=1,2,...,n_y$ in un vettore

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}) = col \left[col \left[h_{j}^{(i)}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{x}}$$
(5.2)

Allora, come descritto nel Capitolo 3, una misura di *testabilità* per \mathcal{N} , relativamente agli insiemi di ingressi e uscite considerati, può essere ottenuta a partire dallo Jacobiano

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}^{*}) = row \left[\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}) / \partial \boldsymbol{p}_{k} \Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^{*}} \right]_{k=1}^{n_{p}} = row \left[\boldsymbol{\varphi}_{k}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{k=1}^{n_{p}}$$
(5.3)

di h(s, p) calcolato in corrispondenza di un valore p^* di p generato in modo aleatorio.

Precisamente, l'indice

$$T = colrank \left[\Phi(s, p^*) \right]$$
(5.4)

denominato *Testabilità*, rappresenta il massimo numero di elementi di p che possono essere oggetto di diagnosi o identificazione univoche a partire dagli insiemi di ingressi e uscite considerati: nella (5.4) $colrank \left[\Phi(s,p^*) \right]$ indica il massimo numero di colonne di $\Phi(s,p^*)$ linearmente indipendenti quali funzioni di *s*. Accanto alla (5.4) si definisce la quantità

$$\rho = 100T/n_p \tag{5.5}$$

denominata *Rapporto di Testabilità*, che rappresenta una misura globale dell'attitudine del circuito a fornire informazioni circa il valore dei suoi parametri, a partire da misure effettuate sulle uscite prescelte quando il circuito è stimolato in corrispondenza degli ingressi considerati.

Le grandezze summenzionate costituiscono i risultati dell'analisi di testabilità *a livello di circuito*. Può accadere, d'altra parte, che si abbia $T < n_p$ e quindi $\rho < 100\%$, eventualità nella quale gli elementi di p, se considerati tutti simultaneamente potenzialmente difettosi o incogniti, non possono essere oggetto di diagnosi o identificazione univoche: diviene allora importante stabilire per quali sottoinsiemi di \mathcal{P} ciò sia o non sia possibile, obbiettivo, questo, dell'analisi di testabilità *a livello di componente*. Per precisare tali concetti, si consideri la generica iniezione $k_l : \{1, 2, \dots, r\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n_p\}$ con $1 \le r \le n_p$: si dirà allora che il sottoinsieme $\{p_{k_l}\}_{l=1}^r$ di \mathcal{P} è un *Gruppo d'Ambiguità Canonico* (GAC) se l'insieme $\{\varphi_{k_l}(s, p^*)\}_{l=1}^r$ delle corrispondenti colonne di $\Phi(s, p^*)$ costituisce un insieme minimale di vettori linearmente dipendenti quali funzioni di *s*; si dirà invece che il sottoinsieme $\{p_{k_l}\}_{l=1}^r$ di \mathcal{P} è un *Gruppo Testabile* (GT) se l'insieme $\{\varphi_{k_l}(s, p^*)\}_{l=1}^r$ delle corrispondenti colonne di $\Phi(s, p^*)$ costituisce un insieme (massimale) di vettori linearmente indipendenti quali funzioni di *s*.

5.2.2 Dal dominio di Laplace al campo reale

Ancorché rigorose, le definizioni di T, ρ , GCA e GT date dianzi sono basate sulla lineare dipendenza di un insieme di vettori funzioni della variabile s e risultano quindi poco adatte a una implementazione su computer finalizzata alla completa automatizzazione dell'analisi di testabilità.

Per illustrare come tale inconveniente possa essere aggirato, si comincia anzitutto con il confrontare (5.2) e (5.3), ottenendo

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}^{*}) = row \left[col \left[col \left[\partial h_{j}^{(i)}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}) / \partial p_{k} \Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^{*}} \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{x}} \right]_{k=1}^{n_{p}}$$
(5.6)

ricordando il significato degli elementi $\left\{ \left\{ h_{j}^{(i)}(s, \boldsymbol{p}) \right\}_{j=1}^{n_{y}} \right\}_{i=1}^{n_{x}}$ si possono poi dotare questi ultimi della seguente forma esplicita

$$\left\langle \left\langle h_{j}^{(i)}(s,\boldsymbol{p}) = \sum_{l=0}^{N} a_{j,l}^{(i)}(\boldsymbol{p}) s^{l} \left/ \Delta(s,\boldsymbol{p}) \right\rangle_{j=1}^{n_{y}} \right\rangle_{i=1}^{n_{x}}$$
(5.7)

ove

$$\Delta(s, \boldsymbol{p}) = 1 + \sum_{l=1}^{N} b_l s^l$$
(5.8)

è il polinomio caratteristico di \mathcal{N} . Dalla (5.7) segue allora

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial h_{j}^{(i)}(s,\boldsymbol{p})}{\partial p_{k}} \right|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^{*}} = \psi_{jk}^{(i)}(s,\boldsymbol{p}^{*})}{\Delta^{2}(s,\boldsymbol{p}^{*})} \right\rangle_{j=1}^{n_{y}} \right\rangle_{i=1}^{n_{x}}$$

$$= \sum_{l=0}^{2N} c_{jk,l}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) s^{l} / \Delta^{2}(s,\boldsymbol{p}^{*}) \rangle_{j=1}^{n_{y}} \rangle_{i=1}^{n_{y}}$$
(5.9)

ove

$$\left\{\!\left\{\!\left\{\!\psi_{jk}^{(i)}\!\left(s,\boldsymbol{p}^{*}\right)\!=\!\sum_{l=0}^{2N}\!c_{jk,l}^{(i)}\!\left(\boldsymbol{p}^{*}\right)\!s^{l}\right\}_{j=1}^{n_{y}}\!\right\}_{i=1}^{n_{x}}\!\right\}_{k=1}^{n_{p}}$$
(5.10)

sono opportuni polinomi. Inserendo la (5.9) nella (5.6) si ha quindi

$$\boldsymbol{\Phi}\!\left(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}^{*}\right) = \frac{1}{\Delta^{2}\!\left(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}^{*}\right)} \boldsymbol{\Psi}\!\left(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}^{*}\right)$$
(5.11)

ove

$$\Psi(s,\boldsymbol{p}^*) = row \left[\boldsymbol{\psi}_k(s,\boldsymbol{p}^*) \right]_{k=1}^{n_p} = row \left[col \left[col \left[\boldsymbol{\psi}_{jk}^{(i)}(s,\boldsymbol{p}^*) \right]_{j=1}^{n_y} \right]_{i=1}^{n_x} \right]_{k=1}^{n_p}$$
(5.12)

Con

$$\left\langle \boldsymbol{\psi}_{k}\left(s,\boldsymbol{p}^{*}\right) = col\left[col\left[\boldsymbol{\psi}_{jk}^{\left(i\right)}\left(s,\boldsymbol{p}^{*}\right)\right]_{j=1}^{n_{y}}\right]_{i=1}^{n_{x}}\right\rangle_{k=1}^{n_{p}}$$
(5.13)

Dalla (5.11) si evince che la matrice $\Psi(s, p^*)$ definita dalla (5.12) è equivalente a $\Phi(s, p^*)$ ai fini dell'analisi di testabilità sia a livello di circuito che di componente: difatti il fattore $\Delta^2(s, p^*)$ può influenzare le relazioni di lineare dipendenza fra le colonne (quali funzioni di *s*) solo per i valori di *s* appartenenti all'insieme di misura nulla $\{s/\Delta(s, p^*)=0\}$. Dalla (5.10) si vede poi che – per *i*=1,2,...,*n_x*; *j*=1,2,...,*n_y*; *k*=1,2,...,*n_p* - $\psi_{jk}^{(i)}(s, p^*)$ è un elemento di Π_{2N} , ossia lo spazio vettoriale dei polinomi di grado non superiore a 2*N* : in forza della (5.13) si conclude quindi che – per *k*=1,2,...,*n_p* - $\psi_k(s, p^*)$ è un elemento di Π_{2N}^n , ossia il prodotto cartesiano di Π_{2N} per se stesso *n* volte, avendo posto

$$n = n_x n_y (5.14)$$

E' subito visto, poi, che Π_{2N}^n è, a sua volta, uno spazio vettoriale n(2N+1)-dimensionale e che una sua base $\mathcal{B}^{(n)}$ può essere ottenuta a partire da una base $\mathcal{B} = \left\{\pi_l(s)\right\}_{l=0}^{2N}$ di Π_{2N} costruendo il seguente insieme di n(2N+1) vettori con *n* componenti

 $\mathcal{B}^{(n)}$

$$= \left\{ \left[\pi_{l}(s) \ 0 \cdots 0 \right]^{l} \right\}_{l=0}^{2N} \cup \left\{ \left[0 \ \pi_{l}(s) \cdots 0 \right]^{l} \right\}_{l=0}^{2N} \cup \cdots \cup \left\{ \left[0 \ 0 \cdots \pi_{l}(s) \right]^{l} \right\}_{l=0}^{2N} \right\}_{l=0}^{2N}$$
(5.15)

Indicato, inoltre, per $i=1,2,...,n_x$; $j=1,2,...,n_y$; $k=1,2,...,n_p$, con ${}^{B}c_{jk}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) = col \left[{}^{B}c_{jk,l}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{l=0}^{2N}$ il vettore delle coordinate di $\psi_{jk}^{(i)}(s, \boldsymbol{p}^{*})$ rispetto a \mathcal{B} , si vede, ricordando la (5.13), che – per $k=1,2,...,n_p$ - il vettore delle coordinate di $\psi_k(s, \boldsymbol{p}^{*})$ rispetto a $\mathcal{B}^{(n)}$ è dato da

$${}^{\mathscr{B}^{(n)}}\boldsymbol{c}_{k}(\boldsymbol{p}^{*}) = col\left[col\left[{}^{\mathscr{B}}\boldsymbol{c}_{jk}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*})\right]_{j=1}^{n_{y}}\right]_{i=1}^{n_{x}}$$
(5.16)

E' inoltre noto che studiare la lineare dipendenza di un insieme di elementi di uno spazio vettoriale equivale a studiare la lineare dipendenza dell'insieme dei vettori delle rispettive coordinate rispetto a una qualunque base di detto spazio vettoriale. Mettendo assieme tale considerazione con i risultati ottenuti più sopra, si giunge alla conclusione che la matrice *numerica*

$${}^{\mathscr{B}^{(n)}}C(\boldsymbol{p}^{*}) = row \left[{}^{\mathscr{B}^{(n)}}\boldsymbol{c}_{k}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{k=1}^{n_{p}} = row \left[col \left[col \left[{}^{\mathscr{B}}\boldsymbol{c}_{jk}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{x}} \right]_{k=1}^{n_{p}}$$
(5.17)

è equivalente a $\Psi(s, p^*)$, e dunque a $\Phi(s, p^*)$, ai fini dell'analisi di testabilità, sia a livello di circuito che di componente.

5.2.3 Revisione del problema della automatizzazione dell'analisi di testabilità

Come è facile intuire, la scelta di \mathcal{B} condiziona fortemente la natura di $\mathcal{B}^{(n)}C(p^*)$ e, dunque, quella dell'algoritmo atto a generare quest'ultima in modo automatico: si tratta quindi di individuare una \mathcal{B} per la quale il corrispondente algoritmo risulti il più possibile robusto, rapido e di facile implementazione.

In [1] \mathcal{B} è fatto coincidere con un insieme di polinomi di Newton \mathcal{B}_{Newt} , scelta consona all'approccio ivi descritto, basato su tecniche esclusivamente numeriche. Il calcolo della corrispondente ${}^{\mathcal{B}_{Newt}}C(\boldsymbol{p}^*)$, tuttavia, comporta la conoscenza dei vettori dell'insieme $\{\boldsymbol{\psi}_k(s, \boldsymbol{p}^*)\}_{k=1}^{n_p} = \left\{col\left[col\left[\boldsymbol{\psi}_{jk}^{(i)}(s, \boldsymbol{p}^*)\right]_{j=1}^{n_y}\right]_{i=1}^{n_y}\right\}_{k=1}^{n_p}$ in corrispondenza dei valori di s

appartenenti ad un certo insieme $S = \{s_l\}_{l=0}^{2N}$ di 2N+1 pulsazioni complesse (concettualmente distinte da quelle che possono essere impiegate per la diagnosi o l'identificazione). Ciò richiede, a sua volta, il calcolo di $n_x n_p (2N+1)$ decomposizioni LU (di ordine doppio di quello relativo alla risoluzione dei circuiti $\{\mathcal{N}^{(i)}\}_{i=1}^{n_x}$) e una scelta oculata di S, la quale costituisce, di per sé, un problema molto delicato, perché essa influenza fortemente l'entità dell'errore numerico legata allo sviluppo scelto.

I summenzionati problemi legati all'errore di approssimazione sono in qualche modo mitigati grazie alla modifica descritta in [2], ove a \mathcal{B}_{Newt} è affiancata una base \mathcal{B}_{Ceb} costituita da polinomi di Čebyšëv: il confronto fra i rispettivi sviluppi consente infatti l'inserimento di "zeri rigorosi" in $\mathcal{B}_{Newt}^{(n)}C(p^*)$. A dispetto del conseguente aggravio dell'onere computazionale,

tuttavia, gli effetti degli errori numerici non sono del tutto eliminati e possono essere di entità tale da compromettere il rigore dell'analisi di testabilità, i risultati della quale devono quindi essere inevitabilmente considerati mere stime.

Tali inconvenienti possono essere aggirati qualora si disponga di un algoritmo in grado di generare i vettori $\{\boldsymbol{\psi}_k(s, \boldsymbol{p}^*)\}_{k=1}^{n_p}$ in forma simbolica (rispetto a *s*). In tale eventualità la scelta più conveniente per \mathcal{B} è evidentemente rappresentata dalla base canonica $\mathcal{B}_{Can} = \{s^I\}_{I=0}^{2N}$ di Π_{2N} : rispetto alla corrispondente base $\mathcal{B}_{Can}^{(n)}$ di Π_{2N}^n , infatti, è subito visto che la matrice $\mathcal{B}^{(n)}_{C}(\boldsymbol{p}^*)$ assume la determinazione $\mathcal{B}_{Can}^{(n)} C(\boldsymbol{p}^*)$ data da

$$\mathcal{B}_{can}^{(n)} C(\boldsymbol{p}^{*}) = row \left[\mathcal{B}_{can}^{(n)} \boldsymbol{c}_{k}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{k=1}^{n_{p}}$$

$$= row \left[col \left[col \left[\mathcal{B}_{can} \boldsymbol{c}_{jk}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{x}} \right]_{k=1}^{n_{p}}$$
(5.18)

ove

$$\left\langle \left\langle \left\langle \left\langle {}^{\mathcal{B}_{can}} \boldsymbol{c}_{jk}^{(i)} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) = col \left[c_{jk,l}^{(i)} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) \right]_{l=0}^{2N} \right\rangle_{j=1}^{n_{y}} \right\rangle_{i=1}^{n_{x}} \right\rangle_{k=1}^{n_{p}}$$
(5.19)

e - per $j = 1, \dots, n_y; i = 1, \dots, n_x; k = 1, \dots, n_p$ - gli elementi $\{c_{jk,l}^{(i)}(\boldsymbol{p}^*)\}_{l=0}^{2N}$ coincidono con i coefficienti che appaiono nella (5.10) . Nel seguito si scriverà

$$\left\langle \left\langle \left\langle \boldsymbol{c}_{jk}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) = col\left[c_{jk,l}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*})\right]_{l=0}^{2N}\right\rangle_{j=1}^{n_{y}} \right\rangle_{i=1}^{n_{x}} \right\rangle_{k=1}^{n_{p}}$$
(5.20)

in luogo della (5.19) e

$$C(\boldsymbol{p}^*) = row \left[\boldsymbol{c}_k(\boldsymbol{p}^*)\right]_{k=1}^{n_p} = row \left[col \left[col \left[\boldsymbol{c}_{jk}^{(i)}(\boldsymbol{p}^*)\right]_{j=1}^{n_y}\right]_{i=1}^{n_x}\right]_{k=1}^{n_p}$$
(5.21)

in luogo della (5.18).

Una tale strategia è adottata, per l'appunto, in [3], ove tecniche già impiegate con successo per l'analisi simbolica dei circuiti sono combinate con ben noti artifici che consentono di ottenere le sensitività senza la necessità del calcolo esplicito di derivate parziali. Sfortunatamente, a dispetto del carattere rigoroso della strategia in questione, la sua implementazione si rivela – tanto sul piano computazionale che su quello dei tempi di elaborazione – onerosa in misura rapidamente crescente con il numero dei parametri e delle dimensioni del circuito allo studio, richiedendo la soluzione (simbolica rispetto a *s*) di altrettanti sistemi lineari di dimensioni doppie rispetto a quello relativo alla soluzione del circuito originario. Questi inconvenienti sono notevolmente mitigati con l'approccio successivamente presentato in [4], basato su un elegante ed espressivo risultato teorico ivi enunciato ed euristicamente giustificato limitatamente al caso SISO: questo può essere generalizzato e rigorosamente dimostrato nel più generale caso MIMO come descritto nel Paragrafo 3.5.2 e viene di seguito richiamato per comodità.

Con riferimento alle (5.7) e (5.8), si introducono, anzitutto, i vettori

$$\left\langle \left\langle \boldsymbol{a}_{j}^{(i)}(\boldsymbol{p}) = col\left[a_{j,l}^{(i)}(\boldsymbol{p})\right]_{l=0}^{N} \right\rangle_{j=1}^{n_{x}} \right\rangle_{i=1}^{n_{x}}, \tilde{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{p}) = col\left[b_{l}(\boldsymbol{p})\right]_{l=1}^{N}$$
(5.22)

si ha, allora, che la matrice

$$B(\boldsymbol{p}^{*}) = row \left[\frac{\partial}{\partial p_{k}} \left[col \left[col \left[a_{j}^{(i)}(\boldsymbol{p}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{x}} \right]_{p=p^{*}} \right]_{k=1}^{n_{p}}$$
(5.23)

risulta (sotto opportune condizioni) equivalente a $\Psi(s, p^*)$ ai fini dell'analisi di testabilità, sia a livello di circuito che di componente. La riduzione dell'onere di calcolo che l'algoritmo basato su tale risultato consente di ottenere rispetto a quello descritto in [3] risulta subito evidente non appena si consideri che - grazie al software SapWin [5] - i vettori (5.22) possono essere generati in forma simbolica rispetto a p per mezzo della risoluzione del *solo* sistema lineare legato al circuito originario, onde la matrice (5.23) può essere ottenuta per mezzo di sole procedure algebriche, contro la risoluzione di n_p sistemi lineari di ordine doppio necessaria con l'approccio in [3].

D'altra parte, affinché il risultato sopra descritto risulti corretto, è necessario che il polinomio caratteristico $\Delta(s, p)$ nella (5.7) sia posto nella forma (5.8), il che implica che gli elementi dei vettori definiti dalle (5.22) siano, in generale, *funzioni razionali fratte* di p. Questo ultimo fatto complica notevolmente il calcolo della (5.23) rispetto al caso in cui detti elementi siano *polinomi* in p, quali SapWin – basato sull'Analisi Nodale Modificata – per sua stessa natura li fornirebbe: in tale ultimo caso, infatti, gli elementi in

questione risulterebbero funzioni lineari rispetto a ciascuna componente di p e si avrebbe semplicemente

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p_{k}} \begin{bmatrix} col \left[col \left[a_{j}^{(i)}(\boldsymbol{p}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{x}} \\ col \left[b_{l}(\boldsymbol{p}) \right]_{l=0}^{N} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^{*}} \\ = \begin{bmatrix} col \left[col \left[a_{j}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}+\boldsymbol{u}_{k}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{x}} \\ col \left[b_{l}(\boldsymbol{p}^{*}+\boldsymbol{u}_{k}) \right]_{l=0}^{N} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} col \left[col \left[a_{j}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{x}} \\ col \left[b_{l}(\boldsymbol{p}^{*}+\boldsymbol{u}_{k}) \right]_{l=0}^{N} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} col \left[col \left[a_{j}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{x}} \\ col \left[b_{l}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{l=0}^{N} \end{bmatrix} \\ \end{pmatrix} \right|_{k=1} \\ \end{cases}$$
(5.24)

ove – per $k=1,\dots,n_p$ - u_k denota il vettore che ha nulle tutte le componenti, eccetto la k-esima, che è pari ad 1. In [6] viene, per l'appunto, proposto un approccio che segue una siffatta linea di pensiero: tale approccio, tuttavia, da un lato richiede la distinzione di numerosi casi e sottocasi e risulta quindi a sua volta piuttosto complicato sul piano concettuale e oneroso sul piano computazionale; dall'altro, esso consente la sola analisi a livello di circuito (ossia, fornisce il solo valore di T), mentre non è in grado di eseguire quella a livello di componente. Fatto almeno altrettanto importante, sia l'algoritmo in [4] che quello in [6] producono risultati scorretti in presenza di situazioni particolari, quali l'esistenza di zeri dipendenti da p a comune fra i numeratori delle funzioni di rete e il polinomio caratteristico.

I principali inconvenienti legati ai summenzionati metodi simbolici sono superati con l'approccio, ancora basato su tecniche simboliche, presentato in [7] e nuovamente derivato nel Capitolo 3. Secondo tale approccio una espressione della matrice di testabilità, che risulta corretta indipendentemente da qualsivoglia peculiarità delle funzioni di rete e delle rispettive rappresentazioni, è data da

$$C(\boldsymbol{p}^*) = \mathcal{F}(\boldsymbol{p}^*) \mathcal{M}_D(\boldsymbol{p}^*)$$
(5.25)

con

$$\left| \mathcal{F}(\boldsymbol{p}^{*}) = \left[diag \left[\mathcal{B}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]^{n} - col \left[col \left[\mathcal{A}_{j}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{x}} \right] \\ \mathcal{M}_{D}(\boldsymbol{p}^{*}) = row \left[\frac{\partial}{\partial p_{j}} \left[col \left[col \left[a_{j}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{y}} \right]_{j=1}^{n_{y}} \right] \\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}^{*}) \right] \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]$$
(5.26)

ove accanto alle (5.22) si sono introdotti il vettore

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}^*) = col \left[b_l(\boldsymbol{p}^*) \right]_{l=0}^{N}$$
(5.27)

e le matrici

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{p}^{*}) = pad[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}^{*})],$$

$$\left\langle \left\langle \mathcal{A}_{j}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) = pad[\boldsymbol{a}_{j}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*})] \right\rangle_{j=1}^{n_{y}} \right\rangle_{i=1}^{n_{x}}$$
(5.28)

Con tale algoritmo, in effetti, si evita il calcolo esplicito dei polinomi $\left\{ \left\{ \left\{ \psi_{jk}^{(i)}(s, \boldsymbol{p}^{*}) \right\}_{j=1}^{n_{y}} \right\}_{i=1}^{n_{y}} \right\}_{k=1}^{n_{y}}, \text{ necessario con l'approccio in [3]. Al tempo stesso si }$

aggira la necessità che il polinomio caratteristico sia posto nella forma particolare (5.8), presente nell'approccio in [4], il che consente agli elementi dei vettori in (5.22) e (5.27) di essere *polinomi* (invece che *funzioni razionali fratte*) in p e quindi di eseguire con la massima agilità il calcolo delle rispettive derivate parziali attraverso la (5.24). Infine, si evitano altresì le complicazioni computazionali e concettuali proprie dell'approccio in [6], assieme alla seria limitazione rappresentata dalla impossibilità di eseguire l'analisi di testabilità a livello di componente. In aggiunta ai notevoli vantaggi testè descritti, un'altra caratteristica notevole dell'approccio in [7] è senz'altro rappresentata dalla sua attitudine – strettamente legata alla natura simbolica delle tecniche sulle quali esso si basa - a consentire la derivazione di risultati teorici di carattere generale come pure uno studio intuitivo delle modalità con le quali la natura dei componenti influisce sulla testabilità del circuito allo studio.

Ciononostante, a dispetto dei numerosi benefici che esse offrono, un serio inconveniente delle tecniche simboliche applicate all'analisi automatica dei circuiti – riflesso diretto della natura combinatoria degli algoritmi sulle quali esse si basano – è che questi ultimi richiedono tempi di elaborazione che divengono ben presto inaccettabili al crescere delle dimensioni del circuito allo studio. Queste motivazioni hanno portato alla ricerca di nuovi algoritmi che evitino il ricorso a tecniche simboliche, sì da aggirarne gli svantaggi cui si è testè accennato, e, al contempo, siano immuni dagli inconvenienti, discussi più sopra, da cui i precedenti approcci numerici risultavano affetti, in modo da configurarsi quali strumenti adatti a una efficiente e rapida esecuzione dell'analisi di testabilità per circuiti di grandi dimensioni. I risultati di tale ricerca sono descritti nei paragrafi successivi.

5.3. Nuovi algoritmi numerici

5.3.1 Momenti della risposta impulsiva

Sia

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{M} a_i^F s^i}{\sum_{i=0}^{M} b_i s^i}, b_0 \triangleq 1$$
(5.29)

una generica funzione di rete. Le quantità definite da

$$\mu_k^F = \frac{1}{k!} \frac{d^k F(s)}{ds^k} \bigg|_{s=0}, k \in \mathbb{N}$$
(5.30)

sono denominate *momenti della risposta impulsiva* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, ove $\mathcal{L}^{-1}[\cdot]$ indica l'operatore "antitrasformata di Laplace". La ragione di tale denominazione può individuarsi nel fatto che, come può facilmente ottenersi confrontando l'equazione $F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \operatorname{con} \operatorname{la}(5.30)$, risulta altresì

$$\mu_k^F = \left[\left(-1 \right)^k / k! \right] \int_0^\infty t^k f(t) dt, \ k \in \mathbb{N}$$
(5.31)

Introdotti i vettori

$$\boldsymbol{\mu}^{F} = col \left[\boldsymbol{\mu}_{i}^{F} \right]_{i=0}^{M}, \boldsymbol{a}^{F} = col \left[a_{i}^{F} \right]_{i=0}^{M}, \boldsymbol{b} = col \left[b_{i} \right]_{i=0}^{M}$$
(5.32)

e la matrice

$$\mathcal{B}=tri[\boldsymbol{b}] \tag{5.33}$$

si trova anche

$$\boldsymbol{a}^{F} = \mathcal{B}\boldsymbol{\mu}^{F} \tag{5.34}$$

5.3.2 Derivazione di un primo algoritmo ricorsivo per il calcolo della matrice di testabilità

Nel dominio di Laplace, si consideri ora la particolare determinazione $\mathcal{N}^{(i)}$ di \mathcal{N} - già introdotta nel paragrafo 5.3.1 e rappresentata simbolicamente in Fig. 5.2 - ottenuta eccitando l'*i*-esimo ingresso con un segnale unitario, mentre i restanti ingressi sono annullati in accordo alla natura delle rispettive variabili elettriche.

Detto w l'intero vettore delle variabile elettriche di \mathcal{N} , in corrispondenza del generico p siano quindi

$$\mathcal{T}(s, \boldsymbol{p})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_i \tag{5.35}$$

le equazioni di equilibrio in forma tabulare per $\mathcal{N}^{(i)}$, scritte in modo che nella matrice al primo membro della (5.35) la variabile *s* compaia elevata o a potenza *l* o a potenza *0*: dalla definizione stessa di $\mathcal{N}^{(i)}$ segue quindi che nella (5.35) e_i è il vettore che ha nulle tutte le componenti, eccetto quella corrispondente alla equazione costitutiva del generatore di eccitazione, che è pari a *l*.

Si indichi ora con

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^{(i)}(s, \boldsymbol{p}) = col \left[w_r^{(i)}(s, \boldsymbol{p}) \right]_{r=1}^{n_w}$$
(5.36)

la (unica) soluzione della (5.35): da quest'ultima equazione segue allora necessariamente

$$\mathcal{T}(s, \boldsymbol{p})\boldsymbol{w}^{(i)}(s, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{e}_i$$
(5.37)

Si introducano inoltre le entità

$$\mathcal{T}_{k} \triangleq \frac{\partial^{k} \mathcal{T}(s, \boldsymbol{p})}{\partial s^{k}} \bigg|_{s=0}, \boldsymbol{w}_{k}^{(i)} \triangleq \frac{\partial^{k} \boldsymbol{w}^{(i)}(s, \boldsymbol{p})}{\partial s^{k}} \bigg|_{s=0}$$
(5.38)

allora, in virtù delle precedenti considerazioni, è

$$\mathcal{T}_k = O_{n_w, n_w}, k \ge 2 \tag{5.39}$$

ove, in accordo con le notazioni introdotte nel Capitolo 1, O_{n_w,n_w} indica la matrice nulla $n_w \times n_w$.

Prendendo la derivata parziale *k*-esima in s=0 della (5.37) e ricordando le (5.38) e (5.39), si trova quindi

$$\mathcal{T}_{0}\boldsymbol{w}_{k}^{(i)} + k\mathcal{T}_{1}\boldsymbol{w}_{k-1}^{(i)} = \boldsymbol{0}, k \ge 1$$
(5.40)

Dividendo la (5.40) per k! si ottiene poi

$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} = -\mathcal{T}_{0}^{-1} \mathcal{T}_{1} \boldsymbol{\mu}_{k-1}^{\boldsymbol{w}^{(i)}}, \ k \ge 1$$
(5.41)

ove, ricordando la (5.30), si è posto

$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} \triangleq \frac{\boldsymbol{w}_{k}^{(i)}}{k!} = col \left[\boldsymbol{\mu}_{k}^{\boldsymbol{w}_{r}^{(i)}} \right]_{r=1}^{n_{w}} = col \left[\frac{1}{k!} \frac{\partial^{k} \boldsymbol{w}_{r}^{(i)}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{s}^{k}} \right]_{\boldsymbol{s}=0} \right]_{r=1}^{n_{w}}, k \ge 0$$
(5.42)

Dalla (5.41) segue quindi

$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} = \left(-\mathcal{T}_{0}^{-1}\mathcal{T}_{1}\right)^{k} \boldsymbol{\mu}_{0}^{\boldsymbol{w}^{(i)}}, \ k \ge 0$$
(5.43)

D'altra parte, dal confronto fra (5.42), (5.37) e (5.38) segue

$$\boldsymbol{\mu}_{0}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} = \boldsymbol{\mathcal{T}}_{0}^{-1} \boldsymbol{e}_{i} \tag{5.44}$$

onde la (5.43) può scriversi

$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} = \left(-\mathcal{T}_{0}^{-1}\mathcal{T}_{1}\right)^{k} \mathcal{T}_{0}^{-1} \boldsymbol{e}_{i}, \ k \ge 0$$
(5.45)

Prendendo ora la derivata parziale della (5.37) rispetto al generico elemento p_r di p segue anche

$$\frac{\partial \mathcal{T}(s, \boldsymbol{p})}{\partial p_r} \boldsymbol{w}^{(i)}(s, \boldsymbol{p}) + \mathcal{T}(s, \boldsymbol{p}) \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}(s, \boldsymbol{p})}{\partial p_r} = 0$$
(5.46)

Prendendo poi la derivata parziale k-esima rispetto a s per s=0 della (5.46), ricordando la (5.39) e dividendo per k! si ottiene

$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}/\partial p_{r}} = -\mathcal{T}_{0}^{-1} \left(\mathcal{T}_{1} \boldsymbol{\mu}_{k-1}^{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}/\partial p_{r}} + \frac{\partial \mathcal{T}_{0}}{\partial p_{r}} \boldsymbol{\mu}_{k}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} + \frac{\partial \mathcal{T}_{1}}{\partial p_{r}} \boldsymbol{\mu}_{k-1}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} \right), k \ge 1$$
(5.47)

ove si è posto

$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}/\partial p_{r}} = col \left[\boldsymbol{\mu}_{k}^{\partial \boldsymbol{w}_{j}^{(i)}/\partial p_{r}} \right]_{j=1}^{n_{w}} = col \left[\frac{1}{k!} \frac{\partial^{k}}{\partial s^{k}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}_{j}^{(i)}}{\partial p_{r}} \right) \right]_{s=0} \right]_{j=1}^{n_{w}}, k \ge 0$$
(5.48)

In particolare ponendo s=0 nella (5.46) e ricordando la (5.38), la (5.42) e la (5.44) si ha

$$\boldsymbol{\mu}_{0}^{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}/\partial p_{r}} = \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}(0, \boldsymbol{p})}{\partial p_{r}} = -\mathcal{T}_{0}^{-1} \frac{\partial \mathcal{T}_{0}}{\partial p_{r}} \mathcal{T}_{0}^{-1} \boldsymbol{e}_{i}$$
(5.49)

La (5.47) consente – a partire dalla (5.49) e (5.45) – di calcolare la sequenza

$$\left\{\boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}}{\partial p_{l}}}\right\}_{k=0}^{2M} = \left\{col\left[\boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}_{r}^{(i)}}{\partial p_{l}}}\right]_{r=1}^{n_{w}}\right\}_{k=0}^{2M}$$
(5.50)

in modo ricorsivo.

D'altra parte, ricordando il significato degli elementi dell'insieme $\left\{h_{j}^{(i)}(s, \boldsymbol{p})\right\}_{j=1}^{n_{y}}$ e di $\boldsymbol{w}^{(i)}(s, \boldsymbol{p})$, si può assumere senza ledere la generalità che

quelli coincidano con le prime n_y componenti di quest'ultimo. Tenendo ancora a mente la (5.30), a partire dalla conoscenza della sequenza (5.50) per $i=1,\dots,n_x; k=1,\dots,n_p$, si possono allora facilmente costruire i vettori

$$\left\{ \left\{ \boldsymbol{m}_{jl}^{(i)}(\boldsymbol{p}) = col \left[\boldsymbol{\mu}_{k}^{\partial h_{j}^{(i)}/\partial p_{l}} \right]_{k=0}^{2N} = col \left[\boldsymbol{\mu}_{k}^{\partial w_{j}^{(i)}/\partial p_{l}} \right]_{k=0}^{2N} \right\}_{j=1}^{n_{y}} \right\}_{l=1}^{n_{p}}$$
(5.51)

Inoltre, ricordando le (5.9) e (5.8), si può scrivere

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial h_{j}^{(i)}(s,\boldsymbol{p})}{\partial p_{k}} \right|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^{*}} = \psi_{jk}^{(i)}(s,\boldsymbol{p}^{*})}{\Delta^{2}(s,\boldsymbol{p}^{*})} \right\rangle_{j=1}^{n_{y}} \right\rangle_{i=1}^{n_{x}}$$

$$= \sum_{l=0}^{2N} c_{jk,l}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) s^{l} / \sum_{l=0}^{2N} \tilde{b}_{l}(\boldsymbol{p}^{*}) s^{l} \rangle_{j=1}^{n_{y}} \right\rangle_{i=1}^{n_{y}}$$
(5.52)

ove gli elementi dell'insieme $\{\tilde{b}_l(\boldsymbol{p}^*)\}_{l=0}^{2N}$ sono legati a quelli dell'insieme $\{b_l(\boldsymbol{p}^*)\}_{l=0}^{N}$ dalle relazioni

$$\left\langle \tilde{b}_{l}(\boldsymbol{p}^{*}) = \sum_{\substack{j+k=l\\j,k\in\{0,1,\dots,N\}}} b_{k}(\boldsymbol{p}^{*}) b(\boldsymbol{p}^{*})_{j} \right\rangle_{l=0}^{2N}$$
(5.53)

Introdotte, per analogia con le (5.32) e (5.33), le entità

$$\tilde{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{p}^*) = col\left[\tilde{b}_l(\boldsymbol{p}^*)\right]_{l=0}^M, \mathcal{B} = tri\left[\tilde{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{p}^*)\right]$$
(5.54)

e ricordando dalla (5.20) che

$$\left\langle \left\langle \left\langle \boldsymbol{c}_{jk}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) = col\left[c_{jk,l}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*})\right]_{l=0}^{2N}\right\rangle_{j=1}^{n_{y}}\right\rangle_{i=1}^{n_{x}}\right\rangle_{k=1}^{n_{p}}$$
(5.55)

dal confronto fra (5.52)-(5.55) e (5.29)-(5.33) per analogia con la (5.34) si ha

$$\left\langle \left\langle \left\langle \boldsymbol{c}_{jk}^{(i)} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) = \tilde{\mathcal{B}} \boldsymbol{m}_{jr}^{(i)} \left(\boldsymbol{p}^{*} \right) \right\rangle_{j=1}^{n_{y}} \right\rangle_{i=1}^{n_{x}} \right\rangle_{k=1}^{n_{p}}$$
(5.56)

Inserendo la (5.56) nella (5.21) si trova allora

$$C(\boldsymbol{p}^{*}) = row \left[col \left[col \left[\boldsymbol{c}_{jr}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{y}} \right]_{r=1}^{n_{p}}$$

$$= row \left[col \left[col \left[\tilde{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p}^{*}) \bullet \boldsymbol{m}_{jr}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{y}} \right]_{r=1}^{n_{y}} = diag \left[\tilde{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{r=1}^{n_{x}n_{y}} \mathcal{M}(\boldsymbol{p}^{*})$$
(5.57)

ove si è ricordata la notazione definita nel Capitolo 1 e si è posto

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{p}^*) = row \left[col \left[col \left[\boldsymbol{m}_{jr}^{(i)}(\boldsymbol{p}^*) \right]_{j=1}^{n_y} \right]_{i=1}^{n_x} \right]_{r=1}^{n_p} = row \left[\boldsymbol{m}_r(\boldsymbol{p}^*) \right]_{r=1}^{n_p}$$
(5.58)

Ricordando che in base alle (5.53) e (5.29) è $\tilde{b}_0(\boldsymbol{p}^*)=1$, si ha che nella (5.57) $diag[\tilde{\mathscr{B}}(\boldsymbol{p}^*)]^{n_x n_y}$ è una matrice a rango pieno. Di conseguenza - per ogni $l=1,2,...,n_p$ e per ogni iniezione $k_i:\{1,2,...,l\} \rightarrow \{1,2,...,n_p\} - \{\boldsymbol{c}_{k_i}(\boldsymbol{p}^*)\}_{i=1}^l$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti se e solo se lo stesso vale per $\{\boldsymbol{m}_{k_i}(\boldsymbol{p}^*)\}_{i=1}^l$: questo fatto implica che la matrice definita in (5.58) è equivalente a $C(\boldsymbol{p}^*)$ ai fini dell'analisi di testabilità, sia a livello di circuito che di componente.

5.3.3 Implementazione software: il programma LINFTA

L'algoritmo derivato nel paragrafo precedente può essere riassunto in passi al modo seguente.

Per $r = 1, 2, ..., n_p$:

Per $i = 1, 2, ..., n_x$:

PASSO 1: Nel circuito allo studio \mathcal{N} , inserire in corrispondenza dell'*i*-esimo punto di eccitazione un generatore di natura coerente con la relativa variabile elettrica x_i e di valore unitario, fissando al contempo a zero le altre variabili di eccitazione, così da ottenere il circuito $\mathcal{N}^{(i)}$

PASSO 2: Scrivere le equazioni in forma tabulare per $\mathcal{N}^{(i)}$:

$$\mathcal{T}(s, \boldsymbol{p})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_i \tag{5.59}$$

in modo tale che le componenti del vettore $\boldsymbol{h} = col[h_j]_{j=1}^{n_y}$ delle variabili associate ai punti di misura coincida con le prime n_y componenti dell'intero vettore \boldsymbol{w} delle variabili elettriche relative a \mathcal{N} .

PASSO 3: Generare un valore p^* di p in modo casuale. PASSO 4: Calcolare

$$\mathcal{T}_{0} \triangleq \mathcal{T}(0, \boldsymbol{p}^{*}), \mathcal{T}_{1} = d\mathcal{T}(s, \boldsymbol{p}^{*}) / ds \Big|_{s=0}$$
(5.60)

PASSO 5: Calcolare

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{0}}{\partial p_{r}} = \frac{\partial \mathcal{T}(s, \boldsymbol{p})}{\partial p_{r}} \bigg|_{s=0, \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^{*}}, \frac{\partial \mathcal{T}_{1}}{\partial p_{r}} = \frac{\partial^{2} \mathcal{T}(s, \boldsymbol{p})}{\partial p_{r} \partial s} \bigg|_{s=0, \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^{*}}$$
(5.61)

PASSO 6: Calcolare

$$\left\langle \boldsymbol{\mu}_{k}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} = \left(-\mathcal{T}_{0}^{-1}\mathcal{T}_{1} \right)^{k} \mathcal{T}_{0}^{-1} \boldsymbol{e}_{i} \right\rangle_{k=0}^{2N}$$
 (5.62)

PASSO 7: Calcolare

$$\boldsymbol{\mu}_{0}^{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}/\partial p_{r}} = -\mathcal{T}_{0}^{-1} \big(\partial \mathcal{T}_{0}/\partial p_{r} \big) \mathcal{T}_{0}^{-1} \boldsymbol{e}_{i}$$
(5.63)

PASSO 8: Calcolare ricorsivamente

$$\left\langle \boldsymbol{\mu}_{k}^{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}/\partial p_{r}} = -\mathcal{T}_{0}^{-1} \left(\mathcal{T}_{1} \boldsymbol{\mu}_{k-1}^{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}/\partial p_{r}} + \frac{\partial \mathcal{T}_{0}}{\partial p_{r}} \boldsymbol{\mu}_{k}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} + \frac{\partial \mathcal{T}_{1}}{\partial p_{r}} \boldsymbol{\mu}_{k-1}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} \right) \right\rangle_{k=1}^{2N}$$
(5.64)

PASSO 9: Per $j=1,2,...,n_y$ estrarre il vettore

$$\boldsymbol{m}_{jr}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) = col \left[\boldsymbol{\mu}_{k}^{\partial h_{j}^{(i)}/\partial p_{r}} \right]_{k=0}^{2N}$$
(5.65)

considerando, per k=0,1,...,2N, la *j*-esima componente di $\partial^{(i)}/\partial p_r$

d1
$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{ower/op}$$

Infine costruire la matrice

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{p}^{*}) = row \left[col \left[col \left[\boldsymbol{m}_{jr}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) \right]_{j=1}^{n_{y}} \right]_{i=1}^{n_{x}} \right]_{r=1}^{n_{p}}$$
(5.66)

L'algoritmo così descritto è stato tradotto in un programma per l'analisi di testabilità di circuiti analogici di grandi dimensioni denominato LINFTA (Linear Invariant Network Fast Testability Analysis). Quest'ultimo accetta in ingresso un file di testo contenente una netlist quale può essere prodotta da

Spice o altri programmi simili e a partire da quest'ultimo implementa l'algoritmo sopra descritto, restituendo i valori di T e ρ come pure i GAC e i GT.

5.3.4 Un algoritmo ricorsivo alternativo e nuova espressione della matrice di testabilità

Come si mostrerà nel paragrafo 5.3.6 l'algoritmo derivato nel paragrafo precedente - presentato in [8] assieme alla sua implementazione software consente una drastica riduzione dei tempi di elaborazione e degli effetti degli errori di arrotondamento, rispetto agli approcci precedenti, siano essi basati su tecniche numeriche o fondati su tecniche di tipo simbolico. Nondimeno, come verrà dimostrato nel suddetto paragrafo, l'algoritmo alternativo descritto nel seguito consente una ulteriore notevole riduzione dei tempi di elaborazione, oltre ad essere caratterizzato da una maggiore snellezza concettuale.

La derivazione del nuovo algoritmo segue i passi di quella descritta al paragrafo precedente fino alla (5.41), che può riscriversi come

$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} = \mathcal{F} \boldsymbol{\mu}_{k-1}^{\boldsymbol{w}^{(i)}}, \ k \ge 1$$
(5.67)

ove si è posto

$$\mathcal{F} \stackrel{\Delta}{=} -\mathcal{T}_0^{-1} \mathcal{T}_1 \tag{5.68}$$

Si osservi ora che dalla (5.30) e (5.42) segue, per il generico elemento p_i di p

$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}}{\partial p_{l}}} \triangleq col \left[\boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}_{r}^{(i)}}{\partial p_{l}}} \right]_{r=1}^{n_{w}} = col \left[\frac{1}{k!} \frac{\partial^{k}}{\partial s^{k}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}_{r}^{(i)}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p}^{*})}{\partial p_{l}} \right) \right]_{s=0} \right]_{r=1}^{n_{w}}$$

$$= col \left[\frac{\partial}{\partial p_{l}} \left(\frac{1}{k!} \frac{\partial^{k} \boldsymbol{w}_{r}^{(i)}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p}^{*})}{\partial s^{k}} \right]_{s=0} \right]_{r=1}^{n_{w}} = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{k}^{\boldsymbol{w}^{(i)}}}{\partial p_{l}}, \ k \ge 0$$

$$(5.69)$$

Prendendo la derivata parziale della (5.67) rispetto a p_l e tenendo presente la (5.69) si ha quindi

$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}}{\partial p_{i}}} = \mathcal{F} \boldsymbol{\mu}_{k-1}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}}{\partial p_{i}}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{\ell}} \boldsymbol{\mu}_{k-1}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} \quad k \ge 1$$
(5.70)

mentre dalla (5.69) segue

$$\boldsymbol{\mu}_{0}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}}{\partial p_{l}}} = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{0}^{\boldsymbol{w}^{(i)}}}{\partial p_{l}} = \frac{\partial \mathcal{T}_{0}^{-1}}{\partial p_{l}} \boldsymbol{e}_{i}$$
(5.71)

Riunendo le (5.67), (5.70), (5.44) e (5.71) si ottiene il sistema

$$\begin{pmatrix}
\left\{ \boldsymbol{\mu}_{k}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} = \mathcal{F} \boldsymbol{\mu}_{k-1}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} \\
\boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}}{\partial p_{l}}} = \mathcal{F} \boldsymbol{\mu}_{k-1}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}}{\partial p_{l}}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{l}} \boldsymbol{\mu}_{k-1}^{\boldsymbol{w}^{(i)}}, k \ge 1 \\
\boldsymbol{\mu}_{0}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} = \mathcal{T}_{0}^{-1} \boldsymbol{e}_{i}, \boldsymbol{\mu}_{0}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}}{\partial p_{l}}} = \frac{\partial \mathcal{T}_{0}^{-1}}{\partial p_{l}} \boldsymbol{e}_{i}
\end{cases}$$
(5.72)

che consente di calcolare la sequenza

$$\left\{\boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{\nu}^{(i)}}{\partial p_{l}}}\right\}_{k=0}^{2M} = \left\{col\left[\boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{\nu}_{r}^{(i)}}{\partial p_{l}}}\right]_{r=1}^{n_{w}}\right\}_{k=0}^{2M}$$
(5.73)

in modo ricorsivo.

