UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

FLORE
Repository istituzionale dell'Università degli Studi di Firenze

La teoria e la Pratica del taglio delle Pietre e dei Legni, per la costruzione delle volte e le parti delle costruzioni civili e Militari o

Questa è la Versione finale referata (Post print/Accepted manuscript) della seguente pubblicazione:

Original Citation:

La teoria e la Pratica del taglio delle Pietre e dei Legni, per la costruzione delle volte e le parti delle costruzioni civili e Militari o Trattato di Stereotomia per l'Architettura di M.Frezier, Cavaliere dell'Ordine Militare di Saint Louis Ingnieur ordinaire du Roy en chef à Landau. Translation , text and images analysis / C. Crescenzi. - STAMPA. - (2004), pp. 1-674.

Availability:

This version is available at: 2158/782069 since:

Publisher:

UNIFI-Dip. Progettazione dell'Architettura- sezione "Architettura e Disegno".

Terms of use:

Open Access

La pubblicazione è resa disponibile sotto le norme e i termini della licenza di deposito, secondo quanto stabilito dalla Policy per l'accesso aperto dell'Università degli Studi di Firenze (https://www.sba.unifi.it/upload/policy-oa-2016-1.pdf)

Publisher copyright claim:

(Article begins on next page)

05 May 2024

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE DIPARTIMENTO DI PROGETTAZIONE DELL'ARCHITETTURA

Sezione "ARCHITETTURA e DISEGNO"

LA TEORIA E LA PRATICA
DEL
TAGLIO DELLE PIETRE E DEI LEGNI,
PER LA COSTRUZIONE DELLE VOLTE
E altre parti delle Costruzioni Civili e Militari



TRATTATO DI STEREOTOMIA PER L'ARCHITETTURA

Di **M. FREZIER,** Cavaliere dell'Ordine Militare di Saint Louis Ingenieur ordinaire du roy en Chef à Landau

Traduzione analisi del testo e delle immagini
a cura di Carmela Crescenzi

VOLUME PRIMO

Firenze maggio 2004

UNIVERSITA DEGLI STUDI DI FIRENZE DIPARTIMENTO DI PROGETTAZIONE DELL'ARCHITETTURA

Sezione "ARCHITETTURA e DISEGNO"

I trattati di Stereotomia. I. La Theorie et la Pratique de la Coupe des Pierres et des bois, pour la construction des voutes di Amedeo Frezier, Strasburgo, 1737-1739. ***All. 6.***

Traduzione
analisi del testo e delle immagini
BOZZA
a cura di
Carmela Crescenzi
Vol. I

Il lavoro sui trattati di Stereotomia è intimamente legato alla ricerca sulle superfici; l'analisi della trattatistica è affrontata col duplice interesse teorico-pratico: analizzare la conoscenza e lo sviluppo della Geometria Descrittiva e riappropriarsi della tecnica della Stereotomia. La scelta di affrontare il lavoro di Amedeo Frezier, tre Tomi per complessive 1500 pagine, è scaturita dalla necessità di appropriarmi di una chiave di lettura per i trattati che lo precedono. Studiare M. Desargues o M. De Lorme è molto arduo: alla difficoltà di intendere il pensiero geometrico, si aggiunge quello di una lingua diversa ed oscura nell'esporre il proprio pensiero, si riesce a comprendere, ma non a tradurre correttamente e/o con immediatezza. Il problema non è del tutto risolto per Frezier, infatti la traduzione, anche quella presentata in allegato, non è esente da errori o da un linguaggio involuto, per ottenere un buon risultato occorrerà ancora limare e riguardare più volte il testo fino ad appropriarsi della materia per presentarla correttamente.
Il lavoro affrontato inizialmente come ricerca si è dimostrato un ottimo strumento applicativo della didattica suscitando consenso ed interesse da parte degli allievi. Infatti il tema è catalizzatore fra la Geometria Descrittiva e l'Architettura costruita ed è riuscito a concretizzare l'astrattezza della teoria ostica per molti allievi.
Il lavoro è presentato in 2 volumi.

UNIVERSITA DEGLI STUDI DI FIRENZE DIPARTIMENTO DI PROGETTAZIONE DELL'ARCHITETTURA



Sezione "ARCHITETTURA e DISEGNO"

Università degli Studi di Firenze – Facoltà di Architettura a.a. 2001-2002
Corso di "Fondamenti e applicazioni della Geometria Descrittiva".

Elenco delle planche tradotte del Trattato "La teoria e la pratica del taglio delle pietre e dei legni, per la costruzione delle colte" di Amedee Freziér:

planche **1**	pl. **20**	pl. **39**	pl. 58	pl. **77**	pl. **96**
pl. **2**	pl. **21**	pl. 40	pl. 59	pl. **78**	pl. **97**
pl. **3**	pl. **22**	pl. **41**	pl. **60**	pl. **79**	pl. **98**
pl. 4	pl. **23**	pl. **42**	pl. **61**	pl. **80**	pl. 99
pl. **5**	pl. **24**	pl. 43	pl. **62**	pl. **81**	pl. **100**
pl. 6	pl. **25**	pl. **44**	pl. **63**	pl. **82**	pl. 101
pl. **7**	pl. **26**	pl. **45**	pl. **64**	pl. **83**	pl. 102
pl. **8**	pl. **27**	pl. **46**	pl. **65**	pl. 84	pl. **103**
pl. **9**	pl. **28**	pl. **47**	pl. **66**	pl. **85**	pl. **104**
pl. **10**	pl. 29	pl. **48**	pl. 67	pl. **86**	pl. **105**
pl. **11**	pl. **30**	pl. **49**	pl. **68**	pl. **87**	pl. **106**
pl. **12**	pl. **31**	pl. **50**	pl. **69**	pl. **88**	pl. 107
pl. **13**	pl. **32**	pl. **51**	pl. **70**	pl. **89**	pl. **108**
pl. **14**	pl. **33**	pl. **52**	pl. **71**	pl. **90**	pl. **109**
pl. **15**	pl. **34**	pl. 53	pl. **72**	pl. **91**	pl. 110
pl. **16**	pl. **35**	pl. 54	pl. **73**	pl. **92**	pl. **111**
pl. **17**	pl. **36**	pl. **55**	pl. **74**	pl. **93**	
pl. **18**	pl. **37**	pl. 56	pl. **75**	pl. **94**	
pl. **19**	pl. **38**	pl. 57	pl. **76**	pl. 95	

nota: in **neretto** sono evidenziate le planche già tradotte.

Elenco degli studenti che hanno collaborato alla traduzione del Trattato:

Agostini Cristina	Calocchi Cesare	Gori Silvia	Nassini Francesca
Alberico Andrea	Cappiello Vittoria	Guarnieri Sauro	Niccolai Marta
Angeli Cinzia	Carta Aleandro	Iaconianni Antonio	Nocentini Alessandra
Angius Roberta	Casoria Antonina	Janssen Julie	Nunno Antonella
Annovi Elisa	Cecconi Andrea	Lamura Arianna	Orlandini Valentina
Antoniadis Micaela	Cenni Ilaria	Lecca Nicola	Paino Serena
Asta Francesco	Chiarini Giada	Lodovici Arianna	Pala Pierluigi
Avanzini Massimo	Cocco Michela	Lotti Sara	Pianca Gabriele
Bahr Wassim	Colucci Salvatore	Lotti Valeria	Pietrobono Fiorenza
Bai Daniele	Compagnucci Mauro	Maffii Alessio	Piva Enrico
Baldoni Silvia	Cresti Sandro	Magi Meconi Francesca	Ribecchini Silvia
Baragatti Michele	Cristiano Francesca	Manna Stefano	Rinaldi Valentina
Bartolotta Sabrina	Di Tommaso Simona	Marconi Giovanni	Rinicci Damiano
Bartolucci Andrea	Fanciullacci Claudia	Martina Elisa	Rocchetti Irene
Belluomini Briseide	Fiori Silvia	Masini Chiara	Salvadori Enrico
Benati Simone	Frasca Arianna	Mereu Valentina	Simonelli Michela
Bertini Dario	Frau Pietro	Monaco Katy	Sperone Milton
Bertoncini Debora	Gianfreda Gretel	Montano Valentina	Stefanini Giada
Bisceglia Francesco	Giannetti Barbara	Monti Scilla	Tumino Marco
Bisogni Alessandro	Giuntoli Sandro	Morosini Elena	Valvani Laura
Bologni Giovanna	Giusti Andrea	Moruzzo sabina	
Bozzi Filippo	Goffi Hans-Kruger	Nardini Fabio	



DISCORSI PRELIMINARI

INNANZITUTTO

SULL'UTILITA' DELLA TEORIA

NELLE ARTI RELATIVE ALL'ARCHITETTURA.

Mi propongo in questa opera di esporre la teoria delle sezioni dei corpi tanto quanto è necessario per la dimostrazione dell'uso che se ne può farne in Architettura riguardante la costruzione delle volte, e il Taglio Delle pietre e del Legno, quello che nessuno ha ancora fatto; e poiché scelgo un percorso diverso da quelli che hanno trattato questa Materia, che si sono talmente limitati alla pratica, che essi, sembrano disprezzare la teoria, o l'ignorano; ne dimostrerò l'utilità.
Vitruvio, che si può citare come un buon conoscitore delle Arti, poiché è riconosciuto come famoso architetto, e era l'ingegnere capo di Augusto distingueva due cose: conoscere l'Opera e il Ragionamento, l'uno, disse, interessa la gente che ne fa apprendimento, l'altro interessa i sapienti. Non tutti pensano così giustamente come lui; una grande parte degli uomini conoscono così poco la natura delle Arti, che credono che non si possa essere abili se non con l'esperienza; guardano la Teoria come un'occupazione vana, che non ha per oggetto altre che chimere da cui le Arti non traggono alcun vantaggio. Si sono visti, si difendono essi, dei Grandi Uomini nell'Architettura Civile e anche in quella Militare che si sono distinti per le loro Opere senza essere né Géometri né Matematici, dunque si possono tralasciare queste Scienze per divenire abili nelle arti.
Per rispondere a questo falso ragionamento che molte persone fanno per la tesi che vogliono dimostrare, parlando in assoluto, a parte parlano del nutrimento, gli uomini possono fare a meno di tutto, anche degli abiti nei paesi freddi, come testimoniano gli antichi galli nostri antenati e, molte Nazioni Selvagge; ma poiché la Natura ci ha destinato al

lavoro e che mediante un pò di applicazione ci dà la possibilità di aggiungere un infinità di agi e comodità alle Opere di coloro che ci hanno preceduto e, di conciliare la bellezza con la solidità degli edifici, che ci garantiscono dalle ingiurie dell'aria e dagli insulti dei nostri nemici, sembra, che non é agire da uomini ragionevoli aspettare che l'esperienza ci faccia sentire i nostri bisogni; ma che dobbiamo riflettere sui mezzi per prevenire quelli, che possono capitarci nell'attuare i nostri progetti e di combinare questi mezzi in tante maniere differenti in modo da scegliere sempre i più brevi e i più agevoli, ciò che é riservato alla sola Teoria.
Che mi si permetta qui un paragone per rendere questa verità più evidente; prima che fossero progettate le "Grands Chemins" con carreggiate diritte, solide, e di larghezza comoda, si comunicava come oggi fra una città ed un'altra, ma si rimaneva in cammino molto più a lungo, era più faticoso, si era soggetti ad impantanarsi e sovente a perdersi.
Prima che si fosse consultato la Geometria e la Meccanica e l'Architettura, si realizzavano la Volte con gli stessi Materiali di oggi; ma non si poteva essere certi dell'equilibrio dello sforzo alla loro spinta e della resistenza dei Piedritti che tendono a ribaltarsi ; di modo che non conoscendo il giusto mezzo fra il troppo ed il troppo poco del loro spessore si era soggetti ad affrontare una spesa superflua per ilo materiali o a vederli crollare per la loro debolezza: l'esperienza ci fornisce ancora spesso degli esempi a scorno di coloro che si occupano di costruzione senza la conoscenza né della Geometria e né della Meccanica e con grande danno di chi fa costruire. Si facevano così dei sesti di tipi diversi, circolari ribassati, rialzati e rampanti; ma si ignorava che cos'era la curvatura che conveniva loro meglio nella circostanza dei termini dati. Si incontravano nelle esecuzioni delle difficoltà che non erano state previste, che non si sapevano risolvere se non che col taglio Gordiano, demolendo e ritagliando molte volte le parti delle volte che non tornavano finché l'occhio fosse meno offeso dalla loro difformità, da cui risultavano grande perdita di tempo e di materiale; poiché i tentativi non hanno successo che per caso, queste opere duravano poco, costavano molto di mano d'opera e soddisfacevano raramente la vista e lo spirito dei conoscitori.
Da cosa deriva che i pratici disprezzano la teoria e la considerano niente a confronto dell'esperienza che non cessano di vantare? Penso che vi siano due ragioni: la prima, é per stornare la vergogna di non poter rendere ragione ad altri delle loro Opere se non quella di imitare quelli che passano per bravi, e della convenienza che essi hanno notato nella pratica, rendendosi conto di non essere abbastanza illuminati per risalire alla causa. Questa ragione é dovuta alla vanità del cuore umano; l'uomo per innalzarsi sui suoi simili affetta di disprezzare le cose che gli mancano, e cerca di vantarsi del poco che possiede; da ciò ne deriva che al mondo ci si disprezza reciprocamente, e che la scienza , la cui bellezza ed utilità sono molto poco conosciute dalla massa, non ha l'importanza che dovrebbe avere rispetto alla sola pratica; la disattenzione e spesso la mancanza di conoscenza della "gens en place" favoriscono i falsi giudizi che si danno sul merito della pratica; poiché la fatica del lavoro svolto per acquisire conoscenze utili per i bisogni della vita, o per l'arricchimento dello spirito é di solito molto inutile per essere apprezzati; ce ne sarebbe abbastanza per scoraggiare ogni emulazione e per arrestare il progresso delle arti e rimpiangere la Barbarie dei secoli di ignoranza, se la Natura non avesse provveduto a correggere la cieca ingiustizia degli uomini. Essa ha dato a questa fatica il premio di una soddisfazione interiore,, che é essa sola capace di sostenerla contro il disdegno di una stupida indifferenza o di una presuntuosa ignoranza. In effetti senza le attrattive delle scienze e un certo amore per le virtù, cosa potrebbe impegnare un uomo sensato a consacrare le sue vegli senza interesse, al solo bene pubblico, che pullula di gente più disposta alla critica che alla riconoscenza, a rilevare i minimi errori, che a perdonargli in favore di quello che merita di più la loro attenzione ed il loro plauso?

Il secondo motivo di quelli che preferiscono la sola pratica alla teoria può essere sinceramente dedotta dal fondo della loro ignoranza, perché essi le attribuiscano gli effetti della Teoria che é a loro sconosciuta. D'Aviler, famoso autore in architettura, ce ne fornisce una prova ed un esempio comico alla pagina 237. "La severità delle regole di geometria," dice " é inferiore alla pratica, come il METODO DEI CERCHI ALLUNGATI (RALONGEES) VALE DI PIÙ DELLE FIGURE GEOMETRICHE, per cui in quest'arte é preferibile alla Teoria". Non ci si può impedire di ridere di una

simile definizione, che mostra con evidenza che il giudice non conosce la problematica, e che egli vuole criticare ciò che non conosce; infatti, se egli avesse saputo che "il cerchio che il cerchio ralongées tracciato a tutto sesto, rialzato o ribassato, era un ellisse molto geometrica non avrebbe usato questo ridicolo linguaggio. La maggior parte delle persone senza teoria parlano e pensano come lui; perché privi di principi non arrivano se non con grandi sforzi e una lunga pratica ad alcune deboli conoscenze delle cose che sono più facili per coloro che conoscono la teoria; ne deriva che essi fanno un grande caso per le piccolezze, e si credono dei grandi uomini per essersi "frayé" qualche strada un pò agevole nella pratiche, sebbene questi pretesi Inventori non possono essere sicuri della giustezza né della riuscita delle opere a tentativi di cui non vedono né la differenza dei casi né la durata; per cui credono spesso di aver eseguito una buona opera anche quando non hanno fatto altro che avvicinarsi al vero, e che non hanno preso la via più sicura e più corta, poiché essi non conoscono altro mezzo per raggiungerla che l'esperienza, non pensando che ci possa essere un maestro migliore secondo il proverbio che e si citano ad ogni proposito, "L'esperienza é maestra delle cose".
Io non pretendo qui di diminuire il merito dell'esperienza, ne conosco la necessità in molte cose; per esempio, in fisica fa scorgere le cause e gli effetti ai quali non si era pervenuto con il ragionamento; nessuno dubita che essa sia indispensabilmente necessaria nelle arti che dipendono dall'abitudine, e in quelle che sono problematiche come la Guerra; ma lo é molto meno in quelle che provengono dalle scienze, é una guida equivoca come il bastone per un cieco, che gli serve a guidarsi se non molto imperfettamente in quanto non gli indica cosi bene gli oggetti tanto da non confonderli gli uni con gli altri e da cadere se ne capita l'occasione.

Questa distinzione indica ciò che si deve pensare riguardo alla scienza e l'Esperienza è necessaria a un Ingegnere; poiché la sua attività riguarda sia la guerra che le arti dipendenti dalla matematica; sarebbe uno sbaglio progettare senza l'apporto della Teoria: come citare Personaggi elevati ad alti incarichi per merito di azioni militari, sia pure limitati a semplici costruzioni di pratica; le ricompense dovute al valore riguardano solo una parte del merito di un uomo di guerra, ma questo non basta ad un Ingegnere. Quelli dell'antichità (uomini di guerra ?) erano dei sapienti; le loro meravigliose invenzioni negli assedi non lo provano abbastanza. Benché dopo la decadenza dei Romani le scienze si siano in qualche modo separate dalla guerra(poiché non spetta più a questi uomini, adatti ad amministrare la giustizia, essere a capo delle armate) .Per quanto riguarda gli Ingegneri questo non avverrà mai; è in loro che deve sussistere questo antico accordo tra scienza e guerra. Se essi necessitano della bravura, buon senso ed esperienza di guerra, essi necessitano pure della scienza dei Matematici. Senza la Geometria di cosa sarebbero capaci la meccanica e l'idraulica, nel costruire fortezze e piazzeforti (places de guerre), se non d'imitare quello che hanno visto o di copiare spesso degli errori? tracce di cieca imitazione non sono rare e non mancano neppure in città dove se ne possono riconoscere alcune.
Io affermerei anzi, che le Scienze necessarie alla costruzione di macchine da guerra non sono inutili in guerra; esse allargano la mente, forniscono mezzi industriosi, per le mansioni e le opere necessarie all'Attacco e alla Difesa delle piazzeforti che il solo valore non basterebbe ad eseguire senza questo aiuto. ARCHIMEDE era un puro matematico che non si sarebbe mai degnato di abbassarsi alla Pratica, se non fosse stato spinto dalle sollecitazioni del Re Hierom, suo parente, a fare uso delle sue conoscenze per l'invenzione di macchine da guerra; pertanto i suoi esperimenti furono tali colpi da maestro che all'assedio di Siracusa egli debellò, con la forza della Teoria, tutta l'esperienza degli ingegneri romani che avevano fato valere con grande successo la loro abilità nella conquista delle più ambite piazzeforti; le sue nuove macchine ebbero tale effetto che egli intimidì e respinse l'armata di Marcello, al punto che questo generale rinunciò agli avanzamenti e agli assalti, costretto a ridursi a cercare di ottenere, con il prolungarsi dell'assedio, quello che non poteva ottenere con la forza a causa della ingegnosa resistenza che gli opponeva Archimede. Se ne può attribuire a lui tutto l'onore perché dice Plutarco, egli era l'unico autore della difesa, i Siracusani non erano altro che il corpo e le membra, di cui lui solo era la mente che metteva tutto in movimento, senza che si facesse uso di altre armi se non delle sue. Pertanto questo grande uomo, aggiunge lui, non si gloriava affatto delle sue innovazioni, le considerava solo come "*giochi geometrici*" (effetti), che egli stimava così poco in confronto alla Teoria di credere di farsene più

onore nel lasciarne degli scritti, piuttosto che la descrizione di queste macchine meravigliose, la cui invenzione e il cui uso gli aveva dato tanta gloria e un così grande nome, tanto che passava per un uomo " *non dotato di scienza umana, ma di saggezza tutta divina*". Diciamolo senza perifrasi la sola esperienza non produce che imitatori servili, i quali preoccupandosi solo delle cose di minore importanza, non avendo altra risorsa che il riempimento del loro portafoglio, si buttano come ciechi sulla falce, per i progetti l'esecuzione e la misurazione(?).
Io direi perciò senza voler favorire l'ignoranza, che l'ingegnere si deve limitare allo studio di ciò che può essere utile alla Pratica, senza lasciarsi andare a vane curiosità, per paura che, trascinato nella morsa del piacere della scoperta, più capace di lusingare la sua vanità che di portarlo a maggiore perfezione nelle arti, non sia spesso distratto e tentato di trascurare il proprio diverse.
L'ingegnere deve prestare maggiore cura alla solidità e alla bellezza delle opere di cui è incaricato ed evitare così lo scoglio del disprezzo che ispirano le "hantes Siences", per occupazioni che sono alla portata degli ingegni più limitati. Gli è sufficiente essere capace e mettere a profitto le opere dei Sapienti e degli Accademici delle Scienze che hanno rapporto con le arti necessarie per la costruzioni delle piazzeforti, rimandando gli studi (all'inverno) e al tempo libero che ci lascia il servizio del Re.

Fra le conoscenze che ci sono necessarie: quella del taglio delle pietre, sebbene una delle più trascurate, non è affatto una delle meno importanti. Io ho accertato per esperienza personale che era assolutamente indispensabile tanto a me ingegnere che a un architetto; poiché egli come me può essere inviato in lontane Colonie e anche in Province dove mancano operai capaci di eseguire certe parti delle Fortificazioni, dove occorre la conoscenza dell'*Apparecchio*. L'esperienza che io avevo appena fatto, nel mio secondo ritorno dall'America mi fece venire l'idea di comporre un trattato. Invitato a questa impresa, prima di tutto dalla estrema rarità dei libri relativi a questo argomento, secondariamente per il modo imperfetto in cui è stata trattata fino ad oggi. Ne stesi il profilo quando seppi che un architetto stava per pubblicarne uno; infatti dopo qualche uscì quello di M. de la Rue; ma poiché, come quello di P. Deran (che era si può dire l'unico) era indirizzato soltanto a guidare la mano, senza chiarire lo spirito: capire che non era abbastanza metodico per calmare l'attesa dal pubblico, che attendeva da lungo tempo un'opera più geometrica. Ne fui convinto quando le persone alle quali avevo comunicato il mio progetto, m'esortarono a lavorarvi e a proseguire. La differenza (fra il testo citato e il mio) è così grande che non si può dire affatto che è la ripetizione della stessa specie di libro. Quelli che io ho appena citato sono fatti per gli operai e questo invece per chi li deve guidare, come gli Ingegneri e gli Architetti che si devono supporre addentro (iniziati) alla geometria.

Io so che il mestiere e una certa geometria naturale prendono il posto della scienza per i "sagomatori" nei casi ordinari; ma ho constatato che diveniva loro inutile nei casi che non sono citati nei libri, come dimostrerò quando ne sarà il caso. Dimostrerò inoltre, che essi si sarebbero fermati senz'altro se l'ingegnere, non fosse stato in grado di sostituirli. Egli deve dunque prevenire la vergognosa necessità di arrendersi all'ignoranza dei più pratici i quali, vengono a capo delle soluzioni solo a forza di tentativi, demolendo più volte, con risultati aventi qualche difformità e qualche difetto di solidità. Questi casi non sono così rari come uno si potrebbe immaginare, poiché ne sono venuto a conoscenza. Tutto ciò non è affatto straordinario poiché non si riscontra solamente negli allacciamenti tra le vecchie e le nuove opere, ma anche in quelle recenti. Io proporrei, a chi lo desidera, che gli imprenditori fornissero buoni preparatori. Non conviene forse alla dignità dell'ingegnere essere in condizioni di conoscere e di esaminare ciò che i preparatori (sagomatori) compiono per ordinare e decidere la migliore costruzione e non tollerare errori che essi possono commettere con malizia per utilizzare pietre(materiale) di scarto o per risparmiare un pò di lavoro?
D'altronde questa materia è abbastanza interessante da meritare l'attenzione di una giusta curiosità; se ne potrà giudicare da ciò che segue.

SECONDO DISCORSO

INFORMAZIONI E SUDDIVISIONE PER ARGOMENTI DELLA MATERIA DI CUI SI TRATTA.

L'idea che si ha della parola "*Coupe de pierres*" non è...; questa parola non indica precisamente l'opera dell'artigiano che taglia la pietra ma la scienza del matematico, che guida nell'intento di formare una volta o un corpo di un certo edificio attraverso la composizione di alcune piccole parti. Occorre pertanto più capacità di quanto non si pensi, perché vengano fatte a dovere, giacche, sebbene ineguali per disegno e grandezza concorrono ciascuna a formare una superficie regolare o regolarmente irregolare. Queste piccole parti sono disposte in modo che si sostengono in aria, appoggiandosi reciprocamente l'una all'altra, senza alcun collegamento che quello della propria pesantezza. Non si deve tenere conto, infatti, dei collegamenti di calcina o di cemento. Da ciò si intuisce che questa scienza fonda le sue leggi principalmente dalla geometria per la conoscenza delle linee e delle superfici curve e diritte e dei corpi solidi che devono essere divisi.
Secondariamente dalla Meccanica e dalla Statica, per equilibrare le parti di solidi che compongono le volte.....le quali si sostengono a vicenda agli appoggi che vi si fissano.?
La nostra intenzione non è quella di considerare le volte come un insieme di corpi pesanti, che fanno sforzi diversi gli uni sugli altri; questa teoria sebbene assai curiosa è molto utile, può essere ricondotta per la Pratica al piccolo numero di prefazioni dimostrate dai signori De la Hire, Parent, Conflet e Belidor:
questa teoria interessa la spinta delle volte, a cui si possono aggiungere alcune osservazioni sugli edifici che esistono da molto tempo, sebbene un pò esenti dalle regole del calcolo, sia per la buona qualità dei materiali che formano i corpi (quando gli si dà il tempo di legarsi), sia pe la differente pesantezza delle volte e dei loro piedritti, di cui occorre tenere presente nei calcoli, poiché l'uno è di pietra leggera e l'altro più pesante.
Noi non terremo conto qui della "Compte de Pierres", altro che in relazione alla Geometria, supponendo solamente che un corpo Conico, Piramidale o fatto ad angolo non può procurarsi un passaggio attraverso un foro che non sia così grande, nel suo piccolo orifizio, quanto la base del corpo che vi si introduce. Supposto ciò, questa scienza si ridurrà a:
1°- Conoscere le linee curve formate dalla divisione dei solidi, concavi e convessi tagliati da superfici piane, o curve. Ciò si può chiamare in una parola sola di origine greca "Tomamorphie" o descrizione delle sezioni, se fosse permesso coniare nuove parole per evitare perifrasi.

