Filosofia della matematica e fondamenti nell’opera di Ettore Casari

Andrea Cantini

Filosofia della matematica e fondamenti nell'opera di Ettore Casari

Le ricerche di filosofia della matematica di Casari prendono sostanzialmente avvio dalla sintesi monografica delle *Questioni di filosofia della matematica* (1964), si affinano -- filosoficamente e tecnicamente -- nel lungo saggio su *Universali e Insiemi* (1969), si arricchiscono progressivamente attraverso riflessioni su una pluralità di tematiche fondazionali[1], per culminare nei saggi che trattano de *La dimostrazione come strumento caratteristico del pensiero matematico*, e del nesso *Matematica e verità*.[2] E' da questi ultimi lavori che vogliamo partire, a mo' di prologo.

1. *Sulle dimostrazioni*

Anticipando fin d'ora la dinamica e le direzioni fondamentali della ricerca di Casari, possiamo ricordare come agli inizi degli anni Sessanta egli muova da una piena immersione nelle indagini logico-fondazionali nel senso della *Grundlagenforschung* della matematica – indagini che vedono la nozione di «insieme» e «classe» in posizione centrale, accompagnate dall' elaborazione delle posizioni delle varie scuole fondazionali. Da qui egli procede per tappe successive verso un raffinamento dell'indagine teoretica, che vede il coinvolgimento di autori come Bolzano, Husserl, Brentano, Lesniewski. Questo ampliamento di prospettiva è senz'altro uno degli aspetti più originali dell'opera di Casari, che studia Bolzano e Husserl, perché è intimamente convinto -- e cerca di mostrarlo nel corso della sua attività a partire dagli anni Ottanta del secolo scorso -- che le idee di questi autori abbiano di fatto influito su aspetti non banali della logica contemporanea.[3] Dalla meditazione di temi bolzaniani Casari estrae un essenziale insegnamento metodologico, che fa emergere il ruolo peculiare e decisivo della *dimostrazione in matematica* e delle sue distinte funzioni. In primo luogo, la funzione *epistemica*, ovvero la dimostrazione come *Gewissmachung*, come certificazione della proposizione che si dimostra: l'evidenza di una proposizione[4] non basta, si richiede una verifica, una dimostrazione che le cose stanno così e così (*demonstratio quia*). In secondo luogo, la dimensione *eziologica*: la dimostrazione deve essere anche una *demonstratio propter quid*, una prova del *perché.* Nell'ottica eziologica, soltanto una dimostrazione che sia stata

[1] In particolare si vedano i saggi di Casari: *Alcuni temi fondamentali della filosofia della matematica,* in *Atti del XXIV Congresso nazionale di filosofia*, Società Filosofica Italiana, Roma 1973, Vol. I, pp. 109-126; *Axiomatical and set-theoretical thinking,* in «Synthese», 27, 1974, pp. 49-61; *Il problema dei fondamenti della matematica dall'800 ad oggi,* in E. Casari, G. Israel, F. Marchetti, *I fondamenti della matematica dall'800 ad oggi,* Guaraldi, Firenze 1978, pp. 7-28; *Logic and the Foundations of Mathematic*s, in E. Agazzi (ed.), *Modern Logic - A Survey*, Reidel, Dordrecht 1981, pp. 155-166; *A proposito dei fondamenti della matematica*, in «Rivista di filosofia», LXXII, 1981, pp. 359-371.

[2] Il primo saggio è in: «Atti dei Convegni Lincei» LXXIII, 1985, 321-330; il secondo in: «Rivista di Filosofia», LXXVIII, 1987, n.3, 329-350.

[3] Oltre a Casari, *La dimostrazione*, cit., si veda l'appendice C in E.Casari, *Bolzano's Logical System*, Oxford University Press, Oxford 2016.

[4] E.Casari, *Sull'origine dell'«oggettivo» in Bolzano*, , p.94. in A. Fabris, G. Fioravanti e E. Moriconi (a cura di), *Studi in onore di Vittorio Sainati*, ETS, Pisa 1997, pp. 93-115.

ottenuta analiticamente attraverso i concetti contenuti nella tesi da dimostrare, senza cioè una *metàbasis eis allo ghenos,* è in grado di spiegarne le vere ragioni, il *diòti*.[5]

La centralità del momento analitico offre a Casari lo spunto per individuare altre polarità, che sono naturalmente implicite nelle ricerche, e che individuano quasi una sorta di indicazioni *agogiche* emergenti dai testi matematici e dalle dimostrazioni ivi contenute: oltre alla coppia «analitico/sintetico», si menzionano «regressivo/progressivo», «deduzione/riduzione ». «ascesa/discesa». Sempre a questo proposito, Casari cita Pappo[6], e avanza quindi la distinzione fra visione *euclidea* e visione *anti-euclidea*. Per la prima «pochi poderosi principi giustificano razionalmente tutto il sistema delle proposizioni»; per la seconda invece la verità viene a «dipendere da una moltitudine di debolissime ed elementarissime asserzioni». L'ispirazione classica può naturalmente guidare alla distinzione fra dimostrazioni *costruttive e non-costruttive*, alla contrapposizione fra *problemi* e *teoremi*, e — seguendo Proclo -- fra Menecmo e Speusippo.[7]

La riflessione attorno alle dimostrazioni come oggetti di studio conduce Casari ad una nitida rilettura del fenomeno dell'incompletezza, che egli riformula come segue: «Gödel ci ha fatto vedere che il concetto formale [di dimostrazione] come *albero finito* di proposizioni formali interconnesse da ben specificate regole di trasformazione non è capace di consentirci l'estrazione, da principi controllabili, di tutte le verità aritmetiche […]»[8]. Non è corretto dire che ci sono verità aritmetiche indimostrabili, «ma piuttosto che ci sono verità aritmetiche che non si possono estrarre mediante un albero *finito* di proposizioni aritmetiche da *principi controllabili*», ovvero descrivibili da un sistema di assiomi dato in maniera effettiva, nel senso di Turing. Qual è allora il ruolo del formalismo e dell'assiomatica formale in questa prospettiva? E in particolare qual è il senso dell'opposizione fra dimostrazioni formali e dimostrazioni reali? Con una buona dose di realismo, Casari ci ricorda che le dimostrazioni *effettivamente* sviluppate nella pratica matematica sono in realtà *entimematiche*, nel senso che incorporano senza esplicita menzione molte informazioni teorematiche e definizioni. «Le dimostrazioni formali sono allora ideali e assolvono a una funzione regolativa: ad esse si ritiene possibile accedere almeno parzialmente a seconda delle condizioni culturali, storiche ambientali nelle quali le dimostrazioni concrete vengono presentate». Si noti qui la consapevolezza critica di Casari, e il realismo: il grado di formalizzazione dipende dalle condizioni culturali, storiche, nelle quali le dimostrazioni concrete vengono presentate. Inoltre le dimostrazioni formali sono strumento essenziale per realizzare la matematizzazione della questione epistemologica in matematica.[9]

Per concludere la sezione, vorremmo sottolineare un ulteriore elemento di derivazione bolzaniana al quale Casari rimane fedele: l'idea che sia possibile rinvenire un ordine oggettivo fra i nostri concetti, e in particolare una *objektive Zusammenhang der Wahrheiten*. Ciò che va svelato, se si vuol conoscere il fondamento, è il «perché» (il «dioti ») in contrasto con il «che » (l'«oti »), gli

[5] Si veda la contrapposizione fra dimostrazioni esplicative e non, discussa anche da altri autori, come Mancosu, e Cellucci più di recente.

[6] Casari, *La dimostrazione,* cit. ,p.,322.