Assumendo poi ancora (senza ledere la generalità) che gli elementi dell'insieme $\{h_j^{(i)}(s, \boldsymbol{p})\}_{j=1}^{n_y}$ coincidano con le prime n_y componenti di $\boldsymbol{w}^{(i)}(s, \boldsymbol{p})$, dalla (5.73) si estrae la successione

$$\left\{ \boldsymbol{\mu}_{k}^{\underline{\partial \boldsymbol{h}^{(i)}}} \right\}_{k=0}^{2M} = \left\{ col \left[\boldsymbol{\mu}_{k}^{\underline{\partial \boldsymbol{w}_{r}^{(i)}}} \right]_{r=1}^{n_{w}} \right\}_{k=0}^{2M}$$
(5.74)

A partire dalla conoscenza della successione (5.74) per $i=1,\dots,n_x$; $l=1,\dots,n_p$ si può dunque costruire la matrice

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{p}^{*}) = row \left[col \left[col \left[\boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{h}^{(i)}}{\partial p_{l}}} \right]_{k=0}^{2M} \right]_{i=1}^{n_{x}} \right]_{l=1}^{n_{p}}$$
(5.75)

Dal confronto fra (5.51), (5.58), (5.74), (5.75) segue immediatamente che $\mathcal{G}(\boldsymbol{p}^*)$ definita in (5.75) coincide, a meno di permutazioni di righe, con $\mathcal{M}(\boldsymbol{p}^*)$ definita in (5.58). Poiché tali operazioni non influiscono sulle relazioni

di lineare dipendenza fra le colonne, si conclude che $\mathcal{G}(\boldsymbol{p}^*)$ definita da (5.75) è equivalente a $\mathcal{M}(\boldsymbol{p}^*)$ ai fini dell'analisi di testabilità, sia a livello di circuito che di componente.

5.3.5 Espressione in forma chiusa della nuova matrice di testabilità

E' possibile pervenire a un'espressione in forma chiusa di $\mu_k^{\frac{\sigma}{\partial p_l}}$ ricorrendo alle seguenti considerazioni.

Applicando alla (5.70) ben noti risultati della teoria dei sistemi tempodiscreti dotati di una descrizione nello spazio degli stati, si trova anzitutto

$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}}{\partial p_{l}}} = \mathcal{F}^{k} \boldsymbol{\mu}_{0}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}}{\partial p_{l}}} + \sum_{p=1}^{k} \mathcal{F}^{k-p} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{l}} \right]^{p} \boldsymbol{\mu}_{p-1}^{\boldsymbol{w}^{(i)}}, k \ge 1$$
(5.76)

D'altra parte, dalla (5.67) e (5.44) segue

$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} = \mathcal{F}^{k} \, \boldsymbol{\mu}_{0}^{\boldsymbol{w}^{(i)}} = \mathcal{F}^{k} \, \mathcal{T}_{0}^{-1} \boldsymbol{e}_{i}, k \ge 0$$
(5.77)

Inserendo la (5.71) e la (5.77) nella (5.76), quest'ultima può scriversi

$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(l)}}{\partial p_{l}}} = \mathcal{F}^{k} \frac{\partial \mathcal{T}_{0}^{-1}}{\partial p_{l}} \boldsymbol{e}_{i} + \sum_{p=1}^{k} \mathcal{F}^{k-p} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{l}} \right]^{p} \mathcal{F}^{p-1} \mathcal{T}_{0}^{-1} \boldsymbol{e}_{i}, \ k \ge 1$$
(5.78)

introducendo la matrice $\mathcal{L}_{k,l}$ definita da

$$\mathcal{L}_{k,l} = \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{T}_{0}^{-1}}{\partial p_{l}} & k = 0\\ \frac{\partial \mathcal{T}_{0}^{-1}}{\partial p_{l}} + \sum_{p=1}^{k} \mathcal{F}^{-p} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{l}} \right]^{p} \mathcal{F}^{p-1} \mathcal{T}_{0}^{-1} & k \ge 1 \end{cases}$$
(5.79)

la (5.78) può essere estesa a $k \ge 0$ e scritta in forma compatta come

$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}}{\partial p_{i}}} = \mathcal{F}^{k} \mathcal{L}_{k,l} \boldsymbol{e}_{i}, k \ge 0$$
(5.80)

Tenendo a mente che (senza ledere la generalità) si è supposto che gli elementi dell'insieme $\{h_j^{(i)}(s, \boldsymbol{p})\}_{j=1}^{n_y}$ coincidano con le prime n_y componenti di $\boldsymbol{w}^{(i)}(s, \boldsymbol{p})$, dalla (5.80) segue
$$\boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{h}^{(i)}}{\partial p_{i}}} = \left[\mathcal{I}_{n_{y}} \mathcal{O}_{n_{y},(n_{w}-n_{y})}\right] \mathcal{F}^{k} \mathcal{L}_{k,l} \boldsymbol{e}_{i}, k \ge 0$$
(5.81)

ove, in accordo con le notazioni introdotte nel Capitolo 1, \mathcal{I}_{n_y} indica la matrice identità $n_y \times n_y$ e $\mathcal{O}_{n_y,(n_w-n_y)}$ la matrice nulla $n_y \times (n_w - n_y)$.

Inserendo la (5.81) nella (5.75), la matrice di testabilità $G(p^*)$ ivi definita può dunque esprimersi in forma chiusa come

$$G(\boldsymbol{p}^{*}) = row \left[col \left[col \left[\left[\mathcal{I}_{n_{y}} \mathcal{O}_{n_{y}, (n_{w}-n_{y})} \right] \mathcal{F}^{k} \mathcal{L}_{k, j} \boldsymbol{e}_{i}, \right]_{k=0}^{2N} \right]_{i=1}^{n_{x}} \right]_{r=1}^{n_{p}}$$
(5.82)

5.3.6 Implementazione software: il programma LINFTA.2

Nonostante la (5.82) fornisca la matrice di testabilità in forma chiusa, il carattere ricorsivo dell'algoritmo (5.72) rende quest'ultimo senz'altro più adatto a una implementazione software finalizzata alla completa automatizzazione dell'analisi di testabilità. Al fine di porre detto algoritmo nella forma più opportuna per tale scopo, risultano utili le seguenti considerazioni preliminari.

Dall'identità

$$\mathcal{T}_0^{-1}\mathcal{T}_0 = \mathcal{I}_{n_w} \tag{5.83}$$

derivando ambo i membri rispetto al generico elemento p_l di p segue

$$\frac{\partial \mathcal{T}_0^{-1}}{\partial p_l} = -\mathcal{T}_0^{-1} \frac{\partial \mathcal{T}_0}{\partial p_l} \mathcal{T}_0^{-1}$$
(5.84)

In forza della (5.84) la (5.71) può riscriversi

$$\boldsymbol{\mu}_{0}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(l)}}{\partial p_{l}}} = -\mathcal{T}_{0}^{-1} \frac{\partial \mathcal{T}_{0}}{\partial p_{l}} \mathcal{T}_{0}^{-1} \boldsymbol{e}_{i} \quad (5.85)$$

Prendendo la derivata rispetto al generico elemento p_l di p della (5.68) e tenendo ancora presente la (5.84) e la (5.68) si ottiene poi

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{l}} = -\left[\frac{\partial \mathcal{T}_{0}^{-1}}{\partial p_{l}}\mathcal{T}_{1} + \mathcal{T}_{0}^{-1}\frac{\partial \mathcal{T}_{1}}{\partial p_{l}}\right] \\
= -\left[-\mathcal{T}_{0}^{-1}\frac{\partial \mathcal{T}_{0}}{\partial p_{l}}\mathcal{T}_{0}^{-1}\mathcal{T}_{1} + \mathcal{T}_{0}^{-1}\frac{\partial \mathcal{T}_{1}}{\partial p_{l}}\right] = -\mathcal{T}_{0}^{-1}\left[\frac{\partial \mathcal{T}_{0}}{\partial p_{l}}\mathcal{F} + \frac{\partial \mathcal{T}_{1}}{\partial p_{l}}\right]$$
(5.86)

Il nuovo algoritmo per la automatizzazione dell'analisi di testabilità può ora essere descritto al modo seguente.

PASSO 1: Nel circuito \mathcal{N} allo studio, considerato nel dominio di Laplace, selezionare gli n_x punti di iniezione e gli n_y punti di prelievo.

PASSO 2: Costruire la matrice $\mathcal{T}(s, p)$ relativa alle equazioni di equilibrio in forma tabulare per il circuito allo studio

 $\mathcal{T}(s, \boldsymbol{p})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e} (5.87)$

in corrispondenza di un valore indefinito del vettore degli ingressi e, in modo che le variabili elettriche pertinenti agli n_y punti di prelievo coincidano con le prime n_y componenti dell'intero vettore delle variabili elettriche w.

PASSO 3: Assegnare a p un valore p^* generato in modo aleatorio.

PASSO 4 Calcolare $\mathcal{T}_0 \triangleq \mathcal{T}(0, \boldsymbol{p}^*), \ \mathcal{T}_1 \triangleq d\mathcal{T}(s, \boldsymbol{p}^*) / ds \Big|_{s=0} = \mathcal{T}(1, \boldsymbol{p}^*) - \mathcal{T}(0, \boldsymbol{p}^*)$

PASSO 5 Determinare T_0^{-1}

PASSO 6 Determinare $\mathcal{F} \triangleq -\mathcal{T}_0^{-1} \mathcal{T}_1$

PASSO 7 Per $i=1,\dots,n_x$

Assegnare a e la determinazione e_i (vettore con tutte le componenti nulle, eccetto quella – pari ad uno - corrispondente all'equazione costitutiva del generatore inserito nell'ingresso *i*-esimo);

Calcolare
$$\boldsymbol{\mu}_{0}^{\boldsymbol{w}^{(l)}} = \mathcal{T}_{0}^{-1}\boldsymbol{e}_{i}$$
;
Per $l=1,\dots,n_{p}$
Calcolare, ricorrendo alla (5.85), $\boldsymbol{\mu}_{0}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(l)}}{\partial p_{l}}} = -\mathcal{T}_{0}^{-1}\frac{\partial \mathcal{T}_{0}}{\partial p_{l}}\mathcal{T}_{0}^{-1}\boldsymbol{e}_{i}$;
Calcolare, ricorrendo alla (5.86), $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{l}} = -\mathcal{T}_{0}^{-1}\left[\frac{\partial \mathcal{T}_{0}}{\partial p_{l}}\mathcal{F} + \frac{\partial \mathcal{T}_{1}}{\partial p_{l}}\right]$;
Per $k=1,\dots,2M$
Calcolare ricorsivamente
 $\begin{cases} \boldsymbol{\mu}_{k}^{\boldsymbol{w}^{(l)}} = \mathcal{F}\boldsymbol{\mu}_{k-1}^{\boldsymbol{w}^{(l)}} \\ \boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(l)}}{\partial p_{l}}} = \mathcal{F}\boldsymbol{\mu}_{k-1}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(l)}}{\partial p_{l}}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{l}}\boldsymbol{\mu}_{k-1}^{\boldsymbol{w}^{(l)}}; \end{cases}$

PASSO 8 Costruire la matrice di testabilità

$$G(\boldsymbol{p}^{*}) = row \left[col \left[col \left[\left[\mathcal{I}_{n_{y}} \mathcal{O}_{n_{y}, (n_{w}-n_{y})} \right] \boldsymbol{\mu}_{k}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}}{\partial p_{i}}} \right]_{k=0}^{2N} \right]_{i=1}^{n_{x}} \right]_{r=1}^{n_{p}}$$

PASSO 9: Eseguire una decomposizione ai valori singolari di $G(\mathbf{p}^*)$ in accordo alla procedura descritta in [9].

PASSO 10: Determinare (a) Testabilità $T = rank \left[\mathcal{G}(\boldsymbol{p}^*) \right]$ e Rapporto di Testabilità $\rho = 100T/n_p \%$, (b) gruppi testabili (insiemi di Tparametri per i quali le corrispondenti colonne di $\mathcal{G}(\boldsymbol{p}^*)$ sono linearmente indipendenti), (c) gruppi di ambiguità canonici (insiemi minimali di parametri per i quali le corrispondenti colonne di $\mathcal{G}(\boldsymbol{p}^*)$ sono linearmente dipendenti), e (d) punti di stimolo e/o misura ridondanti (punti di stimolo e/o misura per i quali le corrispondenti righe di $\mathcal{G}(\boldsymbol{p}^*)$ possono essere eliminate senza alterare le relazioni di dipendenza lineare fra le colonne di $\mathcal{G}(\boldsymbol{p}^*)$).

L'algoritmo testé presentato è stato tradotto in un programma per l'analisi di testabilità di circuiti analogici di grandi dimensioni denominato LINFTA.2. Quest'ultimo accetta un file di testo contenente una netlist quale può essere

prodotta da Spice o altri programmi analoghi per l'analisi numerica dei circuiti e, a partire da tale file, implementa l'algoritmo sopra presentato, restituendo i valori di $T \in \rho$, come pure i GAC e i GT.

5.3.7 Valutazione dell'onere di elaborazione e confronto con precedenti approcci

Questo paragrafo è dedicato al confronto – in termini di FLOP (FLoating-point OPeration) – fra gli oneri computazionali e i tempi di elaborazione rispettivamente pertinenti agli algoritmi presentati nei paragrafi precedenti e a preesistenti approcci numerici. Rispetto a questi ultimi, come si vedrà, l'algoritmo descritto al paragrafo 5.3.3 consente una drastica riduzione delle entità summenzionate, le quali risultano poi, in misura notevole, ulteriormente ridotte con l'algoritmo descritto nel paragrafo 5.3.6. Per lo scopo suddetto, si indichi con D la dimensione della matrice $\mathcal{T}(s, p)$ che appare nelle (5.59) e (5.87) e si rammenti che sono stati indicati con N, n_p , e n_x , rispettivamente, l'ordine del circuito, il numero di parametri considerati potenzialmente difettosi o incogniti e il numero di punti di iniezione degli stimoli. In riferimento al medesimo scopo, si assumerà inoltre, per semplicità, che ciascun parametro compaia esattamente una volta in $\mathcal{T}(s, p)$: tale restrizione, che può essere rimossa a prezzo di qualche complicazione, non altera la sostanza del confronto che si opererà nel seguito.

Cominciando col valutare il numero di FLOP richieste dall'algoritmo descritto al paragrafo 5.3.6 si trova quanto segue.

- (i) Il PASSO 4 non richiede FLOP.
- (ii) Il calcolo di \mathcal{T}_0^{-1} tramite decomposizioni LU e sostituzioni avantiindietro richiede circa $2D^3$ FLOP.
- (iii) Il calcolo di $\mathcal{F} \triangleq -\mathcal{T}_0^{-1} \mathcal{T}_1$ richiede circa *DN* FLOP (in realtà meno di *DN* moltiplicazioni).
- (iv) Il calcolo di $\mu_0^{w^{(i)}} = \mathcal{T}_0^{-1} \boldsymbol{e}_i$ non richiede FLOP (come è evidente ricordando il significato di \boldsymbol{e}_i).

(v) Per un fissato *i*,
$$\boldsymbol{\mu}_{0}^{\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(i)}}{\partial p_{l}}} = -\mathcal{T}_{0}^{-1} \frac{\partial \mathcal{T}_{0}}{\partial p_{l}} \mathcal{T}_{0}^{-1} \boldsymbol{e}_{i} = -\mathcal{T}_{0}^{-1} \frac{\partial \mathcal{T}_{0}}{\partial p_{l}} \boldsymbol{\mu}_{0}^{\boldsymbol{w}^{(i)}}$$
 è nullo (e

dunque non richiede FLOP) se p_l è relativo a un componente con memoria, mentre il suo calcolo richiede al più D+1 FLOP (moltiplicazioni) se p_l è relativo ad un componente senza

memoria. Globalmente occorrono dunque
$$(D+1)n_x(n_p-N)$$
 FLOP.
(vi) Il calcolo di $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_l} = -\mathcal{T}_0^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{T}_0}{\partial p_l} \mathcal{F} + \frac{\partial \mathcal{T}_1}{\partial p_l} \right]$ non richiede FLOP se p_l è relativo a un componente con memoria (difatti in tal caso $\frac{\partial \mathcal{T}_0}{\partial p_l}$ è nullo e $\frac{\partial \mathcal{T}_1}{\partial p_l}$ ha tutte le componenti nulle, eccetto una che è pari a uno); richiede, invece, D FLOP se p_l è relativo a un componente senza memoria. Globalmente sono dunque richieste $D(n_p-N)$ FLOP.
(vii) Al PASSO 7, per un fissato i e un fissato $k \ge 1$, il calcolo di $\begin{bmatrix} \mu_k^{w^{(i)}} \\ \mu_k^{\partial w^{(i)}/\partial p_l} \end{bmatrix}$ a partire dalla conoscenza di $\begin{bmatrix} \mu_{k-1}^{w^{(i)}} \\ \mu_{k-1}^{\partial w^{(i)}/\partial p_l} \end{bmatrix}$ richiede $3D(2D-1)$ FLOP. Globalmente sono dunque richieste

$$6n_r ND(2D-1)$$
 FLOP.

Sommando i summenzionati contributi, si ottiene per il nuovo algoritmo il seguente numero totale di FLOP richieste

$$2D^{3} + Dn_{p} + (D+1)n_{x}(n_{p} - N) + 6n_{x}ND(2D-1)$$
(5.88)

Analizzando, ora, l'algoritmo descritto nel paragrafo 5.3.3 si rileva quanto segue.

- (i) il PASSO 4 non richiede FLOP (difatti con riferimento alle (5.59) e (5.60) si ha semplicemente $\mathcal{T}(s, p^*) = \mathcal{T}_0 + s \cdot \mathcal{T}_1$. Si osservi inoltre che \mathcal{T}_1 ha tutti gli elementi pari zero, eccetto quelli relativi agli elementi reattivi il cui numero *N* eguaglia l'ordine del circuito.
- (ii) Il passo 5 non richiede FLOP: difatti, per ogni p_r , gli elementi di $\partial T_0 / \partial p_r(\mathbf{p})$ e $\partial T_1 / \partial p_r(\mathbf{p})$ sono tutti nulli eccetto, al più, quello corrispondente a p_r , il cui valore è pari a uno.
- (iii) Il calcolo di \mathcal{T}_0^{-1} tramite decomposizioni LU e sostituzioni avantiindietro richiede circa $2D^3$ FLOP.
- (iv) Il calcolo di $\mathcal{T}_0^{-1}\mathcal{T}_1$ richiede circa *DN* ulteriori FLOP (in realtà, meno di *DN* moltiplicazioni).

- (v) II PASSO 6 richiede circa $4D^2 Nn_x$ FLOP: difatti per $i=1,2,...,n_x$, $\mu_0^{w^{(i)}}$ coincide semplicemente con la colonna di \mathcal{T}_0^{-1} corrispondente a e_i ; inoltre, per k=1,2,...,2N, il calcolo di $\mu_k^{w^{(i)}} = -\mathcal{T}_0^{-1}\mathcal{T}_1 \mu_{k-1}^{w^{(i)}}$ richiede circa $2D^2$ FLOP.
- (vi) Il PASSO 7 richiede $Dn_x(n_p N)$ FLOP: difatti per $i=1,2,...,n_x$ e $r=1,2,...,n_p$ - $\partial \mathcal{T}_0/\partial p_r$ ha tutti gli elementi pari a zero, tranne quando p_r non corrisponde ad uno degli N componenti con memoria, caso in cui il relativo elemento è pari a uno e il calcolo di $\mu_0^{\partial w^{(i)}/\partial p_r}$ richiede D moltiplicazioni.
- (vii) Il PASSO 8 richiede $2N^2(1-2D)n_x+2N[(2N+1)D+N]n_pn_x$ FLOP: difatti per $i=1,2,...,n_x$, k=1,2,...,2N; $r=1,2,...,n_p$, ricordando il precedente punto (ii), si trova che il calcolo di $\mu_k^{\partial w^{(i)}/\partial p_r}$ richiede [N+1+(2N-1)D] FLOP quando p_r corrisponde ad un elemento con memoria e [N+(2N+1)D] FLOP quando p_r corrisponde ad un elemento senza memoria.

Sommando tali contributi si ottiene il numero di FLOP globalmente richieste dall'algoritmo presentato nel paragrafo 5.3.3, vale a dire

$$2D^{3} + 4D^{2}Nn_{x} + Dn_{x}(n_{p} - N) + 2N^{2}(1 - 2D)n_{x}$$

$$+2N[(2N+1)D + N]n_{p}n_{x}$$
(5.89)

Per contro, come accennato nel paragrafo 5.2.3, i metodi descritti in [1] [2] considerano, in luogo della base canonica, una base \mathcal{B}_{Newt} per Π_{2N} composta da polinomi di Newton. In tal caso - per un fissato $i \in \{1, \dots, n_x\}$ e un fissato $r \in \{1, \dots, n_p\}$ - il calcolo del vettore delle coordinate di $col \left[\psi_{jr}^{(i)}(s, p^*) \right]_{j=1}^{n_y}$ comporta la conoscenza di quest'ultimo in corrispondenza dei valori di *s* appartenenti a un certo insieme $S = \{s_q\}_{q=0}^{2N}$ di 2N+1 pulsazioni complesse, cosa che rende necessarie (2N+1) decomposizioni LU e altrettante coppie di sostituzioni avanti-indietro, per eseguire le quali occorrono $(2N+1)[2D^3/3+2D^2]$ FLOP. Estendendo quanto sopra a tutte le *i* e tutte le *r* si vede dunque che il numero

di FLOP globalmente necessarie per il solo calcolo dei
valori
$$\left\{ \left\{ col \left[\psi_{jr}^{(i)}(s_q, \boldsymbol{p}^*) \right]_{j=1}^{n_y} \right\}_{i=1}^{n_y} \right\}_{q=0}^{2N+1}$$
 è dato da
 $(2N+1) \left[2D^3/3 + 2D^2 \right] n_x n_p$ (5.90)

a queste vanno poi aggiunte le ulteriori FLOP necessarie per il calcolo del summenzionato vettore delle coordinate e, nel caso dell'algoritmo descritto in [2], ancora ulteriori FLOP relative allo sviluppo dei polinomi $\left\{ \left\{ \left\{ \psi_{jr}^{(i)}(s, \boldsymbol{p}^{*})\right\}_{j=1}^{n_{y}} \right\}_{i=1}^{n_{y}} \right\}_{r=1}^{n_{y}}$ rispetto a una seconda base \mathcal{B}_{Ceb} per Π_{2N} composta da

polinomi di Čebyšëv.

Per illustrare, in un caso concreto, la drastica riduzione dell'onere computazionale e dei tempi di elaborazione che, rispetto ai summenzionati approcci, l'algoritmo descritto nel paragrafo 5.3.3 consente e la ulteriore notevole riduzione che, rispetto a quest'ultimo, il nuovo algoritmo qui presentato al paragrafo 5.3.6 permette, a sua volta, di realizzare, si consideri il caso di una power grid modellata come descritto in [10], con 400 nodi e un solo punto di iniezione. così da avere approssimativamente $D = 4000, N = 1200, n_p = 2000, n_x = 1$; si supponga, altresì, di impiegare un computer dotato di una CPU con frequenza di lavoro pari a 2.5 GHz, in grado di eseguire 10 miliardi di operazioni al secondo. Inserendo questi dati rispettivamente in (5.88), (5.89) e (5.90), si trova che la costruzione della matrice di testabilità richiede meno di un minuto con l'algoritmo presentato al paragrafo 5.3.6 e circa 90 minuti con l'algoritmo descritto al paragrafo 5.3.6, contro più di 237 giorni virtualmente necessari algoritmi descritti in [1] e [2] per determinare i agli soli valori $\left\{ \left\{ col \left[\psi_{jr}^{(i)}(s_q, \boldsymbol{p}^*) \right]_{j=1}^{n_y} \right\}_{i=1}^{n_y} \right\}_{i=1}^{2N+1} \left\{ si deve poi aggiungere il tempo di \right\}_{i=1}^{2N+1} \left\{ si deve poi aggiungere il tempo di \right\}_{i=1}^{2N+1} \left\{ si deve poi aggiungere il tempo di si deve poi aggiungere deve poi aggiungere il tempo di si deve poi aggiungere dev$

elaborazione necessario per ottenere, a partire da detti valori, i vettori delle coordinate di $\left\{ col \left[col \left[\psi_{jr}^{(i)}(s, \boldsymbol{p}^*) \right]_{j=1}^{n_v} \right]_{i=1}^{n_v} \right\}_{r=1}^{n_v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_{Newt}^{(n)}$ e, in relazione all'algoritmo descritto in [2], l'ulteriore tempo necessario per ottenere i coefficienti degli sviluppi secondo la base \mathcal{B}_{Ceb}).

Si deve inoltre tenere presente che – come accennato nel Paragrafo 5.2.3 - con i metodi descritti in [1] e [2] la stessa scelta del set di frequenze $S = \left\{s_q\right\}_{q=0}^{2N}$ (concettualmente distinte dalle frequenze che possono essere impiegate per la diagnosi di guasto o l'identificazione dei parametri) costituisce di per sé un problema delicato perché essa influisce fortemente

sulla entità dell'errore di approssimazione polinomiale. Per quantificare tale ultimo aspetto, si indichi - in corrispondenza di i, j e r fissati - con $\boldsymbol{\beta}_{jr}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*}) = col\left[\boldsymbol{\beta}_{jr,l}^{(i)}(\boldsymbol{p}^{*})\right]_{l=0}^{2N} \text{ il vettore delle coordinate di } \boldsymbol{\psi}_{jr}^{(i)}(s, \boldsymbol{p}^{*}) \text{ rispetto a}$ \mathcal{B}_{Newt} e si assuma che gli elementi di S siano equispaziati su una retta parallela all'asse reale, vale a dire che si abbia $\langle s_q = s_0 + qh \rangle_{a=0}^{2N}$, con *h* numero reale. Si indichi inoltre, per un fissato q, con $\Delta \psi_{ir}^{(i)}(s_q, p)$ l'errore di arrotondamento per $\psi_{jr}^{(i)}(s_q, \boldsymbol{p})$ e sia $\varepsilon_{jr}^{(i)} = min \left\{ \Delta \psi_{jr}^{(i)}(s_q, \boldsymbol{p}) \right\}_{q=0}^{2N}$. Allora, in relazione all'errore $\Delta \beta_{jr,l}^{(i)}$ da cui $\beta_{jr,l}^{(i)}$ è affetto, si trova $\Delta \beta_{jr,l}^{(i)} \ge \varepsilon_{jr}^{(i)} 2^l / (h^l l!)$: tale errore deve essere tenuto in q=0,1,...,2N; $r=1,2,...,n_{p}$; $i=1,2,...,n_{x}$; $j=1,2,...,n_{y}$, il che dà un'idea di quanto i risultati dell'analisi di testabilità possano essere inficiati con i metodi succitati. Per contro, tali problemi sono completamenti aggirati con gli approcci descritti ai paragrafi 5.3.3 e 5.3.6, che richiedono unicamente calcoli a frequenza nulla (ossia per s=0).

Merita osservare, infine, che i summenzionati inconvenienti legati agli errori di arrotondamento possono essere, in linea di principio, aggirati anche ricorrendo all'approccio basato su tecniche simboliche che è stato descritto nel Capitolo 3 e pubblicato, nella sua versione preliminare, in [7], il quale trae partito dalla possibilità, offerta dal software SapWin [5], di disporre della matrice di testabilità C(p) in forma simbolica (rispetto a p). Tuttavia pur mantenendo intatta la sua notevole importanza concettuale e teorica, specie in ragione della peculiare attitudine a consentire la derivazione di risultati di carattere generale, tale approccio simbolico diviene ben presto inadeguato al crescere delle dimensioni del circuito allo studio, a causa del carattere combinatorio delle tecniche simboliche su cui il summenzionato software SapWin è basato, carattere che determina una crescita esponenziale dei tempi di elaborazione. Per contro, gli approcci numerici descritti in questo paragrafo evitano il ricorso a tecniche simboliche e sono basati su algoritmi di complessità polinomiale, che consentono, come mostrato, una drastica riduzione dell'onere di calcolo e dei tempi di elaborazione.

5.4 Esempio

In questo paragrafo si impiegherà il circuito elementare mostrato in Fig. 5.3 onde illustrare il principio di funzionamento dell'algoritmo presentato nel paragrafo 5.3.6 (per l'algoritmo descritto nel paragrafo 5.3.3 valgono considerazioni e calcoli perfettamente analoghi).

A tale scopo, si assuma $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ p_3]^{tr} = [G_1 \ G_2 \ C]^{tr}$, cui corrisponde $n_p = 3$; si considerino inoltre, quali variabili elettriche selezionate per la misura, le tensioni v_1 e v_2 indicate nella summenzionata Fig. 5.3. Se, per semplicità, si considerano le equazioni nodali in luogo di quelle tabulari per rappresentare l'equilibrio elettrico, l'intero vettore $\mathbf{w} = [w_1 \ w_2]^{tr} = [v_1 \ v_2]^{tr}$ delle incognite variabili elettriche e il vettore $\mathbf{h} = [h_1 \ h_2]^{tr} = [v_1 \ v_2]^{tr}$ delle variabili elettriche relative ai punti di misura coincidono. Il vettore delle sollecitazioni (che devono supporsi virtualmente note) è invece, con riferimento alla medesima figura, dato da $\mathbf{e} = [i_1 \ i_2]^{tr}$.

Le equazioni di equilibrio possono dunque scriversi

$$\begin{bmatrix} G_1 + Cs & -Cs \\ -Cs & G_2 + Cs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$
(5.91)



Fig. 5.3 - Circuito considerato per l'analisi di testabilità.

Dalla (5.91) la matrice $\mathcal{T}(s, \mathbf{p})$ è subito identificata come

$$\mathcal{T}(s, \boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} G_1 + Cs & -Cs \\ -Cs & G_2 + Cs \end{bmatrix}$$
(5.92)

da cui segue evidentemente che N=1.

Ponendo, arbitrariamente, $p = p^* = [123]^{tr}$, dal confronto fra (5.38) e la (5.92) segue

$$\mathcal{T}_{0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathcal{T}_{1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$
(5.93)

Inserendo la (5.93) nella (5.68) si ha poi

(5.94)

$$\mathcal{F} \triangleq -\mathcal{T}_0^{-1} \mathcal{T}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Dalla (5.92) segue altresì

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{0}}{\partial G_{1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathcal{T}_{1}}{\partial G_{1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathcal{T}_{0}}{\partial G_{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{1}}{\partial G_{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathcal{T}_{0}}{\partial C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathcal{T}_{1}}{\partial C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
(5.95)

Si assuma, quale unico punto di iniezione degli stimoli, la corrente i_1 : allora il vettore e delle sollecitazioni assume la determinazione $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^t$ e, in corrispondenza, il vettore w assume la determinazione $w^{(1)}$. Dalla (5.44) segue allora

$$\boldsymbol{\mu}_{0}^{\boldsymbol{\mu}^{(1)}} = \mathcal{T}_{0}^{-1} \boldsymbol{e}_{i} = \begin{bmatrix} 1\\ 0 \end{bmatrix}$$
(5.96)

mentre dalla (5.71) si trova

$$\boldsymbol{\mu}_{0}^{\partial \boldsymbol{w}^{(1)}/\partial G_{1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{tr}, \, \boldsymbol{\mu}_{0}^{\partial \boldsymbol{w}^{(1)}/\partial G_{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{tr}, \, \boldsymbol{\mu}_{0}^{\partial \boldsymbol{w}^{(1)}/\partial C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{tr}$$
(5.97)

Dalla (5.86) considerata per l=1,2,3 segue poi

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial G_1} = \begin{bmatrix} 3 & -3\\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ -3/4 & 3/4 \end{bmatrix}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial C} = \begin{bmatrix} -1 & 1\\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$
(5.98)

Inserendo le (5.96), (5.97) e (5.98) nella (5.72) (considerata per l=1,2,3) si trova quindi

$$\boldsymbol{\mu}_{1}^{\partial \boldsymbol{\psi}^{(1)}/\partial G_{1}} = \begin{bmatrix} 6 & -1.5 \end{bmatrix}^{tr}, \boldsymbol{\mu}_{2}^{\partial \boldsymbol{\psi}^{(1)}/\partial G_{1}} = \begin{bmatrix} -36 & 11.25 \end{bmatrix}^{tr}, \boldsymbol{\mu}_{1}^{\partial \boldsymbol{\psi}^{(1)}/\partial G_{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 \end{bmatrix}^{tr}, \\ \boldsymbol{\mu}_{2}^{\partial \boldsymbol{\psi}^{(1)}/\partial G_{2}} = \begin{bmatrix} -2.25 & 4.5 \end{bmatrix}^{tr}, \boldsymbol{\mu}_{1}^{\partial \boldsymbol{\psi}^{(1)}/\partial C} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \end{bmatrix}^{tr}, \boldsymbol{\mu}_{2}^{\partial \boldsymbol{\psi}^{(1)}/\partial C} = \begin{bmatrix} 9 & -4.5 \end{bmatrix}^{tr}$$
(5.99)

Si assuma, dapprima, quale unico punto di misura la tensione v_1 : allora, inserendo le (5.97) e (5.99) nella (5.75), si trova

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{1}(\boldsymbol{p}^{*}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
(5.100)

onde segue subito che $T = rank \left[G_{test point1}(\mathbf{p}^*) \right] = 3$ e $\rho = 100T/n_p \% = 100\%$, il che indica che il circuito è *completamente testabile* in corrispondenza della

considerata scelta dei punti di iniezione e misura. Invece, se si sceglie quale unico punto di misura la tensione v_2 si trova

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{2}(\boldsymbol{p}^{*}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.5 \\ 11.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.75 \\ 4.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -4.5 \end{bmatrix}$$
(5.101)

cui corrispondono una Testabilità $T = rank \left[\mathcal{G}_{test point2}(\boldsymbol{p}^*) \right] = 2$ e quindi un Rapporto di Testabilità $\rho = 100T/n_p \% = 66.67\%$. Questo risultato mostra che, con la nuova scelta del punto di misura, il circuito non è pienamente testabile: ciò vuol dire che i parametri selezionati, se considerati simultaneamente potenzialmente difettosi o incogniti, non possono essere oggetto di diagnosi o identificazione univoche. Si è, quindi, in una situazione di bassa testabilità, il che rende necessario condurre un'analisi di testabilità a livello di componente. Quest'ultima mostra che { G_1, G_2, C } è (l'unico) GAC, mentre { G_1, G_2 }, { G_2, C }, and { G_1, C } sono i GT.

Bibliografia

1. G. Iuculano, A. Liberatore, S. Manetti and M. Marini, "Multifrequency measurement of testability with application to large linear analog systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 33, no. 6, pp. 644-648, Jun. 1986.

2. M. Catelani, G. Iuculano, A. Liberatore, S. Manetti and M. Marini, "Improvements to numerical testability evaluation," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. IM-36, no. 4, pp. 902-907, Dec. 1987.

3. R. Carmassi, M. Catelani, G. Iuculano, A. Liberatore, S. Manetti and M. Marini, "Analog network testability measurement: a symbolic formulation approach," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 40, no. 6, pp. 930-935, Dec. 1991.

4. A. Liberatore, S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A new efficient method for analog circuit testability measurement," *Conference Proceedings*. 10th Anniversary. IMTC/94. Advanced Technologies in I & M. 1994 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference (Cat. No.94CH3424-9), Hamamatsu, 1994, pp. 193-196 vol. 1.

5. G. Fontana, F. Grasso, A. Luchetta, S. Manetti, M. C. Piccirilli and A. Reatti, "A new simulation program for analog circuits using symbolic analysis techniques," 2015 International Conference on Synthesis, Modeling, Analysis and Simulation Methods and Applications to Circuit Design (SMACD), Istanbul, 2015, pp. 1-4.

6. G. Fedi, A. Luchetta, S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A new symbolic method for analog circuit testability evaluation," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 47, no. 2, pp. 554-565, Apr 1998.

7. G. Fontana, A. Luchetta, S. Manetti and M. C. Piccirilli, "An unconditionally sound algorithm for testability analysis in linear time-invariant electrical networks," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 44, no. 6, Jun. 2016.

8. G. Fontana, A. Luchetta, S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A Fast Algorithm for Testability Analysis of Large Linear Time-Invariant Networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 64, no. 6, pp. 1564-1575, Jun. 2017.

9. S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A singular-value decomposition approach for ambiguity group determination in analog circuits," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 50, no. 4, pp. 477-487, Apr. 2003.

10. H. Qian, S. R. Nassif and S. S. Sapatnekar, "Power grid analysis using random walks," *IEEE Trans. on Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst.*, vol. 24, no. 8, pp. 1204-1224, Aug. 2005.

Capitolo 6

Analisi di testabilità come guida al progetto e all'affinamento di strategie di identificazione e diagnosi di guasto dei parametri

Nei capitoli precedenti sono stati descritti rigorosi fondamenti teorici e algoritmi efficienti per l'analisi di testabilità dei circuiti analogici. In questo capitolo si enfatizza il ruolo cruciale che l'analisi di testabilità riveste quale passo preliminare nella messa a punto di strategie per la diagnosi di guasto e la identificazione dei parametri, mostrando come la sua applicazione possa consentire di correggere e/o affinare queste ultime con riferimento a due casi di studio tratti dalla recente letteratura. Nel primo caso di studio l'analisi di testabilità è impiegata per ottenere rigorose indicazioni circa la identificabilità dei parametri relativi al modello di un harvester elettromagnetico e, sulla base di tali indicazioni, derivare una strategia di identificazione ed espressioni analitiche dei parametri considerevolmente più snelle e compatte rispetto a quelle alternative recentemente proposte. Nel secondo caso, l'analisi di testabilità, congiunta all'uso di strumenti propri della Teoria dei Circuiti e delle tecniche simboliche di analisi degli stessi, consente di correggere alcune discrepanze rilevabili in una strategia di diagnosi di guasto singolo descritta pochi anni or sono da alcuni Autori e di individuare criteri opportuni per il suo affinamento.¹

¹ Parte dei risultati descritti in questo capitolo sono apparsi in G. Fontana, F. Grasso, A. Luchetta, S. Manetti, M.C. Piccirilli and A.Reatti, "A symbolic program for parameter identifiability analysis in systems modeled via equivalent linear time-invariant electrical

6.1 Introduzione

6.2 Richiami ai principi fondamentali di analisi di testabilità per circuiti lineari tempo-invarianti

- 6.2.1 Impostazione dei problemi di identificazione e diagnosi di guasto
- 6.2.2 Equazioni di identificazione e di diagnosi di guasto
- 6.2.3 Risolvibilità dei problemi di identificazione e di diagnosi di guasto
- 6.2.4 Analisi di testabilità a livello di circuito e a livello di componente

6.3 Analisi di testabilità e strategia di identificazione parametrica per harvester elettromagnetici

- 6.3.1 Premesse
- 6.3.2 Deduzione di un circuito elettrico equivalente per l'harvester elettromagnetico
- 6.3.3 Analisi di testabilità per l'harvester elettromagnetico
- 6.3.4 Strategia di identificazione dei parametri

6.4 Analisi critica di un metodo di

circuits, with application to electromagnetic harvesters," *International Journal of Numerical Modeling: Electronic Networks, Devices and Fields*, doi.org/10.1002/jnm.2251, 2017.

diagnosi basato sulla modellizzazione del guasto nel piano complesso

- 6.4.1 Impostazione della trattazione
- 6.4.2 Caratterizzazione della curva di guasto
 - 6.4.2.1 L'approccio alla caratterizzazione della curva di guasto descritto in [2]
 - 6.4.2.2 Una proposta di approccio alternativo alla caratterizzazione della curva di guasto
- 6.4.3 Marginalità del problema dell'aliasing
- 6.4.4 Importanza del problema delle coppie di ambiguità
 - 6.4.4.1 Coppie di ambiguità e gruppi di ambiguità di ordine due
 - 6.4.4.2 Individuazione dei gruppi di ambiguità di ordine due per ispezione
- 6.4.5 Grappoli di ambiguità e loro effetto sulla diagnosi di guasto

6.1 Introduzione

Nei Capitoli 3 e 5 sono stati descritti le basi teoriche, gli algoritmi e le relative implementazioni software atti all'analisi di testabilità dei circuiti lineari tempoinvarianti e si è sottolineato il ruolo cruciale che tale analisi riveste quale prerequisito per il progetto di qualsivoglia tecnica di diagnosi di guasto o identificazione dei parametri.

Infatti - consentendo di individuare a priori quanti e quali parametri possano essere oggetto di identificazione o diagnosi univoche, a partire da misure su punti di prelievo preselezionati quando il circuito allo studio è opportunamente stimolato in corrispondenza dei prescelti punti di iniezione - l'analisi di testabilità fornisce una rigorosa misura quantitativa del grado di risolvibilità dei due problemi summenzionati e un rigoroso limite superiore alle prestazioni di qualsivoglia algoritmo possa essere concepito per risolverli. Grazie a essa, è possibile per l'ingegnere che si occupa di diagnosi o identificazione parametriche evitare di dissipare tempo e risorse nel tentativo di isolare guasti o identificare parametri a priori indistinguibili e, al contempo, affinare il progetto della propria strategia; inoltre, strumenti ausiliari mutuati dalla Teoria dei Circuiti e dalla tecniche simboliche di analisi degli stessi possono contribuire in maniera considerevole a tale scopo. Al contrario, ove l'analisi di testabilità e alcuni fondamenti teorici siano trascurati, si può incorrere in equivoci concettuali e incongruenze di fatto in grado di abbassare o, addirittura, inficiare le prestazioni dei metodi di diagnosi o identificazione altrimenti promettenti.

In questo capitolo si esemplificano i summenzionati aspetti facendo riferimento a due casi di studio tratti dalla recente letteratura. Nel primo caso, l'analisi di testabilità è impiegata per mettere a punto un algoritmo alternativo a uno recentemente proposto - per l'identificazione dei parametri relativi al modello circuitale equivalente di un harvester elettromagnetico: rispetto al suo omologo summenzionato, il metodo qui descritto, avvalendosi delle indicazioni dell'analisi di testabilità, muove da premesse rigorose circa l'identificabilità dei parametri e il numero di frequenze necessarie allo scopo e, attraverso procedure algebriche autosufficienti oltre che considerevolmente più snelle, giunge a formulazioni analitiche dei parametri notevolmente più compatte ed espressive.

Nel secondo caso di studio si prende in considerazione un metodo recentemente proposto per la diagnosi di guasto dei circuiti lineari tempoinvarianti sotto l'ipotesi di guasto singolo, singolo punto di iniezione e singolo punto di prelievo. Pur essendo il metodo in questione senza dubbio interessante e suggestivo, è possibile tuttavia rilevare che la mancanza di una preliminare analisi di testabilità conduce ad alcune incongruenze e che alcuni risultati sui quali detto metodo è basato possono essere ottenuti in modo più diretto, preciso e generale avvalendosi di opportuni strumenti propri della Teoria dei Circuiti e delle tecniche simboliche. Si mostra, allora, come una accurata analisi di testabilità unita all'impiego di opportuni strumenti teorici ausiliari, possa essere impiegata con vantaggio per correggere e raffinare il metodo stesso.

6.2 Richiami ai principi fondamentali di analisi di testabilità per circuiti lineari tempo-invarianti

6.2.1 Impostazione dei problemi di identificazione e di diagnosi di guasto

Si consideri, come simbolicamente rappresentato in Fig. 6.1, un ALTIEN \mathcal{N} nel quale siano individuati un insieme di variabili di ingresso $X = \{x_j\}_{j=1}^{n_x}$, un insieme di variabili di uscita $Y = \{y_i\}_{i=1}^{n_y}$ e un vettore $\mathbf{p} = col[p_l]_{l=1}^{n_p}$ di parametri relativi alle equazioni costitutive dei componenti, i quali saranno supposti assumere valori reali positivi. Inoltre, l'insieme $P = \{p_l\}_{l=1}^{n_p}$ potrà coincidere con l'intero insieme W dei parametri che caratterizzano il comportamento di \mathcal{N} o con un suo sottoinsieme proprio: in tale ultima eventualità gli elementi dell'insieme differenza W - P saranno assunti noti e fissati a un opportuno valore numerico.



Fig. 6.1 – Rappresentazione simbolica di un ALTIEN \mathcal{N} con l'annesso generico algoritmo di identificazione dei parametri.

Il problema della identificazione dei parametri può allora essere enunciato al modo seguente: a partire da misurazioni sugli elementi di Y quando il sistema è opportunamente stimolato in corrispondenza degli elementi di X, determinare l'effettivo valore p_0 di p. Se, in aggiunta, si dispone del valore nominale $p_{nom} = col [p_{nom,l}]_{l=1}^{n_p}$ si può decidere sullo "stato di salute" del singolo parametro confrontando il corrispondente elemento di p_0 con l'omologo elemento di p_{nom} , risolvendo in tal modo il problema della diagnosi di guasto.

