RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO
Serie II, Tomo XXXIII (1984), pp. 382-406

CR-STRUTTURA E GEOMETRIA RIEMANNIANA DELLE IPERSUPERFICIE DI $\mathbb{C}^n$

DONATO PERTICI

For this work we study riemannian geometry of $\mathbb{C}^n$ hypersurfaces with reference to their *CR*-structure. In particular we can obtain some properties of those hypersurfaces whose Levi's distribution is integrable.

Introduzione.

Data un'ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$ si analizzano alcune relazioni esistenti fra la *CR*-struttura di M e la sua struttura riemanniana.

Partendo da una formula che lega la forma di Levi e la seconda forma fondamentale di M si dimostra dapprima che M è strettamente Levi-convessa se la curvatura di ogni sezione complessa è positiva; inoltre se M è Levi-piatta la curvatura di Ricci è non positiva e nulla se e solo se M è una varietà riemanniana a curvatura sezionale costantemente nulla.

Successivamente si studiano le ipersuperficie Levi-piatte, le cui curvature delle sezioni complesse sono tutte nulle. Si dimostra che le varietà integrali della distribuzione di Levi di tali ipersuperficie giacciono in iperpiani complessi affini, e che ognuna di queste ipersuperficie, che sia anche completa, è *CR*-isometrica a

$$\mathbb{C}^{n-1}\times \mathbb{R}=\{(z_1,\dots,z_n)\in \mathbb{C}^n:\ \mathrm{Im}\, z_n=0\}$$

oppure a

$$\mathbb{C}^{n-1}\times S^1(r)=\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n:\ |z_n|=r\}.$$

Infine, dopo aver osservato che esistono ipersuperficie non complete, Levi-piatte, a curvatura sezionale complessa identicamente nulla, il cui tensore di Riemann è diverso da zero, nell'ultimo paragrafo si studiano le ipersuperficie Levi-piatte, a curvatura sezionale uguale a zero. Si dimostra che tali ipersuperficie sono caratterizzate dall'avere tutti i *CR*-spazi tangenti paralleli e che sono *CR*-isometriche ad un aperto di $\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}$ oppure ad un aperto di $\mathbb{C}^{n-1}\times S^1(r)$.

§ 1. Preliminari.

Cominciamo col fissare le notazioni.

1. Identificheremo lo spazio $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$, tramite l'isomorfismo canonico che al punto $(x_1+iy_1,\dots,x_n+iy_n)\in\mathbb{C}^n$ associa il punto $(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)\in\mathbb{R}^{2n}$.

Indichiamo con $\langle,\rangle$ il prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^{2n}$ e con J la moltiplicazione per i in $\mathbb{C}^n$.

Se M è una ipersuperficie di $\mathbb{R}^{2n}$ indichiamo poi con g la metrica riemanniana indotta dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^{2n}$, con R il suo tensore di Riemann, con S il tensore di Ricci, con r la curvatura scalare di Ricci, con h la seconda forma fondamentale di M (definita a meno del segno) ([3]).

Con $t(p)$ indichiamo infine il *numero tipo* di M in un suo punto p ([3]). Se $v_1,\dots,v_{2n-1}$ è una base dello spazio tangente ad M in p, il *numero tipo* $t(p)$ è definito come il rango della matrice $(h_p(v_i,v_j))_{1\le i,j\le 2n-1}$.

Ricordiamo inoltre che se x, y, z, w sono campi vettoriali tangenti allora vale la formula di Gauss:

$$R(x,y,z,w)=h(x,z)\,h(y,w)-h(x,w)\,h(y,z).$$

Da tale formula si deduce che il tensore di Riemann R_p valutato in un punto p di M è nullo se e solo se $t(p)\le 1$.

Se p è un punto della ipersuperficie M di $\mathbb{R}^{2n}\simeq\mathbb{C}^n$ indichiamo con T_pM lo spazio tangente ad M in p e con $H_pM=(T_pM)\cap J(T_pM)$ il *CR-spazio tangente* ad M in p ([4]).

H_pM è un sottospazio vettoriale complesso di $T_p(\mathbb{C}^n)$ di dimensione complessa $n-1$, contenuto in T_pM.

Indichiamo poi con O_pM il sottospazio di T_pM ortogonale ad H_pM. È chiaro che O_pM ha dimensione 1 e che T_pM si può scrivere come somma diretta di H_pM e O_pM. Quindi ogni vettore v di T_pM si può scrivere in modo unico come somma di due vettori, indicati con $P_H v$ e $P_O v$, appartenenti rispettivamente ad H_pM e ad O_pM.

Più in generale, ogni campo vettoriale tangente X si può decomporre, in modo unico, nella somma di due campi vettoriali tangenti, $P_H X$ e $P_O X$, i cui valori appartengono, in ogni punto di M, rispettivamente al CR-spazio tangente ed al suo sottospazio ortogonale.

Tale decomposizione dello spazio tangente induce una decomposizione canonica anche nello spazio dei tensori covarianti.

Sia T un tensore di tipo (O, s) definito su M.

Definiamo:

$$P_{A_1 \dots A_s} T(X_1, \dots, X_s) = T(P_{A_1} X_1, \dots, P_{A_s} X_s)$$

dove $X_1, \dots, X_s$ sono campi vettoriali su M, ed ogni A_i sta per H o per O.

$P_{A_1 \dots A_s} T$ è un tensore di tipo (O, s) definito su M. Il tensore T, inoltre, si decompone nella somma dei 2^s tensori proiezione del tipo $P_{A_1 \dots A_s} T$ ottenuti scegliendo ogni A_i uguale ad H oppure ad O.

Tale tecnica di proiezione verrà applicata in modo particolare al tensore di Riemann R. Esso, naturalmente, si può scrivere come somma delle sue 16 proiezioni. In virtù delle proprietà di antisimmetria del tensore di Riemann sono però sempre nulle 7 delle sue proiezioni. Vedremo in seguito quali condizioni geometriche corrispondono all'annullamento delle restanti 9 proiezioni.

La tecnica delle proiezioni è stata introdotta da C. Cattaneo in [1] per lo studio della varietà spazio-tempo della teoria della relatività ed è stata successivamente applicata in vari lavori di geometria differenziale (si veda ad esempio [2]).

2. Sia p un punto di una ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$. In un intorno di p, M è definita come luogo di zeri di una funzione Φ, il cui differenziale è diverso da zero su M. La restrizione al CR-spazio tangente H_pM della forma hermitiana

$$L_p(v, w) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(p)\, v_i \bar{w}_j \qquad (v=(v_1, \dots, v_n),\ w=(w_1, \dots, w_n))$$

sarà indicata con L_p e verrà detta la *forma di Levi* di M in p.

Essa è definita a meno di una costante moltiplicativa diversa da zero (dipendente dalla scelta della funzione Φ).

