Le Olimpiadi di matematica: un possibile percorso didattico.

Silvia Ceccarelli-Francesco Mugelli

17 ottobre 2018

1 Introduzione

Le gare di matematica sono competizioni in cui gli studenti si mettono a confronto sulla risoluzione di problemi di matematica. Ci sono diverse tipologie di competizioni sia a livello nazionale che locale, che coinvolgono studenti di tutte le età dalla scuola primaria in avanti. Molto diffuse sono le gare per studenti delle scuole secondarie di secondo grado, anche se negli ultimi anni si stanno diffondendo sempre di più anche le competizioni alla scuola primaria e secondaria di primo grado. Le gare sono in genere improntate su problemi con i quali i ragazzi devono cimentarsi: a volte viene richiesto un risultato numerico, altre una dimostrazione; questo dipende dall'età dei ragazzi e dalla tipologia della gara. In questo articolo ci occuperemo in particolare delle gare per gli studenti delle scuole secondarie di secondo grado e in particolare ci occupiamo di analizzare alcuni esercizi estratti dalle Olimpiadi della Matematica. Analizzeremo le gare da un punto di vista principalmente didattico e non competitivo.
Le Olimpiadi della Matematica sono gare rivolte ai ragazzi delle scuole superiori e basate sulla soluzione di problemi matematici elementari: per risolvere i quesiti proposti servono poche nozioni di base che però possono richiedere una loro applicazione intelligente e non banale. Ai partecipanti è richiesto di trovare tecniche creative per risolvere problemi non standard, generalmente mai visti prima per i quali ideare dimostrazioni utilizzando un approccio logico e, nelle fasi più avanzate, tecniche e conoscenze di argomenti non necessariamente curriculari.
Dopo queste premesse perché non utilizzare gli esercizi ideati per i

testi di gara per stimolare la curiosità negli studenti? Perché non attuare una strategia didattica che sfrutti una matematica alternativa, diversa da quella curricolare e che stimoli un pensiero divergente negli studenti?
Prendiamo alcuni semplici esercizi simili ad alcuni assegnati ai Giochi di Archimede, la fase di istituto delle olimpiadi della matematica, e vediamo come utilizzarli all'interno di una qualsiasi classe di un Istituto secondario di II grado. Gli esercizi proposti sono molto semplici, ma possono creare difficoltà se si vedono per la prima volta perché sono diversi dalla matematica standard che si fa a scuola. La nostra proposta è quella di sottoporli ai ragazzi senza introdurre alcun concetto nuovo. Proveremo a dividere la classe a piccoli gruppi di livello misto e li lasceremo lavorare autonomamente, dando molta importanza alla reale partecipazione di tutti alla discussione e alla risoluzione degli esercizi. Mentre i ragazzi lavorano è opportuno che il docente passi di gruppo in gruppo facendo domande in modo da guidare la discussione degli studenti e aiutando i più fragili e i più deboli a partecipare. É importante responsabilizzare gli studenti che hanno più facilità a trovare la strada giusta affinché diano il tempo a tutti i componenti del gruppo di capire e a fare in modo che non ci sia nessuno che arranca. É utile stimolare gli studenti a ricondurre le problematiche che si trovano davanti a situazioni via via più semplici in cui si sappiano muovere. Quando abbiamo un problema da affrontare, se ci sembra troppo difficile e si vede che i ragazzi sono in difficoltà, lo potremo semplificare fino ad arrivare ad una situazione che già sappiamo risolvere. Questo aiuta gli studenti a cercare autonomamente strategie risolutive partendo e prendendo spunto da quanto già conoscono. É opportuno anche fare il lavoro contrario: cioè una volta risolto un esercizio, proponiamo agli studenti di generalizzarlo. Questo li spingerà a prendere maggiormente coscienza della differenza tra esempi e dimostrazioni, li spingerà a cimentarsi col passaggio dal particolare al generale.

2 Percorso

Proponiamo un possibile percorso di matematica olimpica da svolgere con una qualsiasi classe di un istituto superiore. I prerequisiti sono minimi ed è sufficiente la matematica studiata alla scuola secondaria di primo grado, dunque il docente è libero di proporre l'argomento

anche ad una classe prima.
Il consiglio è quello di dividere la classe in gruppi di livello misto e seguirli tutti, fare in modo che tutti gli studenti partecipino attivamente ed educare i 'più bravi' alla generosità, alla collaborazione e alla condivisione, in modo che tutti possano divertirsi e apprezzare l'aspetto argomentativo della matematica.