2°- Tracciare queste linee curve su delle superfici piane, quand'è possibile e necessario o su superfici curve quando non possono adattarsi su di un piano in tutta la loro estensione (quest'operazione si può chiamare come la suddetta: "Tomographie" o *descrizione delle sezioni.*

3°- Spiegare metodi facili per rappresentare i solidi e le loro divisioni su superfici piane, fin dove è possibile ora, dato che questi mezzi sono ridotti non potendo essere espressi altro che molto imperfettamente:
a)- proiezione fatta su un piano per mezzo di linee abbassate parallele fra loro e perpendicolarmente al piano di descrizione; tutto ciò, se fatto su piano orizzontale, si chiama "Ichonographie", se su piano verticale "Ortographie.
b)- descrizione delle superfici ordinate separatamente e in tutta la loro estensione su di un piano che viene chiamato "Sviluppo" e che si potrebbe chiamare "Ipidographie".
c)- descrizione degli "angles"dei piani o di superfici qualsiasi di un solido o di "angles" fra solidi; questi argomenti potrebbero essere raggruppati sotto la voce "Goniographie"(descrizione degli angoli).

4°- fare uso di questi tipi di rappresentazione per giungere a una sezione dei corpi conveniente per la costruzione delle volte, applicando i modelli degli Angoli e delle superfici a dei solidi, per la maggior parte Parallelepipedi, al fine di tagliare gli stessi e ridurli alle figure richieste. Tutto questo si ottiene abbattendo le parti eccedenti, come è precisamente nell'arte della cupola di pietra o di legno, cioè quel procedimento di successive sezioni che si potrebbe chiamare "Tomotechnie".

n

Riepilogando l'elaborazione appena citata per dare un'idea precisa e semplice dell'argomento di cui si tratta, noi trattiamo in questa prima parte dell'opera, della Scienza, mentre ella seconda, dell'Arte della Stereometria, cioè delle Sezioni dei solidi.

La prima parte viene divisa in due libri: una di "Timomorphie" o figure delle sezioni, l'altra di "Tomographie" o descrizione delle sezioni.

La seconda parte come la precedente si compone in due libri: la "Stereographie" o descrizione dei solidi e la "Tomotecnica" o arte di fare le sezioni.

Questi sono gli argomenti dei quattro libri di quest'opera seguendo l'ordine che c'è parso il più semplice e naturale.

Si cercherà di spiegare e di provare con delle dimostrazioni che non presuppongono altre conoscenze matematiche che non siano la geometria elementare di Euclide e le altre che sono seguite.

So che oggi la Geometria lineare non è più di moda e che per darsi un'aria di scienza bisogna far sfoggio dell'Analisi; tuttavia la geometria antica, dice un sapiente, seppure meno sublime, meno stuzzicante e anche meno gradevole, è più necessaria e più sensibilmente utile. E' soltanto essa che offre alla nuova geometria fondamenti solidi, specialmente nella materia di cui si tratta, dove il calcolo algebrico potrebbe essere utile solo nelle congetture per concludere questo discorso preliminare.

T E R Z O D I S C O R S O

Origine del taglio delle Pietre e l'uso che se ne deve fare.

Il legno è la materia più naturale e più comoda per la costruzione degli edifici necessari alle abitazioni umane.

Ma il desiderio che accomuna tutti coloro che costruiscono edifici considerevoli è di assicurarne la durata per lungo tempo. L'idea che le opere in legno siano soggette a caducità a causa di marciume e il timore che esse siano devastate dagli incendi hanno fatto preferire la pietra al legno dove si è potuto sostituirlo. In questa ottica non si è potuto economizzare ne' nella fatica, ne' nell'enorme spesa per estrarle dalla terra, trasportarle e tagliarle.

La necessità inoltre a costretto molti uomini nelle contrade ad adottare le pietre al posto del legno, perchè la natura ha fornito loro più cave che foreste. Tuttavia il modo di costruire con gli alberi è parso così naturale che si è guardato come ad un abbellimento l'imitazione di questa struttura. E' da qui che è derivato l'uso delle colonne nell'architettura antica e delle "Pilliers ronds e des Perches" nel gotico.

Per rendere questa imitazione più perfetta, gli antichi costruivano le loro colonne, per quanto potevano, in un sol pezzo, così come sono i tronchi degli alberi. Essi usarono la pietra allo stesso modo per le architravi che sostituirono le travi principali che dovevano essere sostenute dalle colonne. Restano delle vestigia degli antichi egiziani, greci e romani, che ci mostrano che essi usavano delle pietre di enorme grandezza.

Negli ultimi secoli si è abbandonato questo modo di costruire troppo difficile per l'enormità dei pesi che si dovevano trasportare e per la somma straordinaria che richiedevano. Si è loro preferito l'assemblaggio di numerose pietre di una grandezza più maneggevole e senza allontanarsi dal gusto degli antichi. Si è continuato ad imitare i tronchi d'albero con le colonne, ma si sono fatte di "Tambours", cioè di segmenti cilindrici. Si sono ugualmente imitate le travi con le architravi, ma si è fatto con dei conci che si sostengono nello spazio come se l'insieme fosse fatto di un pezzo continuo. Tuttavia, siccome questa situazione è troppo forzata e la spinta ne risulta troppo grande, gli architetti le hanno appoggiate a delle Architravi, che a loro sono parse più solide e sebbene con questo tipo di costruzione le colonne e le architravi divengono inutili, essi le adoperano ugualmente come ornamento. Questo gusto è quello dominante oggi in Europa, imitato da qualche monumento delle antichità romane; che si è ripreso per modello dopo in lungo intervallo in cui vigeva un gusto completamente diverso.

Le proporzioni delle colonne antiche erano sembrate, nella Gallia e in altre parti d'Europa troppo massicce e troppo corte. Si sostituiscono perciò con gruppi di "Perches" molto lunghe e sottili e la difficoltà nell'imitare con le pietre la posizione orizzontale delle travi aveva fato trascurare le architravi; al posto delle quali occorreva passare da un "Perches" al suo opposto, archi di pietra ....sotto le volte, che si incrociavano e si riunivano in modi diversi, imitando in questo i chiostri nelle volte a botte, che formano dei rami d'albero curvati da una parte all'altra.

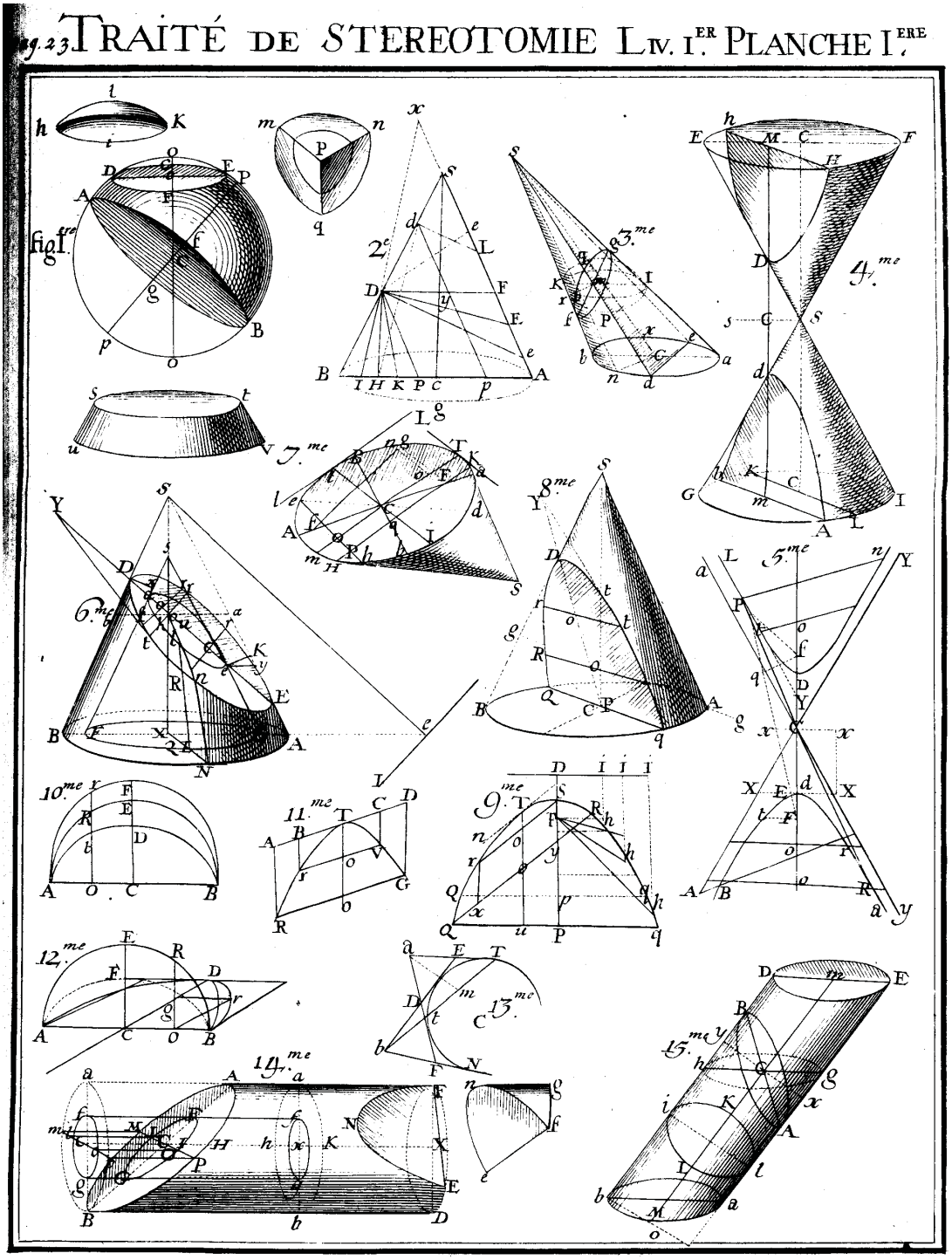
(Essendo sembrato loro troppo pesante il contorno stesso della volta a botte (berceau), che facesse cioè troppo sforzo per (?) i muri. Gli architetti di quel tempo costruivano i loro Centri per mezzo di due archi di cerchio uguali, ma con centri diversi, allo scopo di tenerne l'inclinazione più rigida e in questo modo diminuire questo sforzo rendendolo così più tenue e leggero.(?) Essi lo attraversavano inoltre con altre parti di volte, che formavano una quantità di angoli cadenti, le cui spinte erano nascoste e rafforzate da nervature di ogive Arcs doumbleaux, Tiercerons e Formerts, di cui formavano un'infinità di scompartimenti, che terminavano sovente in fregi di volta sospesi nell'aria. Tutte queste origini ele intersezioni delle modanature richiedevano una grande capacità nell'arte del taglio delle pietre. Per cui io ritengo che se ne debba attribuire l'origine all'architettura Gotica, o almeno all'adolescenza di questa arte. Ma il fatto è, che oltre a non esserci rimasti monumenti antichi, nei quali sia stata usata quest'arte, salvo per tratti molto semplici, fra l'enumerazione che fa Vitruvio delle conoscenze necessarie ad un architetto, egli non parla affatto del taglio delle pietre; in effetti la nobile semplicità dell'architettura antica non esercitava molto l'accortezza dei sagomatori che avevano quasi soltanto volte cilindriche o sferiche da dirigere.

La formazione, al contrario, di un gran numero di figure bizzarre e difficili, che si presentano ad ogni momento nell'architettura gotica, ha dato loro la possibilità di immaginarne delle altre, per trarre dall'irregolarità dell'area delle costruzioni, o sopperire ai difetti del luogo. Gli angoli, ad esempio che non sembrano luoghi adatti a praticarvi delle porte, non hanno impedito che si coprissero dei passaggi con una volta, senza smussarli, ciò che in partenza poteva sembrare contrario alla solidità. Si sono sostenuti nell'area dei "cabinets" per mezzo di "trompes" per lasciare sotto uno spazio libero. Si sono sostenute le scale in tanti modi diversi e si sino immaginate tante cose sconosciute agli antichi, tanto che si è trovato abbastanza materiale per scrivere dei libri!

FILIBERTO DE LORME, elemosiniere di Enrico II, si dice che sia stato il primo ad avere scritto su tali argomenti, non espressamente, ma in occasione del suo trattato di architettura, che egli pubblicò nel 1567. Come si può vedere questa data non è molto antica. Maturin Jousse rese noti alcuni trattati nel suo libro intitolato "Segreti d'architettura", stampato alla Flèche nel 1642. Se P. Deran, nell'anno seguente insegnò quest'arte in tutta la sua estensione per gli operai. BOSSE, (nello stesso anno) pubblicò un sistema completamente diverso che egli riprendeva da DESARGUES e che per la complessità e la novità del suo linguaggio non fu affatto capito. Infine M. de la Rue nel 1728, ha riportato una parte dei trattati di P. Deran, con alcune altre innovazioni. Tutti questi autori hanno prodotto soltanto della semplice pratica senza alcuna prova. P. DECHALLES nel 1672 fu il primo ed è rimasto il sono fino ad oggi, che abbia aggiunto delle dimostrazioni; ma il suo trattato "*De lapidum sectione*" inserita nel suo grande corso di matematica in latino, è quasi soltanto un estratto dell'opera di P. DERAN, dal quale qualche volta ha copiato perfino gli errori, come mostreremo.

Dopo aver esaminato queste differenti opere, m'è sembrato che rimanesse ancora qualcosa di meglio da fare.
Prima di tutto c'era da dare, in proposito, un'esatta conoscenza della natura delle Linee Curve, che si formano agli incroci delle volte, tanto alle loro superfici che all'intersezione delle "dalles", di quelle che sono composte da diverse parti che s'incrociano, per saperla tracciare su dei piani, quando è possibile, o su delle superfici curve, quando queste linee sono a doppia curvatura, questa è la prima novità di questo trattato.
La seconda novità sarà la correzione degli errori di molti dei vecchi trattati. La terza novità sarà l'elaborazione di alcuni trattati variati e di alcuni che non sono ancora apparsi.
Posso contare su quattro novità circa la dimostrazione dei trattati, perché DECHALLES mi ha preceduto in latino, ma non in francese, per cui, per servirmi dell'espressione di Josse i *Segreti dell'Architettura* vi sono completamente svelati.
La novità di quest'Arte e le difficoltà che contiene hanno impegnato gli architetti degli ultimi due secolia cercare l'occasione per fare mostra della loro Scienza, persuasi
che niente poteva renderli raccomandabili, come queste opere ardite, dove era impossibile non ammirare il taglio delle pietre. Per cui ostentavano la capacità di costruire anche senza farne uso. Ho visto il (tiers) d'una forma quadrata che si poteva sostenere dalle fondamenta, le quali erano sostenute solamente dal solo taglio di una "Platebande Rampante" che ne elevava un angolo in aria e molte altre simili per temerarietà.
Gli architetti del nostro tempo, non trovano più tante ragioni per farsi ammirare per una scienza ritenuta più comune o forse diventati più saggi hanno bandito queste arditezze bizzarre, che non hanno altra bellezza che quella della loro esecuzione e che non solo non contribuiscono per niente alla decorazione degli edifici, ma che sono invece loro pregiudizievoli, in quanto ne aumentano gli sforzi e il peso; infatti non conviene mettere in opera i trattati di (porte-à-fousc) come i (trompes) se non vi si è assolutamente costretti, o per qualche disimpegno (degagement) o per evitare la spesa o lo scomodo di prendere il posto delle fondamenta. Aggiungerei anche, che occorre piuttosto tenere conto del buongusto, piuttosto che ricercare la rarità o la difficoltà nelle opere, alle quali sembrano dirigersi i nostri moderni architetti, che rincorrono le novità. L'incintro e l'intersezione di differenti volte non è sempre di bell'effetto. Un arco di chiostro, per esempio, con centro circolare poco concavo, attraversato da lunette e sormontato da un "cul-de-four", come quello che si vede in una cappella della chiesa di S. Sulpicio, (ne fait si breu) di una volta meno composita. Delle lunette cilindriche, che attraversano una porzione della volta sferoide, o volta di forno (four) ribassata, non si presenta bene da vicino; perché le crociere degli spigoli sembrano diverse, cioè piegate a destra e a sinistra, come si può notare nella stessa chiesa di S. Sulpicio; questa differenza diminuisce, quando la lunetta è vista dal basso (fig. 15) alto e da più lontano come a S. Rocco; ma essa non è tolta completamente e non si può fare per la natura della curva che non è su un piano, come si vedrà nel corso del primo libro.
Si può infine notare ancora, che le volte sferiche attraversate da due botti che si incrociano hanno un aspetto nudo ed imperfetto, se non sono divise da una cornice orizzontale, che sopprime (rentranche) il segmento di sfera e lo mette, per così dire dalla parte del pennacchio; se ne scorge la necessità nel noviziato dei gesuiti a Parigi. Sarebbe troppo lungo ricercare simili aiuti (?) di volte che non soddisfano il colpo d'occhio senza l'aiuto di qualche correttivo, sebbene costruite solidamente e secondo le regole della buona costruzione. Queste osservazioni sono più utili all'architettura civile che a quella militare, in cui sembra che si trascuri la bellezza per la solidità. Non sarebbe pertanto male che gli ingegneri facessero uno studio dell'architettura civile. Essa è loro necessaria per la costruzione degli edifici militari, di cui sono incaricati nelle "villes de guerres", come caserme, magazzini, ospedali, alloggiamenti dello Stato Maggiore e qualche volta anche delle chiese delle fortezze e delle cittadelle, edifici che sono della stessa specie degli edifici civili, dai quali differiscono solo per il nome; così possono anche, le carte lo giudicano giusto, assumere la direzione delle costruzioni civili pubbliche. Ma essi non devono mai interessarsi dei particolari, di qualsiasi qualità possano essere. Prima di tutto perché essendo ufficiali del Re, quindi pagati sia in riposo che sul lavoro,*(è da mettere) è giusto che essi utilizzino il tempo libero che possono avere per istruirsi presso il gabinetto delle scienze per le nozioni che sono loro necessarie alla costruzione e agli aggiornamenti degli avvenimenti storici relativi agli assedi, che possono dare loro idee

atte a metterli in condizioni di servire utilmente in situazioni diverse. I secondo luogo perché niente avvilisce tanto gli ingegneri, quanto questa specie di occupazione che fanno supporre per loro dei vuoti di interesse e che invece li coinvolgono con operai e salariati, i quali addossano all'ingegnere gli sbagli causati dalla loro ignoranza o dal capriccio del proprietario. Gli esempi che si vedono dovrebbero insegnare alle persone troppo servizievoli. Infine perché interessandosi di architettura civile, sembrano uscire dalla condizione di militari e rinvigorire il disprezzo che gli uomini d'arme hanno per coloro che si interessano delle arti meccaniche. Non è con questo che non vi siano nel servizio (militare) occupazioni poco nobili, l'ufficiale di fanteria deve occuparsi minuziosamente alla cura e alla pulizia dei soldati e delle caserme, quello di cavalleria deve occuparsi degli scudieri e dei cavalli, quello di marina alla riparazione e alla costruzione delle navi, quello di artiglieria ai carriaggi e alle fucine e l'ingegnere a tutte le arti che sono in rapporto con la costruzione. Queste funzioni avrebbero, per se stesse, qualcosa di vile, seguendo il pregiudizio del mondo, se non si fosse stabilito nelle regole dell'onore, che non c'è niente di vile in tutto ciò che riguarda il servizio del Re, nella vita militare. Gli ingegneri devono rimanere in questi limiti e lasciare l'architettura civile a chi ne fa una professione.


Pag. 23 TRAITÉ DE STEREOTOMIE LIV. I.ER PLANCHE I.ERE
Fig I.re
2.e
3.me
4.me
5.me
6.me
7.me
8.me
9.me
10.me
11.me
12.me
13.me
14.me
15.me

Su alcune differenze di posizione delle sezioni coniche nei coni scaleni.

Sebbene i coni scaleni non siano di diversa natura rispetto ai coni retti, l'obliquità del loro asse sul piano di base causa qualche differenza nelle sezioni, non considerando la loro rispetiva posizione.

49) 1°. Noi abbiamo fatto vedere che la sezione di un piano, obliquo all'asse del cono scaleno del quale taglia i due lati, può essere un cerchio, sebbene questa Sezione sia un Ellisse.

50) 2°. Le sezioni fatte con dei piani paralleli alla base, che sono dei cerchi nei coni retti, possono essere delle ellissi nei coni scaleni, se essi sono considerati come dei coni reti su una base ellittica; perché se si suppone che la base *bead* (Fig. 3) é un ellisse, e che una linea *sa* immobile sul suo punto *s*, percorre verso l'altra sua estremità ha il profilo di questa ellisse, la figura che ne risulterà sarà un cono scaleno con base ellittica; si può immaginare la stessa genesi per un cono retto come se la base B*g*A Fig. 2) fosse un ellisse.

Sarà sempre evidente che tutte le sezioni fatte per mezzo di piani paralleli a queste basi, saranno delle ellissi simili a quelle della base; poiché tutti i diametri possibili DF, BA di una sezione attraverso l'asse BSA, o KI, *ba* (Fig. 3) saranno proporzionali a quelli di un'altra sezione per l'asse dello stesso cono.

Ma tutte le sezioni oblique in questo cono non saranno delle ellissi, perché senza fermarsi alla sezione *suo contrarie*, che in questo caso non esiste; poiché la base non é circolare, si potrà sempre dimostrare che tali coni possono essere tagliati da un piano generico rispetto all'asse, e che non farà con i lati degli angoli uguali a quelli della base, cioè dei lati del triangolo per l'asse con la base, di cui la sezione sarà un cerchio così come il suo contrario; poiché se si traccia la retta *sx* sulla faccia del cono, ed *nc* sulla base con centro C, ed o m parallelo ad n c ;poiché OM:*nc* = S*m*:S*c* il diametro *om* sarà più piccolo nel rapporto di K*mabc*. Se, per esempio, *bc:cn = il grande asse è al piccolo*, lo stesso rapporto si avrà fra K*m* ed *mo*, di cui K*m* sarà più grande che *mo*; è chiaro che cambiando l'inclinazione del piano o della sezione per esempio in *r* ,si può rimpicciolire questo semiasse, finché diventa uguale ad *mo*, come se dal punto *m* come centro e con raggio MO si tagliasse il lato *b*S in *r*, ciò che è possibile rispetto a più lati diametralmente opposti, poiché *m*K è più grande che *mo*, allora i punti *r* ed *o* saranno ad uguale distanza dal centro *m*, di conseguenza gli assi, essendo uguali fra loro daranno per sezione un cerchio. Se invece si allungasse l'asse minore, è chiaro che non si avrebbe che da inclinare il piano della sezione dal lato di questo asse piccolo.

T E O R E M A I

La sezione piana ellittica fatta nell'intervallo di due coni concentrici e simili, come tra le superfici concave e convesse di un cono vuoto di uguale spessore, è una corona compresa fra due circonferenze di ellissi che non sono equidistanti, e che non possono essere concentrici che nei coni scaleni, quando la sezione è perpendicolare all'asse.

fig.6.

Sia (fig.6) un cono F*s*G concentrici e simili al cono BSA ,in cui lo si suppone, è evidente ,in base all'ipotesi, che i loro lati BS, F*s*; AS, GS, saranno non soltanto paralleli, ma equidistanti nella sezione del triangolo passante per l'asse BSA. E' ancora evidente che il piano della sezione obliqua DE che abbiamo supposto perpendicolare al piano per l'asse, essendo ugualmente inclinato all'asse comune SX ,dell'uno o dell'altro cono, sarà un'ellisse simile a DRE nel grande, e de nel piccolo. Occorre ora far vedere che sebbene le due superfici dei coni siano equidistanti, e le loro basi concentriche, mle sezioni ellittiche non lo sono ; dai punti D ed *e* saranno tracciate le perpendicolari D*x* , e K, che saranno uguali per ipotesi.

Poiché l'angolo D*ds* esterno al triangolo *dse* è più grande che l'interno opposto *des*, o il suo uguale DES, la linea D*d*, compresa fra i due paralleli SB, *s*F sarà più corta che la linea *e*E più obliqua su EK essa sarà più grande che *ey*, ciò che occorre dimostrare; dunque le ellissi DRE e *dhe* si avvicinano più verso D che verso E sull'asse DE; di conseguenza esse non saranno né

equidistanti né concentriche, ciò che occorreva anzitutto dimostrare.

2° Se il cono invece di essere retto fosse scaleno, è evidente che l'asse, essendo obliquo rispetto alla base circolare sarà perpendicolare ad alcune sezioni ellittiche; in questi casi possiamo considerare la fig.6 differentemente dal caso precedente, supponendo la base BA ellittica, e la sezione obliqua DE circolare, se si vuole o, ellittica.

E' chiaro che le distanze delle ellissi della base AB nella sezione del triangolo per l'asse DSA sarà uguale in BF ed AG; perché il diametro comune BA è ugualmente inclinato ai lati dei coni interni ed esterni; ma fra queste due estremità non si può trovare alcuna parte delle due circonferenze e delle ellissi che non siano più o meno allungate. Per dimostrarlo, sia un piano SNX perpendicolare al triangolo per l'asse BSA, che taglierà le ellissi o i cerchi DRE e *dhe* seguendo una linea *on* ,che sarà perpendicolare a questo triangolo, allo stesso modo che XN; di conseguenza queste due linee *on*, XN saranno parallele fra loro, dunque le loro parti *ln*, LN comprese anche fra due parallele SN ed sL saranno uguali fra di loro; ma l'intervallo ln delle circonferenze della sezione obliqua non è uguale agli intervalli D*d*, ed E*e*; poiché è più lungo dell'uno e più piccolo dell'altro; dunque l'intervallo LN delle due ellissi della base non sarà uguale alle distanze BF, AG; in effetti la sezione *ba* per la perpendicolare *on* parallelamente alla base BA darà delle ellissi simili nell'uno e nell'altro cono, a cui l'asse *on* è comune con un a ordinata della sezione obliqua; ora le distanze dei due coni in D*d* ed *bf* sono fra di loro come DO sta ad *b*O; così il rapporto di D*d* sta a *bf* aumentato dopo il triangolo per l'asse fino alla sezione perpendicolare al piano in Q*n*, e al contrario diminuisce dopo il punto n fino ad E; dunque la distanza LN sarà metà fra quelle delle estremità BF ed AG. essa sarà più piccola se DE o BA é l'asse maggiore, o più grande se BA é l'asse minore.

Da questa disuguaglianza delle distanze dell'ellisse concentriche al loro asse, ne consegue necessariamente quella di tutti i punti da un estremità di un diametro all'altro; perché esse si avvicinano e si allontanano di una distanza proporzionale a quella degli assi; dunque le ellissi della base sebbene concentriche, non sono equidistante, ciò che si deve dimostrare.

" SCOLIE "

Bisogna pertanto osservare che, sebbene le ellissi concentriche simili non siano equidistanti, misurate su differenti assi e diametri, lo sono tuttavia sugli stessi assi e sugli stessi diametri; e ancora non soltanto su tutte le linee rette che intersecano queste due circonferenze, ma anche su quelle che ne toccano soltanto l'interno senza tagliarla, ciò che da un modo facile di fare un Ellisse asintotica ad un'altra data; basta averne un punto solo , come diremo nel secondo libro. Uso questo termine, perché questa proprietà che é simile a quella dell'iperbole riguardo agli Asintoti ha dato occasione a M. De la Hire di chiamare le sezioni coniche, concentriche e simili asintotiche.

COROLLARIO I

Si può comprendere questa ipotesi più nelle altre sezioni che nelle Ellissi, se non si vuole considerare come i Matematici la Parabola, come un Ellisse il cui asse é infinitamente lungo l'iperbole come un Ellisse inversa, che ha i fuochi esterni; infatti se si taglia un cono vuoto di spessore uguale, in modo che il piano che taglia faccia una di queste due sezioni, si noterà visibilmente, che la curva della superficie interna non é parallela a quella dell'esterna.