L'ipersuperficie M si dice *strettamente Levi-convessa* (rispettivamente *Levi-convessa*) se, in ogni punto di M, la forma di Levi è definita (positiva o negativa) (rispettivamente semidefinita positiva o negativa). M si dice invece *Levi-piatta* se la forma di Levi è identicamente nulla in ogni punto di M.

È noto che una ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$ è Levi-piatta se e solo se la *distribuzione di Levi*:

$$p \to H_p M$$

è involutiva e dunque completamente integrabile.

Nel seguito utilizzeremo la seguente relazione tra la forma di Levi e la 2ª forma fondamentale:

PROPOSIZIONE 1. *Sia p un punto di una ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$. Vale la seguente formula*:

$$L_p(z, w) = [h_p(z, w) + h_p(Jz, Jw)] + i\,[h_p(z, Jw) - h_p(Jz, w)]$$

qualunque siano $z, w \in H_p M$.

Dimostrazione. Supponiamo, per semplicità, che M sia il grafico di una funzione $\varphi(x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n)$. Allora:

$$M = \{\Phi = \varphi(x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n) - y_n = 0\}$$

Posto $z_h = x_h + i y_h$, $h = 1, \dots, n$, si ha:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_h \partial \bar{z}_j} = \frac{1}{4}\left((\varphi_{x_h x_j} + \varphi_{y_h y_j}) + i(\varphi_{x_h y_j} - \varphi_{x_j y_h})\right) \qquad h, j = 1, \dots, n-1$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_n \partial \bar{z}_n} = \frac{1}{4}\varphi_{x_n x_n};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_h \partial \bar{z}_n} = \frac{1}{4}(\varphi_{x_h x_n} - i\varphi_{y_h x_n}) \qquad h = 1, \dots, n-1;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_n \partial \bar{z}_h} = \frac{1}{4} (\varphi_{x_h x_n} + i \varphi_{y_h x_n}) \qquad h = 1, \ldots, n-1.$$

Se $z = (a_1 + i b_1, \ldots, a_n + i b_n)$, $w = (\xi_1 + i \eta_1, \ldots, \xi_n + i \eta_n) \in \mathbb{C}^n$ si ha quindi in p:

$$\mathrm{Re}\, L_p(z, w) = \sum_1^{n-1}{}_{h,j} \, [(\varphi_{x_h x_j} + \varphi_{y_h y_j})(a_h \xi_j + b_h \eta_j) + (\varphi_{x_j y_h} - \varphi_{x_h y_j}) \cdot$$

$$\cdot (b_h \xi_j - a_h \eta_j)] + \varphi_{x_n x_n} (a_n \xi_n + b_n \eta_n) +$$

$$+ \sum_1^{n-1}{}_h \, [\varphi_{x_h x_n} (a_h \xi_n + b_h \eta_n + a_n \xi_h + b_n \eta_h) +$$

$$+ \varphi_{y_h x_n} (b_h \xi_n + a_n \eta_h - a_h \eta_n - b_n \xi_h)].$$

$$X(x_1, y_1, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n) = (x_1, y_1, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n, \varphi(x_1, y_1, \ldots, x_n))$$

costituisce una parametrizzazione di M.

Poniamo:

$$X_h = \frac{\partial X}{\partial x_h} = (0, \ldots, 0, \underset{2h-1}{1}, 0, \ldots, 0, \varphi_{x_h}) \qquad h = 1, \ldots, n;$$

$$Y_h = \frac{\partial X}{\partial y_h} = (0, \ldots, 0, 0, \underset{2h}{1}, 0, \ldots, 0, \varphi_{y_h}) \qquad h = 1, \ldots, n-1.$$

$X_1, Y_1, \ldots, X_{n-1}, Y_{n-1}, X_n$ generano in ogni punto q di M lo spazio tangente $T_q M$ e

$$\nu = \frac{(-\varphi_{x_1}, -\varphi_{y_1}, \ldots, -\varphi_{x_{n-1}}, -\varphi_{y_{n-1}}, -\varphi_{x_n}, 1)}{(1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{y_1}^2 + \ldots + \varphi_{x_n}^2)^{1/2}}$$

è un campo vettoriale unitario normale definito su M.

A meno di una costante moltiplicativa diversa da zero, si ha quindi:

$$h_p(X_h(p), X_s(p)) = \langle \frac{\partial^2 X}{\partial x_h \partial x_s}(p), \nu(p) \rangle = \varphi_{x_h x_s}(p) \qquad (h, s = 1, \dots, n);$$

$$h_p(X_l(p), Y_s(p)) = \langle \frac{\partial^2 X}{\partial x_l \partial y_s}(p), \nu(p) \rangle = \varphi_{x_l y_s}(p) \qquad (l = 1, \dots, n), \quad (s = 1, \dots, n-1);$$

$$h_p(Y_l(p), Y_s(p)) = \langle \frac{\partial^2 X}{\partial y_l \partial y_s}(p), \nu(p) \rangle = \varphi_{y_l y_s}(p) \qquad (l, s = 1, \dots, n-1).$$

Siano ora $z = (a_1 + i b_1, \dots, a_n + i b_n)$, $w = (\xi_1 + i \eta_1, \dots, \xi_n + i \eta_n)$.
Supponiamo che z e w appartengono ad $H_p M$.
In tal caso $z, w, Jz, Jw \in T_p M$ e quindi:

$$z = \sum_1^{n-1}{}_h (a_h X_h(p) + b_h Y_h(p)) + a_n X_n(p);$$

$$w = \sum_1^{n-1}{}_h (\xi_h X_h(p) + \eta_h Y_h(p)) + \xi_n X_n(p);$$

$$Jz = \sum_1^{n-1}{}_h (-b_h X_h(p) + a_h Y_h(p)) - b_n X_n(p);$$

$$Jw = \sum_1^{n-1}{}_h (-\eta_h X_h(p) + \xi_h Y_h(p)) - \eta_n X_n(p).$$

Di conseguenza nel punto p si ha:

$$h_p(z, w) = \sum_1^{n-1}{}_{h,j} (\varphi_{x_h x_j} a_h \xi_j + \varphi_{y_h y_j} b_h \eta_j) + \varphi_{x_n x_n} a_n \xi_n +$$
$$+ \sum_1^{n-1}{}_{h,j} (\varphi_{x_h y_j} a_h \eta_j + \varphi_{y_h x_j} b_h \xi_j) + \sum_1^{n-1}{}_h [\varphi_{x_h x_n}(a_h \xi_n + a_n \xi_h) +$$
$$+ \varphi_{y_h x_n}(b_h \xi_n + a_n \eta_h);$$

$$h_p(Jz, Jw) = \sum_1^{n-1}{}_{h,j} (\varphi_{x_h x_j} b_h \eta_j + \varphi_{y_h y_j} a_h \xi_j) + \varphi_{x_n x_n} b_n \eta_n +$$

$$- \sum_{1}^{n-1}{}_{h,j} (\varphi_{x_h y_j} b_h \xi_j + \varphi_{y_h x_j} a_h \eta_j) + \sum_{1}^{n-1}{}_{h} [\varphi_{x_h x_n} (b_h \eta_n + b_n \eta_h) +$$

$$- \varphi_{y_h x_n} (b_n \xi_h + a_h \eta_n).$$

Un rapido confronto permette di concludere che:

$$\operatorname{Re} L_p (z, w) = h_p (z, w) + h_p (J z, J w).$$

Poiché $\operatorname{Im} L_p (z, w) = -\operatorname{Re} L_p (J z, w)$ si deduce che:

$$\operatorname{Im} L_p (z, w) = h_p (z, J w) - h_p (J z, w).$$

La proposizione è quindi dimostrata.

