Algebres simpliciales S^1-equivariantes, theorie de de Rham et theoremes HKR multiplicatifs

COMPOSITIO MATHEMATICA

Algèbres simpliciales S^1-équivariantes, théorie de de Rham et théorèmes HKR multiplicatifs

Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi

Compositio Math. **147** (2011), 1979–2000.

doi:10.1112/S0010437X11005501

FOUNDATION COMPOSITIO MATHEMATICA

The London Mathematical Society

Compositio Math. 147 (2011) 1979–2000
doi:10.1112/S0010437X11005501

Algèbres simpliciales S^1-équivariantes, théorie de de Rham et théorèmes HKR multiplicatifs

Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi

Abstract

This work establishes a comparison between functions on derived loop spaces (Toën and Vezzosi, *Chern character, loop spaces and derived algebraic geometry*, in *Algebraic topology: the Abel symposium 2007*, Abel Symposia, vol. 4, eds N. Baas, E. M. Friedlander, B. Jahren and P. A. Østvær (Springer, 2009), ISBN:978-3-642-01199-3) and de Rham theory. If A is a smooth commutative k-algebra and k has characteristic 0, we show that two objects, $S^1 \otimes A$ and $\epsilon(A)$, determine one another, functorially in A. The object $S^1 \otimes A$ is the S^1-equivariant simplicial k-algebra obtained by tensoring A by the simplicial group $S^1 := B\mathbb{Z}$, while the object $\epsilon(A)$ is the de Rham algebra of A, endowed with the de Rham differential, and viewed as a *ϵ-dg-algebra* (see the main text). We define an equivalence φ between the homotopy theory of simplicial commutative S^1-equivariant k-algebras and the homotopy theory of ϵ-dg-algebras, and we show the existence of a functorial equivalence $\phi(S^1 \otimes A) \sim \epsilon(A)$. We deduce from this the comparison mentioned above, identifying the S^1-equivariant functions on the derived loop space LX of a smooth k-scheme X with the algebraic de Rham cohomology of X/k. As corollaries, we obtain *functorial* and *multiplicative* versions of decomposition theorems for Hochschild homology (in the spirit of Hochschild–Kostant–Rosenberg) for arbitrary semi-separated k-schemes. By construction, these decompositions are *moreover* compatible with the S^1-action on the Hochschild complex, on one hand, and with the de Rham differential, on the other hand.

Résumé

Ce travail a pour objectif d'etablir une comparaison entre fonctions sur les espaces des lacets dérivés (Toën and Vezzosi, *Chern character, loop spaces and derived algebraic geometry*, in *Algebraic topology: the Abel symposium 2007*, Abel Symposia, vol. 4, eds N. Baas, E. M. Friedlander, B. Jahren and P. A. Østvær (Springer, 2009), ISBN:978-3-642-01199-3) et théorie de de Rham. Pour une k-algèbre commutative A, lisse sur k de caractéristique nulle, nous montrons que deux objets, $S^1 \otimes A$ et $\epsilon(A)$, se déterminent mutuellement, et ce fonctoriellement en A. L'objet $S^1 \otimes A$ est la k-algèbre simpliciale S^1-équivariante obtenue en tensorisant A par le groupe simplicial $S^1 := B\mathbb{Z}$. L'objet $\epsilon(A)$ est l'algèbre de de Rham de A, munie de la différentielle de de Rham et considérée comme une *ϵ-dg-algèbre* (i.e. une algèbre dans une certaine catégorie monoïdale de $k[\epsilon]$-dg-modules, où $k[\epsilon] := H_*(S^1, k)$). Nous construisons une équivalence ϕ, entre la théorie homotopique des k-algèbres

Received 9 February 2010, accepted in final form 27 February 2011, published online 29 July 2011.
2010 Mathematics Subject Classification 55U10, 16E45 (primary), 14F40, 18G55 (secondary).
Keywords: simplicial algebras, de Rham algebra, Hochschild homology, homotopical algebra.

simpliciales S^1-équivariantes et celle des ϵ-dg-algèbres, et nous montrons l'existence d'une équivalence fonctorielle $\phi(S^1 \otimes A) \sim \epsilon(A)$. Nous déduisons de cela la comparaison annoncée, identifiant les fonctions S^1-équivariantes sur LX, l'espace des lacets dérivé d'un k-schéma X lisse, et la cohomologie de de Rham algébrique de X/k. Cela nous permet aussi de prouver des versions *fonctorielles* et *multiplicatives* des théorèmes de décomposition de l'homologie de Hochschild (du type Hochschild–Kostant–Rosenberg), pour des k-schémas semi-séparés quelconques. Par construction, ces décompositions sont *de plus* compatibles avec d'une part l'action naturelle de S^1 sur le complexe de Hochschild, et d'autre part la différentielle de de Rham.

Table des matières

1. Introduction

Dans ce travail nous comparons la théorie des fonctions sur l'espace des lacets dérivés d'un schéma de caractéristique nulle X, au sens de la géométrie algébrique dérivée (voir [Toe09, TV09b, TV09a]), avec la théorie de de Rham de X. Cette comparaison est annoncée dans [BN07] ainsi que dans notre récent travail [TV09b], et semble découler d'une comparaison plus générale, mais encore conjecturale, entre fonctions sur les espaces de lacets dérivés et homologie cyclique. Dans ce travail nous établirons cette comparaison avec la théorie de de Rham de manière directe, sans avoir à passer par l'homologie cyclique. Une conséquence remarquable de cette approche directe est de fournir de nouvelles preuves, et une nouvelle compréhension, des théorèmes Hochschild–Kostant–Rosenberg (HKR) pour les schémas (dans le style de [BF08, Sch04, Yek02]).

Soit k un anneau commutatif de caractéristique nulle et A une k-algèbre lisse sur k. Le schéma dérivé des lacets de $X = \operatorname{Spec} A$ est par définition $LX := \mathbb{R}\operatorname{Map}(S^1, X)$, où $S^1 := B\mathbb{Z}$ est considéré comme un groupe simplicial et $\mathbb{R}\operatorname{Map}$ est le hom interne (dérivé) dans la catégorie de modèles des champs dérivés sur k (voir [Toe09, TV09b] pour plus de détails). Le schéma dérivé LX est affine, et équivalent au spectre de la k-algèbre commutative simpliciale $S^1 \otimes A$ (où l'on utilise ici l'enrichissement simplicial naturel de la catégorie des k-algèbres simpliciales commutatives : en degré n, $S^1 \otimes A$ est $\bigotimes_{\mathbb{Z}^n} A$, où le produit tensoriel des $\mathbb{Z}^n$-copies de A est pris sur k). Ainsi, le problème qui consiste à comparer les fonctions sur LX et la théorie de de Rham de X se résume de manière purement algébrique à étudier les relations entre $S^1 \otimes A$ et l'algèbre de de Rham de A/k. C'est précisément cette comparaison qui va nous interesser dans cette article, pluôt que les applications à la géométrie algébrique dérivée pour lesquelles nous renvoyons le lecteur interessé à [BN07, TV09a, TV09b]. Le résultat principal de ce travail affirme que la donnée de $S^1 \otimes A$, munie de son action naturelle de S^1, est *équivalente*, à homotopie près, à la donnée de l'algèbre de de Rham de A/k, munie de sa différentielle de de Rham.

Afin de donner un énoncé plus précis considérons $DR(A)=\mathrm{Sym}_A(\Omega^1_{A/k}[1])$ l'algèbre de de Rham de A/k, pour laquelle $\Omega^n_{A/k}$ est placé en degré $-n$. Munie de la différentielle nulle $DR(A)$ est une k-dg-algèbre commutative (une *cdga* pour faire court). De plus, la différentielle de de Rham munit cette *cdga* d'une structure additionelle, à savoir celle d'une $\epsilon-cdga$, c'est à dire d'une opération de degré -1, $\epsilon : DR(A) \longrightarrow DR(A)[1]$, satisfaisant la règle de Liebniz (au sens gradué) par rapport à la multiplication dans $DR(A)$ (voir § 1 pour la définition précise des $\epsilon-cdga$, que l'on est en droit aussi d'appeler des *dg-algèbres commutatives mixtes*). Cette $\epsilon-cdga$ sera notée $\epsilon(A)$. D'autre part, on peut aussi former $S^1\otimes A$, la k-algèbre commutative simpliciale obtenue en tensorisant A par le groupe simplicial $S^1=B\mathbb{Z}$. L'objet $S^1\otimes A$ est naturellement muni d'une action du groupe simplicial S^1, qui opère sur lui-même par translations, et est donc un objet de $S^1-sk-C\,\mathrm{Alg}$, la catégorie des k-algèbres simpliciales commutatives S^1-équivariantes. Notre théorème principal (voir 4.1) peut alors s'énoncer de la façon suivante.

Théorème 1.1. *Soit k un anneau commutatif de caractéristique nulle. Il existe une équivalence, ϕ, de la théorie homotopique $S^1-sk-C\,\mathrm{Alg}$ vers la théorie homotopique $\epsilon-cdga$, qui est telle que pour tout k-algèbre commutative lisse A il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$\epsilon(A)\simeq\phi(S^1\otimes A).$$

La notion d'*équivalence de théories homotopiques* utilisée dans le théorème précédent sera pour nous une équivalence de dérivateurs au sens de Grothendieck (voir [Gro] ou [Cis03, § 1], [CN08, § 1], [Mal07, § 2]). Ainsi, le théorème 1.1 nous dit que, pour toute petite catégorie I, il existe une équivalence de catégories homotopiques de diagrammes

$$\phi_I : \mathrm{Ho}(S^1-sk-C\,\mathrm{Alg}^I)\longrightarrow \mathrm{Ho}(\epsilon-cdga^I),$$

fonctorielle en I. De plus, pour tout I-diagramme de k-algèbres commutatives lisses $\mathcal{A}$, il existe un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(\epsilon-cdga^I)$

$$\phi(S^1\otimes\mathcal{A})\simeq\epsilon(\mathcal{A}),$$

qui est non seulement fonctoriel en $\mathcal{A}$, mais aussi en I. Le théorème 1.1 sera en réalité une conséquence d'un résultat plus général, valable pour toute k-algèbre commutative *simpliciale* A, affirmant l'existence d'une équivalence

$$\mathbb{L}\epsilon(N(A))\simeq\phi(S^1\otimes^{\mathbb{L}}A),$$

où $N(A)$ est la *cdga* obtenue par normalisation à partir de A, et $\mathbb{L}\epsilon$ et $S^1\otimes^{\mathbb{L}}-$ sont des versions dérivées des constructions ϵ et $S^1\otimes -$.

