Science & Philosophy **ISSN**: 2282-7757
Vol. 5(2), 2017, pp. 69-94 **eISSN**: 2282-7765

The Catenary in History and Applications (La Catenaria nella Storia e nelle Applicazioni)

Giuseppe Conti[1], Raffaella Paoletti[2], Alberto Trotta[3]

[4]**doi**:10.23756/sp.v5i2.375

Abstract

The catenary is one of the most common curves; it is, in fact, the shape assumed by a homogeneous and inextensible chain, fixed to the extremities, which is subjected only to its own weight. The catenary has always fascinated not only mathematicians but also architects and engineers, who have often used it in their works due to its remarkable properties. In this note, the catenary is introduced by determining its equation and considering its story from Galileo Galilei to the present day, pointing out a historical mistake. Then, some of its applications to architecture and engineering are shown and the catenary is compared to the parabola, a curve that at first can look like to catenary but must not be confused with it. Finally, some variants of the catenary are considered: the weighted catenary and the catenary of equal resistance, highlighting their properties and their practical applications.

Keywords: Regular curves, length of a curve, parabola, minimal surfaces, tension, compression, decomposition of a vector, equilibrium conditions.

Sunto

La catenaria è una delle curve più diffuse; essa è infatti la forma che assume un filo omogeneo, perfettamente flessibile e inestendibile, fissato agli estremi e sottoposto solo al proprio peso. La catenaria ha sempre affascinato non soltanto i matematici ma anche gli architetti e gli ingegneri, che l’hanno usata spesso nelle loro opere per le sue notevoli proprietà.

---

[1] Dipartimento di Matematica DIMAI, Università di Firenze, Italia; gconti@unifi.it.
[2] Dipartimento di Matematica DIMAI, Università di Firenze, Italia; raffy@math.unifi.it.
[3] IISS Santa Caterina-Amendola, Salerno, Italia; albertotrotta@virgilio.it.
[4] ©Giuseppe Conti et al. Received: 16-12-2017. Accepted: 27-12-2017. Published: 31-12-2017.

In questa nota si introduce la catenaria determinandone l'equazione e considerando la sua storia da Galileo Galilei fino ai giorni nostri, mettendo in risalto un errore storico. Successivamente si mostrano alcune sue applicazioni all'architettura ed all'ingegneria, confrontandola con la parabola, una curva che le è molto simile.
Infine, si considerano alcune varianti della catenaria: la catenaria pesata e la catenaria di uguale resistenza, mettendo in risalto le relative proprietà e le loro applicazioni pratiche.
Parole chiave: Curve regolari, lunghezza di una curva, parabola, superfici minime, tensione, compressione, scomposizione di un vettore, condizioni di equilibrio.

1 Introduzione

La catenaria è la curva piana secondo la quale si dispone, in equilibrio, un filo omogeneo, flessibile e inestendibile, posto in un campo gravitazionale uniforme e sospeso fra due punti in un piano verticale.

Si tratta di una curva che possiamo osservare ogni giorno: la catenina (senza pendenti) appesa al collo ha la forma di una catenaria, così come i cavi elettrici sospesi fra due piloni, oppure il profilo di una vela rettangolare, quando è gonfiata dal vento perpendicolare ad essa.

Per le sue notevoli proprietà, molti architetti e ingegneri hanno usato questa curva nelle loro opere. La sua forma è molto vicina alla curva parabolica, tanto che spesso vengono, erroneamente, confuse.

Vedremo, infine, che esistono alcune varianti della catenaria che risultano molto utili nelle applicazioni.

2 Equazione e storia della catenaria

Supponiamo che il piano della catenaria sia riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali xOy disposto come nella Figura1.

Siano $y = y(x)$ l'equazione della curva da determinare, che supporremo di classe C^2, T la tensione del filo in un suo punto generico $P = (x,y)$, μ la densità lineare (costante) del filo e ψ l'angolo che la tensione T (avente la direzione della retta tangente alla curva in P) forma con il semiasse positivo delle ascisse. Siano T_x e T_y rispettivamente la componente orizzontale e quella verticale della tensione T; per comodità indicheremo con T, T_x e T_y anche i moduli dei corrispondenti vettori. Sia $s=s(x)$ la lunghezza dell'arco AP, dove $A = (0, a)$ è il punto di intersezione della curva $y = y(x)$ con l'asse delle ordinate, ovvero $y(0) = a$.

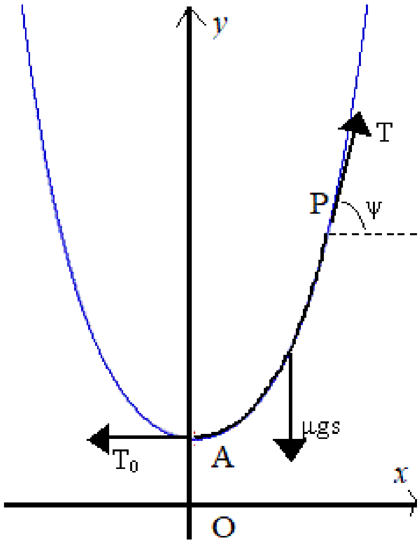

Figura 1

Poiché la retta tangente in A alla curva è parallela all'asse delle ascisse, si ha $y'(0) = 0$.

Dalle condizioni di equilibrio dell'arco AP si ottiene il sistema

(1) $$\begin{cases} T_y = \mu g s \\ T_x = T_0 \end{cases}$$

dove T_0 è la tensione nel punto A.