COROLLARIO 1. *Una ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$ è Levi-piatta se e solo se, in ogni punto di M, la restrizione al CR-spazio tangente della seconda forma fondamentale è anti-J-invariante.*

COROLLARIO 2. *Una ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$ è strettamente Levi-convessa (rispettivamente Levi-convessa) se, in ogni punto di M, la restrizione al CR-spazio tangente della seconda forma fondamentale è definita (rispettivamente semidefinita) positiva o negativa.*

§ 2. Forma di Levi e curvature di una ipersuperficie di $\mathbb{C}^n$.

1. Sia p un punto di una ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$ e sia $v_1, \ldots, v_{2n-1}$ una base di $T_p M$. La curvatura gaussiana $K(p)$ di M nel punto p, definita a meno del segno, si può esprimere nel modo seguente:

$$K(p) = [\det (h_p (v_i, v_j))_{1 \le i,j \le 2n-1}] \, [\det (g_p (v_i, v_j))_{1 \le i,j \le 2n-1}]^{-1}.$$

In particolare $K(p)$ è $\neq 0$ se e solo se $t(p) = 2n-1$.

Si può dimostrare ([3], volume II, pag. 41) che la seconda forma fondamentale di una ipersuperficie compatta, connessa, avente curvatura gaussiana sempre diversa da zero, è ovunque definita (positiva o negativa).

Tenendo conto del precedente corollario 2 si ottiene la

PROPOSIZIONE 2. *Sia M una ipersuperficie compatta, connessa di $\mathbb{C}^n$, avente curvatura gaussiana sempre diversa da zero. Allora M è strettamente Levi-convessa.*

Quindi le ipersuperficie compatte, connesse, aventi numero tipo massimo in ogni punto, sono strettamente Levi-convesse. La proposizione seguente, viceversa, mostra come il numero tipo di una ipersuperficie strettamente Levi-convessa, non possa essere troppo piccolo.

PROPOSIZIONE 3. *Sia p un punto di una ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$, in cui la forma di Levi L_p è definita (positiva o negativa). Allora $t(p) \geq n-1$.*

Dimostrazione. Poniamo $f_p = \mathrm{Re}\, L_p$.

f_p ed h_p sono forme $\mathbb{R}$-bilineari simmetriche su $H_p M$. Supponiamo che f_p sia definita positiva.

Per la proposizione 1:

$$f_p(z, w) = h_p(z, w) + h_p(Jz, Jw), \qquad \forall z, w \in H_p M.$$

Poiché f_p è definita positiva esiste una base reale di $H_p M$, $\{z_1, \dots, z_{2n-2}\}$, ortonormale per f_p ed ortogonale per h_p. Anche i vettori $\{Jz_1, \dots, Jz_{2n-2}\}$ costituiscono una base reale di $H_p M$, ortonormale per f_p ed ortogonale per h_p. Infatti:

$$f_p(Jz_h, Jz_s) = f_p(z_h, z_s) = \delta_{hs} \qquad h, s = 1, \dots, 2n-2;$$

$$h_p(Jz_h, Jz_s) = h_p(Jz_h, Jz_s) + h_p(z_h, z_s) = f_p(z_h, z_s) = 0 \qquad \text{se } h \neq s.$$

Poiché $f_p(z_s, z_s) = 1$ si avrà:

$$h_p(z_s, z_s) \neq 0 \text{ oppure } h_p(Jz_s, Jz_s) \neq 0 \qquad (\text{per } s = 1, \dots, 2n-2).$$

In uno almeno dei due insiemi $\{z_s\}_{1 \leq s \leq 2n-2}$, $\{Jz_s\}_{1 \leq s \leq 2n-2}$ esistono almeno $n-1$ vettori h_p-ortogonali sui quali la forma quadratica associata ad h_p non si annulla. Di conseguenza $t(p) \geq n-1$. q.e.d.

Osservazioni.

(1) Il grafico della funzione:

$$\varphi(x_1; y_1, \dots, x_{n-1}; y_{n-1}; x_n) = \sum_1^{n-1} {}_s\, y_s^2$$

fornisce un esempio di ipersuperficie di $\mathbb{C}^n$ strettamente Levi-convessa, avente numero tipo costantemente uguale a $n-1$.

(2) Dalla proposizione precedente si deduce che se $n \geq 3$ e M è strettamente Levi-convessa il tensore di Riemann non è nullo. Ciò è invece falso per $n=2$ (si prenda per M l'ipersuperficie $y_2 - y_1^2 = 0$).

2. Introduciamo ora un nuovo tipo di curvatura, legata alla CR-struttura di una ipersuperficie di $\mathbb{C}^n$.

Sia dunque M una ipersuperficie di $\mathbb{C}^n$ e sia $p \in M$. Sia poi π una retta complessa contenuta in $H_p M$, ossia un sottospazio vettoriale complesso di $H_p M$ di dimensione complessa 1. Poniamo:

$$K_{\mathbb{C}}(\pi) = \text{curvatura sezionale della sezione } \pi.$$

$K_{\mathbb{C}}(\pi)$ sarà detta anche *curvatura sezionale complessa* di M in p (secondo la sezione π).

Se X è un vettore di π, avente norma 1, si ha:

$$K_{\mathbb{C}}(\pi) = R(X, JX, X, JX).$$

La notazione $(K_{\mathbb{C}})_p \lesseqqgtr 0$ significa che $K_{\mathbb{C}}(\pi) \lesseqqgtr 0$ per ogni retta complessa π di $H_p M$, mentre la notazione $K_{\mathbb{C}} \lesseqqgtr 0$ significa che $(K_{\mathbb{C}})_p \lesseqqgtr 0$ qualunque sia $p \in M$.

PROPOSIZIONE 4. *Sia p un punto di una ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$ e $X \in H_p M - \{0\}$ tale che: $L_p(X, X) = 0$.*

Sia π la retta complessa generata da X. Allora si ha: $K_{\mathbb{C}}(\pi) \leq 0$.

