UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

FLORE
Repository istituzionale dell'Università degli Studi di Firenze

Proporzioni e algebra nella trattatistica matematica del Basso Medioevo e del Rinascimento

Questa è la Versione finale referata (Post print/Accepted manuscript) della seguente pubblicazione:

Original Citation:

Proporzioni e algebra nella trattatistica matematica
del Basso Medioevo e del Rinascimento / Ulivi Elisabetta; Zoccola Martina. - In: BOLLETTINO DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE. - ISSN 0392-4432. - STAMPA. - XXXIX:(2019), pp. 9-50. [10.19272/201909201001]

Availability:
The webpage https://hdl.handle.net/2158/1160128 of the repository was last updated on 2021-03-17T15:55:45Z

Published version:
DOI: 10.19272/201909201001

Terms of use:
Open Access
La pubblicazione è resa disponibile sotto le norme e i termini della licenza di deposito, secondo quanto stabilito dalla Policy per l'accesso aperto dell'Università degli Studi di Firenze (https://www.sba.unifi.it/upload/policy-oa-2016-1.pdf)

Publisher copyright claim:

La data sopra indicata si riferisce all'ultimo aggiornamento della scheda del Repository FloRe - The above-mentioned date refers to the last update of the record in the Institutional Repository FloRe

(Article begins on next page)

04 May 2026

PROPORZIONI E ALGEBRA NELLA TRATTATISTICA MATEMATICA DEL BASSO MEDIOEVO E DEL RINASCIMENTO

ELISABETTA ULIVI, MARTINA ZOCCOLA

ABSTRACT

The purpose of this work is to highlight the connection between algebra and the proportions in various issues taken from about thirty manuscripts and printed works by various authors, in a time span ranging from the thirteenth century to the early seventeenth century. The examined works are either placed in the context of the abacus treatises or more specifically meaningful and fundamental for the development of algebra. Within a wide range of cases, the problems were selected by considering their historical relevance, interest and originality, both in their contents and terms, in order to obtain an exemplifying survey that does not want to be exhaustive, but provides a general overview, giving suggestions for further study.

INTRODUZIONE

La scena matematica italiana dei secoli XIII-XVI è in gran parte dominata dalla cosiddetta matematica dell'abaco. Questa prende le mosse essenzialmente dalle opere di Leonardo Pisano, o Fibonacci, in particolare il *Liber abaci* (1202, 1228) e la *Practica geometriae* (1220/21), e si sviluppa nella corrispondente trattatistica dell'abaco, un complesso di testi che, quasi sempre nel volgare delle varie regioni e solo eccezionalmente in latino, presentano per lo più una scelta ed una sintesi rispetto alle monumentali e complesse opere del Pisano, pur proponendo talvolta anche ampliamenti ed elementi di originalità. Molto vari per aspetto, contenuto e dimensioni, quei testi ci sono pervenuti in circa trecento codici e in varie opere a stampa. Gli autori erano per lo più insegnanti, quasi sempre maestri d'abaco. Gli argomenti svolti - anche se non sempre sono tutti presenti e comunque sviluppati a diversi livelli - riguardano l'introduzione del sistema di numerazione posizionale, le operazioni con interi e frazioni, la *regola del tre* e le regole di *falsa posizione*, aritmetica mercantile, geometria pratica, algebra, teoria dei numeri e teoria delle proporzioni; i problemi possono essere presentati sotto forma di matematica ricreativa.

Nelle opere contenenti la matematica dell'abaco le proporzioni sono sempre un argomento cardine, trattate sia da un punto di vista teorico sia e soprattutto applicativo, come nei problemi sulla *falsa posizione* ed in quelli di aritmetica commerciale. Introdotta in Occidente da Fibonacci che le dedica buona parte del XV capitolo del *Liber abaci*, l'algebra è presente in circa un terzo dei codici dei secoli XIV-XV e in opere a stampa dei secoli XV-XVI; si conoscono anche testi interamente dedicati all'algebra. La trattazione riguarda le equazioni di primo e secondo grado o di grado superiore ad esse riconducibili, e le relative applicazioni ai problemi.

Negli anni Quaranta e Settanta del Cinquecento proporzioni ed algebra trovano spazio in testi italiani non collocabili nell'ambito della trattatistica dell'abaco, ma di rilievo per la storia e gli sviluppi dell'algebra, in particolare per la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado.

Fino al penultimo decennio del XVI secolo l'algebra è di carattere esclusivamente numerico.

Nell'ultimo decennio del Cinquecento, grazie a Viète, assistiamo ad una svolta fondamentale con la nascita dell'algebra letterale. Nelle opere di Viète le proporzioni tra grandezze, soprattutto continue, in relazione con la teoria delle equazioni algebriche, hanno un ruolo di singolare e primaria importanza.

Scopo di questo lavoro è mettere in evidenza la connessione tra i due argomenti, in diverse questioni riprese da opere manoscritte e a stampa di vari autori,[1] in un arco di tempo che va dal XIII secolo ai primi anni del XVII. Nell'ambito di un'ampia casistica, la scelta dei problemi è avvenuta considerandone la rilevanza storica, l'interesse e l'originalità, sia nei contenuti che negli enunciati, con l'intento di ottenere una panoramica esemplificativa che non ha la pretesa di essere esaustiva, ma che fornisce un inquadramento generale, dando spunti per eventuali approfondimenti.
I testi presi in esame sono i seguenti:

OPERE ITALIANE COLLOCABILI NELL'AMBITO DELLA TRADIZIONE ABACISTICA

Liber abaci (1202, 1228) di Leonardo Pisano, o Fibonacci[2]

Libro d'abaco di Scuola lucchese: BSL, codice 1754 (ca 1330)[3]

Trattato d'aritmetica attribuito a Paolo dell'abbaco: BNF, Magl. XI. 86 (ca 1440)[4]

Trattato dell'alcibra amuchabile: BRF, Ricc. 2263/II (ca 1365)[5]

Trattato di fioretti (ca 1373) di Antonio Mazzinghi nella trascelta di Benedetto da Firenze, contenuta nel *Trattato di praticha d'arismetrica*: BCS, L.IV.21 (1463)[6]

Ragioni d'algebra di Maestro Gilio: BCS, L.IX.28 (1384)[7]

Tractato sopra l'arte della arismetricha: BNF, Fond. prin. II.V.152 (ca 1395)[8]

Libro delle ragioni d'abacho: BNF, Conv. soppr. G.7.1137 (ca 1395)

Tractatus algorismi di Iacopo da Firenze: BAV, Vat. lat. 4826 (ca 1450)[9]

Alchune ragioni di Maestro Luca di Matteo e le *Miracholose ragioni* di Maestro Giovanni di Bartolo[10] nelle trascelte dell'anonimo discepolo di Domenico d'Agostino vaiaio, contenute nel *Trattato di praticha d'arismetricha*: BNF, Palat. 573 (ca 1460)

Trattato d'abaco di Piero della Francesca: BMLF, Ash. 359* (ca 1470/80)[11]

Elisabetta Ulivi, Dipartimento di Matematica e Informatica U. Dini, Viale Morgagni 67/a, 50134 Firenze: elisabetta.ulivi@unifi.it. Martina Zoccola, Via Ostia, 71, 59100 Prato: martinazoccola@gmail.com.

[1] Per notizie sui singoli autori, oltre che al *Dizionario biografico degli italiani* e al *Dictionary of scientific biography,* rimandiamo a: GAVAGNA 2010, RITTER 1895, TOSCANO 2009, ULIVI 1994, ULIVI 1996, ULIVI 2002a, ULIVI 2002b, ULIVI 2004a, ULIVI 2004b, ULIVI 2011, ULIVI 2012, ULIVI 2013, ULIVI 2015a, ULIVI 2015b, ULIVI 2017, ULIVI 2018.
[2] Cfr. LEONARDO PISANO 1857.
[3] Cfr. SCUOLA LUCCHESE 1973.
[4] Cfr. PAOLO DELL'ABBACO 1964.
[5] Cfr. ANONIMO 1994.
[6] Cfr. MAZZINGHI 1967.
[7] Cfr. MAESTRO GILIO 1983.
[8] Per la parte sull'algebra cfr. ANONIMO 1988.
[9] Cfr. HØYRUP 2007.
[10] Cfr. ARRIGHI 1967.
[11] Cfr. PIERO DELLA FRANCESCA 1970.

Tractato d’abbacho attribuito a Pier Maria Calandri (ca 1480)[12]

Aritmetica di Filippo Maria Calandri: BRF, Ricc. 2669 (ca 1485)[13]

Tractatu di regula di quantitati: BMLF, Ash. 956 (ca 1485)

Vilume del’argibra attribuito a Raffaello Canacci: BRF, Ricc. 2265 (ca 1490)[14]

Una raccolta di ragioni di Filippo Calandri: BCS, L.VI.45 (ca 1495)[15]

Aritmetica di Giovanni Banchelli: BNF, Magl. XI.115 (ca 1495)

Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos di Luca Pacioli: BAV Vat. lat. 3129 (1477-1480)[16]

Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita (1494) di Luca Pacioli: Parte prima

Summa de arithmetica (1521) di Francesco Galigai

Practica arithmetice et mensurandi singularis (1539) di Girolamo Cardano[17]

General trattato di numeri et misure di Niccolò Tartaglia: Prima parte e Seconda parte (1556), Sesta parte (1560)

Opere italiane fondamentali per la storia e gli sviluppi dell’algebra

Artis magnae sive de regulis algebraicis, liber unus (1545) di Girolamo Cardano[18]

Quesiti et inventioni diverse (1546) di Niccolò Tartaglia

L’ Algebra (1572) di Rafael Bombelli[19]

Opere di François Viète[20]

In artem analyticem Isagoge (1591)

Zeteticorum libri V (1593)

---

[12] Cfr. Calandri 1974. Il manoscritto è una delle diciotto copie del *Trattato d’abaco* di Benedetto da Firenze: cfr. Van Egmond 1980, pp. 96, 356.
[13] Cfr. Calandri 1969.
[14] Cfr. Van Egmond 1980, pp. 152-153.
[15] Cfr. Calandri 1982.
[16] Cfr. Pacioli 2007.
[17] Cfr. Cardano 1663.
[18] *Ibidem*.
[19] Cfr. Bombelli 1966.
[20] Cfr. Viète 1646. Ricordiamo che Viète morì nel 1603, dunque la sua produzione matematica, in parte pubblicata postuma, si colloca in epoca rinascimentale.

De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo (1615)

Effectionum geometricarum Canonica recensio (1615)

Ad logisticem speciosam Notae priores (1631)

I. Proporzioni e algebra nella trattatistica italiana dei secoli XIII-XVI

Questa prima parte è suddivisa in tre capitoli.
Nel primo capitolo si analizzano le proporzioni ‘in alternativa’ all'algebra, mostrando come, nei testi di tradizione abacistica, siano risolti con l’uso delle proporzioni problemi che si risolverebbero algebricamente mediante un'equazione o un sistema di equazioni di primo grado. Il procedimento segue le cosiddette *regole di falsa posizione*: si distingue la *semplice falsa posizione* e la *doppia falsa posizione.*
Il secondo capitolo è dedicato ad una serie di problemi algebrici il cui denominatore comune è la presenza, in modo diretto o indiretto, delle proporzioni, per lo più continue. Quasi sempre si tratta di determinare tre o quatto numeri in proporzione, che devono soddisfare ulteriori condizioni. La soluzione si ottiene mediante l’impiego di basilari e ben note proprietà delle proporzioni, già contenute nel VII libro degli *Elementi* di Euclide, nonché di tecniche di manipolazione algebrica che conducono alla risoluzione di equazioni: in questo senso possiamo parlare di proporzioni ‘assieme all'algebra’. In altri casi i passaggi sono mediati ed agevolati dall'uso di altre relazioni valide per quantità proporzionali, o comunque dimostrate utilizzando le proporzioni: in questo senso parliamo di proporzioni anche ‘di supporto all'algebra’.
Il terzo capitolo riporta una interessante osservazione di Cardano che mette in luce la possibilità di associare proporzioni continue a particolari equazioni cubiche. L’osservazione di Cardano introduce alla seconda parte che riguarda l’opera di Viète.

I.1. Le proporzioni in alternativa all’algebra: le regole di falsa posizione

Le *regole di falsa posizione*[21] derivano dall’applicazione della *regola del tre*, corrispondente alla proprietà fondamentale delle proporzioni. Il metodo ha origini antichissime; si trovano testimonianze del suo impiego già nelle civiltà arcaiche, babilonese ed egiziana, e successivamente in opere di matematici Indiani ed Arabi. L'approdo in Occidente si deve a Leonardo Pisano che, al ritorno dai suoi viaggi nel bacino del Mediterraneo, volle trasmettere con le sue opere, soprattutto il *Liber abaci*, le conoscenze apprese dalla tradizione araba. Alla *semplice* e *doppia falsa posizione* Fibonacci dedica rispettivamente il terzo paragrafo del capitolo XII ed il capitolo XIII del *Liber abaci*. Le due regole troveranno ampio spazio nella trattatistica dell'abaco per tutto il Medioevo ed il Rinascimento.
In entrambi i casi diamo prima una descrizione in un’ottica moderna del metodo, che gli autori si limitavano spesso ad applicare, o al più a presentare in un linguaggio retorico. Passeremo poi ad illustrare alcuni esempi.

I.1.1. *La semplice falsa posizione*

[21] Sull’argomento si può consultare Simi 2003; Zoccola 2016/2017, pp. 3-41.