Esempio 2.1. *Quanti divisori ha* $5p$ *se* p *è primo?*

Questo è piuttosto semplice ed è utile per entrare nell'argomento divisori e numeri primi. Ci dà modo di riprendere la definizione di numero primo, di divisori e di fare qualche considerazione di buon senso. La risposta è che per ogni primo p tale che $p \neq 5$, 5p ha 4 divisori: $1, 5, p, 5p$. Mentre se $p = 5$ i divisori di $5p$ sono tre: $1, 5, 25$. Chiaramente i due casi vanno affrontati separatamente.

Esempio 2.2. *Se* p *non è primo, quanti sono i suoi divisori?*

Anche in questo caso lasciamo parlare la classe, lasciamo che vengano fatti esempi e conduciamo gli studenti verso la scomposizione di un qualsiasi numero n in potenze di fattori primi. Ricordiamo che qui è importante trovare una strategia pratica che ci aiuti a contare i fattori primi di un qualsiasi numero intero. Probabilmente i ragazzi non parleranno del teorema fondamentale dell'aritmetica, ma questo esercizio ci fornisce lo spunto per portarli a riflettere sull'importanza di tale teorema dopo che siamo arrivati alla formulazione di un conteggio. Questo esercizio, come la maggior parte degli esercizi, ci offre l'opportunità di mostrare la differenza tra esempio e dimostrazione. Possiamo guidare la classe attraverso tappe. Abbiamo già visto quanti sono i divisori di $5p$ con p primo, possiamo proporre di contare i divisori di 5^2p e poi di 5^2p^3 e, a questo punto, arrivare a generalizzare e determinare il numero dei divisori di un qualsiasi numero n.
Come già ricordato il teorema fondamentale dell'aritmetica ci assicura l'esistenza e l'unicità della scomposizione nel prodotto di potenze di fattori primi di un qualsiasi numero $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots p_r^{\alpha_r}$, con p_i primi. Possiamo affermare che un qualsiasi divisore di n è del tipo $p_1^{\beta_1} \cdot \ldots p_r^{\beta_r}$ con $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ per $i = 0 \ldots r \leq \alpha_r$ e questi sono esattamente $(\alpha_1 + 1) \cdot \cdots \cdot (\alpha_r + 1)$.

A questo punto possiamo formulare una sola richiesta che ha un'unica risposta e comprende entrambe le richieste fatte fino ad ora.

Esempio 2.3. *Dato un qualsiasi p intero, quanti sono i suoi divisori?*

É utile riflettere anche sul fatto che possiamo considerare anche i divisori negativi.
Proponiamo poi, in ordine di difficoltà il seguente esercizio.

Esempio 2.4. *Per quali valori positivi di n il numero* $\frac{252}{n-7}$ *è intero?*

Cosa deve accadere affichè un numero scritto sotto forma di frazione sia intero? Chiaramente deve accadere che $n-7$ divida 252, quindi che $n-7$ sia uno dei divisori di 252. Allora scomponiamo 252 e vediamo a cosa si arriva:
$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ dunque 252 ha 18 divisori, vediamone alcuni per capire il ragionamento:
$n-7 = 1, n-7 = 2, n-7 = 2^2, n-7 = 2{\cdot}3, n-7 = 2{\cdot}3^2, n-7 = 2{\cdot}7, ecc.$
da cui:
$n = 8, n = 9, n = 11, n = 13, n = 25, n = 21, ecc.$
Abbiamo così tutti i valori di n per cui $n-7$ è un divisore positivo di 252.

Ma siamo proprio sicuri che non ci sia altro? Il testo dell'esercizio chiede i valori positivi di n affinché $\frac{252}{n-7}$ sia intero, quindi $\frac{252}{n-7}$ può risultare sia positiva che negativa, l'importante è che n sia positivo. Ecco che è importante considerare anche i divisori negativi: $n-7 = -1, n-7 = -2, n-7 = -4, n-7 = -6, n-7 = -18, n-7 = -14$, ecc. facendo i calcoli otteniamo: $n = 6, n = 5, n = 3, n = 1, n = -11, n = -7$, ecc. tra questi prendiamo solo i valori positivi di n che in tutto sono 4, per un totale di 22 valori positivi di n. Arrivati qui proviamo a porre altre domande tipo:

- Per quali valori di n il numero $\frac{252}{n-7}$ è intero?

  oppure:

- Per quali valori di n negativi il numero $\frac{252}{n-7}$ è intero?