6.2.2 Equazioni di identificazione e di diagnosi di guasto

Dal momento che \mathcal{N} è per ipotesi un ALTIEN, a ciascun elemento dell'insieme $\left\{\left\{\left(x_{j}, y_{i}\right)\right\}_{i=1}^{n_{x}}\right\}_{j=1}^{n_{x}}$ delle sue coppie ingresso-uscita rimane univocamente associato il corrispondente elemento dell'insieme di funzioni di rete $\left\{\left\{h_{i}^{(j)}(s, \boldsymbol{p})\right\}_{i=1}^{n_{y}}\right\}_{j=1}^{n_{x}}$, ove *s* è la variabile complessa del dominio di Laplace. Tali funzioni di rete possono essere raccolte in un vettore

$$\boldsymbol{h}(s,\boldsymbol{p}) = col \left[col \left[h_i^{(j)}(s,\boldsymbol{p}) \right]_{i=1}^{n_y} \right]_{j=1}^{n_x} = col \left[h_i(s,\boldsymbol{p}) \right]_{l=1}^{n}$$
(6.1)

in cui, per convenienza, le stesse sono state ribattezzate come $\{h_l(s, \boldsymbol{p})\}_{l=1}^n$, con

$$n = n_x n_y \tag{6.2}$$

Si consideri ora la classe S di tutti i possibili sottoinsiemi finiti e non vuoti del campo complesso:

$$S = \left\{ \sigma / \sigma = \left\{ s_i \right\}_{i=1}^{n_s}, n_s \in \mathbb{N}_+ \right\}$$
(6.3)

Poichè – per l = 1, ..., n – $h_l(s, p)$ è una rappresentazione completa della relazione fra l'ingresso e l'uscita a essa corrispondente, il vettore definito dalla (6.1) rappresenta compiutamente tutta l'informazione che può trarsi da misure sugli elementi di Y quando il sistema (supposto "scarico" all'istante di applicazione dell'eccitazione) è opportunamente stimolato in corrispondenza degli elementi di X. In più – essendo, per l = 1, ..., n, $h_l(s, p)$ una funzione razionale di s e quindi compiutamente rappresentabile attraverso un opportuno

numero di suoi campioni - tutta l'informazione rappresentata dal vettore definito dalla (6.1) può essere equivalentemente rappresentata dal vettore

$$\boldsymbol{h}_{\sigma}(\boldsymbol{p}) = col \left[\boldsymbol{h}(s_i, \boldsymbol{p}) \right]_{i=1}^{n_s}$$
(6.4)

dei suoi campioni presi in corrispondenza degli elementi di un opportuno membro di S.

Ne segue che studiare la risolubilità dei problemi di identificazione e di diagnosi di guasto è equivalente a studiare la risolubilità dell'equazione vettoriale

$$\boldsymbol{h}_{\sigma}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{h}_{\mu} \tag{6.5}$$

con

$$\boldsymbol{h}_{\mu} = col[\boldsymbol{h}_{\mu,i}]_{i=1}^{n_s} \tag{6.6}$$

ove – per $i=1,2,...,n_s$ - $h_{\mu,i}$ rappresenta il valore di $h(s_i, p_0)$ ottenuto per mezzo di opportune misure sugli elementi di *Y* nelle condizioni in cui, a turno, ogni ingresso è eccitato con uno stimolo cisoidale $x(t) = Re[e^{s_i t}] = Re[e^{(\delta_i + j\omega_i)t}]$, mentre gli altri ingressi sono annullati in accordo alla natura dei corrispondenti elementi di *X*: evidentemente, tale stimolo si riduce a una sinusoide quando $\delta_i = 0$ e $\omega_i \neq 0$ e a un segnale costante quando $\delta_i = 0$ e $\omega_i = 0$.

Merita rimarcare che – in virtù delle conclusioni precedenti – il grado di risolvibilità dei summenzionati problemi coincide con il grado di risolvibilità della (6.5), indipendentemente dal dominio in cui detto problema è impostato (che può anche essere quello del tempo) e dall'algoritmo effettivamente impiegato per risolverlo. Nondimeno, la (6.5) può essere vantaggiosamente impiegata per tale scopo, come si esemplificherà nel seguito.

6.2.3 Risolvibilità dei problemi di identificazione e di diagnosi di guasto

Nonostante \mathcal{N} sia per ipotesi lineare, la (6.5) è in generale un'equazione non lineare in p, il che impedisce di usare i ben noti metodi di analisi dei sistemi lineari per studiarne la risolvibilità. A tal fine si può invece convenientemente impiegare il teorema della funzione implicita, secondo il quale la (6.5) è univocamente risolubile in un intorno del valore effettivo p_0 di p non appena

$$rank\left[\boldsymbol{\Phi}_{\sigma}\left(\boldsymbol{p}_{0}\right)\right] = n_{p} \tag{6.7}$$

ove

$$\boldsymbol{\Phi}_{\sigma}(\boldsymbol{p}_{0}) = row \left[\partial \boldsymbol{h}_{\sigma}(\boldsymbol{p}) / \partial \boldsymbol{p}_{j} \Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{0}} \right]_{j=1}^{n_{p}}$$
(6.8)

è lo Jacobiano di $h_{\sigma}(p)$ valutato per $p = p_0$.

D'altra parte, anche qualora non sia soddisfatta, la (6.7) fornisce preziose informazioni circa il grado di risolvibilità della (6.5), perché le soluzioni di quest'ultima costituiscono una varietà $(n_p - rank[\Phi_{\sigma}(\mathbf{p}_0)])$ -dimensionale in un intorno di \mathbf{p}_0 : vale a dire che tanto più piccolo è $rank[\Phi_{\sigma}(\mathbf{p}_0)]$, tanto maggiore è l'ambiguità che sorge nel tentativo di risolvere la (6.5) in un tale intorno. Ricordando le (6.8) e (6.4), si vede poi che $rank[\Phi_{\sigma}(\mathbf{p}_0)]$ dipende dalla scelta dell'insieme $\sigma = \{s_i\}_{i=1}^{n_i}$ delle pulsazioni di test (quindi, tanto dal loro numero che, in linea di principio, dal loro valore): alla luce dei risultati del paragrafo precedente, è allora ovviamente desiderabile scegliere σ in modo da massimizzare $rank[\Phi_{\sigma}(\mathbf{p}_0)]$ (e quindi minimizzare l'ambiguità nella risoluzione della (6.5)).

Per mostrare come ciò possa ottenersi, si introduce anzitutto la matrice

$$\boldsymbol{\Phi}(s,\boldsymbol{p}_0) = row \left[\partial \boldsymbol{h}(s,\boldsymbol{p}) / \partial \boldsymbol{p}_j \Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0} \right]_{j=1}^{n_p} = row \left[\boldsymbol{\phi}_j(s,\boldsymbol{p}_0) \right]_{j=1}^{n_p}$$
(6.9)

e si indica con $colrank[\Phi(s, p_0)]$ il massimo numero di sue colonne linearmente indipendenti (come funzioni di s)². Sussiste allora la seguente proposizione.

Teorema 3.1 Sia *colrank* $\left[\Phi(s, \mathbf{p}_0)\right] = r$. Allora

- a) $\max_{\sigma \in S} rank \left[\Phi_{\sigma}(\boldsymbol{p}_0) \right] = r .$
- b) Tale valor massimo è raggiunto per *quasi* ogni scelta di un insieme $\sigma = \{s_i\}_{i=1}^r$ comprendente *r* frequenze distinte. Qui il termine *quasi* ha il significato di "con la possibile eccezione dei valori di $s_1, s_2, ..., s_r$ appartenenti a una varietà algebrica".

² Per una discussione più approfondita su questo concetto, si veda il paragrafo 3.2.3.

Si rimanda al Paragrafo 3.7.2 per la dimostrazione della proposizione; qui si vogliono commentare alcune importanti aspetti della stessa, come nel seguito.

- a) Il massimo valore di $rank[\Phi_{\sigma}(\mathbf{p}_0)]$ al variare di σ in S è fissato a priori da $r = colrank[\Phi(s, \mathbf{p}_0)]$.
- b) Per raggiungere tale valore massimo, è *sufficiente*, ma non necessario, scegliere in modo (praticamente) arbitrario un insieme consistente di un numero di pulsazioni complesse pari a $r = colrank[\Phi(s, p_0)]$; in altri termini, il Teorema 3.1 non esclude che il massimo in questione possa essere raggiunto con un insieme di pulsazioni complesse di cardinalità minore di *r*. Un'importante eccezione, tuttavia, è rappresentata dal caso di singolo punto di iniezione e singolo punto di misura, in cui impiegare *r* pulsazioni diviene necessario. D'altra parte, per quante pulsazioni complesse si impieghino, non si potrà in ogni caso mai realizzare la condizione *rank* $[\Phi_{\sigma}(p_0)] > r$.
- classe degli stimoli cisoidali c) Nella della forma $x(t) = Re\left[e^{s_i t}\right] = Re\left[e^{(\delta_i + j\omega_i)t}\right], \quad \text{la sottoclasse costituita}$ dalle sinusoidi pure del tipo $x(t) = Re\left[e^{j\omega_i t}\right] = cos(\omega_i t)$ (che corrisponde a $\delta_i = 0$ e comprende il segnale costante come caso particolare) riveste particolare importanza pratica, perché i segnali di tale tipo sono facilmente generati e il corrispondente valore $h_{\mu,i} = h(j\omega_i, p_0)$ di $h(s, p_0)$ è ottenuto con analoga facilità da misure di ampiezza e fase condotte sui prescelti punti di misura nel corso dello stesso esperimento. Inoltre, essendo $h(s, p_0)$ un vettore di funzioni razionali di s a coefficienti reali, si ha $h(-j\omega, p_0) = \hat{h}(j\omega, p_0)$, ove il cappelletto indica il complesso coniugato: perciò, dalla relazione $h(j\omega_i, p_0) = h_{\mu_i}$, si ottiene automaticamente (senza, cioè, la necessità di ulteriori $h(-j\omega_i, p_0) = \hat{h}_{\mu,i}$, osservazione esperimenti) che consente di dimezzare, in pratica, il numero di esperimenti necessari. Più precisamente: (a) se r è pari, si possono condurre $rn_x/2$ esperimenti comprendenti $rn_x n_y/2 = rn/2$ misure "complesse" (ciascuna, cioè, comprendente una misura di fase e una misura di ampiezza) alle pulsazioni non nulle $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{r/2}$; (b) se r è dispari, si possono $(r-1)n_x/2$ esperimenti condurre comprendenti

 $(r-1)n_xn_y/2=(r-1)n/2$ misure complesse alle frequenze non nulle $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{(r-1)/2}$ con l'aggiunta di n_x ulteriori test comprendenti n misure "reali" (del valore con segno delle variabili di uscita) a pulsazione nulla (in corrente continua), a patto che – per $l=1,2,...,n-h_l(0, p)$ dipenda effettivamente da p (in particolare $h_l(0, p)$ non deve essere identicamente nullo); altrimenti occorre condurre n_x ulteriori esperimenti - comprendenti n misure "complesse" - a una pulsazione non nulla $\omega_{(r+1)/2}$. Merita osservare che, in virtù delle osservazioni precedenti, nel caso di singolo punto di iniezione e singolo punto di stimolo (corrispondente a $n_x = n_y = n = 1$) i numeri di esperimenti summenzionati divengono necessari e sufficienti.

Le precedenti considerazioni suggerirebbero di scegliere il numero $colrank[\Phi(s, p_0)]$ quale misura del grado di risolvibilità della (6.5) – e dunque dei problema stessi di identificabilità e di diagnosi – in un intorno di p_0 . D'altra parte, a prima vista, $colrank[\Phi(s, p_0)]$ sembra dipendere da p_0 , ossia proprio dall'incognito valore di p che si intende individuare, il che inficerebbe la validità della scelta summenzionata. Tale difficoltà concettuale può essere superata grazie alla proposizione seguente.

Teorema 3.2 $colrank[\Phi(s, p)]$ è quasi costante rispetto a p. Precisamente, si ha $colrank[\Phi(s, p)] \equiv \max_{p \in \mathbb{R}^{n_p}_+} colrank[\Phi(s, p)]$ per ogni p, eccettuati, al più, i valori di p appartenenti a una varietà algebrica.

Ancora una volta si rimanda a per la dimostrazione della proposizione. Qui ci si limita a sottolinearne le seguenti importanti conseguenze pratiche.

a) Dal momento che *colrank* $\left[\Phi(s, p)\right]$ è praticamente indipendente da p, si avrà (con probabilità unitaria) $colrank\left[\Phi(s, p_0)\right] = colrank\left[\Phi(s, p^*)\right]$, ove p^* è un valore di pgenerato in modo aleatorio: la precedente uguaglianza implica che per calcolare la summenzionata misura di testabilità non è, in pratica, necessario conoscere in anticipo il valore effettivo di p, il che elimina la (solo apparente) difficoltà concettuale cui si accennava più sopra. b) L'indipendenza di *colrank* $\left[\Phi(s, p)\right]$ da *p* conferisce alla misura di testabilità individuata un carattere globale, piuttosto che locale: in altri termini, detta misura è una caratteristica intrinseca del circuito riguardato come entità individuata dalla sua topologia e dalla natura dei suoi componenti, ma è (praticamente) indipendente da qualunque sua determinazione (legata a un particolare valore dei parametri).

6.2.4 Analisi di testabilità a livello di circuito e a livello di componente

Sulle basi delle precedenti considerazioni si introduce l'indice

$$T = colrank \left[\Phi(s, \boldsymbol{p}^*) \right]$$
(6.10)

 p^* essendo un valore di p generato in modo casuale, e lo si battezza *Testabilità* del circuito allo studio: tale indice rappresenta il massimo numero di elementi che possono essere simultaneamente oggetto di diagnosi o identificazione univoche a partire dagli insiemi dei punti di iniezione e dei punti di misura prescelti. Un'altra entità significativa è definita da

$$\rho = \frac{100T}{n_p}\% \tag{6.11}$$

ed è denominata *Rapporto di testabilità*: ponendo in relazione il massimo numero di parametri simultaneamente identificabili o diagnosticabili con il numero totale di parametri assunti incogniti, tale indice fornisce in modo naturale una misura assoluta dell'attitudine del circuito a essere "testato". D'altra parte, nonostante gli indici testé introdotti siano entità significative, l'informazione circa il grado di risolvibilità dei problemi di identificazione e diagnosi di guasto rimane inevitabilmente incompleta se l'analisi di testabilità non è estesa a livello di *componente*.

Per illustrare l'importanza di tale aspetto, si cominci col considerare che, in generale, si ha $T < n_p$ e dunque $\rho < 100\%$: ciò vuol dire che i problemi di identificazione e diagnosi di guasto non sono univocamente risolubili. Si potrebbe allora pensare di aggirare tale inconveniente modificando l'insieme dei punti di iniezione e/o quello dei punti di misura, ma occorre tenere a mente che la scelta di tali insiemi è fortemente condizionata da vincoli di natura tecnologica ed economica, il che richiede la messa a punto di una strategia alternativa. Questa può consistere nell'assumere che – degli n_p parametri inizialmente assunti incogniti - $n_p - k$, con $k \leq T$, possano essere valutati in

modo soddisfacente per mezzo di informazioni accessorie (come accade quando si possa ragionevolmente ritenere che i parametri in questione non si discostino apprezzabilmente dai rispettivi valori nominali o quando si disponga di tecniche di misura diretta che possano ritenersi accettabili dal punto di vista tecnico ed economico).

Allo scopo di selezionare in modo giudizioso gli $n_p - k$ parametri da assumersi noti, è di cruciale importanza individuare i *Gruppi Testabili* (GT), vale a dire gli insiemi di *T* parametri che, se simultaneamente assunti incogniti, possono essere univocamente identificati. Poiché ciascun parametro rimane associato a una e una sola colonna della matrice $\Phi(s, p^*)$, un insieme di parametri è un GT se e solo se le corrispondenti colonne di $\Phi(s, p^*)$ costituiscono un insieme *massimale* di elementi linearmente indipendenti. Dualmente, è altresì importante individuare i *Gruppi di Ambiguità Canonici* (GAC), ossia gli insiemi *minimali* di parametri che, se considerati simultaneamente incogniti, non possono essere univocamente identificati: in analogia a quanto visto sopra, un insieme di parametri è un GAC se e solo se le corrispondenti colonne di $\Phi(s, p^*)$ costituiscono un insieme *minimale* di elementi linearmente dipendenti.

La determinazione dei GT e dei GAC è, per l'appunto, lo scopo dell'analisi di testabilità a livello di componente, i cui risultati rappresentano una guida preziosa per il progetto e la rifinitura delle strategie di identificazione dei parametri attraverso una scelta oculata degli insiemi dei punti di iniezione e di misura come pure dei parametri da identificare.

6.3 Analisi di testabilità e strategia di identificazione parametrica per *harvester* elettromagnetici

6.3.1 Premesse

Gli harvester elettromagnetici trovano largo impiego come succedanei delle batterie per le applicazioni nelle quali il loro uso risulta poco conveniente da un punto di vista sia tecnico ed economico che ecologico.

In termini generali, il principio di funzionamento di questi dispositivi sfrutta l'azione di un opportuno trasduttore per convertire l'energia meccanica di vibrazione in energia elettrica. In particolare, in un harvester elettromagnetico (HE) tale trasformazione si attua per mezzo di un magnete permanente, che trasforma l'energia vibrazionale nella variazione del flusso concatenato con un avvolgimento e quindi, per la legge di Faraday, in una forza elettromotrice che si sviluppa ai capi dello stesso.

Ora, quantunque la conoscenza dei parametri di un HE sia di evidente cruciale importanza per la messa a punto di simulazioni finalizzate a valutarne le potenzialità e le prestazioni, tali parametri non sono di solito forniti direttamente dal costruttore. A tal proposito, nel presente paragrafo si studierà la risolvibilità del relativo problema di identificazione attraverso l'analisi di testabilità di un circuito elettrico equivalente e, basandosi sui risultati di tale analisi, si fornirà una strategia di identificazione dei parametri alternativa a quella proposta in [1].

6.3.2 Deduzione di un circuito elettrico equivalente per l'harvester elettromagnetico

L'HE allo studio è concettualmente rappresentato in Fig. 6.2. In quest'ultima, un magnete di massa inerziale m - collegato all'alloggiamento del dispositivo da una molla di costante elastica k_s e da uno smorzatore caratterizzato da un coefficiente di attrito viscoso η - può scorrere all'interno della bobina, agli estremi della quale è connesso l'utilizzatore. Siano $v_L(t)$ e $i_L(t)$ la tensione e la corrente pertinenti all'utilizzatore e v(t) e i(t) la tensione e la corrente pertinenti alla bobina.

Rispetto a un opportuno sistema di ascisse solidale all'alloggiamento e con origine O', sia poi x(t) la coordinata del centro di massa del magnete; sia, inoltre, y(t) la coordinata del punto O' rispetto a un opportuno sistema di ascisse fisso con origine O e sia, infine, θ il coefficiente di accoppiamento elettromeccanico, che lega v(t) al tasso di variazione di x(t). Nel medesimo sistema, sul magnete agiscono la forza di attrito viscoso (legata allo smorzatore), la forza apparente (legata al fatto che il sistema di riferimento scelto è non inerziale), la forza elastica (in riferimento alla quale, d è una costante legata alle dimensioni della molla e del magnete) e la forza magnetica esercitata dalla bobina, le cui componenti lungo il summenzionato asse delle ascisse risultano rispettivamente

$$f_{\eta} = -\eta \dot{x}(t), f_{a} = -m \ddot{y}(t), f_{s} = -k_{s} \left(x(t) - d \right), f_{\theta} = -\theta i(t)$$

$$(6.12)$$

Nel medesimo sistema, la seconda legge di Newton porge

$$m\ddot{x}(t) = f_a + f_\eta + f_s + f_\theta \tag{6.13}$$

Si ha inoltre



Fig. 6.2 – Rappresentazione di principio di un HE.

Dal confronto fra (6.12)-(6.14), effettuando il cambio di variabile x(t) - d = z(t) ed eliminando quest'ultima, segue allora

$$C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R}v(t) + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau + i(t) = -\frac{m}{\theta}\ddot{y}(t)$$
(6.15)

ove si sono introdotte le entità

$$R = \theta^2 / \eta, L = \theta^2 / k_s, C = m / \theta^2$$
(6.16)

Se si suppone, infine, di imporre all'alloggiamento una accelerazione del tipo

$$\ddot{y}(t) = a\cos(\omega t) \tag{6.17}$$

La (6.15) diviene

$$C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R}v(t) + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau + i(t) = -A\cos(\omega t)$$
(6.18)

con

$$A = \frac{m}{\theta}a\tag{6.19}$$

Interpretando la (6.18) alla luce della teoria elementare dei circuiti e ricordando il significato di i(t), si perviene al circuito equivalente mostrato in Fig. 6.3(a), nel quale R_c e L_c sono la resistenza e l'induttanza della bobina, mentre R_l , L_l , e C_l sono la resistenza, l'induttanza e la capacità del carico. Si osservi che i parametri θ , η , k_s , m sono a priori incogniti e devono essere stimati; in virtù delle (6.16) lo stesso vale per i parametri R, L, C che appaiono nel circuito, nel quale R_c and L_c devono essere considerati del pari incogniti a priori.



Fig. 6.3 - (a) Circuito elettrico equivalente dell'HE di Fig. 6.2 e (b) Circuito in (a) modificato per renderlo adatto all'analisi di testabilità.

Tenendo a mente il significato fisico degli elementi rappresentati nel circuito in esame, si vede che le sole variabili accessibili per le misure sono rappresentate dalla corrente $i_L(t)$ e la tensione $v_L(t)$ pertinenti al carico. Si potrebbe allora pensare di studiare l'identificabilità R, L, C, R_c e L_c a partire da misure sulle predette variabili elettriche sulle base della teoria presentata nella Sezione 6.2. Si vede tuttavia che il circuito di Fig. 6.3(a) non si presta a tale scopo, perché, come mostra la (6.19), la stessa ampiezza del segnale di eccitazione dipende da parametri da stimare ($m \in \theta$, per la precisione), mentre, nella teoria presentata, i segnali di eccitazione devono essere noti a priori e poter essere imposti arbitrariamente dall'operatore. Un po' di riflessione mostra che tale inconveniente può essere aggirato ricorrendo al circuito modificato mostrato in Fig. 6.3(b): difatti, si vede facilmente che per tale ultimo circuito la risposta al segnale di ingresso $i_S(t) = cos(\omega t)$ coincide con la tensione v(t) soluzione della (6.18).

6.3.3 Analisi di testabilità per l'harvester elettromagnetico

Si osservi preliminarmente che le (6.16) e (6.19) definiscono una corrispondenza biunivoca fra i vettori $[RLCA]^{t}$ e $[\theta \eta k_{s} m]^{t}$: difatti, si ha univocamente

$$\theta = A/(aC), m = A^2/(a^2C), k_s = A^2/(a^2LC^2), \eta = A^2/(a^2RC^2)$$
(6.20)

e quindi, la conoscenza degli elementi del primo vettore equivale a quella degli elementi del secondo.

Ora, al contrario degli elementi di $[RLCA]^t$, $R_c \in L_c$ sono quantità fisiche, in linea di principio misurabili direttamente. Si supponga allora, per il momento, che dette quantità siano note e si assuma $p = [RLCA]^t$ (onde $n_p = 4$) come vettore dei parametri incogniti da stimare. Ai fini dell'analisi di testabilità, il circuito viene prima disegnato nell'ambiente capture di SapWin: qui gli elementi di p sono assunti come incogniti spuntando "symbolic" nella relativa casella di dialogo, mentre, tramite un'operazione analoga, agli altri parametri è attribuito un valore arbitrario; inoltre, la tensione $v_L(t)$ è selezionata come unica variabile di misura. Il file ".fdt" generato da SapWin quale risultato dell'analisi simbolica viene quindi inviato in ingresso a TALIC, il quale fornisce un valore di Testabilità T = 4 e quindi un valore del Rapporto di Testabilità $\rho = 100T/n_p\% = 100\%$, risultato che indica – in relazione alle operate scelte degli insiemi dei parametri e dei punti di misura - la completa testabilità del circuito allo studio: si ha quindi, alla luce dell'osservazione c) del Paragrafo 6.2.3 che gli elementi di p possono essere identificati a partire da misure "complesse" di $h(s, p) = \mathcal{L}[v_L(t)]/\mathcal{L}[i_S(t)]$ in corrispondenza di 2 frequenze non nulle $s_1 = j\omega_1$ e $s_1 = j\omega_2$. Si verifica inoltre che - in accordo a quanto può intuitivamente attendersi - ai medesimi risultati si perviene scegliendo $i_L(t)$ in luogo di $v_L(t)$ quale unica variabile di misura.

Tornando a considerare il problema della misura diretta di R_c e L_c , sorge la questione se possa essere più conveniente includere tali elementi nel vettore dei parametri incogniti, - che diverrebbe quindi in tal caso $\boldsymbol{p} = [RLCAR_cL_c]^{t}$ - e cercare di identificare gli elementi di quest'ultimo tutti assieme. Prima di effettuare tale tentativo, è d'uopo eseguire nuovamente l'analisi di testabilità onde stabilire a priori se il circuito continui o meno a essere pienamente testabile con la nuova scelta di p. A tale scopo, si ritorna nell'ambiente capture di SapWin e si spunta "symbolic" nella caselle di dialogo pertinenti a R_c e L_c , in modo che il nuovo **p** comprenda questi ultimi, mantenendo la tensione $v_{I}(t)$ quale unica variabile di misura. Si effettua allora nuovamente l'analisi circuitale, al termine della quale SapWin produce il nuovo file ".fdt": quest'ultimo viene quindi inviato in ingresso a TALIC, il quale restituisce i risultati della nuova analisi di testabilità in termini di T=5 $\rho = 100T/n_n \% = 83.33\%$. Tali risultati indicano che – con la nuova scelta di p(e la medesima scelta delle variabili di misura) - il circuito non è più pienamente testabile e quindi il problema della identificazione non è ora univocamente risolvibile. A livello di componente, si trova che ciascuno dei 6 gruppi di 5 parametri che possono estrarsi da p risulta un GT, mentre l'intero gruppo dei 6 elementi di p è l'unico GAC. Si trova poi nuovamente che (come è intuitivo) ai medesimi risultati si perviene scegliendo $i_L(t)$ in luogo di $v_L(t)$ quale unica variabile di misura.

Tali risultati indicano che ogni tentativo di identificare gli elementi di $p = [RLCAR_c L_c]^t$ tutti assieme da misure di tensione o corrente sul carico è destinato all'insuccesso: almeno uno fra R_c e L_c deve essere misurato direttamente. Poiché la misura diretta di L_c è in linea di principio più delicata rispetto a quella di R_c , si può optare per quest'ultima, il che corrisponde alla determinazione del vettore dei parametri incogniti data da $p = [RLCAL_c]^t$: in virtù dei precedenti risultati, con tale scelta di p il sistema diviene di nuovo pienamente testabile. Inoltre, dal momento che – come è subito visto per

ispezione - si ha $h(0, \mathbf{p}) \equiv 0$, si conclude, in virtù dell'osservazione c) del paragrafo 6.2.3, che i 5 parametri incogniti possono essere individuati a partire da misure "complesse" effettuate su $v_L(t)$ in corrispondenza di 3 frequenze non nulle $s_1 = j\omega_1$, $s_2 = j\omega_2$, and $s_3 = j\omega_3$.

6.3.4 Strategia di identificazione dei parametri

Si torni ora a considerare il caso $\boldsymbol{p} = [R L C A]^t$. Sulla scorta dei risultati del paragrafo precedente, è noto che gli elementi di un tale \boldsymbol{p} possono essere individuati a partire dalla conoscenza dei valori $h_{\mu,1} = h(j\omega_1, \boldsymbol{p}) \in h_{\mu,2} = h(j\omega_2, \boldsymbol{p})$ assunti da $h(s, \boldsymbol{p}) = \mathcal{L}[v_L(t)]/\mathcal{L}[i_s(t)]$ in corrispondenza di due pulsazioni complesse non nulle $s_1 = j\omega_1 e s_1 = j\omega_2$.

Per vedere come ciò possa ottenersi, si cominci con il rielaborare l'espressione di h(s, p) al modo seguente

$$h(j\omega, \mathbf{p}) = \frac{ARLa_{ARL}(j\omega)}{Rb_{R}(j\omega) + Lb_{L}(j\omega) + LRb_{LR}(j\omega) + LRCb_{LRC}(j\omega)}$$
(6.21)

ove $a_{ARL}(j\omega), b_R(j\omega), b_L(j\omega), b_{LR}(j\omega), b_{LRC}(j\omega)$ sono polinomi noti in $j\omega$. La (6.5) diviene allora nel caso in specie

$$\begin{bmatrix} b_{R}(j\omega_{1}) \ b_{L}(j\omega_{1}) \ b_{LR}(j\omega_{1}) \ b_{LRC}(j\omega_{1}) \\ \hat{b}_{R}(j\omega_{1}) \ \hat{b}_{L}(j\omega_{1}) \ \hat{b}_{LR}(j\omega_{1}) \ \hat{b}_{LRC}(j\omega_{1}) \\ b_{R}(j\omega_{2}) \ b_{L}(j\omega_{2}) \ b_{LR}(j\omega_{2}) \ b_{LRC}(j\omega_{2}) \\ \hat{b}_{R}(j\omega_{2}) \ \hat{b}_{L}(j\omega_{2}) \ \hat{b}_{LR}(j\omega_{2}) \ \hat{b}_{LRC}(j\omega_{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ L \\ LR \\ LRC \end{bmatrix}$$

$$= ARL \begin{bmatrix} a_{ARL}(j\omega_{1})/h_{\mu,1} \\ \hat{a}_{ARL}(j\omega_{1})/\hat{h}_{\mu,2} \\ \hat{a}_{ARL}(j\omega_{2})/h_{\mu,2} \\ \hat{a}_{ARL}(j\omega_{2})/\hat{h}_{\mu,2} \end{bmatrix}$$

$$(6.22)$$

Sia *D* il determinante della matrice \mathcal{D} che compare al primo membro della (6.22) e si indichi con *e* il vettore nel secondo membro della stessa; inoltre, per ciascun $\gamma \in \{R, L, LR, LRC\}$ sia D_{γ} il determinante della matrice ottenuta rimpiazzando in quest'ultima la colonna corrispondente a γ con *e*. Allora, applicando la regola di Cramer, si ha

$$LR = ARLD_{LR}/D, R = ARLD_{R}/D,$$

$$L = ARLD_{L}/D, LRC = ARLD_{LRC}/D$$
(6.23)

Onde

$$A = D/D_{LR}, L = D_{LR}/D_{R}, R = D_{LR}/D_{L}, C = D_{LRC}/D_{LR}$$
(6.24)

Inserendo le (6.24) nelle (6.20) si trova infine

$$\theta = \frac{1}{a} \frac{D}{D_{LRC}}, m = \frac{1}{a^2} \frac{D^2}{D_{LR} D_{LRC}}, k_s = \frac{1}{a^2} \frac{D_R D^2}{D_{LR} D_{LRC}^2}, \eta = \frac{1}{a^2} \frac{D_L D^2}{D_{LR} D_{LRC}^2}$$
(6.25)

Tale procedura può essere facilmente adattata al caso in cui si scelga $i_L(t)$ in luogo di $v_L(t)$ quale unica variabile di misura.

E' interessante confrontare l'analisi testé presentata con quella descritta in [1]. In primo luogo, l'analisi di testabilità preliminare consente di stabilire a priori che il problema di identificazione considerato è univocamente risolvibile: non è questo il caso, invece, per l'approccio summenzionato, nel quale il problema della risolvibilità non è preso in considerazione e l'univoca identificabilità dei parametri è data per scontata. In secondo luogo, con l'approccio qui descritto si può stabilire a priori che esattamente due frequenze di test sono necessarie e sufficienti per la univoca identificazione, cosa che emerge solo euristicamente e indirettamente in [1]. Infine, la strategia di identificazione ivi descritta appare notevolmente complessa sul piano concettuale, presuppone la conoscenza di alcuni risultati accessori e richiede numerose manipolazioni algebriche, che conducono a espressioni analitiche dei parametri considerevolmente complicate. Al contrario, la procedura sopra descritta è concettualmente agile, autosufficiente e in grado di fornire semplici ed espressive rappresentazioni analitiche dei parametri in questione.

6.4 Analisi critica di un metodo di diagnosi basato sulla modellizzazione del guasto nel piano complesso

6.4.1 Impostazione della trattazione

In [2] è proposto un metodo di diagnosi di guasto per circuiti lineari tempoinvarianti nell'ipotesi di guasto singolo. Il metodo in questione è fondato sul concetto di *curva di guasto* associata a una certa fonte di guasto nel piano complesso: nel seguito, si rivede brevemente tale concetto per comodità di trattazione e per introdurre notazioni opportune, che troveranno impiego nel prosieguo.

Nel circuito allo studio (CAS), si consideri una certa coppia variabile di ingresso-variabile di uscita (x_s, x_o) e sia $h(s, p) = x_o/x_s$ la corrispondente funzione di rete: qui, come d'abitudine, *s* rappresenta la pulsazione complessa nel dominio di Laplace e $p = [p_1 p_2 \cdots p_{n_p}]^t$ è il vettore degli n_p parametri per i quali si deve formulare una diagnosi. Accanto a *p* si considererà altresì – per $i=1,2,\cdots,n_p$ - il vettore a n_p-1 componenti ${}^{(i)}p = [p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_{n_p}]^t$ ottenuto da *p* eliminando la *i*-esima componente p_i e la determinazione particolare ${}^{(i)}p_0 = [p_{1,0} p_{2,0} \cdots p_{i-1,0} p_{i+1,0} \cdots p_{n_p,0}]^t$ di ${}^{(i)}p$ ottenuta da quest'ultimo rimpiazzando ciascuna sua componente con il rispettivo valore nominale. Analogamente, si indicherà con p_0 il risultato della medesima operazione condotta sull'intero *p*.

Sulla base di tali notazioni – per $i=1,2,...,n_p$ - si potrà scrivere $h(s,p)=h(s,{}^{(i)}p,p_i)$. Si ponga, ora, $s=j\omega_t$, ove ω_t è la pulsazione dello stimolo sinusoidale impiegato nel singolo esperimento; allora - per $i=1,2,...,n_p$ - a p_i rimangono associati nel piano complesso il luogo geometrico $\mathcal{L}_i|_{\omega_t} = \left\{z \in \mathbb{C}/z = h(j\omega_t, {}^{(i)}p_0, p_i), p_i \in \mathbb{R}\right\}$ e il sotto-luogo $\mathcal{L}_i^+|_{\omega_t} = \left\{z \in \mathbb{C}/z = h(j\omega_t, {}^{(i)}p_0, p_i), p_i \in \mathbb{R}\right\}$ e il sotto-luogo $\mathcal{L}_i^+|_{\omega_t} = \left\{z \in \mathbb{C}/z = h(j\omega_t, {}^{(i)}p_0, p_i), p_i \in [0, +\infty]\right\}$: quest'ultimo è denominato curva di guasto associata a p_i alla pulsazione ω_t . Si osservi che $\mathcal{L}_i^+|_{\omega_t}$, così come $\mathcal{L}_i|_{\omega_t}$, dipende sia da p_i che da ω_t ; si osservi, inoltre, che, in virtù delle definizioni stesse di ${}^{(i)}p_0 = p_0$, si ha $h(j\omega_t, {}^{(i)}p_0, p_{i,0}) = h(j\omega_t, p_0) = h_0$ per ogni $i=1,2,...,n_p$: vale a dire che tutti i sotto-luoghi $\mathcal{L}_1^+|_{\omega_t}, \mathcal{L}_2^+|_{\omega_t}, \cdots, \mathcal{L}_n^+|_{\omega_t}$ (e quindi, a fortiori, i luoghi $\mathcal{L}_1|_{\omega_t}, \mathcal{L}_2|_{\omega_t}, \cdots, \mathcal{L}_n_p|_{\omega_t}$) devono passare per il punto rappresentativo di $h_0 = h(j\omega_t, p_0)$ nel piano complesso.

Sia p^* l'effettivo valore di p e, in corrispondenza, h^* il valore di $h(j\omega_t, p^*)$ rilevato sperimentalmente; allora (trascurando, per il momento, gli effetti delle tolleranze e degli errori di misura), sotto l'ipotesi di guasto singolo deve verificarsi uno solo fra i seguenti eventi mutuamente esclusivi: (i) $p^* = p_0$ e dunque $h^* = h_0$ o (ii) $p^* \neq p_0$, nel qual caso deve esistere esattamente un $i \in \{1, 2, \dots, n_p\}$ tale che $\boldsymbol{p}^* = \begin{bmatrix} (i) \boldsymbol{p}_0^t \boldsymbol{p}_i^* \end{bmatrix}^t (p_i^* \neq p_{i,0} \text{ essendo il valore effettivo}$ di p_i) e $h^* = h(j\omega_t, \boldsymbol{p}^*) = h(j\omega_t, {}^{(i)}\boldsymbol{p}_0, p_i^*) \in \mathcal{L}_i^+ |_{\omega_t}$. Tale osservazione suggerirebbe la seguente strategia per la diagnosi di guasto

$$\begin{cases} \operatorname{Se} h^* = h_0, \text{ allora il CAS non è guasto} \\ \operatorname{Se} h^* \neq h_0 \operatorname{e} h^* \in \mathcal{L}_i^+ \Big|_{\omega_i}, \text{ allora il CAS è} \\ \text{guasto e } p_i \text{ è il parametro difettoso} \end{cases}$$
(6.26)

- a) Le curve $\mathcal{L}_1^+ \Big|_{\omega_t}, \mathcal{L}_2^+ \Big|_{\omega_t}, \cdots, \mathcal{L}_{n_p}^+ \Big|_{\omega_t}$ sono difficili da caratterizzare da un punto di vista analitico.
- b) Per un certo *i*, possono esistere indici *k* (distinti da *i*) per i quali $\mathcal{L}_k^+ \Big|_{\omega_t} = \mathcal{L}_i^+ \Big|_{\omega_t}$. Nel seguito si farà riferimento a tale circostanza dicendo che i parametri p_i e p_k costituiscono una *coppia di ambiguità* in corrispondenza della pulsazione ω_t .
- c) Anche quando $\mathcal{L}_{i}^{+}\Big|_{\omega_{i}} \neq \mathcal{L}_{k}^{+}\Big|_{\omega_{i}}$ ossia, le due curve caratteristiche sono distinte esse possono intersecarsi in punti diversi da h_{0} . In [2] si fa riferimento a tale circostanza col termine *aliasing*.
- d) Gli effetti delle tolleranze devono essere appropriatamente tenuti in conto.

Nel seguito si analizzeranno tali questioni e si sottolineeranno ulteriori aspetti di notevole importanza.

6.4.2 Caratterizzazione della curva di guasto

6.4.2.1 L'approccio alla caratterizzazione della curva di guasto descritto in [2]

In [2, Sezione II-A], la caratterizzazione analitica della curva di guasto $\mathcal{L}_i|_{\omega_i}$ è ottenuta attraverso una trattazione basata sul teorema di sostituzione; al riguardo possono farsi le seguenti osservazioni.

- a) La summenzionata trattazione è notevolmente prolissa e involuta.
- b) La stessa perde validità quando il parametro considerato è il coefficiente di un generatore dipendente (impiegato, ad esempio, per modellare un accoppiamento induttivo): in tal caso infatti, la variabile

di controllo viene perduta nell'applicazione del teorema di Thévenin ivi impiegato.

- c) Le sue conclusioni sono in parte non corrette. Difatti, contrariamente a quanto [2, Equazione (8)] parrebbe suggerire, l'equazione di $\mathcal{L}_i|_{\omega_i}$ non risulta *sempre* di tipo quadratico. Tale erronea conclusione deriva dall'assunto, a sua volta erroneo, che sia sempre $X_0 \neq 0$, come è implicito nel passaggio che porta da [2, Equazione (7)] a [2, Equazione (8)].
- d) L'espressione nel secondo membro di [2, Equazione (8)] è piuttosto oscura e non sembra lasciar desumere agevolmente informazioni circa la natura di $\mathcal{L}_i|_{\omega_i}$. Questo fatto obbliga in [2] a tracciare $\mathcal{L}_i|_{\omega_i}$ per punti, attraverso un certo numero (individuato euristicamente) di simulazioni: in tal modo, il proposito iniziale di trattare il problema della variazione continua dei parametri è, in una qualche misura, contraddetto dall'adottare un modello intrinsecamente discretizzato.

6.4.2.2 Una proposta di approccio alternativo alla caratterizzazione della curva di guasto

Gli inconvenienti e le limitazioni dianzi discusse possono essere aggirati attraverso l'approccio alternativo di seguito descritto.

E' ben noto (e, probabilmente, Bode [3] è stato il primo a notarlo esplicitamente) che $h(j\omega_t, p)$ è una funzione bilineare rispetto a ciascuna componente di p. Ricordando il significato di ⁽ⁱ⁾ p_0 introdotto nel Paragrafo 6.4.1, il fatto summenzionato ha la seguente notevole conseguenza: per $i=1,2,\dots,n_p$ si potrà scrivere

$$h(j\omega_t,^{(i)}\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{p}_i) = \frac{\alpha_i(j\omega_t,^{(i)}\boldsymbol{p}_0)\boldsymbol{p}_i + \beta_i(j\omega_t,^{(i)}\boldsymbol{p}_0)}{\chi_i(j\omega_t,^{(i)}\boldsymbol{p}_0)\boldsymbol{p}_i + \delta_i(j\omega_t,^{(i)}\boldsymbol{p}_0)}$$
(6.27)

Nel seguito si ometterà, per semplicità, di indicare esplicitamente la dipendenza da $\omega_t e^{(i)} \mathbf{p}_0$ dei coefficienti che compaiono in (6.27). Se si assume che $p_i \in \mathbb{R}$ e

$$\alpha_i \delta_i - \beta_i \chi_i \neq 0 \tag{6.28}$$

(in modo da prescindere dal caso banale in cui $h(j\omega_i, {}^{(i)}\boldsymbol{p}_0, p_i)$ sia in realtà indipendente da p_i) si ha che la mappa descritta da (6.27) può riguardarsi come la restrizione di una trasformazione di Möbius all'asse reale. Poichè, come noto, una trasformazione di Möbius manda rette in rette o cerchi, si deduce direttamente (senza la necessità di complicate manipolazione algebriche) che – per $i=1,2,\dots,n_p$ - $\mathcal{L}_i|_{\omega_i}$ è una retta o un cerchio nel piano complesso: di conseguenza, $\mathcal{L}_i^+|_{\omega_i}$ è un arco di cerchio o una semiretta o un segmento.

Più precisamente, come può mostrarsi, risulta quanto segue.

- i. Se $\delta_i = 0$ e $\chi_i \neq 0$, allora $\mathcal{L}_i^+ \Big|_{\omega_i}$ è la semiretta parallela al vettore rappresentativo di β_i / χ_i .
- ii. Se $\delta_i \neq 0$ e $\chi_i = 0$, allora $\mathcal{L}_i^+ \Big|_{\omega_i}$ è la semiretta con origine nel punto rappresentativo di β_i / δ_i e parallela al vettore rappresentativo di α_i / δ_i .
- iii. Se $\delta_i \neq 0$, $\chi_i \neq 0$ e $\mathcal{I}(\chi_i \hat{\delta}_i) = 0$, allora $\mathcal{L}_i^+ |_{\omega_i}$ è il segmento con estremi nei punti rappresentativi di α_i / χ_i e β_i / δ_i (qui e nel seguito $\mathcal{I}(z)$ rappresenta la parte immaginaria del numero complesso z e, come d'uso, il "cappelletto" indica il complesso coniugato).

iv. Se
$$\delta_i \neq 0$$
, $\chi_i \neq 0$ e $\mathcal{I}(\chi_i \hat{\delta}_i) \neq 0$, allora $\mathcal{L}_i^+|_{\omega_i}$ è un arco del cerchio con centro in $(\alpha_i \hat{\delta}_i - \beta_i \hat{\chi}_i) / (2j\mathcal{I}(\chi_i \hat{\delta}_i))$ e raggio $|(\alpha_i \delta_i - \beta_i \chi_i) / (2\mathcal{I}(\chi_i \hat{\delta}_i))|$.

Alla luce dei risultati summenzionati e da un esame della (6.27) si desume che la natura di $\mathcal{L}_{i}^{+}|_{\omega_{i}}$ risulta completamente specificata dalla conoscenza del vettore $\left[\alpha_{i} \beta_{i} \chi_{i} \delta_{i}\right]^{t}$ a meno di un fattore moltiplicativo ininfluente, ossia dalla conoscenza di $span \langle \left[\alpha_{i} \beta_{i} \chi_{i} \delta_{i}\right]^{t} \rangle$. Quest'ultimo, come può desumersi ancora da un esame della (6.27), può essere individuato risolvendo l'equazione matriciale

$$\begin{bmatrix} p_{i,0} \ 1 \ -h(j\omega_t, {}^{(i)}\boldsymbol{p}_0, p_{i,0}) p_{i,0} \ -h(j\omega_t, {}^{(i)}\boldsymbol{p}_0, p_{i,0}) \\ p_i^{(1)} \ 1 \ -h(j\omega_t, {}^{(i)}\boldsymbol{p}_0, p_i^{(1)}) p_i^{(1)} \ -h(j\omega_t, {}^{(i)}\boldsymbol{p}_0, p_i^{(1)}) \\ p_i^{(2)} \ 1 \ -h(j\omega_t, {}^{(i)}\boldsymbol{p}_0, p_i^{(2)}) p_i^{(2)} \ -h(j\omega_t, {}^{(i)}\boldsymbol{p}_0, p_i^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \chi_i \\ \delta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
(6.29)

nella quale $p_i^{(1)} e p_i^{(2)}$ sono due valori arbitrari (distinti fra loro e da $p_{i,0}$) di.

Tali ragionamenti - uniti all'osservazione che, per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n_p\}$, è $h(j\omega_t, {}^{(i)}\boldsymbol{p}_0, p_{i,0}) = h(j\omega_t, \boldsymbol{p}_0) = h_0$ - mostrano chiaramente che *due* simulazioni (onde ottenere $h(j\omega_t, {}^{(i)}\boldsymbol{p}_0, p_i^{(1)}) e h(j\omega_t, {}^{(i)}\boldsymbol{p}_0, p_i^{(2)}))$ - in aggiunta a quella necessaria per ottenere h_0 , eseguita una volta per tutte – sono necessarie e sufficienti per caratterizzare completamente $\mathcal{L}_i^+|_{\omega_t}$. Tale risultato ha almeno due importanti conseguenze:

- a) Esso consente di evitare il grande numero di simulazioni necessarie per tracciare $\mathcal{L}_i^+|_{\alpha}$ per punti secondo l'approccio in [2].
- b) Esso consente di evitare di trattare il problema della variazione continua dei parametri attraverso una non necessaria (e intrinsecamente contraddittoria) discretizzazione, come in [2].