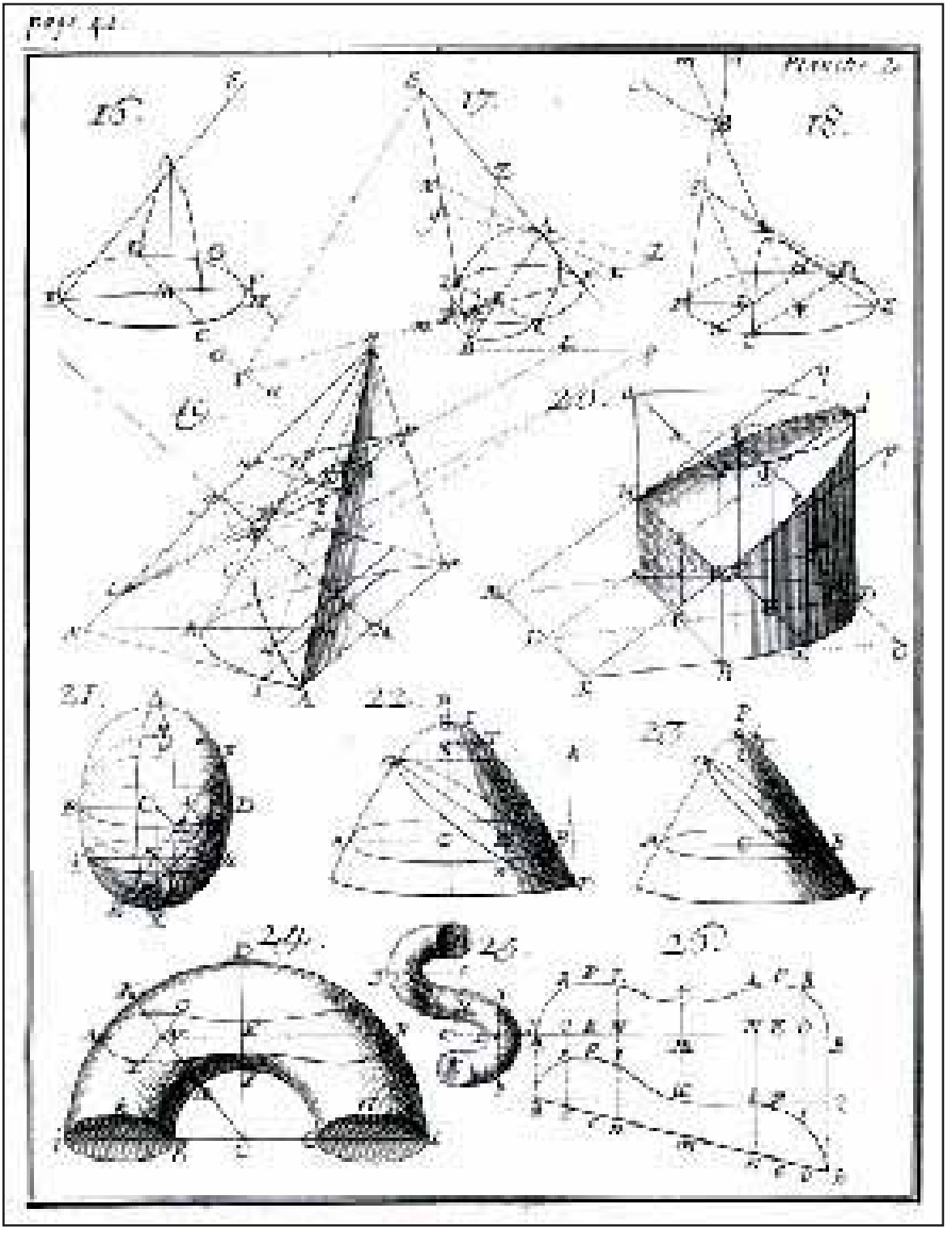
Applicazioni nell'uso.

Questa ipotesi fa vedere che gli archi degli spigoli degli intradosso e di estradosso delle facce delle volte coniche, che sono oblique rispetto all'asse, come nelle "*Trompe*" sbieche e rialzate nella loro faccia, né devono essere parallele fra loro, come le realizzano alcuni autori del Taglio della Pietra; perché se l'arco dell' intradosso non é più vicino dell'estradosso ad una imposta, che l'alto dal lato dell'angolo il meno acuto, la volta diventerà meno spessa dal lato opposta che é il più lungo, in modo che il lato ed il piedritto più lungo e più carico diventerebbe il più debole, ciò che é evidentemente contro la buona tecnica costruttiva.

Non occorre dire che questa differenza é così poco considerevole, che si può preferirle la simmetria esterna della faccia; perché senza presentare casi straordinari,

l'asse ED può ben essere perpendicolare al lato SB, se l'angolo S é più aperto, per esempio, di 60°, allora lo stesso asse farà in E un'asse di 30° con il lato SA, ora in questa ipotesi é chiaro che la volta sarà metà dello spessore all'imposta SE che all'imposta SD; perché le distanze delle parallele SB, *s*F, SA, *s*G sono in ragione dei seni degli angoli, che la linea ED fa con i lati; ma il seno totale é il doppio di 30°, dunque la distanza *e*K, cioè lo spessore della volta verso E*i* non sarà che la metà di D*x* che é quella del lato SD. Non é necessario questo rapporto che si percepisce a colpo d'occhio con quelli dei triangoli simili EH*e*, ed ESD, se l'angolo D é ipotizzato retto, e l'angolo S di 60°, ciò che non é lo stesso nella fig.6; ora e K é uguale alla distanza delle parallele verso D ed *e*E, quella delle stesse o delle loro uguali presi ugualmente sulla linea ED; dunque ecc..

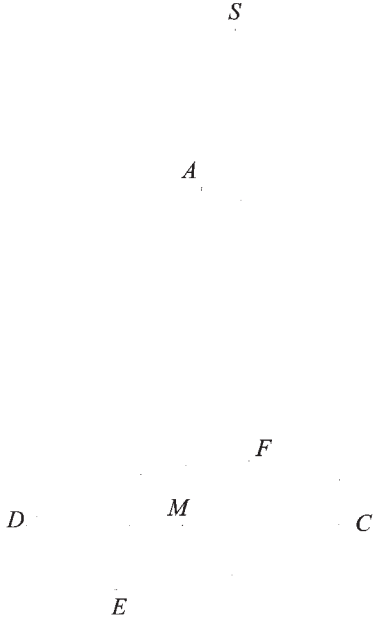
In secondo luogo, questo problema fa vedere, che quando un sesto é Ellittico non si può fargli un sesto parallelo che sia anche ellittico, in modo che se se si tratta, per esempio, di un Bandeau o di un archivolto, e che si facciano i due spigoli di intradosso e di estradosso Ellittici, esso sarà di diseguale larghezza, e de esso avrà un'uguale larghezza ovunque i due spigoli non saranno esattamente ellittici, ciò che é sorprendente e incredibile per gli Operai, e per quelli che non conoscono la Teoria.



TEOREMA II

Data una sezione conica può essere quella di una infinità di Coni diversi.

Sia (***Fig. 16, 17, 18***) una sezione conica *DAC*, di cui *AB* é un diametro, la linea *CD* é un'ordinata, di cui *M* é il punto medio, da questo punto gli si traccerà una perpendicolare *FE*, di lunghezza presa a piacere su un piano inclinato rispetto a quello della sezione conica assegnata e con un'inclinazione presa a piacere,(che non si può rappresentare in questa figura se non in prospettiva). Su questa linea *FE* presa come diametro, si descriverà un cerchio *FDEC*, di cui la linea *DE* sarà una corda comune all'ordinata della sezione conica; se dai punti *EABD* si tracciano le linee *ES, FS*, che si intersecheranno in *S*, il vertice *S* sarà quello di un cono, che avrà per base o, ciò che é la stessa cosa, per sezione parallela alla base il cerchio *FDEC*, e per altra sezione la sezione data *DAC*; ciò che é chiaro per la costruzione e la generazione di un cono. Supponendo che una linea *SB*, fissata nel suo punto *S*, percorra la circonferenza del cerchio *DFCE*, attraverso la stessa costruzione questa linea passerà da i due punti comuni *DE* e dalle estremità dei diametri *AB* ed *EF* delle due sezioni, il cerchio e l'ellisse. Ora, poiché il diametro del cerchio *FE* può variare di lunghezza, e visto che si può cambiare la posizione del suo centro avvicinandolo od allontanandolo dal punto *M*, si vede che il punto *S* cambierà di posizione, poiché esso dipende dalla posizione delle estremità del diametro *EF*. Per esempio, se invece del punto *E* se ne prende un altro più fuori, in *K* o in *L*, il punto *S* cadrebbe in *x* o in *y*, ed allo stesso modo se si allontana o si avvicina l'altra estremità *F*, il punto *S* cadrebbe più in alto o più in basso; dunque si può far passare una infinità di superficie di coni diversi per la circonferenza della sezione conica data, ciò che occorreva dimostrare.



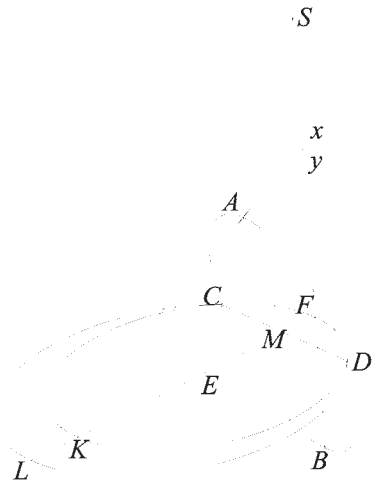


Fig.17*[(1)]*. *Sezioni di cono fatte con il piano parallelo all'asse.*

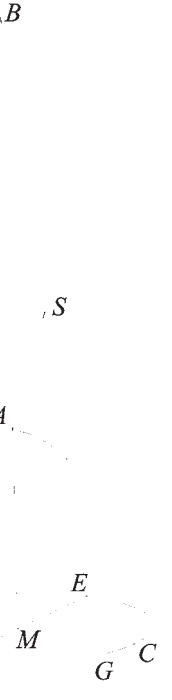


Fig.18*[(2)]*. Sezione conica inclinata rispetto all'asse.

Corollario

Da ciò si ha che se una linea *AS*, fissata sul punto *S*, preso a piacere,

[(1)]. Riferimento alle lettere *I, G, K, m, n, Z* della ***figura 17*** della planche.
[(2)]. Riferimento alle lettere *c, m, d* della ***figura 18*** della planche.

si muova intorno ad una sezione conica aperta, come la parabola o l'iperbole, si formerà una piramide mista, che sarà sempre una porzione di cono e di conseguenza a ciò si avranno delle sezioni che non saranno parallele alla base aperta data, ma si potranno conoscere cercando la base del cono, di cui questa piramide mista ne rappresenta una parte, nel modo che illustreremo.

Orbene senza realizzare il cono, né conoscendo il cerchio di base, li si può conoscere confrontando parti delle sottotangenti, che sono al di sopra ed al di fuori del cono (per l'art. *45*)

Per esempio, sia la base data *ARP* una parabola, se si ipotizza la piramide *ARPS* tagliata da un altro piano inclinato a questa base, di cui l'intersezione sia *AP,* e che taglia il lato *SR* in *H*, si traccerà da un punto qualsiasi della base, come *T,* una tangente *TN*, che intersecherà l'asse *MR* della base prolungata in *N*. Avendo tracciato *NS*, si immaginerà un piano *TNS*, che toccherà la piramide seguendo la linea *TS*, tracciata dal punto di tangenza della base al vertice *S*, e che taglierà la curva *AHP* in *u*, da cui si traccerà sullo stesso piano inclinato una linea *ux* parallela ad *AP,* ed un'altra *u*y tangente alla stessa curva, che intersecherà in y l'asse *My*, che appartiene allo stesso piano di *MN*. Se la lunghezza *Hy* é minore di quella di *Hx*, si ha che la sezione che si vuole conoscere é un'iperbole; se invece essa é maggiore, come Le rispetto *Ed*, questa sarà un'ellisse, se è uguale, come si suppongono *mR* ed *RN* che nella figura tuttavia non lo sono , come per esempio *dI* ed *In*, questa sarebbe una parabola, ciò é più facile da notare se esaminiamo i piani *nd* ed *NM* paralleli fra loro.

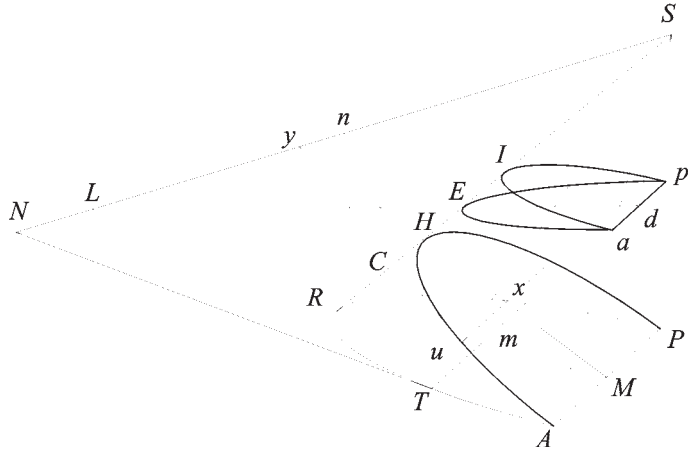


Fig.19*[(1)]*. Sezioni coniche su piani paralleli ed inclinati rispetto alla base.

Applicazioni nell'uso.

Questa ipotesi fa vedere che la si può applicare a tutti i tipi di volte coniche, qualsiasi sia il sesto di facciata che si giudicherà conveniente allo scopo. Per esempio, con una posizione ed un' inclinazione generica dell'asse ritenuta opportuna per la volta che ci si propone di realizzare, si può costruire una *tromba* di livello o rampante, di cui il sesto di facciata sia rialzato o ribassato di quanto si desidera, e si può conoscere in quale situazione il suo intradosso sarà circolare.

Inoltre, essa fà conoscere i cambiamenti che si avrebbero se il sesto di facciata sarà una sezione aperta, per esempio parabolica, come si ha effettivamente nelle *trombe* sull'angolo a piombo, di cui l'asse é di livello. Così, supponendo che il muro sia a scarpa, la curva diventerà un iperbole, e se sarà a strapiombo diventerà un'ellisse. Tuttavia l'architetto può scegliere per sesto di faccia la curva che vorrà.
Allo stesso modo se si tratta del sesto di facciata di una *tromba* conica a spigoli a piombo che, di solito é una iperbole. Allorquando l'asse è di livello, ed é scambiata per una scarpa, non cambierà genere di curva, ma diventerà soltanto un' iperbole diversa da quella che aveva il sesto a piombo.
In poche parole questo teorema fa conoscere l'originedi tutti i cambiamenti che possono determinare i contorni dei sesti delle facciate delle *trombe* , e quelle dei loro *strombamenti* , che non possono essergli paralleli, tutti quelli che sono inclinati sull'orizzonte e quelli paralleli alla perpendicolare sulla facciata. Queste comprendono tutte le *trombe* sbieche e rampanti, ascendenti o discendenti e i giunti di testa, in questo modo si può dire che questo teorema é il fondamento di tutte le volte coniche. Passiamo ai cilindri.

CAPITOLO III

Sulle sezioni dei cilindri tagliati dai piani

I cilindri come i coni si dividono in *retti e scaleni*.
Sono chiamati *retti*, quando il loro asse é retto, cioè perpendicolare alla base; così come il cilindro *BDFa* é retto nei punti *Ba* ***(Fig.14)***[(1)], perché il suo asse XC é perpendicolare a B*a*.

56. Sono chiamati *scaleni*, quando il loro asse *mM* ***(Fig. 15)***[(2)] é obliquo alla base *ba* o *DE* del cilindro *bDEa*.

Questa differenza di posizione dell'asse rispetto alla base, può essere data nella posizione delle sezioni del cilindro, così comelo fà in quelle del cono.

57. La sezione di un cilindro tagliato da una superficie piana può variare soltanto in tre modi.

1°. Quando il piano secante passa per l'asse o parallelamente ad esso, la sezione é un *parallelogramma* rettangolo, se il cilindro é retto e obliquo angolo, se é scaleno o può essere ugualmente rettangolo, la sezione é perpendicolare al piano che passa per *Da*.

58. 2°. Quando il piano secante é parallelo alla base *Ba* come *ab*, la sezione é un *cerchio*; poiché si suppone sempre un cilindro a base circolare, e che la sezione parallela gli deve essere simile ed uguale. Poiché tutti i lati del cilindro sono paralleli all'asse, i diametri saranno tutti uguali.

[(1)]. La ***figura 14*** viene spiegata nella planche *1*.
[(2)]. La ***figura 15*** viene spiegata nella planche *1*.

[(1)]. Riferimento alla lettera *g* della ***figura 19*** della planche.

59. 3°. Quando la sezione é obliqua, come *BA*, essa é sempre un ellisse nel cilindro retto, qualunque possa essere l'obliquità del piano secante rispetto all'asse. Nel cilindro scaleno, la sezione, anche se obliqua, può essere un cerchio. Quando il piano secante ***(Fig. 15)*** essendo perpendicolare al parallelogramma con l'asse *bDEa,* dato dai lati degli angoli uguali a quelli della base, ma in senso *contrario*, cioè, che l'angolo *BDA* sia uguale all'angolo *baE*, o (che é la stessa cosa) *BAE* sia uguale a *Dba*. Se per il punto *C*, punto medio di *BA*, si conduce *hg* parallelo a *ba*, e attraverso lo stesso punto si traccia *yx* perpendicolare ai lati *bD* ed *aE*, si otterranno due triangoli uguali *CxA* e *Cxg*. Questi sono rettangoli in *x*, hanno gli angoli *A* e *g* uguali (*per ipotesi*) ed il lato *Cx* comune; dunque i lati *CA, Cg* saranno uguali fra loro, come pure i loro opposti al vertice *hC* e *CB*, i cui diametri *hg* e *BA* sono uguali al diametro *ba* della base circolare, ed i piani che passano per queste linee sono perpendicolari a quello del parallelogramma che passa per l'asse, ed avranno uguali sezioni. Di conseguenza la sezione che passa per *BA* sarà un cerchio, e al contrario, la sezione *yx* perpendicolare ai lati sarà un ellisse, di cui *yx* sarà l'asse minore, come pure ogni altra sezione obliqua, che non sarà né parallela alla base, né sarà il suo *contrario* come *BA*.

COROLLARIO.

Da ciò si ha che, (come nel cono) le sezioni ellittiche possono variare infinitamente, a seconda che l'angolo che il piano secante forma con l'asse del cilindro sia più o meno acuto o ottuso; in modo che esse si possano allungare o accorciare dalla posizione perpendicolare all'asse, fino a diventare parallele.

61. Occorre notare che non c'è nessuna differenza fra queste ellissi e quelle del cono. Ciò che sorprende coloro che non conoscono questa materia, è che sembra loro che l'ellisse cilindrica sia uniforme nei suoi due estremi, ma che la parte di quella del cono, che é più vicino al vertice debba essere più acuta di quella che é più vicina alla base. Si può notare questo errore in una applicazione delle " *Institutions geometriques (Institutionum geometricar. l. 4,* foll' Arnhemiae *1606*, Art. *37*) *d'Albert Duret* ", dove la curva forma uno spigolo ad ogni estremità del suo asse.
Noi ne mostreremo la falsità quando faremo vedere che la stessa ellisse può essere una sezione comune al cono ed al cilindro. Si intuisce facilmente la verità fin d'ora se si ricorda quanto detto *(art. 37),* cioè che le ordinatead un'asse, che si trovano alla stessa distanza dal centro dell'ellisse, sono sempre uguali fra loro, non solo nel cono, ma anche nel cilindro. Poiché i loro quadrati sono fra loro in ragione dei rettangoli delle ascisse, che si suppongono uguali, per una proprietà fondamentale dell'ellisse.

62. La sola differenza che esiste fra queste sezioni, é che l'asse del cilindro passa per il centro dell'ellisse cilindrica, e che l'asse del cono retto non passa per quello dell'ellisse conica, ma più o meno vicino, seguendo una sezione più o meno obliqua come si vede nella ***figura 6***, dove l'asse del cono taglia quello dell'ellisse in o. La questione é ben evidente nel cono retto, dove l'asse del cono *XS* divide l'angolo del vertice *BSA* in due parti uguali. Esso non può dividere nello steso modo una linea che termina sui suoi lati, che non gli é perpendicolare come *DE*, nel triangolo che passa per l'asse. Poichè non è parallelo a *BA*, le sue parti *Do* e *oE*, non sono proporzionali a *BX* e *XA*; questa differenza non comporta nulla alla figura dell'ellisse. Tutte le sezioni che si possono fare nel cilindro si rifanno alle tre di cui abbiamo parlato, sebbene non siano intere. Poiché la sezione *NFE*, che taglia il cilindro solo in parte ***(Fig.14)*** é una porzione di ellisse, che sarebbe intera se il cilindro fosse stato tagliato interamente, come sarebbe se fosse stato prolungato?

63. Questa sezione incompleta taglia un solido in *fg*, che si chiama *unghia* , a causa della sua somiglianza con l'unghia di un dito.

Applicazioni nell'uso

La conoscenza delle sezioni del cilindro é la base per la conoscenza delle sezioni nelle variazioni dei sesti delle facciate delle botti, e delle curve dei loro giunti di testa. Non parlo di quelli del letto che sono quasi sempre rettilinei.

Le volte a botte i cui *archi-retti* sono circolari, sono vere porzioni di *cilindri retti*, quelli che sono rialzati o ribassati sono porzioni di cilindri scaleni, ciò che può essere dimostrato nello stesso modo che abbiamo fatto per i coni di base ellittica. In quanto, se l'asse minore dell'ellisse, ottenuta dalla sezione perpendicolare al parallelogramma e che passa per l'asse del cilindro, non può riguardare(attenere) la circonferenza di un cerchio, che avrà per diametro la perpendicolare *il*, sui lati *bB* ed *aE*, é chiaro che inclinando questo piano verso *L* o *K*, il diametro *LK* può essere allungato, finché diviene uguale ad *il*. Così sebbene la base *ba*, obliqua all'asse *Mm*, o *bo* perpendicolare a quest'asse, sia stata supposta ellittica e stretta quanto si vuole, la sezione *iLlK* potrà essere un cerchio, e il cilindro sarà scaleno in un senso diverso da questo qui.

Può succedere, ed effettivamente succede , come diremo ne libro *IV* per qualche motivo di costruzione, che un architetto ritenga opportuno realizzare il centro dell'arco retto di una volta a botte con curva iperbolica o parabolica, allora non si tratta più di considerare la volta come una porzione di cilindro propriamente detto, ma di un cilindroide di cui esamineremo le sezioni.

TEOREMA III

La sezione piana dei tipi di Cilindri, che hanno per base una Parabola od una Iperbole, é una sezione conica della stessa specie.

Supponiamo che una linea *Aa* ***(Fig.20),*** percorra parallelamente a se stessa una sezione conica aperta, essa formerà con questo movimento una specie di cilindro, che chiameremo *Cilindroide*, perché assomiglia ad un cilindro ordinario che ha per base un arco di cerchio o di Ellisse.

Sia il cilindro *AadDBb*, che ha per base una curva *ADB*, che io qui suppongo una parabola, dico che se é tagliato da un piano parallelo o obliquo alla base *ADB*, la sezione sarà ancora una parabola.

Se il piano secante é parallelo alla base, l'ipotesi é evidente.

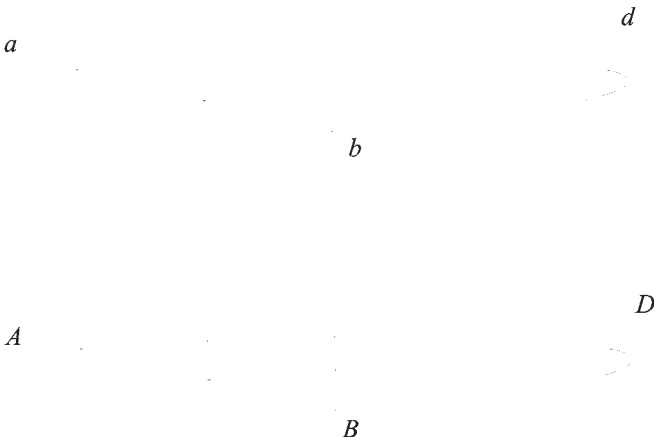
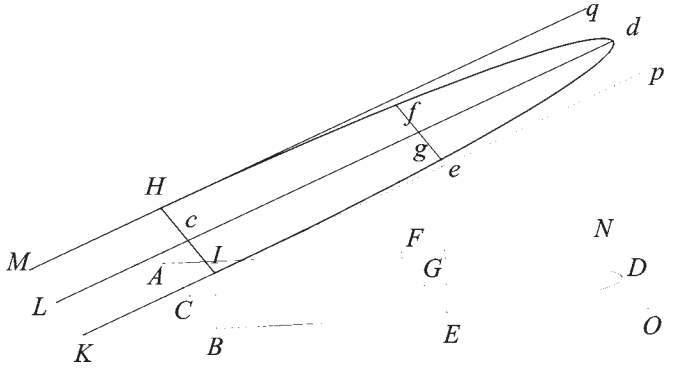


Fig.20a. Sezione di un cilindro con piano parallelo alla base.

Se non lo é, e supponiamo che il piano sia inclinato come in *Ld*, e che tagli quello della base prolungata seguendo la linea *MK*, a questa siano condotti due piani paralleli *Ab*, *Fe*, che tagliano i precedenti piani in *ABHI* ed *FE*, con *fe* perpendicolare a quello della base *MO*, e parallelo



ad *MK*.
Fig.20b. Intersezione di un cilindro con un piano inclinato rispetto alla base.

Con le parallele *SC*, *dD*, perpendicolari al piano della base, si avranno i triangoli simili *LCc*, *LGg*, *LDd* nel piano dell'asse *CD* della parabola, e nell'asse *Cs* del cilindro. Poiché *MK* (per costruzione) é parallela ad *AB* ed *FE*, essa lo sarà anche ad *HI* ed *fe*; dunque *HI* é parallela ad *AB*, ed *fe* ad *FE*, ed *AI* e *Fe* sono parallelogrammi. Poiché *Aa*, *Bb*, *Ff*,*Ee*, che sono i lati del cilindro sono paralleli fra loro, *AH=BI* ed *Ff=Ee* allostesso modo che *HI=AB* ed *FE=fe*; di conseguenza *LD:Ld=LG:Lg=LC:Lc* e dividendo *CD:cd=GD:gd*. Posto per ipotesi che la base *ADB* sia una parabola, si avra $GB^2:GE^2=CD:GD=cd:gd$, e poiché *CB=cI* o *AB=HI*, e *FE=fe* e dove la sua metà *GE=ge*, si avrà $cI^2:ge^2=cd:gd$, cioé, i quadrati delle ordinate nella stessa ragione delle ascisse; dunque *HdI* é una parabola, se *ADB* ne é una, *ciò che occorreva dimostrare.*

Si può dimostrare la stessa cosa per l'iperbole, se la base *ADB* é iperbolica, o dell'ellisse se fosse porzione di un'ellisse, con la differenza che in quest'ultima la sezione potrebbe divenire un cerchio, come abbiamo detto per i cilindri scaleni. Poiché facendo astrazione da questo caso, le ordinate corrispondenti *CB, cI* saranno sempre uguali fra loro come *GE, ge*, e le ascisse *DC, dc, DG, dg* avranno sempre lo stesso rapporto con la base e con la sezione obliqua, ciò che é chiaro considerandole come delle parti dei lati del triangolo *LdD*, tagliato da due parallele *cC, gG, dD*, di conseguenza restando le ascisse della lunghezza del loro diametro saranno ancora nello stesso rapporto ; dunque si avrà lo stesso rapporto fra i quadrati delle ordinate e le parti dei rettangoli.