Le deuxième résultat principal de ce travail est un corollaire important, et immédiat, du théorème 1.1. Il s'agit d'une version multiplicative du théorème HKR valable directement au niveaux des complexes.

Corollaire 1.2. *Soit k un anneau commutatif de caractéristique nulle et X un k-schéma semi-séparé.*[1] *Alors, il existe un isomorphisme naturel dans la catégorie homotopique des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-dg-algèbres commutatives*

$$\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{X/k}[1])\simeq\mathcal{O}_X\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X\otimes^{\mathbb{L}}_k\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X,$$

[1] Rappelons qu'un schéma est *semi-séparé* s'il possède une base d'ouverts affines stable par intersections finies.

où $\mathbb{L}_{X/k}$ est le complexe cotangent de [Ill71]. En particulier, si X est lisse sur k on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/k}[1]) \simeq \mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_k \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X.$$

Il faut noter ici que ce corollaire redonne les résultats de [Yek02] et [Sch04]. Il les améliore aussi car nos isomorphismes sont *multiplicatifs*. Dans le cas des espaces complexes, le resultats du Corollaire 1.2 ont eté obtenus dans [BF08] où les auteurs affirment que leurs techniques permettons aussi de prouver les analogues pour les schémas, i.e. l'enoncé du Corollaire 1.2. Il n'est cependant pas tout à fait clair que les isomorphismes de 1.2 soient les mêmes que ceux de [BF08, Sch04, Yek02]. Notre approche permet de plus de montrer que les isomorphismes du Corollaire 1.2 sont compatibles, d'une part avec l'action de S^1 sur $\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_k \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X$, et d'autre part avec la différentielle de de Rham sur $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{X/k}[1])$. Cette compatibilité est une généralisation au niveau des complexes du fait bien connu que la différentielle de Connes sur les faisceaux d'homologie de Hochschild correspond (à travers l'isomorphisme de faisceaux $\underline{HH}_*(X) \simeq \Omega^*_X$, disons pour X lisse) à la différentielle de de Rham.

Le texte principal de ce travail est complété par deux appendices, dans lesquelles nous démontrons des résultats (sur la normalisation des algèbres simpliciales commutatives et sur l'existence de la structure de modèles injective sur les ϵ-dg-modules et les ϵ-dg-algèbres) utilisés plusieurs fois dans les sections précédentes.

Pour finir cette introduction, quelques mots concernant la stratégie de la preuve du théorème 1.1 et les difficultés que nous avons rencontrées. Il faut en fait remarquer que le point crucial est la construction de l'équivalence ϕ. En effet, par définition, $S^1 \otimes A$ est *la k-algèbre simpliciale S^1-équivariante libre sur A*. De même, nous montrons (voir proposition 2.4) que $\epsilon(A)$ est *la $\epsilon - cdga$ libre sur A*. Ainsi, une fois l'équivalence ϕ construite on déduit l'existence d'un isomorphisme naturel $\epsilon(A) \simeq \phi(S^1 \otimes A)$ formellement, par propriété universelle de ces deux objets : il suffit en effet que ϕ soit compatible avec certains foncteurs qui oublient d'une part l'action de S^1 et d'autre part la ϵ-structure. La construction d'une telle équivalence ϕ est donnée dans notre § 2 et se révèle plus compliquée que nous le croyions d'abord. Il se trouve que nous n'avons pas trouvé d'approches directes reliant les théories homotopiques $S^1 - sk - C\,\mathrm{Alg}$ et $\epsilon - cdga$, et notre construction de ϕ passe par une chaine relativement longue d'équivalences de Quillen entre plusieurs catégories de modèles auxiliaires. C'est pour cette raison que nous avons choisi de formuler cette construction dans le contexte des dérivateurs de Grothendieck, qui est relativement efficace afin de ne pas avoir à trainer d'interminables chaines d'équivalences fonctorielles (cependant, il aurait aussi été possible d'utiliser le langage des $(1,\infty)$-catégories, voir [Ber07] ou encore [TV09b, § 1]). Il est possible cependant, qu'un approche plus directe existe. A ce sujet, nous faisons pourtant remarquer qu'il existe d'une part une équivalence de Quillen $N : sk - C\,\mathrm{Alg} \longrightarrow cdga$, entre k-algèbres simpliciales commutatives et $cdga$ (en degrés non positifs), induite par le foncteur de normalisation de la correspondance de Dold–Kan (voir [SS03]). D'autre part, il existe aussi une équivalence de Quillen $N : S^1 - sk - \mathrm{Mod} \longrightarrow k[\epsilon] - dg - \mathrm{mod}$, entre les k-modules simpliciaux S^1-équivariants et les $k[\epsilon]$-dg-modules (ici $k[\epsilon] = H_*(S^1, k)$), qui elle aussi est induite par normalisation. Cependant, ces deux équivalences de Quillen ne semblent pas se promouvoir en une équivalence de Quillen $N : S^1 - sk - C\,\mathrm{Alg} \longrightarrow \epsilon - cdga$, induite par le simple foncteur de normalisation. L'obstruction à l'existence d'un tel foncteur de normalisation provient du fait que $N : S^1 - sk - \mathrm{Mod} \longrightarrow k[\epsilon] - dg - \mathrm{mod}$ n'est pas compatible avec les structures monoïdales de ces deux catégories (qui sont induites par les produits tensoriels sur k et utilisent donc des structures de type co-algèbre pour être définies), même pas en un sens *lax* de [SS03].

Le morphisme *shuffle* $N(E) \otimes N(F) \longrightarrow N(E \otimes F)$ n'est simplement pas un morphisme de $k[\epsilon]$-dg-modules. Ainsi, pour $A \in S^1 - sk - C$ Alg, $N(A)$ possède bien une structure de *cdga* d'une part, et une structure de $k[\epsilon]$-dg-module d'autre part, mais ces deux structures ne vérifient pas les conditions de compatibilité pour faire de $N(A)$ une $\epsilon - cdga$. Le fait que l'équivalence de dérivateurs ϕ que nous construisons ne peut pas être une conséquence trop directe de faits 'bien connus' est assuré, d'une certaine façon, par ses corollaires, à savoir la version fonctorielle et multiplicative des isomorphismes HKR (voir 4.2). Ces isomorphismes, même dans leurs versions non multiplicatives, sont certes bien connus (voir par exemple [Lod98, Sch04, Yek02]), mais n'ont pas du tout la réputation de faits *triviaux*, particulièrement pour les versions globales valables sur des schémas suffisamment généraux. La nouveauté dans notre approche est de ne pas oublier que le complexe de Hochschild (d'une k-algèbre commutative ou d'un k-schéma) est muni de deux structures additionnelles, une multiplication et une action de S^1 ; l'utilisation de la structure multiplicative sur le complexe de Hochschild est clairement présente dans [BF08, Sch04] mais pas l'action de S^1. C'est l'existence de ces *deux* structures qui permet le lien naturel avec le théorie de de Rham, et cela de manière essentiellement unique car ce lien est déduit de propriétés universelles.

Notations. Tout au long de cet article k désigne un anneau commutatif *de caractéristique nulle*. Les complexes de k-modules seront cohomologiquement indicés et tous concentrés en degrés non positifs par convention, i.e. de la forme

$$C^\bullet = (\cdots \to C^{-1} \to C^0 \to 0).$$

Le décalage sera $C[k]^n := C^{k+n}$. La catégorie des complexes de k-modules, concentrés en degrés négatifs, sera notée $C(k)$. Pour une k-dg-algèbre B (concentrée en degrés négatifs d'après nos conventions) on note $B - dg - \mathrm{mod}$ la catégorie des B-dg-modules à gauche (de même, concentrés en degrés négatifs). Cette catégorie est munie d'une structure de catégorie de modèles pour laquelle les équivalences sont les quasi-isomorphismes et les fibrations sont les morphismes surjectifs en degrés strictement négatifs. Nous noterons aussi *cdga* la catégorie des k-dg-algèbres commutatives (au sens graduè et toujours en degrés négatifs), que nous munirons de sa structure de modèles standard pour la quelle les équivalences sont les quasi-isomorphismes et les fibrations sont les morphismes surjectifs en degrés strictement négatifs (voir [BG76, Hin97] ou encore [Lur09, Prop. 4.3.21]). Nous utiliserons implicitement que le foncteur de normalisation induit une équivalence entre la catégorie homotopique des k-algèbres simpliciales commutatives et la catégorie homotopique de *cdga*. Les techniques de [SS03] impliquent que le foncteur de normalisation est alors l'adjoint à droite d'une équivalence de Quillen (voir la proposition A.1).

Nous noterons $S^1 := B\mathbb{Z}$ l'ensemble simplicial classifiant du groupe abélien $\mathbb{Z}$, que nous considérerons toujours comme une groupe abélien simplicial. En tant que groupe simplicial, S^1 peut opérer sur tout objet dans une catégorie simplicialement enrichie, et en particulier dans une catégorie de modèles simpliciale M. Les objets S^1-équivariants dans une telle catégorie de modèles M forment une catégorie notée $S^1 - M$. Pour M une catégorie de modèles, la catégorie homotopique de M (i.e. la catégorie M localisé selon les equivalences) sera noté $\mathrm{Ho}(M)$.

Nous utiliserons le langage, et des notions de bases, de la théorie de (pré)dérivateurs de Grothendieck (voir [Gro] ou [Cis03, § 1], [CN08, § 1], [Mal07, § 2]). Le dérivateur associé à une catégorie de modèles M sera noté $\mathbb{D}(M)$. Pour une sous-catégorie pleine M_0 d'une catégorie de modèles M, stable par équivalences, nous noterons $\mathbb{D}(M_0)$ le sous-prédérivateur plein de $\mathbb{D}(M)$

formé des objets de M_0, c'est a dire le prédérivateur $\mathbb{D}(M_0) : I \mapsto \mathrm{Ho}(M_0^I)$, pour chaque catégorie petite I. Ici il faut montrer que pour toute I, $\mathrm{Ho}(M_0^I) \to \mathrm{Ho}(M^I)$ est pleinement fidèle. Pour cela, d'abord on observe que M_0^I est une sous-catégorie pleine de M^I, stable par équivalences. Puis on utilise le fait que, si C est une catégorie munie d'une classe w d'équivalences et D une sous-catégorie pleine de C et stable par équivalences (i.e. si $x \in C$ est lié par une chaîne d'équivalences à $y \in D$, alors $x \in D$), alors $w^{-1}D$ est aussi une sous-catégorie de $w^{-1}C$, résultat qui découle directement de la description des morphismes dans une localisation ([GZ67, ch. 1, 1.1] ou [GM03, ch. 3, 2.2]).