Sappiamo, dalla formula della lunghezza di una curva regolare, che

(2) $$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Dividendo membro a membro i termini della (1) e tenendo conto della (2), si ottiene:

(3) $$\frac{T_y}{T_x} = \frac{\mu g}{T_0} \int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Essendo $\frac{T_y}{T_x} = \tan(\psi) = y'(x)$, si arriva alla seguente equazione integro-differenziale:

(4) $$y'(x) = \frac{\mu g}{T_0} \int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Derivando ambo i termini della (4) e tenendo conto delle condizioni iniziali, si ottiene il seguente problema di Cauchy del secondo ordine:

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} y''(x) = \dfrac{\mu g}{T_0}\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2} \\ y(0) = a \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Ponendo nella (5) $y'(x) = z(x)$, si giunge al seguente problema di Cauchy del primo ordine:

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} z'(x) = \dfrac{\mu g}{T_0}\sqrt{1+\left(z(x)\right)^2} \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

Il primo termine della (6) si riconduce alla seguente equazione differenziale a variabili separabili:

$$\text{(7)} \qquad \frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{\mu g}{T_0} \qquad \text{da cui}$$

$$\text{(8)} \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{\mu g}{T_0}\,dx$$

Ponendo $z = \sinh(t)$, da cui $dz = \cosh(t)dt$, e tenendo conto che $\cosh^2(t) = 1 + \sinh^2(t)$, la (8) diventa:

$$\text{(9)} \qquad \int dt = \int \frac{\mu g}{T_0}\,dx \quad \text{ovvero} \quad t = \frac{\mu g}{T_0}x + c \qquad \text{da cui}$$

$$\text{(10)} \qquad \sinh(t) = \sinh\left(\frac{\mu g}{T_0}x + c\right) \text{ cioè } z = \sinh\left(\frac{\mu g}{T_0}x + c\right).$$

Tenendo conto che $z(0) = 0$, la (10) diventa $z(x) = \sinh\left(\dfrac{\mu g x}{T_0}\right)$, da cui

$$\text{(11)} \qquad y'(x) = \sinh\left(\frac{\mu g}{T_0}x\right).$$

Essendo $y(0) = a$, ponendo $a = \frac{T_0}{\mu g} = \frac{LT_0}{Mg}$ con L lunghezza della curva e M la massa della catena, si ottiene l'equazione della catenaria:

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (12)$$

Galileo Galilei fu il primo che, storicamente, affrontò il problema della catenaria. Nella seconda giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e i movimenti locali* egli, per bocca di Salviati, afferma che la catenaria assume la forma di una parabola (vedi [6]):

Fermansi ad alto due chiodi in un parete, equidistanti dall'orizonte e tra di loro lontani il doppio della larghezza del rettangolo su 'l quale vogliamo notare la semiparabola, e da questi due chiodi penda una catenella sottile, e tanto lunga che la sua sacca si stenda quanta è la lunghezza del prisma: questa catenella si piega in figura parabolica, sì che andando punteggiando sopra 'l muro la strada che vi fa essa catenella, avremo descritta un'intera parabola.

Da questo brano sembra che Galileo identifichi la forma di una catenaria con quella di una parabola.

In seguito questo "errore" continuerà ad essergli attribuito ingiustamente da molti studiosi, tra i quali gli stessi Huygens e Johann Bernoulli.

In realtà, nella quarta giornata Galileo, sempre per bocca di Salviati, afferma esplicitamente che la parabola è un'approssimazione della catenaria e che le due curve, pur essendo simili, effettivamente sono differenti (vedi [17]):

Ma più voglio dirvi, recandovi insieme maraviglia e diletto, che la corda così tesa, e poco o molto tirata, si piega in linee, le quali assai si avvicinano alle paraboliche: e la similitudine è tanta, che se voi segnerete in una superficie piana ed eretta all'orizonte una linea parabolica, e tenendola inversa, cioè col vertice in giù e con la base parallela all'orizonte, facendo pendere una catenella sostenuta nelle estremità della base della segnata parabola, vedrete, allentando più o meno la detta catenuzza, incurvarsi e adattarsi alla medesima parabola, e tale adattamento tanto più esser preciso, quanto la segnata parabola sarà men curva, cioè più distesa; sì che nelle parabole descritte con elevazioni sotto i gr. 45, la catenella cammina quasi ad unguem sopra la parabola.

Anche Franz Brunetti, che ha curato l'edizione UTET delle opere di Galileo (vedi [2]), osserva in una nota: *più avanti nella quarta giornata si correggerà osservando che si tratta solo di uguaglianza approssimativa*.

Nel 1690 Jacob Bernoulli negli *Acta Eruditorum* pose il problema di determinare l'equazione della curva catenaria.

Negli *Acta Eruditorum* del Giugno 1691 Huygens, *Johann* Bernoulli e Leibniz (vedi [11]) pubblicarono le loro soluzioni (ottenute indipendentemente) del problema posto da Jacob Bernoulli.

Huygens si sentì molto ripagato dal fatto che, in questo modo, credeva di avere corretto il presunto errore di Galileo; fu proprio Huygens che propose il nome di catenaria in una lettera indirizzata a Leibniz (vedi [9]), passando in seguito al francese chainette e ricollegandosi, in tal modo, alla parola *catenella*, usata da Galileo.

Johann Bernoulli scrisse a Pierre Rémond de Montmort di avere risolto il problema in una notte, mentre, afferma Johann, il fratello Jacob credeva *come Galileo, che la catenaria fosse una parabola.*

Leibniz era orgoglioso che il *suo calcolo* gli avesse permesso di determinare l'equazione della catenaria.

Naturalmente, tutti questi scienziati ignorarono la quarta giornata dei *Discorsi* di Galileo.

Purtroppo, anche molti famosi storici della matematica parlano del cosiddetto *errore* di Galileo.

Morris Kline a pagina 551 del Volume I di *Storia del Pensiero Matematico* (vedi [10]), scrive: *Galileo pensava che la curva fosse una parabola. Huygens affermò che ciò non era corretto.*

C.B. Boyer a pagina 436 della sua *Storia della Matematica* (vedi [1]) afferma: *Mentre Galileo aveva creduto che la catenaria fosse una parabola, Huygens dimostrò che era una curva non algebrica.*

Gino Loria afferma a pagina 410 del suo libro *Storia delle Matematiche* (vedi [12]): *Nei medesimi Discorsi s'incontrano due genesi meccaniche della parabola: una esatta e notevole, l'altra irremissibilmente errata; è falso che sia una parabola la posizione secondo cui si dispone una fune omogenea pesante fissata per i suoi estremi (oggi è noto che trattasi invece di una catenaria).*

Sembra che nessuno di questi autori abbia letto la quarta giornata del *Discorsi*!