[7] Casari, *La dimostrazione,* Ibid., p.325.

[8] Casari, *La dimostrazione,* ibid.. p.326.

[9] Casari, *Matematica e Verità*, cit., p.350

scopi meramente descrittivi.[10] Di qui il primato della ontologia sul linguaggio, la semantica e epistemologia. Per inciso, questa idea viene sostenuta e rafforzata in seguito al cospetto delle analisi bolzaniane. Tanto per citare un caso concreto, la medesima *dimensione sintattica* trova fondamento a livello ontologico: per esempio, l' operazione linguistica di sostituzione ha una controparte ontologica; se *x è parte di y in un dato oggetto a*, si può considerare un nuovo oggetto *a che risulta rimpiazzando x con u in a*. Questo fa sì che l'analisi linguistica sia strumentale, e che le relazioni morfologiche e sintattiche si fondino su quelle ontologiche. Ne segue anche che la relazione di «essere parte di» può avere caratteristiche, a tutta prima estranee alla mera sfera del linguaggio, come quella di essere *sfondata* (e ammettere cioé catene discendenti infinite[11]); e che in generale vari tentativi di pensare in termini logici e matematici la struttura *mereologica* di un oggetto -- e più in generale l'idea di aggregato o molteplicità -- debbano essere proficuamente indagate e recuperate (*Inbegriff*, *Bestandteil*; *Menge*, *Summe*, *Reihe*). In sintesi, l'obiettivo implicito, ma ben leggibile, è quello di dare forma rigorosa – con gli strumenti della logica matematica -- a certe intuizioni *di natura essenzialmente ontologica*, che, emerse nel contesto delle problematiche logico-fondazionali, hanno poi acquisito una portata filosofica più generale, a diretto contatto anche con questioni di grande momento nel pensiero della seconda metà dell'Ottocento e nella prima parte del secolo scorso.[12]

2. Le «Questioni di filosofia della matematica»

Andando a ritroso, la prima monografia di Casari – in breve le *Questioni* -- costituisce una esemplare introduzione alla filosofia della matematica, compatta ma esaustiva, particolarmente apprezzabile perché in essa le specifiche opzioni teoriche vengono discusse con una naturale progressione dall' analisi concettuale alla rispettiva precisazione in sistemi assiomatici. Orbene, in questa situazione, va subito detto che le *Questioni* rappresentano agli inizi degli anni Sessanta un'opera innovativa nel nostro paese, che offre un panorama aggiornato anche in rapporto agli studi fondazionali fuori d'Italia. Ma cosa caratterizza le *Questioni*? Innanzitutto l'organizzazione attorno a una *opposizione fondamentale* fra due punti di vista. Da un lato la *visione realista o platonista*, secondo la quale la matematica parla di qualcosa che è del tutto indipendente dall'attività costruttiva, ha una ontologia, è una scienza descrittiva: i matematici sono degli esploratori più che degli architetti che costruiscono, o degli scienziati naturali.[13] Dall'altro lato, il saggio sviluppa con ampiezza e in profondità nella parte seconda l'atteggiamento *concettualista*, secondo il quale la matematica *costituisce i propri oggetti*, e i matematici assomigliano più agli

---

[10] Il tema è magistralmente sviluppato nel già citato *Matematica e Verità*, cit. Qui si aprirebbe la problematica della *Begründung*, popolare nell'ambito della odierna filosofia analitica come indagine sul *Grounding*. Questa impostazione spiega peraltro le consonanze fra Casari e le riflessioni del matematico e filosofo svedese Per Martin-Löf,, sviluppate per es. in *A path from logic to metaphysics*, in: D. Costantini, M.C.Galavotti, *Atti del Convegno "Nuovi Problemi della Logica e della Filosofia della Scienza"*, vol.2, CLUEB, Bologna 1991.

[11] Come ci spiega Casari, *L'universo logico bolzaniano*, «Rivista di filosofia», LXXVI, 1985, p.339-366, per Bolzano la «sfondatezza» dell'analisi non viene esclusa.

[12] Si veda il capitolo dedicato da Casari a Bolzano, Husserl, etc, in: P.Rossi-C.A.Viano (a cura di), *Storia della Filosofia*, vol. 6, Laterza Bari, 1999.

[13] C.f.r. E. Giusti, *Ipotesi alla base dell'esistenza matematica,* Bollati-Boringhieri, Torino 1999, p.20; o il celebre brano di Gödel nel saggio *La logica matematica di Russell* (in: Cellucci, C. (a cura di), *Filosofia della Matematica*, Laterza Bari 1967, pp.81-112).

architetti che costruiscono nuove strutture, che ad esploratori di segmenti indipendenti di realtà ideali.[14]

Nella direzione del realismo si delinea la concezione cantoriana degli insiemi – vista come platonismo ontologico, con le profonde difficoltà rese manifeste dalle ben note antinomie logiche:[15] il punto fondamentale è che da esse deriva l' impossibilità di accettare indiscriminatamente il carattere sostanziale – inteso come assolutezza e individualità -- di una qualunque *molteplicità estensionalmente intesa e determinata da una data specifica proprietà linguisticamente specificata*, pena la contraddizione. Nelle *Questioni* le soluzioni possibili prendono la forma di distinte teorie formali – Zermelo-Fraenkel/von Neumann-Bernays-Gödel/alternative alla Quine, alla Ackermann--, le quali vengono discusse in rapporto alla loro efficacia matematica, ma anche alla rispettiva plausibilità filosofica; e di ciascuna soluzione teorica sono lucidamente individuati vantaggi e limiti. Una narrazione della vicenda dei fondamenti—filosoficamente orientata -- mostrerebbe come le contraddizioni vengano neutralizzate mediante un ventaglio di scelte tecniche che mirano a sterilizzare la potenza del principio *naive* di esistenza per gli insiemi, e che lo fanno con successo.

L'applicazione della logica e dei metodi formali non è però una panacea, perché le diverse scelte non sono esenti da arbitrarietà, difettano non di rado di plausibilità, naturalezza, intuibilità.[16] Come riconosce Casari, queste categorie non possono costituire il criterio decisivo della legittimità del pensiero logico-matematico; ma ne è altrettanto insoddisfacente una spiegazione globale, nelle quali esse figurano come inutili e superflue. Una spiegazione adeguata deve invece fare i conti con la necessità di un' analisi rigorosa, a prescindere dai formalismi: l'idea è che si ottengono le regole e le definizioni basilari *mediante un'analisi concettuale delle nozioni intuitive, ed esplicitandone le proprietà*, accettando dunque l'idea che le medesime abbiano significato, corrispondano a dei contenuti (reali o mentali non importa). Casari lascia aperto il senso ultimo delle varie proposte per i fondamenti della teoria degli insiemi; ma questo senso emerge con la necessità di sviluppare un confronto dialettico fra la matematica formale e quella informale, che è un tema destinato a diventare poco dopo centrale nella filosofia della matematica, a partire dal celebre saggio di Georg Kreisel del 1967.[17]

Ritornando allo sfondo teorico specifico del realismo e ai suoi problemi, Casari distingue una concezione insiemistica *astratta* della teoria degli insiemi, che si lascia precisare come in ogni altra teoria astratta: gli insiemi sono semplicemente *gli elementi di una qualsiasi struttura che verifica gli assiomi standard della teoria di Zermelo-Fraenkel* ZF. Ma vi è anche una concezione *concreta*, quella «iterativa»,[18] accreditata dalla fondamentale memoria di Zermelo del 1930 e da Gödel, in base alla quale la teoria degli insiemi parla della «gerarchia cumulativa», ottenuta iterando indefinitamente l'operazione di passaggio da un insieme all'insieme delle sue parti, muovendo dall'insieme vuoto (o da un insieme di elementi primitivi). Ed è questa concezione che si può

---

[14] Giusti, op.cit,. Casari, *Questioni*, cap.9.