In un secondo momento possiamo generalizzare il problema. Vogliamo arrivare a risolvere:
Per quali valori di n il numero $\frac{245+n^2+n}{n-7}$ è intero?
Arriviamoci gradualmente e troviamo i valori di n per cui il numero

$\frac{245+n}{n-7}$ è intero:
$\frac{245+n}{n-7} = \frac{245+n+7-7}{n-7} = \frac{n-7}{n-7} + \frac{245+7}{n-7} = 1 + \frac{252}{n-7}$. Quindi 1 è intero e il problema si riconduce alla stesso di prima cioè a determinare quei valori n per cui $n-7$ è divisore di 252.
Poniamo agli studenti delle domande e stimoliamoli a riflettere sul procedimento seguito: Perché si è sommato e sottratto 7?

Si poteva procedere in altro modo, ad esempio sommando e sottraendo $35n$, considerando che $245 = 7 \cdot 35$, dunque anche in questo caso la frazione di partenza diventa uguale ad un numero intero più un'altra frazione:

$$\frac{245+n}{n-7} = \frac{245+n+35n-35n}{n-7} = -35\frac{n-7}{n-7} + \frac{36n}{n-7} = -35 + \frac{36n}{n-7}.$$

Osserviamo che questa strada arriva ad una situazione molto più difficile da analizzare, in quanto ci porta a dover risolvere un'equazione diofantea non lineare: ci rimane una frazione in cui il numeratore è $35n$ e non una costante come nel caso precedente ($\frac{36n}{n-7} = k \in \mathbb{Z}$ quindi devo trovare n, k tali che $36n = kn + 7k$).
Abbiamo l'opportunità di fare considerazioni circa il perché sommando e sottraendo 7 si arrivi più facilmente ad una soluzione mentre nel secondo caso no.
É quindi opportuno lasciar discutere gli studenti, chiedere loro se vedono soluzioni diverse da questa e chiedere sempre giustificazioni di quanto affermano. Cerchiamo di arrivare a capire che cosa abbiamo fatto realmente e quindi arriviamo a toccare con mano che nel caso in cui abbiamo eseguito la divisione tra polinomi siamo giunti ad una soluzione semplice, nell'altro caso no. Osserviamo che, nel procedere, abbiamo fatto la divisione tra polinomi senza rendercene conto.
Torniamo poi a risolvere il problema formulato inizialmente, cioè: quali sono i valori di n per cui $\frac{245+n^2+n}{n-7}$ è intero?

Chiediamoci come possiamo procedere? Cosa ci aspettiamo questa volta dalla divisione tra i due polinomi $245+n^2+n$ e $n-7$? Dobbiamo eseguirla?

Chiaramente ci aspettiamo un'espressione in n che assume valori interi e che avrà un certo resto r che calcoliamo utilizzando il teorema del resto: $r = 7^2 + 7 + 245 = 301$. Ecco che il problema si riduce a risolvere una situazione analoga alla prima presa in considerazione e cioè a determinare i valori di n per cui $\frac{r}{n-7} = \frac{301}{n-7}$ è intero.

Per vedere se gli studenti hanno capito basta dare come esercizio un polinomio di grado più alto ad esempio $\frac{n^3-3n^2+n-14}{n^2+1}$ e vedere come lo affrontano. Capire la logica che sta dietro una situazione non significa poter fare gli stessi passaggi, per esempio in questo caso non si applicherà il teorema del resto ma si farà la divisione.

Inoltre chiediamo di generalizzare il problema e di astrarre tutte le considerazioni fatte nel caso degli esempi affrontati. Nel corso della generalizzazione focalizziamoci su ogni considerazione testandola con attenzione.

Altri quesiti dello stesso livello sono i seguenti:

Esempio 2.5. *Quali sono i primi p tali che $5p + 49$ è un quadrato perfetto?*

Scriviamo $5p+49$ come quadrato n^2: $5p+49 = n^2$, da cui $5p = n^2-49 = (n-7)(n+7)$. Abbiamo uguagliato una fattorizzazione aritmetica $5p$ con una algebrica $(n-7)(n+7)$. Si presentano 4 possibilità:
$5 = n-7$ e $p = n+7$; $1 = n-7$ e $5p = n+7$
da cui: $n = 12, p = 5$; e $n = 8, 5p = 15, p = 3$ e viceversa:
$p = n-7$ e $5 = n+7$; $5p = n-7$ e $1 = n+7$
da cui: $n = -2, p = -9$; e $n = -6, 5p = 13$ impossibile.