Viene impiegata per lo più in problemi che si potrebbero risolvere mediante equazioni del tipo $ax = b$. Il metodo è il seguente:
Si pone un *valore falso* arbitrario $x = x_1$ da cui, se $ax_1 \neq b$, otteniamo $ax_1 = b_1$.
Nel caso siano presenti frazioni, come talvolta rilevavano gli stessi abacisti, una oculata scelta del *valore falso* permette di valutare semplicemente l'espressione $ax_1 = b_1$.
A questo punto si ricava la soluzione dalla proporzione $x : x_1 = b : b_1$ ossia $x = \frac{x_1 b}{b_1}$.[22]

1) *Un problema della* Scuola lucchese

L'enunciato della regola che si legge, ad esempio, nel *Libro d'abaco* di Scuola lucchese è il seguente:

> *E dicho così, che quando fai ragione alchuna per la prima positione, che senpre debi multiplicare quello in che t'aponi contra a quello che domandi, e quella somma che fa partire in quello che ti viene; e quello che ne verà sarrà l'effetto di quello che domandi.*[23]

Subito dopo, nell'opera sono risolti vari problemi con il metodo descritto. Ne riportiamo uno che riteniamo piuttosto interessante in quanto costituito da due parti. La prima è un'applicazione astratta della regola, mentre la seconda non è altro che una trasposizione in termini pratici della precedente.

> *Truovami un numero che, postovi su li* 3/8*, faccia* 77*. Desi chosì fare: pongniamo che quel numero fosse* 8*, li* 3/8 *di* 8 *sono* 3*, ponendo* 3 *sopra* 8 *fa* 11*, e noi dimandiamo che faccia* 77*. Adunque diremo chosì: per* 8 *ch'io mi puosi mi viene* 11*, e io vorei* 77*. Dobiamo multiplicare* 8 *via* 77 *fa* 616*, e questo dobiamo partire in* 11 *vienne* 56*: adunque diremo che quel numero fosse* 56 *… .*
> *Asempro a la sopradetta ragione; e dicho chosì: uno à venduto una sua merchatantia* 77 *libre, e truovasi guadangniato* 7 *soldi* 6 *denari per libra, adomando quanto gli chostò. Desi chosì fare. Vedi* 7 *soldi* 6 *denari che parte è di libra, sono* 3/8[24]*; ora di' chosì: truovami un numero che, postovi su li* 3/8*, faccia* 77*. E chome vedi t'ò mostrato qui di sopra, quel numero fu* 56*; adunque diremo che quella merchatantia chostasse* 56 *libre.*[25]

Se indichiamo con x il numero cercato l'equazione risolvente è
$$x + \frac{3}{8}x = 77, \text{cioè } \frac{11}{8}x = 77 \text{ dove } b = 77.$$
Assegnando come *valore falso* $x_1 = 8$ l'autore ottiene $x_1 + \frac{3}{8}x_1 = 8 + \frac{3}{8}\,8 = 11 = b_1$.
Dunque $x = \frac{x_1 b}{b_1} = \frac{8 \cdot 77}{11} = 56$.

2) *Due problemi peculiari del* Liber abaci

[22] Come vedremo in seguito (cfr. p. 12) la tecnica della *falsa posizione* poteva intervenire anche nella risoluzione di più complesse questioni.
[23] SCUOLA LUCCHESE 1973, p. 60.
[24] Si ricorda che vale la seguente equivalenza: 1 lira = 20 soldi, un soldo = 12 denari.
[25] SCUOLA LUCCHESE 1973, p. 61.

Tipico e ricorrente è il cosiddetto 'problema dell'albero', già proposto da Fibonacci,[26] con le sue varianti in cui l'albero è sostituito ad esempio da una lancia conficcata nel terreno, da un bastone[27] o da una colonna immersa nell'acqua. In quest'ultimo caso riportiamo il problema come si presenta nel manoscritto anonimo *Tractatu di regula di quantitati*, raro attestato dell'esistenza di studi sulla matematica dell'abaco nell'Italia meridionale durante la seconda metà del Quattrocento:

> *Una culonna sta in una fonti et teni lu* 1/3 *e lu* 1/4 *intru l'aqua et* 9 *parmi di fora dal'aqua. Adimandi quattu esti longa la dicta culonna. Farrai cussi: trova* 1 *numero in che si trova* 1/3 *e* 1/4 *lu quali numeru esti* 12, *po' pigla lu* 1/3 *e* 1/4 *di* 12 *che esti* 7, *leva di* 12 *resta* 5, *et nui vulemo* 9.[28] *Dirrai per la regula di* 3, *si* 5 *veni di* 12 *di quantu virrani* 9? *Multipla* 9 *via* 12 *fa* 108, *parti* 108 *per* 5, *rimani* 21 3/5[29] *et* 21 3/5 *esti longa la culonna.*[30]

Altra tipologia di questione contenuta nel *Liber abaci*[31] è la seguente, che proponiamo nella formulazione data da Niccolò Tartaglia nel *General trattato*:

> *Un altro ha danari e dice che se lui spendesse il* 1/3 *il* 1/4 *de detti danari e che multiplicasse poi il restante in se medesimi, che tal produtto saria eguale alli primi suoi danari. Se adimanda quanti danari haveva. Questo quesito non vol dir altro salvo che trovame un numero, che trattone il* 1/3 *il* 1/4, *il residuo multiplicato in se medesimo faccia il detto primo numero.*[32]

Indicato con x il numero cercato, deve essere
$$\left(x-\tfrac{1}{3}x-\tfrac{1}{4}x\right)^2 = x.$$
Ponendo $x_1 = 12$ Tartaglia trova $\left(x_1-\tfrac{1}{3}x_1-\tfrac{1}{4}x_1\right)^2 = \left(12-\tfrac{12}{3}-\tfrac{12}{4}\right)^2 = 5^2 = 25 = b_1$
da cui $12 : x = 25 : 12$, e quindi la soluzione $x = \frac{144}{25}$.

3) *Il 'problema delle vele'*

Rappresenta una tra più classiche questioni risolte con la *semplice falsa posizione*. Nel *Tractato d'abbacho* di Pier Maria Calandri si trova in questi termini:

> *Una nave à tre vele in tal luogho che alzando la prima vela farebbe un viaggo in* 10 *dí et alzando la seconda farebbe il viaggio in* 12 *dí et alzando la terza farebbe il viaggio in* 15 *dí. Adimandasi alzandole tutte e tre a un tratto in quanti dì farebbe quello viaggo.*[33]

---

[26] LEONARDO PISANO 1857, pp. 173-175.
[27] Cfr. ad esempio PAOLO DELL'ABBACO 1964, pp. 41, 74; HØYRUP 2007, p. 264; BNF, Magl. XI.115, cc. 41v-42r.
[28] Nel testo è 5.
[29] Ricordiamo che $21\frac{3}{5}$ significa $21+\frac{3}{5}$. Secondo l'uso del tempo le frazioni venivano scritte evidenziando la parte intera seguita o preceduta da quella razionale. Nel nostro lavoro seguiremo la notazione moderna, salvo quando l'espressione compare nell'enunciato del problema.
[30] BMLF, Ash. 956, c. 168r.
[31] LEONARDO PISANO 1857, pp. 175-177.
[32] TARTAGLIA 1556: Prima parte, c. 240v. Per un problema simile cfr. SCUOLA LUCCHESE 1973, p. 62.
[33] CALANDRI 1974, pp. 90-91.

Indicando con t i giorni necessari alla nave per compiere il percorso con tutte le vele issate, con x, y e z il numero di viaggi che si fanno rispettivamente con la prima, la seconda e la terza vela in t giorni, il problema si può schematizzare nel sistema

$$\begin{cases} x = \frac{1}{10}t \\ y = \frac{1}{12}t \\ z = \frac{1}{15}t \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right) t = 1 = b$$

Posto ora $t_1 = 60$, abbiamo $\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right) t_1 = 6 + 5 + 4 = 15 = b_1$

La soluzione si ottiene calcolando $t = \dfrac{t_1 b}{b_1} = \dfrac{60 \cdot 1}{15} = 4$.

Come è ovvio, il problema può essere generalizzato ad un numero qualunque di vele. Inoltre se ne conoscono molte varianti, ad esempio con botti o vasche che si svuotano, operai che fanno un lavoro, mulini che macinano grano, uomini che scappano di prigione, animali che mangiano una pecora, e altri ancora.[34]

I.1.2 *La doppia falsa posizione*

Viene impiegata in problemi che sarebbero risolubili mediante equazioni del tipo $ax + b = c$. In questo caso si scelgono due valori *falsi* x_1 e x_2 e si ricavano $a\,x_1 + b = c_1$ e $a\,x_2 + b = c_2$, da cui gli «errori» $d_1 = |c - c_1|$ e $d_2 = |c - c_2|$.
La regola per il calcolo di x segue poi una casistica basata sulle relazioni tra i due valori c_1 e c_2 ed il valore iniziale c; per questo era detta «dell' aumento e della diminuzione».
Con le nostre notazioni:

Se c_1 e $c_2 > c$ oppure c_1 e $c_2 < c$ allora

$$x = \frac{|x_1 d_2 - x_2 d_1|}{|d_2 - d_1|}$$

Se $c_1 < c$ e $c_2 > c$ o viceversa

$$x = \frac{x_1 d_2 + x_2 d_1}{d_2 + d_1}$$

Tali formule venivano di fatto descritte verbalmente e sintetizzate in schemi che gli autori inserivano a corredo dei vari problemi.

1) *Il 'problema dei colombi'*

---

[34] Per il 'problema delle vele' e altri simili cfr. ad esempio LEONARDO PISANO 1857, pp. 182-183; SCUOLA LUCCHESE 1973, p. 134; BNF, Fond. prin. II.V.152, cc. 47v-48r; BNF, Conv. soppr. G.7.1137, c. 76r; HØYRUP 2007, p. 268; BMLF, Ash. 956, cc. 172r-172v, 176r-179r; CALANDRI 1969, pp. 182-183, 186, 191, 193, 195, 197; CALANDRI 1974, p. 91; BNF, Magl. XI.115, cc. 40v-41r, 42r-42v; PACIOLI 2007, pp. 266-268; PACIOLI 1494, c. 99v; TARTAGLIA 1556: Prima parte, c. 261r.

Come primo esempio abbiamo scelto una «ragione» del *Trattato d'aritmetica* attribuito a Paolo dell'abaco: nel testo, oltre all'enunciato del problema e alla descrizione della soluzione, è presente una spiegazione relativa all'uso della regola, che trascriviamo per esteso[35]:

> *E' 'gl'è uno cholombo in uno chanpo e standoxi vede volare altri cholombi et dicie loro: quanti siete voi? E uno risponde: noi siamo tanti che lla metade di tanti e il quarto d'altrettanti e radopiati questi primi, chotanti e ttecho faremo* 100. *Adomando quanti erano questi che qui si sono. Presta ragione. Si dee fare per lo chatuino*[36] *cioè per la poxizione, e aponti in ciò che ttu vuoi; e pongniamo che questi che qui si sono fuxxino* 8, *peroché in* 8 *si truova* 1/2 *e il* 1/4, *e pigla, chome dicie di sopra,* 1/2 *di* 8 *che è* 4, *pigla* 1/4 *di* 8 *che è* 2 *e radoppia* 8, *fae* 16, *e rachogli tutti questi cioè* 8 *e* 4 *e* 2 *e* 16, *fae* 30, *e ponivi su quello cholonbo; ài in tutto* 31. *Siché te ne manca* 69, *e di': per otto che io m'apuoxi, me ne mancha* 69.
>
> *Ora t'aponi in un altro numero. E pongnianti in* 12 *e radoppia, fae* 24, *e pigla* 1/2, *ch'è* 6, *e pigla* 1/4, *ch'è* 3. *Ora rachogli* 12 *e* 24 *e* 6 *e* 3, *fae* 45, *ponvi su uno cholonbo, fae* 46. *Adunque per* 12 *ch'io mi puoxi, me ne mancha* 54 *perochè da* 46 *infino* 100 *àe* 54. *Ora si dee senpre tenere questa reghola: che quando ciaschuno numero ti getta meno senpre trarre l'uno dell'altro e dexi multiprichare in questo modo, cioè in crocie. E però multipricha* 8 *via* 54, *che fa* 432, *e multipricha* 12 *via* 69, *che fa* 828, *e chome detto è dei trarre l'uno dell'altro, che rresta* 396. *E questo* 396 *è el numero che dee essere partito; e il partitore si pigla in questo modo, di trarre senpre l'uno dell'altro cioè pigla amendua i numeri che ll'uno che chome detto è, l'uno è* 54 *e ll'altro è* 69, *e però trai* 54 *di* 69, *resta* 15, *e* 15 *è il partitore. E però parti* 396 *in* 15, *che ne viene* 26 *e* 6/15 *di cholonbo, e* 26 *cholonbi e* 6/15 *di cholonbo furono quelli che qui sono. Ed è fatta. E nota che xxempre il meno e il meno* [c_1, $c_2 < c$] *si vuole trarre l'uno dell'altro nel modo che detto è* [$x = \frac{|x_1 d_2 - x_2 d_1|}{|d_2 - d_1|}$]. *E anchor nota che il più e il più* [c_1, $c_2 > c$] *si vuole trarre l'una dall'altro nel modo simile che detto è; e nota che il più e il meno* [$c_1 > c$, $c_2 < c$ o viceversa] *si vuole ragiungnere* [$x = \frac{x_1 d_2 + x_2 d_1}{d_2 + d_1}$] *chome qui di rinpetto si dirà.*[37]

Posto x = numero dei colombi, dal problema si ottiene la seguente equazione

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 2x + x + 1 = 100 \quad \text{dove } c = 100.$$

Come primo valore *falso* l'autore pone $x_1 = 8$ e calcola

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_1}{4} + 2x_1 + x_1 + 1 = \frac{8}{2} + \frac{8}{4} + 2 \cdot 8 + 8 + 1 = 31 = c_1 \quad \text{da cui} \quad d_1 = |c - c_1| = 100 - 31 = 69.$$

Come secondo valore *falso* pone $x_2 = 12$ ed analogamente trova

$$\frac{x_2}{2} + \frac{x_2}{4} + 2x_2 + x_2 + 1 = \frac{12}{2} + \frac{12}{4} + 2 \cdot 12 + 12 + 1 = 46 = c_2 \quad \text{da cui} \quad d_2 = |c - c_2| = 100 - 46 = 54.$$

Ricava quindi la soluzione applicando la formula, $x = \frac{|8 \cdot 54 - 12 \cdot 69|}{|54 - 69|} = \frac{396}{15}$ [38]

---

[35] PAOLO DELL'ABBACO 1964, pp. 44-46.