Applicazioni sull'uso

Si vede da questa ipotesi, quelle che devono essere le curve dei sesti di facciata, o i giunti di Intradosso delle botti sbieche o rampanti, o in *scarpa*, di cui gli archi-retti non sono circolari, ma di qualche altra delle sezioni coniche, che li rendono rialzati o ribassati in porzioni di parabola, d'iperbole o d'ellisse; in quanto sebbene avessimo posto le botti ellittiche al rango dei cilindri ordinari, ma scaleni, possono essere intesi in questa ipotesi, più generale, in quanto la sezione obliqua e la base sono della stessa specie.

E per dare un particolare esempio di pratica, questa ipotesi fa vedere, che gli spigoli dei giunti di letto di questa specie di volta in aggetto fuori dalle mura, che chiamiamo *Tromba in giro tondo* , *eretta su una linea retta*, di cui l'arco retto è iperbolico, come lo devono essere quelli che mostrano gli studi dell' *Hotel de la Feuillade* , sulla via dei *Bons Enfants* vicino alla *Place de la Victoire* a Parigi, sono tutti degli archi d'iperbole diversi, più o meno allungati, a seconda che si avvicinino o si allontanino dalla mezzeria.

In secondo luogo, fa vedere che la proiezione di una sezione conica qualunque, inclinata al piano della base orizzontale o verticale è ancora una curva della stessa specie. Si può immaginare che le linee perpendicolari a questo piano passano da tutti i punti di contorno della curva, formano un cilindro o un cilindroide, di cui la base è la curva di proiezione, e la curva proiettata può essere considerata come la sezione obliqua di questo cilindro.

TEOREMA IV

La Sezione di un Cilindro cavo, di cui lo spessore è sempre uguale, tagliata da un piano che non è parallelo alla sua base, è una Corona d'Ellisse, compresa da due Ellissi simili e concentriche, ma non equidistanti, fatta eccezione per la sezione sottocontraria nei cilindri scaleni, dove è una Corona di Cerchio.

Sia ***(fig 14)***[(1)] una porzione di cilindro *aabB*, scavato di una cavità *FfGg*, che è uno spazio cilindrico concentrico, e somigliante a questo cilindro sull'asse comune *Cx*, al quale la sezione piana *AHB* è obliqua. Dico che le ellissi *AHB* e *FIG*, formate da queste sezioni sulla superficie interna ed esterna di questo cilindro cavo, non sono equidistanti, sebbene abbiano lo stesso spessore.

DIMOSTRAZIONE.

Se si taglia un piano passante per l'asse del cilindro *aabB*, si formeranno all'intersezione delle superfici, dei triangoli simili *ABa*, *FBf*, di cui le linee *aA* e *fF* sono parallele, e che per ipotesi le superfici esterne ed interne sono equidistanti; dunque *Ba:BA::Bf:BF*, e dividendo *::af:aF*. Poichè *Ba* lato di un angolo retto *BaA* è più piccolo che *BA*, che è l'ipotenusa, allora *fa*, distanza delle due superfici alla base retta, è più piccola che *FA*, distanza della stessa dalla sezione obliqua, *ciò che occorreva dimostrare* in primo luogo.

Ora possiamo dimostrare, che l'intervallo di queste stesse superfici, tagliate da un piano perpendicolare al primo, o se si vuole, al triangolo *aBA*, e per l'asse *cC*, sarà uguale, nella sezione obliqua *AB*, a quello della base retta *aB*, per la sola ragione che l'intersezione *MP* del piano è perpendicolare allo stesso asse, così come il raggio *cp* della stessa base, il quale è parallelo a *CP.*

Per comprendere meglio, sia *mMPp* il secondo piano perpendicolare al parallelogramma per l'asse *aabB*, ciò che bisogna immaginare nella figura, dove non è che in prospettiva. Poichè in proiezione questo piano non deve essere rappresentato se non da una linea retta, e poichè passa per l'asse, rappresenterà due parallelogrammi, uno sulla superficie interna *lLOo*, l'altro all'esterno *mMPp*, di cui i lati saranno paralleli fra loro, ed equidistanti da un lato e dall'altro per ipotesi. Dunque *PO* è uguale a fa, cioè, l'intervallo delle due ellissi *AHB* e *FOG* dall'asse minore è la stesa di quello del vero spessore del cilindro, ma fuori da questo asse la distanza si allunga continuamente fino all'asse maggiore *AB*, dove quest'intervallo *FA* è maggiore; dunque gli intervalli delle due ellissi sono ineguali, sebbene le superfici siano equidistanti fra loro, *ciò che occorreva dimostrare.*

COROLLARIO.

Da ciò si ha che la porzione dell'asse maggiore, che si trova fra le due ellissi, può variare, rispetto a quella dell'asse minore, che segna il vero spessore del cilindro, quanto una linea tracciata obliquamente fra due parallele rispetto alla perpendicolare. Cosi supponendo che l'angolo d'inclinazione *ABa*, della sezione obliqua all'asse *cC*, sia di *60* gradi, la distanza sarà doppia rispetto allo spessore fa, come *GB* di *Bg*.
Ciò che stiamo dimostrando nel cilindro retto è ancora vero in quello scaleno, come è facile capire, supponendo che la curva *BMAP* è un cerchio e che sia la base del cilindro scaleno, allora la curva *Bmap* sarà un'ellisse. La sola differenza che ne risulta, è un cambiamento di posizione negli assi della sezione inclinata alla base, in quanto la linea *mp* diventa allora l'asse maggiore, perchè è uguale al diametro del cerchio *MP*, uguale per ipotesi a *BA*, il quale è più grande che *Ba*, come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo *AaB* rispetto al suo lato *Ba.*

Applicazioni sull'uso.

Per mezzo di questa proposta, faremo vedere nel quarto libro, che non si possono fare due sesti ellittici di intradosso e d'estradosso, che siano equidistanti alla facciata di una volta sbieca, che si vuole fare di uguale spessore, senza renderla ineguale all'arco-retto. Essa fa anche vedere le ineguaglianze che derivano dallo spessore delle volte sbieche, allorquando i loro sesti di facciata sono fatti da ovali, composti di porzioni di cerchi concentrici. Infine servirà a dimostrare la falsità del vecchio trattato sulle volte sferoidi su di un piano ellittico.

CAPITOLO IV.

Sulle Sezioni Piane di un qualche Corpo regolarmente irregolare.

Possiamo immaginare un'infinità di corpi formati da rivoluzioni di linee curve attorno ai loro assi, o da loro tangenti, o dai movimenti di qualche superficie trasformata in diversi modi. Ma noi ci limitiamo a questo di cui vediamo degli esempi nelle parti delle volte usuali, che si riducono a tre o quattro specie.

66. La *prima*, è di quelli che sono formati dalle rivoluzioni delle ellissi, che si chiamano sferoidi. Se la rivoluzione avviene sull'asse minore, il corpo che ne risulta sarà chiamato *Sferoide appiattita*, tali sono all'incirca la cipolla, i pomi e qualche cocomero. Se la rivoluzione si fà sull'asse maggiore *AX*, noi la chiamiamo *Sferoide bislungo*, tali sono i meloni, e diversi frutti, e particolarmente le uova.

67. La seconda specie, è di quelli che sono formati dalla rivoluzione di una sezione conica aperta, parabola, o iperbole, ruotante sul suo asse, lo si chiama *Conoide*, tali sono i corpi *ASb*, alle ***figure 22*** e ***23***.

La terza specie,meno regolare, è quella dei corpi chiamati *Ellissoidi*, che sono formati, non dalla rivoluzione di una ellisse costante su uno dei suoi assi, ma per la rivoluzione di un'ellisse su un asse costante, di cui l'altro varia di lunghezza, e seguendo il contorno di un'altra ellisse, che è perpendicolare alla prima. Se si vuole considerare un'altra idea, c'è una sequenza di ellissi perpendicolari ad un asse, la quale diminuisce seguendo il contorno delle altre due ellissi, che si

(1). La ***figura 14*** fà parte della planche *1*.

incrociano su quest'asse comune, è quello che chiamano *Ellissoide* , e che è chiamato in architettura, *Volta Sferica ribassata o rialzata su un piano ovale.*

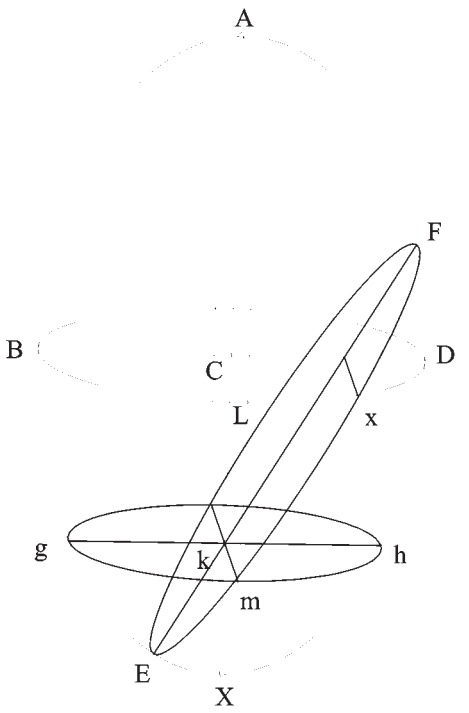
La quarta specie, è quella dei corpi formati dalla rivoluzione di una sezione conica chiusa, cerchio o ellisse, attorno alla sua tangente, o attorno ad un altro cerchio o ad un ellisse, al quale piano quello dell'ellisse o del cerchio generatore è sempre perpendicolare. Nel primo caso il corpo si chiama *Anello chiuso,* e nel secondo semplicemente *Anello,* tali sono le *Volte sull'anima.*

La quinta specie, è quella dei corpi formati dal movimento di un cerchio o di un ellisse ruotante attorno ad un elica o linea in vite, in modo che il suo piano sia diretto verso l'asse dell'elica, o perpendicolare alla sua tangente. Chiamo questo corpo *Elicoide,* tali sono le viti e le colonne tortili, ed in fatto di volte, le *Botti rotanti e rampanti, e le viti Saint Giles.*

TEOREMA V

La Sezione di uno Sferoide e di un Conoide regolare, tagliata da un piano perpendicolare al suo asse, è un cerchio , e se gli è parallelo o obliquo è un Ellisse.

La prima parte di questo teorema è evidente, in quanto lo sferoide o conoide si suppone formato dalla rivoluzione di una mezza ellisse *ABX,* o di una sezione conica aperta *ASB* (***fig 22*** e ***23***), e descriverà



(1). Riferimento alla lettera *I* della ***figura 21*** della planche.

attraverso la sua rivoluzione un cerchio di cui l'asse è il raggio, e applicando un'ordinata a ciascun punto dell'asse, si ha che tutte le sezioni, fatte attraverso dei piani che gli sono perpendicolari, sono dei cerchi negli sferoidi, allungati o appiattiti, e nei conoidi.

Quanto alla seconda parte di questo teorema, che riguarda le sezioni parallele e oblique all'asse, è dimostrata nella *15*ª proposizione di conoidi e sferoidi di Archimede.

Innanzitutto, non è difficile da capire che le sezioni parallele all'asse sono delle curve simili alla generatrice, non è chiaro come le oblique siano delle ellissi; comprendiamo uno è l'altro caso nella dimostrazione differente da quella di Archimede.

Sia l'ellisse *ADXB* la sezione dello sferoide attraverso il suo asse *AX,* la quale è la stessa dell'ellisse generatrice. Se si suppongono due piani paralleli fra loro *BD* e *gh,* perpendicolari all'asse *AX* ed al piano passante attraverso questo asse, le loro sezioni nello sferoide saranno dei cerchi rappresentati in prospettiva dalle curve *BLD* e *gmh,* lo stesso per quelle del piano che passa per l'asse perpendicolare al piano *BADX,* che daranno un'ellisse rappresentata dalla curva *ALX,* la quale avrà due ordinate *CL* e *Km,* comuni ai cerchi *BLD* e *gmh.* Infine se si taglia lo sferoide attraverso un piano inclinato all'asse *AX,* come in *EF,* e perpendicolare al piano *BADX,* la curva della sezione rappresentata da *EmnF* avrà anche due ordinate comuni alle sezioni circolari. Conoscendo *In* e *km,* bisogna dimostrare che i quadrati di queste ordinate sono fra loro, come i rettangoli *EIxIF* e *EKxKF.*

Attraverso una proprietà di cui noi abbiamo parlato (articolo *40*), le linee parallele condotte in una sezione conica e tagliate da una terza, perpendicolarmente o obliquamente, sono delle parti ascisse, di cui i rettangoli sono proporzionali, *BIxID:EIxIF::gk x kh:EKxKF.* Tuttavia a causa dei cerchi delle sezioni perpendicolari all'asse, *BIxID=In* e *gk x kh=km,* dunque *EIxIF:EKxKF::In:km,* cioè i quadrati delle ordinate sono tra loro come i rettangoli delle ascisse; dunque la curva *EmnF* è un'ellisse, *ciò che occorre dimostrare.*

COROLLARIO

O sia,che se il piano seccante è parallelo all'asse, la sezione sarà un'ellisse assimilabile alla generatrice.
Se due piani inclinati all'asse sono fra paralleli fra loro, le loro sezioni saranno delle elissi simili, ciò che riguarda anche i conoidi parabolici o iperbolici ; ciò che noi dimostreremo in altro modo, che è quello di Archimede.

Sia (***Fig.22***) la curva *ASB,* la sezione di un conoide parabolico, tagliato da un piano passante per il suo asse *SC,* e *DF* la sezione di un piano perpendicolare al precedente. Sia condotto *PT,* parallelo a *DF,* e tangente alla parabola nel punto *T,* dal quale sia condotto *Tg,* ordinata all'asse *SC,* e parallelo ad *AB,* e per *S* la linea *Si.* Sia infine *Ex* perpendicolare a *DF,* che sarà anche nel piano del cerchio *AxB* base retta del conoide, e di conseguenza un'ordinata comune a questa base ed alla curva *Dxf,* per la proprietà del cerchio *Ex=AExEB,* o *DExEF: AExEB::TI:Is,* e *TI=IP,* in quanto proprietà della parabola *gS=SP*;* dunque *DExEF:Ex::IP:IS, EX:DExEF::SI:IP,* in quanto i triangoli *FDh, PIS* sono simili. Si dimostrerà ugualmente che i quadrati delle altre ordinate al diametro *DF,* avranno sempre lo stesso rapporto ai rettangoli delle ascisse, che il quadrato *Dh* al quadrato *DF,* di cui la

E' chiaro che *DF* è il grande diametro, e che il piccolo sarà uguale a *Dh*.

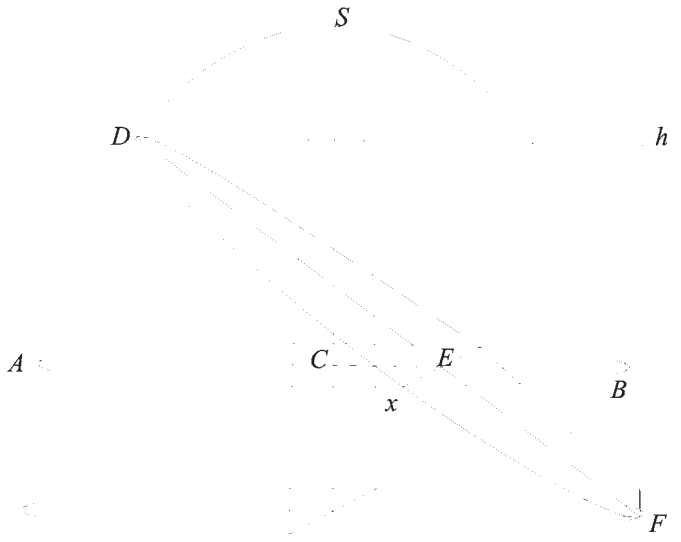


***Fig.22*[(1)]**. Sezioni di un conoide.

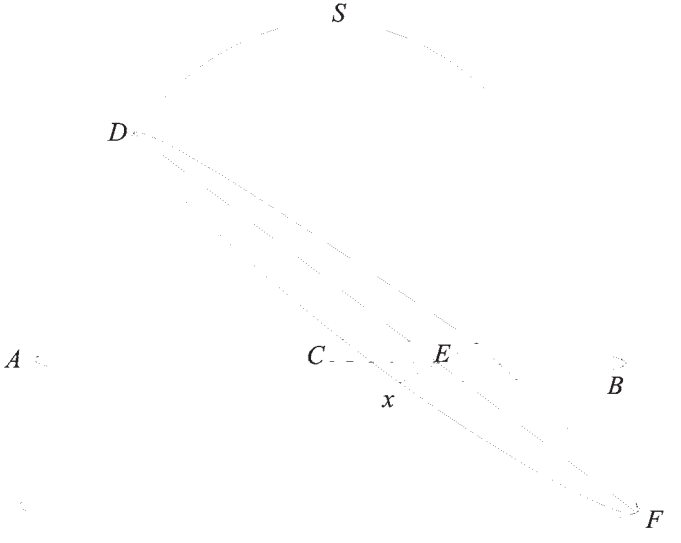


***Fig.23*[(2)]**. Sezioni di un conoide.

[(1)]. Riferimento alle lettere *P, I, T, g*, della ***figura 22*** della planche.
[(2)]. La ***figura 23*** non viene spiegata dall'autore del testo.

In secondo luogo, per la sezione obliqua del conoide iperbolico, tutto è stato disposto come nella figura precedente (***fig.23***).
Sia *AExEB:DExEF::SI:IT*, o *Ex:DExEF::SI:IT*, che è una proprietà dell'ellisse, si dimostrerà ugualmente che i quadrati delle altre ordinate a questo diametro avranno un simile rapporto alle loro ascisse, come *SI:IT.* Dato *SI* più piccolo che *IT*, poichè *PI* è più piccolo che *IT* per la proprietà dell'iperbole, dunque la sezione fatta attraverso *DF* è un'ellisse, di cui l'asse maggiore è *DF.*

COROLLARIO

Da ciò si ha, che la sezione piana di un'iperbole cava, di uguale spessore, è una corona compresa nella circonferenza delle due ellissi simili e concentriche, ma non equidistanti, come detto delle sezioni del cilindro e di qualche cono; ciò che ci servirà nel quarto libro per mostrare l'errore del trattato sulle volte sferiche, seguendo gli autori della curva delle pietre.

La seconda specie dei corpi regolarmente irregolari che abbiamo conosciuto per la pratica delle volte, sono gli *Anelli*, che sono dei cilindri piegati sul loro asse, ordinariamente in porzioni circolari, in modo che gli assi ed i lati siano degli archi di cerchi concentrici.

TEOREMA VI

La sezione di un corpo cilindrico anulare, di cui l'asse è curvo, in forma di circonferenza di cerchio, e che, è tagliato da un piano, perpendicolare a quello che passa dall'asse curvo, è un ovale del quarto ordine.

Sia il corpo cilindrico *HDh*, dato dalla rivoluzione di un piccolo cerchio *GHI*, elevato perpendicolarmente sul piano del grande cerchio *IDi*, di cui il centro è *C*, intorno a cui si fa la rivoluzione del piccolo cerchio *GHI*, in modo che il diametro *GI* sia sempre stato diretto verso il centro *C*. Se si ipotizza questo corpo tagliato dal piano *ALBO* perpendicolarmente al piano *IDi*, di cui la comune sezione sia *AB*, si formerà sulla superficie del cilindro anulare una curva *ALBOA*, che sarà un ovale del quarto ordine.

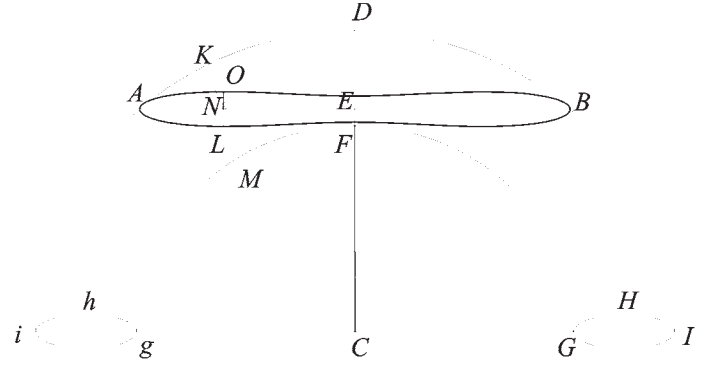


Fig.24. Sezione di un corpo cilindrico anulare.

Da un punto qualsiasi *N* della comune sezione *AB*, considerata come l'asse della curva, sia tracciato dal centro *C* il raggio *CMK*, che taglia in *M* il cerchio *gFG*, concentrici a *iDI*, e sulla sua parte *MK=GI* o *gi*, sia alzato un piano perpendicolare al piano *IDi*, che taglierà quello che passa *AB*, e di cui la sezione comune sarà *NL* perpendicolare all'asse *AB* della curva cercata *ALB*.

Sia dunque il raggio *Ci*, o il suo uguale *CD* che si ipotizza tracciato perpendicolarmente ad *AB=a*, il diametro del cerchio minore *GI* o *gi* o *MK=b*, *AE=c* o *AB*=2*c*, l'ascissa *AN=x*, l'ordinata *NL* o *NO = y* , si avrà per la nature del cerchio $CE = \sqrt{(aa-cc)}$ ed $EN = c-x$, da cui $CN = \sqrt{(aa-2cx+xx)}$ ed $KN = a-\sqrt{(aa-2cx+xx)}$, $MN = KM - KN = b-a + \sqrt{(aa-2}$cx+xx). Ma per la natura del cerchio, il rettangolo $KN \times MN = NL^2$, cosi moltiplicando $KN \times MN$ ed eguagliando il prodotto ad *yy*, si troverà $ab - 2aa + 2cx - xx + (2a - b)\sqrt{(aa - 2cx + xx)} = yy$.
Per abbreviare l'operazione, sia chiamata $2a-b=e = Ig$ o *iG*, che essendo sostituito , avrà questa equazione $- ae + 2cx - xx + e\sqrt{(aa- 2cx + xx)} = yy$, quindi si trasporne per mettere tutti i razionali da un lato $xx - 2cx + ae + yy = e\sqrt{(aa- 2cx + xx)}$. Per evitare l'asimmetria, occorre elevare al quadrato i due membri dell'equazione, che darà $x^4 - 4cx^3 + 2aexx + 2yyxx + 4ccxx - 4acex - 4cyyx + 2aeyy + y^4 = -2ceex + eexx$, eguagliando questa equazione a zero secondo l'ordine delle dimensioni di *x*, come di solito si avrà:
$x^4 - 4cx + 2aexx - 4acex + y^4$
$- ee + 2cee + 2aeyy = 0$
$+ 4cc - 4cyy$
$+ 2yy.$

Questa equazione esprime la natura della curva *ALB* nel modo più semplice, nella sua equazione generale. Cosi è una curva del quarto ordine perché le coordinate *x* ed *y* sono elevate alla quarta, ma ci sono dei casi particolari dove essa e più semplice, per esempio:

Se la sezione *AB* passa per il centro, é evidente che la curva *ALB* si divide in due cerchi *ihg* ed *IHG*, la cui equazione è
$xx + ex + yy$
-2a $= 0$.

Così in questo caso la nostra equazione trovata si lascia dividere da questi divisori ,
$xx - 2ax + 2ae$
$1 - e + yy$
ed il quoziente darà la detta equazione
$xx + ex + yy$
$- 2a = 0$,
per il cerchio *ihg* o *IHG* che dobbiamo ottenere. Se si prende *IG* uguale a tutto il diametro maggiore *Ii*, cioè, se *Ig* o e è uguale a zero , nel qual caso il corpo anulare *Hdh* diventa una sfera, in modo che la curva della sezione *ALB* sarà un cerchio minore. In effetti la nostra equazione la evidenzia, se omettete i termini dove si trova la lettera e, poiché $e = 0$, l'equazione generale diventa:
$x^4 - 4cx^3 + 4ccxx - 4cyyx + y^4$
$+ 2yy = 0.$
Da cui si può estrarre la radice quadrata
$xx - 2cx + yy = 0$;
è chiaro che questa equazione in particolare è l'equazione del cerchio, cui il diametro è $2c = AB$, che evidenzia evidentemente che la sezione *ALB* degenera in un cerchio.

Questi sono tutti i casi possibili ove la curva in esame può diventare di un ordine inferiore al quarto.

La terza specie, sui corpi regolarmente regolari di cui abbiamo bisogno di conoscere le sezioni, è quella dei cilindri elicoidali (in termini architettonici) e sulle volte in "*vis*".

Chiamiamo *Cilindro Elicoidale* un corpo cilindrico che, invece di ruotare su di un piano intorno ad un centro, ruota alzandosi intorno ad un asse come l'edera o piuttosto il convolvolo. Si eleva abbracciando un albero. La parola *Elica*, usata in architettura, viene dal greco *Heliso, circumvolvo*. Tale è il corpo *EGMgD*, (***Fig. 25***).

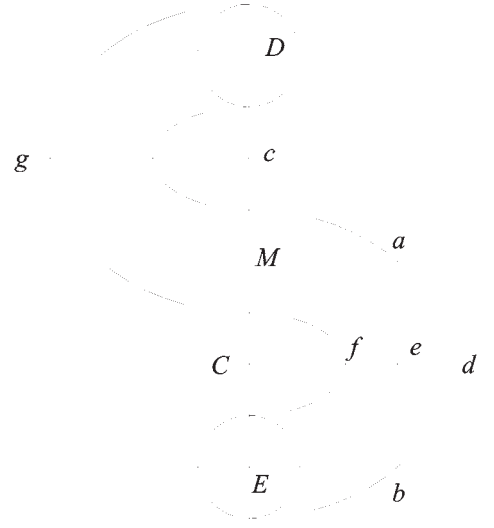


Fig.25. Cilindro eloicoidale.

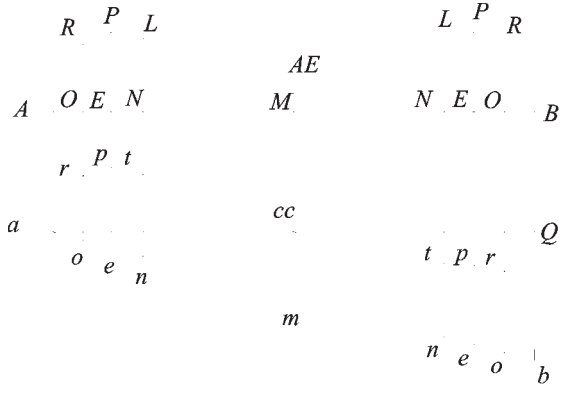


Fig.26 [1]**.** Curva di descrizione dell'elica.
[1]. La ***figura 26*** non viene spiegata dall'autore del testo.

COROLLARIO I

Da questa definizione si può concludere , che la sezione di questo corpo, tagliato da un piano parallelo al suo asse, non sarà di una specie diversa da quella del corpo anulare di cui abbiamo parlato, se alla base o proiezione dell'elica è un cerchio; poichè tutte le distanze dall'asse a questo corpo misurate orizzontalmente, saranno uguali a quella della sezione dall'anello al suo centro, e tutte le sezioni verticali per l'asse saranno dei cerchi uguali, come quelli dell'anello tagliato da un piano passante dal centro *C*, (***Fig. 24***) e perpendicolarmente al piano *iDI*. Supponendo l'uno e l'altro corpo cilindrici di uguale grandezza, non si avranno dunque delle differenze, se non quelle dei segmenti di altezza di tutte queste sezioni circolari, che si elevano per gradi le une al di sopra delle altre, o lungo un asse inclinato rispetto al piano della base.