In seguito, dopo la determinazione dell'equazione della catenaria, Jacob Bernoulli studiò il profilo della superficie di una vela rettangolare attaccata a due sbarre orizzontali e gonfiata dal vento che soffia perpendicolarmente a queste sbarre, supponendo trascurabile la forza di gravità in relazione alla forza del vento. Egli chiamò questa curva velaria; cercando di determinarne l'equazione, Jacob giunse alla conclusione che la velaria non è altro che una catenaria. In pratica, è come se al campo gravitazionale uniforme, che agisce sulla catenaria, venisse sostituito il campo di forze uniforme determinato dal vento che agisce sulla vela.

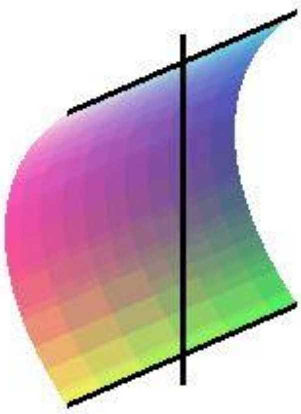

Figura 2. Velaria

3 Applicazioni della catenaria

Dalla definizione di catenaria segue che questa è la forma che assume una catena sottoposta solo al proprio peso

Figura 3. Andamento a catenaria di una catena sospesa**.**

oppure un ponte sospeso che sostenga soltanto se stesso (ad esempio, i ponti tibetani).

Figura 4. Ponte sospeso di Randa (Svizzera). Con i suoi 494 metri di lunghezza è il ponte sospeso più lungo del mondo

Un bellissimo esempio di catenaria si trova nel grattacielo Marquette Plaza, a Minneapolis, Minnesota.

Figura 5. Catenaria nel grattacielo Marquette Plaza

La catenaria rovesciata trova un’importante applicazione nella costruzione degli archi in muratura; infatti, mentre nella catenaria le forze che agiscono sono esclusivamente di trazione, in quella rovesciata operano soltanto forze di compressione.

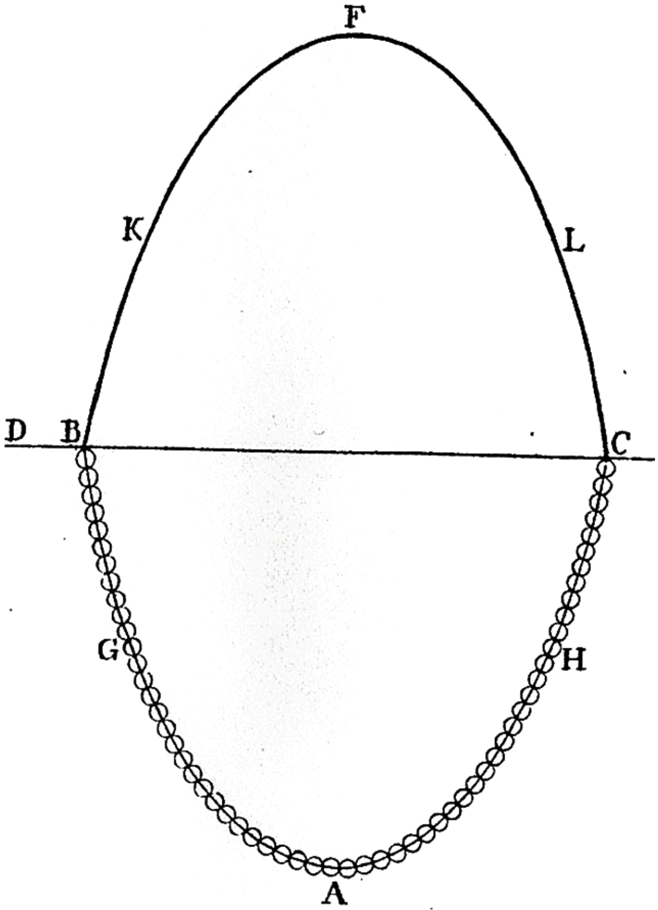

Figura 6. Catenaria e catenaria rovesciata

L'applicazione della catenaria alla costruzione degli archi è attribuita a Robert Hooke nel contesto della costruzione della cupola di St Paul a Londra. Hooke collaborò con C. Wren, incaricato alla ricostruzione della cattedrale di St Paul dopo il disastroso incendio del 1666; Wren era molto preoccupato per la stabilità della cupola che doveva erigere, perché si sapeva che la cupola di San Pietro a Roma aveva in quel periodo enormi problemi statici e rischiava di crollare. Egli accolse il suggerimento di Hooke di costruire una cupola il cui profilo fosse una *catenary curve* (vedi [15]).

Figura 7. Cattedrale di St Paul

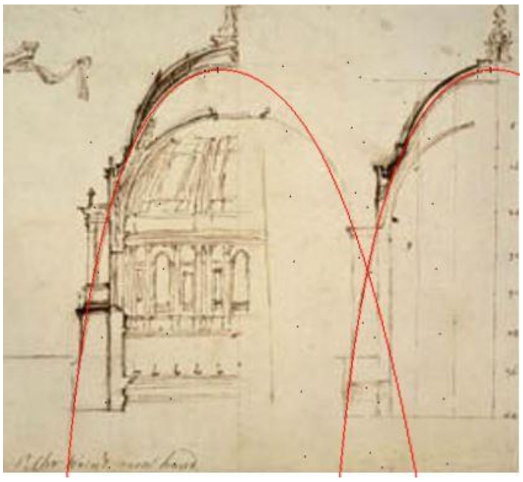

Figura 8. Disegno di Wren che riporta la catenaria nella cupola di St Paul

Verso il 1671 Hooke annunciò alla Royal Society di avere trovato la forma ottimale di un arco, che pubblicò successivamente, nel 1676, nel suo libro *A description of Helioscopes and Some Other Instruments*, dove, in forma di anagramma, era scritto: *Ut continuum pendet flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum* (Come pende un filo flessibile, così, invertendolo, resta fermo un corpo rigido).