[36] Termine di origine araba col quale erano indicate le regole di *doppia falsa posizione*.

[37] L'autore si riferisce alla «ragione» successiva.

[38] Si noti che la soluzione ottenuta, nonostante rappresenti il numero dei colombi, non è un numero intero, cosa su cui l'autore non fa tuttavia alcun commento.

Riportiamo di seguito anche la successiva «ragione», nient'altro che una variante della precedente, che l'autore introduce per completare la preannunciata casistica.

> *Uno huomo àe uno danaio e viene un altro a llui e quelli il domanda e dicie: io òe uno danaio e ttu quanti n'ài? Ed egli gli risponde e dicie: io n'òe tanti che chon altrettati e chol mezzo di quegli che io òe e chol quarto e col tuo danaio, sarebono* 100*. Domando quanti n'àe. Falla per lo chatuino*.[39]

Indicando con x i denari del secondo uomo, analogamente al problema precedente si ottiene l'equazione

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$$

Scegliendo come valori *falsi* $x_1 = 24$ e $x_2 = 48$ l'autore calcola rispettivamente

$$x_1 + x_1 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_1}{4} + 1 = 24 + 24 + \frac{24}{2} + \frac{24}{4} + 1 = 67 = c_1 \quad \text{da cui} \quad d_1 = |c - c_1| = 100 - 67 = 33$$

$$x_2 + x_2 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2}{4} + 1 = 48 + 48 + \frac{48}{2} + \frac{48}{4} + 1 = 133 = c_2 \quad \text{da cui} \quad d_2 = |c - c_2| = |100 - 133| = 33$$

La soluzione è: $x = \frac{24 \cdot 33 + 48 \cdot 33}{33 + 33} = 36$

Altre varianti del problema sono quelle in cui al posto dei colombi si trovano donzelle che ballano[40] o che giocano in un giardino, come nella formulazione che si legge nell'*Aritmetica* di Giovanni Banchelli, insolita perché il suo enunciato fonde insieme il problema in questione con il ben noto *problema dei conigli* di Fibonacci:

> *Una regina era in uno giardino et apresso di sé erano molte donzelle et in detto giardino era di molti conigli co' quali pigliavan piacere. Accadde, chome spesso interviene, che la sua maestà de' re, volendo pigliare alquanto piacere e sollazzo, se n'andò con alquanti baroni nel decto giardino. Et vedendo le donzelle la maestà de' re, tucte paurose s'andarono nascondendo per quello giardino sotto certi aranci, melioni, cedri, ginepri, arcipressi et molti arbori hodoriferi che erano nel decto giardino. Et la regina, vedendo il suo sposo gli andò incontro dicendogli: vo' siate el benvenuto. Onde el re prese a dimandare la sua sposa quante erano le donzelle e quanti erano e conigli che in dicto giardino erano. La regina gli rispose in questo modo: sacra corona, le donzelle sono tante che se lle fussino antrettante, el mezzo el quinto di tante et io con esse loro insieme saremo apunto cento. Et de' conigli rispose che non sapeva la quantità, ma ben sapeva che gl'era uno anno che elle vene fece mettere un paio, e la natura loro era ogni mese figliare e costituirne uno paio. Ora questo re vuol sapere quante erano le donzelle e quante paia di conigli.*[41]

---

[39] PAOLO DELL'ABBACO 1964, pp. 46-49.
[40] BNF, Fond. prin. II.V.152, c. 47v; BMLF, Ash. 956, c. 130r.
[41] BNF, Magl. XI. 115, cc. 70v-71r: cfr. ULIVI 2012, pp. 329-330. Dobbiamo tuttavia notare che il Banchelli, come altri autori in casi analoghi, risolve di fatto il problema con la semplice falsa posizione, traducendolo in una forma equivalente all'equazione $2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 99$.

1) *Un 'problema di dare-avere'*

La regola della doppia falsa posizione può essere applicata anche quando il problema è traducibile in un sistema lineare di *n* equazioni in *n* incognite, come avviene nei cosiddetti 'problemi di dare-avere', ma ovviamente al prezzo di non poche complicazioni nei calcoli. Sono anche questi presenti nel *Liber abaci*;[42] ne proponiamo uno tratto dalla *Summa* di Luca Pacioli, nel caso *n* = 3.

> *Tre hano denari. Dice el primo a li altri doi: se voi me dati la* 1/2 *de vostri insiemi con li mei haverò ducati* 20*. Dice el secondo a li altri doi: se voi me date el* 1/3 *di vostri io haverò con li mei ducati* 20*. Dice el terzo a li altri doi: se voi me date el* 1/4 *di vostri io harò ducati* 20*. Dimando quanti n'avian per uno.*[43]

Ponendo x = denari del primo uomo, y = denari del secondo uomo, z = denari del terzo uomo, il problema si può tradurre nel seguente sistema:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}(y+z) = 20 \\ y + \frac{1}{3}(x+z) = 20 \\ z + \frac{1}{4}(x+y) = 20 \end{cases}$$

Posto $x_1 = 4$, dalla prima equazione Pacioli ricava
$\frac{1}{2}(y_1 + z_1) = 20 - x_1 = 20 - 4 = 16$ ossia $y_1 + z_1 = 32$ da cui $y_1 + (x_1 + z_1) = 36$, e per la seconda $y_1 + \frac{1}{3}(x_1 + z_1) = 20$ da cui deduce $y_1 = 12$, $x_1 + z_1 = 24$, e quindi $z_1 = 20$.
Ora utilizza la terza equazione per calcolare il primo errore, ottenendo
$z_1 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}y_1 = 20 + \frac{1}{4}4 + \frac{1}{4}12 = 24 = c_1$ e quindi $d_1 = |c - c_1| = |20 - 24| = 4$.
Ripete quindi gli stessi passaggi per i secondi valori falsi: $x_2 = 8$, $y_2 = 14$, $z_2 = 10$
e dalla terza equazione ricava $c_2 = \frac{31}{2}$ da cui il secondo errore $d_2 = \frac{9}{2}$
Infine, applicando la regola, ottiene i tre valori incogniti:

$$x = \frac{x_1 d_2 + x_2 d_1}{d_2 + d_1} = \frac{100}{17}, \; y = \frac{y_1 d_2 + y_2 d_1}{d_2 + d_1} = \frac{220}{17} \quad \text{e} \quad z = \frac{z_1 d_2 + z_2 d_1}{d_2 + d_1} = \frac{260}{17}.$$

I.2. Le proporzioni assieme e di supporto all'algebra

Nei trattati italiani del Medioevo e del Rinascimento, tra i problemi di carattere algebrico, quelli in cui intervengono quantità in proporzione sono quasi sempre presenti, talvolta in numero rilevante. Dai testi presi in esame, ne abbiamo estratti alcuni che riteniamo tra i più significativi sia dal punto di vista algebrico sia per le applicazioni delle proporzioni. In qualche caso il problema era stato proposto da un maestro ad un altro, come una sorta di sfida allo scopo di sondarne l'abilità matematica. Per ciascuno dei problemi proposti ne abbiamo

[42] Leonardo Pisano 1857, pp. 325-326, 332-333, 336-349.
[43] Pacioli 1494, cc. 105v-106r. Per altri problemi della stessa tipologia cfr. ad esempio Scuola lucchese 1973, pp. 66-71; BNF, Fond. prin. II.V.152, cc. 97r-102r; BNF, Conv. soppr. G.7.1137, cc. 68r, 70v; Tartaglia 1556: Prima parte, cc. 268v e sgg.

evidenziata la presenza in più opere e i diversi metodi risolutivi. Nella scrittura delle equazioni e nei passaggi algebrici abbiamo usato una notazione simbolica moderna.[44]

I.2.1. *L'algebra in problemi sulle proporzioni*

Nei cinque problemi che seguono lo svolgimento fa intervenire la proprietà fondamentale delle proporzioni ed occasionalmente le proprietà del comporre e del permutare, che corrispondono rispettivamente alle proposizioni 19, 12 e 13 del VII libro degli *Elementi*.[45] Oltre a questo, in tutti la caratteristica dominante è la presenza di varie strategie e notazioni algebriche che evidenziano una chiara abilità ed inventiva da parte degli autori; il quinto è interessante soprattutto dal punto di vista storico.
Le corrispondenti equazioni risolventi sono di secondo grado, di ottavo grado di tipo trinomio, e di quarto grado in forma completa o incompleta.

1) *Uso di due incognite ausiliarie contemporanee*

Un problema del *Trattato di fioretti* di Antonio Mazzinghi recita:

> *Truova due numeri che, multiplichato l'uno chontro all'altro, faccia quanto el quadrato della differentia, e poi fa' di* 19 *due parti nella proportione de' detti numeri che multiplichato l'uno chontro all'altro faccia quanto e' quadrati de'* 2 *numeri.*[46]

Indicando con a, b, c, d le quantità da determinare, le condizioni richieste si traducono nel sistema

$$\begin{cases} a : b = c : d \\ ab = (a-b)^2 \\ c + d = 19 \\ cd = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Con una tecnica che utilizza anche in altri problemi,[47] Mazzinghi pone $a =$ *una quantità meno una chosa* e $b =$ *una quantità più una chosa* ossia, nella nostra notazione, $a = y - x$ e $b = y + x$ per cui $a + b = 2y$ e $ab = y^2 - x^2$.
Dalla seconda equazione, sfruttando lo sviluppo ed il completamento del quadrato, ottiene $(a+b)^2 = 5ab$ e sostituendo trova $y^2 = 5x^2$, da cui y, e quindi a e b in funzione di x.
A questo punto, dalla proporzione, ricava c e d nella forma $c = \frac{(c+d)a}{a+b}$ e $d = \frac{(c+d)b}{a+b}$ che per la terza condizione del sistema e per le precedenti posizioni permettono di esprimere anche c

---

[44] Ricordiamo che, nel periodo in questione, l'algebra era retorica o al più sincopata. Nel primo caso, i passaggi algebrici sono espressi in modo del tutto verbale, con l'impiego di particolari termini: così nel *Liber abaci* di Fibonacci l'incognita è *res* o *radix*, e *denarius* se compare assieme ad un'altra incognita, il suo quadrato è *census*, il suo cubo è *cubus;* nei *Fioretti* di Antonio Mazzinghi i corrispondenti nomi in volgare sono *chosa* e *quantità* per l'incognita, *censo* e *chubo*; per indicare successive potenze i termini vengono ripetuti. Nel secondo caso si utilizzano abbreviazioni e talvolta simboli come nelle opere di Luca Pacioli (cfr. p. 14), di Francesco Galigai, Girolamo Cardano e Rafael Bombelli. Nell'*Ars magna* Cardano indica l'incognita e la sua seconda potenza coi termini *positio* e *quadratus*, con relative abbreviazioni. Bombelli le chiama rispettivamente *tanto* e *potenza,* utilizzando un simbolo numerico particolare per l'incognita e le sue potenze, $\underset{\smile}{n} = x^n$, simbolo che viene posizionato a destra o sopra il corrispondente coefficiente.

[45] EUCLIDE 1970, pp. 449-450, 457-458.

[46] MAZZINGHI 1967, pp. 46-48.

[47] Sui problemi del *Trattato di Fioretti* cfr. URBANI 1980/81, FRANCI 1988.

e d in funzione di x. Finalmente, sostituendo nella relazione $cd = a^2 + b^2$, perviene alla semplice equazione binomia $x^2 = \frac{361}{60}$ da cui le quantità richieste.

Oltre che nei *Fioretti*, l'impiego di due incognite ausiliarie contemporanee per esprimere le quantità da determinare si troverà in altri trattati.[48] Già nel *Liber abaci* ed in testi successivi sono presenti problemi in cui le quantità incognite del problema sono espresse in funzione di una variabile ausiliaria, oppure in cui si fa uso di due incognite diversamente denominate.[49]

2) *Applicazione della falsa posizione e utilizzo della linearità di un sistema*

Nel trattato dedicato ai suoi scolari di Perugia, generalmente noto come *Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos*, Pacioli chiede:

> *Fame de* 10 *tre parti che sia tal parte la prima della seconda commo la seconda della terza, e multiplicata la prima per* 3 *e la seconda per* 4 *e la terza per* 5*, ragionti insieme questi multiplicamenti facino* 35 *a ponto, dimanda le parti.*[50]

Abbiamo dunque

$$\begin{cases} a : b = b : c \\ a + b + c = 10 \\ 3a + 4b + 5c = 35 \end{cases}$$

Adottando una strategia già presente in un altro problema del *Liber abaci*,[51] Frate Luca inizia la sua soluzione con una *falsa posizione*, ossia supponendo che le tre quantità a, b, c siano 1, x, x^2, che verificano ovviamente la prima condizione.

Utilizzando la seconda e la terza può scrivere che $35(1 + x + x^2) = 10(3 + 4x + 5x^2)$ da cui $x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}$. Trova così $x = \sqrt{\frac{13}{36}} - \frac{1}{6}$, $x^2 = \frac{7}{18} - \sqrt{\frac{13}{324}}$ e poi la somma $1 + x + x^2 = \frac{11}{9} + \sqrt{\frac{13}{81}}$

Determina quindi la prima quantità dalla proporzione $\left(\frac{11}{9} + \sqrt{\frac{13}{81}}\right) : 10 = 1 : a$.

Analogamente per le altre due quantità.

Il problema compare in diversi testi con dati numerici in tutto o in parte diversi.