COROLLARIO II

Da ciò si ha, che per conoscere e tracciare la sezione dell'elica, occorre cominciare dal tracciare quella dell'anello ipotizzato sulla base e tagliato alla stessa distanza dal centro, che l'elica lo è dal suo asse, e darà sull'asse dell'elica l'inclinazione che dovrà avere, e che si trova con l'altezza della linea ab (***Fig. 25***). Non ci fermeremo qui a discutere l'una e l'altra curva che descriveremo nel secondo libro, è sufficiente illustrare il loro rapporto con la ***figura 26***.

Applicazioni all'uso

74. Questa ipotesi fa conoscere qual é la curvatura di un sesto su un interruzione della volta sull'anima attraverso un muro o una "*faillie*" retta , come potrà essere una torre quadrata di un campanile o un abside ellittica, che chiude una navata. Comunque, serve principalmente per trovare il cerchio retto, che deve guidare la curvatura dell'intradosso di una volta sull'anima, o di una "*vis*" *St. Giles* perpendicolarmente al raggio, partendo dal centro della curvatura dell'asse e dai lati; come se ne ha bisogno per l'apparecchiatura che vedremo nel quarto libro, dove la presenteremo. Crediamo di non aver bisogno di spiegare più a lungo sui cambiamenti che si possono effettuare a queste curve, per quelle che si possono rea sia rialzandoli che ribassand vece di essere circolare potr nella pratica all'esecuzione oltre la teoria delle sezioni p er le necessità del taglio dell uesto primo libro, c zioni che noi chiamiamo so corpi

Fig.16. Sezione conica con piano parallelo all'asse.

Fig.17 [1]***.*** *Sezioni di cono fatte con il piano parallelo all'asse.*

Fig.18 [2]***.*** Sezione conica inclinata rispetto all'asse.

[1]**.** Riferimento alle lettere *I, G, K, m, n, Z* della ***figura 17*** della planche.

[2]. Riferimento alle lettere *c, m, d* della ***figura 18*** della planche.

Fig.19 [1]***.*** Sezioni coniche su piani paralleli ed inclinati rispetto alla base.

[1]**.** La ***figura 14*** viene spiegata nella planche *1*.
[2]. La ***figura 15*** viene spiegata nella planche *1*.

Fig.20a. Sezione di un cilindro con piano parallelo alla base.

Fig.20b. Intersezione di un cilindro con un piano inclinato rispetto alla base.

[1]**.** La ***figura 14*** fà parte della planche *1*.

Fig.21 [1]***.*** Sezioni di uno sferoide.

[1]**.** Riferimento alla lettera *I* della ***figura 21*** della planche.

Fig.22 [1]**.** Sezioni di un conoide.

Fig.23 [2]***.*** Sezioni di un conoide.

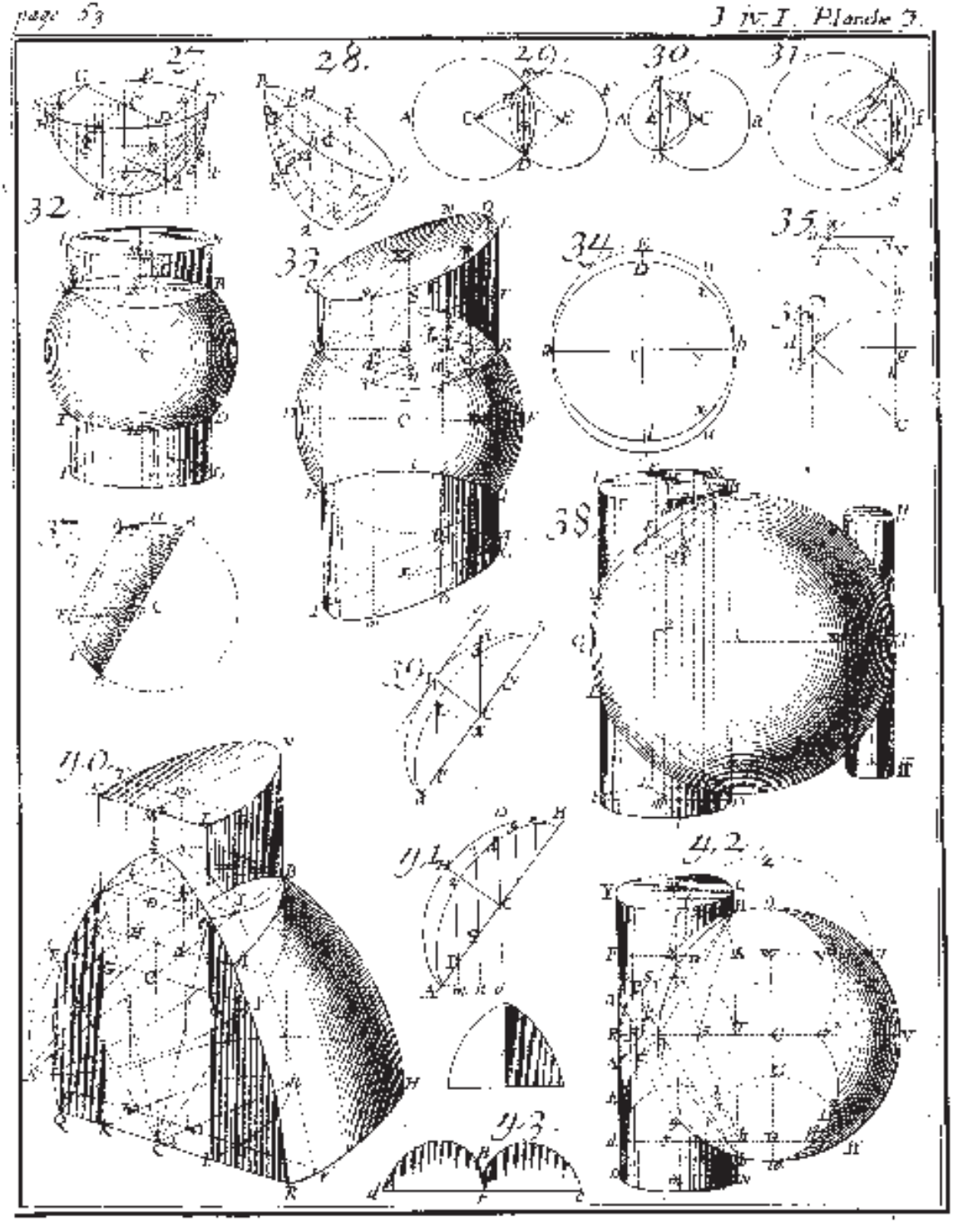
[1]**.** Riferimento alle lettere *P, I, T, g,* della ***figura 22*** della planche.
[2]**.** La ***figura 23*** non viene spiegata dall'autore del testo.

Fig.24. Sezione di un corpo cilindrico anulare.

Fig.25. Cilindro eloicoidale.

Fig.26 [1]***.*** Curva di descrizione dell'elica.

[1]**.** La ***figura 26*** non viene spiegata dall'autore del testo.


page 53
Pl. IV. Planche 3.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.

DELLA NATURA DELLE SEZIONI SOLIDE ATTRAVERSO LA MUTUA PENETRAZIONE DELLE SFERE, DEI CONI E DEI CILINDRI.

DEFINIZIONE I

Se dalle estremità *S T*, del diametro di un cerchio *S A T B*, si facesse passare una linea curva piana *ScT*, di cui l'asse fosse *Cc*, seguendo la quale le ordinate di questo diametro *ST* s'abbassassero o si alzassero parallelamente a queste stesse in un movimento uniforme, in modo tale che il loro mezzo sia sempre nel piano *Stc*, la curva *SaTb*, che terminerà la superficie concava, in maniera che quelle prenderanno forma da questa sistemazione, si chiamerà Cerchioide, per abbreviazione dell'espressione Latina, Circulus imbricatus, cerchio a mo' di tegola concava.

Fig. 27

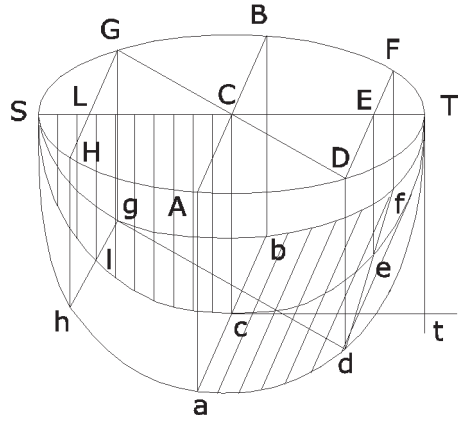


Fig. 27. La figura mostra come è possibile creare un "circulus imbricatus" tramite il cambiamento di posizione delle ordinate dalla quale si otterrà una curva a doppia curvatura.

Per aver chiara un'idea di questo cambiamento di posizione delle ordinate, non c'è che da immaginare un cerchio tracciato su una sezione di un libro nella pressa, nel momento in cui il Rilegatore ha troncato questo pezzo di una sezione piana; se successivamente la affossa nel mezzo, come quando capita nel dare rotondità al retro, tale cerchio che era piano diviene un Cerchioide; poiché ogni foglio retrocedendo subito, più o meno, sia che questo sia preso dal mezzo o dalle estremità del pezzo, forma lo spazio di una superficie concava alla maniera cilindrica, di cui il contorno non è più un cerchio come prima, ma una "Curva a doppia curvatura", avendone una attorno al centro e una in profondità o allontanamento del piano passante per le estremità del diametro *S T*.

COROLLARIO I

Da ciò ne consegue che, in primis, sebbene la superficie concava o convessa del cicloimbre sia più grande di quella del cerchio piano generatore, questa non contiene più ordinate, poiché il numero di fogli, nell'esempio della sezione del libro, non è aumentato nel retrocedere o nell'avanzare al di là di tale piano, dalle estremità *S T* , come si vede chiaramente nella figura, mediante le parallele che sono state tracciate da una parte alle linee *Aa*, *Cc*, e dall'altra mediante le parallele al diametro *AB*, che si suppone perpendicolare al piano *Stc*.
Si vede soltanto che ipotizzando una linea ct parallela e uguale a *CT*, divisa in parti uguali, le linee parallele alla linea *Cc*, passando attraverso queste divisioni, tagliano la parte *cT* in parti non uguali, anche se le si supponesse infinitamente piccole.

Quel che diciamo dell'asse curvo *cT*, al quale sono applicate tutte le coordinate, è ancora vero di fronte al contorno a doppia curvatura *adT*, sebbene esso sia più grande dell'asse e del contorno del cerchio generatore *ATBS*, che è qui rappresentato in prospettiva, laddove si scorge una piccola nozione delle meraviglie della geometria dell'infinito.

COROLLARIO II

Ne consegue in secondo luogo che i diametri, vale a dire, le linee dritte, tracciati da uno dei punti del contorno della curva a doppia curvatura al proprio opposto, passando per l'asse *Cc*, al di fuori della superficie cilindrica, compresa per questa curva, sono uguali fra di loro, come i diametri del cerchio generatore. Così gd è uguale a *GD*, ab ad Ab, etc. essendo i punti *G* e *D* e *A* e *B* posti parallelamente all'asse *Cc* a distanze uguali, ne deriva che *GDdg* è un parallelogramma; di conseguenza *gd* sarà uguale a *GD*.
Oppure bisogna rimarcare che se la curva *ScT* non era uniforme, ma a differenti inflessioni, tali diametri avrebbero potuto non essere uguali e allora la curva non sarà più un cerchioide; poiché è dall'eguaglianza dei suoi diametri che deriva l'analogia del nome.

COROLLARIO III

Si può rimarcare che di tutti i diametri del cerchioide, non ve n'è che uno a stare nella superficie cilindrica, compreso nel suo contorno, quello che passa per il vertice *c*, della curva *ScT*, perpendicolarmente al piano di tale curva; tutti gli altri sono al di fuori di questa superficie.

COROLLARIO IV

Da ciò che abbiamo appena detto ne consegue che l'asse *Cc* della curva, che chiamo asse di profondità *ScT*, taglia in due in maniera uguale tutti i diametri della curva del contorno del cerchioide, più o meno lontano dalla superficie cilindrica, a seconda che essi siano più o meno obliqui rispetto al piano della curva *ScT*.

COROLLARIO V

E' visibile che se al posto di una sola curva *ScT* se ne ipotizzasse una ancora più alta o più bassa, al di sotto o al di sopra del diametro *ST*, dello stesso cerchio generatore, si formerebbero due cerchioide differenti, i quali avrebbero una profondità non uguale, ma il contorno dei quali sarebbe alla superficie dello stesso cilindro, che avrebbe per base il cerchio generatore *ATBS*; poiché tutti i punti di questi contorni dovrebbero essere issati da quelli del cerchio generatore, messo parallelamente all'asse *Cc* della curva di profondità *ScT*.

DEFINIZIONE II

Se al posto di un cerchio generatore si ipotizzasse un'ellisse *BDLE*, di cui le ordinate *ED* , *GH* si allontanassero o avvicinassero, alla stessa maniera di quanto detto a proposito del cerchioide, non sempre perpendicolarmente a un asse *BL* di tale ellisse, ma al pari obliquamente, seguendo un angolo qualsiasi, come *BCc* o *LCc*, come una catena molle appesa alle estremità di un bastone inclinato all'orizzonte, la superficie formata dalla sistemazione di queste ordinate, seguendo una curva simile, sarebbe terminata da un contorno curvo, che noi chiamiamo Ellissoide, per abbreviazione dell'espressione Latina “Ellipsis Imbricata”.

La necessità di dare dei nomi a delle curve, che non ne avevano affatto, s'estende anche alle linee che sono loro essenziali; noi ne considereremo quattro principali, che meritano di avere un nome proprio; poiché le nomineremo spesso in questo quarto libro.

Fig. 28

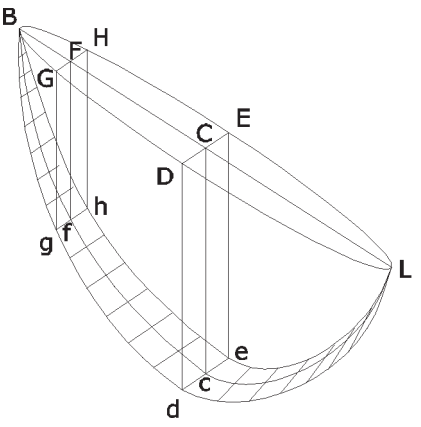


Fig. 28. La figura esprime lo stesso concetto di quella precedente con la differenza che ora la curva è un’ellisse e non più un cerchio con tutte le conseguenze del caso.

DEFINIZIONE III

Il diametro del cerchio generatore, o l'asse dell'ellisse piana generatrice, che passa per i punti *S* e *T*, o *B*, *L*, laddove la curva tocca il piano del cerchio o dell'ellisse, si chiamerà Asse Portante; la linea curva *S* e *T*, o *B* e *L*, che si trova sullo stesso piano di quest'asse, che taglia la sezione in due parti uguali, come *S* e *T* o *B* e *L*, si chiamerà Asse Curvo; la linea corrispondente al diametro perpendicolare all'asse portante, che è il piccolo o il grande asse dell'ellisse, si chiamerà Asse Retto; perchè quantunque diritto, sarà su tutta la superficie della sezione concava; tale è ab (***Fig.27***) e de (***Fig. 28***). La linea *Cc* che è la maggiore rispetto alla traiettoria che percorre il centro C, nell'abbassamento del diametro *AB*, o *DE* in *ab*, o *de*, si chiamerà l'Asse di Profondità, che passerà sempre per i due centri della sezione piana, e della sezione curva a doppia curvatura attraverso il suo contorno.

Le linee che passeranno per quest'asse e termineranno alla circonferenza della sezione, si chiameranno Diametri.

COROLLARIO

Dato che l'asse di profondità *Cc* può non essere perpendicolare all'asse portante *BL*, ne consegue che il diametro destro *dc* della sezione, può non essere nel mezzo dell'asse curvo *BcL*, poiché il punto *c*, centro della sezione, corrispondente al centro *C* dell'ellisse generatrice, è evidentemente più vicino al punto *L* che al punto *B*; pertanto il numero delle ordinate di *c* in *L*, sarà sempre uguale al numero delle ordinate

di *B* in *c*; dato che non può esserci un numero maggiore di parallele a *Cc*, da *B* in *c*, che da *C* in *L*, avendo ipotizzato quelle due distanze uguali; l'esempio della nostra sezione di libro, di cui si smussa in maniera diseguale la parte cava, può essere utile nell'afferrare questa verità; dato che il numero dei fogli non aumenta né diminuisce in tutti i cambi di concavità o convessità che si possono applicare alla curvatura di questa sezione.

DEFINIZIONE IV

Se al posto di ipotizzare che le ordinate dell'ellisse piana generatrice di una sezione solida, si allontanassero, in un movimento non uniforme, ma al contrario uniforme nelle parti corrispondenti, e senza cambiare di grandezza, si ipotizzasse al contrario che allontanandosi, queste si allungassero o si accorciassero proporzionalmente alla loro distanza dall'ellisse piana, presa su due piani convergenti aventi tutti una comune sezione, tale figura concava al pari di una tegola cava, avrà per circonferenza una curva, che chiameremo Ellipsoimbre, vale dire che imita in qualche maniera l' ellissoide.

COROLLARIO

Ne consegue da questa definizione, che l'asse retto non sarà più uguale all'asse corrispondente *DE* dell'ellisse piana generatrice, che è unito a quello che è l'asse portante dell'asse curvo della sezione, ma che sarà più grande o più piccolo, più grande se si trova dalla parte opposta alla comune sezione dei piani convergenti, e più piccolo se è dello stesso lato, cosa che spiegheremo meglio nelle sezioni relative alla penetrazione dei coni.

DEFINIZIONE V

Qualora una curva fosse composta da due porzioni di curve suddette, sia Cerchioide, sia Ellissoide, sia Ellipsoidimbre, essa sarebbe detta Composta di queste curve.

Infine si chiameranno con nomi simili tutte le curve che seguendo leggi simili saranno tracciata da figure piane paraboliche o iperboliche, di cui le ordinate ai loro assi si allontaneranno in maniera uniforme dal loro vertice da un lato soltanto; dato che, essendo tali figure aperte, le sezioni curve non le toccheranno che in un punto, e non in due, come nelle precedenti.

CAPITOLO ***V***

DELLE SEZIONI SOLIDE DELLE SFERE, E PRINCIPALMENTE, DELLE LORO VARIANTI

Le sezioni delle sfere possono variare in maniere diverse.

1°- Attraverso la penetrazione delle sfere tra di loro.
2° -Con i cilindri.
3°- Con i Coni.

La sezione comune alla superficie delle due sfere, che si penetrano, non può variare, essa non può che essere la circonferenza di un cerchio; cosa sulla quale si può rimarcare che le sezioni fatte dalla penetrazione dei solidi possono, in alcuni casi, essere anche sezioni piane.

Le sezioni fatte sulla superficie della sfera, penetrata da un cilindro, possono variare in quattro modi:

1°- Qualora l'asse del cilindro passasse per il centro della sfera, nell'ipotesi del cilindro retto.
2°- Nello stesso caso, nell'ipotesi del cilindro scaleno.
3°- Qualora l'asse del cilindro non passasse per il centro della sfera, e che peraltro il cilindro ci entrasse in tutta la sua circonferenza.
4°- Qualora il cilindro non entrasse che in parte nella sfera, di fronte alla sua circonferenza.

Infine le sezioni fatte alla superficie della sfera, dalla penetrazione del cono, possono variare alle stesse maniere del cilindro, secondo le stesse circostanze di posizione relativa al centro della sfera, pdi fronte all'asse del cono, di quella dell'asse del cono sulla sua base, e della profondità della penetrazione.

PROBLEMA VII

La curva che risulta dalla sezione derivata dall'incontro delle superfici di due sfere, che si penetrano, è la circonferenza di un cerchio.

Date le sfere *ABD*, *BFD*, che si penetrano, di qualsiasi grandezza esse siano l'una di fronte all'altra, di cui i cnetri siano *C* e *E*, sia anche la sezione tale ch'essa possa essere rappresentata dalla curva *BHD*, che debba passare per i punti *B* e *D*, comuni alle due sfere; dato che essi sono all'intersezione dei due cerchi maggiori che sono sullo stesso pia

no, passando per i due centri *C* e *E*, (***fig. 29,30,3***1) il diametro di questa sezione sarà la linea *BD*, che passerà per questi punti *B* e *D* comuni alle due superfici, il quale per la differente posizione delle sfere, passerà o entro le due sfere, come alla ***fig. 29*** o per uno dei centri, come nella

Fig. 29

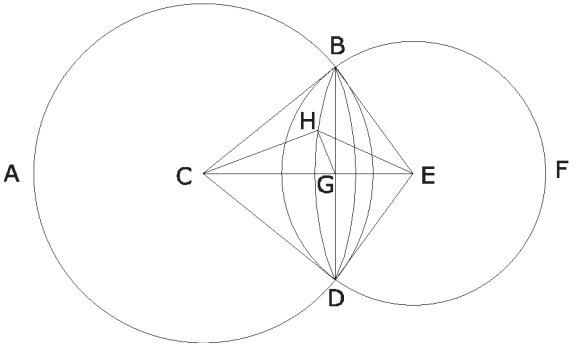


Fig. 29. Nella figura sopra viene mostrato il primo esempio di come due sfere,di diverso raggio,si intersecano e come questa intersezione crei una circonferenza comune alle due sfere stesse.

fig. 30 o al di fuori dei due centri, come nella ***fig. 31***; in qualsiasi maniera la dimostrazione sarà sempre la stessa.
Avendo tracciato una linea *CE* per i centri *C* e *E*, e preso a piacere un punto *H* sulla curva della sezione, si tracceranno dai centri *C* e *e*, (***Fig. 31***) delle linee *CH*, *eh*, e dei punti *G* e *g*, (***Fig. 29. e 31***.) o *E*, (***Fig. 30***), dove le linee passanti per i centri, tagliano i diametri *BD* e *bd*, delle linee nello stesso punto *H*, come *GH*, *EH* o *gh*.
È chiaro per la definizione della sfera che le linee *CB, CH*, *CD* sono uguali tra di loro, essendo dei raggi della sfera *ABD*, come anche *EB*, *EH*, *ED*, (***fig. 29, 30***) e *eb, eh*, *ed*, (***fig. 31***), è ancora chiaro che le linee *BD* sono tagliate egualmente e perpendicolarmente in *G* dalla linea che passa per i centri C e *E*; di cui i triangoli *CBE, CHE, CDE*, che hanno il lato *CE* comune, sono uguali in tutto, così come i triangoli *CBG, CHG, CDG* , rettangoli in *G* , che hanno il lato *GC* comune, e le ipotenuse *CB, CH, Cd* uguali tra loro; poiché sono altresì le perpendicolari tracciate dai vertici dei triangoli uguali **CHE, CBE, CDE**; da cui (***per la 4 dell'11 di Eucl.***) queste tre linee sono sullo stesso piano, e i raggi di un cerchio di cui i punti *BHD* sono alla circonferenza, che è la comune sezione delle due sfere, cosa che si dovrà dimostrare.
La stessa dimostrazione è più semplice nella ***fig. 30*** dove i punti *E* e *G* sono confusi.

Fig. 30

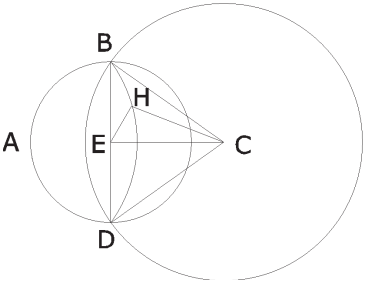


Fig. 31

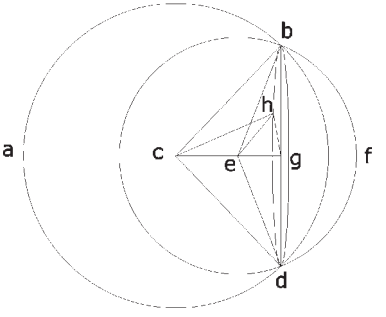


Fig. 30 & 31. Le due figure sopra sono altri due esempi di intersezioni di sfere disuguali e mostrano come il diametro della circonferenza che risulta dalla intersezione possa passare per un centro della sfera o fuori dai due centri.

APPLICAZIONI ALL'USO

Da questa proposizione ne deriva che il centro di una volta sferica, che incontra un'altra che la taglia, è un cerchio, per esempio, una nicchia posta al di sopra di una volta sferica fa con essa un semi cerchio perfetto nel costolone dello spigolo, supposto che entrambi queste volte non siano né rialzate, né schiacciate e che l'imposta di una Calotta di cupola, ricacciata in conca absidale, al di sopra di una volta sferica, è ancora un cerchio, così come quello della prima volta.

PROBLEMA VIII

La sezione derivante dall'incontro delle superfici di una Sfera e un Cilindro retto,la cui asse passi per il centro della sfera, è un cerchio.

Fig. 32

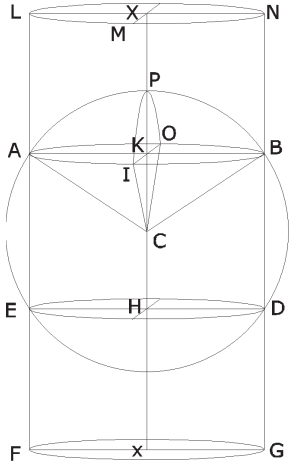


Fig. 32. Di sopra è riportato come un cilindro retto, entrando in una sfera,con il suo asse passante per il centro della stessa, crea nella sua intersezione una circonferenza.

Data la curva *AIBO*, la sezione derivata dall'incontro delle superfici della sfera *ABDE*, e del cilindro *LNGF*, di cui l'asse *MH* passi per il centro *C* della sfera, se dal punto *I*, preso a piacere sulla circonferenza di questa sezione, si tirasse al centro *C* la linea *IC*, e che dal mezzo *K* della linea *AB*, che si suppone passi per i punti *A* e *B*, comuni alla superficie della sfera e a quella del cilindro, si tracciasse la linea *IK*, si vedrebbe, come nella proposizione precedente, che i triangoli *AKC, IKC, BKC*, rettangoli in *K*, che hanno il lato *CK* comune, e i lati *AC, CI, CB* uguali, essendo raggi della stessa sfera, i lati *AK, IK, BK* sarebbero anch'essi uguali tra loro, e su uno stesso piano, quali raggi di un cerchio, di cui i punti *AIB* sarebbero la sua circonferenza; ma la linea *CK* essendo per ipotesi una parte dell'asse del cilindro, *FLNG* sarebbe anche perpendicolare allo stesso piano; di cui la sezione comune alla sfera *ABDE*, e al cilindro *LNGF*, sarebbe un cerchio formato dall'incontro delle superfici di questi due corpi, cosa che si dovrà dimostrare.

APPLICAZIONE ALL'USO

Si vede da questa proposizione quale deve essere il centro dell'incontro delle volte sferiche con le Volte a Botte diritte, di cui gli assi passano per il centro della sfera, tale è il poggio di una Cisterna incurvata a conca absidale, come ve n'è una a Phalsbourg, tale è la finestra a chiave di volta del Pantheon di Roma, tali sono le imposte delle lanterne sulle cupole nella maggior parte delle chiese moderne, gli incontri di navate con volte a botte con i Capezzali circolari, incurvati in quarto di sfera, o di una più grande porzione, se il diametro del santuario è più grande di

quello della volta a botte della navata; ipotizzato che l'una e l'altra di queste volte non siano né rialzate né abbassate, e che la navata non sia affatto posta di sbieco sul Capezzale, sebbene la direzione del suo asse, vale a dire del suo mezzo, passi per il centro della porzione della volta sferica; perchè benché sia poco posta di sbieco, la sezione non è più un cerchio, come noi dimostreremo.