Toute adjonction de Quillen

$$g : M \longrightarrow N \qquad M \longleftarrow N : f$$

induit une adjonction dans la 2-catégorie des dérivateurs

$$\mathbb{L}g : \mathbb{D}(M) \longrightarrow \mathbb{D}(N) \qquad \mathbb{D}(M) \longleftarrow \mathbb{D}(N) : \mathbb{R}f.$$

L'expression *diagramme 2-commutatif de dérivateurs* fera référence à la donné d'un diagramme de 1-morphismes munis de tous les 2-isomorphismes de cohérences nécessaires. Ainsi, un carré 2-commutatif est la donnée non pas de quatre 1-morphismes, mais bien de quatre 1-morphismes et un 2-isomorphisme entre les deux compositions possibles.

Finalement, nous utiliserons aussi la notion de $\mathbb{S}$-catégorie pour laquelle nous renvoyons à [Ber07] (et à [TV09b, § 1] pour des propriétés plus avancées).

2. Les ϵ-dg-algèbres

On considère la k-dg-algèbre $k[\epsilon]$, librement engendrée par un élément ϵ en degré -1 et avec la relation $\epsilon^2 = 0$. La k-algèbre graduée sous-jacente est $k[X]/X^2$, avec $\deg(X) = -1$, et sa différentielle est nulle.

Définition 2.1. La *catégorie des ϵ-dg-modules* est la catégorie $k[\epsilon] - dg - \mathrm{mod}$, des $k[\epsilon]$-dg-modules à gauche. Elle sera notée $\epsilon - dg - \mathrm{mod}$.

On remarque que $\epsilon - dg - \mathrm{mod}$ n'est autre que la catégorie des complexes mixtes négativement gradués (au sens de [Kas87, § 1]).

On munit $\epsilon - dg - \mathrm{mod}$ de sa structure de modèles usuelle où les équivalences sont les quasi-isomorphismes de complexes sous-jacents, et les fibrations sont les morphismes surjectifs en degrés strictement négatifs. La catégorie $\epsilon - dg - \mathrm{mod}$ est munie d'une structure monoïdale symétrique induite par le produit tensoriel de complexes de k-modules. Plus précisément, pour M et N deux ϵ-dg-modules on définit une structure de ϵ-dg-module sur le complexe $M \otimes_k N$ de la façon suivante. Le complexe $M \otimes_k N$ est naturellement muni d'une structure de $k[\epsilon] \otimes_k k[\epsilon]$-dg-module à gauche. On considère alors le morphisme de k-dg-algèbres

$$k[\epsilon] \longrightarrow k[\epsilon] \otimes_k k[\epsilon]$$

qui envoie ϵ sur $\epsilon \otimes 1 + 1 \otimes \epsilon$. A travers ce morphisme $M \otimes_k N$ est muni d'une structure de ϵ-dg-module. On vérifie alors que les contraintes d'associativité, de symétrie et d'unité du produit tensoriel de complexes induisent des contraintes d'associativité, de symétrie et d'unité pour la structure monoïdale ainsi construite sur $\epsilon - dg - \mathrm{mod}$. La catégorie $\epsilon - dg - \mathrm{mod}$ est ainsi munie d'une structure monoïdale symétrique que nous noterons simplement $\otimes$.

Définition 2.2. La *catégorie des ϵ-dg-algèbres commutatives* est la catégorie des monoïdes associatifs, commutatifs et unitaires dans la catégorie monoïdale $(\epsilon - dg - \mathrm{mod}, \otimes)$. Elle sera notée $\epsilon - cdga$.

En d'autres termes, un objet de $\epsilon - cdga$ consiste en une k-dg-algèbre commutative A, munie d'un morphisme de complexes de k-modules $\epsilon : A \longrightarrow A[-1]$, tel que pour tout a, b, éléments de A, de degrés respectifs n et m, on ait

$$\epsilon(ab) = \epsilon(a)b + (-1)^n a\epsilon(b),$$

c'est à dire que ϵ est une *dérivation* de degré -1 de A, au sens *dégé*.

Nous allons maintenant munir $\epsilon - cdga$ d'une structure de catégorie de modèles. Pour cela, nous considérons le foncteur d'oubli

$$\epsilon - cdga \longrightarrow cdga,$$

et nous définissons les équivalences (respectivement les fibrations) dans $\epsilon - cdga$ comme les morphismes induisant des équivalences (respectivement des fibrations) dans $C(k)$. Ainsi, une équivalence dans $\epsilon - cdga$ est un morphisme induisant un quasi-isomorphisme sur le complexes sous-jacent. De même, une fibration dans $\epsilon - cdga$ est un morphisme qui est surjectif en tout degré strictement négatif. Ce foncteur d'oubli possède un adjoint à gauche. En effet, il est facile de voir que le foncteur d'oubli commute à tout type de limites ainsi qu'aux colimites filtrantes. Comme les catégories $\epsilon - cdga$ et $cdga$ sont des catégories localement présentables ([AR94, § 1.D] ou [Lur09, Def. 5.5.0.1]), l'existence d'un adjoint à gauche est assurée par le théorème d'existence de Freyd ([AR94, § 1.D] ou [Lur09, Cor. 5.5.2.9]). Nous noterons

$$\epsilon : cdga \longrightarrow \epsilon - cdga$$

l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli, dont nous allons maintenant à donner une construction plus explicite. Soit $A \in cdga$, et notons Ω^1_A le A-dg-module coreprésentant le foncteur des dérivations (au sens dg). Ce A-dg-module est le quotient du dg-module librement engendré sur A par des symbôles $\partial(a)$, avec $a \in A$, $\deg(\partial(a)) = \deg(a)$, par les relations

$$\partial(ab) = (-1)^{\deg(a).\deg(b)} b\partial(a) + (-1)^{\deg(a)} a\partial(b),$$
$$\partial(a+b) = \partial(a) + \partial(b), \quad \partial(\lambda) = 0, \quad \lambda \in k.$$

Remarquons que Ω^1_A est encore concentré en degrés non positifs. On note $DR(A)$ la A-dg-algèbre commutative libre sur $\Omega^1_A[1]$

$$DR(A) := \mathrm{Sym}_A(\Omega^1_A[1]) := \bigoplus_n (\Omega^1_A[1])^{\otimes_A n}/\Sigma_n,$$

où l'action du groupe symétrique Σ_n est engendré par $m_i \otimes m_j \mapsto -(-1)^{i+j} m_j \otimes m_i$ (avec $\deg(m_i) = i$ et $\deg(m_j) = j$). On munit enfin cette *cdga* d'une ϵ-structure en décrétant qu'en degré zéro

$$\epsilon_0 : A \subset DR(A) \longrightarrow \Omega^1_A \subset DR(A)[-1]$$

est la dérivation universelle $a \mapsto \partial(a)$, et en prolongeant par multiplicativité. La k-dg-algèbre commutative, munie de ϵ, est un objet de $\epsilon - cdga$ noté $\epsilon(A)$. De plus, la *cdga* sous-jacente à $\epsilon(A)$ est $DR(A)$, et le morphisme naturel $A \longrightarrow DR(A)$ induit un morphisme

$$\mathrm{Hom}_{\epsilon-cdga}(\epsilon(A), B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{cdga}(DR(A), B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{cdga}(A, B), \tag{1}$$

dont le composé est bijectif pour toute ϵ-cdga B. Si $f \in \mathrm{Hom}_{cdga}(A, B)$, on peut regarder B comme une A-cdga et donc comme un A-dg-module, et en vertu des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_{A-cdga}(DR(A), B) \simeq \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{Mod}}(\Omega^1_A[1], B) \simeq \mathrm{Der}_k(A, B[-1]),$$

on peut associer à f l'élément F de $\mathrm{Hom}_{A-cdga}(DR(A), B)$ qui correspond à la dérivation $A \to B[-1] : a \mapsto \epsilon_B(f(a))$. Il est facile de verifier que F est aussi un morphisme dans $\epsilon - cdga$. La construction $f \mapsto F$ fournit l'inverse de la bijection (1). Ainsi, $A \mapsto \epsilon(A)$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli.

Proposition 2.3. *Les notions ci-dessus de fibrations et d'équivalences munissent $\epsilon - cdga$ d'une structure de catégorie de modèles. De plus, le foncteur d'oubli $\epsilon - cdga \longrightarrow cdga$ est de Quillen à droite.*

Preuve. Il s'agit de relever la structure de modèles sur $cdga$ le long du foncteur d'oubli $\epsilon - cdga \longrightarrow cdga$.