6.4.3 Marginalità del problema dell'aliasing

Come accennato nel paragrafo 6.4.1, anche se per un certo *i* e un certo *k* le corrispondenti curve $\mathcal{L}_{i}^{+}|_{\omega_{t}}$ e $\mathcal{L}_{k}^{+}|_{\omega_{t}}$ sono distinte, queste ultime possono intersecarsi in punti distinti da quello rappresentativo di $h(j\omega_{t}, p_{0})$. Ciò accade quando valori $p_{i}^{*} \ge 0$ e $p_{k}^{*} \ge 0$ esistono, tali che $h(j\omega_{t}, {}^{(i)}p_{0}, p_{i}^{*}) = h(j\omega_{t}, {}^{(k)}p_{0}, p_{k}^{*}) = h_{\langle i,k \rangle} \neq h(j\omega_{t}, p_{0})$, ove la notazione $\langle i,k \rangle$ indica la coppia ordinata degli elementi *i* e *k* : tale circostanza, come accennato nel Paragrafo 6.4.1, è denominata *aliasing* in [2] e ivi considerata un problema cruciale per la diagnosi di guasto, che richiede procedure piuttosto complesse per la scelta di "frequenze ottime" atte a minimizzarne gli effetti.

Ora, si può invece mostrare che tale problema ha ripercussioni trascurabili sulla diagnosi di guasto. A tale scopo, si comincia con l'osservare che (come ci si convince facilmente) per ogni coppia $\left\{ \mathcal{L}_{i}^{+} \Big|_{\omega_{t}}, \mathcal{L}_{k}^{+} \Big|_{\omega_{t}} \right\}$ di curve di guasto distinte può esservi al più un punto di aliasing $h_{\langle i,k \rangle}$: di conseguenza l'insieme $\mathcal{A} = \left\{ \langle i,k \rangle / \mathcal{L}_{i}^{+} \Big|_{\omega_{t}} \in \mathcal{L}_{k}^{+} \Big|_{\omega_{t}}$ si intersecano in un punto di aliasing $\right\}$ è finito. Se si riguardano, quindi, gli elementi di p come variabili aleatorie e si indica con \mathcal{M} l'evento "il valore misurato h^{*} coincide con un punto di aliasing", si trova $\mathcal{M} = \bigcup_{\langle i,k \rangle \in \mathcal{A}} \left\{ h^{*} = h_{\langle i,k \rangle} \right\} = \bigcup_{\langle i,k \rangle \in \mathcal{A}} \left[\left\{ {}^{(i)} p = {}^{(i)} p_{0}, p_{i} = p_{i}^{*} \right\} \cup \left\{ {}^{(k)} p = {}^{k} p_{0}, p_{k} = p_{k}^{*} \right\} \right]$ (6.30)
Poiché la cardinalità di \mathcal{A} è finita, la (6.30) mostra che \mathcal{M} consiste di un numero finito di punti isolati dello spazio di probabilità di p e ha dunque misura nulla. In altri termini, la probabilità che \mathcal{M} si verifichi è pari a zero, il che rende il problema dell'aliasing trascurabile ai fini della diagnosi di guasto, come anticipato.

Alla luce di tale risultato, si conclude che la procedura di selezione delle frequenze ottime per la minimizzazione dell'aliasing ha poca ragion d'essere; tanto più che ciascuna di tali frequenze (concepite per risolvere il problema di aliasing legato alla iniziale frequenza di test ω_t) introduce, di suo, un problema di aliasing che rimane inevitabilmente irrisolto. Cosa anche più importante, nessuna scelta delle frequenze consente di isolare univocamente guasti derivanti dal membro di qualche coppia di ambiguità: questo problema, che appare il reale ostacolo a una corretta diagnosi di guasto, è discusso nel paragrafo seguente.

6.4.4 Importanza del problema delle coppie di ambiguità

6.4.4.1 Coppie di ambiguità e gruppi di ambiguità di ordine due

Come accennato nel paragrafo 6.4.1, l'insieme $\langle p_i, p_k \rangle$ è detto una coppia di ambiguità in corrispondenza della pulsazione angolare ω_t se le corrispondenti curve $\mathcal{L}_i^+ \Big|_{\omega_t}$ e $\mathcal{L}_k^+ \Big|_{\omega_t}$ coincidono. D'altra parte, seguendo [4] e [5], nei capitoli precedenti l'insieme $\{p_i, p_k\}$ è stato definito un gruppo di ambiguità di ordine due (GAOD) quando p_i e p_k - se considerati simultaneamente potenzialmente difettosi o incogniti – non possono essere oggetto di diagnosi o identificazione univoche. Si è altresì mostrato che tale circostanza può essere caratterizzata matematicamente attraverso la seguente condizione: le funzioni della variabile s $\partial h(s, p) / \partial p_i \Big|_{p=p_0}$ e $\partial h(s, p) / \partial p_k \Big|_{p=p_0}$ sono linearmente dipendenti, vale a dire che esistono numeri $\lambda_i \in \lambda_k$ indipendenti da s tali che si abbia

$$\forall s \left(\lambda_i \cdot \partial h(s, \boldsymbol{p}) / \partial p_i \Big|_{\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0} + \lambda_k \cdot \partial h(s, \boldsymbol{p}) / \partial p_k \Big|_{\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0} = 0 \right)$$
(6.31)

Si può osservare che i due concetti di *coppia di ambiguità* e *GAOD* sembrano a prima vista differire sensibilmente, per almeno due motivi: (i) al contrario di un GAOD – che è un concetto intrinsecamente indipendente dalla frequenza (come si desume dalla (6.31)) – una coppia di ambiguità è definita in relazione a una particolare pulsazione angolare e (ii) la definizione di GAOD

sembra fare riferimento all'ipotesi di guasto duplice, mentre il concetto di coppia di ambiguità nasce nello scenario in cui si suppone che il guasto sia singolo. Nondimeno, può mostrarsi quanto segue

- a) Se la pulsazione ω_t è scelta in modo aleatorio in $[0, +\infty)$ e $\langle p_i, p_k \rangle$ è una coppia di ambiguità in corrispondenza di ω_t , allora $\{p_i, p_k\}$ è un GAOD con probabilità unitaria.
- b) Se $\{p_i, p_k\}$ è un GAOD, allora $\langle p_i, p_k \rangle$ è una coppia di ambiguità in corrispondenza di ogni ω_i .
- c) Se {p_i, p_k} non è un GAOD e ω_t è scelta in modo aleatorio in [0,+∞)
 , allora la probabilità che ⟨p_i, p_k⟩ sia una coppia di ambiguità in corrispondenza di ω_t è nulla.
- d) Se la pulsazione ω_t è scelta in modo aleatorio in $[0, +\infty)$ e $\langle p_i, p_k \rangle$ è una coppia di ambiguità in corrispondenza di ω_t , allora, con probabilità unitaria, $\langle p_i, p_k \rangle$ è una coppia di ambiguità in corrispondenza di qualunque ω .

Una conseguenza immediata di tale ultimo risultato è che si può, in pratica, omettere di riferire una coppia di ambiguità a una precisa pulsazione angolare, il che corrobora l'analogia fra coppie di ambiguità e GAOD: in realtà, alla luce dei precedenti risultati, è subito visto che i due concetti sono, in pratica, coincidenti.

6.4.4.2 Individuazione dei gruppi di ambiguità di ordine due per ispezione

La conclusione in chiusura del sottoparagrafo precedente ha notevole importanza pratica, perché consente di adoperare, per l'identificazione delle coppie di ambiguità, gli strumenti descritti nei precedenti capitoli per l'identificazione dei GAOD. Sia adoperando il software descritto nel Capitolo 3 quanto quello descritto nel Capitolo 5 per l'analisi di testabilità a livello di componente del circuito considerato in [2, Fig. 4] si trova la seguente lista esaustiva di GAOD

$$\{C_2, R_6\}, \{C_2, R_7\}, \{C_2, R_8\}, \{R_{11}, R_9\}, \{R_6, R_7\}, \{R_6, R_8\}, \{R_7, R_8\}$$
(6.32)

si osservi in particolare che $\{R_4, R_5\}$ non è un GAOD.

E' interessante tuttavia osservare che –in relazione a circuiti del tipo e dimensioni di quello summenzionato - alle medesime conclusioni si può pervenire anche non disponendo di detti software, sulla base di considerazioni condotte per ispezione diretta. Per mostrare come ciò possa ottenersi, si comincia con l'individuare nel circuito di [2, Fig. 4] il due-porte rappresentato in Fig. 6.4(a). Si derivano, quindi, le equazioni costitutive di quest'ultimo nella forma $[i_1 v_2]^T = \mathcal{G}[v_1 i_2]^T$, ove $\mathcal{G} = [g_{mn}]_{m,n=1}^2$ è la matrice i cui elementi sono dati da $g_{11} = 1/R_6, g_{21} = \alpha, g_{12} = 0, g_{22} = 0$ con

$$\alpha = \alpha (R_7, R_6, R_8, C_2, s) = R_7 / (R_6 R_8 C_2 s)$$
(6.33)

Da tali ultime considerazioni, si desume il due-porte equivalente mostrato in Fig. 6.4(b). Invocando quindi un opportuno teorema di sostituzione³, si impiega detto due porte per rimpiazzare quello di Fig. 6.4(a). Nel circuito così ottenuto si osserva, inoltre, quanto segue.

- a) Il resistore R_6 si trova in parallelo all'uscita di un Amplificatore Operazionale (AO) ideale e può perciò essere avulso senza alterare la relazione ingresso-uscita.
- b) Al generatore di tensione controllato in tensione puo applicarsi il teorema dello "shift" del generatore di tensione [6].
- c) Si può applicare il teorema di Thévenin al terminale non-invertente dell' AO la cui uscita coincide con quella dell'intero sistema allo studio.

Tali operazioni conducono al circuito equivalente mostrato in Fig. 6.4(c), ove è

$$\beta = R_{11} / (R_9 + R_{11}) \tag{6.34}$$

Per ispezione del medesimo circuito, si evince facilmente che R_7, R_6, R_8, C_2 possono influire sull'uscita del sistema solo attraverso la variabile α definita in (6.33). Alla luce di quest'ultima equazione, in relazione alla funzione di rete ingresso-uscita $h(s, \mathbf{p}) = v_o/v_s$ si trova

$$\frac{\partial h(s, \boldsymbol{p})}{\partial R_6}\Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0} = \left[\frac{\partial h(s, \boldsymbol{p})}{\partial \alpha}\Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0}\right] \left(\frac{\partial \alpha}{\partial R_6}\Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0}\right)$$

$$= \left[\frac{\partial h(s, \boldsymbol{p})}{\partial \alpha}\Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0}\right] \left[-R_{7,0} / \left(R_{6,0}^2 R_{8,0} C_{2,0} s\right)\right]$$
(6.35)

e

³ Si veda, a tal proposito, il successivo capitolo 7.



Fig. 6.4 – (a) Un particolare due-porte individuato nel circuito di [2, Fig. 4], (b) Un due-porte con le medesime equazioni costitutive di quello mostrato in (a)

e (c) Un circuito equivalente a quello in [2, Fig. 4] per quanto concerne la relazione ingresso-uscita e adatto alla individuazione dei GAOD per ispezione.

$$\frac{\partial h(s, \boldsymbol{p})}{\partial C_2}\Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0} = \left[\frac{\partial h(s, \boldsymbol{p})}{\partial \alpha}\Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0}\right] \left(\frac{\partial \alpha}{\partial C_2}\Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0}\right)$$

$$= \left[\frac{\partial h(s, \boldsymbol{p})}{\partial \alpha}\Big|_{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0}\right] \left[-R_{7,0} / \left(R_{6,0}R_{8,0}C_{2,0}^2s\right)\right]$$
(6.36)

Da (6.35) e (6.36) si evince che la (6.31) – una volta che p_i e p_k siano identificati con R_6 e C_2 , rispettivamente – è soddisfatta con $\lambda_i = R_{6,0}$ e, il che implica – in base alle definizioni introdotte nel paragrafo 6.4.4.1 – che $\{C_2, R_6\}$ è un GAOD; argomentazioni del tutto analoghe (che tengono anche conto della (6.34)) consentono di giungere alla medesima conclusione in relazione alle altre coppie elencate in (6.32).



Fig. 6.5 – Curve di guasto per il circuito in [2, Fig. 4]. Questa figura corregge la sua analoga in [2, Fig. 5]. Si osservi, in particolare che – al contrario di quanto rappresentato in quest'ultima - R_4 e R_5 hanno curve di guasto distinte (e quindi $\langle R_4, R_5 \rangle$ non è una coppia di ambiguità), mentre R_9 e R_{11} hanno curve di guasto coincidenti (e quindi $\langle R_9, R_{11} \rangle$ è, in realtà, una coppia di ambiguità).

D'altro canto, se si indica con v_1 il potenziale rispetto a massa del terminale di uscita dell'AO #1 in Fig. 6.4(c) e si introduce la funzione di rete $\gamma = v_1/v_s$, allora per ispezione diretta si trova

$$\gamma = \frac{\xi}{s + \omega_{\gamma}}, \xi = -\frac{1}{R_1 C_1}, \omega_{\gamma} = \frac{1}{C_1} \left(\frac{\alpha}{R_5} + \frac{1}{R_4} \right)$$
(6.37)

Ricordando (6.33) e (6.34), dalla medesima Fig. 6.4(c) si evince chiaramente che h(s, p) dipende dal vettore $p_{45} = [R_4 R_5]^T$ solo attraverso l'entità ω_{γ} definita in (6.37). Si ha così

$$\frac{\partial h(s, \boldsymbol{p})}{\partial R_4} = \frac{\partial h(s, \boldsymbol{p})}{\partial \omega_{\gamma}} \frac{\partial \omega_{\gamma}}{\partial R_4}, \frac{\partial h(s, \boldsymbol{p})}{\partial R_5} = \frac{\partial h(s, \boldsymbol{p})}{\partial \omega_{\gamma}} \frac{\partial \omega_{\gamma}}{\partial R_5}$$
(6.38)

Dal momento che $\partial h(s, \mathbf{p})/\partial \omega_{\gamma}$ è un fattore a comune fra i secondi membri nella (6.38), è evidente che gli stessi risulteranno linearmente indipendenti se e solo se lo stesso vale per gli elementi della coppia $\{\partial \omega_{\gamma}/\partial R_4, \partial \omega_{\gamma}/\partial R_5\}$. Ma da (6.37) e (6.33) si trova che $\partial \omega_{\gamma}/\partial R_5 = -\alpha/(C_1R_5^2)$ dipende da *s* (attraverso α), mentre $\partial \omega_{\gamma}/\partial R_4 = -1/(C_1R_4^2)$ non ne dipende: in base a quanto osservato poc'anzi, si deduce che $\partial h(s, p) / \partial R_4 e \partial h(s, p) / \partial R_5$ sono linearmente indipendenti e quindi la coppia non è un GAOD.

Mettendo assieme tali considerazioni con i fatti (a)-(d) presentati nel paragrafo 6.4.4.1, si conclude che – al contrario di quanto affermato in [2, Fig. 4 e Tab. I] - $\langle R_9, R_{11} \rangle$ in realtà *è* una coppia di ambiguità, mentre $\langle R_4, R_5 \rangle$ non lo è. Ciò può essere direttamente confermato con l'aiuto di un software – basato su SapWin [7] - appositamente concepito per il tracciamento delle curve di guasto: tale software fornisce i risultati rappresentati in Fig. 6.5, la quale corregge la sua analoga [2, Fig. 5].



Fig. 6.6 - Curve di guasto per il circuito in [2, Fig. 12]. La presente figura corregge

la sua analoga in [2, Fig. 13]; si osservi , in particolare, che – contrariamente a quanto rappresentato in quest'ultima figura - R_4 e C_1 hanno curve di guasto distinte (e quindi $\langle R_4, C_1 \rangle$ non è una coppia di ambiguità), mentre R_4 e C_2 hanno la stessa curva di guasto (e quindi $\langle R_4, C_2 \rangle$ è una coppia di ambiguità) e lo stesso vale per R_3 e C_1 (vale a dire che $\langle R_3, C_1 \rangle$ è una coppia di ambiguità).

Con ragionamenti perfettamente analoghi condotti sul circuito in [2, Fig. 12], si trova che, per quest'ultimo, la lista completa di GAOD è la seguente: $\{R_3, C_1\}, \{R_4, C_2\}, \{R_6, R_7\}$. Ricordando, nuovamente, le conclusioni del paragrafo 6.4.4.1 si deduce allora che $\langle R_3, C_1 \rangle$ e $\langle R_4, C_2 \rangle$ sono coppie di ambiguità, mentre $\langle R_4, C_1 \rangle$ non lo è. Ciò è in contrasto con quanto si deduce

da [2, Fig. 13 e Tab. VII]: quest'ultima figura dovrebbe quindi correggersi come indicato in Fig. 6.6.

6.4.5 Grappoli di ambiguità e loro effetto sulla diagnosi di guasto

Si consideri ora la relazione "~" definita dalla proposizione $p_i \sim p_k \Leftrightarrow \langle p_i, p_k \rangle$ è una coppia di ambiguità. E' subito visto che tale relazione è riflessiva, simmetrica e transitiva: si tratta, dunque, di una relazione di equivalenza, tramite la quale l'intero insieme dei parametri allo studio può essere partizionato in classi di equivalenza.

Ciascuna di tali classi che contenga almeno due membri può denominarsi grappolo di ambiguità e coincide con l'insieme di (almeno due) parametri che hanno la stessa curva di guasto: detti $p_{\alpha}, p_{\beta}, \dots, p_{\gamma}$ i parametri in questione, indicheremo la summenzionata circostanza con la notazione $[\![p_{\alpha}, p_{\beta}, \dots, p_{\gamma}]\!]$. Ad esempio, dai risultati ottenuti nel precedente sottoparagrafo 6.4.4.2 e, in particolare, dalla Fig. 6.5, si trova subito che per il circuito in [2. Fig. 4] la lista completa dei grappoli di ambiguità è data da $[\![C_2, R_6, R_7, R_8]\!]; [\![R_{11}, R_9]\!];$ analogamente, dalla Fig. 6.6 si desume che, per il circuito in [2. Fig. 12] la lista completa dei grappoli di ambiguità è data da $[\![R_3, C_1]\!], [\![R_4, C_2]\!], [\![R_6, R_7]\!].$

E' d'uopo sottolineare la cruciale importanza che una corretta individuazione dei grappoli di ambiguità riveste quale prerequisito rispetto a qualsivoglia strategia per la diagnosi del guasto singolo. Difatti - al contrario del problema dell'aliasing, che si è mostrato avere ripercussioni trascurabili – i grappoli di ambiguità, derivando dalle coppie di ambiguità ed ereditandone le caratteristiche, non dipendono dal particolare valore dei parametri, né dalle frequenze impiegate per gli esperimenti: quindi, indipendentemente da tali elementi, in presenza di grappoli di ambiguità, la diagnosi di guasto univoca diviene impossibile non appena il parametro difettoso appartenga ad uno di detti grappoli.

Da un punto di vista quantitativo, l'importanza dei grappoli di ambiguità rispetto ai punti di aliasing può essere apprezzata considerando che, a differenza della probabilità che il guasto corrisponda a qualche punto di aliasing, la probabilità \mathcal{P}_{AC} che (nell'ipotesi guasto singolo) il parametro difettoso appartenga a qualche grappolo di ambiguità è, in presenza di questi ultimi, sempre finita e può assumere valori cospicui. Assumendo, per semplicità, che i parametri possano essere difettosi con la medesima probabilità, si trova $\mathcal{P}_{AC} = n_{AC}/n_p$, ove n_{AC} è il numero di parametri che

appartengono a qualche grappolo di ambiguità e n_p è il numero totale di parametri allo studio. Ad esempio, si trova $\mathcal{P}_{AC} = n_{AC}/n_p = 6/13 \approx 46.15\%$ per il circuito di [2, Fig. 4] e $\mathcal{P}_{AC} = n_{AC}/n_p = 6/9 \approx 66.67\%$ per quello di [2, Fig. 12].

Dalla discussione precedente, è evidente che, affinché la strategia messa a punto abbia successo, il problema dei grappoli di ambiguità deve essere adeguatamente preso in considerazione. Ora, come si ricordava dianzi, i grappoli di ambiguità derivano dalle coppie di ambiguità e dunque, eliminare quelli equivale ad eliminare queste ultime. Fortunatamente, come mostrato nel paragrafo 6.4.4.1 le coppie di ambiguità coincidono in pratica con i GAOD, e per lo studio di questi ultimi esistono efficienti strumenti sia teorici che pratici (si vedano la sezione 6.1 e i Capp. 3 e 5). I primi (dai quali derivano i fatti (a)-(d) presentati nel paragrafo 6.4.4.1) mostrano che i GAOD (e dunque le coppie di ambiguità) non possono essere eliminati attraverso una scelta delle frequenze di test (qualunque sia il loro numero o il loro valore), ma solo attraverso una giudiziosa selezione dei punti di iniezione e misura, scopo per il quale software efficienti per l'analisi di testabilità quali quelli presentati nei Capitoli 3 e 5 possono vantaggiosamente essere impiegati come guida.

Per esemplificare tale ultimo punto, si ritorni al circuito di [2, Fig. 4] e si supponga di mantenere l'ingresso convenzionale del sistema quale unico punto di iniezione. Si osservi poi che i medesimi argomenti che hanno consentito di rimpiazzare il circuito in questione con quello in Fig. 6.4(c) consentono di concludere che i GAOD individuati non possono essere eliminati se non considerando punti di misura interni ai sottocircuiti oggetto di sostituzione (vale a dire, il due-porte di Fig. 6.4(a) e la serie $R_9 - R_{11}$ nel circuito originario di [2, Fig. 4]). Sulla base di tale osservazione, con l'ausilio di uno dei summenzionati software per l'analisi di testabilità si trova che, scegliendo l'insieme dei punti di misura $\{v_{out}, v_2, i_7, i_8, i_9\}$ (ove, con riferimento al circuito originario di [2, Fig. 4], per k = 7, 8, 9, i_k indica la corrente attraverso il resistore R_k , v_{out} rappresenta la tensione di uscita nel circuito originario e v_2 rappresenta la tensione sull'uscita del secondo AO), i GAOD (e dunque le coppie di ambiguità) sono completamente eliminati, in tal modo rendendo soddisfatte le condizioni necessarie per la diagnosi univoca del singolo guasto.

Il caso testé studiato costituisce un esempio emblematico dell'importanza dell'analisi di testabilità quale passo preliminare al progetto di qualsivoglia strategia per la diagnosi di guasto: difatti, un'analisi di testabilità poco accurata o, addirittura, omessa può condurre a metodi diagnostici di scarsa efficacia.

Bibliografia

1. Balato M, Costanzo L, Vitelli M. "Identification of the parameters of the equivalent electric circuit of electromagnetic harvesters," *Int. Conf. Renewable Energy Research and Applications (ICRERA).* 2015; 1641-1645.

2. C. Yang, J. Yang, Z. Liu and S. Tian, "Complex Field Fault Modeling-Based Optimal Frequency Selection in Linear Analog Circuit Fault Diagnosis," *IEEE Transacctions on Instrumentation and Measurement*, vol. 63, no. 4, pp. 813-825, Apr. 2014.

3. H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Princeton, NJ: Van Nostrand, 1945.

4. G. Fontana, A. Luchetta, S. Manetti, and M. C. Piccirilli, "An unconditionally sound algorithm for testability analysis in linear time-invariant electrical networks," *International Journal of Circuit Theory and Appications*, vol. 44, no. 6, pp. 1308-1340, Jun. 2016.

5. G. Fontana, A. Luchetta, S. Manetti, and M. C. Piccirilli, "A Fast Algorithm for Testability Analysis in Large Linear Time Invariant Networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, vol. 64, no. 6, pp. 1564-1575, June 2017.

6. Chua L O, Desoer C A, Kuh E S. *Linear and Nonlinear Circuits*. McGraw-Hill, New York, 1987, p. 697.

7. G. Fontana, F. Grasso, A. Luchetta, S. Manetti, M. C. Piccirilli and A. Reatti, "A new simulation program for analog circuits using symbolic analysis techniques," presented at the 2015 Int. Conf. Synthesis Modeling Anal. Simulation Methods App. Circ. Design (SMACD), Istanbul, 2015, pp 1-4.

Capitolo 7

Un teorema di sostituzione generalizzato e alcune sue ripercussioni sulla Teoria e sull'Analisi dei Circuiti Analogici

Il Teorema di Sostituzione (TS) è comunemente considerato alla stregua di una mera curiosità teorica. In questo capitolo, in primo luogo, si sottopone ad approfondita revisione un TS Generalizzato (TSG) derivato precedentemente, il che conduce a un TSG Rivisto (TSGR) Debole e a un TSGR Forte (caratterizzato da ipotesi notevolmente meno stringenti rispetto all'originario TSG). Si mostra poi come, a dispetto della opinione comune riguardo al TS, detti TSGR possano essere impiegati quali potenti strumenti analitici al fine di generalizzare, perfezionare e dimostrare rigorosamente diversi classici risultati in Teoria dei Circuiti, quali: il Teorema di Sostituzione per Circuiti Multiterminali (TSCM), il Teorema di Shift dei Generatori (TSG), il Teorema di Thévenin-Norton (TTN), il Teorema di Miller (TM) assieme al suo Duale (TMD) e il Principio di Aumento (PA). Più specificamente, il TSCM è esteso a una batteria arbitraria di generatori con e senza l'uso di nullori. Il TSG è derivato rigorosamente per altra via e possibili ambiguità sono rimosse. Inoltre, tutte le possibili forme ibride del TTN per multiporti sono individuate e precise procedure operative per il calcolo delle entità ad esse pertinenti sono fornite per tutti i casi. Ancora, il TM e il TMD sono estesi a un numero qualsivoglia di variabili elettriche e a multiporti, con e senza l'uso di nullori. Quanto al PA, il vincolo concernente la linearità dei resistori additivi è rimosso. Si forniscono, infine, vari esempi che mostrano come le summenzionate notevoli conseguenze dei TSGR possano essere impiegate come strumenti efficienti atti all'analisi intuitiva per ispezione diretta di circuiti lineari e non lineari. Fra le altre cose, si derivano procedure generali e sistematiche atte a un approccio "carta e matita" per il calcolo del punto di lavoro e di caratteristiche di trasferimento (o, anche, ai terminali di bipolo) per circuiti non lineari e le si applicano a reti di considerevole complessità topologica.¹

7.1 Introduzione

7.2 Questioni preliminari

- 7.2.1 Multipoli, multiporti e circuiti
- 7.2.2 Digrafo ed equazioni costitutive di un *M*-polo
- 7.2.3 Digrafo ed equazioni costitutive di un Nporto
- 7.2.4 Multiporti lecitamente connessi, assolutamente lecitamente connettibili e ben definiti
- 7.2.5 Digrafi isomorfi, digrafi identici, multiporti isomorfi
- 7.2.6 Digrafo del circuito
- 7.2.7 Circuiti risolvibili, soluzioni globali di un circuito, circuiti globalmente univocamente

¹ Questo capitolo è stato pubblicato in G. Fontana, "Revisited Generalized Substitution Theorem and its consequences for circuit analysis," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 45, no.9, pp. 1249–1298, Sep. 2017.

risolvibili, circuiti univocamente risolvibili rispetto a un sottovettore, soluzione unica di un circuito rispetto a un sottovettore

7.2.8 Circuiti globalmente equivalenti, circuiti equivalenti rispetto a un insieme di elementi

7.3 Teorema di sostituzione generalizzato rivisto

- 7.3.1 Teorema di Sostituzione Generalizzato Rivisto Debole
- 7.3.2 Teorema di Sostituzione Generalizzato Rivisto Forte

7.4 Estensioni del Teorema di Sostituzione basato su batteria di generatori

- 7.4.1 Estensione del Teorema di Sostituzione basato su batteria di generatori: versione senza nullori (Teorema 7.4.1)
- 7.4.2 Commenti
- 7.4.3 Estensione del Teorema di Sostituzione basato su batteria di generatori: versione con nullori (Teorema 7.4.2)
- 7.4.4 Commenti
- 7.5 Nuova derivazione dei teoremi di shift dei generatori

7.5.1	Teorema di shift del generatore di tensione: caso di insieme di taglio (Teorema 7.5.1)
7.5.2	Teorema di shift del generatore di tensione: caso nodale (Teorema 7.5.2)
7.5.3	Teorema di shift del generatore di corrente (Teorema 7.5.3)
7.5.4	Commenti
7.6 T go	eoremi di Thévenin-Norton eneralizzati
7.6.1	Teorema di Thevénin-Norton generalizzato: versione senza nullori (Teorema 7.6.1)
7.6.2	Commenti
7.6.3	Teorema di Thevénin-Norton generalizzato: versione con nullori (Teorema 7.6.2)
7.6.4	Commenti
7.7 Teoremi di Miller generalizzati	
7.7.1	Teorema di Miller per tensioni multiple (Teorema 7.7.1)
7.7.2	Teorema Duale di Miller per correnti multiple: caso dell'insieme di taglio (Teorema 7.7.2)

7.7.3 Teorema Duale di Miller per correnti multiple: caso nodale (Teorema 7.7.3)

- 7.7.4 Teorema di Miller generalizzato per multiporti: versione senza nullori (Teorema 7.7.4)
- 7.7.5 Teorema di Miller generalizzato per multiporti: versione con nullori (Teorema 7.7.5)
- 7.7.6 Commenti
- 7.8 Generalizzazione del Principio di Aumento
 - 7.8.1 Principio di Aumento generalizzato (Teorema 7.8.1)
 - 7.8.2 Commenti

7.9 Applicazioni ed esempi

- 7.9.1 Estensioni del TS basato su batteria di generatori come strumento per il calcolo del punto di lavoro in circuiti a singolo transistore
- 7.9.2 Estensioni del TS basato su batteria di generatori come strumento per il calcolo del punto di lavoro in un circuito contenente due JFET
- 7.9.3 Estensioni del TS basato su batteria di generatori come strumento per il calcolo della caratteristica ingresso-uscita di un raddrizzatore a doppia semionda

7.9.4 Un esempio di applicazione del Teorema 7.7.2 (Teorema duale di Miller generalizzato al caso di correnti multiple)

7.9.5 Un esempio di applicazione del Teorema 7.6.3 (versione con nullori del Teorema di Thevénin-Norton generalizzato)

7.1 Introduzione

Detto alla buona, il Teorema di Sostituzione (TS) nella sua formulazione più comunemente nota (si vedano ad esempio ([1]-[5]) afferma che in un circuito un bipolo caratterizzato da una corrente i e da una caduta di tensione v può essere rimpiazzato con un generatore ideale di tensione v o con un generatore ideale di corrente i senza alterare la soluzione del circuito in questione.

Un enunciato più rigoroso, che tiene conto della necessità che il circuito risulti univocamente risolubile sia prima che dopo la sostituzione, è dato in [6] e ivi esteso in modo naturale a una rete a più terminali affermando che quest'ultimo può essere rimpiazzato da un insieme *omogeneo* di generatori di tensione [corrente] rispettivamente uguali alle tensioni [correnti] di terminale. Una versione che impiega un insieme di generatori non necessariamente della stessa natura è proposta in [7, 8], ove si enfatizza il ruolo cruciale rivestito dal TS nella derivazione sistematica delle equazioni di stato di circuiti lineari tempo-invarianti: tali lavori, comunque, si focalizzano sulla derivazione di condizioni rigorose sotto le quali le ipotesi del TS sono soddisfatte, piuttosto che sulla formulazione e dimostrazione del teorema stesso.

Tornando al caso di bipolo, in alcune versioni la natura dell'elemento da rimpiazzare è limitata a una pura impedenza [4, 5]; in altre l'elemento rimpiazzante coincide con la serie di un generatore di tensione e un resistore (come in [9, 10]) o con un generatore controllato (come in [11]) o anche con un ramo di natura generica (come in [12, 13]. Tuttavia tali versioni sono enunciate e dimostrate in modo piuttosto vago, sorvolando sulla necessità dell'ipotesi di univoca risolvibilità; inoltre, salvo alcune eccezioni [7, 8], il TS è generalmente riguardato come una mera curiosità teorica con scarse applicazioni pratiche.

Al contrario, sarebbe di notevole interesse stabilire chiaramente che l'elemento rimpiazzante (di un bipolo comunque complicato) potrebbe altresì essere rappresentato da un'impedenza peculiare, quale l'*impedenza istantanea* introdotta in [14] quale generalizzazione del concetto di impedenza ordinaria, utile nei casi in cui quest'ultimo non possa applicarsi in pratica, a causa dell'impossibilità di disattivare il generatore e/o disconnettere il carico, come accade in [15]: una tale estensione, infatti, corroborerebbe l'importanza pratica del TS, già evidenziata in [7, 8].

Di recente, un TS Generalizzato (TSG) per multiporti è stato descritto in [16] e ivi impiegato per derivare agevolmente alcuni risultati utili per l'analisi dei circuiti reazionati. In tale TSG non si pone alcuna restrizione, quanto al numero di porte o alla struttura interna, sia dell'elemento rimpiazzante che di quello rimpiazzato e la condizione di univoca risolvibilità, sia prima che dopo la sostituzione (necessaria per la rigorosa validità del teorema stesso), è opportunamente tenuta in conto. Nondimeno, si può osservare che nel teorema in questione l'ipotesi di univoca risolvibilità può essere indebolita e l'enunciato, nel suo complesso, dato in maniera, al contempo, più rigorosa e più conveniente.

In accordo con quanto testé osservato, in questo capitolo il primo obiettivo è un'accurata revisione del summenzionato TSG. Si mostra, in particolare, che la tesi originaria può essere convenientemente divisa in due parti, delle quali la seconda esprime una condizione più stringente della prima e valida sotto un'ipotesi aggiuntiva, che è, a sua volta, meno stringente e di più facile verifica nelle applicazioni di quanto non lo sia la sua controparte nella versione data in [16]: ciò conduce a un TSG Revisionato (TSGR) Forte e, in aggiunta, a un TSGR Debole. A differenza del TSG che riveste in [16] un ruolo estrinsecamente ausiliario nella derivazione di risultati concernenti l'analisi dei circuiti reazionati, qui questi TSGR giocano un ruolo centrale, sia dal punto di vista teorico che dal punto di vista pratico, per lo studio dei circuiti sia lineari che non lineari, indipendentemente dal fatto che essi siano reazionati o meno. Sul piano teorico, si mostra qui come i TSGR siano strumenti potenti atti a riottenere, generalizzare e perfezionare alcuni risultati classici della Teoria dei Circuiti, quali: (a) il TS convenzionale, (b) il Teorema dello shift del generatore, (c) il Teorema di Thévenin-Norton, (d) il Teorema di Miller assieme al suo duale e (e) il Principio di Aumento.

Più in particolare, per mezzo del TSGR Forte, il TS descritto in [6] è esteso a qualsivoglia multiporto *lecitamente connesso*² (le cui porte non abbiano necessariamente terminali a comune) impiegando un insieme di generatori non necessariamente della medesima natura ed, eventualmente, nullori. E' subito visto, inoltre, che tutte le summenzionate varianti del TS per bipoli possono essere derivate a partire dal TSGR Forte quali casi particolari e automaticamente completate (quando necessario) con le ipotesi riguardanti l'univoca risolvibilità. Sono, inoltre, nuovamente derivati i Teoremi di Shift dei generatori come conseguenze dirette del TSGR Debole e possibili ambiguità [17] relative al concetto di equivalenza sono agevolmente rimosse.

Quanto al Teorema di Thévenin-Norton, esso è stato dimostrato e generalizzato in molti modi (si vedano, ad esempio, [18]-[24] e, per un interessante breve storia del teorema, [25]); in particolare, in [23] si propone e dimostra rigorosamente una versione per multiporti. Tuttavia la dimostrazione richiede un'algebra matriciale notevolmente complicata e il significato operativo delle entità in gioco può non risultare di immediata interpretazione. Invece, attraverso il TSGR Debole, la derivazione è del tutto agevole e le varie quantità menzionate nell'enunciato sono dotate di una interpretazione circuitale di immediata applicazione pratica.

² Il senso di tale locuzione sarà chiarito nel seguito.

Si mostra, inoltre, come il TSGR Forte consenta di ottenere generalizzazioni a un arbitrario numero di tensioni o correnti coinvolte (compreso il caso in cui queste ultime costituiscano un insieme di taglio), come pure a multiporti, del Teorema di Miller e del suo Duale [26]. Al contempo, le versioni convenzionali sono automaticamente riottenute e dimostrate in modo semplice ma rigoroso, con derivazione forse anche più diretta che in [27]. In aggiunta, si sottolinea come l'ipotesi di univoca risolvibilità del circuito trasformato sia necessaria per la rigorosa validità del teorema e si indicano le condizioni sotto le quali i teoremi in questione possano applicarsi con vantaggio nella pratica. Ancora impiegando il TSGR Forte, il Principio di Aumento [28] è generalizzato a resistori non lineari e corredato della necessaria ipotesi aggiuntiva concernente la univoca risolvibilità.

Sul piano più immediatamente applicativo, si mostra come le summenzionate conseguenze dei TSGR possano essere impiegate al fine di effettuare l'analisi per ispezione diretta di circuiti lineari e non lineari di notevole complessità. In particolare, si deriva una procedura "carta e matita" intuitiva e, al contempo, rigorosa e sistematica per il calcolo del punto di riposo in circuiti a transistori con topologia considerevolmente più complessa rispetto a quella dei circuiti standard comunemente considerati nei testi. Si deriva, inoltre, una procedura altrettanto intuitiva e rigorosa per il calcolo "carta e matita" di caratteristiche ingresso-uscita (o ai terminali di bipolo) per circuiti contenenti elementi non lineari dotati di equazioni costitutive lineari a tratti.

Il resto del presente capitolo è organizzato come segue. La Sezione 2 è dedicata all'introduzione di concetti e definizioni preliminari. Nella Sezione 3 si enunciano e si dimostrano il TSGR Debole e il TSGR Forte. Nelle successive sezioni dalla 4 alla 8 i TSGR sono impiegati per generalizzare, rendere rigorosi e derivare nuovamente i summenzionati risultati classici della Teoria dei Circuiti. Specificamente, la Sezione 4 presenta due TS per multiporti basati su una batteria di generatori (con e senza l'impiego di nullori, rispettivamente). La Sezione 5 è dedicata a derivare nuovamente il Teorema di Shift dei generatori di corrente e due diverse versioni del Teorema di Shift dei generatori di tensioni. La Sezione 6 è riservata a due generalizzazioni del Teorema di Thévenin-Norton (con e senza l'impiego di nullori, rispettivamente). Nella Sezione 7 si presentano estensioni del Teorema di Miller e del suo Duale al caso di tensioni e correnti multiple, come pure a multiporti (in quest'ultimo caso, con e senza l'impiego di nullori, rispettivamente). Invece nella Sezione 8 si generalizza il Principio di Aumento. Nella Sezione 9 si forniscono vari esempi di applicazione dei risultati summenzionati, e in particolare: nei Paragrafi 9.1 e 9.2 si evidenzia la notevole importanza applicativa dei TS per multiporti ottenuti, mostrando come possano essere impiegati per affrontare il problema del calcolo intuitivo "carta e matita" del punto di lavoro di circuiti a transistori caratterizzati da topologia di considerevole complessità; nel Paragrafo 9.3 uno dei summenzionati TS per multiporti è impiegato per derivare la caratteristica ingresso-uscita di un ben noto raddrizzatore a doppia semionda; nel Paragrafo 9.4, la ottenuta generalizzazione del Teorema Duale di Miller è utilizzata per risolvere, ancora con un approccio "carta e matita", un circuito lineare; infine, nel Paragrafo 9.5 una forma particolare del Teorema di Thévenin-Norton generalizzato derivato nella Sezione 6 è applicato per uno scopo analogo.

7.2 Questioni preliminari

In questa sezione si metteranno a punto alcuni concetti e definizioni preliminari cui sarà fatto frequente riferimento nel seguito. Quale premessa di carattere generale, la presente trattazione si penserà inquadrata in un dominio generico, nel quale l'equilibrio elettrico può essere rappresentato da relazioni *algebriche*: può trattarsi del dominio del tempo (e allora il circuito allo studio è, giocoforza, puramente resistivo) o del dominio dei fasori o, ancora, del dominio di Laplace (casi nei quali il circuito deve essere necessariamente lineare e tempo-invariante).

7.2.1 Multipoli, multiporti e circuiti

Si prenderanno in considerazione circuiti che originino dalla interconnessione di elementi che possono essere multipoli o multiporti. Per fissare le idee, si assumerà che in un dato circuito ogni elemento sia etichettato con un intero che lo individui univocamente. Inoltre, l'*h*-esimo terminale dell'*M*-polo \mathcal{M} (h=1,2,...,M) etichettato *m* sarà designato con $t_h^{(m)}$, come mostrato in Fig. 7.1(a). Si osservi che, in linea di principio, 2*M* correnti $i_{t_h^{(m)}}$ (h=1,2,...,M) (due per ciascun terminale, a seconda del verso scelto) e M(M-1) tensioni $v_{t_h^{(m)}t_k^{(m)}}$ ($h,k=1,2,...,M; h\neq k$)(due per ogni coppia di terminali, a seconda della polarità scelta) possono essere prese in considerazione in relazione a \mathcal{M} .

Inoltre, la *k*-esima porta di un multiporto \mathcal{N} etichettato *n* sarà individuata da una coppia ordinata di terminali $(a_k^{(n)}, b_k^{(n)})$: con riferimento alla Fig. 7.1(b), si indicheranno con $v_k^{(n)}$ e $i_k^{(n)}$, rispettivamente, la tensione e la corrente a essa pertinenti e si assumerà, per convenzione, che al primo terminale $a_k^{(n)}$ sia attribuito il riferimento positivo per $v_k^{(n)}$, cosicché quello negativo rimane associato a $b_k^{(n)}$. Quanto a $i_k^{(n)}$, si assumerà, per definizione, che essa coincida

(in valore e verso) con quella di un generatore di corrente ideale $i_k^{(n)}$ connesso fra $a_k^{(n)}$ e $b_k^{(n)}$ e orientato dal secondo al primo. Si osservi che quando alcuni terminali coincidono in uno solo (diversamente da quanto accade nella rappresentazione concettuale di Fig. 7.1(b)), la corrente che fluisce nel filo avente tale terminale come estremo non eguaglia alcuna corrente di porta. Si osservi altresì che, adottando la summenzionata convenzione, è sufficiente assegnare, per ciascuna porta, la coppia ordinata dei suoi terminali: le direzioni di riferimento e le designazioni delle variabili di porta, restando univocamente individuate, possono essere omesse, e così si farà nel seguito.

Si osservi, infine, che un circuito rimane univocamente individuato dai suoi elementi e dal modo in cui essi sono interconnessi, per mezzo della legge che associa ogni nodo del circuito all'insieme di quei terminali che, come conseguenza del loro mutuo collegamento, coincidono nel nodo in questione.

7.2.2 Digrafo ed equazioni costitutive di un M-polo

Sia \mathcal{M} un M-polo etichettato m, di modo che i suoi terminali siano individuati come $t_1^{(m)}, t_2^{(m)}, ..., t_M^{(m)}$. Si definirà *digrafo* di \mathcal{M} ogni albero orientato $\mathcal{G}^{(m)}$ i cui vertici coincidano con $t_1^{(m)}, t_2^{(m)}, ..., t_M^{(m)}$ e i cui lati $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{M-1}$ siano orientati in qualche modo.

Per j=1,2,...,M-1, si attribuisca a λ_j una orientazione e un'etichetta $j^{(m)}$ assieme alle variabili elettriche (VE) $v_j^{(m)} e i_j^{(m)}$ dotate di riferimenti associati, in modo tale che la direzione di riferimento della corrente coincida con l'orientazione di λ_j e, se quest'ultimo è orientato da $t_j^{(m)}$ a $t_k^{(m)}$, il segno "+" pertinente a $v_j^{(m)}$ sia attribuito a $t_j^{(m)}$ e il segno "-" sia attribuito a $t_k^{(m)}$. Dalla definizione stessa segue che un *M*-polo ammette diversi digrafi: in Fig. 7.1(d) è mostrato, a titolo di esempio, un possibile digrafo per il 5-polo di Fig. 7.1(c). Si osservi che, sempre come conseguenza della definizione, si deduce che tanto il nome delle VE che i rispettivi riferimenti sono univocamente individuati dalla orientazione di λ_j e dall'etichetta di quest'ultimo, $j^{(m)}$, e possono essere omessi: tale notazione semplificata è, appunto, impiegata nella costruzione del digrafo alternativo mostrato in Fig. 7.1(e).