L'uguaglianza, inoltre, vale se e solo se $h_{p|_{\pi \times \pi}} \equiv 0$.

Dimostrazione. Si può supporre che X abbia norma 1.

Per ipotesi $L_p(X, X) = 0$. Per la proposizione 1, si ha quindi:

$$-h_p(X, X) = h_p(JX, JX).$$

Utilizzando la formula di Gauss:

$$K_{\mathbb{C}}(\pi) = R_p(X, JX, X, JX) = h_p(X, X)\, h_p(JX, JX) - h_p(X, JX)^2 =$$

$$= -(h_p(X, X)^2 + h_p(X, JX)^2) \leq 0.$$

Vale inoltre $K_{\mathbb{C}}(\pi)=0$ se e solo se $h_p(X,X)=h_p(X,JX)=0$ e quindi se e solo se la restrizione di h_p a π è identicamente nulla. q.ed.

COROLLARIO 1. *Sia p un punto di una ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$ tale che $(K_{\mathbb{C}})_p>0$.*
Allora L_p è definita (positiva o negativa).

COROLLARIO 2. *Sia p un punto di una ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$.*
Se la forma di Levi di M è nulla in p, allora si ha: $(K_{\mathbb{C}})_p\leq 0$.
Inoltre sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

a) $L_p\equiv 0$ *e* $(K_{\mathbb{C}})_p\equiv 0$;

b) $h_p|_{H_pM\times H_pM}\equiv 0$.

Esempio 1. Il grafico della funzione φ definita da:

$$\varphi(x_1, y_1, x_2)=\log x_1+\log y_1-\log\cos x_2 \qquad (x_1\,;\, y_1>0,\ -\frac{\pi}{2}<x_2<\frac{\pi}{2})$$

è una ipersuperficie di $\mathbb{C}^2$ Levi-piatta, avente curvatura sezionale complessa sempre strettamente negativa e curvatura gaussiana sempre diversa da zero.

Consideriamo ora una ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$, Levi-piatta ed avente tutte le curvature sezionali complesse uguali a zero. Per il precedente corollario 2, in ogni punto di M, la seconda forma fondamentale si annulla su ogni coppia di vettori appartenenti al CR-spazio tangente.

Di conseguenza, in ogni punto di M, il numero tipo è minore o uguale a 2. Ciò non significa però che il tensore di Riemann debba essere nullo, come mostra il seguente:

Esempio 2. La ipersuperficie di $\mathbb{C}^2$ definita da:

$$\begin{cases} x_1(u_1, u_2, u_3)=u_3u_1+(1-u_3)u_2\,; \\ y_1(u_1, u_2, u_3)=(u_3-1)u_1+u_3u_2\,; \\ x_2(u_1, u_2, u_3)=u_3u_1\,; \\ y_2(u_1, u_2, u_3)=u_3u_2 \end{cases}$$

$$(u_1\,;\,u_2)\in\mathbb{R}^2; \quad \text{e} \quad u_1^2+u_2^2>0$$

è Levi-piatta, ha curvatura sezionale complessa identicamente nulla, ma il tensore di Riemann è in ogni punto diverso da zero.

Quindi il tensore di Riemann di una ipersuperficie Levi-piatta e tale che $K_{\mathbb{C}} \equiv 0$, non è necessariamente nullo.

Sono però nulle le seguenti cinque componenti:

$$P_{HHHH} R, \quad P_{HOHH} R, \quad P_{OHHH} R, \quad P_{HHOH} R, \; P_{HHHO} R.$$

Si ha infatti, ad esempio:

$$P_{HOHH} R(x, y, z, w) = R(P_H x,\, P_O y,\, P_H z,\, P_H w) =$$

$$= h(P_H x,\, P_H z)\, h(P_O y,\, P_H w) - h(P_H x,\, P_H w)\, h(P_O y,\, P_H z) = 0$$

per il precedente corollario 2.

Le restanti quattro proiezioni di R non nulle si esprimono inoltre nel modo seguente:

$$P_{HOHO} R(x, y, z, w) = -h(P_H x,\, P_O w)\, h(P_O y,\, P_H z);$$

$$P_{HOOH} R(x, y, z, w) = h(P_H x,\, P_O z)\, h(P_O y,\, P_H w);$$

$$P_{OHOH} R(x, y, z, w) = -h(P_O x,\, P_H w)\, h(P_H y,\, P_O z);$$

$$P_{OHHO} R(x, y, z, w) = h(P_O x,\, P_H z)\, h(P_H y,\, P_O w)$$

e quindi:

$$R(x, y, z, w) = -h(P_H x,\, P_O w)\, h(P_O y,\, P_H z) + h(P_H x,\, P_O z)\, h(P_O y,\, P_H w) +$$

$$-h(P_O x,\, P_H w)\, h(P_H y,\, P_O z) + h(P_O x,\, P_H z)\, h(P_H y,\, P_O w).$$

PROPOSIZIONE 5. *Sia p un punto di una ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$. Supponiamo*: $L_p \equiv 0$, $(K_{\mathbb{C}})_p \equiv 0$. *Allora*: $R_p(x, y, x, y) \leq 0$, $\forall x, y \in T_p M$.

Dimostrazione. Siano $x, y \in T_p M$. Per quanto visto in precedenza:

$$R_p(x, y, x, y) = -h_p(P_H x,\, P_O y)^2 - h_p(P_O x,\, P_H y)^2 +$$

$$+2 h_p(P_O x,\, P_H x)\, h_p(P_O y,\, P_H y).$$

Essendo:

$$0 = R_p(P_O x, P_O y, P_H x, P_H y) =$$

$$= h_p(P_O x, P_H x)\, h_p(P_O y, P_H y) - h_p(P_O x, P_H y)\, h_p(P_O y, P_H x)$$

si ha:

$$R_p(x, y, x, y) = -(h_p(P_H x, P_O y) - h_p(P_O x, P_H y))^2 \leq 0$$

q.e.d.

La proposizione 5 mostra che ogni ipersuperficie di $\mathbb{C}^n$, Levi-piatta, avente tutte le curvature sezionali complesse nulle, è necessariamente una varietà riemanniana a curvatura sezionale minore o uguale a zero. Nel prossimo paragrafo studieremo più accuratamente tali ipersuperficie.

3. Consideriamo ora il tensore di Ricci S della ipersuperficie M.

PROPOSIZIONE 6. *Sia p un punto di una ipersuperficie M di* $\mathbb{C}^n$, *tale che:* $L_p \equiv 0$, $(K_{\mathbb{C}})_p \equiv 0$.

Il tensore di Riemann R_p *è nullo se vale una qualsiasi delle seguenti condizioni*:

a) $(P_{OH}\, h)_p \equiv 0$;

b) $(P_{HH}\, S)_p \equiv 0$;

c) $(P_{OO}\, S)_p \equiv 0$.