Notons I_0 et J_0 des ensembles générateurs de cofibrations et cofibrations triviales dans $cdga$. On définit $I := \epsilon(I_0)$, l'image de I_0 par le foncteur ϵ. De même, on pose $J := \epsilon(J_0)$. On applique alors le théorème 2.1.19 de [Hov98]. Comme le foncteur d'oubli $\epsilon - cdga \longrightarrow cdga$ reflète les limites, les colimites, les fibrations et les équivalences, on voit que pour vérifier les conditions de ce théorème il suffit de montrer que $J \subset W$. D'après la construction explicite du foncteur ϵ que nous avons donné précédemment on voit qu'il suffit de montrer que $A \mapsto \Omega^1_A$ (en tant que foncteur $cdga \longrightarrow C(k)$) transforme cofibrations triviales en quasi-isomorphismes. Pour cela il suffit de montrer que pour $A \longrightarrow B$ une cofibration triviale de $cdga$, le morphisme induit

$$\Omega^1_A \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_B$$

est une cofibration triviale de B-dg-modules. Donnons nous alors un diagramme commutatif de B-dg-modules,

$$\begin{tikzcd} \Omega^1_A \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ \Omega^1_B \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

avec $M \longrightarrow N$ une fibration. Par propriété universelle des dg-modules Ω^1, on voit que ce diagramme correspond à un diagramme commutatif dans $cdga/B$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \oplus M \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B \oplus N \end{tikzcd}$$

où $B \oplus E$ est l'extension de carré nulle triviale de B par le dg-module E. Comme $A \longrightarrow B$ est une cofibration triviale et que $B \oplus M \longrightarrow B \oplus N$ est une fibration, il existe $B \longrightarrow B \oplus M$ un relèvement dans $cdga/B$. Par adjonction on voit que cela implique l'existence d'un relèvement $\Omega^1_B \longrightarrow M$ de B-dg-modules. Ceci montre donc que $\Omega^1_A \otimes_A B \longrightarrow \Omega^1_B$ relève les fibrations et donc est une cofibration triviale. En particulier, le morphisme $\Omega^1_A \longrightarrow \Omega^1_B$ est une équivalence, ce qu'il nous fallait montrer. $\square$

Le foncteur ϵ, retreint à la sous-catégorie de *cdga* formée des k-algèbres non-dg, possède l'interprétation plaisante suivante. Soit A une k-algèbre commutative et

$$DR(A) = \mathrm{Sym}_A(\Omega^1_A[1]) \simeq \bigoplus_n \Omega^n_A[n]$$

sa dg-algèbre de de Rham (avec différentielle nulle). La différentielle de de Rham munit $DR(A)$ d'une structure de $\epsilon - cdga$ qui n'est autre que $\epsilon(A)$. En d'autres termes, $DR(A)$ muni de sa différentielle de de Rham est la ϵ-dg-algèbre commutative libre engendrée par A. De plus, si A est cofibrante en tant qu'objet de *cdga* (e.g. A est une k-algèbre de polynômes) alors $\epsilon(A)$ est cofibrante dans $\epsilon - cdga$.

Proposition 2.4. *Notons*

$$\mathbb{L}\epsilon : \mathrm{Ho}(cdga) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\epsilon - cdga)$$

le foncteur dérivé à gauche de ϵ. Soit A une k-algèbre commutative de présentation finie sur k. Alors le morphisme naturel

$$\mathbb{L}\epsilon(A) \longrightarrow \epsilon(A)$$

est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(\epsilon - cdga)$ *si et seulement si A est lisse sur k.*

Preuve. Soit $QA \longrightarrow A$ un modèle cofibrant pour A dans *cdga*. Le morphisme en question est représenté par

$$\mathrm{Sym}_{QA}(\Omega^1_{QA}[1]) \longrightarrow \mathrm{Sym}_A(\Omega^1_A[1]).$$

Ainsi, ce morphisme est un quasi-isomorphisme si et seulement si le morphisme induit

$$\Omega^1_{QA} \longrightarrow \Omega^1_A$$

est un quasi-isomorphisme de complexes. Or, Ω^1_{QA} est un modèle pour le complexe cotangent $\mathbb{L}_A$ de A, comme cela se voit en utilisant l'équivalence de Quillen entre *cdga* et k-algèbres simpliciales commutatives, ainsi que la caractérisation du complexe cotangent en termes de dérivations (voir par exemple [TV08, Prop. 1.2.1.2]). Le morphisme ci-dessus est alors isomorphe, dans $\mathrm{Ho}(C(k))$, au morphisme naturel

$$\mathbb{L}_A \longrightarrow \Omega^1_A.$$

Or, comme A est de présentation finie, ce morphisme est un quasi-isomorphisme si et seulement si A est lisse sur k. □

3. Algèbres simpliciales S^1-équivariantes et ϵ-dg-algèbres

Notons $sk - C$ Alg la catégorie des k-algèbres commutatives simpliciales, et considérons $S^1 - sk - C$ Alg la catégorie des objets de $sk - C$ Alg avec une action du groupe simplicial S^1 (on rappelle ici que $S^1 = B\mathbb{Z}$, est le classifiant du groupe $\mathbb{Z}$, muni de la structure de groupe induite par celle de $\mathbb{Z}$). La catégorie $sk - C$ Alg est munie d'une structure de modèles pour la quelle les fibrations et les équivalences sont définies sur les ensembles simpliciaux sous-jacents (dont l'existence est assurée par exemple par le théorème [Rez02, Thm. B]). Comme $sk - C$ Alg est une catégorie de modèles simpliciale et engendrée par cofibration la catégorie $S^1 - sk - C$ Alg est elle-même munie d'une structure projective où les fibrations et équivalences sont définis dans $sk - C$ Alg (dont l'existence est par exemple assurée par [Lur09, Prop. A.2.8.2]).

Dans cette section nous allons construire une équivalence de dérivateurs

$$\phi : \mathbb{D}(S^1 - sk - C\ \mathrm{Alg}) \longrightarrow \mathbb{D}(\epsilon - cdga)$$

ainsi qu'un 2-isomorphisme h faisant commuter le diagramme suivant (en tant que diagramme dans la 2-catégorie des dérivateurs).

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(S^1 - sk - C\,\mathrm{Alg}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathbb{D}(\epsilon - cdga) \arrow[d] \\ \mathbb{D}(sk - C\,\mathrm{Alg}) \arrow[r, "N"'] & \mathbb{D}(cdga) \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme les morphismes verticaux sont induits par les foncteurs d'oubli

$$S^1 - sk - C\,\mathrm{Alg} \longrightarrow sk - C\,\mathrm{Alg} \quad \epsilon - cdga \longrightarrow cdga,$$

et le morphisme N par le foncteur de normalisation, adjoint à droite d'une équivalence de Quillen (voir la seconde étape ci-dessous)

$$N : sk - C\,\mathrm{Alg} \longrightarrow cdga.$$

Dans les étapes ci-dessous, pour ne pas alourdir la terminologie, on appellera *diagramme de derivateurs* même un diagramme qui contient des prédérivateurs.

Première étape. On considère le groupe simplicial BS^1 comme une $\mathbb{S}$-catégorie avec une unique objet $*$, dont le monoïde des endomorphismes est S^1. On choisit alors une catégorie $\mathcal{C}$, et un diagramme de $\mathbb{S}$-catégories

$$\mathcal{C} \xrightarrow{i} T \xleftarrow{j} BS^1,$$

tel que, d'une part j soit une équivalence de $\mathbb{S}$-catégories, et i fasse de T une localisation de $\mathcal{C}$ le long de tous ses morphismes (au sens par exemple de [TV09b, § 1.2]). On pourra, par exemple, prendre pour $\mathcal{C}$ la catégorie cyclique Λ de Connes [Lod98, § 6.1] dont le nerf est un espace $K(\mathbb{Z}, 2)$. Le choix d'une équivalence faible d'ensembles simpliciaux $N(\mathcal{C}) \simeq K(\mathbb{Z}, 2) = BB\mathbb{Z}$, définit un morphisme dans $\mathrm{Ho}(\mathbb{S} - \mathrm{Cat})$, la catégorie homotopique des $\mathbb{S}$-catégories

$$\mathcal{C} \longrightarrow BS^1$$

(on rappelle ici que le foncteur nerf $N : \mathrm{Ho}(\mathbb{S} - \mathrm{Cat}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(S\,\mathrm{Ens})$, possède un adjoint à droite pleinement fidèle donné par l'∞-*groupoïde fondamental*, et que cet adjoint à gauche identifie $\mathrm{Ho}(S\,\mathrm{Ens})$ à la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ho}(\mathbb{S} - \mathrm{Cat})$ formée des $\mathbb{S}$-catégorie dont tous les morphismes sont inversibles à homotopie près). D'après les versions simpliciales des résultats de [Toe07, Thm. 4.2], les morphismes $\mathcal{C} \longrightarrow BS^1$ dans $\mathrm{Ho}(\mathbb{S} - \mathrm{Cat})$ peuvent tous se représenter par un diagramme de $\mathbb{S}$-catégories

$$\mathcal{C} \xrightarrow{i} T \xleftarrow{j} BS^1,$$

qui, par construction, est tel que i soit une localisation de $\mathcal{C}$ le long de tous ses morphismes (i.e. une complétion ∞-groupoïdale). On sait alors qu'il existe une chaine d'adjonctions de Quillen

$$sk - C\,\mathrm{Alg}^{\mathcal{C}} \longleftrightarrow sk - C\,\mathrm{Alg}^{T} \longleftrightarrow sk - C\,\mathrm{Alg}^{BS^1} = S^1 - sk - C\,\mathrm{Alg}\,.$$

Ces adjonctions induisent des équivalences de dérivateurs (voir par exemple [TV05, § 2.3.2] ou encore [TV09b, § 1.2])

$$\mathbb{D}(S^1 - sk - C\,\mathrm{Alg}) \xrightarrow{j^*} \mathbb{D}(sk - C\,\mathrm{Alg}^{T}) \xleftarrow{i^*} \mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(sk - C\,\mathrm{Alg}^{\mathcal{C}}),$$

où $\mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(sk - C\,\mathrm{Alg}^{\mathcal{C}})$ désigne le sous-prédérivateur plein de $\mathbb{D}(sk - C\,\mathrm{Alg}^{\mathcal{C}})$ formé des diagrammes $\mathcal{C} \longrightarrow sk - C\,\mathrm{Alg}$ qui envoient tous les morphismes de $\mathcal{C}$ sur des équivalences. Fixonsnous un objet $x \in \mathcal{C}$, alors les foncteurs ci-dessus commutent clairement à l'évaluation en x et au point de base de BS^1, et on dispose ainsi de deux carrés 2-commutatifs,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(S^1 - sk - C\,\mathrm{Alg}) \arrow[r, "j^*"] \arrow[dr] & \mathbb{D}(sk - C\,\mathrm{Alg}^T) \arrow[d, "\mathrm{ev}_{i(x)}"] & \mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(sk - C\,\mathrm{Alg}^{\mathcal{C}}) \arrow[l, "i^*"'] \arrow[dl, "\mathrm{ev}_x"] \\
 & \mathbb{D}(S\,\mathrm{Ens}) &
\end{tikzcd}$$

où les morphismes horizontaux sont des équivalences, et le morphisme vertical de gauche est le foncteur d'oubli. On construit ainsi un diagramme 2-commutatif de dérivateurs.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(S^1 - sk - C\,\mathrm{Alg}) \arrow[rr, "\phi_1"] \arrow[dr] & & \mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(sk - C\,\mathrm{Alg}^{\mathcal{C}}) \arrow[dl, "\mathrm{ev}_x"] \\
 & \mathbb{D}(S\,\mathrm{Ens}) &
\end{tikzcd}$$

Comme BS^1 est simplement connexe, il n'est pas difficile de vérifier que ce diagramme ne dépend pas, à équivalence près, du choix du point $x \in \mathcal{C}$.