[15] Casari rimanda anche al classico problema uno/molti di Platone; i presupposti della concezione cantoriana vengono chiariti a p.21 delle *Questioni*.

[16] Casari, *Questioni*, cit. pp.108-109.

[17] G.Kreisel, *Informal Rigour and completeness proofs*, in *Problems in the Philosophy of Mathematics* (I.Lakatos, a cura di), Amsterdam, North Holland, 1967, pp.138-71.

[18] C.f.r. G. Boolos, *The iterative conception of set*, «Journal of Philosophy», 68, 1971, pp.215-231, 1971, e i saggi raccolti da C. Cellucci nell'antologia *Il Paradiso di Cantor*, Napoli, Bibliopolis 1978, incluso il lavoro di Zermelo. Per la parte storica, si veda il recente: G. Lolli, *Nascita di un'idea matematica*, Edizioni della Normale, Pisa 2013.

portare a sostegno del platonismo. Per l'approccio astratto vi è una opposizione fra il far riferimento a *tutte le strutture*, e il restringersi a *una sola struttura*, quella iterativa, che è di fatto quella naturale e l'unica che si lascia concepire secondo una modalità ben definita. Ma isolarla come l'unica naturale, si può solo a livello di «rigore informale». Naturalmente la soluzione al problema dei fondamenti insiemistici rimanda a sua volta a ulteriori profonde difficoltà, di cui Casari rende lucidamente conto: il problema delle definizioni impredicative, il paradosso di Skolem, il metodo assiomatico. Limitandosi al solo primo punto, si tratta del senso dell'esistenza matematica e del suo rapporto con l'attività definitoria.[19] Com' è possibile che certe definizioni che fanno uso di quantificazioni su proprietà astratte possano essere viste come costitutive di entità matematiche siffatte? Poincaré e Russell avevano mosso accuse di circolarità e viziosità a una simile prassi definitoria. Per evitare le difficoltà, o non si accetta che le definizioni siano costitutive degli enti matematici, oppure si rifiuta l'idea che gli universali possano concepirsi *distributivamente*, per cui riferirsi a (ovvero quantificare su) una classe X, comporta il riferirsi anche a ogni suo elemento. Un platonista logico non è costretto a sottoscrivere le due tesi (costitutività e distributività), ma qui Casari rimane neutrale; anzi, sviluppa in dettaglio l'ispirazione concettualista (vedi anche il successivo paragrafo 5). Ci pare importante ricordare qui che l'atteggiamento di Casari intende rispettare appieno *la libertà del matematico*, e si oppone a ogni regimentazione estrinseca. Si riconosce la ragionevolezza e fondatezza del discorso predicativista, ma non si considera legittimo il voler formulare *a priori* un quadro massimale dei possibili riferimenti: un conto è accettare che dall'interno della matematica sorga l'esigenza di lavorare entro limiti ragionevoli di dominabilità intuitiva, e «un altro conto è dire che fin lì va bene e più in là no».[20]

Il tema del rigore informale è in primo piano anche nella discussione delle difficoltà connesse con l'assiomatica e il paradosso di Skolem. Nella teoria degli insiemi si prova l'esistenza d' insiemi «piucchenumerabili», ma la versione assiomatica della medesima teoria -- se formalizzata a livello elementare — ha un modello numerabile. Se si accetta la soluzione alla Skolem, si deve concludere che le asserzioni di esistenza sono *relative* a un determinato universo del discorso, e dipendono dal linguaggio nel quale viene a precisarsi la teoria. E quindi si deve procedere nella direzione di negare l'assolutezza di proprietà degli enti matematici: per es. l'insostenibilità dell'assolutezza di alcuni concetti insiemistici basilari come la cardinalità. Certo, questa sembra una via praticabile e va contro il platonismo. Ma Casari osserva che i risultati di Skolem. *dipendono dalla scelta della logica*, e che non si può escludere un formalismo più forte che la oltrepassi. Inoltre, *il metodo assiomatico non va assolutizzato,*[21] come la concezione astratta degli insiemi che ne consegue. Il teorema di Skolem stesso—come rilevato da Tarski nel 1955 – vale sotto una interpretazione dei concetti in gioco generali, ma non se l'appartenenza diventa un simbolo logico: in tal caso non ha più un modello numerabile. L' appartenenza insiemistica può dunque avere una semantica prefissata, così come per i geometri greci si faceva col concetto di «punto». E la sostanza sta nel carattere «non-aprioristico ma storico» che fa da sfondo all'analisi logica.[22]

Nella seconda parte delle *Questioni*, dalle idee del matematico Kronecker si passa a una disamina delle posizioni concettualiste, articolate secondo sviluppi formali tecnicamente avanzati: (i) il

[19] Si vedano sul problema dell'esistenza Lolli, *Filosofia della Matematica*, cit., C. Cellucci, *Filosofia della Matematica del Novecento*, Laterza, Bari 2007.

[20] Casari, *Questioni*, cit. p.182.

[21] Casari, Ibid.. pp.124-25

[22] Casari, Ibid. p.129

predicativismo *sui generis* sviluppato nei *Principia Mathematica* [23] con il critico assioma di riducibilità; (ii) una sintesi della concezione intuizionistica; (iii) un primo tentativo di potenziare formalmente il sistema predicativista dovuto a Wang, e fondato sul dispiegamento di successioni transfinite di teorie, al fine di superare i limiti del teorema di Gödel. Se il tentativo di Wang si rivela ingenuo,[24] per via di fatti tecnici connessi con la costruttivizzazione del transfinito, di questa sezione delle *Questioni* è interessante il tentativo – rimasto sconosciuto e inutilizzato, probabilmente per via della lingua – e dedicato a una formalizzazione originale della concezione predicativista, proposta da Hermann Weyl nel celebre saggio *Das Kontinuum.*[25]

3. Un problema classico della filosofia: «Universali e insiemi»

Il saggio *Universali e Insiemi* -- in seguito per brevità *Universali* -- appare in due parti sulla «Rivista di Filosofia» del 1969.[26] Se le *Question*i costituiscono un'opera d'insieme, in cui si offre un quadro storicamente sorvegliato e complessivo di una determinata fase delle indagini filosofiche sulla matematica, il lungo saggio affronta invece una genuina e classica questione filosofica, quella degli universali; e trova la sua ispirazione in una sorta di platonismo debole o logico, che era stato prefigurato nel celebre saggio di Paul Bernays[27] del 1935. Il panorama viene però ampliato: sullo sfondo si avverte l'esigenza di confrontarsi con Quine e con la reinterpretazione «logica» del nominalismo, sviluppata negli anni Cinquanta (si pensi ai saggi quineani *On what there is*, *The reification of universals*[28]). Fondamentale l'esigenza di distinguere fra gli insiemi -- molteplicità di enti che formano delle cose, o *individui logici a se stanti* -- e le classi – semplicemente molteplicità di individui che formano le estensioni di predicati. A rigore, va tenuta distinta la relazione di appartenenza che intercorre fra un insieme e i suoi elementi, che è una relazione matematica, dalla relazione-- quest'ultima vista come controparte estensionale della predicazione--, che sussiste fra un ente e una classe. Il punto fondamentale è che vi è una corrispondenza effettiva fra predicati – associati alle espressioni del linguaggio elementare --- e classi (ecco il senso del teorema della classi,[29] culmine della prima parte del saggio di Casari).