Dimostrazione. Per il corollario 2 della proposizione 4: $h_p|_{H_pM \times H_pM} \equiv 0$ e quindi:

$$h_p(z, w) = 0, \qquad \forall z, w \in H_p M.$$

Se vale a) segue che

$$h_p(z, w) = 0, \qquad \forall z \in H_p M, \quad \forall w \in O_p M.$$

Quindi il numero tipo $t(p)$ è minore o uguale a 1 ed allora $R_p \equiv 0$.

Sia ora $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, J z_1, \dots, J z_{n-1}$ una base reale ortonormale di $H_p M$ e sia μ un vettore unitario di $O_p M$. Supponiamo valga b); allora:

$$S_p(x, x) = 0, \qquad \forall x \in H_p M.$$

Ma se $x \in H_p M$, si ha:

$$S_p(x,x) = R_p(x,\mu,x,\mu) + \sum_1^{n-1}{}_j \, [R_p(x, z_j, x, z_j) + R_p(x, J z_j, x, J z_j)] =$$

$$= R_p(x,\mu,x,\mu) =$$

$$= -h_p(x,\mu)^2$$

(essendo $(P_{HH}\, h)_p \equiv 0$).

Quindi $h_p(x,\mu) = 0$, $\forall x \in H_p M$, ossia vale la a) e dunque $R_p \equiv 0$.

Supponiamo ora che valga c). Allora:

$$S_p(\mu,\mu) = 0.$$

Ma

$$S_p(\mu,\mu) = \sum_1^{n-1}{}_h \, [R_p(\mu, z_h, \mu, z_h) + R_p(\mu, J z_h, \mu, J z_h)] =$$

$$= \sum_1^{n-1}{}_h \, [h_p(\mu,\mu)\, h_p(z_h, z_h) - h_p(\mu, z_h)^2 + h_p(\mu,\mu)\, h_p(J z_h, J z_h) +$$

$$- h_p(\mu, J z_h)^2].$$

$h_p|_{H_p M \times H_p M}$ è però anti-J-invariante, essendo $L_p \equiv 0$. Quindi:

$$h_p(z_h, z_h) = -h_p(J z_h, J z_h), \text{ per ogni } h$$

e perciò:

$$S_p(\mu,\mu) = -\sum_1^{n-1}{}_h \, [h_p(\mu, z_h)^2 + h_p(\mu, J z_h)^2].$$

Poiché

$S_p(\mu,\mu) = 0$ segue che $h_p(\mu, z_h) = h_p(\mu, J z_h) = 0$ per $h = 1, \dots, n-1$;

quindi vale a) e di conseguenza $R_p \equiv 0$. q.e.d.

Osservazione. Nell'ultima parte della dimostrazione si è visto che l'ipotesi $L_p \equiv 0$ implica che:

$$S_p(\mu,\mu) = -\sum_1^{n-1}{}_h \, [h_p(\mu, z_h)^2 + h_p(\mu, J z_h)^2] \leq 0.$$

Ciò si può esprimere con la condizione seguente:
$(P_{OO}S)_p$ è semidefinito negativo ed è nullo se e solo se $(P_{OH}h)_p \equiv 0$.
Tale osservazione è utile per dimostrare la seguente:

PROPOSIZIONE 7. *Sia p un punto di una ipersuperficie M di* $\mathbb{C}^n$. *Se* $L_p \equiv 0$, *la curvatura di Ricci* $r(p)$ *è minore o uguale a zero, ed è zero se e solo se* $R_p \equiv 0$.

Dimostrazione. Sia $z_1, \dots, z_{n-1}, Jz_1, \dots, Jz_{n-1}$ una base reale ortonormale di H_pM e sia μ un vettore unitario di O_pM. Allora:

$$r(p) = S_p(\mu, \mu) + \sum_1^{n-1}{}_i \, [S_p(z_i, z_i) + S_p(Jz_i, Jz_i)].$$

Ma:

$$S_p(\mu, \mu) = \sum_1^{n-1}{}_i \, [R_p(\mu, z_i, \mu, z_i) + R_p(\mu, Jz_i, \mu, Jz_i)];$$

$$S_p(z_i, z_i) = R_p(z_i, \mu, z_i, \mu) + \sum_1^{n-1}{}_j \, [R_p(z_i, z_j, z_i, z_j) + R_p(z_i, Jz_j, z_i, Jz_j)];$$

$$S_p(Jz_i, Jz_i) = R_p(Jz_i, \mu, Jz_i, \mu) + \sum_1^{n-1}{}_j \, [R_p(Jz_i, z_j, Jz_i, z_j) +$$

$$+ R_p(Jz_i, Jz_j, Jz_i, Jz_j)].$$

Poiché $L_p \equiv 0$, $h_p|_{H_pM \times H_pM}$ è anti-J-invariante e quindi la restrizione di R_p a H_pM è J-invariante. Di conseguenza:

$$r(p) = 2\{S_p(\mu, \mu) + \sum_1^{n-1}{}_{i,j} \, [R_p(z_i, z_j, z_i, z_j) + R_p(z_i, Jz_j, z_i, Jz_j)]\} =$$

$$= 2\{S_p(\mu, \mu) + \sum_1^{n-1}{}_{i,j} \, [h_p(z_i, z_i)\, h_p(z_j, z_j) - h_p(z_i, z_j)^2 + h_p(z_i, z_i) \cdot$$

$$\cdot h_p(Jz_j, Jz_j) - h_p(z_i, Jz_j)^2]\}.$$

Ma:

$$h_p(z_j, z_j) = -h_p(Jz_j, Jz_j), \qquad \forall j;$$

quindi

$$r(p)=2\{S_p(\mu,\mu)-\sum_{1}^{n-1}{}_{i,j}\,[h_p(z_i,z_j)^2+h_p(z_i,Jz_j)^2]\}.$$

Per l'ultima osservazione fatta, $S_p(\mu,\mu)\leq 0$. Perciò: $r(p)\leq 0$.

Inoltre $r(p)$ è zero se e solo se $(P_{OO}S)_p\equiv 0$ e $(P_{HH}h)_p\equiv 0$.

Tenendo conto dell'osservazione precedente, $r(p)=0$ equivale a $(P_{OH}h)_p\equiv 0$ e $(K_{\mathbb{C}})_p\equiv 0$. Per la proposizione 6 si ha:

$$r(p)=0 \text{ se e solo se } R_p\equiv 0.$$

q.e.d.

Corollario. *Sia p un punto di una ipersuperficie M di $\mathbb{C}^2$ tale che $r(p)>0$. Allora L_p è definita (positiva o negativa).*

§ 3. Ipersuperficie Levi-piatte a curvatura sezionale complessa nulla.

Questo paragrafo ed il successivo sono dedicati allo studio delle ipersuperficie Levi-piatte in cui la curvatura sezionale complessa o il tensore di Riemann sono nulli.