PROBLEMA IX

La sezione data dall' incontro delle superfici di una sfera e di un cilindro scaleno, di cui l'asse passa per il centro della sfera, è un'Ellisse

Fig. 33

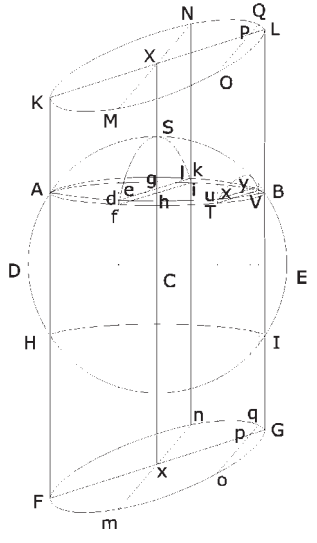


Fig. 33. Differentemente dalla figura precedente, a parità di condizioni, una sfera intersecata da un cilindro scalenocrea un'ellisse nella sua intersezione.

Data la sfera *ABIH*, penetrata dal cilindro scaleno *KLGF*, (***fig. 33***) il cui asse *Xx* passi per il centro *C* della sfera, se si ipotizzasse un piano passante per questo asse, darebbe due sezioni diverse, ovvero il parallelogramma *KLGF* nel cilindro, e il cerchio *SDE* nella sfera, il quale sarebbe grande o maggiore, perchè passerebbe per il centro *C*, e di cui i punti *A* e *B*, ove si tagliano queste due figure, sarebbero comuni alle due superfici della sfera e del cilindro, come i punti *I* e *H* della sezione opposta, che sono sui lati del parallelogramma, e nello stesso modo alla circonferenza del cerchio, e nessun'altro punto se non questi quattro non potrebbero essere che su una delle superfici dei due solidi; poiché se essi fossero su quella del cilindro, sarebbero dentro la sfera, e se fossero su quelli della sfera, sarebbero fuori dal cilindro, poiché gli archi *ADH* e *BEI* sarebbero al di fuori dei lati *AH* e *BI*. Se si ipotizzasse un secondo piano perpendicolare al primo e che passasse per i punti *A* e *B*, taglierebbe questi due corpi in maniera diversa dal primo, e costituirebbe due sezioni differenti, vale a dire un cerchio *ABel*, di cui il diametro sarà *AB* e che non sarà più un gran cerchio, ma un cerchio minore; perchè non passerebbe per il centro *C* della sfera. L'altra sezione nel cilindro sarebbe un'ellisse *AdBk*, di cui *AB* sarebbe l'asse minore ; perchè la sezione perpendicolare all'asse di un cilindro scaleno è un'ellisse, e il diametro KL del cerchio della base KMLN, inclinato al lato *LG* è più grande di *AB* che è perpendicolare a questo; in effetti se si tracciasse una parallela *Ar* per *A*, sarebbe l'ipotenusa del triangolo rettangolo, di cui *AB* sarebbe un cateto , ora qualsiasi sezione che non fosse parallela alla base sarebbe un'ellisse.

Allo stato attuale poiché il piano passante per *B* prevede due sezioni differenti, è evidente che ne l'una né l'altra può essere comune alle due superfici; in effetti l'ellisse del cilindro essendo circoscritta al cerchio della sfera, con il quale non ha in comune se non i due punti *A* e *B*, e tutta fuori dalla sfera e il cerchio della sfera è tutto fuori dal cilindro, di cui la sezione comune sarà un'altra curva al di fuori di questo piano, che non avrà in comune con questo piano se non i due punti *A* e *B*, questa curva passerà quindi al di sotto o al di sopra del piano, tagliando questi

due corpi per *A* e *B*. In questo esempio passerà al lato del centro *C* della sfera, come *AfB*; perchè il diametro *MN* = *fi* è più grande di *AB*. Bisogna far vedere il rapporto che questa ha con l'ellisse *AdB*, per dimostrare che questa è un' Ellissoide, come l'abbiamo chiamata prima. Per arrivarci bisogna dire ancora qualcos'altro.

Sebbene noi abbiamo gia ipotizzato due piani taglianti la sfera e il cilindro, uno per l'asse *Xx*, l'altro per i punti *A* e *B* perpendicolarmente al primo, conviene ancora immaginare almeno due altri paralleli fra di loro, e perpendicolari ai primi, vale a dire ancora uno per l'asse e il diametro *MN* della base, e l'altro per l'ordinata *OPQ*; questa molteplicità di piani è un po' imbarazzante per il lettore, ma è inevitabile per la dimostrazione delle proprietà della curva che noi esaminiamo, ci si può aiutare utilizzando dei rilievi di carta o di cartone; sarà bene ancora ricordare l'undicesimo e il dodicesimo libro di Euclide, perchè tutta quest'opera non gira che sulle sezioni e gli incontri dei piani. Rimane all'immaginazione del lettore sollevare gli oggetti e staccarli dal piano in cui giacciono per considerarli dove devono essere.

Dati dunque due piani paralleli all'asse del cilindro, passanti per le ordinate *MN, OQ*, le sezioni di questi piani nella sfera saranno dei cerchi, di cui *fSi* e *tsb* sono degli archi e dei parallelogrammi nel cilindro, di cui *MdkN* e *OQZ* sono delle porzioni, poiché *Md* e *Nk* sono paralleli, essendo il lato del cilindro, e *MN* e *dk* anche, paralleli fra di loro; poiché i piani *KML* della base e *AdB* della sezione per *AB*, sono perpendicolari allo stesso piano *AKLB*, passante per l'asse *Xh*; o poiché la linea *MN* è perpendicolare all'asse *CX*, vale a dire al raggio *CS* prolungato, essa è parallela alla tangente che passerà per *S* dell'arco di cerchio *fSi* e le linee *Mm* e *Nn* essendo parallele a quest'asse e ugualmente allontanate da una parte e dall'altra, le linee *MfNi* rincontreranno quest'arco nei punti f e i, equidistanti da *M* e *N*; (***art. 39***), dunque la linea fi sarà parallela a *M* e *N* e a *dk*; dunque *df* = *ki*, e *dk* = *fi*, vale a dire, che l'ordinata *dk* nell'ellisse *AdB* è uguale all'ordinata della sezione comune alle due superfici, che passano per *f* e per *i*. Si dimostrerà alla stessa maniera che l'ordinata *uz* è uguale all'ordinata *tb* della sezione solida, che passa per *t*; dunque tutte le ordinate all'asse curva *AhB*, della sezione solida, sono uguali a tutte quelle dell'ellisse all'asse *AB*; dunque la sezione è un' Ellissoide, cosa che bisognerà dimostrare.

COROLLARIO I

Dato che il piano *MN*, per l'asse *Xx* del cilindro, taglia perpendicolarmente l'asse portante *AB* della sezione , ne consegue che l'ordinata maggiore dell'elleisse piana, che qui è *dk*, si abbassa perpendicolarmente ad *AB* in *fi*, che è l'asse retto della curva, di conseguenza quest'asse è equidistante dalle estremità dell'asse portante *AB* , cosa che non avviene in nessun caso se non in quello dei cilindri scaleni.

COROLLARIO II

In secondo luogo ne consegue che la più grande profondità, o distanza dell' Ellissoide dall'ellisse piana, è all'asse retto *Si*, perchè la più grande differenza *de* del diametro *el* del cerchio della sfera *AeBl*, e dell'asse *dk* dell'ellisse *AdBk*, è nel piano dell'asse retto *Si*; ora poichè *de* o *lk* è la più grande distanza che ci possa essere dalla circonferenza del cerchio all'ellisse, la distanza *df* o *iK* sarà allo stesso tempo la più grande che ci possa essere dal piano *AdBk* alla curva *AfBi*, e dato che questa differenza di ordinate del cerchio a quelle dell'ellisse, allo stesso diametro *AB*, diminuisce continuamente, ne consegue che la profondità dell'Ellissoide diminuisce di pari passo da *S* a *B*, punto in cui questa raggiunge il cerchio della sfera *AeBl*.

COROLLARIO III

Per trovare questa profondità sull'asse curvo dell'Ellissoide, che è nel piano dell'asse portante *AB*, non resta che descrivere le sezioni che sono i piani passanti per le ordinate parallelamente all'asse del cilindro, che sono cerchi della sfera, di cui i centri sono tutti sulla linea *DE*, perpendicolare all'asse *Xx* del cilindro per il centro *C*, e di cui le linee *CS* e *WS* ne esprimeranno i raggi; per avere le distanze dei lati del cilindro, al piano passante per il suo asse e per *AB* bisogna prendere a parte (***Fig. 34***) l'ellisse *aebE*, sugli assi dati, vale a dire *ab* uguale a *AB* della ***Fig. 33*** e *Ee* uguale al diametro *Kl* della base del cilindro scaleno, nella quale si inscriverà il cerchio *adbD*, che sarà uguale a quello della sezione della sfera per *AB* della ***Fig. 33***.Fatta questa premessa si tirerà a parte una linea *Cs* (***Fig. 36***),prendendo questa uguale a *Cs* della ***Fig. 33***.Per raggio si disegnerà un arco indefinito *sf*, in seguito portando la distanza *Sg* della ***Fig. 33*** in *sg* della ***Fig. 36***, si alzerà su questo punto una perpendicolare *gd*, sulla quale prendendo *ge* uguale a *Cs* della ***Fig. 33*** si avrà il punto *e*, dove la sezione piana taglia la sfera; ma dato che questo punto è dentro al cilindro, bisogna portare al di fuori la distanza *De* della ***Fig. 34*** che è la differenza tra il mezzo diametro del cerchio e l'asse dell'ellisse.

Se attraverso il punto *d* si tracciasse una parallela a *Cs*, essa taglierebbe l'arco *fs* al punto *f*, che sarà comune al lato del cilindro *df*, e al cerchio della sfera *sef*; e di conseguenza alla circonferenza dell'Ellissoide, di cui la linea *df* sarà la profondità di questa curva, in mezzo al suo asse retto, la quale distanza sarà uguale a quella dell'asse curvo all'asse portante, di cui l'uno passerebbe per *g* e l'altro per *h*; dato che le ordinate *dg* Non sarà difficile trovare questa profondità per tutti gli altri punti dell'asse curvo;dato che se si portasse la distanza *CW* della ***Fig. 33*** in *Cy* della ***Fig. 35***, si avrebbe la distanza dei piani che passano per *MN* e *OQ* della ***Fig. 33*** e se si tracciasse una parallela a *eE*, ***Fig. 34,*** si avrebbero le ordinate *Yu* dell'ellisse , e *Yx* del cerchio,e in *Ws*, ***Fig. 33***, il raggio del cerchio della sfera, con il quale, facendo l'arco *sT* (***Fig. 35***) e la freccia *ys* uguale a *ys* della ***Fig. 33***, si traccerebbe per il punto *y* la perpendicolare *yu*, che sarebbe uguale a *Yu* della ***Fig. 34***.

Fig. 35

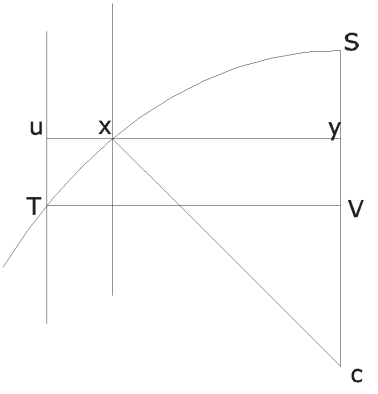


Fig. 34

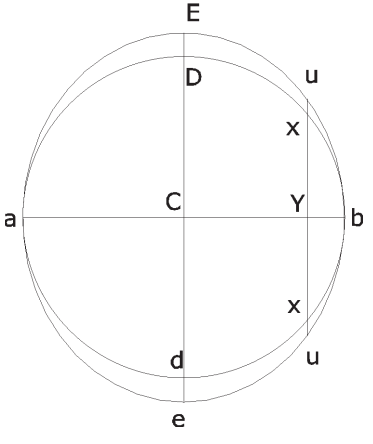


Fig. 34. Di sopra è riportata la sezione orizzontale della fig. 33 che mostra le curve e i punti derivanti dall'intersezione tra cilindro e sfera.

Fig. 36

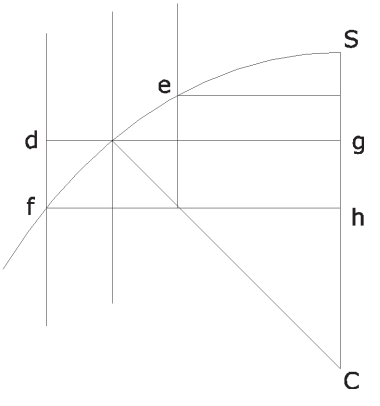


Fig. 35 & 36. Le due figure mostrano le sezioni verticali, con i punti che ne derivano, applicate alla fig. 33,una sull'asse mediano e l'altra su un punto a caso dell'asse *AB*.

APPLICAZIONE ALL' USO

Questo teorema dimostra che quando una volta a botte di sbieco e in pieno centro nel suo arco di faccia incontra una volta sferica, di cui il centro è nell'allineamento dell'asse della volta a botte, lo spigolo che si forma nella giuntura di queste due volte non può essere in pieno centro, ne su uno stesso piano ellittico alzato o abbassato , ma una curva di cui gli appiombo si spostano dalla linea dritta, tirata da una imposta all'altra.Così supponendo che una navata dell'ellisse sia un pò di sbieco sul capezzale circolare del coro, girato a conca absidale, vale a dire abbassato, come capita spesso, l'incontro di queste due volte è un'ellipsimbre.L'architetto che non ha alcuna Teoria si trova imbarazzato in un caso simile, per evitare una specie di difformità di questa curva, cosa che non ci si aspettava; il vantaggio di chi ha invece dei Principi è di riconoscere a prima vista ciò che risulterà dal suo disegno, cosa che lo pone nello stato di poter rimediare, mediante qualche arco raddoppiato o mediante una industriosa correzione dei centri.

PROBLEMA X

La sezione data dall'incontro delle superfici di una sfera e di un cilindro retto, che la penetra in tutta la sua circonferenza, e il cui asse non passa per il centro della sfera, è un'ellissoide.

Data la sfera *ABDT*, penetrata dal cilindro *LNDF*, di cui l'asse *Mm* non passi per il centro *C* della sfera, se si supponesse un piano passante per questo centro e per l'asse *Mm*, tale piano produrrebbe due sezioni differenti, vale a dire, un cerchio *ASD* nella sfera, che sarebbe maggiore, e un parallelogramma *LNDF* nel cilindro.Queste due sezioni si taglierebbero nei quattro punti *ABDE*, che sarebbero di conseguenza comuni alle due superfici della sfera e del cilindro e alla circonferenza delle curve opposte, formate dalla penetrazione del cilindro alla sua entrata e all'uscita dalla sfera.Basterà esaminarne una perchè l'altra sarà perfettamente uguale.

Se si ipotizzasse ancora, come nel problema precedente, un secondo piano perpendicolare al primo e passante per i punti *A* e *B*, è evidente che produrrebbe due nuove sezioni, vale a dire, un cerchio nella sfera, rappresentato nella ***Fig. 38*** dalla curva *AfBF*, di cui il diametro sarebbe *AB*, e un'ellisse nel cilindro, rappresentata da *AgBG* , di cui *AB* sarebbe l'asse maggiore, poichè il cilindro sarebbe tagliato obliquamente seguendo questa linea, data l'ipotesi, e di cui l'asse minore sarebbe la linea *Gg*, o il suo uguale *KL*, che sarebbe il diametro della base del cilindro *LNFD*, cosa dalla quale derivano le stesse prove che sono state dedotte nel problema precedente: che la sezione comune alle due superfici dei corpi non può essere ne cerchio ne ellisse; essendo l'una inscritta nell'altra, tali figure non avrebbero che due punti comuni *A* e *B*, che potrebbero trovarsi all'incontro delle due superfici, e che infine la sezione che sarebbe a questi comune sarebbe una curva a doppia curvatura, non posta su di un piano e che non avrebbe niente in comune con le due sezioni suddette se non gli stessi punti *A* e *B*.La sola differenza è che qui questa sarebbe l'asse maggiore, in modo tale che l'ellisse sarebbe tutta dentro al cerchio della sfera, in questo caso, e tutta fuori nell'altro.

Fig. 38

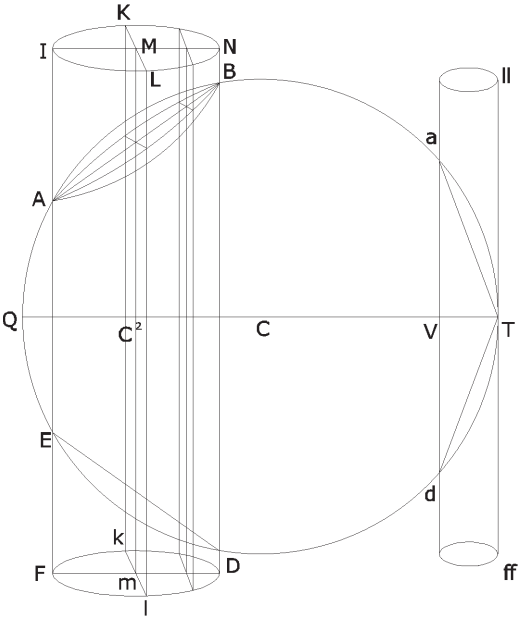


Fig. 38. Questa figura mostra il risultato dell'intersezione tra una sfera e un cilindro retto che la penetrain tutta la sua circonferenza.

Ne consegue che l'asse curvo della sezione solida, che è un'ellipsimbre nell'uno e nell'altro caso, si avvicinerebbe dal centro della sfera nel primo, e si allontanerebbe nell'altro.

Nel resto dei casi le ordinate all'asse curvo della sezione sarebbero sempre uguali a quelle dell'ellisse, applicata all'asse maggiore *AB*, come dimostrato nella proposizione precedente.

Tuttavia data l'importanza di concepire la natura e le proprietà di questa curva, che è la chiave di tutte quelle che si formano per la

dei corpi, riprenderemo la spiegazione per renderla più intelleggibile, presentandola sotto un'altra faccia, attraverso una figura più distinta.

Fig. 40

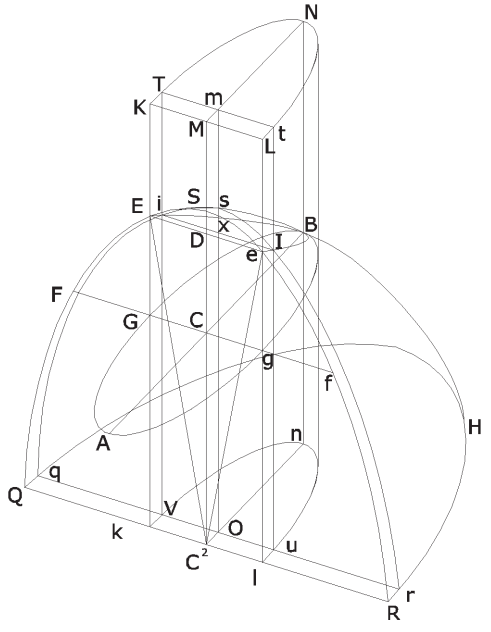


Fig. 40. Esemplificazione della fig. 38 tramite sezione sull'asse del cilindro retto.

Data la ***Fig. 40***, *KL* e *RQS*, la rappresentazione in prospettiva della sezione data da un piano, passante per l'asse del cilindro fino al diametro *RQ* della sfera, perpendicolarmente al piano passante per lo stesso asse, e i punti *A* e *B*, in modo che C^2M della ***Fig. 40***, il semicerchio *QSR* sarà la sezione che questo piano fa nella sfera, e il parallelogramma *KLlk* quello dello stesso piano del cilindro.Sia un altro piano parallelo a questo, passante attraverso *Ttqr*, che produce anche questo due sezioni della stessa natura, vale a dire un semicerchio *qsr*, e un parallelogramma *Ttuv*.
E' evidente che le intersezioni dei lati di questi parallelogrammi con i semicerchi produrranno dei punti comuni alle due superfici della sfera e del cilindro,tali sono i punti *Ee, Ii*, attraverso i quali il contorno della sezione solida deve necessariamente passare , come i punti *A* e *B*; la curva *EiBIe* sarà dunque all'incontro delle superfici, dal suo asse dritto *Ee*, corrispondente al diametro della base del cilindro *KL* fino al punto *B*,dove questa va a toccare la sezione piana dell'ellisse, passante per *AB*, che noi rappresentiamo qui per la curva *AGBg*.

Poichè il diametro *KL* della base del cilindro è perpendicolare all' asse C^2M , che si suppone dritto, e che le metà di questo diametro *KM* e *ML* sono uguali, le linee *KE* e *Le* tracciate dalle loro estremità parallelamente a quest'asse saranno uguali fra loro, quindi *Ee* sarà parallela e uguale a *KL*; ma dato che per l'ipotesi, il piano *AGBg* è perpendicolare al piano $MNnC^2$ passante per l'asse del cilindro, MC^2 , e per la linea *AB*, gli angoli *GCM* e *gCM* sono retti; ma anche *Eg* è un parallelogramma, a causa delle parallele *Kk, Ll* che sono i lati del cilindro; dunque *Ee* e *Gg* sono due linee uguali: e per la stessa ragione anche *Hh* e *Ii* lo saranno; ora *Gg* e *Hh* sono delle ordinate dell'ellisse piana all'asse maggiore *AB*; e *Ee, Ii*, delle ordinate dalla sezione solida al suo asse curvo *DxB*, parte di tutto l'asse *AdxB*; dunque le ordinate di tale sezione sono a quelle dell'ellisse *AGBg*, passante per i punti comuni *A* e *B*, e quindi questa curva è del tipo di quelle che abbiamo chiamato Ellissoide, cosa che andremo a dimostrare.

Resta da far vedere che l'asse curvo *ADxB* che è sullo stesso piano dell'asse portante *AB*, il quale è l'asse maggiore dell'ellisse *AGBg*, se ne allontana e vi si avvicina nel rapporto dei seni versi degli archi di cerchio della sfera, di cui le ordinate dell'ellisse e dell'Ellissoide sono i seni retti nelle sezioni circolari della sfera, fatti attraverso i piani passanti per queste ordinate parallelamente all'asse del cilindro.

Poichè se dal centro C^2 si tracciano i raggi C^2E e C^2e, all'estremità dell'ordinata *Ee*, che è la corda dell'arco *Ese*, si vedrà chiaramente che le sue metà *ED* e *eD* sono i seni retti della metà di questo arco, di cui *DS* è la freccia o seno verso; allo stesso modo se dal centro *O* del semicerchio *qsr* si tracciassero delle linee al punto *i* e *I* della corda *iI*, altra ordinata alla sezione, si riconoscerebbe che la profondità più grande nel cerchio, che è *xs*, sarebbe la freccia di tale corda, e il seno verso della metà *ix* o *Ix*, cosa che è chiaramente espressa nelle ***Fig. 35*** e ***36*** in *hS* e *VS*, come l'abbiamo spiegata nel problema precedente.

Si farà lo stesso di tutte le ordinate possibili tra i punti *A* e *D*, *D* e *B*, di cui le profondità diminuiranno dall'asse retto *Ee*, fino a questi punti *A* e *B* dove queste si ridurranno a niente; perchè le ordinate del cerchio *AFBf* della sfera e dell'ellisse *AGBg*, di cui la differenza causa la profondità della sezione, divengono uguali a zero in questi punti.

COROLLARIO

Da qui ne consegue che l' Ellissoide non fa che toccare le sezioni piane, circolare e ellittica; dato che queste ultime due si toccano solamente e non si intersecano affatto, e che dal momento in cui comincia da esservi della differenza tra le ordinate ai loro diametri comuni, nello stesso tempo comincia ad esserci qualche profondità o distanza dalle sezioni piane alla solida, di cui l'asse curvo comincia ad allontanarsi dall'asse portante.Quindi la circonferenza curva dell'Ellissoide non fa che toccare le circonferenze delle sezioni piane del cilindro e della sfera.
Abbiamo dato, nel problema precedente, il modo di trovare i seni versi che fanno la profondità dell'asse curvo, per mezzo del compasso; ma se si volesse, per un'operazione più perfetta, trovarli grazie ad un calcolo,

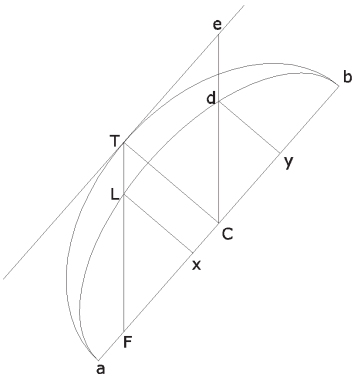
non sarebbe difficile. Bisogna togliere dal quadrato del raggio del cerchio della sezione della sfera C^2S o *os*, il quadrato dell'ordinata *cF* del cerchio della sezione piana *AFBf* resterà il quadrato deC^2c, di cui la radice era tolta dal raggio, resterà *cS*, togliendo dal quale *Ds* trovato prima, resterà *cD*, differenza della profondità della sezione piana nella sfera, e della sezione solida,la quale è la distanza delle due ordinate corrispondenti nell' Ellissoide e nell'ellisse piana, che andremo a trovare.

Abbiamo detto in occasione del problema precedente che la distanza più grande dall'ellisse all'Ellissoide, che sta all'asse retto, era alla metà della sezione solida, a distanza uguale dai punti *A* e *B*, non è lo stesso in questo caso; poichè *1)* l'asse retto non è uguale alla distanza dai punti *A* e *B*, *2)* non è rispetto all'asse retto che la sezione solida è più lontana dalla sezione piana.

E' evidente che l'asse retto *Ee* non sia equidistante dai punti *A* e *B*: dato che essendo l'asse del cilindro inclinato rispetto all'asse portante *AB*, l'angolo *DcB* è acuto e *DcA* è ottuso; quindi il punto *D*, centro dell'Ellissoide, è più vicino a *B* che a *A*.

Inoltre, per provare che il punto *D* non è il più lontano dalla sezione piana, che passa per *AB*, sia fatto a parte (***Fig. 39***) l'arco di cerchio maggiore *aTb* uguale al segmento, che la linea *AB* ritaglia da un gran cerchio della sfera, la cui metà della corda è in *C*, attraverso il quale si farà passare una linea *Ce*, che sarà con ab l'angolo *bCe* uguale a quello dell'inclinazione dell'asse del cilindro sulla linea *AB*, uguale all'angolo *LAB* (***Fig.38***).
Sia anche *aLdb* l'asse curvo della sezione solida e *ab* l'asse maggiore della sezione piana ellittica, l'ordinata maggiore a quest'asse, che l'asse minore, corrisponde a quella che passerebbe per *D* dell' Ellissoide, che si trova al centro di questa curva; bisogna provare che può esserci un altro punto, ad esempio *L*, che sia più lontano da *ab* di quanto non lo sia il punto *D*.Per questo, se dal punto *C* si fa partire *CT* perpendicolare su *ab* e dal punto *T*, dove questa taglia l'arco *aTb*, si traccia una tangente *Te* a quest'arco, che dallo stesso punto *T* si abbassa *TLf* parallela a *DC*, il punto *L*, dove questa taglierà l'asse curvo, sarà il più lontano dall'asse portante *ab*; poichè le linee *eC*, *Tf*, che tra le stesse parallele *ab*, *Te*, sono uguali tra di loro, e dato che *SC* non è che parte di *eC*, questa sarà più piccola di *Tf*; ora *Sd* rappresenta il seno verso dell'arco, di cui l'asse retto che passa per *D* è la corda nel cerchio, che è la sezione della sfera per l'asse del cilindro perpendicolarmente al cerchio *aSb* e *Lt* rappresenta il seno verso, o la freccia, di cui la doppia ordinata, che passa per il punto *f* dell'ellisse piana può essere molto piccola; da ciò si può concludere che il suo seno verso può essere più piccolo di quello che passa per *Lf*, il quale è più lontano dal centro *C* della sfera; (***Fig. 34***) ma nel momento in cui ipotizzassimo questi seni versi uguali, sarà sempre evidente che togliendo dalle due linee ineguali *SC*, *Tf* dalle quantità uguali *Sd*, *TL*, la parte *Lf* resterà più grande di *dc*, che è più piccolo di *Tf*; dunque, essendo la distanza obliqua *Lf* più grande di *dC*, la distanza perpendicolare *Lx* sarà anch'essa più grande di *dy*, cosa da dimostrare; poichè i triangoli *Lfx* e *CDy* saranno simili.