Dunque, Hooke aveva compreso che i materiali da costruzione possono sopportare solo forze di compressione ma non di trazione, così come una corda sospesa può resistere a forze di trazione ma non di compressione.

Numerosi sono gli esempi di catenaria rovesciata in architettura.

Questa curva fu molto usata da Gaudì, come si può vedere dalle figure seguenti, scelte fra i numerosi esempi di catenarie usate dall'artista.

Figura 9. La catenaria nella Casa Milà. Gaudì

Figura 10. Le catenarie nella Casa Batllo. Gaudì

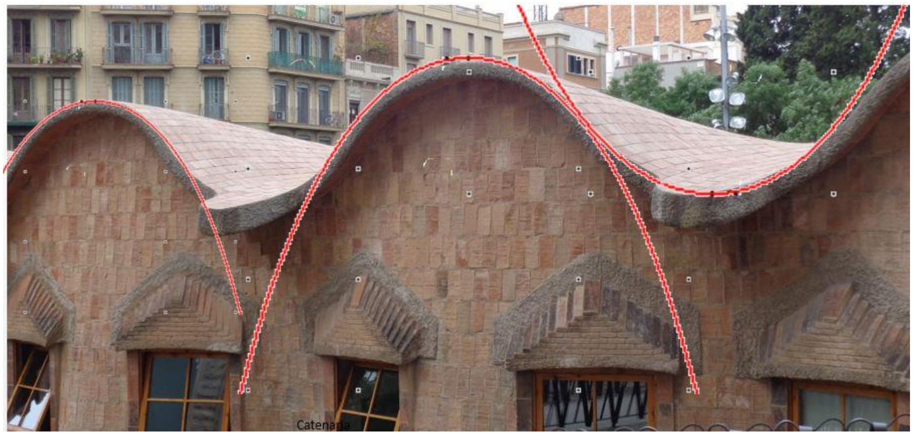

Figura 11. Le catenarie nel tetto della Scuola della Sagrada Familia. Gaudì

Nelle seguenti figure riportiamo altri esempi, fra i molti esistenti, di uso della catenaria rovesciata in architettura.

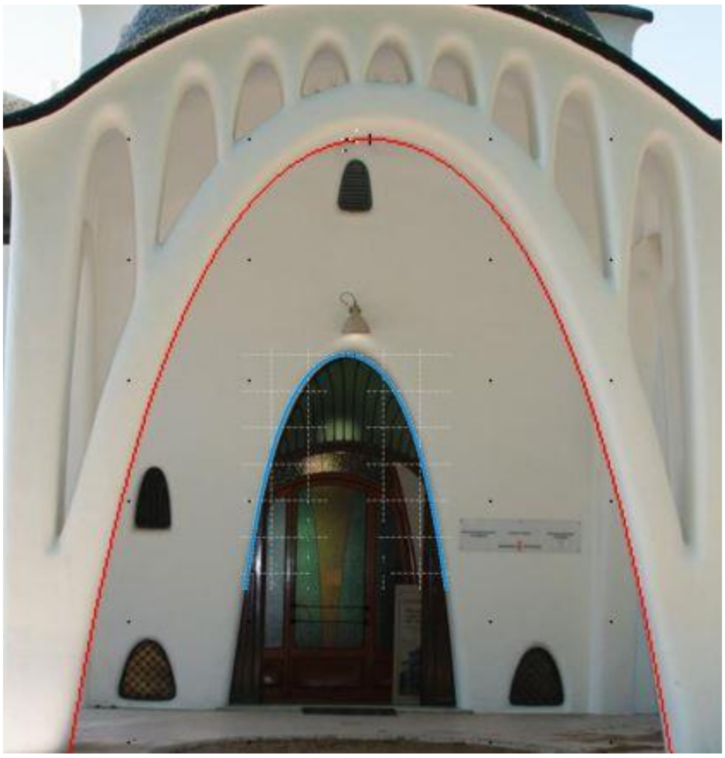

Figura 12. Catenarie. Masía Freixa.Tarrasa, Catalogna

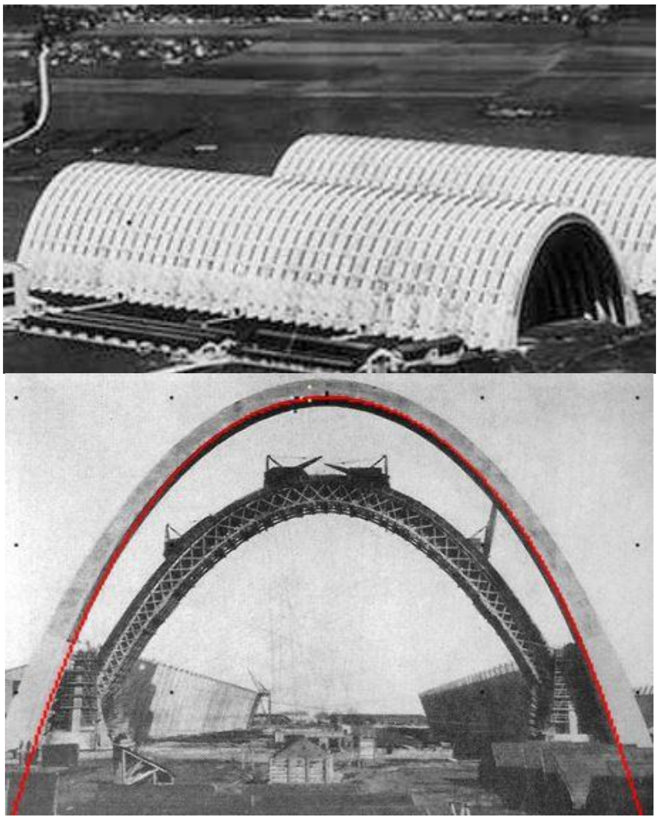

Figura 13. Hangar per dirigibili a Orly. Ing. Freyssinet, 1923.