Proposizione 8. *Sia M una ipersuperficie di $\mathbb{C}^n$, Levi-piatta e tale che $K_{\mathbb{C}}\equiv 0$.*

Le varietà integrali massimali della distribuzione di Levi $p\to H_pM$ giacciono in iperpiani complessi affini di $\mathbb{C}^n$.

Dimostrazione. Sia C una varietà integrale massimale della distribuzione di Levi.

Per provare la proposizione, basterà far vedere che la seconda forma fondamentale di C, relativa all'immersione in $\mathbb{C}^n$, è identicamente nulla.

Sia dunque p un punto di C ed U un intorno di p in M, parametrizzato da $X(u_1,\dots,u_{2n-1})$, $(|u_1|,\dots,|u_{2n-1}|<\varepsilon)$ in modo che, posto

$$X_i=\frac{\partial X}{\partial u_i} \qquad i=1,\dots,2n-1,$$

si abbia:

$$H_qM=\langle X_1(q),\dots,X_{2n-2}(q)\rangle, \qquad \forall q\in U \text{ e } X(0,\dots,0)=p.$$

$C \cap U$ è aperto in C. Sia V la componente connessa di $C \cap U$ contenente p. V stessa è aperta in C. Dovrà inoltre aversi:

$$V = \{ X(u_1, \ldots, u_{2n-2}, 0) : |u_1|, \ldots, |u_{2n-2}| < \varepsilon \}.$$

Indichiamo con ν un vettore unitario normale ad M, definito su U, e poniamo: $\mu = J\nu$. In ogni punto q di U il CR-spazio tangente $H_q M$ è definito come il sottospazio di $T_q M$ ortogonale a $\mu(q)$.

Per il corollario 2 della proposizione 4:

$$h_q|_{H_q M \times H_q M} \equiv 0 \qquad \forall q \in M.$$

In particolare, se $q \in U$:

$$\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}(q), \nu(q) \rangle = 0 \qquad \text{per } i, j = 1, \ldots, 2n-2.$$

Sappiamo inoltre che JX_i appartiene in ogni punto di U al CR-spazio tangente, se $1 \leq i \leq 2n-2$. Quindi:

$$JX_i = \sum_{1}^{2n-2}{}_h \, a_i^h X_h \qquad \text{per } i = 1, \ldots, 2n-2$$

e perciò:

$$\frac{\partial}{\partial u_j}(JX_i) = J\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}\right) = \sum_{1}^{2n-2}{}_h \left(\frac{\partial a_i^h}{\partial u_j} X_h + a_i^h \frac{\partial^2 X}{\partial u_h \partial u_j}\right).$$

Se $i, j = 1, \ldots, 2n-2$ si ha dunque:

$$\langle J\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}\right), \nu \rangle = 0$$

e quindi:

$$\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}; \mu \rangle = 0 \qquad \text{per } i, j = 1, \ldots, 2n-2.$$

In conclusione, si può affermare che:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}(q) \in H_q M, \qquad \forall q \in M, \text{ se } i, j = 1, \ldots, 2n-2.$$

L'applicazione:

$$(u_1, \ldots, u_{2n-2}) \to Y(u_1, \ldots, u_{2n-2}) = X(u_1, \ldots, u_{2n-2}, 0),$$

$(|u_1|, \ldots, |u_{2n-2}| < \varepsilon)$ costituisce una parametrizzazione di V.

Poiché

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial u_i \partial u_j}(u_1, \ldots, u_{2n-2}) = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}(u_1, \ldots, u_{2n-2}; 0) \qquad i, j = 1, \ldots, 2n-2$$

si deduce che, in ogni punto di V, $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial u_i \partial u_j}$ appartiene al CR-spazio tangente, che è lo spazio tangente a C. Ciò prova che, in ogni punto di V, la seconda forma fondamentale di C, relativa alla immersione in $\mathbb{C}^n$, è identicamente nulla. La proposizione 8 è dunque dimostrata.

PROPOSIZIONE 9. *Ogni ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$, Levi-piatta, completa, a curvatura sezionale complessa identicamente nulla, è unione di iperpiani complessi affini paralleli.*

Dimostrazione. Sia $\{C_i\}_{i \in I}$ la famiglia di tutte le varietà integrali massimali della distribuzione di Levi di M.

Ovviamente $M = \bigcup_{i \in I} C_i$.

Per la proposizione 8, esiste un iperpiano complesso affine π_i di $\mathbb{C}^n$, che contiene C_i, $\forall i \in I$.

Quindi $M \subseteq \bigcup_{i \in I} \pi_i$.

Siano ora π un iperpiano complesso affine che contiene qualche C_i e W l'unione delle varietà integrali C_i che sono contenute in π.

W è un aperto di π.

W è anche una sottovarietà chiusa di M. Infatti se $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di punti di W che converge a $p \in M$ si ha $H_{p_n} M = \pi$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e quindi $H_p M = \pi$. Perciò la varietà integrale massimale della distribuzione di Levi, passante per p, è contenuta in π; quindi $p \in W$.

Di conseguenza, essendo M completa, anche W lo è. Poiché W è un aperto di π, dovrà aversi $W = \pi$ e quindi $\pi \subseteq M$.

Si può concludere, perciò, che $M = \bigcup_{i \in I} \pi_i$.

Supponiamo $\pi_i \cap \pi_j \neq \emptyset$, $i, j \in I$.

Sia $p \in \pi_i \cap \pi_j$. Poiché π_i, $\pi_j \subseteq M$ si ha necessariamente $\pi_i = \pi_j = H_p M$.

Ciò prova che due iperpiani distinti sono paralleli. La proposizione è dunque dimostrata.

Siano M, M' due ipersuperficie di $\mathbb{C}^n$. Una isometria $f\colon M \to M'$ la cui applicazione tangente è $\mathbb{C}$-lineare su ogni CR-spazio tangente, si dice una *CR-isometria.*

Consideriamo una ipersuperficie connessa M di $\mathbb{C}^n$, Levi-piatta, completa, a curvatura sezionale complessa identicamente nulla. Supponiamo che M sia unione di iperpiani paralleli ad un sottospazio complesso A di $\mathbb{C}^n$. Sia φ una isometria olomorfa che trasforma A in

$$\mathbb{C}^{n-1} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \colon z_n = 0\}.$$

Si ha dunque:

$$\varphi(M) = \mathbb{C}^{n-1} \times \Gamma = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \colon z_n \in \Gamma\}$$

essendo Γ una curva connessa completa del piano complesso.