Si raccolgano, ora, le summenzionate VE in un vettore $\boldsymbol{w}^{(m)} = \left[row \left[v_j^{(m)} \right]_{j=1}^{M-1} row \left[i_j^{(m)} \right]_{j=1}^{M-1} \right]^T = \left[\boldsymbol{v}^{(m)T} \, \boldsymbol{i}^{(m)T} \right]^T$. Si osservi che gli elementi di $\boldsymbol{w}^{(m)}$ (vale a dire le VE associate con un digrafo di \mathcal{M}) sono concettualmente



Fig. 7.1 - (a) Un *M*-polo \mathcal{M} etichettato *m*, con i suoi terminali e con indicate alcune VE ad essi competenti, (b) un *N*-porto \mathcal{N} etichettato *n* con i terminali di porta e le VE munite dei convenzionali rispettivi riferimenti associati, (c) un 5-polo con alcune tensioni e correnti di terminale, (d) un possibile digrafo per il 5-polo in (c), (e) un digrafo alternativo a quello in (d) con notazioni semplificate di lato, (f) un 6-porto ottenuto da un 9-polo, (g) il digrafo del 6-porto in (f), (h) versione semplificata di (g), (i) una rete generica \mathcal{R} con 2N nodi posti in evidenza, e (j) il collegamento di \mathcal{N} con \mathcal{R} produce la rete $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$.

distinti dalle variabili $\{i_{t_h^{(m)}}\}_{h=1}^{M}$ e $\{v_{t_h^{(m)}t_k^{(m)}}\}_{h,k=1}^{M;h\neq K}$ menzionate nel Paragrafo 7.2.1 (vale a dire le VE associate ai terminali di \mathcal{M}). E' subito visto, tuttavia, che tutte le $i_{t_h^{(m)}}$ e $v_{t_h^{(m)}t_k^{(m)}}$ possono essere espresse univocamente in termini degli elementi di $w^{(m)}$ per mezzo delle leggi di Kirchhoff: ne segue che la conoscenza del valore delle VE associate a un qualsiasi digrafo di \mathcal{M} consente di risalire senza ambiguità alle VE competenti a \mathcal{M} stesso; ad esempio, con riferimento alle Fig. 7.1(c) e Fig. 7.1(d) si trova $i_{l_1^{(m)}} = -i_1^{(m)} + i_4^{(m)} - i_2^{(m)}$ e $v_{l_5^{(m)}l_2^{(m)}} = -v_4^{(m)} - v_2^{(m)}$.

Per le ragioni sopra esposte, si può assumere che il comportamento di M sia completamente caratterizzato per mezzo di un sistema di M –1 equazioni

$$\left\langle f_{j}^{(m)}\left(\boldsymbol{w}^{(m)}\right)=\boldsymbol{\theta}\right\rangle _{j=1}^{M-1}$$
(7.1)

che possono essere denominate le *equazioni costitutive di* \mathcal{M} rispetto a $\mathcal{G}^{(m)}$. Si osservi che tale assunzione è consistente, perché le equazioni costitutive relative a digrafi diversi forniscono descrizioni equivalenti di \mathcal{M} . Difatti, il vettore $w^{(m)'}$ delle VE relativo a un digrafo alternativo $\mathcal{G}^{(m)'}$ è legato a $w^{(m)}$ da un'equazione del tipo $w^{(m)'} = \mathcal{T} w^{(m)}$, ove \mathcal{T} è una matrice invertibile che può essere identificata applicando, ancora, le leggi di Kirchhoff: ne segue che le equazioni costitutive di \mathcal{M} rispetto a $\mathcal{G}^{(m)'}$ possono essere univocamente dedotte dalla (7.1) ponendovi $w^{(m)} = \mathcal{T}^{-1}w^{(m)'}$ e viceversa. Queste considerazioni mostrano che il digrafo di un multipolo può essere scelto arbitrariamente; nondimeno, come può mostrarsi, il sistema (7.1) deve necessariamente consistere di \mathcal{M} -1 equazioni, se si desidera che, per l'intero sistema delle equazioni di equilibrio della rete, il numero di queste ultime eguagli quello delle incognite, condizione che sarà d'ora innanzi assunta vera.

7.2.3 Digrafo ed equazioni costitutive di un N-porto

Si consideri, ora, un generico *N*-porto \mathcal{N} etichettato *n* e, per k = 1, 2, ..., N, sia $\pi_k^{(n)}$ la *k*-esima porta, individuata dalla coppia *ordinata* di terminali $\left(a_k^{(n)}, b_k^{(n)}\right)$ e munita delle VE $v_k^{(n)}, i_k^{(n)}$; sia, inoltre, $\Pi = \left\{\pi_k^{(n)}\right\}_{k=1}^N$ l'insieme delle porte di \mathcal{N} e si consideri la partizione $\left\langle \prod_j \right\rangle_{j=1}^{n_{\Pi}}$ di Π definita come segue: per $j=1,2,...,n_{\Pi}, \Pi_j = \left\{\pi_{j_q}^{(n)}\right\}_{q=1}^{N_j}$ è individuato come il più grande sottoinsieme di Π tale che, per ogni $\pi_{j_p}^{(n)} \in \Pi_j$, esista almeno una $\pi_{j_h}^{(n)} \in \Pi_j$ (eventualmente coincidente con la sola $\pi_{j_p}^{(n)}$) che abbia qualche terminale a comune con $\pi_{j_p}^{(n)}$. Si consideri, ad esempio, Il 6-porte \mathcal{N} mostrato in Fig. 7.1(f), ottenuto a partire da un 9-polo \mathcal{M} : per tale \mathcal{N} si ha ovviamente $\Pi = \left\{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_6\right\}$. Per ispezione

si trova allora $n_{\Pi} = 3$ e quindi, nella fattispecie, la summenzionata partizione di Π è $\langle \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \rangle$, con $\Pi_1 = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}, \Pi_2 = \{\pi_4\}, \Pi_3 = \{\pi_5, \pi_6\}.$

Si definirà poi *digrafo* $G^{(n)}$ di \mathcal{N} , l'unione $\bigcup_{j=1}^{n_{\pi}} G_{j}^{(m)}$, ove - per $j=1,2,...,n_{\Pi}$ - il digrafo $G_{j}^{(m)}$ è ottenuto al modo seguente: (1) per $i=1,2,...,N_{j}$, si assegni alla porta $\pi_{j_{i}}^{(n)} \in \Pi_{j}$ (avente terminali $a_{j_{i}}^{(n)}$ e $b_{j_{i}}^{(n)}$ e VE $v_{j_{i}}^{(n)}$ e $i_{j_{i}}^{(n)}$) un lato λ_{i} avente vertici $a_{j_{i}}^{(n)}$ e $b_{j_{i}}^{(n)}$ e orientato dal primo al secondo; (2) si attribuiscano a λ_{i} VE $v_{j_{i}}^{(n)}$ e $i_{j_{i}}^{(n)}$ in modo tale che la direzione di riferimento della corrente $i_{j_{i}}^{(n)}$ coincida con l'orientamento di λ_{i} e ad $a_{j_{i}}^{(n)}$ e $b_{j_{i}}^{(n)}$ siano assegnati, rispettivamente, i segni + e – pertinenti a $v_{j_{i}}^{(n)}$ e (3) si facciano coincidere quei vertici che corrispondono a terminali coincidenti in Π_{j} . A titolo di esempio, in Fig. 7.1(g) si mostra il digrafo del 6-porte di Fig. 7.1(f).

Si osservi che – al contrario di quanto accade per un multipolo – il digrafo di un *N*-porto è univocamente determinato dai suoi terminali $\{(a_k^{(n)}, b_k^{(n)})\}_{k=1}^N$ dalle rispettive mutue connessioni. Tenendo conto della summenzionata convenzione riguardante i riferimenti per le VE di porta, si vede che il digrafo di un *N*-porto può essere descritto in modo univoco assegnando, per k = 1, 2, ..., N, l'orientamento del *k*-esimo lato e attribuendo a quest'ultimo un'etichetta $k^{(n)}$, come nell'esempio mostrato in Fig. 7.1(h), che si riferisce all' *N*-porto di Fig. 7.1(f): tale tipo di rappresentazione sarà adottata nel seguito.

Ora, sia $\mathbf{w}^{(n)} = \left[row \left[v_k^{(n)} \right]_{k=1}^N row \left[i_k^{(n)} \right]_{k=1}^N \right]^T$, di modo che l'intero vettore \mathbf{w} delle

VE pertinenti al digrafo della rete di cui \mathcal{N} fa parte possa essere rappresentato come $\mathbf{w} = \left[\mathbf{w}^{(n)T} \ \mathbf{w}_{res}^{T}\right]^{T}$. Come d'uso in Teoria dei Circuiti, si assumerà che, in ogni caso, il comportamento di \mathcal{N} sia completamente caratterizzato da un sistema di N equazioni $\left\langle f_{j}^{(n)}(\mathbf{w})=0\right\rangle_{j=1}^{N}$: ciò, come può mostrarsi, è in effetti necessario affinché, per l'intera rete, il numero di equazioni eguagli quello delle incognite, condizione che sarà tacitamente assunta vera d'ora innanzi. Il summenzionato sistema di equazioni può convenientemente riscriversi in forma vettoriale come

$$\boldsymbol{f}^{(n)}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0} \tag{7.2}$$

Nel seguito si limiterà in modo opportuno l'argomento della funzione vettoriale al primo membro della (7.2).

7.2.4 Multiporti lecitamente connessi, multiporti assolutamente lecitamente connettibili e multiporti ben definiti

Sia ora \mathcal{R} una rete ed $\mathcal{L} = \{k, k'\}_{k=1}^{N}$ un insieme di 2N nodi di \mathcal{R} , come simbolicamente rappresentato in Fig. 7.1(i). Sia $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$ la rete ottenuta collegando $\mathcal{R} \in \mathcal{N}$ in modo che – per $k = 1, 2, \dots, N - a_k^{(n)}$ coincida con il nodo $k \in b_k^{(n)}$ coincida con il nodo k' come mostrato in Fig. 7.1(j). Si dirà che \mathcal{N} è *lecitamente conesso (LC)* in $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$ se e solo se, per $j=1,2,...,n_{\Pi}$, i terminali dei membri di Π_j (definito nel paragrafo precedente) costituiscono un insieme di taglio in $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$.

A titolo di esempio, si consideri il circuito $\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{N}$ mostrato in Fig. 7.2(a), ove \mathcal{N} è il 6-porto già considerato in Fig. 7.1(f). Si può verificare per ispezione che (nonostante il generatore controllato e l'accoppiamento magnetico indicati) \mathcal{N} è LC in $\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{N}$: difatti, è subito visto che - per j = 1, 2, 3 - i terminali pertinenti a Π_j costituiscono un insieme di taglio e quindi la definizione data più sopra è soddisfatta. Invece, lo stesso \mathcal{N} non è LC nel circuito $\mathcal{R}_2 \oplus \mathcal{N}$ mostrato in Fig. 7.2(b): difatti, si vede immediatamente (ad esempio) che i terminali pertinenti a $\Pi_2 = \{\pi_4\}$ non costituiscono un insieme di taglio in $\mathcal{R}_2 \oplus \mathcal{N}$.

E' importante sottolineare che è corretto impiegare la (7.2) per esprimere l'equilibrio elettrico di $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$ se e solo se \mathcal{N} è LC in $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$. Difatti, se tale condizione non è soddisfatta, impiegare la (7.2) conduce a soluzioni che risultano incongruenti con $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$ e coincidono, piuttosto, con le effettive soluzioni di ogni rete $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}_{sc}$ in cui \mathcal{N}_{sc} è un *N*-porto LC con le medesime equazioni costitutive di \mathcal{N} : tale fatto può essere mostrato con l'esempio seguente. Si consideri il 2-porto \mathcal{N} (di cui si omette per semplicità l'etichetta) rappresentato in Fig. 7.2(c), il quale ha equazione costitutive:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_1 + 1/(R+R_3) & 1/(R+R_3) \\ 1/(R+R_3) & 1/R_1 + 1/(R+R_3) \end{bmatrix}$$
(7.3)



Fig. 7.2 - (a) Un circuito $\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{N}$ nel quale il 6-porto \mathcal{N} è LC, (b) un circuito $\mathcal{R}_2 \oplus \mathcal{N}$ nel quale lo stesso 6-porto \mathcal{N} non è LC, (c) un 2-porto \mathcal{N} , (d) lo stesso 2-porto \mathcal{N} inserito nel circuito $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$, nel quale il primo non è LC ed (e) lo stesso circuito di (d) ma con \mathcal{N} rimpiazzato con un 2-porto \mathcal{N}_{SC} LC caratterizzato dalle medesime equazioni costitutive del primo.

Si consideri ora il circuito $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$ mostrato in Fig. 7.2(d). Se si cerca di esprimere l'equilibrio elettrico di $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$ impiegando la (7.3), si devono considerare, accanto a quest'ultima, le seguenti equazioni caratterizzanti \mathcal{R}

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/R_E & -1/R_E \\ -1/R_E & -1/R_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E/R_E \\ E/R_E \end{bmatrix}$$
(7.4)

Se si scelgono i valori $R_1 = R_2 = 0.5 \Omega$, $R = 0.25 \Omega$, $R_3 = 0.75 \Omega$, $R_E = 0.25 \Omega$, E = 3V, allora, dal confronto fra (7.3) e (7.4) seguirebbe

$$v_1 = v_2 = 1V, i_1 = i_2 = 4A \tag{7.5}$$

Come si verifica facilmente, le (7.5) non sono consistenti con la soluzione che si otterrebbe ignorando \mathcal{R} ed \mathcal{N} e analizzando $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$ in modo convenzionale come un tutt'uno, cosa che invece fornirebbe

$$v_1 = v_2 \approx 1.33 V, i_1 \approx 6.66 A, i_2 \approx 1.33 A$$
 (7.6)

Invece le (7.5) sono congruenti con le soluzioni della rete $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}_{sc}$ ottenuta da $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$ rimpiazzando \mathcal{N} con un qualunque *N*-porto \mathcal{N}_{SC} avente le medesime equazioni costitutive di \mathcal{N} ma che risulti LC in $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}_{sc}$, quale l' \mathcal{N}_{SC} mostrato in Fig. 7.2(e).

Si dirà, inoltre, che \mathcal{N} è *assolutamente lecitamente connettibile* (*ALC*) se e solo se \mathcal{N} è LC in $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$ per qualunque \mathcal{R} . Vi sono casi notevoli in cui tale condizione è soddisfatta. Ad esempio, con riferimento alle notazioni introdotte nei paragrafi precedenti, ogni \mathcal{N} per il quale si abbia $n_{\Pi} = 1$ (e, dunque, $\Pi \equiv \Pi_1$) è ALC, perché in tale eventualità la definizione di "lecita connessione" è certamente soddisfatta indipendentemente da \mathcal{R} . Un sottocaso particolare è rappresentato da un bipolo, che è evidentemente ALC; per ragioni analoghe, un *N*-porto \mathcal{N} composto da una batteria di *N* bipoli *topologicamente* disgiunti è, a sua volta, ALC; si osservi, inoltre, che un *M* +1-polo può essere riguardato come un *M*-porto.

Infine, si dirà che \mathcal{N} è *ben definito* (*BD*) in $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$ se e solo se (i) il vettore di funzioni $f^{(n)}(\cdot)$ al primo membro della (7.2) non dipende, in realtà, dal sottovettore w_{res} di $w = [w^{(n)T} w_{res}^T]^T$ menzionato nel paragrafo precedente: in altri termini $f^{(n)}(\cdot)$ dipende solo da $w^{(n)}$, cosicché la (7.2) può scriversi $f^{(n)}(w^{(n)})=0$ e (ii) \mathcal{N} non contiene rami le cui variabili elettriche controllino generatori dipendenti interni a \mathcal{R} , Si osservi che la precedente condizione (i) richiede implicitamente che \mathcal{N} non contenga, a sua volta, generatori controllati da variabili elettriche pertinenti a rami interni a \mathcal{R} : quindi per un multiporto \mathcal{N} BD sia il ramo di controllo che il ramo controllato di ogni generatore dipendente facente parte del circuito in cui \mathcal{N} è inserito sono entrambi interni o entrambi esterni a \mathcal{N} .

7.2.5 Digrafi isomorfi, digrafi identici, multiporti isomorfi

Sia *G* un digrafo e siano $\mathcal{N} = \{n_i\}_{i=1}^{\nu}$ l'insieme dei suoi nodi e $\mathcal{B}' = \{b'_i\}_{i=1}^{\beta}$ l'insieme dei suoi lati; sia, poi, *G'* un secondo digrafo e siano $\mathcal{N}' = \{n'_i\}_{i=1}^{\nu}$ l'insieme dei suoi nodi e $\mathcal{B}' = \{b'_i\}_{i=1}^{\beta}$ l'insieme dei suoi lati.

Si dirà che $\mathcal{G} \in \mathcal{G}'$ sono *isomorfi* se e solo se esistono una bilezione $F: \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ e una bilezione $H: \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ tali che per ogni $b_k \in \mathcal{B}$ diretto dal nodo n_i al nodo n_j e con etichetta $l^{(m)}$ si ha che $H(b_k)$ è diretto dal nodo $F(n_i)$ al nodo $F(n_i)$ e ha etichetta $l^{(m)}$. Un po' di riflessione mostra che per digrafi isomorfi le leggi di Kirchhoff possono essere espresse tramite lo stesso sistema di equazioni.

Si dirà poi che *G* e *G*' sono *identici* se e solo (i) essi sono isomorfi, (ii) $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ e (iii) la bilezione $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ è l'identità.

Infine, si dirà che due multiporti sono isomorfi se, dopo averli dotati della medesima etichetta, i rispettivi digrafi risultano isomorfi.

7.2.6 Digrafo del circuito

Sia *C* un circuito risultante dalla interconnessione di multipoli e multiporti. Se un multiporto non è oggetto di specifica attenzione, si supporrà tacitamente che esso sia LC nel circuito allo studio.

Si dirà *digrafo* di *C*, il digrafo G_C ottenuto rimpiazzando ciascun multipolo e ciascun multiporto con i rispettivi digrafi. Si prenderanno spesso in esame situazioni nelle quali due circuiti distinti C_l e C_2 hanno un insieme $S = \{s_i\}_{i=1}^c$ di elementi a comune: in tali casi si assumerà tacitamente che per i=1,2,...,csi attribuisca a s_i la stessa etichetta e digrafi identici in C_l e C_2 rispettivamente; ciò non impedirà di assegnare, ove le circostanze lo richiedano, la stessa etichetta a multiporti distinti facenti rispettivamente parte di circuiti diversi.

7.2.7 Circuiti risolvibili, soluzioni globali di un circuito, circuiti globalmente univocamente risolvibili, circuiti univocamente risolvibili rispetto a un sottovettore, soluzione unica di un circuito rispetto a un sottovettore

Sia *C* un circuito e *w* l'intero vettore delle VE pertinenti al suo digrafo. Si dirà che *C* è risolvibile se le equazioni di equilibrio di *C* ammettono qualche soluzione $w = w^*$: quest'ultima sarà denominata una *soluzione globale di C*. Si dirà poi che *C* è *globalmente univocamente risolubile (GUR)* se e solo se esso ammette un'unica soluzione globale, ossia se le equazioni di equilibrio di *C* ammettono una ed una sola soluzione $w = w^*$.

Sia ora $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{res}^T \ \mathbf{w}_{sub}^T \end{bmatrix}^T$ una partizione del summenzionato \mathbf{w} . Si dirà che *C* è *univocamente risolubile rispetto a (URRA)* \mathbf{w}_{sub} se e solo esiste una determinazione \mathbf{w}_{sub}^* di \mathbf{w}_{sub} tale che per *ogni* soluzione $\mathbf{w} = \overline{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{w}}_{res}^T \ \overline{\mathbf{w}}_{sub}^T \end{bmatrix}^T$ di dette equazioni di equilibrio si abbia $\overline{\mathbf{w}}_{sub} = \mathbf{w}_{sub}^*$: un tale \mathbf{w}_{sub}^* sarà denominato la *soluzione unica di C rispetto a (RA)* \mathbf{w}_{sub} . Evidentemente, una rete GUR è anche URRA qualunque \mathbf{w}_{sub} , ma il viceversa è, in generale, falso.

7.2.8 Circuiti globalmente equivalenti, circuiti equivalenti rispetto a un insieme di elementi

Siano $C_1 \,e\, C_2$ due circuiti. Si dirà che essi sono globalmente equivalenti (GEQ) se e solo se (i) è possibile etichettare gli elementi di $C_1 \,e\, C_2$ e scegliere i digrafi associati a ciascun multipolo in $C_1 \,e\, C_2$ in modo tale che i digrafi di $C_1 \,e\, C_2$ risultino isomorfi; (ii) i rispettivi sistemi delle equazioni di equilibrio sono equivalenti, ossia per *ogni* soluzione $w = w^*$ delle equazioni di equilibrio pertinenti a C_1, w^* è anche una soluzione delle equazioni di equilibrio pertinenti a C_2 e viceversa.

Ora, siano C_1 e C_2 due circuiti e sia $S = \{s_i\}_{i=1}^c$ l'insieme degli elementi a comune fra C_1 e C_2 . In accordo alla convenzione adottata, per i=1,2,...,c si scelgano per s_i la stessa etichetta e digrafi identici in C_1 e C_2 e sia w_s l'intero vettore delle VE pertinenti agli elementi di S. Siano, inoltre, $w_1 = \left[w_s^T w_{res1}^T \right]^T$

e $w_2 = \begin{bmatrix} w_s^T & w_{res2}^T \end{bmatrix}^T$ i vettori delle VE rispettivamente pertinenti ai digrafi di C_I e C_2 . Si dirà che C_I e C_2 sono equivalenti rispetto a (EQRA) S se e solo se per ogni soluzione $w_1^* = \begin{bmatrix} w_s^{*T} & w_{res1}^{*T} \end{bmatrix}^T$ di C_I esiste una soluzione $w_1^* = \begin{bmatrix} w_s^{*T} & w_{res1}^{*T} \end{bmatrix}^T$ di C_2 e viceversa. Evidentemente, se sia C_I che C_2 sono GUR e la soluzione del primo è $w_1^* = \begin{bmatrix} w_s^{*T} & w_{res1}^{*T} \end{bmatrix}^T$ mentre la soluzione del secondo è $w_2^\circ = \begin{bmatrix} w_s^{\circ T} & w_{res2}^{\circ T} \end{bmatrix}^T$, allora deve necessariamente aversi $w_s^* = w_s^\circ$.

7.3 Teorema di sostituzione generalizzato rivisto

In questa sezione, si enunceranno e dimostreranno due diverse versioni del TSGR. In particolare, il paragrafo 7.3.1 riguarda una proposizione le cui ipotesi non pongono vincoli rispetto alla univoca risolvibilità del circuito in esame ed è per tale motivo denominata TSGR Debole. Invece, il paragrafo7.3.2 tratta di una proposizione per la quale l'ipotesi di univoca risolvibilità gioca un ruolo cruciale ed è pertanto denominata TSGR Forte.

7.3.1 Teorema di Sostituzione Generalizzato Rivisto Debole

Enunciato

Sia Q un N-porto etichettato q e – per k=1,2,...,N - siano $\left(a_k^{(q)},b_k^{(q)}\right)$ i terminali della sua k-esima porta (Fig. 7.3(a)). Sia $C_Q = \mathcal{R} \oplus Q$ (Fig. 7.3(b)) e sia Q BD e LC in C_Q . Siano

$$f(\boldsymbol{w}^{(q)}) = \boldsymbol{\theta} \tag{7.7}$$

le equazioni costitutive di Q.

Sia, inoltre, Q_{sub} un secondo *N*-porto etichettato q e - per k = 1, 2, ..., N siano $\left(a_{sub,k}^{(q)}, b_{sub,k}^{(q)}\right)$ i terminali della sua *k*-esima porta (Fig. 7.3(c)). Sia $C_{Q_{sub}} = \mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ ottenuto da $C_Q = \mathcal{R} \oplus Q$ rimpiazzando Q con Q_{sub} in modo tale che – per $k = 1, 2, ..., N - a_{sub,k}^{(q)}$ prenda il posto di $a_k^{(q)} e b_{sub,k}^{(q)}$ prende il posto di $b_k^{(q)}$ (Fig. 7.3(d)). Sia Q_{sub} BD e LC in $C_{Q_{sub}}$. Siano

$$\boldsymbol{f}_{sub}\left(\boldsymbol{w}^{\left(q\right)}\right)=\boldsymbol{0}\tag{7.8}$$

le equazioni costitutive di Q_{sub} .

Se Q e Q_{sub} sono isomorfi e la (7.7) e la (7.8) sono equivalenti, allora C_Q e $C_{Q_{sub}}$ sono GEQ.



Fig. 7.3 - (a) un *N*-porto *Q*, (b) circuito $C_Q = \mathcal{R} \oplus Q$ ottenuto connettendo *Q* con un circuito \mathcal{R} , (c) un secondo *N*-porto Q_{sub} , e (d) circuito $C_{Q_{sub}} = \mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ ottenuto da C_Q rimpiazzando *Q* con Q_{sub} .

Dimostrazione

In accordo alla convenzione adottata, si assuma per ciascun elemento interno a \mathcal{R} la medesima etichetta e digrafi identici in $C_{\mathcal{Q}}$ e $C_{\mathcal{Q}_{sub}}$, rispettivamente. Inoltre, senza ledere la generalità, si possono numerare gli elementi in modo tale che quelli interni a \mathcal{R} siano i primi q-1. Per $j = 1, \dots, q-1$, sia $w^{(j)}$ il vettore delle VE pertinenti al digrafo del *j*-esimo elemento e sia $w_{\mathcal{R}} = col \left[w^{(j)} \right]_{j=1}^{q-1}$. Si designi poi con $w = \left[w_{\mathcal{R}}^T w^{(q)T} \right]^T$ l'intero vettore delle VE pertinenti al digrafo di C_Q di modo che l'equilibrio elettrico di quest'ultimo possa essere espresso dal sistema di equazioni vettoriali

$$\left\langle \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{w}_{\mathcal{R}},\boldsymbol{w}^{\left(q\right)}\right)=\boldsymbol{0},\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{w}_{\mathcal{R}}\right)=\boldsymbol{0},\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{w}^{\left(q\right)}\right)=\boldsymbol{0}\right\rangle$$
 (7.9)

in cui la prima equazione deriva dalle leggi di Kirchhoff e la seconda raccoglie le equazioni costitutive pertinenti agli elementi interni a R.

In virtù delle definizioni stesse di C_Q e $C_{Q_{sub}}$, in forza delle modalità con cui le etichette e i digrafi sono stati assegnati in questi due circuiti e poiché Qed Q_{sub} sono isomorfi per ipotesi, segue che i digrafi di C_Q e $C_{Q_{sub}}$ sono, a loro volta, isomorfi e l'equilibrio elettrico di quest'ultimo può essere espresso dal sistema di equazioni vettoriali

$$\langle \boldsymbol{K}(\boldsymbol{w}_{\mathcal{R}},\boldsymbol{w}^{(q)}) = \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}_{\mathcal{R}}) = \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{f}_{sub}(\boldsymbol{w}^{(q)}) = \boldsymbol{\theta} \rangle$$
 (7.10)

Ora, sia $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\bar{w}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\bar{w}}_{\mathcal{R}}^T & \boldsymbol{\bar{w}}^{(q)T} \end{bmatrix}^T$ una soluzione di (7.9) ; allora da quest'ultima equazione segue

$$\left\langle \boldsymbol{K}\left(\bar{\boldsymbol{w}}_{\mathcal{R}}, \bar{\boldsymbol{w}}^{(q)}\right) = \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{g}\left(\bar{\boldsymbol{w}}_{\mathcal{R}}\right) = \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{f}\left(\bar{\boldsymbol{w}}^{(q)}\right) = \boldsymbol{\theta} \right\rangle$$
 (7.11)

D'altro canto - dal momento che, per ipotesi, (7.7) e (7.8) sono equivalenti - l'equazione $f(\bar{w}^{(q)}) = 0$ implica

$$\boldsymbol{f}_{sub}\left(\boldsymbol{\bar{w}}^{(q)}\right) = \boldsymbol{0} \tag{7.12}$$

Mettendo assieme (7.10) e (7.12), si ha anche

$$\left\langle \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{\bar{w}}_{\mathcal{R}},\boldsymbol{\bar{w}}^{(q)}\right) = \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{\bar{w}}_{\mathcal{R}}\right) = \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{f}_{sub}\left(\boldsymbol{\bar{w}}^{(q)}\right) = \boldsymbol{\theta} \right\rangle$$
 (7.13)

Confrontando la (7.13) e la (7.10) si evince che $\mathbf{w} = \overline{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{R}}^T \ \overline{\mathbf{w}}^{(q)T} \end{bmatrix}^T \dot{\mathbf{e}}$, altresì, una soluzione di quest'ultima equazione: si è dunque mostrato che ogni soluzione della (7.9) è anche soluzione della (7.10). Con ragionamento perfettamente speculare si può, inoltre, mostrare che vale anche il viceversa. Ricordando la definizione di circuiti GEQ, si trova allora che la prova è completa.

7.3.2 Teorema di Sostituzione Generalizzato Rivisto Forte

Enunciato

Sia Q un N-porto etichettato q e – per k=1,2,...,N - siano $\left(a_k^{(q)},b_k^{(q)}\right)$ i terminali della sua k-esima porta (Fig. 7.3(a)). Sia $C_Q = \mathcal{R} \oplus Q$ (Fig. 7.3(b)) e sia Q BD e LC in C_Q . Siano

$$f\left(\boldsymbol{w}^{\left(q\right)}\right)=\boldsymbol{0}\tag{7.14}$$

le equazioni costitutive di Q. Sia C_Q GUR e sia $\tilde{w}^{(q)}$ l'unica soluzione di C_Q RA $w^{(q)}$.

Sia, inoltre, Q_{sub} un secondo *N*-porto etichettato q e - per k = 1, 2, ..., N siano $\left(a_{sub,k}^{(q)}, b_{sub,k}^{(q)}\right)$ i terminali della sua *k*-esima porta (Fig. 7.3(c)). Sia $C_{Q_{sub}} = \mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ ottenuto da $C_Q = \mathcal{R} \oplus Q$ rimpiazzando Q con Q_{sub} in modo tale che – per $k = 1, 2, ..., N - a_{sub,k}^{(q)}$ prenda il posto di $a_k^{(q)} e b_{sub,k}^{(q)}$ prende il posto di $b_k^{(q)}$ (Fig. 7.3(d)). Sia Q_{sub} BD e LC in $C_{Q_{sub}}$. Siano

$$\boldsymbol{f}_{sub}\left(\boldsymbol{w}^{\left(q\right)}\right) = \boldsymbol{0} \tag{7.15}$$

le equazioni costitutive di Q_{sub} .

Se Q e Q_{sub} sono isomorfi e

$$\boldsymbol{f}_{sub}\left(\tilde{\boldsymbol{w}}^{\left(q\right)}\right) = \boldsymbol{0} \tag{7.16}$$

allora (i) $C_{Q_{sub}}$ è risolvibile e la soluzione globale di C_Q è anche una soluzione globale di $C_{Q_{sub}}$. Inoltre, se, in aggiunta, $C_{Q_{sub}}$ è URRA $w^{(q)}$, allora (ii) $C_{Q_{sub}}$ è GUR e GEQ a C_Q .

Dimostrazione

La prova ricalca quella del teorema precedente fino alla (7.10). Ora, sia $\boldsymbol{w} = \tilde{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{w}}_{\mathcal{R}}^T \ \tilde{\boldsymbol{w}}^{(q)T} \end{bmatrix}^T l'unica$ soluzione della (7.9); allora da quest'ultima equazione segue

$$\left\langle \boldsymbol{K}\left(\tilde{\boldsymbol{w}}_{\mathcal{R}}, \tilde{\boldsymbol{w}}^{(q)}\right) = \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{g}\left(\tilde{\boldsymbol{w}}_{\mathcal{R}}\right) = \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{f}\left(\tilde{\boldsymbol{w}}^{(q)}\right) = \boldsymbol{\theta} \right\rangle$$
 (7.17)

Mettendo assieme la (7.17) e la (7.16) si ottiene

$$\left\langle \boldsymbol{K}\left(\tilde{\boldsymbol{w}}_{\mathcal{R}}, \tilde{\boldsymbol{w}}^{(q)}\right) = \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{g}\left(\tilde{\boldsymbol{w}}_{\mathcal{R}}\right) = \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{f}_{sub}\left(\tilde{\boldsymbol{w}}^{(q)}\right) = \boldsymbol{\theta} \right\rangle$$
 (7.18)

Il confronto fra (7.18) e (7.10) mostra che $\boldsymbol{w} = \tilde{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{w}}_{\mathcal{R}}^T \ \tilde{\boldsymbol{w}}^{(q)T} \end{bmatrix}^T$ è, altresì, una soluzione globale di $C_{Q_{sub}}$ e il punto (i) della tesi è provato.

Ora, sia $C_{Q_{sub}}$ URRA $\boldsymbol{w}^{(q)}$; si mostrerà con un ragionamento per assurdo che detto circuito è anche GUR. Difatti, siano $\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{1,\mathcal{R}}^T \ \boldsymbol{w}_1^{(q)T} \end{bmatrix}^T$ e $\boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{2,\mathcal{R}}^T \ \boldsymbol{w}_2^{(q)T} \end{bmatrix}^T$ due distinte soluzioni globali di $C_{Q_{sub}}$. Poiché $C_{Q_{sub}}$ è URRA $\boldsymbol{w}^{(q)}$ e (come si è mostrato dianzi) esiste una soluzione globale di $C_{Q_{sub}}$ per la quale è $\boldsymbol{w}^{(q)} = \tilde{\boldsymbol{w}}^{(q)}$, deve essere $\boldsymbol{w}_1^{(q)} = \boldsymbol{w}_2^{(q)} = \tilde{\boldsymbol{w}}^{(q)}$ e al contempo $\boldsymbol{w}_{1,\mathcal{R}} \neq \boldsymbol{w}_{2,\mathcal{R}}$ (altrimenti le summenzionate soluzioni globali \boldsymbol{w}_1 e \boldsymbol{w}_2 non sarebbero distinte). Ricalcando le argomentazioni che hanno condotto alla (7.18), si conclude allora che $\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{1,\mathcal{R}}^T \ \boldsymbol{w}_1^{(q)T} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{1,\mathcal{R}}^T \ \tilde{\boldsymbol{w}}^{(q)T} \end{bmatrix}^T$ e $\boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{2,\mathcal{R}}^T \ \boldsymbol{w}_2^{(q)T} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{2,\mathcal{R}}^T \ \tilde{\boldsymbol{w}}^{(q)T} \end{bmatrix}^T$ sono distinte soluzioni globali di C_Q , il che è assurdo, perché quest'ultimo circuito è GUR per ipotesi. La dimostrazione è dunque completa.

7.4 Estensioni del Teorema di Sostituzione basato su batteria di generatori

In questa sezione, il TSGR Forte verrà impiegato per derivare due differenti estensioni del TS per circuiti a più terminali descritto in [6].

7.4.1 Estensione del Teorema di Sostituzione basato su batteria di generatori: versione senza nullori (Teorema 7.4.1)

Enunciato

Sia Q un N-porto etichettato q e – per k=1,2,...,N - siano $\left(a_k^{(q)},b_k^{(q)}\right)$ i terminali della sua k-esima porta (Fig. 7.3(a)). Sia $C_Q = \mathcal{R} \oplus Q$ (Fig. 7.3(b)) e sia Q BD

e LC in C_Q . Sia $w^{(q)} = \left[row \left[v_k^{(q)} \right]_{k=1}^N row \left[i_k^{(q)} \right]_{k=1}^N \right]^T$ il vettore delle VE pertinenti a Q e siano (in forma di equazione vettoriale)

$$f\left(\boldsymbol{w}^{(q)}\right) = \boldsymbol{0} \tag{7.19}$$

le equazioni costitutive di Q. Sia C_Q GUR e sia $w^{(q)*}$ l'unica soluzione di C_Q RA $w^{(q)}$.

Inoltre, sia $\mathcal{W}_Q = \left\{ v_k^{(q)}, i_k^{(q)} \right\}_{k=1}^N$ l'insieme delle componenti di $w^{(q)}$ e $\mathcal{X}_Q = \left\{ x_k^{(q)} \right\}_{k=1}^N \subset \mathcal{W}_Q$ un sottoinsieme di *N* elementi di \mathcal{W}_Q scelti in accordo alla seguente regola

$$\forall k \in \{1, 2, ..., N\} \left(x_k^{(q)} \in \left\{ v_k^{(q)}, i_k^{(q)} \right\} \right)$$
(7.20)

Ancora, sia $\hat{\chi}_Q = \mathcal{W}_Q - \chi_Q = \left\{ \hat{x}_j^{(q)} \right\}_{j=1}^N \subset \mathcal{W}_Q$ il complemento di χ_Q rispetto a \mathcal{W}_Q : qui – per k = 1, 2, ..., N - $\hat{x}_k^{(q)}$ rappresenta la VE duale di $x_k^{(q)}$.

Ora, si consideri l' *N*-porto Q_{sub} - etichettato q e dotato di terminali $\left\{\left(a_{sub,k}^{(q)}, b_{sub,k}^{(q)}\right)\right\}_{k=1}^{N}$ - che è costruito a partire dal digrafo $G^{(q)}$ di Q al modo seguente: per k = 1, 2, ..., N (i) $a_{k}^{(q)}$ è rimpiazzato con $a_{sub,k}^{(q)}$ e $b_{k}^{(q)}$ è rimpiazzato con $b_{sub,k}^{(q)}$ e (ii) il *k*-esimo lato di $G^{(q)}$ è rimpiazzato da un generatore indipendente della stessa natura di $x_{k}^{(q)}$, con polarità/verso concorde con la polarità/verso di $x_{k}^{(q)}$ e con valore $x_{k}^{(q)*}$ pari alla corrispondente componente di $w^{(q)*}$ (vedasi la Fig. 7.4(b) per una rappresentazione concettuale di Q_{sub}).

Sia $C_{Q_{sub}} = \Re \oplus Q_{sub}$ il circuito ottenuto da C_Q rimpiazzando Q con Q_{sub} in modo tale che – per $k = 1, 2, ..., N - a_{sub,k}^{(q)}$ prenda il posto di $a_k^{(q)} e b_{sub,k}^{(q)}$ prenda il posto di $b_k^{(q)}$. Allora (a) $C_{Q_{sub}}$ è risolvibile e la soluzione globale di C_Q è anche una soluzione globale di $C_{Q_{sub}}$. Inoltre, se $C_{Q_{sub}}$ è URRA $\hat{x}^{(q)} = col \left[\hat{x}_k^{(q)} \right]_{k=1}^N$, allora (b) $C_{Q_{sub}}$ è GUR e C_Q e $C_{Q_{sub}}$ sono GEQ.



Fig. 7.4 - (a) Un *N*-porto *Q* etichettato *q*, (b) rappresentazione *concettuale* del particolare *N*-porto *Q_{sub}* etichettato *q* pertinente alla versione senza nullori dell'estensione del TS basato su una batteria di generatori, (c) il digrafo del 6-porto \mathcal{N} di Fig. 7.2(a) qui riprodotto per comodità e (d) il *Q_{sub}* pertinente a \mathcal{N} per la scelta particolare $\chi_Q = \left\{ i_1^{(q)}, v_2^{(q)}, v_3^{(q)}, v_4^{(q)}, v_5^{(q)}, i_6^{(q)} \right\}$, ottenuto dal digrafo in (c) come descritto nell'enunciato del teorema allo studio.

Dimostrazione

Per costruzione $C_{Q_{sub}}$ è BD e le sue equazioni costitutive possono darsi come

$$\left\langle x_{k}^{(q)} - x_{k}^{(q)*} = 0 \right\rangle_{k=1}^{N}$$
 (7.21)

Inoltre, ancora per costruzione, $C_{Q_{sub}}$ risulta ALC e dunque certamente LC in $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$; si vede poi immediatamente per sostituzione diretta che $w^{(q)*}$ soddisfa la (7.21); infine è subito visto che, per costruzione, $C_{Q_{sub}} \in C_Q$ sono isomorfi. Dunque le ipotesi relative alla parte (i) della tesi del TSGR Forte sono soddisfatte e la parte (a) della tesi del teorema allo studio segue immediatamente. Inoltre – poiché in $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ il valore degli elementi di $x^{(q)} = col \left[x_k^{(q)} \right]_{k=1}^N$ è univocamente fissato dalla (7.21) – se, in aggiunta, $C_{Q_{sub}}$ è URRA $\hat{x}^{(q)} = col \left[\hat{x}_k^{(q)} \right]_{k=1}^N$, allora $C_{Q_{sub}}$ risulta essere altresì URRA $w^{(q)}$ e l'ipotesi relativa alla parte (ii) della tesi del TSGR Forte è soddisfatta a sua volta, il che conduce direttamente alla parte (b) della tesi del teorema allo

7.4.2 Commenti

studio.

- 1. E' opportuno sottolineare che la Fig. 7.4(b) ha il solo scopo di fornire una rappresentazione simbolica del criterio con il quale l'*N*-porto Q_{sub} menzionato nel precedente teorema viene costruito e ha quindi mero valore concettuale. Essa rappresenta il reale Q_{sub} solo quando i terminali di Q sono tutti distinti e il suo digrafo è costituito da una collezione di lati disgiunti. In generale la Fig. 7.4(b) non tiene conto delle mutue connessioni fra detti terminali, la cui conoscenza (riassunta nel digrafo di Q) è cruciale per la corretta costruzione di Q_{sub} . Un esempio pratico di tale costruzione è fornito dalla Fig. 7.4(d) con riferimento al 6-porto \mathcal{N} di Fig. 7.2(a) (il cui digrafo è riportato in Fig. 7.4(c) per comodità), per il quale si suppone di aver operato la scelta $X_Q = \left\{ i_1^{(q)}, v_2^{(q)}, v_3^{(q)}, v_4^{(q)}, v_5^{(q)}, i_6^{(q)} \right\}.$
- Merita osservare che nel caso particolare in cui C_Q coincida con un circuito a N+1 terminali, dei quali uno sia assunto come riferimento comune per tutte le tensioni di porta, e si sceglie un X_Q omogeneo (per il quale si abbia cioè ⟨x_k = v_k⟩^N_{k=1} ovvero ⟨x_k = i_k⟩^N_{k=1}) il teorema precedente si riduce a una forma che richiama alla mente il TS per circuiti a più terminali descritto in [6].
- 3. In effetti, il precedente Teorema 7.4.1 può riguardarsi come una generalizzazione del summenzionato TS sotto vari aspetti. In primo luogo, il Teorema 7.4.1 non pone vincoli sulla natura della batteria di
generatori dell'*N*-porto rimpiazzante. In secondo luogo, esso si applica a multiporti senza restrizioni riguardo alle mutue connessioni fra terminali (salvo la necessità che il multiporto in questione sia LC nella rete allo studio), non solo a circuiti in cui uno stesso terminale funge da riferimento negativo per tutte le tensioni (che può riguardarsi, secondo quanto già osservato, come un particolare multiporto). Infine, l'ipotesi di univoca risolvibilità ha, in relazione al Teorema 7.4.1, carattere locale piuttosto che globale, come, invece, accade per il TS descritto in [6]), il che la rende di più facile verifica nelle applicazioni pratiche.



Fig. 7.5 - Simbolo circuitale proposto per la coppia nullatore-noratore (nullore).

4. Come si mostrerà nel prossimo paragrafo, un TS alternativo che impieghi una batteria di generatori può essere ottenuto ricorrendo al concetto di coppia nullatore-noratore (CNN) o nullore, che viene vantaggiosamente impiegato in Teoria dei Circuiti per vari scopi (si vedano, ad esempio, [29]-[31] per applicazioni recenti). Per tale elemento, che può riguardarsi come un particolare biporto, sono impiegati in letteratura vari simboli: se ne propone qui uno ulteriore, che è rappresentato in Fig. 7.5 ed è stato ricavato modificando leggermente quello impiegato in [16, 32]. Si ritiene che tale scelta possa aiutare a prevenire possibili confusioni fra simboli simili (inclusi quelli adottati per i generatori indipendenti) e, al contempo, che essa sia agile e atta a favorire un'analisi intuitiva per ispezione diretta. Nella figura summenzionata la CNN consiste di due rami: il primo, denominato nullatore, occupa la porta A ed ivi impone simultaneamente le condizioni $\langle v_a = 0, i_a = 0 \rangle$; l'altro ramo, denominato noratore, occupa la porta B senza imporre a priori alcun vincolo fra le VE di quest'ultima porta. Come anticipato, nel prossimo paragrafo, si impiegherà la CNN per ottenere una versione alternativa del Teorema 7.4.1; ovviamente, i

risultati della trattazione che segue non dipendono, da un punto di vista concettuale, dal simbolo usato e quindi si potrà indifferentemente impiegare quello che si preferisce.

7.4.3 Estensione del Teorema di Sostituzione basato su batteria di generatori: versione con nullori (Teorema 7.4.2)

Enunciato

Sia Q un N-porto etichettato q e – per k=1,2,...,N - siano $\left(a_k^{(q)},b_k^{(q)}\right)$ i terminali della sua k-esima porta (Fig. 7.3(a)). Sia $C_Q = \mathcal{R} \oplus Q$ (Fig. 7.3(b)) e sia Q BD

e LC in C_Q . Sia $\boldsymbol{w}^{(q)} = \left[row \left[v_k^{(q)} \right]_{k=1}^N row \left[i_k^{(q)} \right]_{k=1}^N \right]^T$ il vettore delle VE

pertinenti a Q e siano (in forma di equazione vettoriale)

$$f\left(\boldsymbol{w}^{\left(q\right)}\right)=\boldsymbol{0}\tag{7.22}$$

le equazioni costitutive di Q. Sia C_Q GUR e sia $w^{(q)*}$ l'unica soluzione di C_Q RA $w^{(q)}$.

Inoltre, sia $\mathcal{W}_Q = \left\{ v_k^{(q)}, i_k^{(q)} \right\}_{k=1}^N$ l'insieme delle componenti di $\boldsymbol{w}^{(q)}$ e $\mathcal{X}_Q = \left\{ x_k^{(q)} \right\}_{k=1}^N \subset \mathcal{W}_Q$ un sottoinsieme di *N* elementi di \mathcal{W}_Q scelti in accordo alla seguente regola

$$\exists j \in \{1, 2, \dots, N\} \left(v_j \notin X_Q \land i_j \notin X_Q \right)$$
(7.23)

Ancora, sia $\overline{X}_Q = \mathcal{W}_Q - X_Q = \left\{\overline{x}_k^{(q)}\right\}_{k=1}^N \subset \mathcal{W}_Q$ il complemento di X_Q rispetto a \mathcal{W}_Q^3 .

Ora, si consideri l'*N*-porto Q_{sub} - etichettato q e dotato di terminali $\left\{\left(a_{sub,k}^{(q)}, b_{sub,k}^{(q)}\right)\right\}_{k=1}^{N}$ - che è costruito a partire dal digrafo $G^{(q)}$ di Q al modo se

³ Si osservi che, contrariamente a quanto vale per il Teorema 7.4.1, nel caso in specie – per $k = 1, \dots, N - \overline{x}_k^{(q)}$ non è, a priori, legato a $x_k^{(q)}$ da alcuna relazione: questo fatto giustifica il diverso simbolo (\overline{x}_Q in luogo di \hat{x}_Q) adottato per denotare la differenza $\mathcal{W}_Q - x_Q$.