Nei *Fioretti*, ferma restando la prima condizione, invece dei due i numeri 10 e 35 troviamo 19 e 81. Posto $b = x$, Mazzinghi considera il sistema

$$\begin{cases} a + c = 19 - x \\ 3a + 5c = 81 - 4x \end{cases}$$

Lo risolve cercando prima a_1 e c_1 poi a_2 e c_2 soluzioni rispettivamente dei due sistemi

$$\begin{cases} a_1 + c_1 = 19 \\ 3a_1 + 5c_1 = 81 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} a_2 + c_2 = -x \\ 3a_2 + 5c_2 = -4x \end{cases}$$

Ottiene quindi $a = a_1 + a_2 = 7 - \frac{x}{2}$ e $c = c_1 + c_2 = 12 - \frac{x}{2}$.

---

[48] Cfr. ad esempio il problema 3 del successivo paragrafo.

[49] Cfr. ad esempio il problema 1 del successivo paragrafo e la nota 110.

[50] PACIOLI 2007, pp. 414-415.

[51] LEONARDO PISANO 1857, c. 448r.

Imponendo la relazione $ac = b^2$ giunge all'equazione $x^2 + \frac{38}{3}x = 112$, da cui il valore incognito, ed infine a e c.[52]
Lo stesso metodo che utilizza la linearità del sistema si trova nei codici Fond. prin. II.V.152, Ricc. 2265, e tra le *Ragioni* del Maestro Luca di Matteo.[53]
Nel codice Conv. soppr. G. 7. 1137 il problema è proposto con i dati del *Tractatus* e con due diverse soluzioni. La prima utilizza la stessa falsa posizione del *Tractatus*. Nella seconda l'autore assume $c = x$ ottenendo $a + b = 10 - x$ e $3a + 4b = 35 - 5x$. Dopo aver moltiplicato la prima equazione per 4 le sottrae la seconda e trova $a = x + 5$, $b = 5 - 2x$; sostituisce poi nella $ac = b^2$ ricavando x.[54]
Nella *Summa* la seconda e la terza equazione del sistema sono rispettivamente $a + b + c = 19$ e $2a + 3b + 4c = 62$.[55] Per prima cosa Pacioli assegna l'incognita $b = x$ con la quale, dalla seconda equazione e dalla relazione fondamentale, ottiene il sistema somma-prodotto $a + c = 19 - x$ e $ac = x^2$ determinando quindi a e c in funzione di x come soluzioni di una equazione di secondo grado, la $t^2 + x^2 = (19 - x)t$;[56] trova poi x dalla terza condizione del problema.
Bombelli e Cardano nella *Practica arithmetice* seguono un metodo risolutivo analogo a quello della *Summa*.[57]

3) *Un interessante simbolismo algebrico: il problema del Maestro Giovanni del Sodo*

Sempre nel *Tractatus* Pacioli propone al lettore un quesito che gli era stato inviato da un maestro d'abaco di Firenze:

> *Trovame* 3 *numeri proportionali ch' el quadrato del terzo sie uguale a la summa di quadrati degli altri doi, e multiplichare el primo numero nel secondo facia* 10*, dimando che fia ciascun numero per sé. Sapi questa esser bona domanda, e a dì* 4 *aprile* 1480 *me fo mandata da Firenze da Maestro Giovani Sodi per le mani de Giovan Giacopo orfo de Peroscia e facemmoli resposta aprobatissima e ancho a cert'altre, e mandammoli a l'incontro altre domande de le qual finora non abiam resposta etc.*[58]

Con le solite notazioni abbiamo

$$\begin{cases} a : b = b : c \\ a^2 + b^2 = c^2 \\ ab = 10 \end{cases}$$

Lo stesso problema era stato già risolto da Leonardo Pisano nel quindicesimo capitolo del *Liber abaci*.[59] Come Fibonacci, Pacioli assume per incognita $a = x$.
Dalla prima e dalla terza equazione ricava $b = \frac{10}{x}$ e $c = \frac{100}{x^3}$ e infine, sostituendo nella seconda, ottiene

[52] MAZZINGHI 1967, pp. 20-22.
[53] ANONIMO 1988, pp. 141-143; BRF, Ricc. 2265, cc. 35r-36v; BNF, Palat. 573, cc. 468r-468v: cfr. TOTI RIGATELLI 1983, p. 11.
[54] BNF, Conv. soppr. G. 7. 1137, cc. 209v-210r.
[55] PACIOLI 1494, cc. 91v-92r.
[56] L'immediata associazione del sistema somma-prodotto all'equazione di secondo grado in cui il coefficiente del termine di primo grado è l'opposto della somma e il termine noto è il prodotto delle due quantità, era la tecnica risolutiva ricorrente per quella tipologia di sistema.
[57] BOMBELLI 1966, p. 389; CARDANO 1663, pp. 158-159. Per questo e altri problemi di cui parleremo, presenti nell'*Algebra* di Bombelli cfr. BARTOLUCCI 2012/2013.
[58] PACIOLI 2007, pp. 594-595.
[59] LEONARDO PISANO 1857, pp. 447-448.

$$x^2 + \frac{100}{x^2} = \frac{10000}{x^6}$$

e successivamente

$$x^{10} + 100x^6 = 10000x^2$$

$$x^9 + 100x^5 = 10000x$$

$$x^8 + 100x^4 = 10000$$

Sempre come nel *Liber abaci*, dove tuttavia l'approdo all'ultima equazione appare più immediato, la soluzione viene ricavata riconducendo l'equazione trinomia di ottavo grado ad una di secondo nell'incognita x^4.
Il problema è particolarmente significativo perché, rispetto a tutto il *Tractatus* perugino, è quello dove si presentano le equazioni di grado più elevato, permettendo di individuare i simboli utilizzati da Pacioli per l'incognita e per le successive potenze fino alla decima, con la sola esclusione della settima potenza.
Le precedenti tre equazioni sono scritte rispettivamente

$$100^{\square\triangle}\ \textit{più}\ 1^{\square\oslash}\ \ \textit{equale a}\ \ 10000^{\square}$$

$$100^{\oslash}\ \textit{più}\ 1^{\triangle\triangle}\ \ \textit{equale a}\ \ 10000^{co}$$

$$100^{\square\square}\ \textit{più}\ 1^{\square\square\square}\ \ \textit{equale a}\ \ 10000$$

Pacioli utilizza quindi i seguenti simboli base
$1^{co} = x \qquad 1^{\square} = x^2 \qquad 1^{\triangle} = x^3 \qquad 1^{\oslash} = x^5$.
Le altre potenze sono ottenute componendo quei simboli e seguendo il principio moltiplicativo:
$1^{\square\square} = x^4 \qquad 1^{\square\triangle} = x^6 \qquad 1^{\square\square\square} = x^8 \qquad 1^{\triangle\triangle} = x^9 \qquad 1^{\square\oslash} = x^{10}$.
Il problema di Giovanni del Sodo verrà riproposto da Pacioli nella *Summa*, tuttavia senza fare riferimento al matematico fiorentino.[60] Nel testo a stampa Frate Luca fa uso di notazioni di tipo più retorico e tradizionale, e certo più agevoli dal punto di vista tipografico. Le precedenti equazioni si leggono:

10000 *ce.* *equali a* 100 *ce.cu.* p̃ 1*ce.p°.r°.*

10000 *co.* *equali a* 100 *p°.r°.* p̃ 1*cu.cu.*

10000 *equali a* 100 *ce.ce.* p̃ 1*ce.ce.ce.*

dove *co.* = *cosa* = x, *ce.* = *censo* = x^2, *cu.* = *cubo* = x^3, *p°.r°.* = *primo relato* = x^5 e dove le potenze di ordine superiore sono indicate sempre utilizzando il principio moltiplicativo.
Il problema sarà ripreso da Cardano nella *Practica arithmetice*, facendo esplicito riferimento alla *Summa* di Pacioli.[61]

---

[60] Pacioli 1494, c. 93r. Cfr. Ulivi 2015, pp. 661-665 e Ulivi 2018, pp. 100-102.
[61] Cardano 1663, p. 173.

4) *Il completamento del quadrato per risolvere un'equazione di quarto grado*

Nella stessa *Practica arithmetice* Cardano chiede di trovare

> *Tre numeri in proporzione continua tali che la somma del secondo e del terzo divisa per il primo, la somma del primo e del terzo divisa per il secondo e la somma del primo e del secondo divisa per il terzo, facciano insieme* 13.[62]

Il problema è ovviamente indeterminato e l'autore ne fornisce una soluzione. Inizia con la stessa falsa posizione che abbiamo visto utilizzare da Pacioli in un altro problema, assumendo cioè che le tre quantità siano $1, x, x^2$. Deve quindi verificarsi

$$x + x^2 + \frac{1+x^2}{x} + \frac{1+x}{x^2} = 13$$

da cui l'equazione di quarto grado

$$x^4 + 2x^3 + 2x + 1 = 13x^2$$

Cardano la risolve aggiungendo a entrambi i membri $3x^2$ ed ottenendo

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 16x^2$$

dove il primo membro è diventato il quadrato di un trinomio, dunque

$$(x^2 + x + 1)^2 = 16x^2$$

Estraendo la radice, arriva all'equazione $x^2 + 1 = 3x$, di cui prende solo la soluzione maggiore.[63]

Nel problema successivo Cardano estende la questione al caso di cinque numeri in proporzione continua, giungendo così ad una equazione di ottavo grado. Con la stessa strategia ripetuta due volte si riduce prima ad una equazione di quarto grado ed infine ad una di secondo.[64]

Lo stesso metodo nella risoluzione di una particolare equazione di quarto grado, che ricorre cioè al completamento del quadrato mediante l'aggiunta di una quantità opportuna, era stata anche questo adottato da Pacioli in un problema della *Summa*, poi riproposto e commentato nella *Practica arithmetice* di Cardano e nel *General trattato* di Tartaglia.[65]

5) *Un problema di Maestro Zuanne*

Un noto quesito dell'*Ars magna* dello stesso Cardano è il seguente:[66]

---

[62] Ivi, p. 162.

[63] Alcuni tra i problemi algebrici più interessanti della *Practica arithmetice* sono ripresi e commentati nell'*Arithmetica integra* di Stifel, che ne propone anche altre soluzioni. Per il problema in questione il matematico tedesco dà entrambi i risultati della precedente equazione di secondo grado: cfr. STIFEL 1544, cc. 301v-303r.

[64] CARDANO 1663, p. 162. Anche in questo caso il problema è riportato nell'*Arithmetica integra*: STIFEL 1544, cc. 303r-304r. Sui due problemi cfr. ROMMEVAUX-TANI 2016, pp. 87-88.

[65] PACIOLI 1494, c. 44r; CARDANO 1663, p. 139; TARTAGLIA 1556: Seconda parte, c. 12r; TARTAGLIA 1560: Sesta parte, c. 16v. In proposito cfr. GIUSTI 2007, pp. 172-173; ULIVI 2015, pp. 659-660; ROMMEVAUX-TANI 2016, pp. 95-97. Il problema è presente, con una soluzione alternativa, nell'*Arithmetica integra*: Stifel 1544, cc. 306r-307v.

[66] CARDANO 1663, pp. 295-296.

Fai di 10 *tre parti in proporzione continua tali che il prodotto della prima con la seconda sia* 6.[67]

Il quesito si traduce nel sistema

$$\begin{cases} a+b+c=10 \\ a:b=b:c \\ ab=6 \end{cases}$$

Cardano pone $b=x$. Dalla terza equazione ottiene $a=\frac{6}{x}$, dalla seconda $c=\frac{1}{6}x^3$ e sostituendo nella prima $\frac{6}{x}+x+\frac{1}{6}x^3=10$ da cui l'equazione $x^4+6x^2+36=60\,x$.
La risolve col metodo generale ideato da Ludovico Ferrari, che ricorre tra l'altro sia ad un duplice completamento del quadrato sia ad una equazione intermedia di terzo grado di cui erano ormai note le formule risolutive. Osserva infatti Cardano:

Questo proponeva Joanne da Colla, e affermava che non era possibile risolverlo. Io tuttavia affermavo che si poteva risolvere, anche se ne ignoravo il modo, finché non lo trovò Ferrari.

Il problema era stato proposto da Maestro Zuanne de Tonini da Coi o da Colla, e non solo a Cardano ma anche a Niccolò Tartaglia, che lo ricorda nei suoi *Quesiti,* seppure con diversa formulazione.[68] Proprio quel problema, in cui intervengono numeri in proporzione continua, aveva fornito lo spunto per gli studi che condussero Ferrari alla sua scoperta, e che Cardano pubblicò nell'*Ars magna*.

I.2.2. *Particolari identità nella risoluzione di problemi algebrici*

Nei successivi esempi, pur essendo ancora utilizzate opportune strategie algebriche e la proprietà fondamentale delle proporzioni, l'elemento caratterizzante è l'intervento di particolari e più o meno complesse identità non presenti tra i risultati degli *Elementi*, quasi sempre valide per numeri proporzionali, o valide sotto altre condizioni ma dimostrate mediante le proporzioni. In realtà gli autori ne espongono le dimostrazioni solo in alcuni casi, limitandosi, per lo più, ad enunciarle ed applicarle. A volte le introducono, quando necessario, all'interno dello svolgimento delle singole questioni. Interessante è la Prima parte della *Summa* di Pacioli dove, nel «Tractatus sextus» della «Distinctio sexta» sono elencate e numerate a parte ben 28 proprietà valide per 3, 4 o 5 quantità in proporzione continua, distinte in 13 *regole* e 15 *chiavi*[69]; il «Tractatus secundus» della «Distinctio septima» riporta poi 66 *conclusioni* valide per quantità sia proporzionali sia non proporzionali;[70] fanno seguito i relativi esempi numerici e le relative applicazioni. Come scrive Pacioli

Fansi per via de ditte conclusioni sopra poste, e anche per le 7 meraviglie dele proportioni e proportionalità, e de le loro chiavi e anche regole in quel luogo aducte, molte stupende cose nel conspecto di gran maestri de grandissimi piaceri e consolationi. Si commo ale volte

[67] Per i passi tratti dal *Liber abaci* e dalle opere di Cardano e Viète abbiamo riportato la traduzione dal latino.
[68] TARTAGLIA 1546, cc. 103v, 108r.
[69] PACIOLI 1494, cc. 84r-98v.
[70] Ivi, cc. 106r-111v.

sogliamo fare per dare recreatione ali scholari quali mediante simili acti più se inducano alo imparare simil arte a tutti necessaria.[71]

Le proprietà che Pacioli elenca si trovano spesso applicate in altri testi precedenti o successivi alla *Summa.*

Gli esempi che proponiamo conducono ad equazioni risolventi di primo grado, di secondo grado, e di terzo grado in forma completa. Li abbiamo distinti in base alle identità utilizzate, quasi sempre con riferimento alla terminologia della *Summa*.