Seconde étape. Considérons le foncteur de normalisation (voir [SS03])

$$N : sk - C\,\mathrm{Alg} \longrightarrow cdga.$$

Comme cela est rappelé dans [SS03], ce foncteur est l'adjoint à droite d'une équivalence de Quillen (voir la Proposition A.1). Le foncteur N induit donc un nouvel adjoint à droite d'une équivalence Quillen

$$N : sk - C\,\mathrm{Alg}^{\mathcal{C}} \longrightarrow cdga^{\mathcal{C}},$$

qui induit, à sont tour, une équivalence de (pré)dérivateurs

$$\phi_2 : \mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(sk - C\,\mathrm{Alg}^{\mathcal{C}}) \longrightarrow \mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(cdga^{\mathcal{C}})$$

et cette équivalence vient avec un 2-isomorphisme naturel faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(sk - C\,\mathrm{Alg}^{\mathcal{C}}) \arrow[rr, "\phi_2"] \arrow[dr, "\mathrm{ev}_x"'] & & \mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(cdga^{\mathcal{C}}) \arrow[dl, "\mathrm{ev}_x"] \\
 & \mathbb{D}(cdga) &
\end{tikzcd}$$

Troisième étape. Dans cette étape, et la suite, nous aurons besoin de travailler momentanément avec des complexes non bornés. Lorsque cela sera le cas nous l'indiquerons par un indice $(-)_\infty$. Ainsi, $C(k)_\infty$, $cdga_\infty$, etc. désignera la catégorie des complexes non bornés, des k-dg-alèbres commutatives non bornées, etc.

L'inclusion des complexes en degrés négatifs dans les complexes non bornés induit un morphisme de prédérivateurs

$$\mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(cdga^{\mathcal{C}}) \longrightarrow \mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(cdga^{\mathcal{C}}_\infty).$$

Ce morphisme est pleinement fidèle et identifie le membre de gauche au sous-prédérivateur des objets cohomologiquement concentrés en degrés négatifs.

On considère le functor des sections globales

$$\Gamma : cdga^{\mathcal{C}}_\infty \longrightarrow cdga_\infty.$$

Ce foncteur est de Quillen à droite lorsque l'on munit $cdga_\infty^{\mathcal{C}}$ de sa structure injective, pour laquelle les cofibrations et les équivalences sont définies objet par objet (dont l'existence est assurée par exemple par [Lur09, Prop. A.2.8.2]). Pour tout $A \in cdga_\infty^{\mathcal{C}}$, le morphisme unité $\underline{k} \longrightarrow A$, où $\underline{k}$ est le diagramme constant de valeur k, induit un morphisme dans $cdga$

$$\Gamma(\underline{k}) \longrightarrow \Gamma(A).$$

Ainsi, si R désigne un foncteur de remplacement fibrant dans $cdga_\infty^{\mathcal{C}}$, on dispose d'un morphisme

$$\Gamma(R(\underline{k})) \longrightarrow \Gamma(R(A)).$$

Nous noterons $B := \Gamma(R(\underline{k})) \in cgda$. La construction $A \mapsto \Gamma(R(A))$ définit ainsi un morphisme de (pré)dérivateurs

$$\mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(cdga_\infty^{\mathcal{C}}) \longrightarrow \mathbb{D}(B - cdga_\infty),$$

où $B - cdga_\infty$ désigne la catégorie comma $B/cdga_\infty$.

Rappelons que, lors de la seconde étape, nous nous sommes fixés un diagramme de $\mathbb{S}$-catégories

$$\mathcal{C} \xrightarrow{i} T \xleftarrow{j} BS^1.$$

Ce diagramme induit des isomorphismes de k-algèbres graduées commutatives de cohomologie

$$H^*(B) = H^*(\mathbb{R}\Gamma(\underline{k})) \simeq H^*(\mathcal{C}, k) \simeq H^*(BS^1, k) \simeq k[u],$$

où $\deg(u) = 2$ et correspond au générateur de $H^2(K(\mathbb{Z}, 2), k)$ donné par l'inclusion standard $\mathbb{Z} \subset k$. Le choix d'un 2-cocycle $u' \in Z^2(B)$ qui est un représentant de u détermine un quasi-isomorphisme de cdga $k[u] \longrightarrow B$. Ce quasi-isomorphisme, considéré à homotopie près, ne dépend pas du choix de u'. Il induit ainsi une équivalence de Quillen

$$B - cdga_\infty \longrightarrow k[u] - cdga_\infty$$

dont le morphisme correspondant de dérivateurs

$$\mathbb{D}(B - cdga_\infty) \longrightarrow \mathbb{D}(k[u] - cdga_\infty)$$

est une équivalence, déterminée à 2-isomorphisme unique près.

Nous avons ainsi construit un morphisme de (pré)-dérivateurs

$$\phi_3 : \mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(cdga^{\mathcal{C}}) \hookrightarrow \mathbb{D}(cdga_\infty^{\mathcal{C}}) \longrightarrow \mathbb{D}(B - cdga_\infty) \longrightarrow \mathbb{D}(k[u] - cdga_\infty).$$

Ce morphisme entre dans un diagramme,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(cdga^{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\phi_3"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{D}(k[u] - cdga_\infty) \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{D}(cdga) \arrow[r, "i"'] & \mathbb{D}(cdga_\infty) \end{tikzcd}$$

qui n'est pas 2-commutatif et demande quelques explications supplémentaires. Le morphisme q est induit par le foncteur d'évaluation en x, et i par l'inclusion naturelle. Cependant, p n'est pas le foncteur d'oubli. Il est induit par le foncteur de Quillen à gauche

$$k[u] - cdga_\infty \longrightarrow cdga_\infty$$

qui envoie A' sur $k \otimes_{k[u]} A'$. Par adjonction, il n'est pas difficile de voir qu'il existe un 2-morphisme

$$u : p \circ \phi_3 \Rightarrow i \circ q,$$

qui n'est pas un 2-isomorphisme en général. Il le deviendra lorsque les foncteurs seront restreint à certains sous-prédérivateurs d'objets bornés, comme nous allons maintenant le voir.

Nous noterons $\mathbb{D}^{+}_{\mathrm{loc}}(cdga^{\mathcal{C}})$ (respectivement $\mathbb{D}^{+}(k[u]-cdga_{\infty})$) le sous-prédérivateur formée des objets dont les complexes sous-jacents sont cohomologiquement bornés à gauche (i.e. H^i s'annule pour tout i suffisament petit). Nous remarquerons ici que la restriction de ϕ_3

$$\phi_3^{+}:\mathbb{D}^{+}_{\mathrm{loc}}(cdga^{\mathcal{C}})\longrightarrow \mathbb{D}^{+}(k[u]-cdga_{\infty})$$

est pleinement fidèle. De plus, la restriction du 2-morphisme u ci-dessus induit un 2-isomorphisme

$$u^{+}:p\circ\phi_3^{+}\Rightarrow i\circ q.$$

Pour voir cela, il nous faut revenir à l'adjonction de Quillen

$$cdga_{\infty}\longleftrightarrow cdga_{\infty}^{\mathcal{C}}.$$

Notons $A:=R(\underline{k})$ un modèle fibrant de $\underline{k}$ dans $cdga_{\infty}^{\mathcal{C}}$, et $B=\Gamma(A)$. On considère l'adjonction induite

$$f:B-cdga_{\infty}\longleftrightarrow A/cdga_{\infty}^{\mathcal{C}}:\Gamma.$$

Le foncteur f envoie un objet $B'\in B-cdga_{\infty}$ sur $A\otimes_B B'$, où A est considérée comme une B-dg-algèbre commutative à travers le morphisme $B\longrightarrow A$, adjoint de l'identité $B=\Gamma(A)$ (nous identifions ici les objets de $B-cdga_{\infty}$ avec leur diagrammes constants correspondants). Il nous faut montrer que pour tout objet $A'\in A/cdga_{\infty}^{\mathcal{C}}$, cohomologiquement borné à gauche, le morphisme d'adjonction

$$A\otimes_B^{\mathbb{L}}\mathbb{R}\Gamma(A')\longrightarrow A'$$

est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(cdga_{\infty}^{\mathcal{C}})$. Pour cela on peut oublier la structure d'algèbres et considérer que A' est un A-dg-module. Dans ce cas, des troncations succéssives de A' (en utilisant la t-structure naturelle sur $\mathrm{Ho}(C(k)_{\infty}^{\mathcal{C}})$) ramènent le problème au cas où A' est un diagramme constant associé à un k-modules M. On a alors

$$H^{*}(\mathbb{R}\Gamma(M))\simeq H^{*}(\mathcal{C},M)\simeq H^{*}(K(\mathbb{Z},2),M)\simeq k[u]\otimes_k M.$$

On a donc

$$A\otimes_B^{\mathbb{L}}\mathbb{R}\Gamma(M)\simeq A\otimes_{k[u]}^{\mathbb{L}}k[u]\otimes_k M\simeq M.$$

En revenant aux définitions de nos foncteurs, ceci montre aussi que u^{+} est un 2-isomorphisme (nous laissons la vérification au lecteur). On peut de plus caractériser l'image de ϕ_3^{+}. En effet, l'objet $k[u]$ engendre une t-structure sur le dérivateur $\mathbb{D}(k[u]-dg-\mathrm{mod}_{\infty})$, dont la partie négative est engendrée par $k[u]$ par colimites homotopiques. L'image essentielle de ϕ_3^{+} consiste alors en tous les objets de $\mathbb{D}(k[u]-cdga_{\infty})$ dont l'objet sous-jacent dans $\mathbb{D}(k[u]-dg-\mathrm{mod}_{\infty})$ est d'amplitude $[n,0]$ pour un certain entier n.