Fig. 7.6 - (a) rappresentazione *concettuale* del particolare *N*-porto Q_{sub} etichettato q pertinente alla versione con nullori dell'estensione del TS basato su una batteria di generatori, (b) il digrafo del 6-porto \mathcal{N} di Fig. 7.2(a) qui riprodotto per comodità, e

(c) il Q_{sub} pertinente a \mathcal{N} per la scelta particolare $\chi_Q = \left\{ v_2^{(q)}, v_3^{(q)}, i_3^{(q)}, v_4^{(q)}, i_4^{(q)}, i_6^{(q)} \right\}$, ottenuto dal digrafo in (b) come descritto nell'enunciato del teorema allo studio.

guente: per k = 1, 2, ..., N (i) $a_k^{(q)}$ è rimpiazzato con $a_{sub,k}^{(q)}$ e $b_k^{(q)}$ è rimpiazzato con $b_{sub,k}^{(q)}$ e (ii) il k-esimo lato di $G^{(q)}$ è rimpiazzato da: un generatore di corrente $i_k^{(q)*}$ con, in parallelo, la serie di un generatore di tensione $v_k^{(q)*}$ e un nullatore se $i_k^{(q)} \in X_Q \land v_k^{(q)} \in X_Q$ un generatore di tensione $v_k^{(q)*}$ se $i_k^{(q)} \in X_Q \land v_k^{(q)} \notin X_Q$ un generatore di tensione $v_k^{(q)*}$ se $i_k^{(q)} \notin X_Q \land v_k^{(q)} \notin X_Q$ un noratore se $i_k^{(q)} \notin X_Q \land v_k^{(q)} \notin X_Q$

ove i generatori hanno polarità/verso coerente con l'orientazione di detto *k*esimo lato (si veda la Fig. 7.6(a) per una rappresentazione concettuale di Q_{sub} relativamente al caso in cui sia $v_1^{(q)} \in X_Q$, $i_1^{(q)} \in X_Q$, $\dots, v_p^{(q)} \notin X_Q$, $i_p^{(q)} \notin X_Q$, $\dots, v_m^{(q)} \notin$ $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}, i_m^{(q)} \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}}, \cdots, v_N^{(q)} \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}}, i_N^{(q)} \notin \mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$).

Sia $C_{Q_{sub}} = \mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ il circuito ottenuto da C_Q rimpiazzando Q con Q_{sub} in modo tale che – per $k = 1, 2, ..., N - a_{sub,k}^{(q)}$ prenda il posto di $a_k^{(q)}$ e $b_{sub,k}^{(q)}$ prenda il posto di $b_k^{(q)}$. Allora (a) $C_{Q_{sub}}$ è risolvibile e la soluzione globale di C_Q è anche una soluzione globale di $C_{Q_{sub}}$. Inoltre, se $C_{Q_{sub}}$ è URRA $\overline{\mathbf{x}}^{(q)} = col \left[\overline{x}_k^{(q)}\right]_{k=1}^N$, allora (b) $C_{Q_{sub}}$ è GUR e C_Q e $C_{Q_{sub}}$ sono GEQ. Dimostrazione

La prova si ottiene direttamente ricalcando le argomentazioni impiegate nella dimostrazione del Teorema 7.4.1.

7.4.4 Commenti

- 1. Così come la Fig. 7.4(b), la Fig. 7.6(a) ha mero valore concettuale. Essa intende rappresentare le modalità con cui si costruisce l'*N*-porto Q_{sub} relativo alla versione con nullori, descritta nel Paragrafo 7.4.2, dell'estensione del TS basato su una batteria di generatori e corrisponde al reale Q_{sub} solo quando i lati del digrafo di Q sono tutti fra loro disgiunti. In generale la Fig. 7.6(a) non tiene conto delle mutue connessioni fra i terminali di Q, informazione che è invece contenuta nel digrafo di quest'ultimo: tale digrafo rappresenta il punto di partenza per la costruzione di Q_{sub} . Un esempio pratico di tale costruzione è rappresentato in Fig. 7.6(c) con riferimento al 6-porto \mathcal{N} di Fig. 7.2(a) (il cui digrafo è riportato in Fig. 7.6(b) per comodità), per il quale si è supposto di operare la scelta $X_Q = \left\{ v_2^{(q)}, v_3^{(q)}, i_3^{(q)}, v_4^{(q)}, i_4^{(q)}, i_6^{(q)} \right\}$.
- 2. A differenza della versione senza nullori descritta nel Paragrafo 7.4.1 che può essere riguardata come l'estensione (sotto i vari notevoli aspetti descritti nel Paragrafo 7.4.2) del TS in [6] il particolare TS presentato nel Paragrafo 7.4.3 è, per quanto noto a chi scrive, un risultato completamente nuovo. La peculiarità di tale risultato è confermata dalla circostanza che, al contrario della summenzionata versione senza nullori, il teorema presentato nel Paragrafo 7.4.3 non può essere particolarizzato a bipoli.
- 3. La diretta applicazione dei TS presentati nei Paragrafi 7.4.1 e 7.4.3 richiede, in linea di principio, la conoscenza di almeno N elementi di w_Q^* : tale w_Q^* , per definizione, dipende dalla soluzione del circuito C_Q

nel suo complesso e non soltanto dai parametri di Q riguardato come entità a sé stante.

7.5 Nuova derivazione dei teoremi di shift dei generatori

In questa sezione, il TSGR Forte sarà impiegato per riottenere i ben noti Teoremi di shift dei generatori (vedasi, ad esempio, [6]).

7.5.1 Teorema di shift del generatore di tensione: caso di insieme di taglio (Teorema 7.5.1)

Enunciato

Si considerino due circuiti topologicamente disgiunti $C' \in C''$. Siano nel primo individuati P+1 nodi $[\underline{1'}], [\underline{2'}], ..., [\underline{P'}], [\underline{0'}]$ e nel secondo P+1 nodi $[\underline{1''}], [\underline{2''}], ..., [\underline{P''}], [\underline{0''}]$. Sia poi C (Fig. 7.7(a)) il circuito ottenuto collegando il nodo $[\underline{0'}]$ di C' con il nodo $[\underline{0''}]$ di C'' per mezzo di un ramo β_0 contenente un generatore di tensione E con il terminale positivo coincidente con $[\underline{0''}]$ e – per i=1,2,...,P - il nodo $[\underline{i'}]$ di C' con il nodo $[\underline{i''}]$ di C'' per mezzo di un ramo β_i consistente di un cortocircuito.

Si consideri altresì il circuito C_{shift} (Fig. 7.7(b)) ottenuto da C tramite le seguenti operazioni: (i) il generatore di tensione E in β_0 è rimpiazzato con un corto circuito e (ii) per i=1,2,...,P, un generatore di tensione E è inserito in β_i con il terminale positivo coincidente con il nodo i'.

Allora $C \in C_{shift}$ sono EQRA l'insieme degli elementi interni a $C' \circ C''$. Dimostrazione

Si considerino gli *N*-porti Q e Q_{sub} e la rete \mathcal{R} posti in evidenza tramite i rettangoli tratteggiati in Fig. 7.7(c) e Fig. 7.7(d) rispettivamente. Ricordando le notazioni introdotte nel Paragrafo 7.2.4, si potrà scrivere $C = \mathcal{R} \oplus Q$ e $C_{shift} = \mathcal{R} \oplus Q_{sub}$.

E' subito visto che $Q \in LC$ in $\mathcal{R} \oplus Q \in Q_{sub} \in LC$ in $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$. Inoltre $Q \in Q_{sub}$ sono BD in $\mathcal{R} \oplus Q$ e $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$, rispettivamente: infatti, siano $Q \in Q_{sub}$ etichettati q; allora le equazioni costitutive di Q possono darsi come



Fig. 7.7 – (a) Il circuito *C* ottenuto da due circuiti *C'* e *C"* topologicamente disgiunti collegandoli tramite i rami $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_P$, (b) circuito C_{shift} ottenuto da *C* trasferendo il generatore *E* nei rami $\beta_1, ..., \beta_P$, (c) *C* adesso riguardato come $\mathcal{R} \oplus Q$ e (d) C_{shift} adesso riguardato come $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$.

$$\left\langle v_{k}^{(q)} = E + v_{k+P}^{(q)}, i_{k}^{(q)} = -i_{k+P}^{(q)} \right\rangle_{k=1}^{P}$$
 (7.24)

che si constatano immediatamente essere altresì equazioni costitutive per Q_{sub} . Inoltre, si vede facilmente che Q e Q_{sub} sono isomorfi. Ci si trova, dunque, nelle condizioni di poter applicare il TSGR Debole a $\mathcal{R} \oplus Q$ e $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$, onde la tesi segue direttamente.

7.5.2 Teorema di shift del generatore di tensione: caso nodale (Teorema 7.5.2)

Enunciato

Si consideri (Fig. 7.8(a)) un circuito C' ed N+1 suoi nodi [1, [2], ..., N], [0]. Sia ν un nodo isolato esterno a C'. Sia poi C (Fig. 7.8(b)) il circuito ottenuto connettendo i nodi [0] e ν tramite un ramo β_0 contenente un generatore di tensione E con il terminale positivo coincidente con ν e - peri=1,2,...,N - il nodo i con il nodo ν tramite un ramo β_i consistente in un cortocircuito.



Fig. 7.8 - (a) Il circuito *C* ottenuto da un circuito *C'* connettendo, rispettivamente, i suoi nodi 1,2,...,*N*,0 a un nodo isolato ν per mezzo dei rami $\beta_0,\beta_1,...,\beta_P$ e (b) il circuito C_{shift} ottenuto da *C* "distribuendo" il generatore *E* ai rami $\beta_1,...,\beta_P$.

Si consideri, ora, il circuito C_{shift} ottenuto da C per mezzo delle seguenti operazioni: (i) il generatore di tensione E in β_0 è rimpiazzato con un cortocircuito e (ii) per i=1,2,...,N un generatore di tensione E è inserito in β_i con il suo terminale positivo coincidente con il nodo [i]. Allora C e C_{shift} sono EQRA l'insieme degli elementi interni a C'.

Dimostrazione

Il teorema allo studio non è che un caso particolare del precedente Teorema 7.5.1, nel quale C'' si riduce all'insieme dei suoi nodi coincidenti in v.

7.5.3 Teorema di shift del generatore di corrente (Teorema 7.5.3)

Enunciato

Si consideri un circuito \mathcal{R} ed N+1 suoi nodi [1, [2, ..., N], [N+1]. Si consideri, altresì, il circuito C ottenuto da \mathcal{R} collegando un generatore di corrente J fra i nodi [1] e [N+1], orientato dal primo al secondo di questi (Fig. 7.9(a)).





nodi del circuito originario \mathcal{R} (b) il circuito C_{shift} ottenuto "distribuendo" J fra ulteriori nodi di \mathcal{R} (d) C ora riguardato come $\mathcal{R} \oplus Q$ e (d) C_{shift} ora riguardato come

 $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$.

Sia, ora, C_{shift} il circuito ottenuto da *C* tramite le seguenti operazioni: (i) il generatore di corrente *J* è rimpiazzato con un circuito aperto e (ii) per i=1,2,...,N un generatore di corrente *J* è collegato fra i nodi [i] e [i+1] ed orientato dal primo al secondo (Fig. 7.9(b)). Allora *C* e C_{shift} sono EQRA l'insieme degli elementi interni a \mathcal{R} .

Dimostrazione

In *C* - per i=2,3,...,N-1 - si connetta al nodo [i] un tratto di cortocircuito con l'altro estremo isolato, come mostrato in Fig. 7.9(c): poiché in tali cortocircuiti non scorre corrente, tale operazione non altera le soluzioni di *C*. Il mettere in evidenza l'*N*-porto *Q* per mezzo di un rettangolo tratteggiato, come mostrato in Fig. 7.9(c), consente di riguardare *C* come $\mathcal{R} \oplus Q$. Sia *Q* etichettato *q*: è

subito visto allora che Q è LC e BD in $\mathcal{R} \oplus Q$ e le sue equazioni costitutive possono darsi come

$$\begin{cases} i_1^{(q)} = J \\ \left\langle i_k^{(q)} = 0 \right\rangle_{k=2}^N \end{cases}$$
(7.25)

Si prenda, ora, in considerazione C_{shift} e in quest'ultimo si ponga in evidenza l'*N*-porto Q_{sub} per mezzo di un rettangolo tratteggiato, come mostrato in Fig. 7.9(d): ciò consente di riguardare C_{shift} come $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$.

Sia Q_{sub} etichettato q: si vede, allora, immediatamente che Q_{sub} è LC e BD in $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ e le sue equazioni costitutive possono darsi come in (7.25). Inoltre Q e Q_{sub} sono palesemente isomorfi. Ci si trova, quindi, nelle condizioni di poter applicare il TSGR Debole a $\mathcal{R} \oplus Q$ e $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ e concludere che questi circuiti sono GEQ; in particolare, essi sono EQRA l'insieme degli elementi interni a \mathcal{R} , che completa la dimostrazione.

7.5.4 Commenti

- 1. Si vede immediatamente che i risultati sopra derivati altro non sono che i cosiddetti teoremi di shift dei generatori [6]. Tuttavia, come mostrato, l'impiego del TSGR consente di dimostrarli in modo, al contempo, agevole e rigoroso, evitando la necessità di manipolare gli interi sistemi delle equazioni di equilibrio rispettivamente pertinenti a C_Q e $C_{Q_{ub}}$, come in [6].
- 2. L'impiego del TSGR nella dimostrazione aiuta altresì ad eliminare possibili incertezze [17, pag, 537] circa il concetto di equivalenza fra i due circuiti. Ad esempio, nel caso del Teorema 7.5.1 si trova immediatamente che *C* e C_{shift} sono anche EQRA le correnti nei rami $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_P$, le cadute di tensione fra i nodi *l'* e *m'* e le caduta di tensione fra i nodi *l"* e *m"* (l,m=0,1,...,P), dal momento che tali VE possono essere espresse, univocamente e allo stesso modo, in termini delle tensioni e delle correnti di porta rispettivamente pertinenti a *Q* e Q_{sub} .

7.6 Teoremi di Thévenin-Norton generalizzati

In questa sezione si impiegherà il TSGR Debole per derivare due distinte generalizzazioni del Teorema di Thévenin-Norton.

7.6.1 Teorema di Thevénin-Norton generalizzato: versione senza nullori (Teorema 7.6.1)

Enunciato

Sia Q un N-porto etichettato q e – per k=1,2,...,N - siano $\left(a_{k}^{(q)},b_{k}^{(q)}\right)$ i terminali della sua k-esima porta (Fig. 7.3(a)). Sia $C_{Q} = \mathcal{R} \oplus Q$ (Fig. 7.10(a)) e sia Q BD e LC in C_{Q} . Sia $w^{(q)} = \left[row\left[v_{k}^{(q)}\right]_{k=1}^{N}row\left[i_{k}^{(q)}\right]_{k=1}^{N}\right]^{T}$ il vettore delle VE pertinenti a Q. Inoltre, sia $\mathcal{W}_{Q} = \left\{v_{k}^{(q)}, i_{k}^{(q)}\right\}_{k=1}^{N}$ l'insieme delle componenti di $w^{(q)}$ e $X_{Q} = \left\{x_{k}^{(q)}\right\}_{k=1}^{N} \subset \mathcal{W}_{Q}$ un sottoinsieme di N elementi di \mathcal{W}_{Q} scelti in accordo alla seguente regola

$$\forall k \in \{1, 2, ..., N\} \left(x_k^{(q)} \in \left\{ v_k^{(q)}, i_k^{(q)} \right\} \right)$$
(7.26)

Ancora, sia $\hat{X}_Q = \mathcal{W}_Q - \mathcal{X}_Q = \left\{ \hat{x}_j^{(q)} \right\}_{j=1}^N \subset \mathcal{W}_Q$ il complemento di \mathcal{X}_Q rispetto a \mathcal{W}_Q : qui – per k = 1, 2, ..., N - $\hat{x}_k^{(q)}$ rappresenta la VE duale di $x_k^{(q)}$.

Ora, si consideri il circuito Q_0 ottenuto da Q tramite la seguente operazione: per k=1,2,...,N, la k-esima porta è (i) chiusa su un cortocircuito se $x_k^{(q)} = v_k^{(q)}$ o (ii) lasciata aperta se $x_k^{(q)} = i_k^{(q)}$ (vedasi la Fig. 7.10(b) per un esempio relativo alla particolare scelta $X_Q = \left\{ v_1^{(q)},...,i_j^{(q)},...,i_l^{(q)},...,v_N^{(q)} \right\}$). Sia tale Q_0 URRA $\hat{x}^{(q)} = col \left[\hat{x}_k^{(q)} \right]_{k=1}^N$ e sia $\hat{x}_0^{(q)} = col \left[\hat{x}_{0,k}^{(q)} \right]_{k=1}^N$ l'unica soluzione di Q_0 rispetto a $\hat{x}^{(q)}$.



Fig. 7.10 - (a) un *N*-porto lineare *Q* etichettato *q*, (b) il circuito Q_{θ} nel caso la scelta operata per χ_Q sia $\chi_Q = \left\{ v_1^{(q)}, ..., i_j^{(q)}, ..., v_N^{(q)} \right\}$, (c) il circuito Q_j per il calcolo delle quantità $\{m_{kj}\}_{k=1}^N$ relative alla summenzionata scelta di χ_Q e (d) un *N*-porto lineare Q_{sub} etichettato *q*, con le stesse equazioni costitutive di *Q*.

Si consideri, inoltre, un *N*-porto \mathcal{M} etichettato q, con terminali $\left\{ \left(a_{sub,k}^{(q)}, b_{sub,k}^{(q)} \right) \right\}_{k=1}^{N}$, isomorfo a Q e con equazioni costitutive

$$\hat{\boldsymbol{x}}^{(q)} = M \boldsymbol{x}^{(q)} = \left[m_{kj} \right]_{k, j=1}^{N} \boldsymbol{x}^{(q)}$$
(7.27)

ove $M = [m_{kj}]_{k,j=1}^{N} e - per k, j = 1, 2, ..., N$ - il valore di m_{kj} (in opportune unità di misura) coincide con il valore assunto da $\hat{x}_{k}^{(q)}$ nel circuito Q_{j} ottenuto da Q per mezzo delle seguenti operazioni: (a) i generatori indipendenti interni a Q sono disattivati, ottenendo in tal modo l'*N*-porto Q_{off} ; (b) un generatore unitario di natura e polarità/verso coerenti con $x_{j}^{(q)}$ è inserito nella *j*-esima porta di Q_{off} e – per ogni $h \neq j$ - l'*h*-esima porta è lasciata aperta (se $x_{h}^{(q)} \equiv i_{h}^{(q)}$ è una corrente) o è chiusa su un corto-circuito (se $x_{h}^{(q)} \equiv v_{h}^{(q)}$ è una tensione) (vedasi la Fig. 7.10(c), ove è rappresentato il circuito per il calcolo delle quantità $\{m_{kj}\}_{k=1}^{N}$ pertinenti alla summenzionata scelta di X_Q).

Infine, si consideri l'*N*-porto Q_{sub} ottenuto a partire da \mathcal{M} per mezzo della seguente operazione. Per k=1,2,...,N, se $\hat{x}_{k}^{(q)}$ è una tensione [corrente], si inserisca in serie [parallelo] alla *k*-esima porta di \mathcal{M} un generatore indipendente di tensione [corrente] con la stessa polarità [verso] di $\hat{x}_{k}^{(q)}$ e valore $\hat{x}_{0,k}^{(q)}$ eguale alla *k*-esima componente del summenzionato $\hat{x}_{0}^{(q)}$ (vedasi la Fig. 7.10(d), ove la costruzione di Q_{sub} corrispondente alla sopraddetta scelta di X_Q è illustrata a titolo di esempio).

Sia ora $C_{Q_{sub}} = \mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ il circuito ottenuto da C_Q rimpiazzando Q con Q_{sub} in modo tale che $a_{sub,k}^{(q)}$ prenda il posto di $a_k^{(q)}$ e $b_{sub,k}^{(q)}$ prenda il posto di $b_k^{(q)}$. Sia Q_{sub} LC in $C_{Q_{sub}}$. Allora C_Q e $C_{Q_{sub}}$ sono GEQ.

Dimostrazione

Si osservi preliminarmente che – dal momento che, per ipotesi, Q_0 è URRA $\hat{x}^{(q)}$ - gli elementi degli insiemi $\{m_{kj}\}_{k,j=1}^N$ e $\{\hat{x}_{0,k}^{(q)}\}_{k=1}^N$ sono quantità ben definite: difatti, per un circuito lineare, l'unicità della soluzione non dipende dal valore dei suoi generatori indipendenti.

Ora, dalla definizione stessa di Q_{sub} e tenendo il significato di (7.27) in conto, si ha che le equazioni costitutive di Q_{sub} possono darsi come

$$\hat{\boldsymbol{x}}^{(q)} = \hat{\boldsymbol{x}}_{0}^{(q)} + M \boldsymbol{x}^{(q)}$$
(7.28)

ove $\hat{x}_{0}^{(q)} = col \left[\hat{x}_{0,k}^{(q)} \right]_{k=1}^{N} e \ M = \left[m_{kj} \right]_{k,j=1}^{N}$; si osservi che la (7.28) mostra che Q_{sub} è BD. D'altra parte, si può scrivere sinteticamente

$$\left\langle m_{kj} = \hat{x}_k / x_j \Big|_{\substack{\text{generatori indipendenti interni a Q \text{ disattivati} \\ x_i = 0, \forall i \neq j}} \right\rangle_{k,j=1}^N$$
(7.29)

 $\left\langle \hat{x}_{0,k}^{(q)} = \hat{x}_{k}^{(q)} \Big|_{\substack{\text{generatori indipendenti interni a } Q \text{ attivi}}_{x^{(q)} = 0} \right\rangle_{k=1}^{N}$ (7.30)

Poiché Q è lineare e BD per ipotesi, da (7.29) e (7.30) segue che le (7.28) sono equazioni costitutive anche per Q. Inoltre, sempre per ipotesi, $Q \in Q_{sub}$ sono isomorfi ed entrambi LC nei rispettivi circuiti. Siamo dunque nelle ipotesi del TSGR Debole, che conduce immediatamente alla tesi.

7.6.2 Commenti

- 1. Al contrario di quanto accade per i casi considerati nel Paragrafo 7.3.1, il Q_{sub} menzionato nel precedente teorema non dipende dalle soluzioni della rete originaria, ma sola da Q come entità a sé stante. Ciò è in accordo col fatto, messo in luce dalla dimostrazione precedente, che il proposto Teorema di Thevénin/Norton generalizzato è una conseguenza del TSGR Debole piuttosto che del TSGR Forte.
- 2. In virtù della definizione stessa di Q_{sub} , si ha che quest'ultimo risulta LC in $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ se e solo se lo stesso accade per \mathcal{M} in $\mathcal{R} \oplus \mathcal{M}$: difatti, l'operazione di inserimento dei generatori non ha effetti sulla proprietà in questione. Questo è il primo dei soli due vincoli a cui \mathcal{M} è soggetto, il secondo essendo rappresentato dalla (7.27), la quale può, peraltro, realizzarsi in svariati modi. Un possibile criterio può essere quello di impiegare il numero minimo di parametri, che è subito visto essere pari a N^2 , ossia il numero degli elementi della matrice al secondo membro della stessa. Così, quando N = 1, M si riduce a uno scalare e basta un solo parametro che dalla (7.27) è subito identificato come un'immittenza.
- 3. Si vede allora che nel caso particolare N = 1 i summenzionati argomenti conducono ai convenzionali teoremi di Thévenin (quando $\mathbf{x}^{(q)} = [i_1^{(q)}]$) o di Norton (quando $\mathbf{x}^{(q)} = [v_1^{(q)}]$). Tali teoremi sono naturalmente estesi al caso di generico *N*-porto quando sia $\langle x_k^{(q)} = i_k^{(q)} \rangle_{k=1}^N$ o $\langle x_k^{(q)} = v_k^{(q)} \rangle_{k=1}^N$. Inoltre, com'è subito visto, nel caso di generico *N*-porto $2^N - 2$ ulteriori teoremi ibridi alla Thévenin/Norton si ottengono immediatamente scegliendo – per m = 1, 2, ..., N-

e

 $x_m^{(q)} \in \{v_m^{(q)}, i_m^{(q)}\}$ in modo arbitrario e indipendente dagli altri $x_l^{(q)}$ con $l \neq m$.

4. Una soluzione alternativa per realizzare \mathcal{M} discende direttamente dalla definizione stessa di \mathcal{M} . Difatti, ricordando la (7.29) ci si convince facilmente che, fra i possibili *N*-porti che soddisfano la (7.27), si trova certamente Q_{off} , vale a dire l'*N*-porto che si ottiene da Q stesso semplicemente disattivando i suoi generatori indipendenti. E' importante sottolineare che tale possibilità è assolutamente indipendente dalla natura di $\mathbf{x}^{(q)}$: ne segue che – fissando $\mathcal{M} \equiv Q_{off}$ in Fig. 7.10(d) – si possono ottenere tante realizzazioni distinte di Q_{sub} quanto sono le scelte di $\mathbf{x}^{(q)}$ in corrispondenza delle quali Q_0 è URRA $\hat{\mathbf{x}}^{(q)}$, semplicemente cambiando, coerentemente con la scelta operata, nella stessa Fig. 7.10(d) la natura dei generatori corrispondenti alle componenti di $\hat{\mathbf{x}}_{0}^{(q)}$.

7.6.3 Teorema di Thevénin-Norton generalizzato: versione con nullori (Teorema 7.6.3)

Enunciato

Sia Q un N-porto etichettato q e – per k=1,2,...,N - siano $\left(a_k^{(q)},b_k^{(q)}\right)$ i terminali della sua k-esima porta (Fig. 7.11(a)). Sia $C_Q = \mathcal{R} \oplus Q$ (Fig. 7.3(b)) e sia Q BD e LC in C_Q . Sia $w^{(q)} = \left[row\left[v_i^{(q)}\right]_{i=1}^N row\left[i_j^{(q)}\right]_{j=1}^N\right]^T$ il vettore delle VE pertinenti a Q. Inoltre, sia $\mathcal{W}_Q = \left\{v_k^{(q)}, i_k^{(q)}\right\}_{k=1}^N$ l'insieme delle componenti di $w^{(q)}$ e $X_Q = \left\{x_k^{(q)}\right\}_{k=1}^N \subset \mathcal{W}_Q$ un sottoinsieme di N elementi di \mathcal{W}_Q scelti in accordo alla seguente regola

$$\exists j \in \{1, 2, \dots, N\} \left(v_j \notin X_Q \land i_j \notin X_Q \right)$$
(7.31)

Ancora, sia $\overline{X}_Q = \mathcal{W}_Q - X_Q = \left\{\overline{x}_k^{(q)}\right\}_{k=1}^N \subset \mathcal{W}_Q$ il complemento di X_Q rispetto a \mathcal{W}_Q .

Ora, si consideri il circuito Q_0 ottenuto a partire da Q tramite le seguenti operazioni: per k=1,2,...,N, la k-esima porta of Q è

 $\begin{cases} \text{chiusa su un noratore} & \text{se } v_k^{(q)} \notin X_Q \land i_k^{(q)} \notin X_Q \\ \text{chiusa su un nullatore} & \text{se } v_k^{(q)} \in X_Q \land i_k^{(q)} \in X_Q \\ \text{cortocircuitata} & \text{se } v_k^{(q)} \in X_Q \land i_k^{(q)} \notin X_Q \\ \text{lasciata aperta} & \text{se } v_k^{(q)} \notin X_Q \land i_k^{(q)} \in X_Q \end{cases}$ (7.32)

(si veda la Fig. 7.11(b), ove è data la rappresentazione concettuale del circuito Q_0 corrispondente a una generica scelta di X_Q per la quale $i_1^{(q)} \notin X_Q, v_1^{(q)} \notin X_Q, i_p^{(q)} \notin X_Q, v_p^{(q)} \notin X_Q, i_k^{(q)} \notin X_Q, v_k^{(q)} \notin X_Q, i_N^{(q)} \notin X_Q, v_N^{(q)} \notin X_Q)$. Sia Q_0 URRA $\bar{x}^{(q)} = col \left[\bar{x}_k^{(q)} \right]_{k=1}^N$ e sia $\bar{x}_0^{(q)} = col \left[\bar{x}_{0,k}^{(q)} \right]_{k=1}^N$ l'unica soluzione di Q_0 rispetto a $\bar{x}^{(q)}$.

Si consideri, inoltre, un *N*-porto \mathcal{L} etichettato q, avente terminali $\left\{\left(a_{sub,k}^{(q)}, b_{sub,k}^{(q)}\right)\right\}_{k=1}^{N}$ e isomorfo a Q. Siano

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{(q)} = L \boldsymbol{x}^{(q)} = \left[l_{rj} \right]_{r,j=1}^{N} \boldsymbol{x}^{(q)}$$
(7.33)

le equazioni costitutive di \mathcal{L} , ove $L = [l_{rj}]_{r,j=1}^{N}$ e – per r, j=1,2,...,N - il valore di l_{rj} (rispetto a una opportuna unità di misura) coincide con il valore assunto da $\overline{x}_{r}^{(q)}$ nel circuito Q_{j} ottenuto da Q tramite le seguenti operazioni: (a) i generatori indipendenti in Q sono disattivati, così da ottenere l'*N*-porto Q_{off} e (b) per k=1,2,...,N, la *k*-esima porta di Q_{off} è terminata come segue:

 $\begin{cases} \text{con la serie di un nullatore e un GTU} & \text{se } x_j^{(q)} = v_k^{(q)} \land i_k^{(q)} \in X_Q \\ \text{con il parallelo di un nullatore e un GCU} & \text{se } x_j^{(q)} = i_k^{(q)} \land v_k^{(q)} \in X_Q \\ \text{con un GTU} & \text{se } x_j^{(q)} = v_k^{(q)} \land i_k^{(q)} \notin X_Q \\ \text{con un GCU} & \text{se } x_j^{(q)} = i_k^{(q)} \land v_k^{(q)} \notin X_Q \\ \text{secondo la regola in (7.32)} & \text{se } x_j^{(q)} \notin \{i_k^{(q)}, v_k^{(q)}\} \end{cases}$ (7.34)



Fig. 7.11 - (a) Un *N*-porto lineare *Q* etichettato *q*, (b) il circuito *Q*₀ nel caso si operi per *X*_Q una scelta tale che $i_1^{(q)} \notin X_Q, v_1^{(q)} \notin X_Q, i_p^{(q)} \notin X_Q, v_p^{(q)} \in X_Q, i_k^{(q)} \in X_Q, v_k^{(q)} \in X_Q, v_N^{(q)} \notin X_Q$, (c) il circuito *Q*_j per il calcolo delle quantità $\{I_{rj}\}_{r=1}^N$ corrispondenti alla summenzionata scelta di *X*_Q (si suppone qui che le VE siano state ribattezzate in modo tale che $\overline{x}_1^{(q)} = v_1^{(q)}, \overline{x}_2^{(q)} = i_1^{(q)}, \overline{x}_r^{(q)} = i_p^{(q)}, \overline{x}_N^{(q)} = v_N^{(q)}, x_j^{(q)} = i_k^{(q)}$), e (d) un *N*-porto *Q*_{sub} etichettato *q*, con le stesse equazioni costitutive di *Q*.

ove GTU sta per "generatore di tensione unitario", GCU sta per "generatore di corrente unitario" e, in ognuno dei casi considerati, il generatore in questione ha polarità/verso coerente con la polarità/verso di riferimento di $x_j^{(q)}$ (in Fig. 7.11(c) è mostrato il Q_j corrispondente alla summenzionata scelta di χ_Q , nell'ipotesi che le VE siano state ribattezzate in modo da avere $\overline{x}_1^{(q)} = v_1^{(q)}, \overline{x}_2^{(q)} = i_1^{(q)}, \overline{x}_r^{(q)} = i_p^{(q)}, \overline{x}_N^{(q)} = v_N^{(q)}, x_j^{(q)} = i_k^{(q)}$).

Infine, si consideri l'*N*-porto Q_{sub} ottenuto da \mathcal{L} per mezzo della seguente operazione. Per k=1,2,...,N la k-esima porta di \mathcal{L} è:

 $\begin{cases} \text{dotata di un GT } v_{0,k}^{(q)} \text{ in serie} \\ \text{e un GC } i_{0,k}^{(q)} \text{ in parallelo} \\ \text{dotata solo di un GT } v_{0,k}^{(q)} \text{ in serie} \\ \text{dotata solo di un GT } v_{0,k}^{(q)} \text{ in serie} \\ \text{dotata solo di un GC } i_{0,k}^{(q)} \text{ in parallelo} \\ \text{se } v_{k}^{(q)} \notin \overline{X}_{Q} \wedge i_{k}^{(q)} \notin \overline{X}_{Q} \\ \text{lasciata intatta} \\ \text{se } v_{k}^{(q)} \notin \overline{X}_{Q} \wedge i_{k}^{(q)} \notin \overline{X}_{Q} \end{cases}$ (7.35)

ove GT sta per "generatore di tensione", GC sta per "generatore di corrente" e $v_{0,k}^{(q)}$ [$i_{0,k}^{(q)}$] ha polarità [verso] coerente con la polarità [verso] di riferimento di $v_k^{(q)}$ [$i_k^{(q)}$] e il suo valore coincide con quello assunto da $v_k^{(q)}$ [$i_k^{(q)}$] nel vettore $\bar{\mathbf{x}}_0^{(q)}$ definito sopra (Fig. 7.11(d)).

Sia $C_{Q_{sub}} = \mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ il circuito ottenuto da C_Q rimpiazzando Q con Q_{sub} in modo tale che $a_{sub,k}^{(q)}$ prenda il posto di $a_k^{(q)} \in b_{sub,k}^{(q)}$ prenda il posto di $b_k^{(q)}$. Sia Q_{sub} LC in $C_{Q_{sub}} = \mathcal{R} \oplus Q_{sub}$. Allora $C_Q \in C_{Q_{sub}}$ sono GEQ.

Dimostrazione

La prova può essere ottenuta ricalcando, con poche ovvie modifiche, quella del Teorema 7.6.1.

7.6.4 Commenti

E' subito visto che possono farsi, in relazione al teorema precedente, commenti del tutto analoghi a quelli del Paragrafo 7.6.2: basta sostituire \mathcal{M} con \mathcal{L} , \mathcal{M} con L, $\hat{x}^{(q)}$ con $\bar{x}^{(q)}$, $\hat{x}_0^{(q)}$ con $\bar{x}_0^{(q)}$, e la Fig. 7.10(d) con la Fig. 7.11(d). Si deve osservare tuttavia che, al contrario di quanto accadeva in relazione al Teorema 7.6.1, per il Teorema 7.6.3 il caso N=1 è privo di senso, perché incompatibile con la (7.31).

7.7 Teoremi di Miller generalizzati

In questa sezione si mostra come il TSGR Forte possa essere impiegato per ottenere generalizzazioni del Teorema di Miller e del suo Duale [26] ai casi di tensioni/correnti multiple e di multiporti.

7.7.1 Teorema di Miller per tensioni multiple (Teorema 7.7.1)

Enunciato

Si consideri un circuito \mathcal{R} ed N+1 suoi nodi [1, [2], ..., [N], [N+1] (Fig. 7.12(a)). Sia poi C il circuito ottenuto da \mathcal{R} connettendo i nodi [1] e [N+1] per mezzo di un'ammettenza $Y \neq \infty$; sia C GUR. Per j=1,2,...,N si denoti con v_j la caduta di tensione fra i nodi [j] e [j+1] di C (si veda ancora la Fig. 7.12(a)) e sia v_j^* il corrispondente (unico) valore assunto.

Sia, per un certo p, $v_p^* \neq 0$ e si definiscano le entità

$$\left\langle \begin{array}{l} \left\langle \mu_{j} = \frac{v_{j}^{*}}{v_{p}^{*}} \right\rangle_{j=1}^{N} \\ \left\langle Y_{k} = \begin{cases} Y_{j=1}^{N} \mu_{j} = Y_{p} & k = p \\ Y_{p} / \mu_{k} & k \neq p \land \mu_{k} \neq 0 \\ \infty & k \neq p \land \mu_{k} = 0 \end{cases} \right\rangle_{k=1}^{N} \end{array}$$
(7.36)

Si consideri, inoltre, il circuito C_{split} ottenuto da C per mezzo delle seguenti operazioni: (a) l'ammettenza Y è rimpiazzata con un circuito aperto e (ii) per j=1,2,...,N un'ammettenza Y_j data da (7.36) è inserita fra i nodi j e j+1 (Fig. 7.12(b)). Se C_{split} è URRA $col [v_j]_{j=1}^N$, allora C_{split} è GUR e C e C_{split} sono EQRA gli elementi interni a \mathcal{R} . *Dimostrazione*

Si consideri in *C* l'*N*-porto *Q* posto in evidenza per mezzo del rettangolo tratteggiato, come mostrato in Fig. 7.12(c). Tale operazione consente di riguardare *C* come $\mathcal{R} \oplus Q$. Si vede immediatamente che *Q* è ALC e dunque certamente LC in $\mathcal{R} \oplus Q$. Sia *Q* etichettato *q* e sia $\boldsymbol{w}^{(q)} = \left[row \left[v_k^{(q)} \right]_{k=1}^N row \left[i_k^{(q)} \right]_{k=1}^N \right]^T$ il vettore delle sue VE; allora le sue equazioni costitutive possono darsi come

$$\left\langle i_{k}^{(q)} = Y \sum_{j=1}^{N} v_{j}^{(q)} \right\rangle_{k=1}^{N}$$
 (7.37)

La (7.37) assieme alla topologia di $\mathcal{R} \oplus Q$ mostra che $Q \in BD$ in $\mathcal{R} \oplus Q$. Poiché $C \in GUR$ per ipotesi, lo stesso vale per $\mathcal{R} \oplus Q$. Sia $w^{(q)} = w^{(q)*} = \left[row \left[v_k^{(q)*} \right]_{k=1}^N row \left[i_k^{(q)*} \right]_{k=1}^N \right]^T$ la (unica) soluzione di $\mathcal{R} \oplus Q$ rispetto a $w^{(q)}$. Allora dalla (7.37) segue

$$\left\langle i_{k}^{(q)*} = Y \sum_{j=1}^{N} v_{j}^{(q)*} \right\rangle_{k=1}^{N}$$
 (7.38)



Fig. 7.12 - (a) Un circuito l con un'ammettenza Y fra i nodi l and N+1, (b) il circuito C_{split} ottenuto da l rimpiazzando Y con una batteria di ammettenze $\{Y_i\}_{i=1}^{p}$, (c) l ora riguardato come $\mathcal{R} \oplus Q$ e (d) C_{split} ora riguardato come $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$.

Si ponga ora in evidenza in C_{split} l'*N*-porto Q_{sub} , come mostrato in Fig. 7.12(d). In tal modo, è possibile riguardare C_{split} come $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ e, in quest'ultimo circuito, Q_{sub} è subito visto essere LC (in quanto ALC di suo). Sia Q_{sub} etichettato q; allora le sue equazioni costitutive possono darsi come

$$\left\langle \begin{cases} i_k^{(q)} = Y_k v_k^{(q)} \ se \ \mu_k \neq 0 \\ v_k^{(q)} = 0 \ se \ \mu_k = 0 \end{cases} \right\rangle_{k=1}^N$$
(7.39)

La (7.39) mostra che Q_{sub} è BD in $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$; inoltre, si vede immediatamente che

$$\left\langle v_{k}^{\left(q\right)} = v_{k} \right\rangle_{k=1}^{P} \tag{7.40}$$

Poiché per ipotesi C_{split} è URRA $col \left[v_j \right]_{j=1}^N$ e in virtù di (7.39) e (7.40), si ha che $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ è URRA $w^{(q)}$. Inoltre, ricordando (7.36) e (7.38) – per quei $k \in \{1, 2, ..., P\}$ per i quali $\mu_k \neq 0$ - si trova

$$Y_{k}v_{k}^{(q)*} = Yv_{k}^{(q)*}\sum_{j=1}^{N} \mu_{j} / \mu_{k} = Yv_{k}^{(q)*}\sum_{j=1}^{N} v_{j}^{*} / v_{k}^{*}$$

$$= Yv_{k}^{(q)*}\sum_{j=1}^{N} v_{j}^{(q)*} / v_{k}^{(q)*} = Y\sum_{j=1}^{N} v_{j}^{(q)*} = i_{k}^{(q)*}$$

(7.41)

La (7.41), congiunta al fatto che (in virtù della (7.36)) la condizione $\mu_k = 0$ equivale a $v_k^{(q)*} = 0$, mostra che $w^{(q)*}$ soddisfa le equazioni costitutive di Q_{sub} (7.39). Inoltre, si riconosce subito che $Q \in Q_{sub}$ sono isomorfi. Si può dunque invocare il TSGR Forte e concludere con esso che $\mathcal{R} \oplus Q \in \mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ sono GEQ, il che porta direttamente alla tesi.

7.7.2 Teorema Duale di Miller per correnti multiple: caso dell'insieme di taglio (Teorema 7.7.2)

Enunciato

Si considerino due circuiti $C' \in C''$ topologicamente disgiunti. Siano P+1 nodi $[\underline{1'}, [\underline{2'}], ..., [\underline{P'}], [\underline{0'}]$ individuati in C' e siano P+1 nodi $[\underline{1''}], [\underline{2''}], ..., [\underline{P''}], [\underline{0''}]$ individuati in C''. Si consideri il circuito C ottenuto collegando il nodo $[\underline{0'}]$ di C' con il nodo $[\underline{0''}]$ di C'' per mezzo di un ramo β_0 consistente di un'impedenza $Z \neq \infty$ e - per j=1,2,...,P - il nodo [j'] di C' con il nodo [j'']di C'' per mezzo di un ramo β_j consistente in un corto circuito (Fig. 7.13 (a)). Sia C GUR e, per j=1,2,...,P, sia i_j la corrente che fluisce in β_j da [j'] a [j'']; sia i_j^* il corrispondente (unico) valore. Sia, per un certo *m*, $i_m^* \neq 0$ e si definiscano le entità



Fig. 7.13 - (a) Il circuito *C*, (b) il circuito *C*_{split}, (c) il circuito in (a) ora riguardato come $\mathcal{R} \oplus \mathcal{Q}$ e (d) il circuito in (b) ora riguardato come $\mathcal{R} \oplus \mathcal{Q}_{sub}$.

Si consideri, ora, il circuito C_{split} ottenuto da C per mezzo delle seguenti operazioni: (a) l'impedenza Z in β_0 è rimpiazzata con un corto circuito e (b) per j=1,2,...,P un impedenza Z_j data dalla (7.42) è inserita in β_j (Fig.

7.13(b)). Se C_{split} è URRA $\left[row \left[i_j \right]_{j=1}^P row \left[v_{j'0} \right]_{j=1}^P \right]^T$ - ove, per

 $j=1,2,...,P, v_{j'0}$ è la caduta di tensione fra i nodi [j'] e [0'] - allora C_{split} è GUR e C e C_{split} sono EQRA l'insieme degli elementi interni a C' o C''. Dimostrazione

Si consideri in *C* l'*N*-porto *Q* (*N*=2*P*) e la rete *R* evidenziata per mezzo del rettangolo tratteggiato, come mostrato in Fig. 7.13(c): tale operazione consente di riguardare *C* come $\mathcal{R} \oplus Q$. Si vede immediatamente che *Q* è ALC e dunque certamente LC in $\mathcal{R} \oplus Q$. Sia, inoltre, *Q* etichettato *q* e sia $\mathbf{w}^{(q)} = \left[row \left[v_k^{(q)} \right]_{k=1}^N row \left[i_k^{(q)} \right]_{k=1}^N \right]^T$ il vettore delle sue VE; allora le equazioni

costitutive di Q possono darsi come

$$\left\langle v_{k}^{(q)} = Z \sum_{j=1}^{P} i_{j}^{(q)} + v_{k+P}^{(q)}, i_{k+P}^{(q)} = -i_{k}^{(q)} \right\rangle_{k=1}^{P}$$
(7.43)

La (7.43) assieme alla topologia di $\mathcal{R} \oplus Q$ mostra che Q è BD in $\mathcal{R} \oplus Q$. Difatti, qualora esista in \mathcal{R} qualche generatore dipendente αv_Z controllato dalla tensione v_Z su Z, esso può essere espresso come $\lambda Z i_0 = \varepsilon i_0$, ove i_0 è la corrente attraverso β_0 : ciò riconduce all'ipotesi che \mathcal{R} non contenga generatori dipendenti controllati da VE esterne a quest'ultimo circuito.