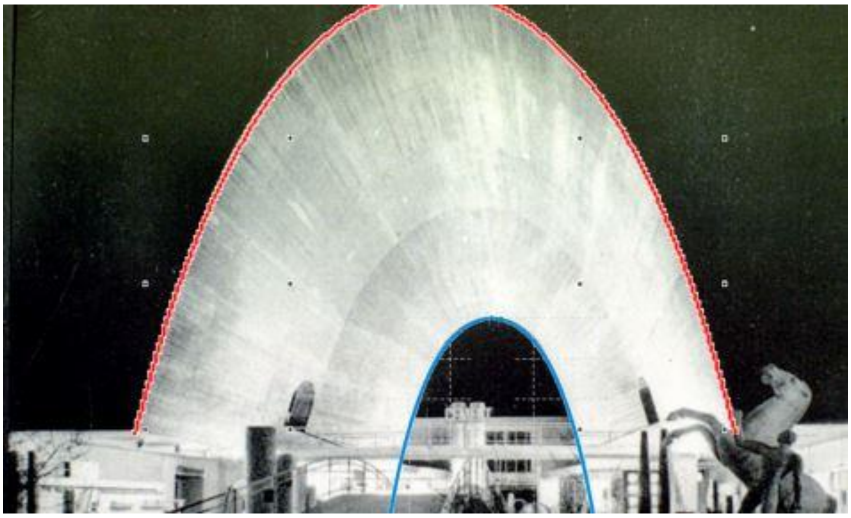

Figura 14. Padiglione Portland. Esposizione di Zurigo. 1939. Ing. Maillart.

Figura 15. Renzo Piano. Paul Klee Zentrum. Berna

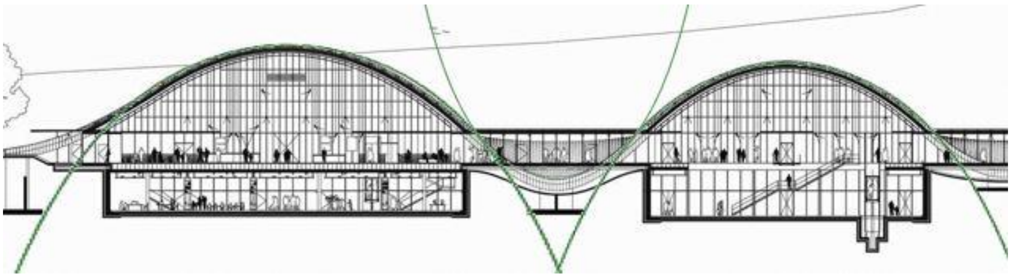

Figura 16. Catenarie del Paul Klee Zentrum. Berna

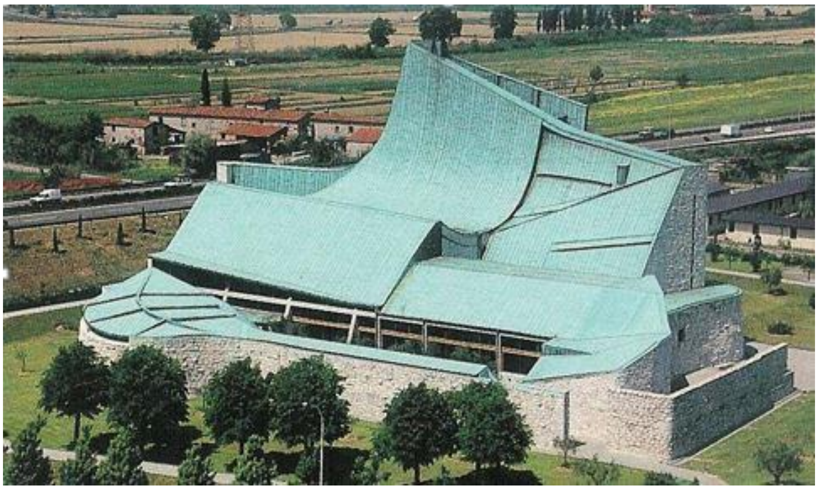

Figura 17. Tetto con sezione a catenaria. Chiesa dell’Autostrada del Sole. Campi Bisenzio (Fi). Arch. Michelucci

Figura 18. Catenarie nell’Atomic bomb memorial. Hiroshima. Kenzo Tange

4 La parabola

Se il filo inestendibile regge un carico uniforme ed il peso del filo è trascurabile rispetto al carico, allora, come aveva dimostrato Huygens nella lettera a Padre Mersenne del 1646 (vedi [8]), il filo assume la forma di una parabola. Infatti, in questo caso, l’equazione (4) diventa

(13) $$y'(x) = \frac{k}{T_0} x$$

dove k è il peso del carico per unità di lunghezza.

Tenendo conto che deve essere $y(0) = a$, la soluzione dell’equazione (13) è la seguente

(14) $$y(x) = \frac{k}{2T_0} x^2 + a$$

che è proprio l'equazione di una parabola.

Da questo fatto segue, ad esempio, che è parabolica la forma assunta dai cavi che reggono i ponti sospesi i quali sostengono un piano stradale (carico uniforme).

Ad esempio, il ponte di Akashi Kaikyō in Giappone è il ponte sospeso più lungo del mondo. È alto 282,8 metri e lungo 3911 metri. La sua campata principale è lunga ben 1991 metri. Fu inaugurato il 5 aprile 1998. I cavi che lo sorreggono assumono una forma parabolica.

Figura 19. Parabole del ponte di Akashi Kaikyō

Come nel caso della catenaria rovesciata, anche la parabola con la concavità rivolta verso il basso rappresenta la forma migliore che può assumere un arco che sorregga un peso uniforme, come, ad esempio, nel caso dei ponti.

Gli esempi sono innumerevoli; di seguito ne riportiamo alcuni.