Quatrième étape. De manière analogue à l'étape précédente, nous construisons un diagramme, qui n'est pas 2-commutatif, de dérivateurs,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(\epsilon-cdga) \arrow[r, "\phi_4"] \arrow[d, "r"'] & \mathbb{D}(k[u]-cdga_{\infty}) \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{D}(cdga) \arrow[r, "i"'] & \mathbb{D}(cdga_{\infty}) \end{tikzcd}$$

tel que la restriction de ϕ_4 à $\mathbb{D}^{+}(\epsilon-cdga)$, le sous-prédérivateur des objets cohomologiquement bornés, soit pleinement fidèle. Nous construisons aussi un 2-morphisme $v:p\circ\phi_4\Rightarrow i\circ r$ qui induira un 2-isomorphisme par restriction

$$v^+ : p \circ \phi_4^+ \Rightarrow i \circ r.$$

La construction de ϕ_4 et de v est tout à fait analogue à celle de ϕ_3 et de u, nous nous contenterons donc de l'esquisser. Nous considérerons $\epsilon - dg - \mathrm{mod}_\infty$, des ϵ-dg-modules non bornés. Nous munissons $\epsilon - dg - \mathrm{mod}_\infty$ de sa structure de modéles *injective*, pour laquelle les cofibrations et les équivalences sont définies dans $C(k)_\infty$ (voir la Proposition B.1). Cette structure de modèles reste une structure de modèles monoïdales au sens de [Hov98, § 4], et elle induit une structure de modèles injective sur $\epsilon - cdga_\infty$, la catégorie des ϵ-cdga non bornées, pour laquelle les fibrations et les équivalences sont définies dans $\epsilon - dg - \mathrm{mod}_\infty$ (cette dernière étant munie de sa structure injective, voir la Proposition B.3). On considère alors le foncteur

$$\Gamma_\epsilon : \epsilon - cdga_\infty \longrightarrow cdga_\infty,$$

qui envoie $A \in \epsilon - cdga$ sur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\epsilon - dg - \mathrm{mod}_\infty}(k, A)$, où $\underline{\mathrm{Hom}}_{\epsilon - dg - \mathrm{mod}_\infty}$ désigne le complexe, non borné, des morphismes de ϵ-dg-modules. Le foncteur Γ_ϵ est de Quillen à droite, et la construction $A \mapsto \Gamma_\epsilon(R(A))$, où R est un remplacement fibrant dans $\epsilon - cdga_\infty$, fournit un morphisme de dérivateurs

$$\mathbb{D}(\epsilon - cdga_\infty) \longrightarrow \mathbb{D}(B' - cdga_\infty),$$

avec $B' := \Gamma_\epsilon(R(k))$. Or, $H^*(B') \simeq \mathrm{Ext}^*_{k[\epsilon]}(k, k) \simeq k[u]$. Ainsi, il existe un quasi-isomorphisme de dg-algèbres commutatives $k[u] \longrightarrow B'$, bien déterminé à homotopie près. Ce quasi-isomorphisme fournit une équivalence de dérivateurs $\mathbb{D}(B' - cdga_\infty) \longrightarrow \mathbb{D}(k[u] - cdga_\infty)$. Le morphisme ϕ_4 est par définition le composé

$$\mathbb{D}(\epsilon - cdga_\infty) \longrightarrow \mathbb{D}(B' - cdga_\infty) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(k[u] - cdga_\infty),$$

restreint au sous-dérivateur plein

$$\mathbb{D}(\epsilon - cdga) \hookrightarrow \mathbb{D}(\epsilon - cdga_\infty).$$

Nous laissons le soins au lecteur de vérifier que ϕ_4^+ est bien pleinement fidèle, et que son image essentielle coïncide avec celle de ϕ_3^+ (les arguments sont les mêmes que pour ϕ_3).

Cinquième et dernière étape. D'après les deux dernières étapes nous avons construit un diagramme 2-commutatif de (pré)dérivateurs.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^+_{\mathrm{loc}}(cdga^{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\phi_3^+"] \arrow[d] & \mathbb{D}(k[u] - cdga_\infty) \arrow[d] & \mathbb{D}^+(\epsilon - cdga) \arrow[l, "\phi_4^+"'] \arrow[d] \\
\mathbb{D}^+(cdga) \arrow[r] & \mathbb{D}(cdga_\infty) & \mathbb{D}^+(cdga) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Les morphismes ϕ_3^+ et ϕ_4^+ étant pleinement fidèles avec la même image essentielle on trouve un nouveau diagramme 2-commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^+_{\mathrm{loc}}(cdga^{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\phi_{34}^+"] \arrow[d] & \mathbb{D}^+(\epsilon - cdga) \arrow[d] \\
\mathbb{D}^+(cdga) \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{D}^+(cdga)
\end{tikzcd}$$

Il n'est pas difficile de remarquer que ce diagramme se complète, de manière unique (à isomorphisme unique près), en un diagramme 2-commutatif,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(cdga^{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\phi_{34}"] & \mathbb{D}(\epsilon - cdga) \\
\mathbb{D}^{+}_{\mathrm{loc}}(cdga^{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\phi_{34}^{+}"] \arrow[u] \arrow[d] & \mathbb{D}^{+}(\epsilon - cdga) \arrow[u] \arrow[d] \\
\mathbb{D}^{+}(cdga) \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{D}^{+}(cdga)
\end{tikzcd}$$

avec ϕ_{34} une équivalence de dérivateurs. En effet, il suffit pour cela de remarquer que dans $\mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(cdga^{\mathcal{C}})$ et $\mathbb{D}(\epsilon - cdga)$, tout objet est limite de sa tour de Postnikov. Ainsi, ϕ_{34} est défini est prenant l'image par ϕ_{34}^{+} des tours de Postnikov de $\mathbb{D}_{\mathrm{loc}}(cdga^{\mathcal{C}})$, puis en en prenant leurs limites dans le dérivateur $\mathbb{D}(\epsilon - cdga)$. Nous laissons les détails au lecteur de cette construction formelle.

La conclusion de ces cinq étapes est la construction d'un diagramme 2-commutatif de dérivateurs,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(S^1 - sk - C\,\mathrm{Alg}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathbb{D}(\epsilon - cdga) \arrow[d] \\
\mathbb{D}(sk - C\,\mathrm{Alg}) \arrow[r, "N"'] & \mathbb{D}(cdga)
\end{tikzcd}$$

où $\phi := \phi_{34} \circ \phi_2 \circ \phi_1$, le morphisme N est induit par le foncteur de normalisation, et les morphismes verticaux par les foncteurs d'oubli.

4. Le théorème de comparaison et quelques applications

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer notre résultat principal.

Théorème 4.1. (i) *Les deux morphismes de dérivateurs*

$$\mathbb{D}(sk - C\,\mathrm{Alg}) \longrightarrow \mathbb{D}(\epsilon - cdga),$$

qui envoient respectivement A sur $\phi(S^1 \otimes_k^{\mathbb{L}} A)$ et sur $\mathbb{L}\epsilon(N(A))$, sont naturellement isomorphes.

(ii) *Soit $\mathbb{D}(k - C\,\mathrm{Alg}^{sm})$ le sous-dérivateur plein de $\mathbb{D}(sk - C\,\mathrm{Alg})$ formé des k-algèbres commutatives lisses et sur k. Alors les deux morphismes de dérivateurs*

$$\mathbb{D}^{sm}(k - C\,\mathrm{Alg}) \longrightarrow \mathbb{D}(\epsilon - cdga),$$

qui envoient respectivement A sur $\phi(S^1 \otimes_k A)$ et sur $\epsilon(A)$, sont naturellement isomorphes.

Preuve. Tout d'abord, (2) découle de (1) et du fait que pour A lisse sur k les deux morphismes

$$\mathbb{L}\epsilon(A) \longrightarrow \epsilon(A) \quad S^1 \otimes_k^{\mathbb{L}} A \longrightarrow S^1 \otimes_k A$$

sont des équivalences (à cause de la Proposition 2.4, et parceque A est plate sur k). Pour (1), on revient au diagramme 2-commutatif,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(S^1 - sk - C\,\mathrm{Alg}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathbb{D}(\epsilon - cdga) \arrow[d] \\
\mathbb{D}(sk - C\,\mathrm{Alg}) \arrow[r, "N"'] & \mathbb{D}(cdga)
\end{tikzcd}$$

et on remarque que les adjoints à gauche des oublis sont respectivement induits par les foncteurs de Quillen à gauche

$$\epsilon : cdga \longrightarrow \epsilon - cdga \qquad S^1 \otimes_k - : sk - C\,\mathrm{Alg} \longrightarrow S^1 - sk - C\,\mathrm{Alg}.$$

Comme les morphismes ϕ et N sont des équivalences le diagramme induit,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(S^1 - sk - C\,\mathrm{Alg}) \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{D}(\epsilon - cdga) \\
\mathbb{D}(sk - C\,\mathrm{Alg}) \arrow[r, "N"'] \arrow[u, "S^1\otimes^{\mathbb{L}}-"] & \mathbb{D}(cdga) \arrow[u, "\mathbb{L}\epsilon"']
\end{tikzcd}$$

est naturellement 2-commutatif. $\square$

Pour le corollaire suivant, rappelons qu'un schéma est dit *semi-séparé* s'il possède une base d'ouverts affines qui soit fermée par intersections finies. Pour X un tel k-schéma on dispose de son schéma dérivé $LX := \mathbb{R}\,\mathrm{Map}(S^1, X)$ (voir [TV09a, TV09b] ainsi que [Toe09, 4.3.1]) Il vient avec une projection naturelle $LX \longrightarrow X$, qui fait de LX le spectre relatif du faisceau de k-algèbres simpliciales commutatives $S^1 \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_X$ sur X. Le groupe simplicial S^1 opère naturellement sur LX en agissant sur lui-même par translations.

Corollaire 4.2. *Soit X un k-schéma de type fini et semi-séparé sur* $\mathrm{Spec}\, k$.

(i) *Il existe un isomorphisme dans la catégorie homotopique des faisceaux de $\epsilon - cdga$ sur X*

$$\phi(S^1 \otimes_k^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{L}\epsilon(\mathcal{O}_X).$$

(ii) *Il existe un isomorphisme dans la catégorie homotopique des faisceaux de $\mathcal{O}_X - cdga$ sur X*

$$\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X \otimes_k^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \simeq \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{X/k}[1]),$$

où $\mathbb{L}_{X/k}$ est le complexe cotangent de X relativement à k au sens de [Ill71].