Implicito, ma decisivo nel lavoro, è l'articolarsi del rapporto fra logica e matematica, che porta a separare l'aspetto logico-linguistico-costitutivo da quello descrittivo-extralinguistico. Degna di attenta considerazione è l'impostazione metodologica, tesa a realizzare il convincimento *del rigore informale*, che si esercita mediante un' analisi dei concetti che non ha bisogno di un quadro teorico formale specifico. Programmaticamente lo scopo è quello di proporre in primo luogo *una diversa*

---

[23] B. Russell, A.N.Whitehead, *Principia Mathematica*, 3 voll., 1ª ed. 1910-13, 2ª ed.1925-27, Cambridge, Cambridge University Press.

[24] Casari, *Questioni*, p.163.

[25] H.Weyl, *Das Kontinuum*, Berlin, De Gruyter, 1918. Per una rilettura contemporanea di aspetti correlati e vicini a Casari, c.f.r. l'intervento di E.Palmgren sul «Bulletin of Symbolic Logic», 24, n.2. 2018, pp.90-106.

[26] Casari, *Universali e Insiemi I, II*, «Rivista di Filosofia», LX, 1969, 24-48, 433-462.

[27] *Sur le platonisme dans les mathématiques*, «L'Enseignément Mathématique», 34 , 1935, 52-69; trad. ingl. In *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, a cura di P. Benacerraf, H. Putnam,, 2ª ed. 1983, Cambridge: Cambridge University Press.

[28] W.O.Quine, *From a logical point of view, 1953.* Harvard University Press, Cambridge Mass.

[29] Casari, *Universali*, cit. p.36.

soluzione al problema degli universali che sia compatibile con il quadro nominalistico.[30] In secondo luogo si tratta di chiedersi: *quanto della problematica relativa ai predicati, agli universali alle classi è indipendente dal concetto di insieme*? O meglio: che cosa caratterizza gli insiemi rispetto agli universali? Decisiva è la riproposizione del problema in termini logici o limitatamente all'ambito delle teorie logiche elementari: cosa s'intende per universale di una teoria siffatta? La risposta è che universali della teoria sono *i predicati della teoria*, ovvero i suoi predicati primitivi o quelli definibili. Per questi ultimi[31] in particolare si cerca una risposta che non si limiti alla mera dimensione linguistica, e che sia dotata di un certo grado d'invarianza. Tutto questo indirizza Casari allo studio dei *funtori predicativi* o degli *operatori*.[32]I predicati definibili sono allora tutti e soli quelli che si generano a partire dai concetti primitivi mediante un determinato stock di operatori, fra i quali figurano: (i) gli operatori logici classici standard, ovverosia il complemento e i due prodotti logici, booleano e cartesiano rispettivamente[33]; (ii) un operatore di proiezione, che permette fra l'altro di inglobare la quantificazione logica su individui; (iii) operatori combinatori (i cosiddetti identificatore, ciclatore, traspositore), che corrispondono a naturali operazioni sulla lista degli argomenti di un predicato. In sintesi, i predicati o gli universali della nostra teoria sono *esattament*e ciò che si genera a partire dai primitivi applicando gli operatori ora elencati. Da un punto di vista della sintassi logica, è bene sottolineare che qui si passa da teorie T espresse nella mera logica elementare a teorie elementari con operatori T^{op}. Che lo stock prescelto sia adeguato, è garantito da una sorta di teorema generale, in base al quale si prova che ad ogni formula A di T con variabili libere $x_1,\ldots,x_n$ si può associare un termine predicativo P_A, tale che l'equivalenza logica fra $P_A\, x_1\ldots x_n$ e $A(x_1\ldots x_n)$ è un teorema di T^{op}, e P_A è univocamente determinato.

Trascurando ulteriori dettagli, risulta allora naturale: (i) identificare gli universali con «i mucchietti d'inchiostro che corrispondono ai termini predicativi»[34]; (ii) definire la nozione di *universale in intensione*, determinato da una formula A, come il termine predicativo costruito mediante gli operatori ad A. Questo rende naturale l'identificazione degli universali in estensione con i termini predicativi a meno di equivalenze formali, cioè con termini costituiti mediante elementi della lista degli operatori.[35] Se si lasciano da parte i dettagli tecnici, le classi sono universali unari in estensione. Infine, sotto certe naturali restrizioni, si può mostrare che il sistema delle classi rappresenta bene il sistema complessivo degli universali. La conclusione rilevante – sia concettualmente che tecnicamente -- è che la problematica degli insiemi risulta *nettamente separata dalla problematica degli universali.*

Se si tiene presente la classica contrapposizione fra la visione della logica come *teoria delle operazioni e relazioni fra concetti* e quella della logica come *teoria delle relazioni e operazioni fra proposizioni*, si vede subito che l'impostazione che qui viene affermata è proprio la prima, *la logica come teoria del concetto.* Una importante conseguenza riguarda lo stile logico, che si delinea se si accettano gli operatori o funtori predicativi: essi rimandano a operazioni su predicati, e sono dunque

---

[30] Casari, *Universali*, cit., p.27. Resta in effetti da valutare quanto ci sia di nominalistico nel lungo saggio. Si veda il par.9. p.40. Un aspetto essenziale del nominalismo consiste nell'evitare le astrazioni insiemistiche, e semmai nel tentativo di applicare idee nominalistiche per fondare anche la teoria degli insiemi.

[31] Casari, *Universali*, cit., p.28

[32] Via già tentata da W.O. Quine, e che Casari cita a p.35 di *Universali e Insiemi.*.

[33] Che sussumono in particolare la negazione e la congiunzione.

[34] Casari, *Universali*, cit., p.39.

[35] Casari, ibid.

operazioni di ordine superiore; inoltre il formalismo può evitare di far ricorso alle variabili vincolate, e la logica elementare si avvicina alla logica combinatoria.

A tutto ciò vorremmo aggiungere un' osservazione, che scaturisce da risultati più recenti, legati a una sensibilità maturata in ambito logico solo con l'instaurarsi di un legame profondo con l' informatica, sia pure nella sua veste teorica. Risulta infatti che passare da un universale specificato mediante una formula del linguaggio elementare alla sua analisi funtoriale garantisce certamente una conoscenza analitica del predicato, per via dello spettro che lo rappresenta per mezzo degli operatori di base. Se però ci si chiede quanto *accessibile* sia questa analisi, e quanto *effettiva* sia la corrispondente descrizione funtoriale, si prospetta un esito problematico, sulla base dei cosiddetti risultati di «accelerazione» (o *speed-up*).[36] Essi asseriscono infatti – con tanto di esplicite misure quantitative di complessità -- che evitare i concetti astratti ha un costo assai elevato, in termini di risorse temporali, tale da rendere in certi casi non realistica e sconsigliabile la via esplicitamente nominalistica. Insomma, una scelta che può apparire semplificatoria da un punto di vista ontologico -- via elementi ideali o astratti – comporta non di rado fatto *una drammatica complicazione epistemologica.*

4. La giustificazione concettuale della teoria degli insiemi

Se il nominalismo viene inteso come la tesi che *solo* i termini individuali hanno carattere *onomastico* e possono quindi denotare oggetti, e il realismo logico che ciò vale *anche* per i predicati, è lecito interrogarsi sul senso fondazionale della scelta filosofica e della distinzione a livello di logica elementare, dove solo le variabili individuali sono quantificate. In particolare – proseguendo idealmente il ragionamento di Casari – ci si può chiedere se sia possibile accordare la tesi nominalistica col fatto che in matematica rimane costante «il bisogno di trattare gli universali come oggetti», *reificandoli* come elementi dell'universo del discorso. E riflettendo sulla praticabilità di una scelta nominalista, è naturale domandarsi quale mossa sia preferibile per il nominalista.[37] Si può – seguendo la terminologia di Casari --perseguire la via dell'aggiunta *verticale*: si introducono variabili di classe sulle quali possono agire i quantificatori, e un operatore di astrazione per generare nuovi predicati [x|A][38] con l'ovvia clausola di comprensione, in cui però possono occorrere *quantificazioni sulle classi*. Oppure si procede alla cosiddetta aggiunta *orizzontale*: si allarga l'ontologia direttamente, ammettendo che l'universo del discorso contenga non solo una collezione I di individui, ma anche una collezione M di insiemi, e che sia strutturato da una relazione di appartenenza che collega I con M, mentre si accettano *variabili generali* sull'universo del discorso U. Infine si postula che gli insiemi siano oggetti estensionali, mentre I è chiuso rispetto a quantificazioni su I.