Figura 20. Parabole del ponte di Gerebit. Francia. Eiffel. 1880

Figura 21. Chaotianmen Bridge. Cina. Arcata 552 metri; la più lunga al mondo

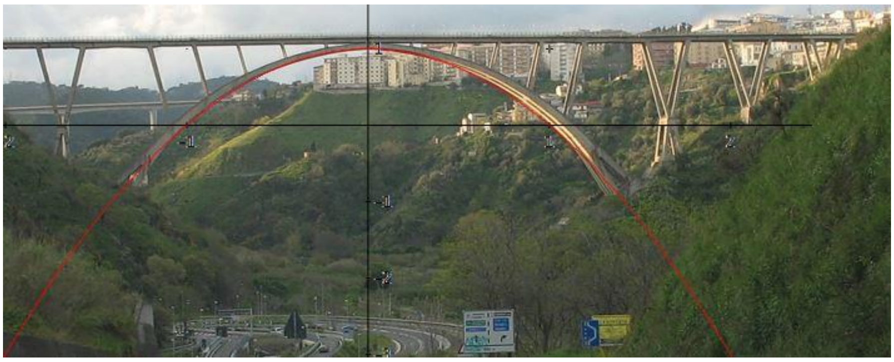

Figura 22. Arcata parabolica del Viadotto Bisantis. Catanzaro. Ing. Morandi

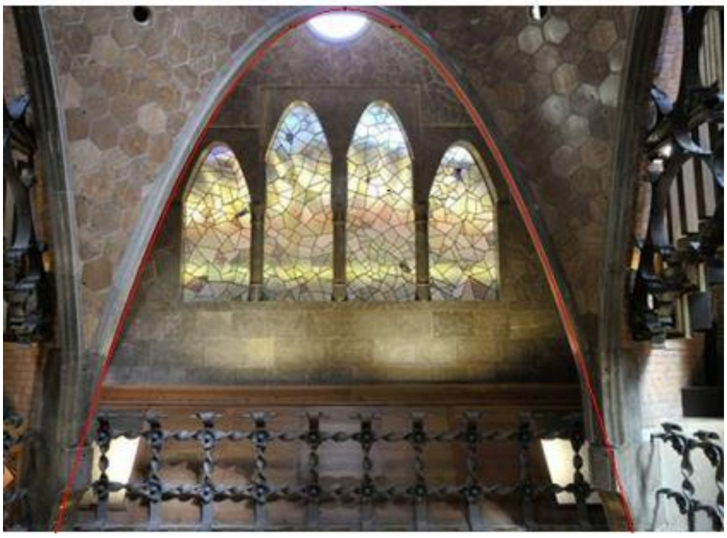

Figura 23. Parabola nell’attico del palazzo Guell. Gaudì

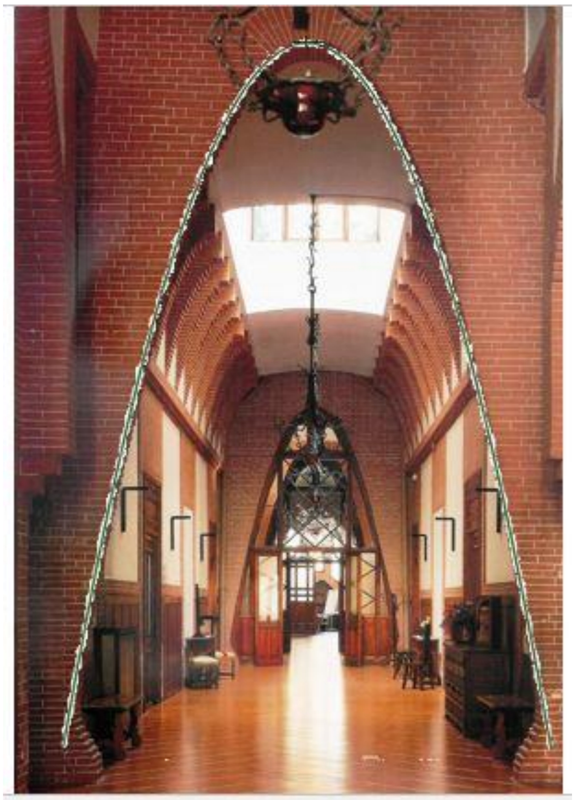

Figura 24. Parabole nel Collegio Teresiano. Gaudì

5 La catenaria pesata

Per ottenere l'equazione (12) della catenaria abbiamo supposto che la densità μ del filo fosse costante. Tuttavia tale ipotesi non è sempre soddisfatta nelle applicazioni della catenaria all'architettura ed all'ingegneria.

Supponiamo che la densità del filo sia variabile con la seguente legge (vedi [16]):

(15) $$\mu(s(x)) = \left(my(x)+n\right) / \left(\frac{ds}{dx}\right) = \left(my(x)+n\right) / \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}$$ con m, n costanti non negative.

In tal caso, l'equazione (4) diventa:

(16) $$y'(x) = \frac{g}{T_0}\left(\int_0^x (my(t)+n)dt\right).$$

Derivando entrambi i termini, si ottiene la seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$$y''(x) = \frac{g}{T_0}\left(my(x)+n\right)$$

Tenendo conto che deve essere $y'(0)=0$ e $y(0)=a$, si ottiene, ponendo $\frac{gm}{T_0}=b^2$ e $a+\frac{n}{m}=c$, il seguente risultato:

(17) $$y(x) = \frac{1}{2}ce^{bx} + \frac{1}{2}ce^{-bx} - \frac{n}{m},$$

ovvero

(18) $$y(x) = c\cosh(bx) - \frac{n}{m}.$$

L'equazione (18), con una traslazione degli assi, può essere ricondotta alla forma

(19) $$y(x) = c\cosh(bx)$$

La curva di equazione (19) è chiamata catenaria pesata (in inglese weighted catenary oppure flattened catenary). Per distinguerla da questa, talvolta la catenaria di equazione (12) viene chiamata catenaria pura.