Fig. 39



COROLLARIO I

Ne consegue che più la linea *AB* è inclinata all'asse *CS*, più deve esserci irregolarità nello scarto delle ordinate dell'Ellissoide da quelle dell'ellisse piana, come anche nella distanza di queste ordinate tra loro sul loro asse curvo *adb*, come si vede nella ***Fig. 41***, poichè gli intervalli *A2, 23,3d* sono molto diversi, misurati su questa curva *AdB*, sebbene misurati sulla linea retta *AB* in *pqc*, o su una perpendicolare alla loro direzione, come in *mno*; dato che queste ordinate all'asse curvo ai punti *2, 3, d, 4, 5* sono emanate da quelli dell'ellisse piana, ai punti *pqC* etc. o dalla base del cilindro ai punti *mno*.

Fig. 41

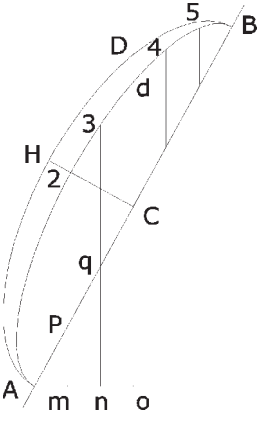


Fig. 39 & 41. Particolare delle sezioni verticali all'intersezione di cilindro e sfera.

COROLLARIO II

Ne consegue ancora che le ordinate all'asse curvo dell' Ellissoide non sono in numero maggiore di quelle dell'ellisse piana da una parte e dall'altra del centro *C* o *D*, ma che queste sono più pressate da un lato che dall'altro.

Appunti sulla differenza di situazioni verificabili nei cilindri

Avevamo ipotizzato, nell'enunciato di questo problema, che il cilindro che penetra la sfera fosse retto, perchè se fosse stato scaleno , si sarebbe potuto verificare che la sezione comune alle due superfici fosse un cerchio e non un' Ellissoide, come si può vedere dalla ***Fig. 37*** , dato che se dal centro *H*, della base *AB* del cilindro scaleno *ABDE*, si abbassasse una linea *HC* perpendicolare al piano di tale base, e se dal punto *C*, preso su questa linea a piacere, e dall'intervallo *CA* o *CB* per raggio, si descrivesse un cerchio *GABDE*, potrebbe essere uno dei maggiori di una sfera, che avrebbe per centro *C*; ora se si prolungasse il lato del cilindro *ABFE* verso *D*, è evidente che questo cerchio taglierebbe i lati del cilindro in *DE* nella stessa maniera che in *AB*, in modo che l'angolo *EDB* sarebbe uguale all'angolo *ABD*.

Fig. 37

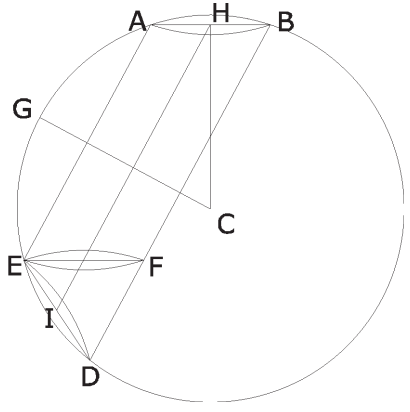


Fig. 37. Caso di intersezione tra una sfera e un cilindro scaleno.Le sezioni che ne risultano sono cerchi e non ellissoidi.

Per verificarlo non resta che tracciare *CG* perpendicolare sui lati del cilindro fino alla circonferenza del cerchio in *G* (***Eucl. L.3***), allora si vedrà che gli archi *GA, GE* uguali tra di loro , essendo tolti dagli archi *GD, GB*, anch'essi uguali, allo stesso modo delle loro corde, che sono i diametri della base del cilindro, dunque la sezione *ED* sarà uguale alla base *EF*; uguale per l'ipotesi della base *AB*, perchè questa è opposta , ***art.49***, essendo l'angolo *EDB* uguale a *QABD*, poichè tutti e due sono appoggiati sullo stesso arco *AGE*; dunque *ED* è un cerchio , cosa che andremo a dimostrare.

Lo stesso ragionamento serve anche a provare che le sezioni opposte, *AB, ED* (***Fig. 38***) sono uguali tra loro; poichè i loro assi maggiori *AB, ED* sono uguali e che gli assi minori sono uguali a quelli della base del cilindro.

COROLLARIO III

Ne consegue inoltreche più gli assi *AB, ED* saranno inclinati all'asse *Mm* del cilindro, più le sezioni opposte si avvicineranno, e che infine il lato del cilindro *ll, ff* diviene tangente alla sfera, le sezioni opposte *aT, dT* si toccheranno nel punto *T*, e se questo lato è fuori dalla sfera, queste sezioni si incrociano ugualmente e si tagliano reciprocamente, come spiegheremo nel problema successivo.

APPLICAZIONE ALL'USO

Questa proposizione serve a far conoscere che quella curva è lo spigolo delle lunettea volta, praticate per delle finestre, o per la decorazione in una volta sferica; dato che queste lunette sono ordinariamente o al di sotto della volta sferica o inclinate in Abajour o Spioventi, queste sono delle metà di cilindro o dei cilindri interi , di cui l'asse non passa per il centro della sfera, e devono fare lo stesso effetto di un cilindro intero che entri nella sfera con tutta la sua circonferenza, come se la finestra fosse un "occhio di bue", come sono quelli delle quattro piccole cupole di San Pietro a Roma, di cui la direzione non tende verso il centro della volta ma al di sotto , perchè l'Abajour è molto inclinato. Non c'è altro cambiamento se non una metà di contorno della stessa natura.

PROBLEMA XI

La sezione data dalla penetrazione di un Cilindro, che entra nella sfera solo con una parte della sua circonferenza, è un'ellissoide.

Fig. 42

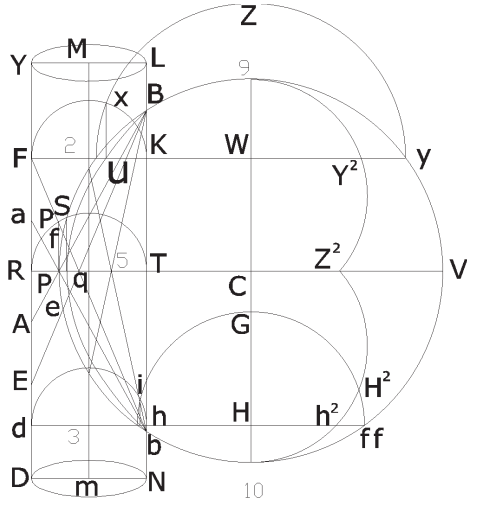


Fig. 42. Dimostrazione di come un cilindro retto ,penetrante in una sfera con una parte dela sua circonferenza, crea un' ellissoide.

Sia data la sfera *BVbp* di cui il centro sia *C*, penetrata dal cilindro *YLND*, che non entri se non in parte della sua circonferenza nella sfera, in modo tale che la parte *RP* del suo diametro *RT* (il quale essendo prolungato passi per il centro della sfera) ne resti al di fuori.

Avendo ipotizzato come nei teoremi precedenti un piano che passi per il centro *C* e l'asse *Mm* del cilindro, la cui sezione sarà un parallelogramma *YLND*, e quella nella sfera un cerchio maggiore *BVbp*, si riconoscerà che i punti *B* e *b* sono comuni alle due superfici del cilindro e della sfera; dato che sono l'incontro del lato del cilindro e del cerchio maggiore della sfera e che il punto *P*, che è comune ai due diametri *RT* del cilindro e *PV* della sfera, non lo è alle superfici, dato che è nel cilindro della profondità *RP*, che è la minore, sarà del tutto al di fuori della sfera essendo una tangente; dunque non potrà essere comune alle due sezioni, che saranno fatte attraversare un piano perpendicolare al primo e saranno fatte passare attraverso *RV*, il piano del quale ne produrrà due circolari, vale a dire *RST* nel cilindro e *PBV* nella sfera, che bisogna immaginare nell'aria e non come rappresentato nella figura, sul piano passante per l'asse del cilindro e il centro della sfera; ma dato che l'intersezione dei due cerchi *RST* del cilindro *PSV* della sfera avviene in *S*, ne conse

gue che questo punto è alla circonferenza delle due superfici da dove, avendo tracciato l'ordinata *Sq* al diametro *RT*, si vede che la sua parte *PT* è comune a questi due corpi, vale a dire *RT* e *PV*.
A questo punto se il cilindro fosse stato scaleno e la sezione attraverso *q* e *B*, vale a dire *EqB*, fosse stata un cerchio, avrebbe avuto per suo uguale e opposto *FqB*, ai quali *qS* sarebbe stata un'ordinata comune alle due sezioni dei piani, tagliante il cilindro attraverso *EB* e *Fb* e ai due cerchi *eB* e *fb*, in modo tale che questi due piani sarebbero stati nella sfera.
E' evidente che sebbene della stessa specie queste due sezioni piane non avrebbero potuto essere comuni alle due superfici, dato che sono due cerchi dai diametri differenti che si toccano ai punti *Beb*, di cui il più piccolo, che ha per diametro *eB*, sarebbe stato interamente nel cilindro e che il grande *EB* sarebbe stato in tutta la sua circonferenza fuori dalla sfera.
La differenza sarebbe più grande se il cilindro fosse retto; perchè la sezione *EB* nel cilindro è un'ellisse e *eB* nella sfera un cerchio fatto attraverso lo stesso piano perpendicolare a quello che passa per l'asse del cilindro e della sfera; vale lo stesso per la sezione fatta per il piano *Fb*, passante per *q* e *b*, l'ordinata comune *qs* taglierà una parte di queste sezioni piane, da *q* verso *e*, e dalla stesso punto *q* verso *F*, tanto dell'ellisse quanto del cerchio fatto per ciascun piano tagliante i due corpi, che è al di fuori della sfera; ma perchè la sezione comune alle loro superfici non può essere un cerchio o un'ellisse, ne consegue che questa non può essere nel piano *EB* ne in *Fb*, sebbene vi abbia un punto *B* o *b*; dunque questa se ne allontanerà nel curvarsi verso la circonferenza del cerchio della sfera, tanto che le ordinate all'asse curvo *quB* divengono comuni al cilindro in *ux* della base *FxK* e al cerchio della sfera *2xZy*; dunque questa sarà un' Ellissoide della stessa natura di quella del teorema precedente su ciascun lato *EB* e *Fb*, ma imperfetta e mutilata per l'ordinata comune *qS* dove esse si incontrano e formano un angolo, in modo tale che la sezione totale, da *B* in *b* attraverso *q* , è composta di due parti d'Ellissoide, cosa che dimostreremo.

Per rendere questa spiegazione comprensibile, ipotizzeremo un cilindro scaleno *MLNm*, più piccolo del precedente, di cui il lato *Mm* taglia la sfera nei punti *2* e *4* e la sezione fatta per un piano passante per *4B* e un altro per *2b*, è un cerchio parallelo alla sua base, o in sezione opposta; è chiaro che lo stesso cerchio sarà anche la sezione piana della sfera di ogni lato in *4B* e *2b*, dunque la sezione curva comune *b5B* sarà l'incontro di due porzioni di cerchio uguali, che hanno un'ordinata comune nel punto *5*, la quale è l'intersezione di due piani, che saranno una figura simile a quella disegnata nella ***Fig. 43*** in *A* o in *B*, a seconda che il punto *5* s'avvicini a un lato del cilindro o all'altro; dato che se il punto d'intersezione dei piani si facesse alla tangente, come in *T* (***Fig. 38***), i due archi dei cerchi termineranno l'uno nell'altro e l'angolo *B* (***Fig. 43***) cadrà sul punto *t*; ma in modo tale che il punto *5* rientrerà e il punto *B*, incontro dei due archi, si allontanerà da *t*.

Fig. 43

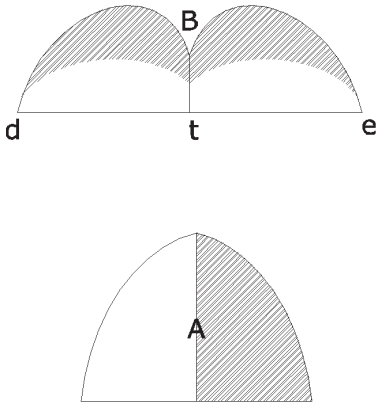


Fig. 43. Due possibilità di come i punti *A* e *B* dipendano dallo spostamento del punto *5* della fig.42 verso un lato del cilindro o verso l'altro e di come quindi possa no cambiare le sezioni.

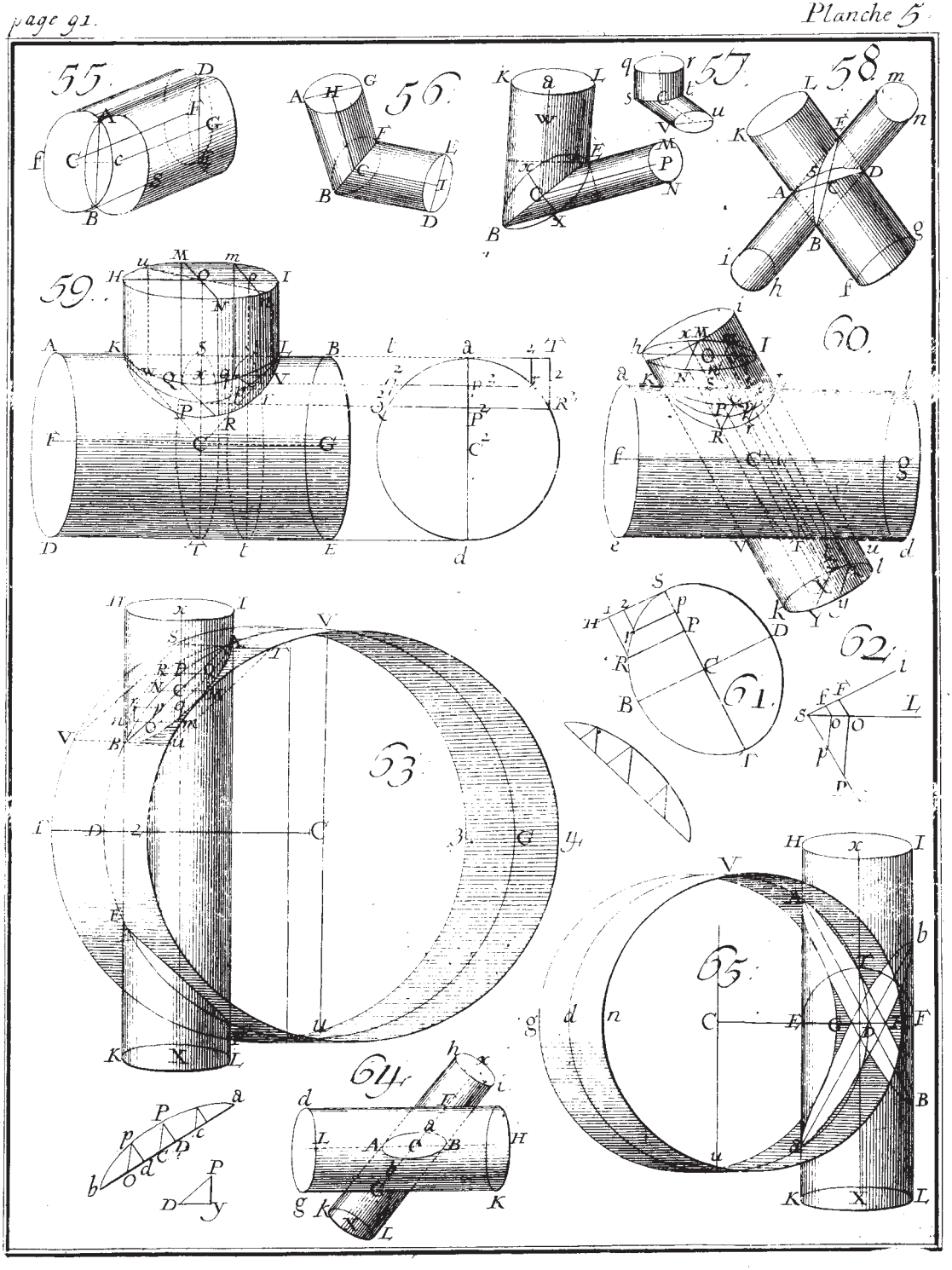
La stessa cosa capiterà alle porzioni di Ellissoide, quando il cilindro è una parte al di fuori della sfera, allora queste due curve avranno un'inflessione nel mezzo dell'angolo che viene meno, tale è l'angolo curvilineo *9Z²10*, quando la sfera passerà al di là del cilindro, come in *P*; ma se l'asse del cilindro passa al di fuori della sfera, allora la sezione composta produce un angolo rettangolo, come si vede in *A* della ***Fig. 43***;la ragione è ben comprensibile, se si presta attenzione, fino all'asse del cilindro la sezione sale nella categoria delle ordinate alla base *RST* e al contrario, dall'asse essa si abbassa nello stesso modo fino al punto *R*, al quale si unisce, quando il lato *YD* è tangente alla sfera, come l'abbiamo definito nel punto *T* (***Fig. 38***).

COROLLARIO

Da ciò ne consegue che per trovare i punti dell' Ellissoide composta si tratta solo di trovare le ordinate comuni alle sezioni circolari della sfera e del cilindro e per fare questo bisogna trovar loro diametri in parti comuni, cosa che si fa tracciando quante perpendicolari si vogliano all'asse *Mm* del cilindro.Che tagliano la sfera, come *Fy, RV, dff*, di cui le parti *2K, PT* e *gh* sono comuni ai diametri del cilindro *FK* e *2y* della sfera, *RT* e *PV*; *dh,gff*; se su ciascuno di questi diametri si alzano dei semicerchi *FxK, 2Zy, RST, PBV, dih, gGff* le loro intersezioni *x, S, i* saranno dei punti alla circonferenza della curva e le perpendicolari tracciate da questi punti ai diametri comuni, che li taglieranno in *u, q* e *z*, produrranno dei punti dell'asse curvo e saranno delle ordinate comuni le quali, essendo portate da *W* in *Y*, da *C* in Z^2 e da *H* in h^2, marcheranno su un piano che avrà per base la linea *910* dei punti per i quali, facendo passare una curva $9Y^2Z^2h^210$, si avrà un'espressione di contorno dell' Ellissoide composta, cosa che spiegheremo meglio nei problemi del libro successivo.
Sarà ancora vero, nel caso del teorema, come nel precedente, che le profondità nella sezione solida nella sfera saranno negli stessi termini dei seni versi, di cui le ordinate saranno i seni retti, come si vede in *2u*, *Pq* e *g*.

page 91.

Planche 5



CAPITOLO VI.

Sezioni fatte dalla penetrazione di Cilindri fra loro e con i Coni.

TEOREMA XVI.

La Sezione fatta dalla penetrazione di Cilindri di stessa natura, uguali o ineguali, i cui Assi sono uguali in lunghezza, e paralleli fra loro è un parallelogramma.

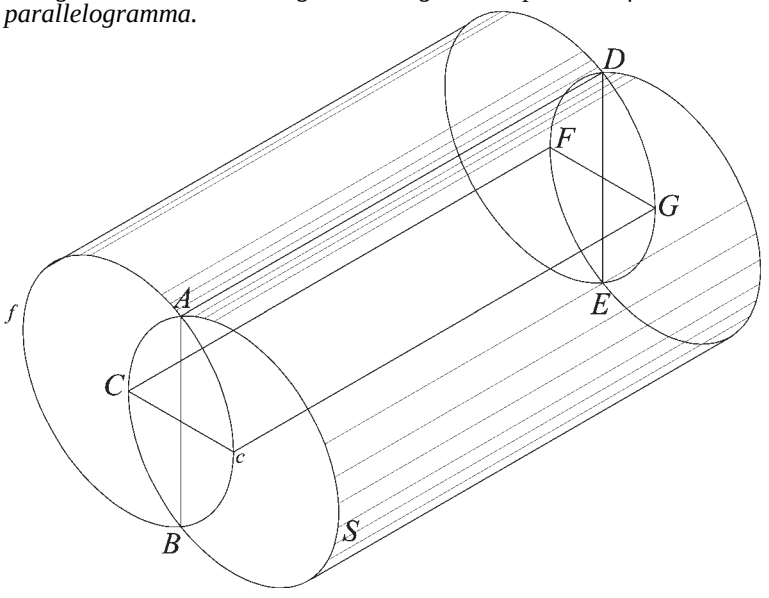


Fig. 55 Il parallelogramma *CFGc* è comune ai due cilindri.

Fig. 55 La dimostrazione di questa proposizione è troppo facile per soffermarcisi; poiché la sezione di un cilindro, fatto da un piano passante parallelamente al suo asse è un parallelogramma, (fig. 55) quelli che passeranno da corde uguali delle loro basi e in una stessa lunghezza, saranno uguali; dunque si vede che la linea *AB* che congiunge i punti *A* e *B* dell'intersezione dei cerchi delle due basi, è una corda comune ai due cerchi, dunque il parallelogramma che avrà per lati questa corda e una stessa lunghezza d'asse, sarà comune ai due cilindri.

Applicazione d'uso

119. Questa proposizione fa vedere perché le volte Gotiche, chiamate "*in terzo punto*", sono un angolo rientrante alla Chiave che continua in linea dritta, come una divisione marcata fra i due lati. E i pennacchi di queste che si incrociano, perché le loro trinche sono composte da due archi di cerchio *CA*, *Ac*, che sono le parti delle basi di due cilindri, i cui assi hanno uguale distanza dai centri *C* e *c* di questi archi, che lo sono ordinariamente della lunghezza del loro raggio *CA*; così l'incontro *AD* di queste porzioni di cilindro è uno dei lati del parallelogramma della loro intersezione totale se erano interi. Così l'incontro *AD* di questa porzione di cilindro è uno dei lati del parallelogramma di loro intersezione totale se fossero stati interi.

Nell'apparecchio degli angoli dei muri si trovano pure frequentemente dei cilindri che si penetrano nella stessa maniera, come si può vedere nell'antico tempio della Galluce, e nella Chiesa della Sapienza a Roma, le cui piante sono degli archi di cerchio inscritti in un cerchio intero, tali che i muri sono delle porzioni di cilindro, che si incrociano parallelamente ai loro assi; ma questo apparato non presenta difficoltà.

TEOREMA XVII

La Sezione fatta dall'incontro delle Superfici di due Cilindri uguali o ineguali, i cui Assi si tagliano perpendicolarmente o obliquamente, e che hanno un diametro uguale e similmente posto su un piano passante per i loro Assi, è un Ellisse; e se uno dei Cilindri è Retto e l'altro Scaleno, o entrambi scaleni e di basi uguali, essa può essere un cerchio.

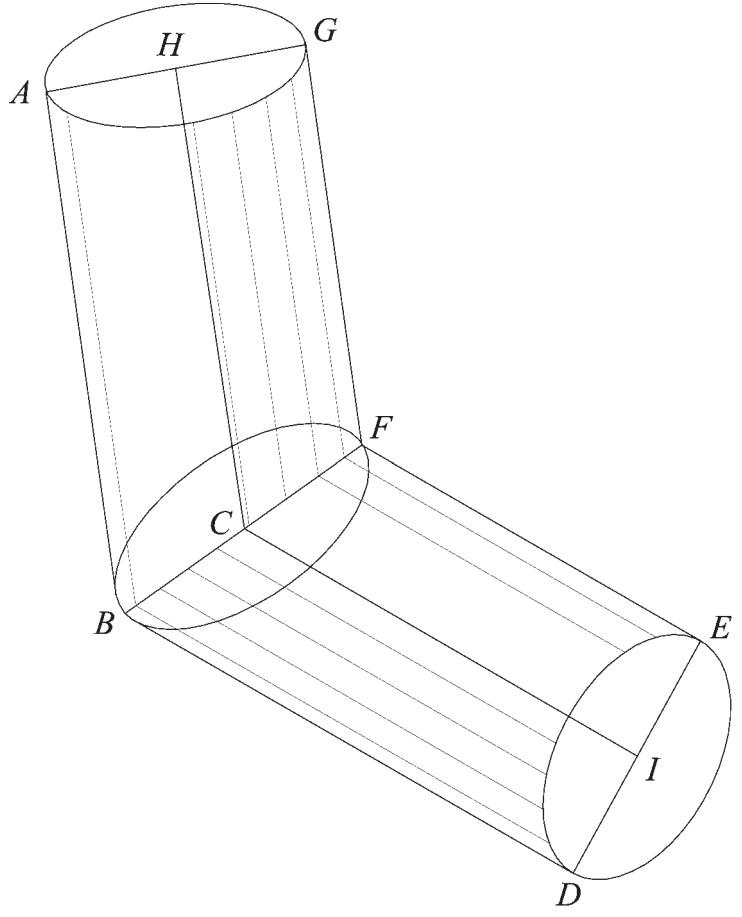


Fig. 56 L'ellisse *BF* è comune ad entrambi i cilindri *AGFB* e *FEDB.*

In primo luogo. Siano due cilindri *AF*, *FD* (***fig. 56***) uguali, tra loro la diagonale condotta dall'incontro dei loro lati è ugualmente inclinata sugli uni come sugli altri; dunque il piano passante per questa diagonale, e perpendicolarmente a quello che passa per i loro assi, taglierà i due cilindri con un'inclinazione uguale; di conseguenza sarà un'ellisse comune a tutte e due:

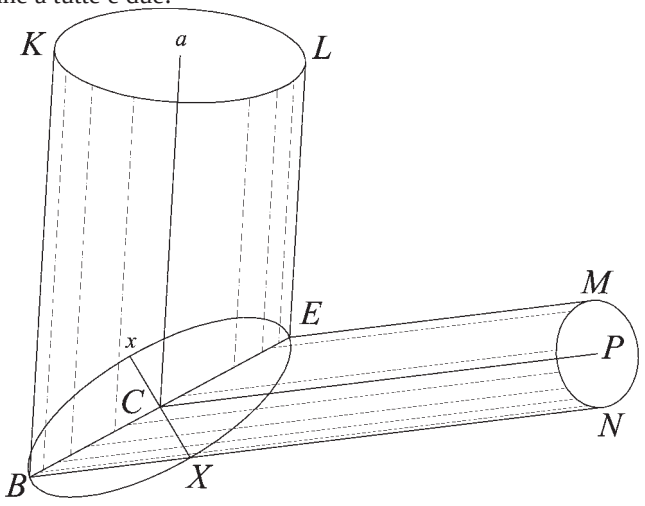


Fig. W L' ellisse *BXEx* è comune ai due cilindri scaleni *KLEB* e *EMNB*.