Ma come dar senso nominalisticamente a queste prospettive? Nel primo caso si può adottare la cosiddetta *ramificazione*: si oggettualizzano *solo* gli universali definibili quantificando su predicati *già* definiti, che diventano assimilabili allora a individui logici perché identificabili con formule o specifiche formali, e la procedura può essere iterata. Ciò va bene per il concettualista e il

---

[36]All'origine una brevissima memoria di Gödel *Űber die Länge von Beweisen,* tradotta nella raccolta di Casari, *Dalla Logica alla Metalogica,* cit. pp.164-65. Per una versione precisa del fenomeno si rimanda a un risultato di Solovay sul cosiddetto *speed up* della teoria della classi di Bernays-von Neumann,,Gödel sulla teoria di Zermelo-Fraenkel (c.f.r. il recente M.Fischer, *Truth and Speed-up,* «Review of Symbolic logic», vol.7, n.2, 2014 , pp.319-340).
[37]*Universali,* cit., pp. 433-34.

[38] Si legga [x|A] come il predicato definito dalla condizione A.

predicativista, ma non è una via naturale per il *working mathematician*.[39] L'alternativa di Casari in *Universali* è quella di applicare l'idea della *rappresentazione* delle classi mediante individui, ovvero di estendere l'idea bernaysiana del *rappresentare le classi mediante individui logici modulo una certa relazione R*. Innanzitutto, ci sia permesso di richiamare in breve cosa vuol dire che *un individuo c rappresenta una classe C via R*: sta semplicemente a significare che *x* gode di *C s*e e solo se x è *R*-relato a *c*. Il punto è che il nesso di predicazione che intercorre fra un *individuo x* e un *predicato C* viene riportato a un nesso relazionale *R* fra due *individui x* e *c,* e ha senso *nominalisticamente*: invece di predicare di un predicato *P* una certa proprietà *C* – dove *C* diventerebbe allora una *proprietà di proprietà* violando la prescrizione base del nominalismo -- si dovrà, e potrà dire, che di *P* gode *l'individuo c che rappresenta C* (rispetto a *R*).[40] Per il classico argomento di Cantor-Russell *non* ci sono teorie – sotto ipotesi naturali – rispetto alle quali si possa avere la rappresentabilità di *tutte le classi* modulo una *stessa* relazione. Ma la riproposizione del problema apre la possibilità di affrontare in modo del tutto nuovo la questione, sia filosoficamente sia logicamente. L'argomentazione di Casari si fa più serrata e tecnica, di non facile lettura per un lettore filosofo, e non avrebbe senso ripeterla qui. Merita però sintetizzarne il succo partendo dalla semplice domanda : « è possibile trovare una spiegazione degli assiomi della teoria degli insiemi partendo dal problema di come risolvere in una data teoria il problema di una rappresentazione dei propri universali»?[41] La conclusione è che la teoria assiomatica degli insiemi – per esempio nella sua versione ZF alla Zermelo-Fraenkel- *risulta essenzialmente giustificata*. Infatti, se ci si chiede se sia possibile rappresentare in modo ragionevolmente adeguato il sistema degli universali della teoria, nel senso sia *cardinale* sia di *somiglianza strutturale*, allora si verifica che la teoria *dovrebbe essere fatta sostanzialmente come la teoria ZF*.[42] Muovendo dallo scopo di identificare le condizioni affinchè una teoria rappresenti in modo ottimale i propri universali, si perviene quindi a giustificare proprio i principi della teoria assiomatica degli insiemi, eccezion fatta per gli assiomi restrittivi (come la fondazione). Si noti che l'impostazione è *astratta*: si impongono dei criteri plausibili che il sistema nel suo complesso deve rispettare per ragioni di compiutezza, estetica, etc. E si è ben distanti dall'assumere un'immagine intuitiva come quella della cosiddetta gerarchia cumulativa.[43]

Un' ulteriore interessante questione riguarda la possibilità di affrontare lo studio degli universali di una teoria mediante oggetti –in particolare insiemi-- che riproducano '*im Kleinen*' la situazione complessiva:[44] ciò rimanda ai principi di riflessione[45] e a postulare un «assioma dell'infinito», in un qualche senso. In conclusione, risulta «possibile trovare una spiegazione naturale della teoria degli insiemi prospettandosi il problema di come dovrebbe essere fatta una teoria il cui unico problema

---

[39]*Universali*, cit. p.436.

[40] Universali, pp.437-438. Per concretezza, Casari fa l'esempio dei colori.

[41] Ibidem p.461.

[42] Ibidem p.449.

[43] Si veda per esempio in *Questioni,* p. 66, o un testo standard di teoria degli insiemi.

[44] Casari, *Universali*, cit., pp. 455-456.

[45] Tipicamente un principio di riflessione asserisce che ciò che vale nel sistema di tutti gli insiemi, vale già in un *insieme transitivo* opportunamente grande.

fosse che il sistema delle sue classi rappresentabili sia un ideale il più ricco possibile nell'algebra di tutte le classi».[46]

In sede di bilancio critico, *logica e ontologia non si fondono*: se gli elementi di una classe intesa come estensione di un concetto coincidono con quelli di un insieme, l'insieme rappresenta la classe ma *non* coincide con essa. E alla fine il problema degli universali si ripropone nella forma di quali classi siano rappresentabili da insiemi. Secondo una celebre idea di von Neumann, rappresentabili da insiemi sono tutte e sole quelle classi che non sono equipotenti all'estensione del concetto di insieme. E va mantenuta la separazione fra appartenenza fra insiemi e appartenenza di un insieme ad una classe.

Universali contiene dunque due distinti contributi: uno *logico*, che consiste nell'indicare vie alternative per rappresentare la logica elementare mediante funtori; l'altro *filosofico*, ovverosia una possibile concettualizzazione della teoria degli insiemi e del suo nesso con la problematica degli universali. Da non trascurare l'impostazione metodologica: il taglio dell'articolo – che è teorico – segue il già ricordato (p.4) *informal rigour*, e il lavoro di Casari è un concreto e positivo esempio di applicazioni del metodo anti-formalista. Ma ci pare giusto sottolineare che, accanto alle considerazioni informali, sono forse prevalenti motivazioni di tipo astratto-algebrico: come fare a soddisfare certe condizioni poste a priori, invece di estrarre da un contenuto informale le condizioni medesime.