Si può dimostrare che, viceversa, se un filo assume la forma (19), allora necessariamente la sua densità segue la legge (15) (vedi [16]).

Il primo a studiare la catenaria pesata, per determinare la forma ottimale delle arcate dei ponti, è stato Villarceau nel XIX secolo (vedi [18]). Successivamente, altri studiosi hanno affrontato il problema della catenaria pesata (vedi [7], [13], [14]).

L'esempio più famoso di catenaria pesata è senza dubbio il Gateway Arch di St Louis, progettato da E. Saarinen (vedi [5], [15], [16]).

Figura 25. Gateway Arch. St Louis, E. Saarinen

Un altro esempio di catenaria pesata si trova nella copertura dello Sheffield Winter Garden, nella città di Sheffield (South Yorkshire).

Figura 26. Catenarie pesate dello Sheffield Winter Garden

Questa copertura ricorda quella della Florida Polytechnic University in Lakeland, progettata da S. Calatrava; anche in questo caso gli archi della copertura sono delle catenarie pesate.

Figura 27. Catenarie pesate della Florida Polytechnic University. Calatrava

6 La catenaria di uguale resistenza

Supponiamo ora che la densità del filo sia proporzionale alla tensione $T(x)$ in ogni punto $P = (x,\ y(x))$ cioè sia:

(20) $$\mu(x) = cT(x)$$

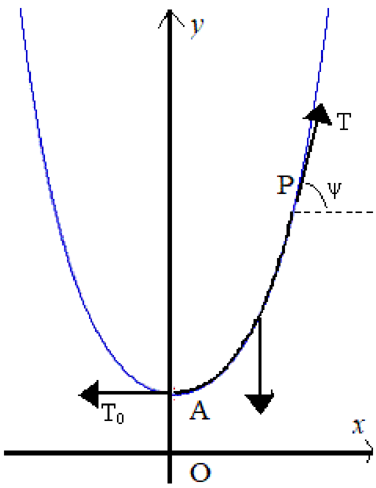

Figura 28

con c costante positiva; sia ψ l'angolo che la tensione T forma con il semiasse positivo delle ascisse. Siano T_x e T_y rispettivamente la componente orizzontale e quella verticale della tensione T; per comodità indicheremo con T, T_x e T_y anche i moduli dei corrispondenti vettori.

Sia $y'(0) = 0$ e $y(0) = a$.

Poiché $\tan(\psi) = y'$, segue da note formule di trigonometria:

(21) $$\cos(\psi) = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \text{ e } \sin(\psi) = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Chiaramente si ha:

(22) $$T_0 = T_x = \frac{T}{\sqrt{1+(y')^2}} \quad \text{e} \quad T_y = \frac{Ty'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

In questo caso l'equazione (4) diventa:

(23) $$y'(x) = \frac{g}{T_0}\int_0^x \mu(t)\sqrt{1+(y'(t))^2}\,dt$$

Derivando ambo i membri, si ottiene:

(24) $$y''(x) = \frac{g}{T_0}\,\mu(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,.$$

Tenendo conto della (20), si ha

$$y''(x) = \frac{cg}{T_0}T(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}$$ da cui, per le (22)

(25) $$y''(x) = cg\left(1+(y'(x))^2\right).$$

Poniamo $y' = z$; dunque si ottiene:

(26) $$z' = cg(1+z^2)$$

Risolvendo e tenendo conto che $z(0) = 0$, segue dalla (26):

$\arctan(z) = cgx$ ovvero $z = \tan(cgx)$ da cui $y' = \tan(cgx)$.

Integrando, si ha, essendo $y(0) = a$:

(27) $$y(x) = -\frac{1}{cg}\ln(\cos(cgx)) + a$$

Ponendo $a = \frac{1}{cg}$, dalla (27) si ottiene la seguente curva:

(28) $$y(x) = -a\ln(\cos(\frac{x}{a})) + a\,.$$

La curva di equazione (28) si chiama catenaria di uguale resistenza; essa è la forma presa da un filo flessibile ed inenstendibile, sospeso fra due punti, quando la densità lineare (cioè, in pratica, lo spessore del filo) è proporzionale alla tensione in ogni suo punto. Un filo avente questa forma, quindi, non offre maggior possibilità di rottura in un punto piuttosto che in un altro.

Tale curva fu studiata nel 1836 da G. Coriolis (vedi [4]).

Il grafico di questa catenaria è il seguente (per a = 1):

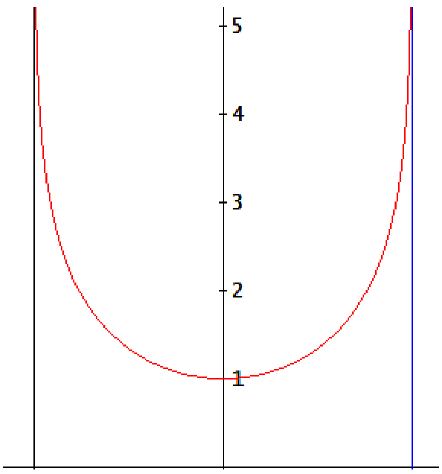

Figura 29. Grafico dalla catenaria di uguale resistenza

La catenaria di uguale resistenza è stata applicata dall'ingegnere Sergio Musmeci nella progettazione del famoso ponte sul Basento (Potenza, 1967-1969); per l'occasione egli scriveva, chiamando questa curva arco limite:

Mi sono divertito a determinare la forma dell'arco limite cioè di un arco che porta solo se stesso. Esso ha la sagoma la cui equazione è y =log (cosx), *a parte, le costanti moltiplicative che tengono conto della resistenza* *del materiale. Questa curva è caratterizzata da alcune proprietà geometriche molto interessanti.*