1) *Uso di una identità dimostrata con le proporzioni e la conclusione* 23

Nel *Liber abaci* si legge:

Ho diviso 10 *in due parti, e ho diviso* 10 *per ognuna di esse, e il prodotto dei quozienti era* $\frac{1}{4}6$.[72]

Come vediamo, questo quesito non coinvolge nell'enunciato numeri proporzionali, ma viene risolto con l'uso delle due seguenti identità, di cui la prima è dimostrata all'interno del problema in questione mediante le proporzioni, la seconda in relazione ad un precedente problema:

Se $n = a + b$ allora

$$\text{(i)}\ \frac{n}{b} \cdot \frac{n}{a} = \frac{n}{a} + \frac{n}{b}$$ [73]

$$\text{(ii)} \left(\frac{n}{a} + \frac{n}{b}\right) ab = n^2$$ [74]

La dimostrazione della (i) si svolge in questo modo:

Siano $\frac{n}{a} = e$, $\frac{n}{b} = d$ dunque $n = ae$ e $n = bd$ perciò $ae = bd$ ovvero $a : b = d : e$, ne segue che $e : b = (d + e) : (a + b)$. Abbiamo inoltre $e : b = ed : bd$ da cui $e : b = ed : n$, ed essendo $n = a + b$, per le precedenti risulta $ed : n = (d + e) : n$ ovvero $ed = d + e$ che, sostituendo, porta alla $\frac{n}{b} \cdot \frac{n}{a} = \frac{n}{a} + \frac{n}{b}$.

La (ii) viene dimostrata in modo aritmetico, senza fare uso delle proporzioni, seppure con una configurazione geometrica in cui le quantità in gioco sono rappresentate da segmenti. Entrambe le procedure sono elementi caratteristici del *Liber abaci*.

Ritornando al problema, se indichiamo con *a* e *b* le due parti in cui dividere 10, si interpretano le condizioni date mediante il sistema

$$\begin{cases} a + b = 10 \\ \dfrac{10}{a} \cdot \dfrac{10}{b} = \dfrac{25}{4} \end{cases}$$

Fibonacci esordisce sfruttando la prima identità, con $n = 10$, e la seconda equazione del sistema, riducendolo al seguente sistema equivalente (3)

---

[71] Ivi, c. 111v.

[72] Leonardo Pisano 1857, pp. 454-455. Cfr. la nota 29.

[73] *Ibidem*.

[74] Ivi, p. 442.

$$\begin{cases} a+b=10 \\ \dfrac{10}{a}+\dfrac{10}{b}=\dfrac{25}{4} \end{cases}$$

Per la seconda identità scrive $\left(\frac{10}{a}+\frac{10}{b}\right)ab=100$.

Posto ora $a=2-x$ e $b=8+x$, sostituendo ottiene $\frac{25}{4}(2-x)(8+x)=100$ da cui $x^2+6x=0$, la quale ammette una sola soluzione non negativa $x=0$, eccezionalmente accettata in quanto valore dell'incognita ausiliaria.[75] Le due parti sono infine $a=2$, $b=8$.

Il problema del tipo (3) si ritroverà in più testi successivi al *Liber abaci* con eventuali differenze nei due numeri assegnati, ma sarà sempre risolto senza fare uso della precedente identità (2). Così avviene nel codice Conv. soppr. G.7.1137,[76] nel codice Ricc. 2265,[77] nel *Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos*. Ad esempio, il trattato di Pacioli propone per due volte il problema con 5 e poi 10 al posto di $\frac{25}{4}$. In entrambi i casi assume $a=x$, da cui $b=10-x$ che sostituisce nella seconda equazione.[78] Chiaramente in questo modo deve risolvere una equazione fratta, che Fibonacci evita con l'impiego della (ii). L'identità (i) è presente nella *Summa*, come *conclusione* 23.

2) *Le chiavi ottava e quattordicesima*

Uno dei problemi più interessanti del *Trattato di fioretti* di Antonio Mazzinghi è il seguente

> *Truova* 3 *numeri nella chontinua proportionalità, cioè* 3 *quantità nella chontinua proportionalità che, multiplichato la prima per l'altre* 2 *e la seconda multiplichato per l'altre* 2 *e la terça multiplichata per l'altre* 2*, faccino in soma* 888*; e multiplichato ciaschuna parte in sé et quelli quadrati agunti insieme faccino* 481*. Adimandasi quali sono quelli numeri, overo quelle quantità.*[79]

Dette a, b, c le quantità da trovare, si può scrivere

$$\begin{cases} a:b=b:c \\ a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=888 \\ a^2+b^2+c^2=481 \end{cases}$$

Per prima cosa Antonio sfrutta il quadrato del trinomio e vi sostituisce i valori della seconda e terza equazione, ottenendo

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+a(b+c)+b(a+c)+c(a+b) = 481+888=1369 \text{ da cui}$$

$$a+b+c=\sqrt{1369}=37$$

Del prodotto notevole riporta una dimostrazione geometrica, che omettiamo, corredata dalla relativa figura.

Il sistema iniziale si traduce così nel sistema (4) seguente

---

[75] Ricordiamo che all'epoca venivano ritenute accettabili unicamente soluzioni positive.

[76] BNF, Conv. soppr. G.7.1137, c. 67v.

[77] BRF, Ricc. 2265, c. 23r.

[78] PACIOLI 2007, pp. 382-383, 392-393.

[79] MAZZINGHI 1967, pp. 16-19.

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ a(b+c) + b(a+c) + a(b+c) = 888 \\ a+b+c = 37 \end{cases}$$

A questo punto il Mazzinghi sfrutta l'identità $a(b+c) + b(a+c) + c(a+b) = 2b(a+b+c)$ banalmente valida sotto la condizione $ac = b^2$. Sostituendo nei due membri i valori della seconda e terza equazione del sistema ottiene $b = 12$. Poi dalla prima e terza equazione ricava $ac = 144$ e $a + c = 25$, trovando al solito a e c dalla $t^2 + 144 = 25t$, ossia $a = 9$ e $c = 16$.
Nella *Summa* di Pacioli abbiamo un quesito di tipo indeterminato su tre quantità in proporzione continua che sfrutta la relazione utilizzata dal Mazzinghi all'inizio del problema precedente, ossia la

$$a(b+c) + b(a+c) + c(a+b) + a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2$$

relazione che per Pacioli corrisponde alla *chiave ottava,* in realtà valida anche per numeri non in proporzione. Subito dopo Frate Luca propone un problema che si traduce nel sistema (4) ma con diversi dati numerici; la corrispondente soluzione si sviluppa come nel testo di Mazzinghi partendo dall'identità

$$a(b+c) + b(a+c) + c(a+b) = 2b(a+b+c)$$

che per Pacioli è la *chiave quattordicesima.*[80] Lo stesso farà Francesco Galigai, seppure ancora con dati diversi, nella sua *Summa de arithmetica*, riferendo che il quesito gli era stato proposto da un Maestro Agnolo del Carmine.[81]
Altri autori risolvono il problema con l'esclusivo impiego dell'algebra, come il Maestro Giovanni di Bartolo nelle sue *Miracholose ragioni* .[82]
Nei *Fioretti*, una variante del problema precedente è quella che conduce al sistema

$$\begin{cases} a+b+c = 10 \\ a : b = b : c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 40 \end{cases}$$

e che il Mazzinghi risolve sempre combinando le *chiavi ottava* e *quattordicesima*,[83] ossia usando la seguente relazione (5)

$$\frac{(a\ +b\ +c)^2 - (a^2\ +\ b^2\ +c^2)}{2(a\ +b\ +c)} = b$$

Trovata b, dalle prime due equazioni ricava a e c.
Questo problema ricorre spesso nei trattati italiani del Medioevo e del Rinascimento. Lo incontriamo, forse per la prima volta, nel codice Ricc. 2263/II, con i dati precedenti, ma con una diversa ma interessante soluzione che tuttavia non utilizza le dette *chiavi*.[84] L'autore osserva che, per la proprietà fondamentale, $(a+c)^2 - b^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 40$. Vi sostituisce

80 PACIOLI 1494, c. 91r.
81 GALIGAI 1521, c. 26r.
82 BNF, Palat. 573, cc. 477r-477v. Cfr ARRIGHI 1967, pp. 22-23.
83 MAZZINGHI 1967, pp. 53-54. In precedenza lo aveva proposto con altri dati e con la stessa soluzione: MAZZINGHI 1967, pp. 19-20.
84 ANONIMO 1994, pp. 39-40.

$b = x$ e $a + c = 10 - x$, e ottiene $(10 - x)^2 - x^2 = 40$ da cui $b = x = 3$. Trova poi a e c dal sistema costituito dalle due equazioni $a + c = 7$, $a^2 + c^2 = 31$, ponendo $a = x$, ricavando c dalla prima, e sostituendo nella seconda.
Sempre con gli stessi dati, ma solo con il risultato, figura tra le *Questioni d'algebra* del Maestro Gilio.[85] Con dati in tutto o in parte diversi, si trova nei manoscritti Fond. prin. II.V.152,[86] Conv. soppr. G.7.1137,[87] Ricc. 2265,[88] inoltre tra le *Ragioni* del Maestro Luca di Matteo:[89] in tutti questi si segue la stessa soluzione del Mazzinghi. Pacioli nella *Summa*[90] risolve il problema senza applicare la (5). Cardano nella *Practica arithmetice*[91] e Bombelli[92] lo risolvono con e senza l'utilizzo di quella relazione.
Le *chiavi ottava e quattordicesima* vengono introdotte anche nella *Raccolta di ragioni* di Filippo Calandri che le sfrutta in un problema simile ai precedenti.[93]

3) *Le chiavi nona e decima*

Nella *Summa* di Pacioli leggiamo:

> *Trovame* 3 *quantità continue proportionali che multiplicata la prima nella seconda e poi quello che fa nella terza facia quanto le ditte quantità insiemi gionte. E partito* 36 *per ciascheduna quantità e li havenimenti gionti insiemi facino quanto la summa de ditte quantità. Se dimanda che sia ciascuna parte.*[94]

Le condizioni portano al sistema

$$\begin{cases} a : b = b : c \\ abc = a + b + c \\ \dfrac{36}{a} + \dfrac{36}{b} + \dfrac{36}{c} = a + b + c \end{cases}$$

In questo caso Pacioli fa intervenire la *chiave decima*:

$$\text{Se } \ a : b = b : c \ \text{ e se } \ \frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} = a + b + c \ \text{ allora } \ b^2 = k.$$

Dunque dalla prima e terza equazione del sistema deduce che $b = 6$. Fatto ciò propone due metodi risolutivi:
Nel primo introduce due incognite che chiama *cosa* e *quantità,* come Antonio Mazzinghi, ponendo $a = x - y$ e $c = x + y$.
Dalla prima equazione del sistema ottiene $x^2 - y^2 = 36$ da cui $y = \sqrt{x^2 - 36}$ e quindi $a = x - \sqrt{x^2 - 36}$ e $c = x + \sqrt{x^2 - 36}$
Ora dalla seconda ricava
$abc = a + b + c = \left(x - \sqrt{x^2 - 36}\right) + 6 + \left(x + \sqrt{x^2 - 36}\right) = 2x + 6$

[85] Maestro Gilio 1983, p. 38.
[86] Anonimo 1988, pp. 139-140.
[87] BNF, Conv. soppr. G. 7.1137, c. 209v.
[88] BRF, Ricc. 2265, cc. 33v-34v.
[89] BNF, Palat. 573, cc. 456r-456v. Cfr. Toti Rigatelli 1983, pp. 9-10.
[90] Pacioli 1494, c. 92r.
[91] Cardano 1663, pp. 166-167.
[92] Bombelli 1966, pp. 364-366.
[93] Calandri 1982, pp. 1-3.
[94] Pacioli 1494, c. 91r.