Per il dibattito filosofico attuale, l'aspetto meno interessante –almeno per chi scrive -- è forse proprio la centralità che in *Universali* riveste la questione del nominalismo alla luce degli scritti già citati di Quine sull'ontologia, e la conseguente questione della reificazione degli universali. Rimane invece ancora oggi attuale la domanda se vi sia una concezione che giustifichi davvero *uniformemente* tutti i principi della teoria degli insiemi, e che ruolo abbia semmai la via proposta fra quelle emerse, in particolare in rapporto alla concezione iterativa o a quella della limitazione di grandezza.[47]

5. ***Ancora sul lavoro fondazionale: contributi 1973-1993***

Casari ha dedicato una serie di saggi a partire dagli anni Settanta fino alla metà degli anni Novanta alla ricerca fondazionale, cercando di classificarne modalità e linee di tendenza. Ancora oggi è stimolante rileggerli come testimonianze significative della vicenda, sia a livello nazionale, sia a livello internazionale. Centrale è la ricerca di significato filosofico per il lavoro fondazionale, che, secondo Casari, si manifesta non tanto come momento di *rigorizzazione* o riflessione sul problema della *giustificazione*, quanto come indagine *ontologica* e riflessione sull'*adeguatezza epistemica* di specifiche nozioni e procedure conoscitive, come la verità elementare ad opera di Tarski, il modello della calcolabilità secondo Turing.

In questo contesto, si affronta il problema del *perché vi sia un progressivo allontanamento dei progetti fondazionali dalla filosofia.* La risposta è non ideologica e storicamente determinata; si nutre di una conoscenza delle vicende specifiche, che non di rado hanno visto Casari in stretto

[46]Casari, *Universali*, cit. p.461, anche per le nozioni tecniche, come quella di «ideale».

[47] Il punto è che forse ancora oggi si può sostenere che manca una visione *uniforme* che giustifica tutti gli assiomi di ZFC. Oppure, ripartendo dalla memoria di Zermelo del 1930 (in: Cellucci, *Il Paradiso di Cantor*, cit. pp. 175-195) e seguendo Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem*?, «American Mathematical Monthly», 54,1947, trad.it. in Cellucci, 1967 p. 186, si sceglie decisamente la visione associata alla gerarchia cumulativa dei tipi (per es. Lolli, *Nascita di una idea*, cit., p.255).

contatto con alcuni fra i principali protagonisti del dibattito logico e fondazionale. Le ragioni – condivisibili -- sono da ritrovarsi in primo luogo nella influenza negativa dei risultati d'incompletezza di Gödel sulle speranze da riporre nei progetti fondazionali. Un velo di scetticismo depotenzia l'ottimismo dei primi ricercatori, soprattutto nella direzione legata alla *Beweistheorie* hilbertiana. Nella storia dei fondamenti, dopo Heyting e la formalizzazione della logica intuizionista, Casari percepisce e stigmatizza una sorta di appiattimento dell'intuizionismo, che diventa quasi un formalismo qualsiasi, contro la carica «eversiva» iniziale; mentre, in tutt'altra direzione, egli apprezza in particolare la *componente semantica* delle indagini fondazionali, impersonata da Tarski – originariamente legata alla metodologia delle scienze deduttive e allo studio di problemi epistemologici. Si tratta di un indirizzo di ricerca, che si trasforma progressivamente, ad opera dello stesso Tarski,[48] in una serie di applicazioni della teoria dei modelli all'algebra, e soprattutto per merito di Abraham Robinson (1918-1974) in ricerca *applicata alla matematica* stessa -- la «metamatematica dell'algebra» coltivata fino dal 1951, e l'«analisi non-standard» del 1961. In tutt'altro ambito, sarà Georg Kreisel (1923-2015) fino dagli inizi degli anni Cinquanta a insistere sulla ricerca di un significato matematico delle prove di consistenza e della *Beweistheorie*.

5.1. Proseguendo la disamina dei contributi, il lavoro del 1973 -- *Alcuni temi fondamentali della filosofia della matematica* -- sembra segnare quasi una svolta in una direzione di tipo *concettualista*; al punto che l'articolo appare come una sorta di «prova per un predicativismo generalizzato». In primo luogo, dal prologo emerge *l'importanza della dimensione storica e del contesto culturale*: la filosofia della matematica è una disciplina che si occupa di problemi filosofici che si pongono nell'indagine *così come questa si è precisata storicamente fino ai nostri giorni*, e non genericamente come disciplina che si occupa dei problemi filosofici posti dalla matematica. Il tratto specifico e originale del lavoro è l'accento sul *problema del definire*, nel contesto di una posizione che sviluppa idee di Bernays e si basa sulla opposizione fra insiemi come oggetti – per i quali sono ammissibili metodi definitori impredicativi --- e le classi come predicati in estensione, che debbono conformarsi a una logica definitoria di tipo predicativo.[49] Casari si domanda che cosa succede se si prende sul serio una intepretazione dell'attività matematica come attività che viene costituendo i propri oggetti in maniera significativa e autonoma: la matematica ha un suo orizzonte di senso, una capacità tetica, che si fonda non tanto su un mondo trascendente di entità ideali, ma fa riferimento a una serie di livelli di complessità via via crescente, individuati tramite la cosiddetta tecnica della ramificazione e in conformità col principio del circolo vizioso, secondo il quale la quantificazione è sempre ristretta a totalità di collezioni già definite, in un processo di progressive estensioni. In generale si richiede una «logica della costituzione dei concetti», e in particolare un' accettazione dei procedimenti ricorsivi e iterativi; alla fine, resta il problema della giustificazione dei procedimenti induttivi, che sta alla base di ogni posizione costruttivista e predicativista. Come già accennato, il punto qualificante è che *si assiste ad un allargamento del predicativismo*: l'attività matematica si esplica nella costruzione di concetti su un dominio di oggetti anche *non-costruibili e non-numerabili*.[50] E qui Casari sembra far sua la proposta implicita nella costruzione gödeliana dell'universo degli insiemi costruibili, con la conseguente soluzione del famoso problema del continuo: ai cosiddetti numeri ordinali transfiniti di Cantor —strumento tecnico principe per

---

[48] Si vedano i lavori principali degli anni compresi fra il 1948 e il 1952.

[49] Sull'attualità ancora oggi di questa posizione, si rimanda il lettore a un recente contributo sul «Journal of Philosophy», K.Fujimoto, *Predicativism about classes*, CXVI, 2019, 206-229.

[50] Casari, *Alcuni temi*, cit. pp. 124-25.

l'analisi delle definizioni ricorsive e induttive -- resta assegnato uno status particolare. Come già aveva fatto Gödel, si osserva che tutte le impredicatività possono essere ridotte a impredicatività di tipo ordinale. Epistemologicamente, si delinea una nozione generalissima di «definibile attraverso una legge», ciò che sembra prospettare una sorta di «nominalismo platonista» -- giusto per riprendere l'espressione di Boolos.[51] Ma non c'è solo questo: nel caso specifico si delinea una visione *relativizzata* del nominalismo. Un nominalismo che regola la logica dei predicati o dei concetti: non si mette in discussione il realismo sugli insiemi in quanto oggetti paradigmatici della matematica, ma solo dei concetti. L'ontologia di fondo non viene violata nel suo impianto di base, s' interviene a livello dei concetti, degli universali.