(iii) *Si X est lisse sur k, alors il existe un isomorphisme dans la catégorie homotopique des faisceaux de $\mathcal{O}_X - cdga$ sur X*

$$\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X \otimes_k^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \simeq \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/k}[1]).$$

(iv) *Si X est affine et lisse sur k, alors il existe un isomorphisme naturel de k-algèbres commutatives*

$$\pi_0(\mathcal{O}(LX)^{hS^1}) := \pi_0(\mathbb{R}\Gamma(X, S^1 \otimes_k \mathcal{O}_X)^{hS^1}) \simeq H^{\mathrm{ev}}_{DR}(X/k),$$

où $(-)^{hS^1}$ désigne le foncteur des points fixes homotopiques, et $H^{\mathrm{ev}}_{DR}(X/k)$ est la cohomologie de de Rham paire de X/k.

Preuve. Le point (i) est une conséquence immédiate du théorème 4.1. Pour le point (ii) il suffit de remarquer qu'il existe une équivalence naturelle de faisceaux de k-algèbres commutatives simpliciales (où le produit tensoriel dérivé est calculé dans $sk - C\,\mathrm{Alg}$)

$$S^1 \otimes^{\mathbb{L}}_k \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_k \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X,$$

qui par normalisation donne une équivalence de faisceaux de cdga (où le produit tensoriel dérivé est maintenant calculé dans *cdga*)

$$N(S^1 \otimes^{\mathbb{L}}_k \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}}_k \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X.$$

D'autre part la cdga sous-jacente à $\mathbb{L}\epsilon(\mathcal{O}_X)$ est naturellement équivalente à $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{L}_{X/k}[1])$ comme nous l'avons déjà fait remarqué au § 1. Le point (iii) se déduit formellement de (2) et du fait que lorsque X est lisse $\mathbb{L}_{X/k} \simeq \Omega^1_{X/k}$.

Pour le dernier point, notons $\mathcal{O}(LX) := \mathbb{R}\Gamma(X, S^1 \otimes \mathcal{O}_X)$, où Γ est le foncteur de Quillen à droite des sections globales, de la catégorie des faisceaux de sur X à valeurs dans $S^1 - sk - C\,\mathrm{Alg}$ vers la catégorie $S^1 - sk - C\,\mathrm{Alg}$. Pour B une $\epsilon - cdga$ il existe un isomorphisme naturel d'algèbres

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\epsilon-dg-\mathrm{mod})}(k, B) \simeq H^0(\mathrm{Tot}(\mathcal{B}B^-)),$$

où $\mathrm{Tot}(\mathcal{B}B^-)$ est le complexe total négatif associé au complexe mixte B (voir [Lod98, 5.1.7], ici notre ϵ joue le rôle de l'opérateur B, la différentielle du complexe sous-jacent à B est b). En particulier, on a un isomorphisme naturel entre $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\epsilon-dg-\mathrm{mod})}(k, B)$ et la cohomologie du complexe de longuer 2

$$\bigoplus_{n\geqslant 0} B_{-2n-1} \xrightarrow{d} \bigoplus_{n\geqslant 0} B_{-2n} \xrightarrow{d} \bigoplus_{n\geqslant 0} B_{-2n+1},$$

où d est la différentielle somme de ϵ et de la différentielle du complexe sous-jacent à B. Ceci, appliqué à $\phi(\mathcal{O}(LX))$ donne

$$\begin{aligned}\pi_0(\mathcal{O}(LX)^{hS^1}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(S^1-sk-C\,\mathrm{Alg})}(k, \mathcal{O}(LX)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\epsilon-cdga)}(k, \phi(\mathcal{O}(LX))) \\ &\simeq H^0(\mathrm{Tot}\,\mathcal{B}\phi(\mathcal{O}(LX))^-).\end{aligned}$$

Par (i) et (iii) on a

$$\phi(\mathcal{O}(LX)) \simeq \mathbb{R}\Gamma(X, \epsilon(X)) \simeq \bigoplus_n \mathbb{R}\Gamma(X, \Omega^n_X[-n]),$$

et où l'action de ϵ est induite par la différentielle de de Rham sur le membre de droite. Ainsi, on a donc clairement

$$H^0(\mathrm{Tot}\,\mathcal{B}\phi(\mathcal{O}(LX))^-) \simeq \bigoplus_n H^{2n}_{DR}(X) = H^{\mathrm{ev}}_{DR}(X).$$ □

Il est aussi possible de généraliser le point (iv) du corollaire précédent de la façon suivante. La cdga $\mathbb{R}\Gamma(X, S^1 \otimes \mathcal{O}_X)^{hS^1}$ est naturellement munie d'une structure de $k[u] - cdga$, et l'on peut donc inverser u. Il existe alors des isomorphismes

$$\pi_*(\mathbb{R}\Gamma(X, S^1 \otimes \mathcal{O}_X)^{hS^1})[u^{-1}] \simeq H^*_{\mathrm{per}}(X/k),$$

où $H^i_{\mathrm{per}}(X/k) = H^{\mathrm{ev}}_{DR}(X/K)$ si i est pair et $H^i_{\mathrm{per}}(X/k) = H^{\mathrm{odd}}_{DR}(X/K)$ si i est impair. Nous ne donnerons pas les détails ici.

Remerciements

Nous remercions M. Hoyois qui a attiré notre attention sur le fait que la comparaison, annoncée dans [BN07, TV09a, TV09b], entre fonctions sur les espaces de lacets dérivés et

homologie cyclique était probablement plus subtile que nous le prétendions dans ces papiers. Ce travail montre que l'on peut obtenir une comparaison avec la théorie de de Rham sans passer par l'homologie cyclique, ce qui suffit pour les besoins de [TV09a, TV09b] (et aussi visiblement de [BN07]).

Appendix A. Normalisation des algèbres simpliciales commutatives

Le but de ce premier appendice est de donner la preuve du résultat *bien connu* suivant.

Proposition A.1. *Si k est un anneau commutatif de caractéristique nulle, le foncteur de normalisation*

$$N : sk - C\,\mathrm{Alg} \longrightarrow cdga$$

est l'adjoint à droite d'une équivalence de Quillen.

Preuve. Le fait que le foncteur N possède un adjoint à gauche est une application du théorème d'existence de Freyd (voir [AR94, § 1.D]). On peut aussi le décrire de manière plus explicite comme cela est fait dans [SS03, § 3.3]. Nous noterons

$$D : cdga \longrightarrow sk - C\,\mathrm{Alg}$$

cet adjoint à gauche. Il s'agit de montrer que l'adjonction induite

$$\mathbb{L}D : \mathrm{Ho}(cdga) \longleftrightarrow \mathrm{Ho}(sk - C\,\mathrm{Alg}) : N$$

est une équivalence de catégories.

Soit $k[x]$ la dg-algèbre commutative libre sur un générateur x en degré $-n$. Alors, on a un isomorphisme naturel

$$D(k[x]) \simeq L_k(S^n),$$

où $S^n := \Delta^n/\partial\Delta^n$ est la sphère simplicial de dimension n standard, et $L_k(K)$ désigne la k-algèbre simplicial commutative libre sur un ensemble simplicial K. Dans ce cas le morphisme d'adjonction

$$k[x] \longrightarrow N(D(k[x]))$$

est un isomorphisme, comme cela se voit en considérant le morphisme induit sur les complexes de k-modules sous-jacents.

Nous remarquons de plus que le foncteur N commute, à équivalence près, aux colimites homotopiques. En effet, pour cela il suffit de voir que N commute aux colimites filtrantes et aux push-out homotopiques. Le cas des colimites filtrantes est clair, car celles-ci se calculent directement au niveaux des complexes et des k-modules simpliciaux sous-jacents. Pour montrer que N commute aux push-out homotopiques, il faut voir que pour un diagramme de k-algèbres simpliciales commutatives et cofibrantes (donc plates sur k)

$$B \longleftarrow A \longrightarrow C,$$

que le morphisme naturel induit

$$N(B) \otimes^{\mathbb{L}}_{N(A)} N(C) \longrightarrow N(B \otimes^{\mathbb{L}}_A C)$$

est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(cdga)$. Pour cela, on oublie les structures multiplicatives et on considère ce morphisme au niveau des complexes de k-modules sous-jacents. Pour calculer les produits tensoriels dérivés nous utilisons, par exemple, la résolution libre standard de B en tant que A-module, ce qui permet d'identifier B, à équivalence près, avec la colimite homotopique (prise dans $C(k)$) du diagramme simplicial

$$[n] \mapsto A^{\otimes n} \otimes_k B.$$

Le morphisme ci-dessus se trouve donc être isomorphe dans $\mathrm{Ho}(C(k))$ au morphisme naturel

$$N(\mathrm{Colim}_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}}(A^{\otimes n} \otimes_k B)) \otimes^{\mathbb{L}}_{N(A)} N(C) \longrightarrow N(\mathrm{Colim}_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}} A^{\otimes n} \otimes_k B \otimes_A C).$$

Le fait que ce dernier morphisme soit un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(C(k))$ se déduit alors du fait que N commute aux colimites homotopiques (car induit une équivalence de Quillen entre k-modules simpliciaux et complexes de k-modules), et du fait que l'application *shuffle* (voir par exemple [SS03, (2.6)])

$$N(N) \otimes_k N(M) \longrightarrow N(N \otimes_k M)$$

est un quasi-isomorphisme des k-modules simpliciaux, pour tout N et tout M.

Pour conclure, nous savons que pour $k[x]$ une *cdga* libre sur un générateur en degré $-n$, le morphisme d'adjonction

$$k[x] \longrightarrow N(D(k[x]))$$

est un quasi-isomorphisme. De plus, les foncteurs dérivés $\mathbb{L}D$ et $\mathbb{R}N \sim N$ commutent tous deux aux colimites homotopiques. Ainsi, comme les *cdga* libres engendrent la catégorie $\mathrm{Ho}(cdga)$ par colimites homotopiques on en déduit que pour toute $B \in \mathrm{Ho}(cdga)$, le morphisme d'adjonction

$$B \longrightarrow N(\mathbb{L}D(B))$$

est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(cdga)$. Ceci implique que le foncteur

$$\mathbb{L}D : \mathrm{Ho}(cdga) \longrightarrow \mathrm{Ho}(sk - C\,\mathrm{Alg})$$

est pleinement fidèle. Enfin, comme son adjoint à droite N est clairement conservatif (d'après la formule $\pi_i(A) \simeq H^{-i}(N(A))$ pour A un k-module simplicial), cela implique que $(\mathbb{L}D, N)$ est une paire de foncteurs inverses l'un de l'autre. □

Appendix B. Structures de modèles injectives

L'objectif de ce second appendice est de démontrer l'existence de la structure de modèles injective sur les ϵ-dg-modules et les ϵ-dg-algèbres, utilisée de manière auxiliaire lors de la quatriéme étape de la construction de notre foncteur ϕ.