Γ è isometrica a $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z = 0\}$ oppure al cerchio

$$S^1(r) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = r\} \qquad (r > 0).$$

Sia $F\colon \Gamma \to V$ (dove $V = R$ oppure $V = S^1(r)$) una qualsiasi isometria. Definiamo

$$\Phi\colon \varphi(M) \to \mathbb{C}^{n-1} \times V = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \colon z_n \in V\}$$

ponendo

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_{n-1}, F(z_n)).$$

Φ è una CR-isometria.

Vale, pertanto, la seguente

PROPOSIZIONE 10. *Ogni ipersuperficie connessa di $\mathbb{C}^n$, Levi-piatta, completa, a curvatura sezionale complessa identicamente nulla, è CR-isometrica a $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ oppure a $\mathbb{C}^{n-1} \times S^1(r)$ $(r > 0)$.*

Osservazione. Nell'enunciato precedente la condizione globale di completezza non può essere tolta (cfr. es. 2, § 2).

§ 4. Ipersuperficie Levi-piatte con tensore di Riemann nullo.

Sia M una ipersuperficie di $\mathbb{C}^n$, Levi-piatta ed avente tensore di Riemann R identicamente nullo.

Sia γ: $[a, b] \to M$ una curva differenziabile e sia τ_t: $T_{\gamma(a)} M \to T_{\gamma(t)} M$ il trasporto parallelo lungo γ.

LEMMA. $\tau_t (H_{\gamma(a)} M) = H_{\gamma(t)} M$ *e* $(J \circ \tau_t) X = (\tau_t \circ J) X$, $\forall t \in [a, b]$, $\forall X \in \in H_{\gamma(a)} M$.

Dimostrazione. Si può supporre, senza perdere in generalità, che in un intorno di $\gamma([a, b])$ sia definito un campo vettoriale normale unitario ν. Allora il campo unitario $\mu = J \nu$ è ortogonale in ogni punto di tale intorno al CR-spazio tangente.

Sia U un qualsiasi campo vettoriale su M e sia X un campo vettoriale tale che $X(q) \in H_q M$, $\forall q \in M$.

Per il corollario 2 della proposizione 4

$$h(X, X) \equiv 0.$$

Quindi:

$$0 = R(X, U, X, U) = -h(X, U)^2$$

e perciò

$$h(X, U) \equiv 0.$$

In modo analogo:

$$h(J X, U) \equiv 0.$$

Indicando con ∇ e ∇' le connessioni riemanniane di M e $\mathbb{C}^n$, rispettivamente, si ha quindi:

$$(\nabla'_U X)|_M = \nabla_U X;$$

$$(\nabla'_U J X)|_M = \nabla_U J X.$$

Poiché $\mathbb{C}^n$, con la metrica euclidea, è una varietà kähleriana

$$\nabla'_U JX = J\nabla'_U X$$

e di conseguenza

$$(*) \qquad J\nabla_U X = \nabla_U JX.$$

In particolare $(\nabla_U X)(q) \in H_q M$, $\forall q \in M$.

Ma allora:

$$g(X, \nabla_U \mu) = g(X, \nabla_U \mu) + g(\nabla_U X, \mu) = U(g(X, \mu)) = 0.$$

Inoltre:

$$g(\mu, \nabla_U \mu) = \tfrac{1}{2} U(g(\mu, \mu)) = 0.$$

Segue, necessariamente, che:

$\nabla_U \mu \equiv 0$, per ogni campo vettoriale U su M.
Ciò prova che

$$\tau_t(\mu(\gamma(a))) = \mu(\gamma(t)), \qquad \forall t \in [a, b].$$

Poiché τ_t: $T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(t)}M$ è una isometria, si ha che

$$\tau_t(H_{\gamma(a)}M) = H_{\gamma(t)}M, \qquad \forall t \in [a, b].$$

Indichiamo con $\nabla_{d/dt}$ la derivazione covariante lungo γ.
Sia $X \in H_{\gamma(a)}M$. Per la (*):

$$\nabla_{d/dt}(J\tau_t X) = J(\nabla_{d/dt}\tau_t X) = 0$$

e quindi

$$J\tau_t X = \tau_t JX, \qquad \forall X \in H_{\gamma(a)}M, \quad \forall t \in [a, b].$$

q.e.d.

Sia ora

$$\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Im} z_n = 0\};$$

$$0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

Una ipersuperficie M di $\mathbb{C}^n$ si dice *localmente CR-isometrica* a $\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}$, se, per ogni punto p di M, esistono due intorni U e V, di p ed O in M e $\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}$, rispettivamente, ed una CR-isometria $f\colon U\to V$, tale che $f(p)=0$.

Ovviamente ogni ipersuperficie localmente CR-isometrica a $\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}$, è Levi-piatta ed a curvatura sezionale costante uguale a zero.

Viceversa:

PROPOSIZIONE 11. *Sia M una ipersuperficie di $\mathbb{C}^n$, Levi-piatta, a curvatura sezionale costante uguale a zero. Allora M è localmente CR-isometrica a* $\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Siano p un punto di M e $\{z_1,\dots,z_{n-1}, Jz_1,\dots,Jz_{n-1}\}$ una base reale ortonormale di H_pM. Sia poi μ un vettore unitario di O_pM.

$\{\frac{\partial}{\partial x^1}; \frac{\partial}{\partial y^1},\dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}; \frac{\partial}{\partial y^{n-1}}; \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ costituisce una base ortonormale di $T_0(\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R})$.

Poniamo:

$$F(z_i)=\frac{\partial}{\partial x^i}; \qquad F(Jz_i)=\frac{\partial}{\partial y^i}; \qquad i=1,\dots,n-1;$$

$$F(\mu)=\frac{\partial}{\partial x^n}$$

ed estendiamo $F\colon T_pM\to T_0(\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R})$ per $\mathbb{R}$-linearità.

F è una isometria, la cui restrizione a H_pM è $\mathbb{C}$-lineare. Esiste allora una isometria f di un intorno connesso U di p su un intorno V di O tale che: $f(p)=0$, $f_{p*}=F$. ([3], vol. I, pag. 261).

Proviamo che f è una CR-isometria.

Sia $q\in U$ e sia $\gamma\colon[a,b]\to U$ una curva differenziabile tale che $\gamma(a)=p$, $\gamma(b)=q$.

Sia poi $\tau_t\colon T_pM\to T_{\gamma(t)}M$ il trasporto parallelo lungo γ.

Sia $Y\in H_qM$ e sia $X\in H_pM$ tale che $\tau_bX=Y$.

Per il Lemma precedente:

$$f_{q*}JY=f_{q*}J\tau_bX=f_{q*}\tau_bJX.$$

Indichiamo ora con $\tilde{\tau}_t$: $T_0(\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}) \to T_{f(\gamma(t))}(\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R})$ il trasporto parallelo lungo $f\circ\gamma$.