5.2. Nel saggio *Axiomatical and set-theoretical thinking* apparso su «Synthese»[52] nel 1974 si discutono e confrontano due distinti punti di vista sul sapere matematico: da un lato il *riduzionismo insiemistico,* fondato su una qualche forma di teoria degli insiemi (Dedekind, ma anche Frege), dall'altro lato *l'approccio assiomatico astratto* (Peano, Hilbert). La teoria degli insiemi riveste una insostituibile funzione di «repertorio di forme» nel quale ritrovare come predicati insiemistici i concetti matematici basilari – dai naturali ai reali, dagli spazi topologici ai gruppi, etc. Un concetto astratto può essere definito *materialmente* ed esplicitamente nella teoria degli insiemi,[53] al pari di un qualunque predicato insiemistico; mentre una definizione *formale* del medesimo conduce a specificare che —per esempio --- uno spazio topologico è una struttura che *rende veri* gli assiomi opportuni. Si suggerisce così una chiave di lettura per l'evoluzione delle ricerche logico-fondazionali, nelle quali Dedekind e Peano incarnano due distinte modalità di affrontare il problema della costituzione dei concetti matematici astratti, in cui la prima non dipende dal parametro 'linguaggio', e prima viene l'ontologia.[54] Dalla definizione materiale si può passare a quella formale; ma vale anche il viceversa? Questo punto merita attenzione, perchè alla mediazione del linguaggio e della rispettiva semantica Casari attribuisce una essenziale funzione euristica, al fine di portare in primo piano il livello delle operazioni sulle classi e della relativa combinatoria dei concetti,[55] che è stata tematizzata in *Universali e insiemi*. Senza semantica, come arrivare al teorema delle classi, il quale garantisce che nell'ontologia il ricorso al linguaggio può essere evitato mediante un numero finito di operatori e si può davvero andare «oltre una semplice algebra di relazioni binarie»? La conclusione è che lo stile di pensiero insiemistico è capace di rendere ragione della distinzione fra concetti astratti e concreti, e costituisce quindi una sorta di *cornice universale*[56], anche per via degli insegnamenti di Gödel e Tarski, e mediante l'aritmetizzazione del linguaggio e della sua semantica nella teoria degli insiemi. Da ultimo, rimane però un problema: bisogna fare i conti con il fatto che le costruzioni richieste vanno ben al di là di semplici e innocui principi insiemistici, e si è ricondotti sostanzialmente a un quadro teorico che mantiene una sua consistenza e coerenza per via del *metodo assiomatico*. E qui Casari chiarisce di *quale assiomatica* s'intende discutere. Non certo la nuova assiomatica formale, che è sì uno strumento molto potente, ma sembra condurre a una sorta di regresso all'infinito. La posizione assunta è che si deve prendere come base un *insieme di proposizioni dotate di senso,* così come lo sono gli assiomi euclidei;

[51] Boolos, *Nominalist Platonism,* «The Philosophical Review», XCIV, 1985. pp. 327-344.

[52] Casari, *Axiomatical and set-theoretical thinking,* «Synthese», 27, 1974, pp. 49-61.

[53] Casari, *Axiomatical Thinking*, cit., p.53.

[54] Casari, *Axiomatical Thinking,* cit. p.54.

[55] Casari, *Axiomatic Thinking*, cit. p. 55: per rispondere positivamente bisogna provare un teorema delle classi.

[56] Casari, *Axiomatical Thinking*, p.58, si parla di «universal framework» e «Rahmen».

ovvero c'è un corpo di conoscenze, metodi, storicamente dato, da cui bisogna partire. Per quanto strano possa parere, l'assiomatica contenutistica e informale alla Euclide risulta non solo una modalità fondamentale per la riduzione logica e l' organizzazione di concetti intellegibili e enunciati sensati, ma anche «uno strumento irriducibile e fondamentale del nostro pensiero»[57].

5.3. Casari rielabora questa idea anche nel saggio del 1978, significativamente inserito in un testo dedicato alla didattica della riforma della scuola,[58] che si segnala per la sua freschezza. Se si considera per es. la teoria degli insiemi, non basta pensarla come teoria formale; va invece riguardata come teoria dotata di «una interpretazione in un qualche modo intuitiva»[59]. Ma se ha senso la teoria degli insiemi, di cosa parla? Qual è la natura degli enti matematici di cui si occupa? Entità descritte o costruite? Ci sono varie possibilità o alternative, magari in netta contrapposizione. La conclusione di Casari si presenta come soluzione *pluralista*: coesistono varie ramificazioni all'interno del pensiero insiemistico; è ragionevole pensare che ci sia «una assai complessa stratificazione interna al pensiero matematico», nella quale convivono ambiti naturalmente costruttivi e altri che non lo sono. Il merito delle discussioni sui fondamenti è di averci abituati a scindere varie componenti,[60] tutte ugualmente legittime. Se si ripercorre l'idea di *fondazione* seguendo le strade tradizionali del riduzionismo ottocentesco e infine il progetto hilbertiano, la matematica si lascia rappresentare – almeno in linea di principio – mediante un complesso di sistemi formali. Il pensiero assiomatico formale è quindi ricondotto alla metamatematica finitista, e allora il problema è costituito dai teoremi limitativi, che stabiliscono dei limiti alle capacità riflessive dei sistemi formali. Né la soluzione formalista alla Hilbert, né quella platonista possono bastare: si può pensare alla matematica come studio e descrizione di proprietà di un preesistente universo di insiemi, oppure alla scienza di scoprire assiomi e provare proposizioni da essi. Ma nessuna delle due vie da sola è conclusiva: la discussione dell'universo degli insiemi porta a proporre assiomatizzazioni degli insiemi; mentre una teoria assiomatica è ontologicamente un insieme di simboli e quindi un oggetto dell'universo degli insiemi. Nè platonismo nè formalismo: fondamentale è il corpo delle idee create dagli uomini intorno alla matematica, e in ultima analisi l'assiomatizzazione conta come organizzazione di proposizioni *dotate di significato*. Per Casari non occorre pensare all'esistenza di un mondo platonico degli insiemi affinchè sia sensato riferirsi alla relativa teoria degli insiemi.[61] Che nella sua storia l'umanità abbia elaborato fino ad oggi tutta una serie di intuizioni che possono trovare, che trovano là dentro una sistemazione, può bastare; anche se poi vi sarà il problema delle possibili ramificazioni interne all'approccio insiemistico.

5.4. Nei lavori successivi,[62] se emerge che la novità degli studi fondazionali rispetto all'ultimo secolo ha come tema centrale la matematizzazione di problemi ontologici ed epistemologici, si

---

[57] È Casari, che così si esprime, ibid. p..61.

[58] E. Casari, *Il problema dei fondamenti, cit.* Sull'interesse di Casari per l'insegnamento della logica e della filosofia, si vedano anche i lavori 16 (1971) , 17 (1972), 39 (1985), 41 (1986), 73 (2010), dove la numerazione si riferisce alla lista delle pubblicazioni allegata al presente «Focus».

[59] Casari, *Il problema dei fondamenti*, cit., p.24

[60] Casari, ibidem, pp.24-27.

[61] Casari, ibidem., pp.25-26

[62] Oltre ai lavori citati in apertura dell'articolo, si veda: *Logic and the foundations of mathematics*, in: E.Agazzi (e.d), *Modern Logic A Survey*, Reidel, Dordrecht 1980, pp.155-166; *A proposito dei fondamenti della matematica*, «Rivista di Filosofia», LXXII, 1981, pp.359-371; *Remarks on the foundational inquiry*, «Synthese», 1982, 62, pp.125-137;