Dans tout ce qui suit, $C(k)$ désignera *exceptionnellement* la catégorie des complexes de k-modules non bornés (i.e. ce que nous avons noté $C(k)_\infty$ précédemment).

Nous commencerons par rappeler l'existence des structures de modèles injectives sur les catégories de dg-modules. Soit B une k-dg-algèbre, et $B - \mathrm{Mod}$ sa catégorie des dg-modules à gauche. La catégorie $C(k)$, des complexes de k-modules, est munie de sa structure projective. Nous définissons les *cofibrations injectives* dans $B - \mathrm{Mod}$, comme étant les morphismes de B-dg-modules dont le morphisme sous-jacent est une cofibration dans $C(k)$. Les *équivalences injectives* restent, par définition, les quasi-isomorphismes de B-dg-modules.

Proposition B.1. *Les notions précédentes de cofibrations injectives et d'équivalences injectives munissent la catégorie $B - \mathrm{Mod}$ d'une structure de catégorie de modèles fermée. Cette structure de modèles est de plus combinatoire.*

Preuve. Cette Proposition est démontrée dans [Lur09, Prop. A.3.3.2], en prenant $\mathbf{S} = \mathbf{A} = C(k)$, et $\mathcal{C}$ la $C(k)$-catégorie avec un unique objet et B comme endomorphisme de cet objet (de sorte à ce que $\mathbf{A}^{\mathcal{C}} = B - \mathrm{Mod}$). Le lecteur attentif observera que la catégorie de modèles $C(k)$ n'est pas *excellente* au sens de [Lur09, Def. A.3.2.16], mais cette hypothèse est superflue pour ce qui est de la validité de [Lur09, Prop. A.3.3.2], comme on l'observe en remarquant que le point clé de sa preuve est le lemme [Lur09, Lem. A.3.3.3]. □

Nous supposerons maintenant que $B = k[\epsilon]$. Nous munissons alors $B - \mathrm{Mod} = \epsilon - dg - \mathrm{mod}$ de la structure monoïdale $\otimes_k$ définie à la suite de la définition 2.1, et de la structure de modèles injectives donnée par la Proposition précédente.

Corollaire B.2. *La catégorie de modèles $\epsilon - dg - \mathrm{mod}$, munie de sa structure injective et de la structure monoïdale $\otimes_k$, est une catégorie de modèles monoïdale.*

Preuve. Il nous faut vérifier les deux conditions de la définition de catégorie de modèles monoïdale, à savoir l'axiome de l'unité et celui du *push-out product* (voir [Hov98, § 4]). Comme les cofibrations, les équivalences et la structure monoïdale de $\epsilon - dg - \mathrm{mod}$ sont définis à travers le foncteur d'oubli $\epsilon - dg - \mathrm{mod} \longrightarrow C(k)$, ces deux axiomes se déduisent du fait qu'ils sont vérifiés dans $C(k)$ (i.e. du fait que $C(k)$ est une catégorie de modèles monoïdale). □

Nous en arrivons finalement à l'existence de la structure de modèles injective sur $\epsilon - cdga$.

Proposition B.3. *Il existe, sur la catégorie $\epsilon - cdga$, une structure de modèles fermée, dont les équivalences sont les quasi-isomorphismes, et les fibrations sont les morphismes induisant des fibrations pour la structure injective de $\epsilon - dg - \mathrm{mod}$.*

Preuve. C'est une application directe du théorème [Lur, Prop. 4.4.4.6]. Il nous faut simplement vérifier que la catégorie de modèles monoïdale symétrique $\epsilon - dg - \mathrm{mod}$ (pour sa structure de modèles injective) est *à puissances libres* (*freely powered*) au sens de [Lur, Def. 4.4.4.2]. Par définition des cofibrations injectives et de la structure monoïdale de $\epsilon - cdga$, il suffit de voir que la catégorie de modèles symétrique monoïdale $C(k)$ est elle même à puissances libres. Lorsque k est un corps, ceci est expliqué dans l'exemple [Lur, Prop. 7.1.4.7]. En général, il suffit de remarquer qu'un morphisme de complexes de $k[\Sigma_n]$-modules qui est une cofibration de k-modules est aussi une cofibration de $k[\Sigma_n]$-modules. Pour voir cela, soit $E \to F$ un tel morphisme, et $A \to B$ une fibration triviale de complexes de $k[\Sigma_n]$-modules. Pour tout carré commutatif dans $C(k[\Sigma_n])$,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ F \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

on sait, par hypothèse, que le morphisme

$$\mathrm{Hom}_{C(k)}(F, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(k)}(F, B) \times_{\mathrm{Hom}_{C(k)}(E,B)} \mathrm{Hom}_{C(k)}(E, A)$$

est surjectif (car $A \to B$ est aussi une fibration triviale dans $C(k)$). En prenant les invariants sur Σ_n, qui est une opération qui préserve les épimorphismes car k est supposé de caratéristique nulle, on trouve que le morphisme

$$\mathrm{Hom}_{C(k[\Sigma_n])}(F, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(k[\Sigma_n])}(F, B) \times_{\mathrm{Hom}_{C(k[\Sigma_n])}(E,B)} \mathrm{Hom}_{C(k[\Sigma_n])}(E, A)$$

est surjectif, ce qui montre que $E \to F$ est bien orthogonal à gauche par rapport aux fibrations triviales, et est donc une cofibration. □

Références

AR94 J. Adámek and J. Rosický, *Locally presentable and accessible categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 189 (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).

BN07 D. Ben-Zvi and D. Nadler, *Loop spaces and Langlands parameters*, prepublication, arXiv:0706.0322.

Ber07 J. Bergner, *A model category structure on the category of simplicial categories*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 2043–2058.

BG76 A. K. Bousfield and V. K. A. M. Gugenheim, *On* PL *de Rham theory and rational homotopy type*, Mem. Amer. Math. Soc. **8** (1976), ix+94 pp.

BF08 R.-O. Buchweitz and H. Flenner, *The global decomposition theorem for Hochschild (co)homology of singular spaces via the Atiyah–Chern character*, Adv. Math. **217** (2008), 243–281.

Cis03 D.-C. Cisinski, *Images directes cohomologiques dans les catégories de modéles*, Ann. Math. Blaise Pascal **10** (2003), 195–244.

CN08 D.-C. Cisinski and A. Neeman, *Additivity for derivator K-theory*, Adv. Math. **217** (2008), 1381–1475.

GZ67 P. Gabriel and M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory* (Springer, Berlin, 1967).

GM03 S. I. Gelfand and Y. Manin, *Methods of homological algebra*, Springer Monographs in Mathematics, second edition (Springer, Berlin, 2003).

Gro A. Grothendieck, *Les Dérivateurs*, edited by M. Künzer, J. Malgoire and G. Maltsiniotis; accessible at http://people.math.jussieu.fr/∼maltsin/groth/Derivateurs.html.

Hin97 V. Hinich, *Homological algebra of homotopy algebras*, Comm. Algebra **25** (1997), 3291–3323.

Hov98 M. Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1998).

Ill71 L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations I*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 239 (Springer, Berlin, 1971).

Kas87 C. Kassel, *Cyclic homology, comodules and mixed complexes*, J. Algebra **107** (1987), 195–216.

Lod98 J. L. Loday, *Cyclic homology*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 301, second edition (Springer, Berlin, 1998).

Lur J. Lurie, *Higher algebra*, ch. 4.4.4, book to appear. Available online at http://www.math.harvard.edu/∼lurie/papers/higheralgebra.pdf.

Lur09 J. Lurie, *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 170 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009).

Mal07 R. Maltsiniotis, *La K-théorie d'un dérivateur triangulé (suivi d'un appendice par B. Keller)*, in *Categories in algebra, geometry and mathematical physics*, Contemporary Mathematics, vol. 431 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2007), 341–368.

Rez02 C. Rezk, *Every homotopy theory of simplicial algebras admits a proper model*, Topology Appl. **119** (2002), 65–94.

Sch04 F. Schuhmacher, *Hochschild cohomology of complex spaces and Noetherian schemes*, Homology Homotopy Appl. **6** (2004), 299–340.

SS03 S. Schwede and B. Shipley, *Equivalences of monoidal model categories*, Algebr. Geom. Topol. **3** (2003), 287–334.

Toe07 B. Toën, *The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory*, Invent. Math. **167** (2007), 615–667.

Toe09 B. Toën, *Higher and derived stacks: a global overview*, in *Algebraic geometry, Seattle 2005*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 80, eds D. Abramovich, A. Bertram, L. Katzarkov, R. Pandharipande and M. Thaddeus (American Mathematical Society, Providence, RI, 2009).

TV05 B. Toën and G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry I*, Adv. Math. **193** (2005), 257–372.

TV08 B. Toën and G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry II: geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008).

TV09a B. Toën and G. Vezzosi, *Chern character, loop spaces and derived algebraic geometry*, in *Algebraic topology: the Abel symposium 2007*, eds N. Baas, E. M. Friedlander, B. Jahren and P. A. Østvær (Springer, Berlin, 2009), ISBN:978-3-642-01199-3.

TV09b B. Toën and G. Vezzosi, *Infinies-catégories monoidales rigides, traces et caractères de Chern*, prepublication, arXiv:0903.3292 (submitted).

Yek02 A. Yekutieli, *The continuous Hochschild cochain complex of a scheme*, Canad. J. Math. **54** (2002), 1319–1337.

Bertrand Toën
I3M UMR 5149, Université de Montpellier 2, France

Gabriele Vezzosi gabriele.vezzosi@unifi.it
Dipartimento di Sistemi ed Informatica, Sezione di Matematica, Università di Firenze, Italy