Sfrutta quindi la *chiave nona,* ossia la relazione $abc = b^3$, ottenendo $2x + 6 = 216$ da cui $x = 105$ ed infine i valori di a e c.
In definitiva giunge al risultato mediante la risoluzione di una banale equazione di primo grado.
Nel secondo metodo, sfruttando subito la prima condizione, Pacioli ottiene $ac = b^2 = 36$, pone poi $a + c = x$. Trovate a e c in funzione di x, utilizza come prima la seconda equazione e la *chiave nona*, ricavando il valore dell'incognita e poi di a e c.
Sempre sulla base delle proprietà corrispondenti alle *chiavi decima* e *nona* della *Summa*, per lo stesso problema, ma con $k = 20$, il primo metodo risolutivo si trova nei *Fioretti* di Antonio Mazzinghi[95] e nel *Trattato d'abaco* di Piero della Francesca.[96] Maestro Gilio, con $k = 30$, ne riporta solo il risultato[97]. In modo sostanzialmente analogo al secondo metodo di Pacioli, con $k = 25$, procede Cardano nella *Practica arithmetice*.[98]

4) *La regola 11 e le chiavi prima e quinta: un problema del Maestro Agnolo del Carmine*

La *Summa de arithmetica* di Francesco Galigai contiene il seguente quesito anche questo proposto all'autore dal Maestro Agnolo del Carmine, un frate del Convento di Santa Maria del Carmine di Firenze:[99]

> *Truova* 4 *quantità continue proportionali che la somma della prima e quarta sia* 18*, et la somma della seconda e terza sia* 12*. Domando quanto sarà ciascuna per sé solo.*

Deve essere dunque

$$\begin{cases} a : b = b : c = c : d \\ a + d = 18 \\ b + c = 12 \end{cases}$$

Nella sua soluzione Galigai sfrutta la seguente identità (6)

$$bc = \frac{(b+c)^3}{3(b+c) + (a+d)}$$

valida al solito per quattro quantità in proporzione continua.
Conoscendo $b +$ c, ricava poi b e c come soluzioni dell'equazione

$$x^2 - (b+c)\,x + \frac{(b+c)^3}{3(b+c)+(a+d)} = 0$$

ossia con la formula

$$x = \frac{b+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - \frac{(b+c)^3}{3(b+c)+(a+d)}}$$

95 MAZZINGHI 1967, pp. 53-54.
96 PIERO DELLA FRANCESCA 1970, pp. 266-267.
97 MAESTRO GILIO 1983, p. 43.
98 CARDANO 1663, pp. 58, 144-145. Si vedano in proposito HEEFFER 2010, pp. 61-62 e ROMMEVAUX-TANI 2016, pp. 89-90, che esamina lo stesso problema nell'*Aritmetica integra* di Stifel: STIFEL 1544, cc. 304r-304v.
99 GALIGAI 1521, c. 26v. Cfr. ULIVI 2015, pp. 667-668.

Nel caso specifico: $bc = \frac{12^3}{3 \cdot 12+18} = 32$, la precedente equazione è $x^2 - 12x + 32 = 0$ e quindi $b = 4$, $c = 8$.
Per trovare a e d, procede come segue. Ricava $(a+b) = \frac{b(b+c)}{c} = 6$ da cui $a = 2$ ed infine dalla $ad = bc$, trova $d = \frac{bc}{a} = 16$.[100]
Nella *Summa* di Pacioli la (6) costituisce la *regola* 11, mentre la $ad = bc$ è la *chiave quinta*. Frate Luca propone lo stesso problema arrivando come il Galigai alla determinazione di b e c. Trova invece a e d dalla $ac = b^2$ e dalla seconda equazione del sistema.[101] In seguito ripropone il quesito con altri dati e con una diversa soluzione, assumendo $a + d = 30$, $b + c = 25$.[102] In questo caso egli suggerisce di usare la *prima chiave* ossia la relazione

$$(b + c):(a + b + c + d) = b : (a + c)$$

Pone dunque $b = x$ per cui $c = 25 - x$ ed applicando la suddetta chiave ottiene $a + c = \frac{11}{5}x$ quindi $a = \frac{16}{5}x - 25$ e poi $d = 55 - \frac{16}{5}x$.
Infine, poiché $ac = b^2$, sostituendo ottiene $\left(\frac{16}{5}x - 25\right)(25 - x) = x^2$ ossia l'equazione risolvente $\frac{21}{5}x^2 + 625 = 105x$.
Prima e dopo la *Summa*, particolare in quanto riferita ad una situazione pratica è la formulazione del problema che compare sia nel *Tractatus algorismi* di Iacopo da Firenze sia nell'opera *Una raccolta di ragioni* di Filippo Calandri[103]. Ad esempio l'enunciato del Calandri è il seguente:

> *Uno fante sta* 4 *anni con uno et pagholo proportionalmente et tral primo el quarto anno ebbe* 93 *denari* 1/3 *et tral secondo el terzo anno ebbe* 40 *denari. Adimando quanto ebbe in cascuno anno.*

Le incognite sono i salari percepiti nei tre anni, che si suppongono in proporzione continua. La soluzione utilizza sempre la *regola* 11.
Nell'*Algebra*[104] di Bombelli, con i dati del Galigai, ritroviamo di nuovo il problema nella formulazione astratta, ma qui l'autore procede in modo esclusivamente algebrico, senza l'intervento di particolari identità, a parte la relazione fondamentale delle proporzioni.
Le *chiavi prima* e *quinta* della *Summa* sono presenti anche nel capitolo *De proprietatibus numerorum mirificis* della *Practica arithmetice* di Cardano.[105]
La *regola* 11 e la *chiave quinta* entrano ancora in gioco nei due problemi seguenti assieme ad altre proprietà.

5) *Altre identità valide per quattro quantità in proporzione continua*

Sempre nell' *Algebra* Bombelli propone questo problema

---

[100] GALIGAI 1521, cc. 23v, 24v.
[101] PACIOLI 1494, c. 87v.
[102] Ivi, c. 96v.
[103] CALANDRI, 1982, pp. 32-33; HØYRUP, pp. 116-118, 327-328.
[104] BOMBELLI 1966, pp. 415-416.
[105] CARDANO 1663, pp. 58, 60.

Faccisi di 30 *quattro parti in continua proporzione tali che li loro quadrati gionti insieme faccino* 340.[106]

Il corrispondente sistema è il seguente

$$\begin{cases} a : b = b : c = c : d \\ a + b + c + d = 30 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 340 \end{cases}$$

Egli pone $b + c = x$, da cui $a + d = 30 - x$; sostituendo nella (6) trova bc, e quindi b e c in funzione di x. Essendo inoltre $ad = bc$, sempre dalla (6) ricava in modo analogo a e d in funzione di x. Trova poi x sfruttando la terza equazione, da cui i valori di $b + c$ e $a + d$. Riutilizzando la (6) determina ad e bc, ed infine le quattro quantità.
Seppure con diversi dati, anche tale problema era stato risolto allo stesso modo da Pacioli nella *Summa*.[107]
Bombelli ne propone tuttavia un'altra soluzione che sfrutta prima di tutto la seguente relazione al solito valida per quattro quantità in proporzione continua:

$$\frac{(a+b+c+d)^3 - (a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)}{2(a+b+c+d)} = (b+c)^2 + \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a+b+c+d}(b+c)$$

Sostituendovi i dati del problema, questa gli permette di ricavare numericamente $b + c$ dall'equazione di secondo grado $x^2 + \frac{34}{3}x = 280$. Continua poi come prima, sfruttando la (6).[108]
Ancora con altri dati numerici, nella *Practica arithmetice*[109] Cardano aveva risolto la questione in modo simile, con l'utilizzo però di una relazione equivalente a quella usata da Bombelli nella sua seconda soluzione, e da lui in precedenza dimostrata, ossia:

$$\frac{\frac{1}{2}[(a+b+c+d)^2 - (a^2+b^2+c^2+d^2)] - (b+c)^2}{b+c} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a+b+c+d}$$

proseguendo al solito con l'impiego della (6). Cardano concludeva elogiando la precedente soluzione di Pacioli.[110]

Un'altra relazione valida per quattro numeri in proporzione continua è usata da Cardano nell'*Ars magna* per il problema seguente

Trova quattro numeri in continua proporzione, tali che la somma del primo, del secondo e del quarto sia 15*, e la somma del primo, del terzo e del quarto sia* 17.[111]

Si tratta qui di risolvere il sistema

---

106 BOMBELLI 1966, pp. 434-436.
107 PACIOLI 1494, cc. 95v-96r.
108 Subito dopo Bombelli ripropone il problema con altri dati risolvendolo con la «regola breve» impiegata prima nel secondo procedimento risolutivo: BOMBELLI 1966, p. 437.
109 CARDANO 1663, p. 168.
110 Stifel nell'*Arithmetica integra*, in cui $a + b + c + d = 45$ e $a^2+b^2 + c^2 + d^2 = 765$, dopo aver ricordato il metodo di Cardano, suggerisce un'altra soluzione, che ritorna al solo uso della (6). Con l'introduzione di due incognite, pone le quattro quantità a, b, c, d rispettivamente x, y, $18 - y$, $27 - x$ dove quindi $a + d = 27$ e $b + c = 18$. Dalla (6) deduce che $ad = 72 = x(27 - x)$ e $bc = 72 = y(18 - y)$ da cui x ed y: STIFEL 1544, cc. 308r-309v. Cfr. ROMMEVAUX-TANI 2016, pp. 99-100.
111 CARDANO 1663, pp. 291-292

$$\begin{cases} a : b = b : c = c : d \\ a + b + d = 15 \\ a + c + d = 17 \end{cases}$$

Cardano inizia sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla terza, da cui ricava $c - b = 2$. Ponendo $b = x - 1$ ottiene $c = x + 1$. Trova poi $a + d = 16 - x$ e $ad = bc = x^2 - 1$. A questo punto sfrutta la seguente identità valida per quattro quantità in proporzione continua

$$b^3 + c^3 = (a + d)ad.$$

Dunque $(x - 1)^3 + (x + 1)^3 = (16 - x)(x^2 - 1)$ da cui l'equazione cubica $3x^3 + 5x + 16 = 16x^2$.

Secondo quanto suggerisce Cardano, mediante un opportuno cambio di variabile, $x = y + \frac{16}{9}$, è possibile trasformare l'equazione in una delle tre forme canoniche in cui manca il termine di secondo grado, per poi applicare la relativa formula risolutiva; Cardano l'aveva precedentemente illustrata, precisando che era stata scoperta da Scipione dal Ferro e ritrovata da Tartaglia, che la descriverà, dopo Cardano, nei suoi *Quesiti*. Ritornando al problema, dopo aver determinato x e quindi b e c, i valori a e d si calcolano da un sistema somma-prodotto.

I.3. EQUAZIONI DI TERZO GRADO E PROPORZIONI NELLA *PRACTICA ARITHMETICE*

Sei anni prima di pubblicare nell'*Ars magna* le formule risolutive per le equazioni di terzo grado, nel capitolo 51 della *Practica arithmetice,* Cardano aveva trattato la determinazione delle soluzioni di particolari equazioni di terzo grado. Era poi passato ad evidenziare una stretta relazione tra quattro quantità in proporzione continua ed equazioni di terzo grado.[112]
Ossia, se si considera l'equazione $x^3 + q = px^2$, è possibile costruire una sequenza di quattro quantità in continua proporzione dove

- la prima è soluzione dell'equazione
- la seconda è la radice cubica del termine noto
- la terza si pone uguale ad y
- la quarta è la differenza tra il coefficiente del termine di secondo grado e la prima proporzionale

La proporzione è dunque la seguente $x : \sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{q} : y = y : (p - x)$.[113]
Per verificarlo partiamo dalle relazioni $xy = \sqrt[3]{q^2}$ e $y^2 = \sqrt[3]{q}(p - x)$. Ricavando y dalla prima e sostituendo nella seconda abbiamo $x^3 + q = px^2$, per cui x è di fatto soluzione dell'equazione data.
Si può inoltre osservare che sostituendo $x = \frac{\sqrt[3]{q^2}}{y}$ nell'equazione $x^3 + q = px^2$, si ottiene $y^3 + q = p\sqrt[3]{q}y$. Perciò la terza proporzionale y è soluzione di un'altra equazione, anche questa in relazione con le suddette quattro quantità in proporzione.

---

[112] Cfr. GAVAGNA 2010, pp. 76-77.
[113] CARDANO 1663, p. 85. Cardano applica le sue considerazioni all'equazione $x^3 + 64 = 18x^2$: in questo caso la prima proporzionale è 2, la seconda è 4, la terza è 8 e la quarta è 16.

La precedente sostituzione inoltre permette anche qui di trasformare una equazione cubica del tipo $x^3 + q = px^2$ in una mancante del termine di secondo grado alla quale è applicabile la nota formula risolutiva.

II. EQUAZIONI E PROPORZIONI NELL'OPERA DI VIÈTE

Quanto esposto da Cardano nella *Practica arithmetice* stabilisce, seppure in due casi particolari, un legame tra equazioni e proporzioni. Tra la fine del Cinquecento e gli albori del Seicento, l'argomento verrà sviluppato, in un'ottica ben più generale, nell'innovativa opera algebrica di François Viète, diventando uno degli elementi dominanti della sua trattazione.[114]
Il testo che fa da cardine a tutta l'opera di Viète è *In artem analyticem Isagoge* (Introduzione all'arte analitica). Vi sono descritti sia i metodi dell'analisi sia i fondamenti delle tecniche di manipolazione algebrica.
All'inizio dell'opera, dopo aver ricordato il metodo di analisi e sintesi degli antichi, Viète introduce il proprio metodo analitico (arte analitica) che comprende: *zetetica, poristica* e *retica* o *esegetica*.[115]
Lo schema metodologico vietiano si sviluppa attraverso i seguenti passi:

Enunciato del *Problema* da risolvere.
Zetetica (prima fase dell'analisi): partendo dai dati del problema si giunge ad una prima uguaglianza o proporzione.
Poristica (seconda fase dell'analisi): dalla precedente uguaglianza o proporzione, mediante l'impiego di regole algebriche, si giunge ad un'altra uguaglianza o proporzione da cui scaturisce la soluzione del problema.
Retica o *esegetica* (terza fase dell'analisi): consiste nel dare un significato geometrico o aritmetico al risultato della *poristica*. La *retica* geometrica interpreta le formule in ambito geometrico, la *retica* aritmetica riguarda le applicazioni numeriche, che seguono lo svolgimento del problema.
Successivamente Viète definisce la *logistica speciosa* (nuova algebra letterale) che contrappone alla *logistica numerosa* (algebra numerica), introducendo la nomenclatura e le notazioni per le grandezze che sono di due tipi: grandezze scalari (incognita e potenze dell'incognita) e generi delle grandezze (parametri, ossia i dati del problema). Per tutte introduce, per la prima volta, delle lettere[116]: vocali maiuscole per le grandezze scalari e consonanti maiuscole per i generi delle grandezze.[117]
Le tecniche per il calcolo letterale vengono da lui esaminate in termini fondazionali nell'*Isagoge* ed algoritmicamente nelle *Notae priores*.
I *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo* sono dedicati alla teoria delle equazioni algebriche, anche con l'intento di riesaminare i risultati degli algebristi precedenti alla luce della *logistica speciosa*. Nel *De aequationum recognitione* si studiano le equazioni dal punto di vista della *zetesi*, del *plasma* e della *sincresi*, come meglio preciseremo in seguito. Nel *De aequationum emendatione* si attuano particolari trasformazioni delle equazioni; sono

---

114 Sull'opera algebrica di VIÈTE cfr.: FREGUGLIA 1989; FREGUGLIA 1994; GIUSTI 1992; MARIE 1884, pp. 30-62; RITTER 1895; ULIVI 2017.
115 I primi due erano noti al matematico greco Pappo, che ne parla nel VII libro delle *Collezioni matematiche*: qui sono evidenziati due tipi di analisi, teoretica e problematica, che si possono assimilare rispettivamente alla *zetetica* e alla *poristica*.
116 Per un confronto con le notazioni algebriche precedenti si veda la nota 44.
117 Tuttavia per le potenze dell'incognita non usa una notazione esponenziale scrivendo ad esempio *A quadrato, A cubo* ecc., o con relative abbreviazioni.

esposti sei *remedia* contro eventuali ‘malformità’ presenti nell’equazione, che servono per predisporre l’equazione stessa in modo da poterla risolvere con i relativi metodi.
L’*Effectionum geometricarum canonica recensio* ha per scopo principale la costruzione geometrica della soluzione di un’equazione di secondo grado

II.1. La zetesi ed il metodo analitico di Viète

Scopo della *zetesi* è la riduzione delle equazioni a *zetetici*, ossia ad opportuni problemi in parte risolti negli *Zeteticorum libri V*, trasformandole in proporzioni continue.
Vediamo in primo luogo come Viète stabilisca una stretta connessione tra equazioni di secondo grado e proporzioni. In questo contesto mostreremo al tempo stesso come si sviluppano le tre fasi dell’analisi vietiana.