Poiché f è una isometria, f_* commuta col trasporto parallelo. Quindi:

$$f_{q*}\tau_b J X=\tilde{\tilde{\tau}}_b f_{p*} J X=\tilde{\tilde{\tau}}_b F J X=\tilde{\tau}_b J F X=\tilde{\tilde{\tau}}_b J f_{p*} X.$$

Ma, ancora per il lemma precedente

$$\tilde{\tau}_b J f_{p*} X=J\tilde{\tau}_b f_{p*} X=J f_{q*}\tau_b X=J f_{q*} Y.$$

Quindi:

$$f_{q*} J Y=J f_{q*} Y, \qquad \forall Y\in H_q M, \quad \forall q\in U.$$

f: $U\to V$ è dunque una CR-isometria. q.e.d.

PROPOSIZIONE 12. *Sia M una ipersuperficie connessa di $\mathbb{C}^n$.*

M è Levi-piatta e a curvatura sezionale costante uguale a zero se e solo se gli iperpiani complessi $H_p M$ ($p\in M$) sono tutti paralleli.

Dimostrazione. Supponiamo che gli iperpiani complessi $H_p M$ siano tutti paralleli all'iperpiano

$$\mathbb{C}^{n-1}=\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n\colon z_n=0\}.$$

La distribuzione di Levi $p\to H_p M$ è ovviamente involutiva.

Dunque M è Levi-piatta. Inoltre, per ogni punto p di M, esiste una parametrizzazione $X(u_1,\dots,u_{2n-1})$ di un intorno U di p tale che, posto $X_i=\dfrac{\partial X}{\partial u_i}$; si abbia:

$$\langle X_1(q),\dots,X_{2n-2}(q)\rangle=\mathbb{C}^{n-1}, \qquad \forall q\in U.$$

Quindi:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_i\,\partial u_j}(q)\in\mathbb{C}^{n-1},\ \text{se}\ 1\le i\le 2n-2,\ 1\le j\le 2n-1,\ \forall q\in U.$$

Allora

$$\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}; \nu \rangle = 0, \text{ su } U, \text{ se } 1 \leq i \leq 2n-2, \ 1 \leq j \leq 2n-1$$

(essendo ν un vettore unitario normale a M).

Di conseguenza $t(q) \leq 1$, $\forall q \in U$ e quindi $R_q \equiv 0$, $\forall q \in U$.

Perciò M è a curvatura sezionale costante uguale a zero.

Viceversa, supponiamo che M sia Levi-piatta, a curvatura sezionale costante uguale a zero. Poiché si suppone che M sia connessa, basta provare che i CR-spazi tangenti sono paralleli in un intorno di un quasiasi punto p di M.

Per la proposizione 11, esiste una parametrizzazione $X(u_1, \dots, u_{2n-1})$ di un intorno connesso U di p, tale che:

$$\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}; \frac{\partial X}{\partial u_j} \rangle = \delta_{ij} = g_{ij}$$

e

$$\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial u_{2n-2}} \rangle = H_q M,$$

in ogni punto q di U.

Indichiamo con ν un campo vettoriale normale unitario definito su U.

Per il corollario 2 della proposizione 4 e poiché, in ogni punto di M, il numero tipo è minore o uguale a uno, necessariamente si ha:

$$L_{ij} = \langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}; \nu \rangle \equiv 0 \text{ su } U, \text{ se } 1 \leq i \leq 2n-2, \ 1 \leq j \leq 2n-1.$$

Quindi: (se $1 \leq i \leq 2n-2$, $1 \leq j \leq 2n-1$)

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{1}^{2n-1}{}_h \Gamma_{ij}^h \frac{\partial X}{\partial u_h} + L_{ij} \nu = \sum_{1}^{2n-1}{}_h \Gamma_{ij}^h \frac{\partial X}{\partial u_h}:$$

Poiché la metrica su U è piatta, i simboli di Christoffel sono tutti nulli e perciò:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \equiv 0 \qquad 1 \leq i \leq 2n-2, \ 1 \leq j \leq 2n-1.$$

Allora: $\dfrac{\partial X}{\partial u_i}=a_i$ costanti, se $1\leq i\leq 2n-2$,

e quindi

$$X(u_1,\dots,u_{2n-1})=\sum_1^{2n-2}{}_i\, u_i a_i+f(u_{2n-1}).$$

Ciò prova che i CR-spazi tangenti sono paralleli su U. q.e.d.

Consideriamo dunque una ipersuperficie connessa M di $\mathbb{C}^n$, Levi-piatta, a curvatura sezionale costante uguale a zero. Per le proposizioni 8 e 12, M è unione di pezzi di iperpiani complessi affini paralleli.

Si può supporre che tali iperpiani siano paralleli a

$$\mathbb{C}^{n-1}=\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n\colon z_n=0\}.$$

Quindi

$$M=\bigcup_{c\in\Gamma} A_c.$$

dove Γ è una curva connessa del piano complesso ed A_c è un aperto dell'iperpiano π_c di equazione $z_n=c$, $\forall c\in\Gamma$.

Perciò M è un aperto della ipersuperficie $M'=\bigcup_{c\in\Gamma}\pi_c=\mathbb{C}^{n-1}\times\Gamma$.

Se Γ è isometrica a $S^1(r)$ per qualche $r>0$, M' è CR-isometrica a $\mathbb{C}^{n-1}\times S^1(r)$ e quindi M lo è ad un aperto di $\mathbb{C}^{n-1}\times S^1(r)$.

In caso contrario esiste una immersione isometrica $\psi\colon\Gamma\to\mathbb{R}$.

Poniamo, per $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^{n-1}\times\Gamma=M'$,

$$F(z_1,\dots,z_{n-1},z_n)=(z_1,\dots,z_{n-1},\psi(z_n)).$$

$F_{|M}$ è una CR-isometria che trasforma M in un aperto di $\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}$.

Possiamo pertanto concludere con la seguente

PROPOSIZIONE 13. *Ogni ipersuperficie connessa di* $\mathbb{C}^n$, *Levi-piatta, a curvatura sezionale costante uguale a zero è CR-isometrica ad un aperto di* $\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}$ *o di* $\mathbb{C}^{n-1}\times S^1$ $(r>0)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Cattaneo C., *Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale,* Annali di Matematica, pura ed applicata. Serie IV. Tomo XLVIII, (1959), 361-386.

[2] Cattaneo Gasparini I., *Proiezione dei tensori di curvatura di una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale,* Rend. di Mat., **22** (1963), 127-146.

[3] Kobayashi S., Nomizu K., *Foundations of differential Geometry,* 2 volumi. Interscience tracts in pure and applied Mathematics, n. 15.

[4] Wells R. O., *Function theory on differentiable submanifolds,* Contributions to Analysis. A Collection of Papers Dedicated to Lipman Bers (1974). Academic Press., 407-441.

Pervenuto il 9 gennaio 1984

Istituto Matematico « U. Dini »
Università di Firenze
Viale Morgagni, 67/A
FIRENZE