Poiché *C* è GUR per ipotesi, lo stesso vale per $\mathcal{R} \oplus Q$. Sia $\mathbf{w}^{(q)} = \mathbf{w}^{(q)*} = \left[row \left[v_k^{(q)*} \right]_{k=1}^N row \left[i_k^{(q)*} \right]_{k=1}^N \right]^T$ la (unica) soluzione di $\mathcal{R} \oplus Q$

rispetto a $w^{(q)}$. Allora da (7.43) segue

$$\left\langle v_{k}^{(q)*} = Z \sum_{j=1}^{P} i_{j}^{(q)*} + v_{k+P}^{(q)*}, i_{k+P}^{(q)*} = -i_{k}^{(q)*} \right\rangle_{k=1}^{P}$$
(7.44)

Si evidenzino ora in C_{split} sia \mathcal{R} che l'*N*-porto Q_{sub} come mostrato in Fig. 7.13 (d). Questo consente di riguardare C_{split} come $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ e, in quest'ultimo circuito, Q_{sub} è subito visto essere LC (essendo ALC di suo). Sia Q_{sub} etichettato q: allora le sue equazioni costitutive possono darsi come

$$\left\langle \begin{cases} v_k^{(q)} = Z_k i_k^{(q)} + v_{k+P}^{(q)} & \text{se } \mu_k \neq 0 \\ i_k^{(q)} = 0 & \text{se } \mu_k = 0 \end{cases}, i_{k+P}^{(q)} = -i_k^{(q)} \right\rangle_{k=1}^P$$
(7.45)

La (7.45) mostra che Q_{sub} è BD in $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$. E, inoltre, subito visto che

$$\left\langle v_{k}^{(q)} = v_{k'0}, i_{k}^{(q)} = i_{k} \right\rangle_{k=1}^{P}$$
 (7.46)

Poiché per ipotesi C_{split} è URRA $\left[row \begin{bmatrix} i_j \end{bmatrix}_{j=1}^{P} row \begin{bmatrix} v_{j'0} \end{bmatrix}_{j=1}^{P} \end{bmatrix}^{T}$ e in virtù di (7.45) e (7.46), si ha che $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ è URRA $w^{(q)}$. Inoltre, ricordando (7.42) e (7.44) per quei $k \in \{1, 2, ..., P\}$ per i quali $\mu_k \neq 0$, si trova

$$Z_{k}i_{k}^{(q)*} + v_{k+P}^{(q)*} = Zi_{k}^{(q)*}\sum_{j=1}^{N} \mu_{j} / \mu_{k} + v_{k+P}^{(q)*} = Zi_{k}^{(q)*}\sum_{j=1}^{N} i_{j}^{*} / i_{k}^{*} + v_{k+P}^{(q)*}$$

$$= Zi_{k}^{(q)*}\sum_{j=1}^{N} i_{j}^{(q)*} / i_{k}^{(q)*} + v_{k+P}^{(q)*} = Z\sum_{j=1}^{N} i_{j}^{(q)*} + v_{k+P}^{(q)*} = v_{k}^{(q)*}$$
(7.47)

Le (7.44) e (7.47) - congiunte con il fatto che (in forza di (7.42) e (7.46)) $\mu_k = 0$ è equivalente a $i_k^{(q)*} = 0$ - mostrano che $w^{(q)*}$ soddisfa le equazioni costitutive di Q_{sub} (7.45). Inoltre, è subito visto che Q e Q_{sub} sono isomorfi. Si può dunque applicare il TSGR Forte e concludere per mezzo di quest'ultimo che $\mathcal{R} \oplus Q$ e $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ sono GEQ, il che conduce immediatamente alla tesi.

7.7.3 Teorema Duale di Miller per correnti multiple: caso nodale (Teorema 7.7.3)

Enunciato

Si consideri un circuito \mathcal{R} ed N+1 suoi nodi [1, [2, ..., N], [0]. Sia $[\nu]$ un nodo isolato esterno a \mathcal{R} . Sia, inoltre, C il circuito ottenuto da \mathcal{R} connettendo i nodi [0] e $[\nu]$ tramite un ramo β_0 consistente di un'impedenza $Z \neq \infty$ e, per j=1,2,...,N, il nodo [j] con il nodo $[\nu]$ per mezzo di un ramo β_j consistente in un corto circuito (Fig. 7.14(a)). Sia C GUR. Per j=1,2,...,N, si denoti con i_j la corrente che scorre attraverso β_j da [j] a $[\nu]$ e sia i_j^* il corrispondente (unico) valore. Sia, per un certo p, $i_p^* \neq 0$ e si definiscano le entità





Fig. 7.14 - (a) Il circuito C, (b) circuito C_{split} , e (c) C ora riguardato come $\mathcal{R} \oplus Q$.

Si consideri, ora, il circuito C_{split} ottenuto da C per mezzo delle seguenti operazioni: (a) l'impedenza Z in β_0 è rimpiazzata con un cortocircuito e (b) per i=1,2,...,N un'impedenza Z_i data da (7.48) è inserita in β_i (Fig. 7.14(b)).

Se C_{split} è URRA $col[i_j]_{j=1}^N$, allora C_{split} è GUR e C e C_{split} sono EQRA l'insieme degli elementi interni a \mathcal{R} .

Dimostrazione La proposizione allo studio non è altro che il Teorema 7.7.2 nel caso particolare che *C*" sia semplicemente costituito dall'insieme di nodi [1"], [2"],...,[*P*"], [0"] (con *P* = *N*) coincidenti in uno solo. Evidentemente in tale caso particolare la condizione di univoca risolvibilità rispetto a *col* $\begin{bmatrix} v_{j'0} \end{bmatrix}_{j=1}^{N}$ è implicita in quella di univoca risolvibilità rispetto a *col* $\begin{bmatrix} i_j \end{bmatrix}_{j=1}^{N}$ (perché $\left\langle v_{j'0} = Z \sum_{k=1}^{N} i_k \right\rangle_{j=1}^{N}$) e può essere omessa.

7.7.4 Teorema di Miller generalizzato per multiporti: versione senza nullori (Teorema 7.7.4)

Enunciato

Sia Q un N-porto etichettato q e – per k=1,2,...,N - siano $\left(a_{k}^{(q)},b_{k}^{(q)}\right)$ i terminali della sua k-esima porta (Fig. 7.15(a)). Sia $C_{Q} = \mathcal{R} \oplus Q$ e sia Q BD e LC in C_{Q} . Sia $\mathbf{w}^{(q)} = \left[row\left[v_{k}^{(q)}\right]_{k=1}^{N}row\left[i_{k}^{(q)}\right]_{k=1}^{N}\right]^{T}$ il vettore delle VE pertinenti a Q. Siano, inoltre, $\mathcal{W}_{Q} = \left\{v_{k}^{(q)}, i_{k}^{(q)}\right\}_{k=1}^{N}$ l'insieme delle componenti di $\mathbf{w}^{(q)}$ e $X_{Q} = \left\{x_{k}^{(q)}\right\}_{k=1}^{N} \subset \mathcal{W}_{Q}$ un sottoinsieme di N elementi di \mathcal{W}_{Q} scelti in accordo alla seguente regola

$$\forall k \in \{1, 2, ..., N\} \left(x_k^{(q)} \in \left\{ v_k^{(q)}, i_k^{(q)} \right\} \right)$$
(7.49)

Sia, ancora $\hat{\chi}_Q = \mathcal{W}_Q - \chi_Q = \left\{ \hat{x}_j^{(q)} \right\}_{j=1}^N \subset \mathcal{W}_Q$ il complemento di χ_Q rispetto a \mathcal{W}_Q : qui – per $k = 1, 2, ..., N - \hat{x}_k^{(q)}$ rappresenta la VE duale di $x_k^{(q)}$. Sia $\mathbf{x}^{(q)} = col \left[x_k^{(q)} \right]_{k=1}^N$ e $\hat{\mathbf{x}}^{(q)} = col \left[\hat{x}_k^{(q)} \right]_{k=1}^N$ e si assuma che le equazioni costitutive di Q possano essere poste nella forma

$$\hat{\boldsymbol{x}}^{(q)} = M \boldsymbol{x}^{(q)} = \left[m_{ij} \right]_{i, j=1}^{N} \boldsymbol{x}^{(q)}$$
(7.50)

ove $M = \left[m_{ij}\right]_{i,j=1}^N$.

Sia
$$C_Q$$
 GUR e sia⁴ $w^{(q)} = w^{(q)*} = \left[row \left[x_k^{(q)*} \right]_{k=1}^N row \left[\hat{x}_k^{(q)*} \right]_{k=1}^N \right]^T$ la (unica)

soluzione di C_Q rispetto a $w^{(q)}$. Sia, per un certo p, $x_p^{(q)*} \neq 0$ e si definiscano le quantità

$$\left\langle \mu_{j} = \frac{x_{j}^{(q)*}}{x_{p}^{(q)*}} \right\rangle_{j=1}^{N}$$
(7.51)

$$\left\langle m_{k} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_{k}} \sum_{j=1}^{N} m_{kj} \mu_{j} & \mu_{k} \neq 0 \\ \infty & \mu_{k} = 0 \end{cases} \right\rangle_{k=1}^{N}$$
(7.52)

Si consideri ora l'*N*-porto Q_{sub} etichettato q e avente terminali $\left\{\left(a_{sub,k}^{(q)}, b_{sub,k}^{(q)}\right)\right\}_{k=1}^{N}$, che si ottiene dal digrafo $G^{(q)}$ di Q per mezzo della seguente operazione: per k=1,2,...,N (a) $a_{k}^{(q)}$ è rimpiazzato con $a_{sub,k}^{(q)}$ e $b_{k}^{(q)}$ è rimpiazzato con $b_{sub,k}^{(q)}$ e (b) il k-esimo lato di $G^{(q)}$ è rimpiazzato da una immittenza m_{k} data dalla (7.52) (Fig. 7.15(b)).

Sia $C_{Q_{sub}} = \mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ il circuito C_Q ottenuto rimpiazzando Q con Q_{sub} in modo tale che $a_{sub,k}^{(q)}$ prenda il posto di $a_k^{(q)} \in b_{sub,k}^{(q)}$ prenda il posto di $b_k^{(q)}$. Se $C_{Q_{sub}}$ è URRA $\mathbf{x}^{(q)} = col \left[x_k^{(q)} \right]_{k=1}^N$, allora $C_{Q_{sub}}$ è GUR e $C_Q \in C_{Q_{sub}}$ sono GEQ.

⁴ Si commette qui un leggero abuso di notazione poichè, a rigore, i vettori $\left[row \left[x_{k}^{(q)} \right]_{k=1}^{N} row \left[\hat{x}_{k}^{(q)} \right]_{k=1}^{N} \right]^{T} e \left[row \left[v_{k}^{(q)} \right]_{k=1}^{N} row \left[i_{k}^{(q)} \right]_{k=1}^{N} \right]^{T}$ non coincidono, differendo in generale per l'ordine delle rispettive componenti. E' subito visto, tuttavia, che tale ordine non ha alcuna peso nella discussione che segue.



Dimostrazione

Fig. 7.15 - (a) Un *N*-porto *Q* etichettato *q*, (b) rappresentazione *concettuale* del particolare *N*-porto etichettato *q* concernente la versione senza nullori del Teorema Generalizzato di Miller per multiporti, (c) il digrafo del 6-porto \mathcal{N} di Fig.7.2(a) qui ridisegnato per comodità e (d) l'*N*-porto Q_{sub} pertinente a \mathcal{N} in corrispondenza della particolare scelta $X_Q = \left\{ i_1^{(q)}, v_2^{(q)}, v_3^{(q)}, i_4^{(q)}, v_5^{(q)}, i_6^{(q)} \right\}$, ottenuto dal digrafo in (c) come descritto nell'enunciato del teorema allo studio.

La (7.50) può riscriversi come

$$\left\langle \hat{x}_{k}^{(q)} = \sum_{j=1}^{N} m_{kj} x_{j}^{(q)} \right\rangle_{k=1}^{N}$$
 (7.53)

Poiché $\boldsymbol{w}^{(q)} = \boldsymbol{w}^{(q)*} = \left[row \left[x_k^{(q)*} \right]_{k=1}^N row \left[\hat{x}_k^{(q)*} \right]_{k=1}^N \right]^T$ è la (unica) soluzione di

 C_Q rispetto a $w^{(q)}$, deve aversi

$$\left\langle \hat{x}_{k}^{(q)*} = \sum_{j=1}^{N} m_{kj} x_{j}^{(q)*} \right\rangle_{k=1}^{N}$$
 (7.54)

D'altra parte, per la definizione stessa di Q_{sub} , si trova che le equazioni costitutive di quest'ultimo possono darsi come

$$\begin{pmatrix} \left\{ \hat{x}_{k}^{(q)} = m_{k} x_{k}^{(q)} \ \mu_{k} \neq 0 \\ x_{k}^{(q)} = 0 & \mu_{k} = 0 \end{pmatrix}_{k=1}^{N}$$
(7.55)

In forza della (7.55) e poiché Q è BD per ipotesi, si ha che tale è anche Q_{sub} . Inoltre, è subito visto che quest'ultimo è ALC e quindi certamente LC in $C_{Q_{sub}} = \mathcal{R} \oplus Q_{sub}$.

Per quei $k \in \{1, 2, ..., N\}$ per i quali $\mu_k \neq 0$, ponendo $x_k^{(q)} = x_k^{(q)^*}$ nel secondo membro della (7.55) e tenendo conto di (7.54), (7.51) e (7.52) si trova

$$m_k x_k^{(q)*} = \frac{1}{\mu_k} \sum_{j=1}^N m_{kj} \mu_j x_k^{(q)*} = \sum_{j=1}^N m_{kj} x_j^{(q)*} = \hat{x}_k^{(q)*}$$
(7.56)

La (7.56), congiunta con il fatto che la condizione $\mu_k = 0$ è equivalente a $x_k^{(q)*} = 0$, mostra che $w^{(q)*}$ soddisfa la (7.55). Infine, per ipotesi $C_{Q_{sub}}$ è URRA $x^{(q)}$ e, in forza della (7.50), esso è anche URRA l'intero $w^{(q)}$. Tutte le ipotesi del TSGR Forte sono dunque soddisfatte, il che conduce direttamente alla tesi.

7.7.5 Teorema di Miller generalizzato per multiporti: versione con nullori (Teorema 7.7.5)

Enunciato

Sia Q un N-porto etichettato q e – per k=1,2,...,N - siano $\left(a_k^{(q)},b_k^{(q)}\right)$ i terminali della sua k-esima porta (Fig. 7.15(a)). Sia $C_Q = \mathcal{R} \oplus Q$ e sia Q BD e LC in C_Q .

Sia
$$\mathbf{w}^{(q)} = \left[row \left[v_k^{(q)} \right]_{k=1}^N row \left[i_k^{(q)} \right]_{k=1}^N \right]^T$$
 il vettore delle VE pertinenti a Q .

Siano, inoltre, $\mathcal{W}_Q = \left\{ v_k^{(q)}, i_k^{(q)} \right\}_{k=1}^N$ l'insieme delle componenti di $\boldsymbol{w}^{(q)}$ e $\mathcal{X}_Q = \left\{ x_k^{(q)} \right\}_{k=1}^N \subset \mathcal{W}_Q$ un sottoinsieme di *N* elementi di \mathcal{W}_Q scelti in accordo alla seguente regola:

$$\exists j \in \{1, 2, \dots, N\} \left(v_j \notin X_Q \land i_j \notin X_Q \right)$$
(7.57)

Sia, ancora $\overline{X}_Q = \mathcal{W}_Q - X_Q = \left\{\overline{x}_j^{(q)}\right\}_{j=1}^N \subset \mathcal{W}_Q$ il complemento di X_Q rispetto a \mathcal{W}_Q . Sia $\mathbf{x}^{(q)} = col \left[x_k^{(q)}\right]_{k=1}^N$ e $\overline{\mathbf{x}}^{(q)} = col \left[\overline{x}_k^{(q)}\right]_{k=1}^N$ e si assuma che le equazioni costitutive di Q possano essere poste nella forma

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{(q)} = L \boldsymbol{x}^{(q)} = \left[l_{ij} \right]_{i,j=1}^{N} \boldsymbol{x}^{(q)}$$
(7.58)

 $\operatorname{con} L = \left[l_{ij} \right]_{i,j=1}^{N}.$

Sia C_Q GUR e sia⁵ $\boldsymbol{w}^{(q)} = \boldsymbol{w}^{(q)^*} = \left[row \left[x_k^{(q)^*} \right]_{k=1}^N row \left[\overline{x}_k^{(q)^*} \right]_{k=1}^N \right]^T$ la (unica) soluzione di C_Q rispetto a $\boldsymbol{w}^{(q)}$. Si introduca l'insieme $\mathcal{H} = \left\{ h: x_h^{(q)} \in \overline{x}_h^{(q)}$ competono a porte distinte $\right\}$ e si assuma che $\forall h \in \mathcal{H}$ sia $x_h^{(q)^*} \neq 0$. Sia, inoltre, per un certo p (non necessariamente $p \in \mathcal{H}$) $x_p^{(q)^*} \neq 0$ e si introducano le quantità

$$\left\langle \mu_r = \frac{x_r^{(q)*}}{x_p^{(q)*}} \right\rangle_{r=1}^N \tag{7.59}$$

⁵ Si commette qui un leggero abuso di notazione poichè, a rigore, i vettori $\left[row \left[x_k^{(q)} \right]_{k=1}^N row \left[\overline{x}_k^{(q)} \right]_{k=1}^N \right]^T e \left[row \left[v_k^{(q)} \right]_{k=1}^N row \left[i_k^{(q)} \right]_{k=1}^N \right]^T$ non coincidono, differendo in generale per l'ordine delle rispettive componenti. E' subito visto, tuttavia, che lo stesso non ha alcun peso pratico.



Fig. 7.16 - (a) Rappresentazione *concettuale* del particolare *N*-porto Q_{sub} etichettato *q* pertinente alla versione con nullori del Teorema di Miller Generalizzato per multiporti. Si assume qui che sia

$$\overline{x}_{1}^{(q)} = v_{1}^{(q)}, \overline{x}_{2}^{(q)} = i_{1}^{(q)}, \cdots, \overline{x}_{m}^{(q)} = i_{m}^{(q)}, v_{m}^{(q)} \notin \overline{X}_{Q}, \cdots, \overline{x}_{N}^{(q)} = v_{N}^{(q)} e$$

 $x_1^{(q)} = v_m^{(q)}, x_2^{(q)} = v_p^{(q)}, \dots, x_m^{(q)} = i_p^{(q)}, \dots, x_N^{(q)} = i_N^{(q)}$, (b) il digrafo del 6-porto \mathcal{N} in Fig.

7. 2(a) qui ridisegnato per comodità, (c) il Q_{sub} competente a \mathcal{N} per la scelta

particolare $\bar{\mathbf{x}}_{Q} = \left[v_{2}^{(q)} i_{3}^{(q)} v_{3}^{(q)} v_{4}^{(q)} i_{4}^{(q)} i_{6}^{(q)} \right]^{T}$ e $\mathbf{x}_{Q} = \left[i_{1}^{(q)} v_{1}^{(q)} i_{2}^{(q)} v_{5}^{(q)} i_{5}^{(q)} v_{6}^{(q)} \right]^{T}$, ottenuto dal digrafo in (b) come descritto nell'enunciato del teorema allo studio.

Si consideri ora l'*N*-porto Q_{sub} etichettato q e avente terminali $\left\{\left(a_{sub,k}^{(q)}, b_{sub,k}^{(q)}\right)\right\}_{k=1}^{N}$, che si ottiene dal digrafo $\mathcal{G}^{(q)}$ di Q per mezzo della

seguente operazione: per k = 1, 2, ..., N (a) $a_k^{(q)}$ è rimpiazzato con $a_{sub,k}^{(q)}$ e $b_k^{(q)}$ è rimpiazzato con $b_{sub,k}^{(q)}$ e (b) il *k*-esimo lato di $G^{(q)}$ è rimpiazzato da:

un GCD
$$i_k^{(q)} = l_j x_j$$
 con, in pa
rallelo, la serie di un GTD
 $v_k^{(q)} = l_p x_p$ e un nullatore se $\exists j, p\left(\overline{x}_j^{(q)} = i_k^{(q)} \land \overline{x}_p^{(q)} = v_k^{(q)}\right)$
un GCD $i_k^{(q)} = l_j x_j^{(q)}$ se $\exists j\left(\overline{x}_j^{(q)} = i_k^{(q)} \land v_k^{(q)} \notin \overline{X}_Q \land x_j^{(q)} \neq v_k^{(q)}\right)$
un'ammettenza $Y_k = l_j$ se $\exists j\left(\overline{x}_j^{(q)} = i_k^{(q)} \land x_j^{(q)} = v_k^{(q)}\right)$
un GTD $v_k^{(q)} = l_j x_j^{(q)}$ se $\exists j\left(\overline{x}_j^{(q)} = v_k^{(q)} \land i_k^{(q)} \notin \overline{X}_Q \land x_j^{(q)} \neq i_k^{(q)}\right)$
un'impedenza $Z_k = l_j$ se $\exists j\left(\overline{x}_j^{(q)} = v_k^{(q)} \land x_j^{(q)} = i_k^{(q)}\right)$
un noratore se $i_k^{(q)} \notin \overline{X}_Q \land v_k^{(q)} \notin \overline{X}_Q$
(7.61)

ove l_j è dato dalla (7.60), GCD sta per "generatore di corrente dipendente", GTD sta per "generatore di tensione dipendente" e i generatori in questione hanno polarità/verso coerente con l'orientazione di detto *k*-esimo ramo (si veda la Fig. 7.16(a) per una rappresentazione *concettuale* di Q_{sub} nell'ipotesi che sia $\overline{x}_1^{(q)} = v_1^{(q)}, \overline{x}_2^{(q)} = i_1^{(q)}, \dots, \overline{x}_m^{(q)} = i_m^{(q)}, v_m^{(q)} \notin \overline{X}_Q, \dots, \overline{x}_N^{(q)} = v_N^{(q)}$ e $x_1^{(q)} = v_m^{(q)}, x_2^{(q)} = v_p^{(q)}, \dots, x_m^{(q)} = i_N^{(q)}$.

Sia $C_{Q_{sub}} = \mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ il circuito C_Q ottenuto rimpiazzando Q con Q_{sub} in modo tale che $a_{sub,k}^{(q)}$ prenda il posto di $a_k^{(q)} \in b_{sub,k}^{(q)}$ prenda il posto di $b_k^{(q)}$. Se $C_{Q_{sub}}$ è URRA $\mathbf{x}^{(q)} = col \left[x_k^{(q)} \right]_{k=1}^N$, allora $C_{Q_{sub}}$ è GUR e $C_Q \in C_{Q_{sub}}$ sono GEQ. Dimostrazione

La prova può ottenersi direttamente ricalcando quella relativa al Teorema 7.7.4 con poche ovvie modifiche.

7.7.6 Commenti

1. Si osservi che per N=2 i Teoremi 7.7.1 e 7.7.7 si riducono, rispettivamente, al ben noto Teorema di Miller e al suo Duale [26] e, dunque, quelli possono essere considerati come le generalizzazioni di questi. Si può rilevare, tuttavia, che la dimostrazione data in [26] per il Teorema di Miller convenzionale assume, in qualche modo, la verità di fatti che devono ancora essere dimostrati, mentre il TSGR qui impiegato consente una dimostrazione rigorosa e, al contempo, semplice, forse anche più diretta di quella fornita in [27].

- 2. Si noti che da (7.36) [(7.42)] (supponendo $Y_p \neq 0$ [$Z_p \neq 0$]) segue $\sum_{k=1}^{N} Y_k^{-1} = Y^{-1} [\sum_{k=1}^{N} Z_k^{-1} = Z^{-1}].$ Quindi, in sostanza, il Teorema 7.7.1 [7.7.2] afferma che l'originaria impedenza [ammettenza] Y^{-1} [Z^{-1}] può essere scissa nelle impedenze [ammettenze] $Y_1^{-1}, Y_2^{-1}, ..., Y_N^{-1}$ [$Z_1^{-1}, Z_2^{-1}, ..., Z_N^{-1}$] senza alterare il comportamento del circuito allo studio.
- 3. Le condizioni di univoca risolvibilità della rete trasformata rispetto a $col [v_k]_{k=1}^N$ e rispetto a $col [i_k]_{k=1}^N$ che sono, ordinatamente, necessarie per la rigorosa validità dei Teoremi 7.7.1 e 7.7.3 e, quindi, dei rispettivi casi particolari costituiti dai Teoremi di Miller convenzionali sono qui considerati, per quanto è noto a chi scrive, per la prima volta.
- 4. A sua volta, il Teorema 7.7.2 può riguardarsi come la generalizzazione del Teorema 7.7.3 al caso in cui i rami $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_N$, piuttosto che afferire a un nodo, costituiscano, più in generale, un insieme di taglio.
- 5. Da un punto di vista alternativo, i Teoremi 7.7.1 e 7.7.3 possono essere considerati casi particolari del Teorema 7.7.4. Difatti applicando il Teorema 7.7.4 all'*N*-porto Q_{sub} in Fig. 7.12(c) [Fig. 7.14(c)] con $\mathbf{x}^{(q)} = col \left[v_k^{(q)} \right]_{k=1}^{N} [\mathbf{x}^{(q)} = col \left[i_k^{(q)} \right]_{k=1}^{N}]$ e $m_{ij} = Y [m_{ij} = Z]$ per i, j = 1, 2, ..., N si perviene direttamente alla (7.36) [(7.42)].
- 6. Si deve sottolineare che il Teorema 7.7.1 può essere convenientemente impiegato in pratica solo se i rapporti $\langle \mu_j \rangle_{j=1}^N$ definiti in (7.36) possono calcolarsi senza dover risolvere la rete di partenza rispetto a $col [v_k]_{k=1}^N$, cosa possibile ove detti rapporti siano in realtà funzioni di rete. Si può facilmente controllare se tale condizione sia soddisfatta, operando nel modo di seguito descritto: (a) si colleghino con un cortocircuito i nodi $p \in p+1$ corrispondenti alla v_p scelta, *lasciando tutti i generatori originari attivi* e (b) si verifichi se $\langle v_j=0 \rangle_{j=1}^N$. Quando tale condizione (b) è soddisfatta, allora, per j=1,2,...,N, il valore di μ_j (in opportune unità di misura) coincide con il valore assunto da v_j quando i generatori *indipendenti* originari sono disattivati (in accordo alla loro natura) e un generatore unitario di tensione con polarità concorde con v_p è posto fra i nodi p and p+1. Considerazioni analoghe possono farsi in relazione agli altri teoremi della presente

sezione; ad esempio, per i Teoremi 7.7.2 e 7.7.3 la procedura summenzionata diviene la seguente: (a) si tagli il ramo pertinente alla i_p scelta, *lasciando tutti i generatori originari attivi* e (b) si verifichi se $\langle i_j=0\rangle_{j=1}^N$. Quando tale condizione (b) è soddisfatta, il valore di μ_j (in opportune unità di misura) coincide con il valore assunto da i_j quando i i generatori *indipendenti* originari sono disattivati (in accordo alla loro natura) e un generatore unitario di corrente con verso concorde con i_p è inserito nel ramo β_p . Le versioni pertinenti ai Teoremi 7.7.4 e 7.7.5 possono ottenersi con ovvie modifiche.

7. La Fig. 7.16(a) ha mero valore concettuale. Essa è concepita per rappresentare simbolicamente le modalità con le quali si costruisce l'*N*-porto Q_{sub} menzionato nel Teorema 7.7.5 e corrisponde all'effettivo Q_{sub} solo quando i lati del digrafo di Q sono tutti disgiunti. In generale, la Fig. 7.16(a) non tiene conto delle mutue connessioni fra terminali di Q, una informazione che è invece conservata nel suo digrafo: quest'ultimo rappresenta il punto di partenza per la costruzione di Q_{sub} secondo le indicazioni date nel Paragrafo 7.6.5. Un esempio concreto di tale costruzione è mostrato in Fig. 7.16(c) con riferimento al 6-porto \mathcal{N} di Fig. 7.2(a) (il cui digrafo è ridisegnato in Fig. 7.16(b) per comodità) sotto l'ipotesi che si abbia $\overline{\mathbf{x}}_{Q} = \left[v_{2}^{(q)} i_{3}^{(q)} v_{4}^{(q)} i_{4}^{(q)} i_{6}^{(q)} \right]^{T}$.

7.8 Generalizzazione del Principio di Aumento

Allo scopo di illustrare ulteriormente le sue potenzialità quale strumento teorico, in questa sezione il TSGR sarà impiegato per ottenere un enunciato generalizzato e una dimostrazione rigorosa del cosiddetto Principio di Aumento considerato in [28].

7.8.1 Principio di Aumento generalizzato (Teorema 7.8.1)



Enunciato

Fig. 7.17 - (a) Un circuito *C* con alcune tensioni e correnti poste in evidenza, (b) un circuito Caug ottenuto da *C* inserendo opportuni elementi nelle porte di quest'ultimo, (c) come in (a), ma con un opportuno V+J -porto *Q* posto in evidenza e (d) come in (b) ma con un opportuno V+J -porto Q_{sub} posto in evidenza.

Si consideri un arbitrario (lineare o non-lineare) circuito \mathcal{R} GUR e si estraggano in quest'ultimo le tensioni $\{v_j\}_{j=1}^V$ e le correnti $\{i_{V+k}\}_{k=1}^J$, come mostrato in Fig. 7.17(a); si ribattezzi, dopo questa operazione, \mathcal{R} come *C*. Siano, inoltre, $\{v_j^*\}_{j=1}^V$ e $\{i_{V+k}^*\}_{k=1}^J$ i valori assunti, rispettivamente, dalle summenzionate VE in *C*.

Si consideri, ora, il circuito C_{aug} mostrato in Fig. 7.17(b), ottenuto da C per mezzo delle seguenti operazioni: (a) per j=1,2,...,V, la serie di un generatore ideale di tensione v_j^* e un bipolo \mathcal{R}_j con equazione costitutiva $v_j^{\mathcal{R}} = f_j(i_j^{\mathcal{R}})$ tale che $f_j(0)=0$ è posta fra i terminali pertinenti a v_j e (b) per k=1,2,...J il parallelo di un generatore di corrente ideale i_{V+k}^* e un bipolo \mathcal{G}_k con equazione costitutiva $i_k^{\mathcal{G}} = g_k(v_k^{\mathcal{G}})$ tale che $g_k(0)=0$ è inserito nel ramo pertinente a i_{V+k} .

Se C_{aug} è URRA $\left[row \left[i_j^{\mathcal{R}} \right]_{j=1}^{V} row \left[v_k^{\mathcal{G}} \right]_{k=1}^{J} \right]^T$, allora esso è anche GUR e C

e C_{aug} sono equivalenti rispetto all'insieme degli elementi interni a \mathcal{R} . Dimostrazione

Si consideri in *C* il *V*+*J*-porto *Q* etichettato *q* posto in evidenza per mezzo del rettangolo tratteggiato, come mostrato in Fig. 7.17(c). Allora *C* può essere riguardato come $C_Q = \mathcal{R} \oplus \mathcal{Q}$ e *Q* è LC e BD in C_Q . In virtù delle ipotesi e della definizione di *Q*, si ha

$$\begin{pmatrix} v_m^{(q)}, i_m^{(q)} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} v_m^*, 0 \end{pmatrix} & 1 \le m \le V \\ \begin{pmatrix} 0, i_m^* \end{pmatrix} & V + 1 \le m \le V + J \end{cases}$$

$$(7.62)$$

Si evidenzi, ora, in C_{aug} , per mezzo di un rettangolo tratteggiato, il V+Jporto Q_{sub} etichettato q, come in Fig. 7.17(d). In tal modo è possibile riguardare C_{aug} come $C_{Q_{sub}} = \mathcal{R} \oplus Q_{sub}$ ed è subito visto che Q_{sub} è LC in $C_{Q_{sub}}$ e isomorfo a Q. Inoltre, le equazioni costitutive di Q_{sub} possono darsi come

$$\begin{cases} \left\langle v_{k}^{(q)} = f_{k}\left(i_{k}^{(q)}\right) + v_{k}^{*}\right\rangle_{k=1}^{V} \\ \left\langle i_{m+V}^{(q)} = g_{m}\left(v_{m+V}^{(q)}\right) + i_{m+V}^{*}\right\rangle_{m=1}^{J} \end{cases}$$
(7.63)

La (7.63) mostra che Q_{sub} è BD in $\mathcal{R} \oplus Q_{sub}$; in aggiunta, per ipotesi si ha

$$\langle f_k(0)=0\rangle_{k=1}^V, \langle g_m(0)=0\rangle_{m=1}^J$$
(7.64)

in forza della quale si conclude che i valori definiti in (7.62) soddisfano la (7.63). Inoltre, poiché, per ipotesi, $C_{aug} \ e$ URRA $\left[row \left[i_j^{\mathcal{R}} \right]_{j=1}^{V} row \left[v_k^{\mathcal{G}} \right]_{k=1}^{J} \right]^T$ lo stesso deve valere per $C_{Q_{sub}}$ rispetto a $\left[row \left[v_k^{(q)} i_k^{(q)} \right]_{k=1}^{V+J} \right]^T$. Difatti, si vede immediatamente che $\left\langle i_m^{(q)} = i_m^{\mathcal{R}} \right\rangle_{m=1}^{V}, \left\langle v_p^{(q)} = v_{p-V}^{\mathcal{G}} \right\rangle_{p=V+1}^{V+J}$; inoltre - per p=1,2,...,V - $v_p^{(q)}$ è univocamente individuato come $v_p^{(q)} = f_p(i_p^{(q)}) + v_p^*$ e - per m=V+1,V+2,...,V+J - $i_m^{(q)}$ è univocamente individuato come $i_m^{(q)} = g_{m-V}(v_m^{(q)}) + i_m^*$.

La precedente discussione mostra che ci si trova nelle condizioni di poter applicare il TSGR Forte a $C_{Q_{sub}}$ e C_Q , onde la tesi segue immediatamente.

7.8.2 Commenti

Merita osservare che nella derivazione presentata nel paragrafo precedente non si pone alcuna restrizione (fatta salva la (7.64)) sulla natura dei bipoli $\{\mathcal{R}_j\}_{j=1}^{V}$ e $\{\mathcal{G}_k\}_{k=1}^{J}$; al contrario, nella versione descritta in [28] i summenzionati bipoli sono supposti essere resistori *lineari*. Inoltre, quantunque la questione della univoca risolvibilità non sia ivi presa in considerazione, tale ipotesi è assolutamente necessaria per la rigorosa validità del teorema, come può mostrarsi con semplici controesempi. Infine, la dimostrazione data in [28] può non soddisfare pienamente; invece, come mostrato sopra, l'impiego del TSGR consente, in modo semplice e diretto, di ottenere, assieme a un enunciato più preciso e generale, una dimostrazione rigorosa.

7.9 Applicazioni ed esempi

7.9.1 Estensioni del TS basato su batteria di generatori come strumento per il calcolo del punto di lavoro in circuiti a singolo transistore

Nelle sezioni precedenti si è mostrato come i TSGR possano essere impiegati quali potenti strumenti teorici per raffinare, generalizzare e dimostrare rigorosamente diversi risulti classici della Teoria dei Circuiti. Nel presente paragrafo, si mostrerà come una delle dirette conseguenze dei TSGR - e cioè il Teorema 7.4.1 (ossia la versione senza nullori del TS esteso basato su batteria di generatori, descritta nel Paragrafo 7.4.1) – possa efficientemente impiegarsi per mettere a punto una procedura sistematica atta al calcolo intuitivo per ispezione del punto di lavoro dei circuiti a singolo transistore.

Nella maggior parte dei testi, tale problema è considerato esclusivamente in relazione a semplici topologie standard, per le quali l'analisi può condursi scrivendo elementari equazioni di equilibrio, eventualmente applicando trasformazioni circuitali e operando approssimazioni semplificative. Tale approccio, tuttavia, diviene ben presto eccessivamente complicato e tedioso al crescere della complessità del circuito e, soprattutto, non consente di cogliere in modo intuitivo e diretto le modalità con cui i parametri del circuito ne influenzano il comportamento. Nell'esempio che segue, si descriverà una tecnica intuitiva e generale adatta a un approccio "carta e matita" con analisi diretta per ispezione.


Fig. 7.18 (a) Un circuito C_Q nel quale il BJT è evidenziato come un 2-porto Q, (b) il BJT riguardato come un 2-porto Q assieme al suo rimpiazzo Q_{sub} , (c) il circuito C_{Qsub} ottenuto da C_Q rimpiazzando Q con Q_{sub} in forza del Teorema 7.4.1 (Paragrafo 7.4.1), (d) circuito atto alla verifica della univoca solvibilità di C_{Qsub} , (e) circuito per il calcolo delle entità $i_B^{(0)}$, $v_{CE}^{(0)}$ relative a (7.65) e (7.66), (f) circuito in (d) semplificato, (g) circuito per il calcolo delle entità $\alpha \in \beta$ relative a (7.65) e (7.66), (h) circuito in (f) semplificato, (i) caratteristiche di uscita con le due "rette di carico" che individuano il PL, e (j) coppie $\{(v_{CE,k}, i_{B,k})\}_{k=1}^7$ per il tracciamento della "retta di carico trasposta" λ .

Si consideri il circuito mostrato in Fig. 7.18(a), ove – rispetto ai riferimenti e alle designazioni convenzionali delle VE specificati in Fig. 7.18(b) – il BJT ha caratteristiche di uscita mostrate in Fig. 7.18(i) e l'Amplificatore Operazionale (AO) è ideale. I restanti parametri hanno i seguenti valori $R_1 = 1k$, $R_2 = 1k$, $R_3 = 5k$, $R_4 = 6.2k$, Vcc = 12V, E = 1V, $R_c = 0.2k$, $R_E = 0.4k$, $R_A = 1.42M$ $R_B = 2M$.

Con il proposito di applicare il Teorema 7.4.1, si indicheranno per semplicità con (k,k') (in luogo di $(a_k^{(q)}, b_k^{(q)}) \in (a_{sub,k}^{(q)}, b_{sub,k}^{(q)})$, rispettivamente) i terminali della generica k-esima porta di $Q \in Q_{sub}$; si ometterà, inoltre, per il medesimo motivo l'etichetta q menzionata nell'enunciato del teorema in questione, così che le VE di dette porte saranno indicate con (v_k, i_k) in luogo di $(v_k^{(q)}, i_k^{(q)})$. Si identifica, quindi, il BJT come l'*N*-porto Q oggetto di sostituzione. Per tale Q risulta N = 2 e le due porte hanno un terminale a comune, come indicato in Fig. 7.18(a) ed ulteriormente chiarito in Fig. 7.18 (b). Fra le possibile scelte di Q_{sub} consentite dal teorema in questione e riassunte in Fig. 7.4(b), si può considerare quella corrispondente a $X_Q = \{x_1, x_2\} = \{v_1, i_2\}$, come rappresentato in Fig. 7.18(b).

D'altra parte, come suggerito dalla Fig. 7.18(a): (i) v_1 coincide con la caduta di tensione v_{BE} fra base (B) ed emettittore (E) del BJT e v_{BE} può assumersi pari $v_{\gamma} = 0.7 V$ quando il BJT lavora in zona attiva diretta (come appare ragionevole ipotizzare nel caso allo studio); (ii) i_2 coincide con la corrente di collettore (C) del BJT in questione, la quale è, invece, a priori incognita ed indicata con i_C .

Quindi, rimpiazzando Q con Q_{sub} , si perviene al circuito C_{Qsub} mostrato in Fig. 7.18(c) del quale, in accordo al Teorema 7.4.1, deve essere verificata la univoca risolvibilità rispetto alle VE dell'insieme $\hat{X}_Q = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2\} = \{i_1, v_2\}$. Ciò può ottenersi al modo seguente.

Si osservi preliminarmente che, al contrario di C_Q , C_{Qsub} è lineare: in virtù di ciò, la globale univoca risolvibilità di C_{Qsub} non dipende dal valore assunto dai suoi generatori indipendenti.⁶ Perciò, allo scopo di verificare detta condizione, tali valori possono essere assegnati arbitrariamente: in particolare, si può scegliere di annullare tutti i generatori. Evidentemente, ogni circuito

⁶ Si rammenti che – come d'uso in Teoria dei Circuiti - si è assunto di considerare esclusivamente circuiti per i quali il numero di equazioni di eqilibrio eguaglia quello delle incognite, come accade nella rete allo studio.

lineare con i generatori indipendenti disattivati è risolvibile, dal momento che ammette sicuramente – fra le sue soluzioni – quelle per cui tutte le EV hanno valore nullo: difatti, le corrispondenti equazioni di equilibrio costituiscono un sistema omogeneo di equazioni lineari e ogni sistema siffatto ammette la soluzione nulla. Rimane dunque solo da provare che - per le VE dell'insieme $\{i_1, v_2\} = \{i_B, v_{CE}\}$ - la soluzione nulla è anche l'unica.

Difatti, quando tutti i generatori in $C_{Q_{aub}}$ sono spenti (Fig. 7.18(d)), i_C viene automaticamente annullata e il potenziale (rispetto a massa) di C, così come l'ingresso non invertente dell' AO, è univocamente fissato a zero (poiché la serie di R_C , R_4 , R_3 ha entrambi i suoi terminali posti a massa). Inoltre, a causa del cortocircuito virtuale, lo stesso vale per il potenziale di B, la corrente i_B e il potenziale di E. Questo conclude la verifica, la quale prova (in virtù del TSGR) che C_{Q_1} è GUR, e autorizza a procedere con la sua analisi.

All'uopo, ancora una volta traendo partito dalla linearità di $C_{Q_{sub}}$, si può applicare a quest'ultimo il teorema di sovrapposizione degli effetti, in tal modo avendo

$$i_B = i_{B,0} + \alpha i_C \tag{7.65}$$

$$v_{CE} = v_{CE,0} + \beta i_C \tag{7.66}$$

ove le entità nei secondi membri hanno il seguente chiaro significato operativo

$$i_{B,0} = i_{B}|_{i_{c}=0}, v_{CE,0} = v_{CE}|_{i_{c}=0}, \alpha = i_{B}/i_{C}|_{batterie \, spente}, \beta = v_{CE}/i_{C}|_{batterie \, spente}$$
(7.67)

e possono essere calcolate tramite due analisi distinte, ciascuna più semplice di quella necessaria per risolvere C_{Osub} come un tutt'uno.

Quanto a $i_{B,0}$ e $v_{CE,0}$, esse possono calcolarsi - in accordo alla (7.67) – dal circuito $C_{Qsub}^{(batt)}$ in Fig. 7.18(d), ottenuto da C_{Qsub} in fig. 7.18(c) rimpiazzando il generatore di corrente i_C con un circuito aperto. L'analisi può procedere per ispezione diretta, al modo indicato di seguito.

Il potenziale di C (rispetto a massa) è immediatamente calcolabile come $v_{C,0} = v_{CC} (R_3 + R_4) / (R_3 + R_4 + R_C) = 11.7895 V$. Analogamente, il potenziale dell'ingresso non invertente dell'AO è $v_{+,0} = R_3 v_{CC} / (R_3 + R_4 + R_C) = 5.2632 V$. Dal momento che l' AO è ideale, risulta altresì $v_{+,0} = v_{-,0}$, il che consente di calcolare immediatamente il potenziale dell'uscita dell'AO come

 $v_{A,0} = \left[\left(R_2 + R_1 \right) v_{+,0} - R_2 e \right] / R_1 = 9.5263 V.$ E' subito visto che il resto dell'analisi può condursi sul sottocircuito mostrato in Fig. 7.18(e). Da quest'ultima figura, con l'aiuto del teorema di Millman, si ottiene facilmente $i_{B,0} = \left[\left(v_{CC} - v_{\gamma} \right) R_A + \left(v_A^{(0)} - v_{\gamma} \right) R_B \right] / \left(R_E R_A + R_E R_B + R_A R_B \right) = 0.01186 \, mA$ e dunque il potenziale di $v_{E,0} = R_E i_{B,0} = 0.0047 V$ rispetto a massa. Infine si ha $v_{CE,0} = v_{C,0} - v_{E,0} = 11.7847 V.$

Si prenda ora in considerazione il calcolo di $\alpha \in \beta$. In accordo alla (7.67), i valori delle summenzionate entità coincidono (rispetto alle opportune unità di misura), con i valori assunti, ordinatamente, da $i_B \in v_{CE}$ nel circuito $C_{Qsub}^{(i_C)}$ ottenuto da C_{Qsub} in Fig. 7.18(c) rimpiazzando ciascuna batteria con un corto circuito ed assegnando alla corrente i_C un valore unitario. Inoltre, applicando il Teorema 7.5.3 (vale a dire il teorema dello shift del generatore di corrente, riottenuto al Paragrafo 7.5.3) si perviene al circuito mostrato in Fig. 7.18(f), l'analisi del quale ricalca quella condotta più sopra.

Difatti il potenziale normalizzato⁷ di C (rispetto a massa) è immediatamente calcolato come $\hat{v}_c = -R_c (R_3 + R_4)/(R_3 + R_4 + R_c) = -0.1965 k\Omega$. In modo analogo si trova $\hat{v}_+ = -R_c R_3/(R_3 + R_4 + R_c) = -0.0877 k\Omega$ e $\hat{v}_A = (R_2 + R_1)\hat{v}_+/R_1 = -0.1754 k\Omega$. Inoltre, dal sottocircuito di Fig. 7.17(g), si trova $\alpha = (R_B \hat{v}_A - R_E R_A - R_E R_B)/(R_A R_B + R_E R_A + R_E R_B) = -6.0495 \cdot 10^{-4}$ e $\hat{v}_E = R_E (1+\alpha) = 0.3998 k\Omega$, onde finalmente $\beta = \hat{v}_{CE} = \hat{v}_C - \hat{v}_E = -0.5962 k\Omega$.

Eliminando i_c fra (7.65) e (7.66) e riordinando si ottiene

$$\dot{i}_{B} = \dot{i}_{B,0} + \frac{\alpha}{\beta} \left(v_{CE} - v_{CE,0} \right)$$
(7.68)

$$i_{C} = v_{CE} / \beta - v_{CE,0} / \beta$$
 (7.69)

si osservi che si sarebbero potute ottenere le (7.68) e (7.69) *direttamente*, scegliendo $X_Q = \{x_1, x_2\} = \{v_1, v_2\}$ in luogo di $X_Q = \{x_1, x_2\} = \{v_1, i_2\}$; si verifica facilmente, tuttavia, che, con detta scelta, l'analisi sarebbe risultata meno agevole. Ciò mostra che nell'applicazione della tecnica allo studio la scelta di X_Q deve essere operata con giudizio.

⁷ Le VE nel circuito allo studio risultano automaticamente normalizzate rispetto a *1* A quale diretta conseguenza dell'aver assunto uno stimolo in corrente normalizzato (adimensionale). Le entità normalizzate verranno d'ora innanzi denotate mediante un archetto posto sopra i rispettivi simboli.