Capitolo III, Teorema I

> *Se A quadrato più B per A è uguale a Z quadrato, allora esistono tre grandezze in proporzione* [*continua*], *la media delle quali è Z, inoltre B è la differenza delle estreme ed A è l’estrema minore.*[118]

Data l’equazione di secondo grado nell’incognita A, con B e Z assegnati[119]

$$A^2 + BA = Z^2$$

si può scrivere

$$(B + A)A = Z^2$$

da cui

$$(B + A) : Z = Z : A$$

Allora, come richiesto dal teorema, esistono tre continue proporzionali di cui è nota la media Z e la differenza delle estreme $B = B + A - A$.
Fino a questo punto abbiamo la prima fase dell’analisi, la *zetetica*.
Si sviluppa poi la seconda fase dell’analisi, la *poristica*, che porta a determinare la soluzione A riconducendosi a successivi zetetici, ossia problemi risolti negli *Zeteticorum libri V*.

Zetetico III, 1

> *Data la media di tre linee in proporzione* [*continua*] *e la differenza delle estreme, trovare le estreme.*[120]

Ossia, dati Z *e* B, si tratta di trovare E ed A nella proporzione $E : Z = Z : A$ essendo

$$\begin{cases} EA = Z^2 \\ E - A = B \end{cases}$$

Ci si riconduce allora allo

Zetetico II, 3

---

118 Viète 1646 : *De aequationum recognitione*, p. 85.
119 Qui ed in seguito seguiremo sempre un formalismo moderno mantenendo tuttavia le lettere usate da Viéte.
120 Viète 1646: *Zeteticorum libri V*, p. 56.

Dato il prodotto di due lati e la loro differenza, trovare i lati.[121]

Si utilizza qui la proposizione 13 delle *Notae priores* che esprime la relazione $(E+A)^2 - (E-A)^2 = 4AE$ da cui per la precedente $E+A=\sqrt{4Z^2+B^2}=\mathrm{D}$

Si ricorre infine allo

Zetetico I, 1

Data la somma e la differenza di due lati, trovare i lati.[122]

Ossia:

$$\begin{cases} E+A=D \\ E-A=B \end{cases}$$

Proseguendo abbiamo quindi $2A=D-B$, $A=\frac{D}{2}-\frac{B}{2}$.

È interessante osservare che, sostituendo, risulta $A=\frac{\sqrt{4Z^2+B^2}}{2}-\frac{B}{2}$ dove si riconosce la nota formula che fornisce la soluzione positiva dell'equazione data $A^2+BA=Z^2$.

In modo analogo nel *De recognitione* vengono poi esaminati i casi:

$A^2-BA=Z^2$ che si può scrivere $(A-B):Z=Z:A$ (Capitolo III, Teorema II)[123]

$BA-A^2=Z^2$ che si può scrivere $(B-A):Z=Z:A$ (Capitolo III, Teorema III)[124]

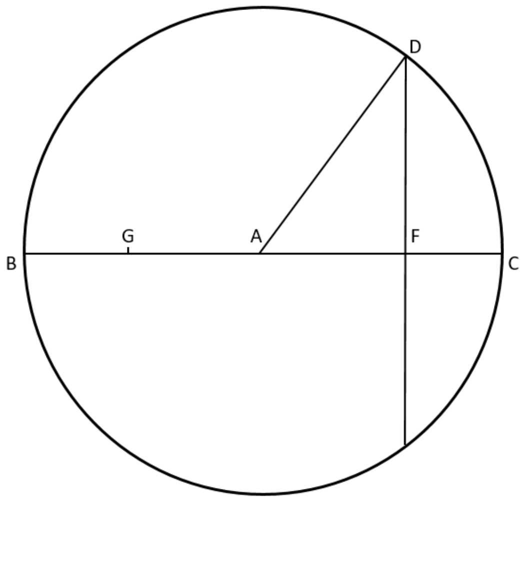
Anche per le equazioni di terzo grado Viète tratta un'ampia casistica, associando ogni volta all'equazione una proporzione continua, ad esempio:

Alla $B^2A-A^3=B^2D$ ossia $A^3+B^2D=B^2A$ corrisponde la proporzione $B:A=A:\frac{A^2}{B}=\frac{A^2}{B}:(A-D)$ (Capitolo IV, Teorema III).[125]

Alla $BA^2-A^3=BD^2$ ossia $A^3+BD^2=BA^2$ corrisponde la proporzione $B:\frac{BD}{A}=\frac{BD}{A}:(B-A)=(B-A):\left(\frac{BD}{A}-D\right)$ (Capitolo V, Teorema III).[126]

Per l'equazione $A^2+BA=Z^2$ vediamo a questo punto la terza fase dell'analisi, la *retica* o *esegetica*.

La *retica aritmetica* consiste solo nel riportare subito dopo il teorema un esempio numerico: data l'equazione $x^2+10x=144$, dove $B=10$



121 Ivi, p. 51.
122 Ivi, p. 42.
123 VIETE 1646: *De aequationum recognitione*, p. 85.
124 Ivi, p. 86.
125 Ivi, p. 87.
126 Ivi, p. 89. Queste due equazioni cubiche sono della stessa t ... ɔne con proporzioni continue.

e $Z = 12$, la proporzione corrispondente è
$18 : 12 = 12 : 8$, con $A = 8$.
La *retica geometrica* viene invece sviluppata nella *Canonica recensio*, dove alla precedente equazione $A^2 + BA = Z^2$ Viète associa la relativa configurazione geometrica, ossia la costruzione geometrica della soluzione, tramite la

Proposizione XII (corrispondente allo Zetetico III, 1)

Data la media di tre grandezze in proporzione [*continua*] *e la differenza delle estreme, trovare le estreme*.[127]

Siano DF $= Z$ la media proporzionale e GF $= B$ la differenza delle estreme, e si riporti DF perpendicolarmente a GF. Detto A il punto medio di GF, si tracci la circonferenza di centro A e raggio AD, che permette di costruire FC. Abbiamo:

BF = GF + FC (essendo BG = FC)

Inoltre, per il secondo Teorema di Euclide

BF : DF = DF : FC

dunque, posto FC $= A$, segue

$$(B + A) : Z = Z : A\ .$$

Da questa proporzione, dove sono date la media e la differenza delle estreme, otteniamo l'equazione di partenza $A^2 + BA = Z^2$ della quale abbiamo così costruito la soluzione $A =$ FC.

II.2. La sincresi

La *sincres*i è il confronto tra due equazioni *correlative*. In pratica permette di

a) esprimere i coefficienti in funzione delle radici (formule di Viète-Girard).
b) stabilire una relazione tra un'equazione e una proporzione continua in cui intervengono le radici dell'equazione.

Più precisamente vengono considerate solo equazioni con due coefficienti, che Viète chiama *ancipite, contraddittorie* e *inverse*. A titolo di esempio, prendiamo in esame solo equazioni *ancipite*, in generale del tipo

$$BA^m - A^n = Z \qquad BE^m - E^n = Z \quad (m < n)$$

dove significa ammettere che A ed E siano le due soluzioni reali positive dell'equazione $Bx^m - x^n = Z$
Eguagliando i primi due membri delle equazioni date abbiamo:
$BA^m - A^n = BE^m - E^n$ da cui

$$B = \frac{A^n - E^n}{A^m - E^m}$$

Inoltre, sostituendo nella prima, ricaviamo

---

[127] Viète 1646: *Effectionum geometricarum canonica recensio*, p. 233.

$$Z = \frac{A^n - E^n}{A^m - E^m} A^m - A^n = \frac{A^n E^m - E^n A^m}{A^m - E^m}$$

che si potranno semplificare utilizzando opportune relazioni algebriche dimostrate nelle *Notae priores.*
Così, per le equazioni di secondo grado $(m = 1, n = 2)$

$$BA - A^2 = Z \quad BE - E^2 = Z$$

otteniamo

$$B = \frac{A^2 - E^2}{A - E} = A + E$$

$$Z = \frac{A^2 E - E^2 A}{A - E} = AE$$

ossia le note relazioni tra i coefficienti e le due soluzioni positive dell'equazione $Bx - x^2 = Z$**.**
Analogamente, per le equazioni di terzo grado $(m = 1, \mathrm{n} = 3)$

$$BA - A^3 = Z \qquad BE - E^3 = Z$$

abbiamo

$$B = \frac{A^3 - E^3}{A - E} = A^2 + AE + E^2$$

$$Z = \frac{A^3 E - E^3 A}{A - E} = \frac{AE(A^2 - E^2)}{A - E} = AE\,(A + E) \quad \text{oppure} \quad Z = A\,(AE + E^2) = E\,(AE + A^2)$$

che esprimono le relazioni tra i coefficienti e le due soluzioni positive dell'equazione $Bx - x^3 = Z$

Si deduce inoltre il seguente risultato

> *Se* $BA - A^3 = Z$ *e* $BE - E^3 = Z$*, esistono tre grandezze in proporzione continua,* $A : \sqrt{AE} = \sqrt{AE} : E$ *, tali che* B è *la somma dei quadrati delle tre proporzionali e* Z è *uguale al prodotto di una delle estreme (*A *oppure* E*) per la somma dei quadrati delle altre due proporzionali.*[128]

II.3. La transmutatio

La *transmutatio* è uno dei *remedia* del *De aequationum emendatione*, ed è «adversus vitium negationis». Nell'ottica dell'algebra medievale e rinascimentale, dove si era vincolati alla positività dei coefficienti delle equazioni, ha lo scopo di trasformare un'equazione con un coefficiente negativo in una con tutti i coefficienti positivi.

Ad esempio, data l'equazione

[128] Ivi: Capitolo XVII, Teorema II, p. 111.

$$A^3 - BA = Z$$

la trasformazione viene ottenuta in due modi.

Nel primo Viète procede utilizzando solo un *plasma*, ossia un cambio di variabile già introdotto nel *De aequationum recognitione*. Posto $A = \frac{Z}{E}$, sostituendo abbiamo

$\frac{Z^3}{E^3} - B\frac{Z}{E} = Z$ da cui $Z^3 - BZE^2 = ZE^3$ ed infine

$$E^3 + BE^2 = Z^2$$

che ha tutti i coefficienti positivi.

Nel secondo utilizza le proporzioni.

Infatti la $A^3 - BA = Z$ si può scrivere $A(A^2 - B) = \sqrt[3]{Z^3}$ da cui $A : \sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{Z^2} : (A^2 - B)$

Posto ora $A^2 - B = E$ ossia $A = \sqrt{E + B}$ otteniamo

$\sqrt{E + B} : \sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{Z^2} : E$ quindi $E\sqrt{E + B} = Z$ ossia $E^2(E + B) = Z^2$ ritrovando

$$E^3 + BE^2 = Z^2.$$[129]

Questo esempio, seppure di minore interesse rispetto ai precedenti, e al di là dell'aspetto puramente teorico e dell'artificiosità del procedimento, costituisce una ulteriore testimonianza dell'importante ruolo delle proporzioni nell'algebra di Viète.

ELENCO DELLE SIGLE

BAV: Biblioteca Apostolica Vaticana
BCS: Biblioteca Comunale di Siena
BMLF: Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze
BNF: Biblioteca Nazionale di Firenze.
BRF: Biblioteca Riccardiana di Firenze
BSL: Biblioteca Statale di Lucca

BIBLIOGRAFIA

FONTI

ANONIMO (1988), *Il trattato d'algibra*, dal manoscritto Fond. prin. II.V.152 della Biblioteca Nazionale di Firenze, a cura e con introduzione di Raffaella Franci e Marisa Pancanti, in *Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale*, 18, Siena, Università degli Studi di Siena, 1988.

ANONIMO (1994), *Trattato dell'alcibra amuchabile*, dal codice Ricc. 2263 della Biblioteca Riccardiana di Firenze, a cura e con introduzione di Annalisa Simi, in *Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale*, 22, Siena, Università degli Studi di Siena, 1994.

BOMBELLI, RAFAEL (1966), *L'Algebra*. Prima edizione integrale, Milano, Feltrinelli, 1966.

[129] Viète 1646: *De aequationum emendatione*, Capitolo II, p. 133.