mette però in guardia contro il pericolo di sopravvalutare – da parte dei filosofi - la capacità innovativa delle idee fondazionali, soffermandosi esclusivamente sulla *generalità* delle questioni e dei concetti, a detrimento delle *forme specifiche* e dei *problemi reali*. La tendenza opposta -- svalutativa -- da parte dei matematici trascurerebbe invece «lo stimolo a formulare programmi di vasto respiro, nel dirigere l'attenzione verso argomenti e campi spesso assai lontani da ogni altro considerato fino a quel momento e ai quali nessuna più ristretta e specifica finalità mai avrebbe saputo portare». Casari cerca poi di individuare le ragioni della progressiva trasformazione – a partire dal celebre convegno di Königsberg del 1930 -- dei progetti fondazionali principali: logicismo, intuizionismo e formalismo[63]. Si parte dalla constatazione che nei successivi venticinque-trent'anni, quei progetti vengono progressivamente marginalizzati. Ma – si sostiene -- lo spostamento/ridimensionamento, ben lungi dall'impoverire il dibattito, lo libera dal suo iniziale esclusivismo, in cui le varie scuole fondazionali sono «le une contro le altre armate»; e contribuisce a far emergere distinti e più profondi livelli di riflessione filosofica, che toccano le *medesime scelte tecniche*. Per fare un esempio, nei risultati di completezza la costruzione di Henkin funziona bene anche per logiche non-classiche,[64] e Casari si chiede quale ne sia il significato. Inoltre, qual è il valore dell'immersione dei sistemi classici in quelli costruttivi ? E il rapporto fra la logica di fondo e i principi matematici specifici di una teoria? La formalizzazione dell'intuizionismo e il consolidarsi della semantica di Tarski sono aspetti primari di una trasformazione del lavoro logico-matematico, che si concretizza in *programmi di ricerca*: i fondamenti si debbono *applicare* alla matematica (due nomi fra tutti: Robinson, Kreisel) , in particolare al *problem solving*, ---la soluzione negativa del problema della parola per i gruppi –, ma anche al *theory building* -- l'invenzione dell'analisi non-standard da parte di Robinson, e la teoria dei modelli che si lascia naturalmente applicare alla geometria algebrica.

6. Conclusioni

Che cosa intende Casari per logica? Una possibile risposta – composita e problematica -- emerge progressivamente dalle sue opere fino all'ultima monografia su Bolzano. Egli si richiama a una tradizione di pensiero europea – soprattutto a quella in lingua tedesca, coltivata fin dalla seconda metà dell'Ottocento negli atenei austriaci e germanici – che risale all'indietro rispetto al neopositivismo del Circolo di Vienna, nel cui ambito si era formato uno dei suoi maestri, Ludovico Geymonat. Non già che Casari sottovaluti il contributo dei *Principia Mathematica*, o l'importanza della logica delle proposizioni, della metalogica elementare, della logica intuizionistica, della logica modale, o dei teoremi di Gödel – capitoli di cui ha offerto un panorama approfondito a più riprese (per es. nel volume antologico[65] sulla logica del Novecento). Ma la sua analisi storica da una certa fase in poi si volge decisamente all'indietro, e il punto di partenza diventa appunto la logica di Bolzano, anzi il *sistema* di Bolzano. Chi legga il capitolo sulla critica dello psicologismo che Casari scrisse per il volume sull'Ottocento della *Storia della Filosofia* laterziana (1997), trova descritte chiaramente le varie tappe dello sviluppo, che da Bolzano conduce allo Husserl delle *Logische*

Logica matematica, fondamenti della matematica, fondazione della matematica, «Rivista di Filosofia», LXXXIV, 1993, 319-349.

[63] Casari, *A proposito*, cit. p.360

[64] Casari, *Logic and foundations*, cit. pp.164-165.Queste osservazioni si legano alla ricerca nel campo della semantica delle logiche non classiche, che a partire dalla metà degli anni Settanta, ha rivestito un ruolo centrale per Casari; c.f.r. il saggio di Minari e Paoli in questo numero.

[65] Casari, *La logica del Novecento*, Loescher, Torino 1981.

Untersuchungen: Brentano, Twardowski, Meinong, Cantor, Frege, Kerry. Autori che in fondo -- come ha ben scritto Pietro Rossi nel suo ricordo[66] --gli erano più congeniali. E il saggio sulla *Logiche del non-essere*, apparso nel 2009 su questa rivista, è una conferma di questa congenialità e accordo. A Casari interessa il problema di una *teoria unificata degli oggetti* – esistenti e non-esistenti, riprendendo idee di Brentano. Il punto è che la teoria delle descrizioni sposta il problema dal livello ontologico a quello del linguaggio: dalle cose che non esistono ai termini non denotanti. La logica interessa a Casari nel momento in cui riesce «a fornirci interessanti chiarificazioni di alcuni punti nodali della riflessione ontologica tradizionale». E può avere promettenti aperture nella direzione di sviluppare «una teoria capace di dar conto di *tutta* la nostra esperienza discorsiva». E prima di tutto per affrontare ambiti problematici come la *semantica dei linguaggi naturali* e l'*intenzionalità*, dove le logiche usuali, nate soprattutto per soddisfare esigenze diverse, non sempre sono adeguate.

Nell'*Envoi*[67] del 2007 egli chiarisce al meglio questo punto e i motivi del suo interesse per Bolzano: «Se per una volta mi passate una frase lontana dal mio usuale modo di esprimermi, ma che usa un termine di Bolzano, dirò che *ho soprattutto subito il fascino delle forme dell'essere possibile*».[68]
Con ciò si chiarisce anche quale sia la concezione più naturale della logica per Casari. E' quella della logica come *teoria delle leggi logiche* più che come *teoria delle inferenze logiche.*
Questo significa attribuire priorità alla prima concezione, e quindi all'atteggiamento ontologico – la logica come sistema di verità che sussistono indipendentemente dai loro riferimenti e dallo stato del mondo; a cui si contrappone invece la visione della logica come teoria della verità mediata dal ragionamento, e quindi come parte della gnoseologia. Di ciò sono testimonianza gli interessi didattici e scientifici di Casari: dalla iniziale introduzione alla «teoria delle strutture», che appartiene alla fase dell'insegnamento milanese, alla successiva «matematica della verità», consegnata al trattato del 2006 e legata all' insegnamento della logica pressso la Scuola Normale Superiore.
In conclusione, e in sede di provvisorio bilancio, ma in proiezione futura, è naturale domandarsi, a prescindere dal valore indubbio, sia ermeneutico, sia storico, quale sia l'impatto possibile della prospettiva implicita nell'atteggiamento neobolzaniano di Casari sugli studi di filosofia della matematica e di logica attuali, quali i semi per gli sviluppi a venire, sia logici, sia filosofici. Casari chiudeva le *Questioni* con una significativa citazione di Arend Heyting, che sintetizza la novità del fare filosofia della matematica e fondamenti a partire dai primi anni Sessanta del secolo scorso, e che vogliamo qui ripetere: «E' nata una nuova forma di matematica, nella quale sappiamo in ogni istante se stiamo o meno lavorando su una base intuitiva, quale parte del lavoro è puramente formale e quali assunzioni platonistiche facciamo». Dal campo proprio del far matematica intuizionista ci piace estendere l'osservazione al campo più generale del fare filosofia della matematica *tout court.* Ovviamente si tratta di una estrapolazione, ma gli studi di Casari mostrano quale dovrebbe essere il compito di una filosofia, che si proponga di mettere in evidenza *il carattere composito e problematico* del pensiero fondazionale: quali ne siano gli aspetti informali e intuitivi, quali invece le assunzioni esistenziali astratte.

---

[66] «Rivista di Filosofia», vol.CX, n.2, agosto 2019, pp.195-98.

[67] «Rivista di Storia della Filosofia», LXII, 2007, pp.559-67

[68] Ibidem, p.566.

Summary

We deal with a few topics in the philosophy and the foundations of logic and mathematics, as they have been developed by Ettore Casari over the years, mostly in the time lapse1964-1987.

Keywords: the problem of universals, foundations of set theory, mathematics and truth, mathematics and proof, axiomatic vs. set theoretical thinking.

Andrea Cantini è professore ordinario di Logica nel Dipartimento di Lettere e Filosofia dell'Università di Firenze, via della Pergola 60, I-50121 Firenze.

e-mail: andrea.cantini@unifi.it