Si possono ora disegnare le curve corrispondenti a (7.68) e (7.69) nel piano delle caratteristiche di uscita e quindi leggere i valori di v_{CE} , i_C , i_B corrispondenti alla loro intersezione, comunemente denominata il *Punto di Lavoro* (PL) del transistore. E' subito visto che la (7.69) è l'equazione di una retta *l* nel piano in questione e quindi due qualsivoglia coppie di valori $(v_{CE,1}, i_{C,1})$ e $(v_{CE,2}, i_{C,2})$ che soddisfino detta equazione sono sufficienti per la sua rappresentazione: ad esempio, si trova (11.78,0) e (8.80,5), per mezzo delle quali *l* è rappresentata come in Fig. 7.18(i). Quanto alla (7.68) invece, essa è, nel piano in questione, l'equazione di una curva λ che (a rigore) non è una retta: perciò un cospicuo numero n_{λ} di coppie $\{(v_{CE,k}, i_{B,k})\}_{k=1}^{n_{\lambda}}$ soddisfacenti la (7.68) si rende necessario per tracciare λ con sufficiente precisione su tutto l'intervallo di variazione di v_{CE} . Ad esempio, si può considerare l'insieme delle $n_{\lambda} = 7$ coppie riportate in Fig. 7.18(j), che consentono di tracciare λ come mostrato in Fig. 7.18(i). Nella stessa figura, l'intersezione fra $l \in \lambda$ individua il PL cercato.

E' subito visto che il metodo di analisi dianzi delineato può essere immediatamente esteso a qualunque circuito contenente esattamente un BJT come unico elemento non-lineare. Pertanto, detto metodo può essere riguardato come la generalizzazione, a un *arbitrario* circuito contenente un singolo BJT, della ben nota tecnica della duplice curva di carico [6] comunemente impiegata per le elementari topologie standard che consentono di derivare le omologhe delle (7.68) e (7.69) - rispettivamente denominate *retta di carico* e *retta di carico* trasposta (o curva di polarizzazione) - tramite diretta applicazione delle leggi di Kirchhoff.

7.9.2 Estensioni del TS basato su batteria di generatori come strumento per il calcolo del punto di lavoro in un circuito contenente due JFET

Nel paragrafo precedente, è stata descritta una tecnica - basata sul Teorema 7.4.1 (ossia la versione senza nullori dell'estensione del TS basato su batteria di generatori descritto nel Paragrafo 7.4.1) – adatta per l'analisi di circuiti contenenti esattamente un BJT quale elemento non lineare: la stessa tecnica, del resto, può essere facilmente estesa a qualsivoglia elemento non lineare, adoperando le caratteristiche di quest'ultimo come guida alla scelta più opportuna di x_Q . Nel presente paragrafo si impiegherà, invece, il Teorema 7.4.2 (vale a dire, la versione con nullori dell'estensione del TS basato su batteria di generatori descritta nel Paragrafo 7.4.3) per affrontare lo studio del circuito mostrato in Fig. 7.19(a), contenente due JFET supposti identici.



Fig. 7.19 - (a) Un circuito C_Q nel quale è evidenziato un particolare 3-porto Q, (b) il JFET con le VE di interesse, (c) le caratteristiche di uscita del JFET con la retta di carico e il PL, (d) Q con le sue VE e il suo rimpiazzo Q_{sub} (comprendente un nullore), pertinente all'applicazione del Teorema 7.4.2 (ossia, la versione con nullori dell'estensione del TS basato su batteria di generatori descritta nel Paragrafo 7.4.3), (e) il circuito C_{Qsub} ottenuto da C_Q rimpiazzando Q con Q_{sub} , (f) circuito per la verifica della univoca risolvibilità di C_{Qsub} , (g) circuito per il calcolo delle componenti del vettore addendo sinistro che compare nel secondo membro della (7.72) e (h) circuito per il calcolo delle componenti del vettore addendo destro che compare nel secondo membro della (7.72).

Di solito le equazioni costitutive di un JFET sono assegnate in termini delle VE evidenziate in Fig. 7.19(b). In particolare, la corrente di gate (G) i_G è assunta praticamente nulla e, se il transistore lavora nella zona di saturazione, la corrente di drain (D) è praticamente indipendente dalla caduta di tensione v_{DS} fra D e source (S), cosicché dette equazioni costitutive possono darsi come

ove la seconda equazione è spesso assegnata per via grafica, come rappresentato in Fig. 7.19(c). Quanto ai restanti elementi, si assuma che l'AO sia ideale e $V_{DD} = 15V, R_D = 3.5k\Omega, R_S = 0.35k\Omega, R_2 = 10k\Omega, R_3 = 25k\Omega, R_1 = 100k\Omega, R_A = 39 k\Omega, R_B = 10 k\Omega$.

Col proposito di applicare il Teorema 7.4.2 si indicheranno, per semplicità, con (k,k') (in luogo di $(a_k^{(q)}, b_k^{(q)})$ e $(a_{sub,k}^{(q)}, b_{sub,k}^{(q)})$, rispettivamente) i terminali della generica *k*-esima porta di Q e Q_{sub} ; si ometterà inoltre, per analoghe ragioni, l'etichetta q menzionata nell'enunciato di detto teorema, cosicchè le VE pertinenti a detta porta saranno indicate con (v_k, i_k) invece di $(v_k^{(q)}, i_k^{(q)})$.

Si identifica, poi, il multiporto Q da rimpiazzarsi come il 3-porto evidenziato dal rettangolo tratteggiato in Fig. 7.19(a), le tre porte del quale hanno un terminale a comune (cioè, 1'=2'=3'). Il passo successivo è quello di identificare un conveniente 3-porto Q_{sub} che rimpiazzi Q, il che, in accordo al Teorema 7.4.2, equivale a scegliere il corrispondente sottoinsieme X_Q dell'insieme W_Q delle VE di Q. Scegliendo $X_Q = \{i_1, v_1, i_3\}$ si perviene al Q_{sub} rappresentato in Fig. 7.19(d). Inoltre, confrontando la Fig. 7.19(b) e la Fig. 7.19(d), si ottiene $i_1^* = i_{G1}^*$ e $i_3^* = i_{G2}^*$, ove l'asterisco indica il valore effettivo delle variabili in corrispondenza della soluzione del circuito: così, in forza della si ha $i_1^* = i_3^* = 0$. Questi fatti, messi assieme, portano il multiporto Q_{sub} ad assumere la particolare configurazione mostrata in Fig. 7.19(d).

Rimpiazzando Q con Q_{sub} ed omettendo l'asterisco per semplicità, il circuito originario di Fig. 7.19(a) viene trasformato nel circuito $C_{Q_{sub}}$ rappresentato in Fig. 7.19(e). In accordo con il Teorema 7.4.2, si deve verificare la univoca risolvibilità di $C_{Q_{sub}}$ rispetto alle VE dell'insieme $\overline{X}_Q = \{i_2, v_2, v_3\}$. Ricalcando gli argomenti impiegati nel paragrafo precedente, si evince che basta verificare la univoca risolvibilità, rispetto a dette VE, del circuito ottenuto da $C_{Q_{sub}}$ annullando tutti i generatori.

In tale circuito, mostrato in Fig. 7.19(f), il potenziale del nodo 3 e quello del terminale non invertente dell'AO sono univocamente fissati a zero (perché la serie di R_A , R_B , R_3 ha entrambi i capi posti a massa) e lo stesso vale per il potenziale del nodo 2 (a causa del cortocircuito virtuale fra i terminali di ingresso dell'AO) e per i potenziali dei nodi $1'\equiv 2'\equiv 3'$ e 1 (a causa del nullatore): perciò, si ha univocamente $v_1=v_2=v_3=0$. Inoltre, è univocamente $i_1=i_3=0$ (in forza della prima legge di Kirchhoff). Resta da provare che $C_{Q_{sub}}$ non ammette soluzioni per le quali

$$i_2 = i_2^* \neq 0$$
 (7.71)

Si supponga, allora, per assurdo, che la (7.71) sia vera. Quindi – poichè in virtù dei risultati precedenti le correnti attraverso R_D e R_S sono entrambe univocamente nulle - si vede facilmente che si avrebbe simultaneamente $v_u = -R_2 i_2^*$ e $v_u = R_1 i_2^*$, che messe assieme darebbero $(R_1 + R_2) i_2^* = 0$, onde, in virtù della (7.71), $R_1 + R_2 = 0$, il che è assurdo. Ciò conclude la verifica, la quale prova che $C_{O_{u+}}$ è GUR e autorizza a proseguirne l'analisi.

In forza del teorema di sovrapposizione degli effetti si trova

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{2} \\ v_{2} \\ v_{3} \\ v_{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{i}_{2,0} \\ v_{2,0} \\ v_{3,0} \\ v_{u,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{2} \\ \beta_{2} \\ \beta_{3} \\ \beta_{u} \end{bmatrix} v_{1}$$
(7.72)

ove le componenti dei due vettori al secondo membro possono essere calcolate a partire da due analisi distinte, ciascuna più semplice di quella necessaria per risolvere $C_{Q_{sub}}$ come un tutt'uno. Specificamente, le componenti dell'addendo sinistro al secondo membro della (7.72) possono calcolarsi dal circuito $C_{Q_{sub}}^{(batt)}$ ottenuto da $C_{Q_{sub}}$ disattivando il generatore di tensione v_I , come mostrato in Fig. 7.19(g). Da un esame di tale figura, con l'ausilio del teorema di Millman, si ottiene tramite ispezione diretta

$$v_{3,0} = 2v_{DD}R_B / (R_B + R_3 + R_A) = 4.0573 V$$

$$v_{+,0} = v_{DD} (R_B + R_3 - R_A) / (R_B + R_3 + R_A) = -0.7993V$$

$$v_{2,0} = v_{+,0} + v_{DD} = 2v_{DD} (R_B + R_3) / (R_B + R_3 + R_A) = 14.2007V$$
(7.73)

Inoltre, confrontando due distinte espressioni di v_u si ottiene $-R_2 i_{2,0} - v_{DD} = R_1 \Big[i_{2,0} + (v_+^{(0)} - v_{DD}) / R_D \Big] + v_{+,0}$, onde

$$i_{2,0} = (v_{DD}R_1 - v_{DD}R_D - R_1v_{+,0} - R_Dv_{+,0}) / (R_DR_1 + R_DR_2) = 3.9746 \,\mathrm{mA}$$

$$v_{u,0} = -R_2 i_{2,0} - v_{DD} = -54.7462 \,\mathrm{V}$$
(7.74)

Quanto alle componenti dell'addendo destro al secondo membro della (7.72), esse possono calcolarsi dal circuito $C_{Q_{sub}}^{(v_1)}$ mostrato in Fig. 7.19(h) e ottenuto da $C_{Q_{sub}}$ rimpiazzando le batterie con cortocircuito e lasciando v_1 attivo con valore unitario. Ricalcando la precedente analisi si ottiene

$$\beta_{3} = \beta_{2} = 1$$

$$\alpha_{2} = -(R_{2} + R_{s}) / [R_{s}(R_{1} + R_{2})] = -0.2688 \,\mathrm{mS}$$

$$\beta_{u} = R_{1}\alpha_{2} = -26.8831$$
(7.75)

Ora, dalla (7.72) si ottiene in particolare

$$i_2 = i_{2,0} + \alpha_2 v_1 \tag{7.76}$$

Inoltre, confrontando la Fig. 7.19(b) e la Fig. 7.19(d), si ha $i_2 = i_{D2}$ e $v_1 = v_{GS1}$.

D'altra parte, da un esame di dette figure, si evince che deve essere $i_{D1}=i_{D2}=i_D$, relazione che, in forza della (7.70), implica a sua volta $v_{GS1}=v_{GS2}=v_{GS}$, cosicché la (7.76) può riscriversi come

$$\dot{i}_D = \dot{i}_{2,0} + \alpha_2 v_{GS} \tag{7.77}$$

La (7.77) rappresenta una retta *l* nel piano delle caratteristica di uscita del JFET come mostrato in Fig. 7.9(c). L'intersezione fra *l* e detta caratteristica fornisce $i_D = i_{D1} = i_{D2} = 4.18 \text{ mA}$ e $v_{GS} = v_{GS1} = v_{GS2} = -0.75V$. Inserendo questi risultati in (7.72) si ha anche $v_2 = 13.4507V$, $v_3 = 3.3073V$, $v_u = -34.5838V$. Infine, dalla Fig. 7.19(d), segue altresì $v_{DS_1} = -v_{GS2} + v_3 = 4.0573V$, $v_{DS_2} = v_2 - v_3 + v_{GS2} = 9.3934V$, con le quali l'analisi è conclusa.

7.9.3 Estensioni del TS basato su batteria di generatori come strumento per il calcolo della caratteristica ingresso-uscita di un raddrizzatore a doppia semionda

Nel presente paragrafo ci si propone di impiegare il Teorema 7.4.1 per calcolare la caratteristica ingresso-uscita per il circuito rappresentato in Fig.



7.20(a): qui gli AO sono assunti ideali (resistenza d'ingresso infinita, resistenza d'uscita nulla, guadagno infinito), così come diodi.

Fig. 7.20 - (a) Un circuito a diodi nel quale un particolare 2-porto Q è posto in evidenza per mezzo del rettangolo tratteggiato, il che consente di riguardare il circuito in questione come R⊕Q, (b) il 2-porto Q_{sub} corrispondente alla scelta X_Q={x₁, x₂}={v₁, v₂} relativa all'applicazione del Teorema 4.1 (ossia, la versione senza nullori dell'estensione del TS basato su batteria di generatori descritta nel Paragrafo 7.4.1), (c) l'applicazione di detto teorema trasforma R⊕Q in R⊕Q_{sub}, (d) circuito per il calcolo dei parametri {α₀, β₀, γ₀} relativi alla tecnica di calcolo di caratteristiche ingresso-uscita descritta nel testo, (e) lo stesso che in (d) ma con riferimento ai parametri {α₂, β₂, γ₂}.

Precisamente - indicando, per j=1,2, con v_{Dj} e i_{Dj} rispettivamente la tensione e la corrente per il *j*-esimo diodo rispetto alla convenzione comunemente adottata per i riferimenti di dette VE - si assumono le seguenti equazioni costitutive

ove ON sta per "in conduzione" e OFF sta per "in interdizione". Infine, quanto alle resistenze, si assuma

$$\left\langle \boldsymbol{R}_{i} = \boldsymbol{R} \right\rangle_{i=1}^{5} \tag{7.79}$$

Col proposito di applicare il Teorema 7.4.1 (ossia la versione senza nullori dell' estensione del TS basato su batteria di generatori descritto nel Paragrafo 7.4.1), si indicheranno, per semplicità, con (k,k') (in luogo di $(a_k^{(q)}, b_k^{(q)})$ e $(a_{sub,k}^{(q)}, b_{sub,k}^{(q)})$, rispettivamente) i terminali della generica *k*-esima porta di Q e Q_{sub} ; inoltre, per analogo motivo, si ometterà l'etichetta q menzionata nell'enunciato di detto teorema, cosicché le VE pertinenti alla porta in questione saranno denotate con (v_k, i_k) , invece di $(v_k^{(q)}, i_k^{(q)})$. In Fig. 7.20(a), il 2-porto Q scelto per essere sostituito è posto in evidenza per mezzo del rettangolo tratteggiato. Inoltre, con riferimento alle notazioni del summenzionato Teorema 7.4.1, si sceglie $X_Q = \{x_1, x_2\} = \{v_1, v_2\}$, cui corrisponde il 2-porto Q_{sub} mostrato in Fig. 7.20(b).

Rimpiazzando Q con Q_{sub} si perviene al circuito mostrato in Fig. 7.20(c), del quale, in accordo a detto teorema, deve essere verificata la univoca risolvibilità rispetto a $\hat{X}_Q = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2\} = \{i_1, i_2\}$: ciò può farsi ricalcando la procedura impiegata nei Paragrafi 7.7.1 e 7.7.2, ossia disattivando tutti i generatori e verificando che nel circuito così ottenuto si abbia univocamente $i_1 = i_2 = 0$, compito agevole qui omesso per brevità. Ancora con riferimento al circuito di Fig. 7.20(c) – omettendo l'asterisco per semplicità e impiegando il teorema di sovrapposizione degli effetti – si ottiene

$$\begin{pmatrix} i_{1} = \alpha_{0}v_{in} + \alpha_{1}v_{1} + \alpha_{2}v_{2} \\ i_{2} = \beta_{0}v_{in} + \beta_{1}v_{1} + \beta_{2}v_{2} \\ v_{out} = \gamma_{0}v_{in} + \gamma_{1}v_{1} + \gamma_{2}v_{2} \end{cases}$$
(7.80)

Per p=0,1,2, gli elementi di $\{\alpha_p, \beta_p, \gamma_p\}$ possono essere calcolati indipendentemente da quelli degli altri insiemi omologhi ricorrendo, ancora, al teorema di sovrapposizione degli effetti. Quanto a p=0, si deve fare riferimento al circuito mostrato in Fig. 7.20(d), dal quale - notando che i resistori R_2 e R_3 sono *virtualmente* in parallelo e tenendo conto di (7.79) – per ispezione diretta si trae

$$\alpha_0 = 1/(2R), \beta_0 = -1/(2R), \gamma_0 = -1/2$$
 (7.81)

Analogamente, in relazione a p=1, dal circuito in Fig. 7.20(e) – notando che R_2 e R_3 sono ora *virtualmente* in serie e ancora tenendo conto della (7.79) – si ottiene

$$\alpha_1 = -3/(2R), \beta_1 = -1/(2R), \gamma_1 = -3/2$$
 (7.82)

Infine, per quanto concerne p=2, per mezzo di considerazioni analoghe, dal circuito di Fig. 7.20(f), si ha

$$\alpha_2 = -3/(2R), \beta_2 = -1/(2R), \gamma_2 = -3/2$$
 (7.83)

D'altro canto, dalla Fig. 7.20(a) si trova immediatamente

$$v_{Dj} = v_j, i_{Dj} = i_j$$
 (7.84)

Il confronto di (7.80) e (7.84) porge poi

e

$$v_{out} = \gamma_0 v_{in} + \gamma_1 v_{D1} + \gamma_2 v_{D2} \tag{7.86}$$

Si è ora in grado di studiare come il valore di v_{in} influisca sullo stato dei diodi e sul valore della tensione di uscita. Per cominciare, si ricerchino possibili valori di v_{in} per i quali entrambi i diodi siano ON. Alla luce della (7.78), tale assunzione corrisponde a porre $v_{D1}=v_{D2}=0$ nella (7.85), il che, alla luce della (7.81), consente di ottenere

$$\begin{pmatrix} i_{D1} = \alpha_0 v_{in} = v_{in} / (2R) \\ i_{D2} = \beta_0 v_{in} = -v_{in} / (2R) \end{cases}$$
(7.87)

E' subito visto che, per qualunque valore di v_{in} , la (7.87) è incompatibile con la (7.78), il che vuol dire che non accade mai che entrambi i diodi siano ON. Analogamente, cercare valori di v_{in} per i quali entrambi i diodi siano OFF equivale a porre $i_{D1}=i_{D2}=0$ nella (7.85), il che è subito visto condurre a un sistema incongruente di equazioni: quindi, per nessun valore di v_{in} la summenzionata ipotesi è verificata.

Invece, per cercare i valori di v_{in} per i quali D_1 è ON e D_2 è OFF si deve porre

$$v_{D1} = 0, \ i_{D2} = 0$$
 (7.88)

in (7.85), il che, alla luce delle (7.81) e (7.83), porge

$$\begin{cases} i_{D1} = (\alpha_0 - \alpha_2 \beta_0 / \beta_2) v_{in} = 2 v_{in} / R \\ v_{D2} = -\beta_0 v_{in} / \beta_2 = -v_{in} \end{cases}$$
(7.89)

In virtù delle (7.78) e (7.88), la (7.89) è vera per quei valori di v_{in} per i quali sia simultaneamente $i_{D1} > 0$ e $v_{D2} < 0$, ossia

$$v_{in} > 0$$
 (7.90)

in tal caso da (7.81), (7.83), (7.86), (7.88) e (7.89) si trova

$$v_{out} = (\gamma_0 - \gamma_2 \beta_0 / \beta_2) v_{in} = v_{in}$$
(7.91)

Analogamente, i valori di v_{in} per i quali D_1 è OFF e D_2 è ON si individuano ponendo

$$v_{D2} = 0, \ i_{D1} = 0$$
 (7.92)

in (7.85), il che fornisce

$$\begin{pmatrix}
v_{D1} = -\alpha_0 v_{in} / \alpha_1 = v_{in} / 3 \\
i_{D2} = (\beta_0 - \beta_1 \alpha_0 / \alpha_1) v_{in} = -4 v_{in} / 6R
\end{cases}$$
(7.93)

Alla luce delle (7.78) e (7.92), la (7.93) è vera per i valori di v_{in} per i quali $i_{D2}>0$ e $v_{D1}<0$, ossia

$$v_{in} < 0$$
 (7.94)

in tal caso da (7.86), (7.92), (7.93), (7.81) e (7.82) si ha

$$v_{out} = (\gamma_0 - \gamma_1 \alpha_0 / \alpha_1) v_{in} = -v_{in}$$
(7.95)

I risultati della analisi fin qui condotta possono sintetizzarsi nella relazione

$$v_{out} = |v_{in}| \tag{7.96}$$

E' d'uopo osservare che altre scelte di X_Q sarebbero state possibili. Si sarebbe potuto scegliere, ad esempio, $X_Q = \{x_1, x_2\} = \{i_1, v_2\}$ o $X_Q = \{x_1, x_2\} = \{v_1, i_2\}$, ma allora l'analisi sarebbe risultata, forse, meno diretta e agevole. Invece, la scelta $X_Q = \{x_1, x_2\} = \{i_1, i_2\}$ non è consentita, perchè il circuito che ne deriva non è URRA $\hat{X}_Q = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2\} = \{v_1, v_2\}$, come è facile verificare applicando il summenzionato criterio "dei generatori annullati" : ciò conferma che – come già osservato nei precedenti Paragrafi 7.9.1 e 7.9.2 – la scelta di X_Q deve essere fatta saggiamente.

Ora, in realtà la (7.96) rappresenta un risultato ben noto, dal momento che il circuito allo studio è un raddrizzatore a doppia semionda di largo impiego. Tuttavia, l'analisi condotta nella maggior parte dei testi (si vedano, ad esempio, [33, 34], per menzionare due dei più recenti) è descrittiva e qualitativa piuttosto che sistematica ed è, comunque, basata sull'assumere veri fatti che dovrebbero essere invece dimostrati dall'analisi stessa (in particolare la dipendenza dello stato dei diodi dal generatore d'ingresso è assunta nota a priori).

Al contrario, come mostrato dianzi, il Teorema 4.1 consente un'analisi per ispezione diretta assolutamente rigorosa e, al contempo, notevolmente agevole, tramite la quale l'operatore può derivare autonomamente i risultati cercati, senza il bisogno di alcun assunto a priori. Inoltre, la "linearizzazione" resa possibile dal Teorema 7.4.1 consente di trarre partito da una decomposizione del problema originario in una collezione di problemi più semplici, come pure di apprezzare l'influenza dei parametri sul comportamento del circuito, il che è cruciale quando l'analisi deve essere finalizzata al progetto.

E' evidente, altresì, che la procedura sopra descritta può essere direttamente estesa a qualunque circuito i cui elementi non lineari siano dotati di equazioni costitutive lineari a tratti (quali, ad esempio, diodi non ideali con resistenza finita di conduzione diretta per grandi segnali e/o soglie di conduzione non nulle, AO non ideali per i quali si debba tener conto delle soglie di saturazione e/o del guadagno finito, e così via). Il metodo dianzi delineato rappresenta, quindi, uno strumento generale per il calcolo di caratteristiche ingresso-uscita o ai terminali di bipolo per la summenzionata classe di circuiti non lineari.

7.9.4 Un esempio di applicazione del Teorema 7.7.2 (Teorema duale di Miller generalizzato al caso di correnti multiple)

Con riferimento al circuito mostrato in Fig. 7.21(a), si desidera in questo paragrafo calcolare le correnti $i_1, i_2 \in i_3$ applicando il Teorema 7.7.2 (vale a dire, il Teorema Duale di Miller esteso al caso di correnti multiple derivato nel Paragrafo 7.7.2).

A tale scopo, si osservi preliminarmente che, scegliendo m=1, le entità $\left\{\mu_{j}\right\}_{j=1}^{3}$ definite in (7.42) possono essere calcolate *direttamente* come funzioni di rete: è subito visto, infatti, che la condizione menzionata nel commento 6 del Paragrafo 7.7.6 è soddisfatta in corrispondenza di detta scelta.

Coerentemente con quest'ultima, si inserisca nel ramo pertinente a i_1 un generatore di corrente unitario con verso concorde a quello di detta corrente, così da ottenere il circuito di Fig. 7.21(b). Da quest'ultimo, per ispezione diretta e con l'ausilio del teorema di sovrapposizione degli effetti, le entità summenzionate sono subito calcolate come

$$\mu_2 = \left[\alpha - (1 + \beta) R \right] / (R_B + R)$$
(7.97)

 $\mu_3 = \beta \ e \ \mu_1 = 1.$

Per mezzo della (7.42) si trova quindi



Fig. 7.21 - (a) Circuito per il quale si desiderano calcolare i valori delle correnti i_1 , $i_2 e i_3$, (b) circuito per il calcolo della quantità μ_2 pertinente al Teorema 7.7.3 (ossia il Teorema Duale di Miller generalizzato derivato nel Paragrafo 7.7.3), (c) circuito in (a) dopo l'applicazione di detto teorema, e (d) circuito in (c) semplificato.

A partire da tali entità, ricordando la Fig. 7.14, si può agevolmente costruire il circuito mostrato in Fig. 7.21(c). In accordo al Teorema 7.7.2, si deve verificare che detto circuito sia univocamente risolvibile rispetto a $[i_1 i_2 i_3]^T$; tuttavia, giacché si ha univocamente $i_3 = \beta i_2$, la verifica può di fatto limitarsi a $[i_1 i_2]^T$. Per procedere in tale direzione, si applichi il Teorema di Thevenin ai capi di R_1 nel circuito di Fig. 7.21(c): tale operazione conduce al circuito di Fig. 7.21(d), in relazione al quale le entità

$$E_{TH} = (R_{C} + R_{D})E/(R_{A} + R_{C} + R_{D}),$$

$$R_{TH} = R_{A}(R_{C} + R_{D} + \beta R_{D})/(R_{A} + R_{C} + R_{D})$$
(7.99)

possono calcolarsi per ispezione dalla Fig. 7.21(c) (con l'aiuto, ad esempio, del Teorema di Millman). In tal modo, dalla Fig. 7.21(d) si deduce direttamente che i_1^* è univocamente individuata se e solo se $R_{TH} + R_1 \neq 0$. Alla luce di (7.98) e (7.99), tale ultima condizione è equivalente a

$$R_{A}(R_{C}+R_{D}+\beta R_{D})(R_{B}+R)\neq$$

$$-R[\alpha+(1+\beta)R_{B}](R_{A}+R_{C}+R_{D})$$
(7.100)

che si trova essere, a sua volta, equivalente alla condizione di univoca risolvibilità del circuito originario.

Quindi, sotto l'ipotesi che quest'ultimo sia GUR, i_1^* è univocamente individuata come

$$i_1^* = E_{TH} / (R_{TH} + R_1)$$
(7.101)

Inoltre, dalla Fig. 7.21(c) si deduce che i_2^* è, a sua volta, univocamente individuata se e solo se $R_B + R_2 \neq 0$, condizione che, in forza della (7.98), può esplicitarsi come

$$R\frac{\alpha + (1+\beta)R_{B}}{\alpha - (1+\beta)R} + R_{B} \neq 0$$
(7.102)

Al contrario della (7.100), la (7.102) è indipendente dalla condizione di univoca risolvibilità del circuito originario ed è necessaria per la corretta applicazione del teorema allo studio. Si trova altresì che la (7.102) è equivalente $\alpha \neq 0$: perciò, quando $\alpha = 0$, se la ipotesi di univoca risolvibilità del circuito di Fig. 7.21(b) rispetto a $[i_1 i_2 i_3]^T$ non è tenuta in conto, il teorema

allo studio risulta falso. Invece, se $\alpha \neq 0$, dalla Fig. 7.21(c) si ricava univocamente

$$i_2^* = \alpha i_1^* / (R_B + R_2) \tag{7.103}$$

Dal confronto fra (7.101) e (7.103) segue poi

$$i_{2}^{*} = \alpha E_{TH} / \left[\left(R_{TH} + R_{1} \right) \left(R_{B} + R_{2} \right) \right]$$
(7.104)

Infine, ancora dalla Fig. 7.21(c) e dalla (7.101), si ottiene

$$i_{3}^{*} = \beta E_{TH} / (R_{T} + R_{1})$$
(7.105)

7.9.5 Un esempio di applicazione del Teorema 7.6.3 (versione con nullori del Teorema di Thevénin-Norton generalizzato)

Quale esempio finale, si consideri il circuito mostrato in Fig. 7.22(a), ove si assume $\langle \sigma_i = i [V] \rangle_{i=1}^2$, $\langle R_j = j [\Omega] \rangle_{j=1}^6$, $\alpha = 3$, $k_1 = 3 [A]$, e $k_2 = 5 [A]$. Si desidera calcolare il valore di v_a e v_b (vale a dire, rispettivamente, il potenziale del nodo *a* e il potenziale del nodo *b* rispetto a massa) impiegando il Teorema 7.6.3 (ossia, la versione con nullori del Teorema di Thévenin/Norton generalizzato derivato nel Paragrafo 7.6.3).

A tale scopo si considera il 2-porto Q individuato dal rettangolo tratteggiato in Fig. 7.22 (a) e, con riferimento alle notazioni impiegate nell'enunciato di detto teorema, si sceglie $X_Q = \{v_2, i_2\}$, cui corrisponde $\overline{X}_Q = \{v_1, i_1\}$. In accordo col teorema in questione, Q può essere rimpiazzato col 2-porto Q_{sub} mostrato in Fig. 7.22(b). Quest'ultima è ottenuta particolarizzando al caso in esame il diagramma in Fig. 7.11(d), ove i generatori indipendenti sono inseriti come descritto in (7.35) ed \mathcal{L} è assunto coincidere con Q_{off} , ossia il 2-porto ottenuto da Q annullando tutti i generatori *independenti* in esso attivi.

Quanto a $v_{1,0}$ e $i_{1,0}$, essi possono calcolarsi dal circuito di Fig. 7.22(c) ottenuto da Q, in accordo alla (7.32), terminando la porta 1 con un noratore e la porta 2 con un nullatore; nella stessa figura, per i=1,2,3, si indica con e_i il potenziale del nodo i rispetto a massa. Inoltre, per $j=1,\dots,6$, si denotano con $v_j \in t_j$, rispettivamente, la tensione e la corrente pertinenti al resistore R_j , per il quale si adotta il riferimento semplificato costituito da un segno + attribuito al terminale opportuno, come chiarito in Fig. 7.22(d).

L'analisi può ora condursi per ispezione diretta al modo di seguito descritto. Il nullatore impone $\iota_6 = 0$, cosicchè, dalla Prima Legge di Kirchhoff (PLK), si ha $\iota_5 = k_2$. Inoltre, il nullatore impone $e_3 = 0$ e quindi annulla il generatore di tensione dipendente, comportando che $\nu_5 = R_5 k_2 = \nu_4$ e quindi $\iota_4 = R_5 k_2/R_4$.

Applicando ancora la PLK, si ha poi $t_3 = t_5 + t_4 + k_1 = k_2 (R_5/R_4 + 1) + k_1$ e, quindi, $v_1^{(0)} = e_1 = R_3 t_3 + R_5 t_5 = k_2 [R_3 (R_5/R_4 + 1) + R_5] + R_3 k_1 = 67.7500 [V]$. Inoltre, $v_2 = e_1 - \sigma_2$ cosicchè $t_2 = v_2/R_2 = \{k_2 [R_3 (R_5/R_4 + 1) + R_5] + R_3 k_1 - \sigma_2\}/R_2$. Infine,



Fig. 7.22. (a) Circuito del quale si richiedono i potenziali v_a and v_b dei nodi a e b rispetto a massa e nel quale un 2-porto Q è stato evidenziato, (b) un 2-porto Q_{sub} con le stesse equazioni costitutive di Q (ottenuto applicando il Teorema 7.6.2, ossia, la versione del Teorema di Thévenin-Norton generalizzato descritta nel Paragrafo 7.6.3) e la definizione di R_{eq} , (c) circuito per il calcolo diretto dei generatori che appaiono in (b), (d) notazione abbreviata per i riferimenti relativi alle VE del generico resistore che compare in (c), (e) circuito per il calcolo di R'_{eq} menzionata nel testo, (f) circuito in (e) semplificato e (g) circuito per il calcolo di v_a .

ancora in virtù della PLK, si trova
$$i_1^{(0)} = t_2 + t_3 - k_2$$

= $\left\{k_2\left[\left(R_2 + R_3\right)R_5/R_4 + R_3 + R_5\right] + k_1\left(R_2 + R_3\right) - \sigma_2\right\}/R_2 = 42.1250 [A].$

Si puo tornare nuovamente alla Fig. 7.22(b) e concentrarsi, per il momento, sulla porta 1 of Q_{sub} . La resistenza equivalente R_{eq} vista "guardando" fra il nodo d e massa si trova facilmente essere data da

 $R_{eq} = \left[R_4 (R_5 + R_6) \right] / \left[R_4 + R_5 + (1 - \alpha) R_6 \right] = -14.6667 \left[\Omega \right]$: per mezzo di quest'ultima, Q_{sub} (visto dai terminali della sua porta 1) può semplificarsi come in Fig. 7.22(e). Un'operazione analoga conduce al circuito ulteriormente semplificato di Fig. 7.22(f) ove $R'_{eq} = R_2 \| (R_3 + R_{eq}) = 2.4138 \left[\Omega \right]$ è la resistenza equivalenta vista "guardando" fra il nodo *c* e massa.

In tal modo il circuito di Fig. 7.22(c) si riduce a quello mostrato in Fig. 7.22(f) dal quale, con l'aiuto del Teorema di Millman, si trova $v_a = \left(\sigma_1 R'_{eq} + \left(v_{1,0} - R'_{eq} i_{1,0}\right) R_1\right) / \left(R'_{eq} + R_1\right) = -9.2323 [V]$. Dalla Fig. 7.22(b) si ha anche $v_c = -v_{1,0} + v_a = -76.9823 [V]$. Ora, procedendo a ritroso, si trova $v_d = R_{eq} v_c / \left(R_{eq} + R_3\right) = -96.7778 [V]$ dal circuito di Fig. 7.22(c). L'analisi è così completa.

E' d'uopo osservare che l'applicazione del Teorema convenzionale di Thévenin-Norton alla porta avrebbe comportato 1 un'analisi considerevolmente più complicata in relazione al calcolo di v_a . Inoltre, una ulteriore analisi, del pari complicata, sarebbe stata necessaria per il calcolo di v_b . Invece il Teorema di Thévenin-Norton generalizzato proposto nel Paragrafo 7.6.3 ha consentito, come sopra mostrato, una simultanea analisi diretta per ispezione in relazione a entrambe le tensioni richieste, in forza della sua capacità di fornire un circuito equivalente rispetto a entrambe le sue porte e, più in generale, in relazione a qualsivoglia entità accessibile dall'esterno del rettangolo tratteggiato. D'altro canto, si deve sottolineare che l'equivalenza non sussite in relazione a entità interne a detto rettangolo: ad esempio la caduta di tensione sul resistore R_4 in Fig. 7.22(b) differisce dalla caduta di tensione sullo stesso resistore in Fig. 7.22(a).

Bibliografia

1. W. K. Chen (ed.), *The Circuit and Filters Handbook*. CRC Press, USA, 2002.

2. T. S. K. V. Iyer, Circuit Theory. Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1985.

3. K. S. K. Suresh, *Electric Circuits and Networks*. Pearson Education, New Delhi, 2010.

4. N. H. Sabah, Electric Circuits and Signals. CRC Press, USA, 2007.

5. K. Mahadevan and C. Chitra, *Electrical Circuit Analysis*. PHI Learning Private Limited, Delhi, 2015.

6. L. O. Chua, C. A. Desoer and E. S. Kuh, *Linear and Nonlinear Circuits*. McGraw-Hill, New York, 1987.

7. A. M. Sommariva, "On a specific substitution theorem," *International Journal of Circuit Theory and* Applications, vol. 26, no. 5, pp. 509–512, Sept./Oct., 1998.

8. A. M. Sommariva, "On a specific substitution theorem:further results," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 27, no. 2, pp. 277–281, Mar./Apr., 1999.

9. S. T. Karris, *Electronic Devices and Amplifier Circuits: with Matlab Applications*. Orchard Publications, USA, 2008.

10. K. C. A. Smith and R. E. Alley, *Electrical Circuits: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge,1992.

11. S. A. Maas, *Nonlinear Microwave and RF Circuits*. Artech House, Norwood, MA, 2003.

12. S. P. Ghosh and A. K. Chakraborty, *Network Analysis and Synthesis*. Tata McGraw-Hill, New Delhi,2010.

13. U. A. Bakshi and A.V.Bakshi, *Network Analysis*. Technical Publication, Pune, India, 2009.

14. A. S. Elwakil and B. J. Maundy, "Calculating output impedance in linear networks without source nulling or load disconnect: the instantaneous output impedance," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 44, no. 1, pp. 98–108, Jan. 2016.

15. A. S. Elwakil and B. J. Maundy, "Extracting the cole-cole impedance model parameters without direct impedance measurement," *Electronics Letters* vol. 46, no. 20, pp. 1367–1368, Sep. 2010.

16. G. Fontana, "Feedback network analysis: an eclectic approach," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 43, no. 2, pp. 139–173, Feb. 2015.

17. D. L. Skaar and W. L. Brown, "Emphasizing some little-used theorems in introductory network analysis," *IEEE Transactions on Education*, vol. 39, no. 4, pp. 532–539, Nov. 1996.

18. F. F. Judd and P. M. Chirlian, "The Application of the Compensation Theorem in the Proof of Thévenin's and Norton's Theorems," *IEEE Transactions on Education*, vol. 13, no. 2, pp. 87–88, Aug. 1970.

19. A. M. Sommariva, "Thévenin's theorem: a new formulation," Proc. 6th IEEE Int. Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS), 1999; 141-143.

20. C. Boccaletti, G. Duni and E. Santini, "Extended Thévenin equivalent circuits," *Int. Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion (SPEEDAM)*, 2008; 344-348.

21. P. Sankaran, K. S. Rao, V. V. B. Rao and V. G. K. Murti, "On Network Theorems," *IEEE Transactions on Education*, vol. 11, no. 2, pp. 154–155, Jun. 1968.

22. Reibiger A. On Linear and Affine Networks. *Proc. Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES)*, 2012; 1-4.

23. G. Corazza, C. Someda and G. Longo, "Generalized Thévenin's Theorem for Linear N-Port Networks," *IEEE Transactions on Education*, vol. 16, no. 4, pp. 564–566, Nov. 1969.

24. P. E. Gray, "Reference node r model," Proc. IEEE, vol. 71, no. 7, pp. 902–904, Jul. 1983.

25. J. E. Brittain, "Thevenin's theorem," *IEEE Spectrum*, vol. 27, no. 3, pp. 42, Mar. 1990.

26. J. Millman and C. C Halkias, *Integrated Electronics: Analog and Digital Circuits and Systems*. McGraw-Hill, New York, 1972, pp. 255-272.

27. M. D. Davidovic, "A simple proof of Miller's theorem," *IEEE Transactions on Education*, vol. 42, no. 2, pp. 154-155, May 1999.

28. M. M.Green, "The Augmentation Principle-a general property of nonlinear circuits-and its application to circuit simulation using continuation methods," *Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, 1997; 853-856.

29. G. Shi, "Two-graph analysis of pathological equivalent networks," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 43, no. 9, pp. 1127-1146, Sep.2015.

30. A. M. Soliman, "Pathological representation of the two-output CCII and ICCII family and application," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 39, no. 6, pp. 589-606, Jun. 2011

31. A. M. Soliman and R. A. Saad, "The voltage mirror-current mirror pair as a universal element," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 38, no. 8, pp. 787-795, Oct. 2010.

32. G. Fontana, "A novel method of network function analysis based on the Andreani–Mattisson extension to the Cochrun–Grabel algorithm," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 43, no. 5, pp. 579-612, May 2015.

33. K. Lal Kishore, *Operational amplifiers and linear integrated circuits*. Pearson Education, Delhi, 2008.

34. D. Roy Choudhury and S. B. Jain, *Linear integrated circuits*. New Age International Publishers, New Delhi, 2003.

Capitolo 8 Conclusioni

8.1 Sintesi dei contributi presentati

8.2 Possibili sviluppi del presente lavoro

8.1 Sintesi dei contributi presentati

Nel Capitolo 2 si passano in rassegna le principali definizioni di testabilità proposte in Letteratura e i relativi algoritmi per l'automatizzazione dell'analisi di testabilità

Il Capitolo 3 inizia con una approfondita revisione dei principi fondamentali dell'Analisi di Testabilità per circuiti lineari tempo-invarianti. Si descrivono quindi un nuovo algoritmo e la sua traduzione software, atti all'analisi di testabilità di circuiti lineari tempo-invarianti e in grado di aggirare i principali inconvenienti da cui i metodi precedentemente presentati in Letteratura risultano affetti. Vengono infine illustrati vari esempi di applicazione del nuovo metodo, operando un confronto diretto con metodi precedenti, sì da mostrare come il primo, a differenza di questi ultimi, conduca sempre a risultati corretti.

Nel Capitolo 4, si mette a punto una rigorosa misura quantitativa di testabilità per la classe dei Circuiti a Commutazione Periodica Eccitati da Segnali Costanti (CCPESC), che comprende i Convertitori Statici di Energia (CSE) quale membri di notevole importanza nelle applicazioni. La misura teorica messa a punto viene quindi tradotta in un software efficiente per l'analisi di testabilità completamente automatizzata dei CCPESC e, in particolare, dei CSE. A chiusura del capitolo, si discutono vari esempi illustrativi (che includono le classiche topologie dei CSE), nei quali i risultati forniti da un'applicazione diretta dell'algoritmo messo a punto vengono confrontati con quelli ottenibili per mezzo della sua traduzione software. Si discutono altresì raffronti con la misura di testabilità per circuiti lineari presentata nel Capitolo 3.

Nel Capitolo 5 si impiega un approccio di tipo numerico per derivare un primo algoritmo atto all'analisi di testabilità di circuiti di grandi dimensioni: tale algoritmo riduce in modo drastico tanto i tempi di elaborazione quanto l'onere di calcolo e gli errori di arrotondamento rispetto ai precedenti approcci. Si presenta inoltre, per la prima volta, una variante del metodo in questione, che – oltre che una maggiore snellezza concettuale – consente una ulteriore riduzione dei tempi di elaborazione.

Nel Capitolo 6 si sottolinea il ruolo cruciale ricoperto dall'Analisi di Testabilità, quale viatico al progetto e/o al raffinamento di strategie per la diagnosi di guasto e l'identificazione parametriche, mostrando la sua concreta applicazione a due casi di studio tratti dalla recente letteratura.

Nel Capitolo 7 si presentano due nuovi teoremi di sostituzione generalizzati per multiporti. Si mostra poi come tali risultati possano essere impiegati quali potenti strumenti teorici per generalizzare, perfezionare e derivare rigorosamente diversi risultati classici della Teoria dei Circuiti, quali: il Teorema di Sostituzione per Circuiti Multiterminali, i Teoremi di Shift dei Generatori, il Teorema di Thévenin-Norton, il Teorema di Miller assieme al suo Duale e il Principio di Aumento. Accanto ad altri esempi che illustrano applicazioni dei summenzionati risultati, si derivano procedure generali e sistematiche atte a un approccio "carta e matita" per il calcolo del punto di lavoro e di caratteristiche di trasferimento (o, anche, ai terminali di bipolo) per circuiti non lineari e le si impiegano per l'analisi di circuiti di notevole complessità.

8.2 Possibili sviluppi del presente lavoro

Possibili sviluppi del lavoro presentato sono elencati nel seguito.

- Nuovi metodi di diagnosi di guasto assistita da analisi di testabilità per circuiti lineari
- Tecniche di diagnosi di guasto assistita da analisi di testabilità per convertitori statici di potenza
- Nuovi metodi di analisi per convertitori statici di potenza.
- Ulteriori contributi alla teoria dei circuiti.

Appendice A

Pubblicazioni

L'attività di ricerca ha condotto a diverse pubblicazioni, che sono elencate nel seguito.

A. Contributi su riviste internazionali:

1. G. Fontana, A. Luchetta, S., Manetti, and M. C. Piccirilli, "An unconditionally sound algorithm for testability analysis in linear time-invariant electrical networks," *International Journal of Circuit Theory and Applications,* vol. 44, no. 6, pp. 1308–1340, Jun. 2016.

2. G. Fontana, A. Luchetta, S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A Testability Measure for DC-Excited Periodically Switched Networks With Applications to DC-DC Converters," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 65, no. 10, pp. 2321-2341, Oct. 2016.

3. G. Fontana, A. Luchetta, S. Manetti and M. C. Piccirilli, "A fast Algorithm for Testability Analysis of Large Linear Time-invariant Networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 64, no. 6, pp. 1564-1575, Jun. 2017.

4. G. Fontana, F. Grasso, A. Luchetta, S. Manetti, M. C. Piccirilli, and A. Reatti, "A symbolic program for parameter identifiability analysis in systems modeled via equivalent linear time-invariant electrical circuits, with application to electromagnetic harvesters," (invited paper), International Journal of Numerical Modeling 2017.

5. G. Fontana, "Revisited Generalized Substitution Theorem and its consequences for circuit analysis," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 45, no.9, pp. 1249–1298, Sep. 2017.

B. Contributi su Atti di Convegno:

1. G. Fontana, F. Grasso, A. Luchetta, S. Manetti, M. C. Piccirilli, and A. Reatti, "*A new simulation program for analog circuits using symbolic analysis techniques*", 2015 International Conference on Synthesis, Modeling, Analysis and Simulation Methods and Applications to Circuit Design (SMACD).