CALANDRI, FILIPPO (1969), *Aritmetica.* Secondo la lezione del codice 2669 (sec. XV) della Biblioteca Riccardiana di Firenze, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, Firenze, Cassa di Risparmio di Firenze, 1969.

CALANDRI, FILIPPO(1982), *Una raccolta di ragioni*, dal Codice L.VI.45 della Biblioteca Comunale di Siena, a cura e con introduzione di Daniela Santini, in *Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale*, 4, Siena, Servizio editoriale dell'Università di Siena, 1982.

CALANDRI, PIER MARIA (1974), *Tractato d'abbacho.* Dal codice Acq. e doni 154 (sec. XV) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, in *Testimonianze di Storia della Scienza*, 7, Pisa, Domus Galilaeana, 1974.

CARDANO, GIROLAMO (1663), *Opera omnia*, Lugduni, Sumptibus Ioanni Antonii Huguetani et Marci Antonii Ravaud, 1663, vol. IV.

EUCLIDE (1970), *Gli Elementi*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, Torino, U.T.E.T., 1970.

GALIGAI, FRANCESCO (1521), *Summa de arithmetica*, Firenze, Bernardo Zucchetta, 1521.

LEONARDO PISANO (1857), *Il Liber abbaci*, secondo la lezione del Codice Magliabechiano C.I.2616, Badia Fiorentina, n. 73, in *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimo terzo*, a cura di Baldassarre Boncompagni, vol. I, Roma, Tipografia delle Scienze Matematiche, 1857.

MAESTRO GILIO (1983), *Questioni d'algebra*, dal Codice L.IX.28 della Biblioteca Comunale di Siena, a cura e con introduzione di Raffaella Franci, in *Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale*, 6, Siena, Servizio editoriale dell'Università di Siena, 1983.

MAZZINGHI, ANTONIO (1967), *Trattato di fioretti nella trascelta a cura di M° Benedetto*, secondo la lezione del codice L.IV.21 (sec. XV) della Biblioteca degl'Intronati di Siena, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, in *Testimonianze di Storia della Scienza*, 4, Pisa, Domus Galilaeana, 1967.

PACIOLI, LUCA (1494), *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, Venezia, Paganino de' Paganini, 1494.

PACIOLI, LUCA (2007), *Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos*, a cura di Giuseppe Calzoni, Gianfranco Cavazzoni, Città di Castello, Delta Grafica, 2007.

PAOLO DELL'ABBACO (1964), *Trattato d'aritmetica.* Secondo la lezione del Codice Magliabechiano XI.86 della Biblioteca Nazionale di Firenze, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, in *Testimonianze di Storia della Scienza,* 2, Pisa, Domus Galilaeana, 1964.

PIERO DELLA FRANCESCA (1970), *Trattato d'abaco*, dal Codice Ashburnhamiano 280 (359*-291*) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, in *Testimonianze di Storia della Scienza*, 6, Pisa, Domus Galilaeana, 1970.

SCUOLA LUCCHESE (1973), *Libro d'abaco*, dal codice 1754 (sec. XIV) della Biblioteca Statale di Lucca, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, Lucca, Cassa di Risparmio di Lucca, 1973.

STIFEL, MICHAEL (1544), *Arithmetica integra*, Norimbergae, apud Iohan. Petreium, 1544.

TARTAGLIA, NICCOLÒ (1546), *Quesiti et inventioni diverse*, Venezia, Curzio Troiano, 1546.

TARTAGLIA, NICCOLÒ (1556 e 1560), *General trattato di numeri et misure*, Venezia, Curzio Troiano, Prima parte e Seconda parte 1556, Sesta parte 1560.

VIÈTE, FRANÇOIS (1646), *Opera mathematica*, Lugduni Batavorum, Ex officina Bonaventurae et Abrahami Elzeviriorum, 1646.

LETTERATURA

ARRIGHI, GINO (1967), *Una trascelta delle «miracolose ragioni» di Maestro Giovanni di Bartolo (sec. XIV-XV)*, dal codice Palatino 573 della Biblioteca Nazionale di Firenze, «Periodico di Matematiche», XLV, 1, 1967, pp. 11-24.

ARRIGHI, GINO (2004), *La Matematica dell'età di mezzo. Scritti scelti*, Pisa, Edizioni ETS, 2004.

BARBERINI, STEFANIA (2012/2013), *L'Ars Analytica di François Viète: Isagoge, Notae Priores, Zeteticorum libri*, tesi di laurea, Università di Bologna, Corso di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2012/2013.

BARTOLOZZI MARGHERITA, FRANCI RAFFAELLA (1990), *La teoria delle proporzioni nella matematica dell'abaco da Leonardo Pisano a Luca Pacioli*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», X, 1, 1990, pp. 3-28.

BARTOLUCCI, MARTINA (2016/2017), *Sui problemi determinati dell'*Algebra *di Raffaele Bombelli*. Università degli Studi di Firenze. Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Tesi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2012/2013.

FRANCI, RAFFAELLA(1988), *Antonio de' Mazzinghi: an algebraist of the 14th Century*, «Historia Mathematica», 15, 1988, pp. 240-249.

FRANCI, RAFFAELLA (1998), *La trattatistica d'abaco nel Quattrocento*, in *Luca Pacioli e la Matematica del Rinascimento.* Atti del Convegno internazionale di studi, Sansepolcro 13-16 aprile 1994, a cura di Enrico Giusti, Città di Castello, Petruzzi, 1998, pp. 61-75.

FRANCI RAFFAELLA, TOTI RIGATELLI LAURA (1985), *Towards a history of algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli,* «Janus», 72, 1985, pp. 17-82.

FRANCI RAFFAELLA, TOTI RIGATELLI LAURA (1989), *La matematica nella tradizione dell'abaco nel XIV e XV secolo,* in *Storia sociale e culturale d'Italia*, vol. V, Busto Arsizio, Bramante, 1989, pp. 68-94.

FREGUGLIA, PAOLO (1989), *Algebra e geometria in Viète*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», IX, 1, 1989, pp. 49-90.

FREGUGLIA, PAOLO (1994), *Sur la théorie des équations algébriques entre le XVI et le XVII siècle*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XIV, 2, 1994, pp. 259-298.

GAVAGNA, VERONICA (2010), *Medieval Heritage and New Perspectives in Cardano's* Practica arithmetice, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XXX, 1, 2010, pp. 61-80.

GIUSTI, ENRICO (1992), *Algebra and Geometry in Bombelli and Viète*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XII, 2, 1992, pp. 303-328.

GIUSTI, ENRICO (2002), *Matematica e commercio nel* Liber abaci, in *Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*, a cura di Enrico Giusti e con la collaborazione di Raffaella Petti, Firenze, Edizioni Polistampa, 2002, pp. 59-120.

HEEFFER, ALBRECHT (2009), *Algebraic partitioning problems from Luca Pacioli's Perugia manuscript (Vat. Lat. 3129)*, «SCIAMVS», 10, 2009, pp. 1-45.

HEEFFER, ALBRECHT (2010), *From the second unknown to the symbolic equation*, in *Philosophical aspects of symbolic reasoning in Early-Modern Mathematics*, London, College Publications, 2010, pp. 57-101.

HEEFFER, ALBRECHT (2018), *The mathematics of Luca Pacioli: appropriation, not plagiarism*, in *Luca Pacioli. Maestro di contabilità, matematico, filosofo della natura* (Atti del *Convegno Internazionale,* Sansepolcro-Urbino-Perugia-Firenze, 14-17 giugno 2017*)*, a cura di Esteban Hernández-Esteve e Matteo Martelli, Biblioteca del Centro Studi Mario Pancrazi, Umbertide, Digital Editor, 2018, pp. 229-240.

HØYRUP, JENS (2007), *Jacopo da Firenze's «Tractatus Algorismi» and Early Italian Abbacus Culture,* Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2007.

MARACCHIA, SILVIO (2005), *Storia dell'Algebra*, Napoli, Liguori, 2005.

MARIE, MAXIMILIEN (1884), *Viète François*, in *Histoire des Sciences mathématiques et physiques*, vol. III, 1884, pp. 27-64.

RITTER, FRANÇOIS (1895), *François Viète, inventeur de l'algèbre moderne, 1540-1603. Essai sur sa vie et son oeuvre*, «Revue occidentale philosophique, sociale et politique», 10, 1895.

ROMMEVAUX-TANI, SABINE (2016), *Michael Stifel, lecteur de la* Practica arithmetice *de Gerolamo Cardano*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XXXVI, 1, 2016, pp. 83-110.

SIMI, ANNALISA (2003), *Quattro secoli di storia della regola del Cataino in Italia*, in *De la Chine à l'Occitanie. Chemins entre arithmétique et algèbre*. Actes du colloque international, Toulouse 22-24 settembre 2000, a cura di Maryvonne Spiesser e Michel Guillemot, Toulouse, Éditions du C.I.H.S.O, 2003, pp. 167-196.

SMITH, FENNY K.C. (1998), *Proportion in the* Summa de arithmetica, geometria, proportione et proportionalita *of Luca Pacioli*, in *Luca Pacioli e la Matematica del Rinascimento*, Atti del Convegno internazionale di studi, Sansepolcro 13-16 aprile 1994, a cura di Enrico Giusti, Città di Castello, Petruzzi, 1998, pp. 103-125.

TOSCANO, FABIO (2009), *La formula segreta. Tartaglia, Cardano e il duello che infiammò l'Italia del Rinascimento*, Milano, Sironi, 2009.

TOTI RIGATELLI, LAURA (1983), *Matematici fiorentini del Tre-Quattrocento*, «Symposia Mathematica dell'istituto Nazionale di Alta Matematica», 27, 1983, pp. 3-21.

ULIVI, ELISABETTA (1994), *Luca Pacioli, una biografia scientifica*, in *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento*, a cura di Enrico Giusti, Carlo Maccagni, Firenze, Giunti, 1994, pp. 21-78.

ULIVI, ELISABETTA (1996), *Per una biografia di Antonio Mazzinghi, maestro d'abaco del XIV secolo*, in «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XVI, 1, 1996, pp. 101-150.

ULIVI, ELISABETTA (2002a), *Benedetto da Firenze (1429-1479), un maestro d'abaco del XV secolo. Con documenti inediti e con un' Appendice su abacisti e scuole d'abaco a Firenze nei secoli XIII-XVI*, Pisa-Roma, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, 2002 (fascicolo monografico del «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XXII, 1, pp. 3- 243).

ULIVI, ELISABETTA (2002b), *Scuole e maestri d'abaco in Italia tra Medioevo e Rinascimento*, in *Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*, a cura di Enrico Giusti e con la collaborazione di Raffaella Petti, Firenze, Edizioni Polistampa, 2002, pp. 121-159.

ULIVI, ELISABETTA (2004a), *Maestri e scuole d'abaco a Firenze: la Bottega di Santa Trinita*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XXIV, 1, 2004, pp. 43-91.

ULIVI, ELISABETTA (2004b), *Raffaello Canacci, Piermaria Bonini e gli abacisti della famiglia Grassini,* «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XXIV, 2, 2004, pp. 123-211.

ULIVI, ELISABETTA (2008), *Scuole d'abaco e insegnamento della matematica*, in *Il Rinascimento Italiano e l'Europa.* Volume quinto: *Le scienze,* Fondazione Cassamarca, Treviso, Angelo Colla Editore, 2008, pp. 403-420.

ULIVI, ELISABETTA (2011), *Su Leonardo Fibonacci e sui maestri d'abaco pisani dei secoli XIII-XV*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XXXI, 2, 2011, pp. 247-286.

ULIVI, ELISABETTA (2012), *I Maestri Giovanni dei Sodi, Francesco Galigai e le loro scuole d'abaco*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XXXII, 2, 2012, pp. 311-405.

ULIVI, ELISABETTA (2013), *Gli abacisti fiorentini delle famiglie 'del Maestro Luca', Calandri e Micceri e le loro scuole d'abaco (sec. XIV-XVI)*, Firenze, Leo S. Olschki, 2013.

ULIVI, ELISABETTA (2015a), *Masters, questions and challenges in the abacus schools*, «Archive for History of Exact sciences», 69, 6, 2015, pp. 651-670.

ULIVI, ELISABETTA (2015b), *Sul Maestro Iacopo da Firenze autore del* Tractatus algorismi, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XXXV, 2, 2015, pp. 185-199.

ULIVI, ELISABETTA (2017), *Aspetti dell'opera algebrica di François Viète: una proposta didattica*, Conferenza presentata al IV Convegno Nazionale *La Storia della Matematica in classe*, Sansepolcro 19-21 ottobre 2017 (www.centrostudimariopancrazi.it).

ULIVI, ELISABETTA (2018), *Giovanni del Sodo, un maestro d'abaco fiorentino nel* Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos *di Luca Pacioli*, in *Luca Pacioli. Maestro di contabilità, matematico*, *filosofo della natura* (Atti del *Convegno Internazionale*, Sansepolcro-Urbino-Perugia-Firenze, 14-17 giugno 2017*)*, a cura di Esteban Hernández-Esteve e Matteo Martelli, Biblioteca del Centro Studi Mario Pancrazi, Umbertide, Digital Editor, 2018, pp. 87-107.

URBANI, ANNA (1980/1981), *Analisi dei* Fioretti *di Maestro Antonio de' Mazzinghi tratti dal codice L. IV. 21 della biblioteca degli Intronati di Siena*. Tesi di laurea. Università degli Studi di Siena. Corso di Laurea in Matematica, A.A. 1980/1981.

VAN EGMOND, WARREN (1980), *Practical Mathematics in the Italian Renaissance. A catalog of Italian abbacus manuscripts and printed books to 1600*, «Supplemento agli Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze», vol. 1, 1980.

ZOCCOLA, MARTINA (2017), *Proporzioni e algebra della trattatistica matematica italiana del Medioevo e del Rinascimento*. Tesi di laurea. Università degli Studi di Firenze. Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Corso di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2016/2017.