Esempio 2.6. *Trovare tutti i quadrati la cui differenza è 2015.*

Traduciamo in formule l'espressione: $a^2 - b^2 = 2015$. Proseguendo con la fattorizzazione algebrica: $(a-b)(a+b) = 2015$, e, poiché $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, procedendo come sopra troviamo le soluzioni. Anche questo quesito, seppure semplice, può diventare oggetto di discussione e si può evidenziare che tutte le equazioni che derivano da $(a-b)(a+b) = 2015$ producono una soluzione in quanto i fattori di 2015 sono tutti dispari.
Mentre, non tutti i sistemi che derivano da $(a-b)(a+b) = 2016$ producono soluzioni intere, poiché $a-b$ e $a+b$ devono avere la stessa parità. Anche in questo caso è importante che, dopo essere stati stimolati, siano i ragazzi ad approfondire la questione e che riflettano sulla parità di $a, b, a+b, a-b$.

3 Conclusioni

Tra i vari problemi a disposizione abbiamo scelto alcuni semplici problemi di teoria dei numeri utilizzati nelle prime fasi della preparazione poiché significativi per la loro semplicità e per il fatto che possono essere risolti da chiunque possegga solo le competenze di base.

Ribadiamo l'importanza di affrontare la matematica in modo argomentativo affinché gli studenti acquisiscano il concetto che la matematica è dimostrazione e giustificazione.

Riteniamo che lo scambio tra studenti, guidato dai docenti, sia fondamentale e che lezioni basate sulla discussione matematica promuovano maggiormente una mentalità logica e basata sull'argomentazione. Il raccontare, lo spiegare, il cercare di convincere in modo logico i compagni della veridicità di un'affermazione è il succo della matematica: il passaggio finale e conclusivo è riuscire a scrivere di matematica. Tutto ciò ha un senso più vivo e concreto se riusciamo a farlo non solo individualmente ma all'interno di un gruppo che condivide le problematiche proposte. Questo è quanto un insegnante dovrebbe cercare il più possibile di attuare durante le proprie ore di lezione: in cui non dovrà più porsi al centro ma dovrà valorizzare l'espressività e la costruzione della matematica all'interno del gruppo e qualche volta dovrà accettare l'idea che qualche studente è in grado di fare dimostrazioni magari più interessanti delle sue.

4 BIBLIOGRAFIA

- Franco Conti, Michele Barsanti, Tullio Franzoni (a cura di) (1994), *Le Olimpiadi della matematica. Problemi dalle gare italiane*, Zanichelli.

- Michele Barsanti, Franco Conti, Camillo de Lellis, Tullio Franzoni (a cura di) (2002), *Le Olimpiadi della matematica. Problemi dalle gare italiane dal 1995 al 2001*, Zanichelli (seconda edizione).

- Massimo Gobbino (2012), *Schede olimpiche per la preparazione alle Olimpiadi della Matematica*, Unione Matematica Italiana.
  Giovanni Paolini (2012), *La matematica delle Olimpiadi. Per le*

Scuole superiori, La scuola.

- György Pólya (2016), *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico.* [(1945) How to solve it], UTET Università.

- Gronchi, Martinelli, Mugelli, Papi, *La gara matematica di Firenze.* Esculapio, 2012

- Rosetta Zan - *Difficoltà in matematica.* - Springer, 2007

- Bartolini Bussi, M. (1996): *Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School*, Educational Studies in Mathematics, 31, 11-41

- Rosa Maria Herrera, *Francesco Mugelli and Math Olympiad* - Pensamiento Matematico - Vol.VII, Num. 2, pag 113-124 ISSN 2174-0410

SITOGRAFIA

https://www.focus.it/scienza/scienze/che-cosa-e-lolimpiade-della-matematica
https://it.wikipedia.org/wiki/Olimpiadi-della-matematica-Storia
http://fox.dm.unipi.it/perfezionamento2006/documenti/DeRitoRelLab1-ApprendimentoCooperativo.pdf
http://olimpiadi.dm.unibo.it/
http://olimpiadi.dm.unibo.it/le-gare/giochi-di-archimede/ http://www.dma.unifi.it/ mugelli/incontri_olimpici.html
http://www.indicazioninazionali.it/