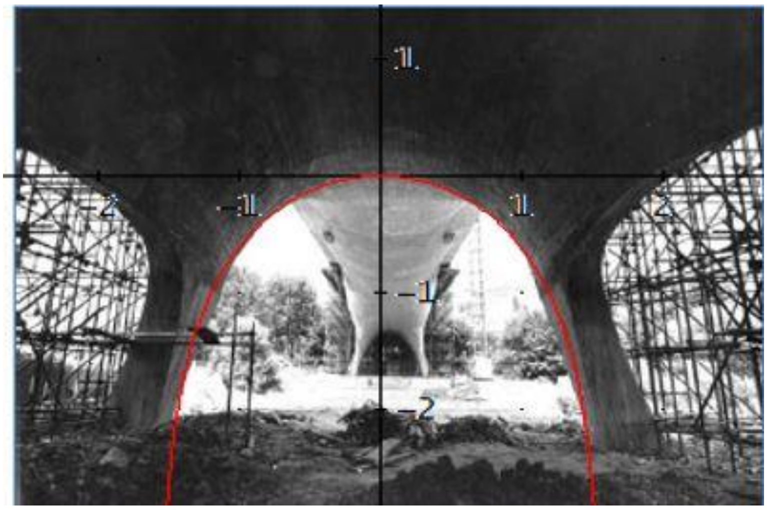

Figura 30. Musmeci. Arco limite nel ponte sul Basento

Esiste una superficie molto interessante ottenuta traslando una catenaria di uguale resistenza lungo una curva uguale, posta su un piano perpendicolare alla prima, ed in maniera tale che le loro concavità siano opposte. Tale superficie si chiama superficie di Scherk, dal nome del matematico tedesco Heinrich Ferdinand Scherk che per primo l'ha studiata nel 1834.

Notiamo che questa è l'unica superficie minima di traslazione.

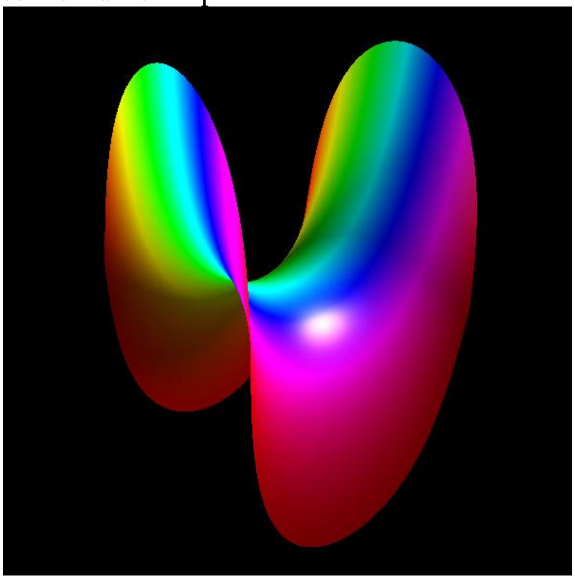

Figura 31. Superficie di Scherk

7 Conclusioni

La catenaria e le sue varianti sono curve molto importanti nell'architettura e nell'ingegneria. A partire dal XVII secolo, quando fu introdotta la catenaria (pura), esse sono state applicate in numerose opere architettoniche. Si è scoperto, inoltre, che si trovano in molte costruzioni antiche, come, ad esempio, la cupola del Brunelleschi (vedi [3]), oppure gli archi di alcuni edifici sassanidi. Naturalmente, quando furono realizzate queste opere, tali curve erano sconosciute; tuttavia, forse con l'esperienza, i costruttori sapevano che queste rappresentavano la forma migliore per reggere il peso degli edifici.

Bibliografia

[1] Boyer C. (1990). *Storia della matematica*. Mondadori, Milano.

[2] Brunetti F. a cura di (1964). *Opere di Galileo Galilei*. vol. II, UTET, Torino.

[3] Conti G. & Corazzi R. (2011). Il segreto della Cupola del Brunelleschi a Firenze - The Secret of Brunelleschi's Dome in Florence. Pontecorboli Editore, Firenze.

[4] Coriolis G. (1836). *Note sur la chaînette d'égale résistance*. Journal de mathématiques pures et appliquées, 1re série, tome 1, pp. 75-76.

[5] Crosbie M. J. (1983). *Is It a Catenary? New questions about the shape of Saarinen's St. Louis.* Arch. AIA Journal (June), pp.78-79.

[6] Galilei G. (1990). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e i movimenti locali*, a cura di E. Giusti. Giulio Einaudi Editore, Torino.

[7] Heyman J. (1982). *The Masonry Arch*, Chichester. Ellis Horwood Limited.

[8] Huygens C. (1646). Correspondance n°21, *lettre à Mersenne*, prop.8. Œuvres complètes de Christiaan Huygens, Société hollandaise des sciences, tome I, p.36.

[9] Huygens C. (1691). Correspondance n°2693, *lettre à Leibniz*. Œuvres complètes de Christiaan Huygens, Société hollandaise des sciences, tome X, p.133.

[10] Kline M. (1991). *Storia del Pensiero Matematico; Volume I: dall'antichità al settecento.* Giulio Einaudi Editore, Torino.

[11] Leibniz G. W. (1691). De linea in quam flexile se pondere proprio curvat. Acta eruditorum, (Juin), Lipsia.

[12] Loria G. (1982). *Storia delle Matematiche, dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*. Ristampa anastatica autorizzata dall'editore Hepli, Cesalpino-Goliardica, Milano.

[13] Macquorn Rankine W. J. (1881). *Miscellaneous Scientific Papers*. Charles Griffith and Company, London.

[14] Malverd Howe A. (1897). *A Treatise on Arches.* John Wiley & Sons, New York.

[15] Osserman R. (2010). *How the Gateway Arch Got its Shape*. Nexus Network Journal, Vol.12, No. 2, 2010, pp. 167-189.

[16] Osserman R. (2010). *Mathematics of the Gateway Arch*. Notices of the American Mathematical Society 57, 2: 220-229.

[17] Simonetti C. (2006). *Galileo e la catenaria*. Archimede, anno LVIII n°4. Le Monnier, Firenze.

[18] Villarceau A. Y. (1853). *Sur l'établissement des arches de pont*. Imprimerie Impériale, Paris.