In secondo luogo. Se i due cilindri sono ineguali, come *KE* e *EN*, (***fig. W*** e ***57***.) o ce ne sarà uno retto *qt*, e uno scaleno, o essi saranno tutti e due scaleni, come *KE*: *EN* (***fig. W***) in questo caso è chiaro che la diagonale *BE*, condotta dall'incontro dei loro lati *KB*, *LE* e *BN*, *ME* può essere il diametro del cerchio della base di un cilindro scaleno, e in conseguenza all'altro, che ha pure questo cerchio per base sia che sia retto come *qt*, o scaleno come *KE*, tale che esso possa essere comune ai due cilindri che si incontrano.

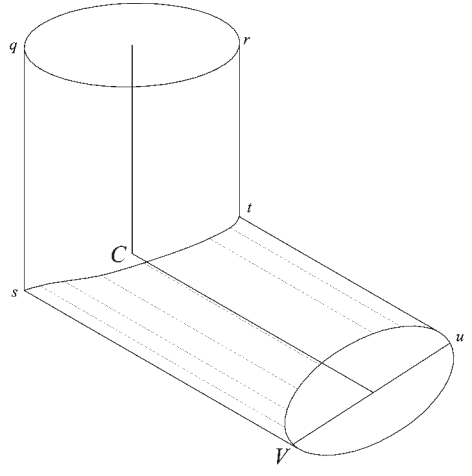


Fig. 57 Differentemente dalla figura W si ha un cilindro retto *qt* e uno scaleno *su*.

In terzo luogo. Se l'incontro dei cilindri ineguali non avviene alla loro base, è evidente che il piano passante per la diagonale *BE*, (***Fig. W***) condotta dagli angoli di incontro dei loro lati *KB*, *LE* e *BN*, *EM*, e perpendicolarmente al piano passante per gli assi *aC* e *CP* sarà un' ellisse uguale in ciascun cilindro, poiché l'asse *BE* dell'Elisse è comune ai due, e l'asse coniugato *xX* è supposto pure uguale e similmente impostato; dunque la sezione sarà un'Ellisse comune ai due cilindri; poiché essa è equivalente a due uguali, come si doveva dimostrare.

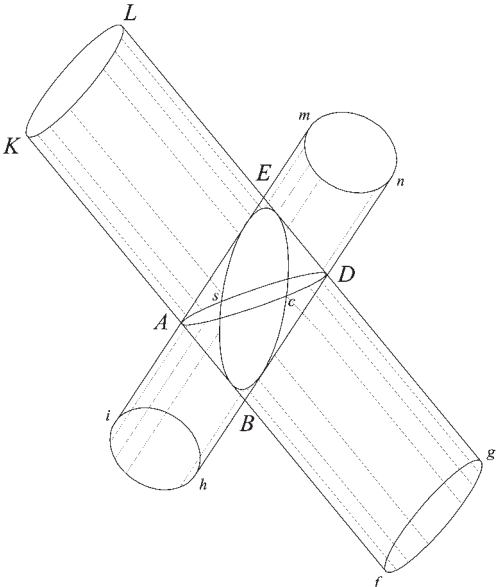


Fig. 58 I due ellissi *AD* e *BE* sono formati dall'incrocio dei due cilindri ineguali ma di ugual diametro.

120. Lo stesso sarà di sezioni di cilindri ineguali, aventi un diametro uguale, quando al posto di incontrarsi semplicemente per la loro estremità, si incrociano come nella figura 58 e si penetrano reciprocamente; poiché la sezione *EB* sarà comune ai quattro cilindri *LEBK*, *gEBf*, *hBEi*, *nBEm*, e la sezione *AD* sarà comune ai quattro cilindri *hDAi*, *LDAK* e *fADg*, *mADn*, che confinano gli uni con gli altri come nel caso precedente; dunque *BE* e *AD* sono due Ellissi. Ma se i cilindri sono ineguali, e che essi non abbiano un diametro uguale e similmente impostato, la loro sezione comune non sarà più una figura piana come dimostreremo nel teorema successivo.

Applicazione d'uso

121. Questa proposizione è fra le più necessarie per la conoscenza delle curve degli spigoli delle volte più comuni, che sono le volte a botte; essa fa vedere che quando sono della stessa altezza, qualunque sia la loro larghezza, la loro trinca di unione, è sempre un'ellisse, sia che essi vadano a finire l'uno sull'altro, perpendicolarmente o obliquamente, e allora l'angolo d'incontro è metà rientrante verso l'angolo saliente dei loro lati come da *C* a *B*, ciò che viene allora chiamato parte di volta in *Arco di Chiostro* e metà salente verso l'anglo rientrante dei lati, come da *C* a *E*, ciò che viene chiamato parte *di Volta a crociera.* Sia che le due

botti si incrocino, e allora sono tutti salienti e formano ciò che viene chiamata propriamente *Volta a crociera.*

Questa osservazione è necessaria per fare conoscere la falsità del tratto della trinca rialzata delle volte di arresto, Berlongues nel libro della Coupe des Bois di Sr. Blanchard, che fa in terzo punto non solo nella figura della tavola 17, ma anche nel discorso, poiché dice pag. 68 che le loro elevazioni …. tendono al centro supposto 18 della tavola 27.

TEOREMA XVIII

La sezione fatta dall'incontro delle superfici di due cilindri retti ineguali, i cui assi si tagliano perpendicolarmente, è un Cicloimbre.

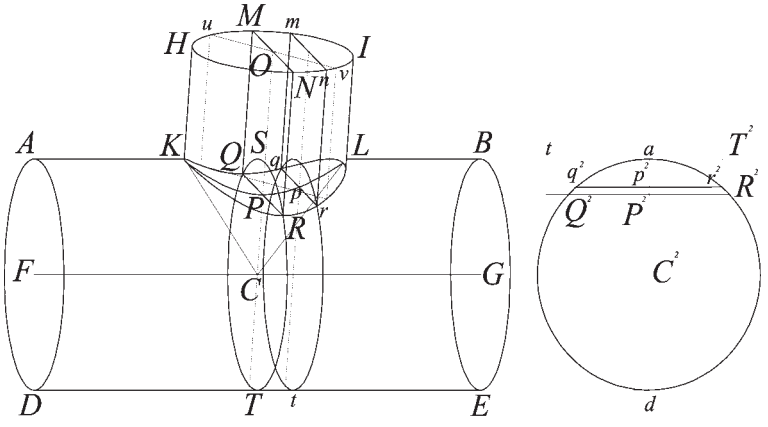


Fig. 59 L'incontro dei due cilindri, retti e ineguali, forma la figura non piana *KQLR* detta Cicloimbre.

Sia il Cilindro *ABED*, il cui asse *FG* è perpendicolare all'asse *CO* d'un altro cilindro più piccolo *HILK*, e la cui base è il cerchio *HMIN*, avendo supposto un piano che passa per i due assi, se se ne suppongono altri a lui perpendicolari e all'asse *FG*, questi piani che saranno paralleli tra loro formeranno due sezioni diverse ognuno, cioè un parallelogramma *MNQR*, nel cilindro superiore *HILK*, che essi taglieranno per l'asse, o parallelamente al suo asse, e un cerchio *QSRT* nel cilindro inferiore *ABED*, che essi taglieranno perpendicolarmente al suo asse, le quali due sezioni si incontreranno in due punti opposti *RQ*, *rq*, che saranno di conseguenza comuni alla superficie dei due cilindri, e alla circonferenza della curva, che è formata dall'intersezione delle due superfici, cosi come i punti *K* e *L*, che sono all'intersezione dei due parallelogrammi, formati dalla sezione del primo piano, passante per i due assi dei cilindri; in modo che questa curva passerà necessariamente per i punti *KRrL* da un lato, e *KQqL* dall'altro, e se si uniscono i punti opposti con le linee *QR*, *qr*, queste linee saranno perpendicolari al piano passante per i due assi dei cilindri, che li taglia in due ugualmente ai punti *P* e *p* per i quali passa l'asse curvo della sezione solida *KPpL*; dunque è facile vedere che queste ordinate sono parallele e uguali a quelle della base del cilindro *MN*, *mn*; poiché questa base *HMIN* è perpendicolare al piano passante per gli assi, come pure *QR* e *qr*, che esse sono entro stesse parallele *QM*, *RN* o *qm*, *rn* che sono i lati del cilindro,essendo nello stesso piano *MR*, o *mr*, passante per l'asse *OP*, o parallelamente a quest'asse, e se resta qualche dubbio sull'uguaglianza dei lati *MQ*, *NR*; per stabilire il parallelismo di *MN* e *QR*, non c'è che da richiamarsi all'articolo 39, dove si è fatto vedere che *MN* essendo parallela alla tangente del cerchi *QSR* per *S*, e i punti *M* e *N* essenti ugualmente distanti dal punto *O*, che è nel diametro *TS* prolungato, le parallele a questo diametro *MQ* e *NR*, terminate alla circonferenza del cerchio, saranno uguali fra loro; dunque le ordinate *QR* e *qr* sono uguali alle corrispondenti della base del cilindro negli stessi piani *MN* e *mn*. Si proverà la stessa cosa di tutte le ordinate possibili. Dunque la sezione concava *KLRQ* è quella che noi abbiamo chiamato un *Cicloimbre* dalla prima definizione, *come si voleva dimostrare.*

Non è necessario aggiungere che le ordinate di questa sezione solida non sono in uno stesso piano, poiché è evidente che esse si allontanano da quello che passerà per l'asse che sottende *KL*, via via che esse si allontanano da questi due punti, fino a metà *QR*, che risponde al diametro *MN*, perpendicolare al piano passante per gli assi dei cilindri; dunque è facile mostrare per quale ragione esse si allontanano o si avvicinano all'asse che sottende *KL*; poiché tutte le sezioni fatte nel cilindro *AE*, dai piani passanti per le ordinate della base *HMIN* al diametro *HI*, parallelamente all'asse *OP,* sono dei cerchi uguali a quello della base *AB*; segue che le ordinate della sezione solida, che sono uguali a quella della base *HMIN*, sono tante corde inscritte in un cerchio uguale alla base del cilindro *AE*, che è stato messo in seguito in *ad* dalle linee tratteggiate PP^2, pp^2 p^2; in modo che la profondità di queste corde nel cerchio è misurata dalla lunghezza delle loro fleches a P^2, ap^2 uguali a *SP*, *sp*, che fanno vedere di quanto la curva si allontani dal piano, che passerà per l'asse *KL* che sottende l'asse curva *KPpL*, a mano a mano che essa si avvicina alla metà di questi due punti comuni *KL*; in modo che esse aumentano continuamente in lunghezza in ragione di quella delle ordinate della base *HMIN*, e di profondità nel rapporto delle fleches delle doppie ordinate, inscritte nella base del cilindro *AE*; o se si vogliono prendere le ordinate per dei seni dritti, la loro profondità sarà misurata da dei seni rovesci, ciò che mostra evidentemente che tutte le doppie ordinate prese insieme, formano una superficie curva, a modo di tegola curva, più o meno profonda secondo la grandezza relativa dei due cilindri, che si penetrano perpendicolarmente; in modo che se essi sono uguali, la sezione è la più profonda possibile; poiché allora la più grande ordinata del mezzo, che noi chiamiamo asse retta, passerà per l'asse del cilindro *AE*, cioè, per il centro C^2 del cerchio aR^2dQ^2, e allora la sezione cambia di natura, e diviene piana come al teorema precedente, dividendosi in due parti, che formano un angolo rientrante *KCL*.

122. Resta da dimostrare che tutti i diametri di questa sezione solida sono uguali, cioè, tutte le linee, che, passanti per l'asse di profondità *SP*, sono terminate nella circonferenza della curva. In primo luogo è chiaro che l'asse che sottende *KL == HI* è pure uguale all'asse retto *QR == MN == HI*; poiché questi sono i diametri dello stesso cerchio *HMIN*. Lo stesso sarà dei diametri *WV* e U*u* che saranno entro stesse parallele *WU* e *Vu*, e di una stessa profondità al di sotto di *KL*, ma tutti fuori della superficie concava, formata dalle ordinate, che formano la circonferenza della sezione; poiché essi tagliano l'asse *SP*, al di sotto del centro *P*, per esempio, in *x*. Dunque per la prima definizione la sezione sarà un Cicloimbre, come si voleva dimostrare.

Corollario I.

123. Non soltanto le orinate al piano passante per *KPL*, nel quale è l'asse curvo, sono uguali alle corrispondenti ordinate al diametro *HI*, ma ancora quelle che saranno perpendicolari al piano passante per *QSR*, nel quale è l'asse retto, saranno uguali alle paralleli all'asse *HI*, corrispondenti in un piano parallelo all'asse *OP* le quali racchiuderanno una porzione cilindrica, terminata dalla curva *KRLQ*.

Quando abbiamo detto che tutti i diametri del Cicloimbre sono uguali, noi non abbiamo inteso parlare che delle linee rette, condotte da un punto della curva al suo posto passanti per l'asse di profondità *SP*; poiché se si vogliono chiamare diametri le linee curve, che passano alla superficie del cilindro per il punto *S*, e i punti opposti della circonferenza del Cicloimbre, ci si accorge bene che dei tali diametri saranno tutti ineguali in lunghezza e in curvatura, il più grande è l'arco del cerchio *QSR*, il cui asse retto *QR* è la curva, e le altre saranno delle porzioni d'ellisse, sempre meno concave a mano a mano che esse si allontaneranno da questo arco di cerchio, e che esse avvicineranno l'asse sottendente *KL*, dove l'arco ellittico si trasforma in linea retta, nella supposizione che esse passino tutte per la metà *S*; e poiché tutti questi archi inegualmente curvi , avranno per corda dei diametri retti, uguali fra loro; segue che queste curve saranno tutte ineguali in lunghezza sviluppata, cioè, rettificata.

Corollario II

124. Da cui segue che il cicloimbre, considerato come una porzione della superficie del cilindro, esteso in superficie piana, sarà un ovale, il grand'asse del quale sarà *QSR*, e il piccolo *KL*.

Corollario III

125. Segue ancora che più il cilindro *HL* sarà piccolo a confronto del cilindro *AE*, meno la sezione solida sarà concava; e al contrario, più il cilindro *HL* sarà grande a confronto del cilindro *AE*, più essa sarà concava, sia che la si consideri come porzione della superficie del cilindro, o come un'altra superficie formata da una serie di ordinate all'asse curvo *KPL*; in modo che in caso di uguaglianza, come abbiamo detto, la sezione solida diventa uguale a due metà di sezioni piane ellittiche, che si incontrano al diametro passante per l'asse *FG*; poiché allora i lati *MQ*, *NR* del cilindro *HL* divengono tangenti al cilindro *AE*, e di conseguenza non lo tagliano che in un punto ognuno, che è all'estremità del diametro del cilindro *AE*; di modo che la profondità sarà *SC*, che non può essere più grande; poiché nel caso in cui il cilindro *HL* divenisse ancora più grande, non sarà più lui che penetrerà, ma sarà penetrato dal cilindro *AE*.

Si fa notare anche che nel caso di uguaglianza dei cilindri, i piani dei semi-ellissi, che si incontrano in *C*, si tagliano ad angolo retto; poiché i raggi *KS*, *SL* e *SC* sono uguali, gli angoli immaginati in *KCS* e *LCS* sono di 45 gradi; dunque *KCL* sarà di 90 cioè retto.

Corollario IV

126. Di ciò che abbiamo detto che la profondità del cicloimbre nel cilindro, era misurata dalle fleches delle corde uguali alle ordinate al suo asse curvo, inscritte nella base del cilindro, ne deriva un modo molto facile di trovare tanti punti quanti si vorranno del suo asse curvo; poiché avendo fatto un cerchio aR^2dQ^2, e avendo a lui condotto per il punto *a* una tangente *taT*, perpendicolare al diametro *ad*, si porteranno su questa tangente le ordinate *PR*, e *pr* in *aT* e *at*, e per i punti *T* e *2* si condurranno TR^2, $2r^2$ parallele al diametro a*d*, che taglieranno la circonferenza del cerchio ai punti R^2 r^2, per i quali conducendo delle parallele alla tangente *aT*, si avranno sul diametro *ad*, che esse taglieranno, le fleches aP^2, ap^2, che sono le profondità dei punti dell'asse curvo, che corrispondono alle ordinate *MN*, *mn* della base del cilindro *HL*, uguali a quelle del cicloimbre.

Se si volessero trovare queste profondità con dei calcoli, ci si servirà dello stesso metodo che si è dato in precedenza al Teorema IX per trovare quella dell'Ellipsimbre, con questa differenza che essa è più facile in questo caso qui, perché tutte le ordinate si inscrivono in uno stesso cerchio, e che per l'Ellipsimbre di questo Teorema esse devono tutte essere inscritte in dei cerchi ineguali.

E' inutile far notare che i cicloimbres opposti sono uguali nell'immersione di un cilindro in un altro, come nella sua emersione; questa verità si fa sentire dal parallelismo dei lati dell'uno e dell'altro di questi solidi.

Applicazione d'uso

127. Non c'è niente di più comune nelle volte che la curva di cui parliamo, si vedono quasi ovunque le volte a botte in piena trinca, fori di lunette rette, pure in piena trinca, le imposte delle quali sono alla stessa altezza delle origini della volta, come sarebbero quelle della navata del Val de Grace, se le vetrate fossero perfettamente in semicerchio. Si conosce dunque da questa proposizione, che la curva dello spigolo della loro biforcazione è un cicloimbre. Questa curva non è meno comune nell'architettura militare; poiché gli spiragli circolari dei sotterranei a botte di livello e in piena trinca, e posti a piombo sulla chiave, sono dei cilindri che ne penetrano degli altri perpendicolarmente sul loro asse, tali sono ancora i pozzi delle cisterne, posti a metà delle volte, come a Phalsbourg.

TEOREMA XIX

La sezione fatta dall'incontro delle superfici di due cilindri ineguali, i

cui assi si tagliano obliquamente, e che si penetrano in modo che l'uno entri nell'altro di tutta la sua circonferenza, è un Elipsimbre.

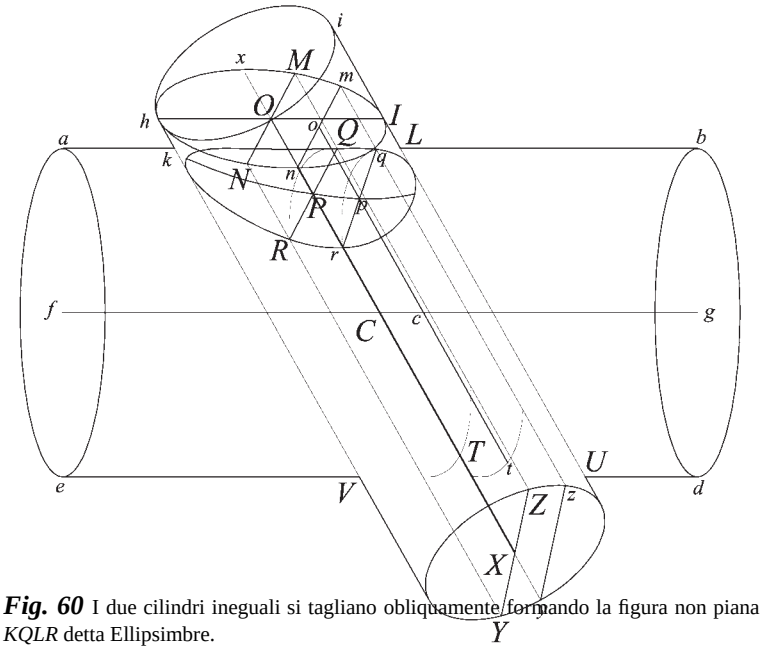


Fig. 60 I due cilindri ineguali si tagliano obliquamente formando la figura non piana *KQLR* detta Ellipsimbre.

La dimostrazione di questa proposizione è talmente simile a quella della precedente, che ci si può accorgere alla sola ispezione della figura 60. Sia *abed* un cilindro retto, il cui asse è *fg*, penetrato da un altro cilindro *hikl* più piccolo, cioè, di un diametro minore, di cui l'asse *xX*, taglia l'asse *fg* obliquamente in *C*. Avendo supposto come nella proposizione precedente un piano che passa per gli assi di queste linee, esso formerà per sezione due parallelogrammi, le cui intersezioni dei lati, che si taglieranno in *K,L,Vu* daranno i punti *K* e *L*, comuni alle due superfici. Se si suppongono altri piani perpendicolari a questo che passano per l'asse *xX*, o parallelamente a questo asse come *my*; questi piani formeranno due sezioni differenti, cioè un parallelogramma *MY* o *my*, nel cilindro *hl*, e una ellisse *SRT*, o *srt* nel cilindro *ad*, di cui le intersezioni *R* e *r* saranno comuni alla superficie dei due cilindri, cosa che è evidente. Se infine si suppone un altro piano, pure perpendicolare al primo, ma passante per *KL*, o parallelamente ad *ab* per *hI*, questo piano formerà per sezione nel cilindro *hL* una ellisse *hMIN*, di cui tutte le ordinate all'asse *hI* come *NO*, *no* saranno uguali a tutte le ordinate *RP*, *rp* della sezione solida, per le stesse ragioni, che abbiamo spiegato bene a lungo nella proposizione precedente; poiché la linea *MN* è, (per la supposizione) perpendicolare a *OC*, poiché essa è l'intersezione di due piani *hNIM*, *ONYX* perpendicolari a un terzo *hILK*, essa sarà parallela alla tangente, che passerà per il punto *S*; dunque *NR* e *MQ*, che sono parallele, essendo i lati del cilindro, e ugualmente lontane dal diametro dell'ellisse *SRT* prolungato in *O*, taglieranno questa ellisse a delle distanze uguali da *N* e *M*; dunque *RQ* sarà parallela a *NM*, essa sarà pure a lui uguale, poiché essa è entro le stesse parallele *NY*, *MZ*. Si dimostra la stessa cosa dell'ordinata *rq*, dunque tutte le ordinate all'asse curvo *KPL*, della sezione passante per *KRrL*, sono uguali a quelle dell'ellisse piana *hMIN*, corrispondenti nei piani paralleli tra loro, e all'asse *xX* del cilindro *hl;* dunque tutte queste ordinate *PR*, *pr* non sono in uno stesso piano, poiché esse si allontanano e si avvicinano all'asse che sottende *KL*, al quale esse vanno a terminare a zero ai punti *K* e *L*; dunque la loro somma forma una superficie curva, come quella del Teorema IX il cui contorno è un Ellipsimbre seguente la nostra definizione, come si voleva dimostrare.

Corollario I

128. Si devono tirare le stesse conclusioni da questo Teorema che dal precedente. I.° Che più il cilindro *hiLK* sarà grande in rapporto al cilindro *abde*, la sezione *KRLQ*, sarà più profonda; di modo che se i due cilindri divenissero uguali, essa cambierà di natura, da sezione solida che era, essa diventerà una sezione piana, composta da due ellissi, che si incontrano al diametro del cilindro *ad* passante per l'asse *fg*, al punto *C* e perpendicolarmente al piano *ad*, o sarà l'intersezione dei piani dei due semi-ellissi, ciò che ricade nel caso del Teorema XVII e della figura 58 in cui due cilindri ineguali hanno un diametro comune o similmente impostato, rispetto al piano passante per gli assi dei cilindri.

E al contrario più il cilindro *hl* sarà piccolo rispetto all'altro *ad*, meno la sezione sarà profonda; poiché le profondità dell'asse curvo sono determinate dalle fleches, le cui ordinate della sezione sono le corde inscritte in una ellissi comune, che ha per grand'asse la sezione obliqua *ST*, più le ordinate saranno piccole, meno esse entreranno nell'ellisse, dove le corde più piccole sono sempre le più lontane dal centro, lo stesso che si è detto del cerchio.

Corollario II

129. Osserveremo pure come al Teorema X, che la più grande profondità dell'Ellipsimbre, non è a metà dei punti *K* e *L*; poiché l'asse retto corrispondente al piccolo asse *MN* dell'ellisse *hMIN* è più vicino a *L* che a *K*, l'angolo *KSP* essendo più grande dell'angolo *LSP*, da cui segue che le ordinate all'asse curvo *KPL*, che sono in numero uguale a quelle dell'ellisse piana *hMIN* all'asse *hI*, saranno più strette da un lato che dall'altro, cioè da *P* a *L* che da *P* a *K*.

130. Il metodo per trovare le profondità della sezione, cioè, i punti del suo asse curvo *KPL* è esattamente lo stesso di quello del Teorema precedente; la sola differenza è che si inscrivono qui in una ellisse, che è la sezione obliqua del cilindro, le ordinate che si inscrivevano nel cerchio della base.

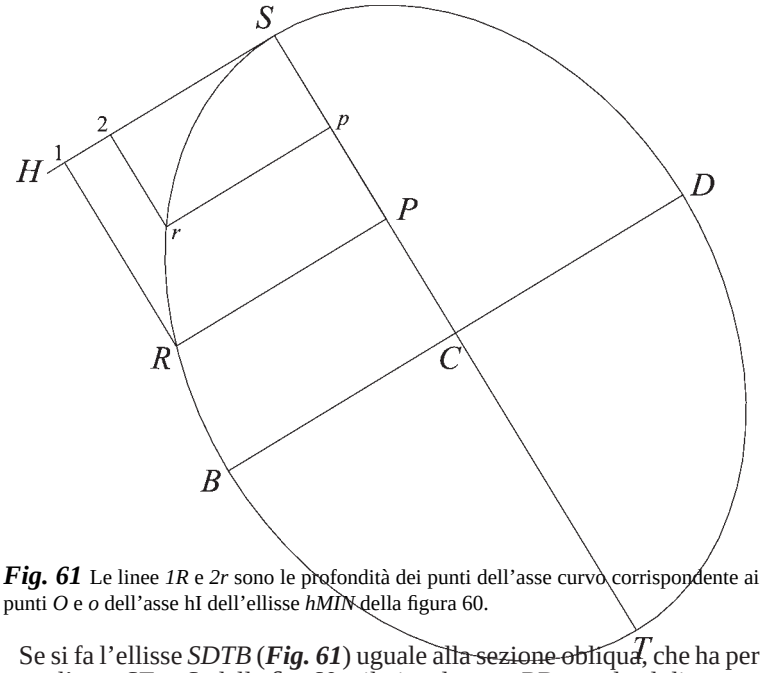


Fig. 61 Le linee *1R* e *2r* sono le profondità dei punti dell'asse curvo corrispondente ai punti *O* e *o* dell'asse hI dell'ellisse *hMIN* della figura 60.

Se si fa l'ellisse *SDTB* (***Fig. 61***) uguale alla sezione obliqua, che ha per grand'asse *ST*, o *St* della fig. 60 e il piccolo asse *BD* uguale al diametro *bd* della base del cilindro *ad*, (fig.60) segue che si faccia la linea *SH*, perpendicolare su *ST* grand'asse, *S1 ==PR* e *S2 ==pr*, che infine si conduca per i punti *1* e *2* , i segni *1R*, *2r*, parallele all'asse *ST*, che incontreranno l'ellisse *SRB* ai punti *R* e *r* , queste linee *1R*, *2r*, o le loro uguali *Sp*, *SP*, sono le profondità dei punti dell'asse curvo, corrispondente ai punti *O* e *o* dell'asse *hI* dell'ellisse *hMIN*.

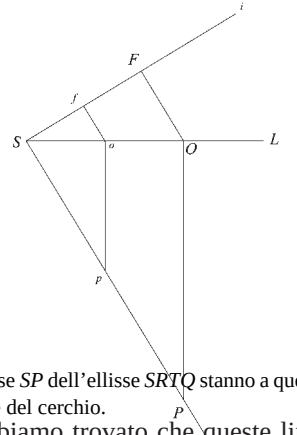


Fig. 62 Le ascisse dell'asse *SP* dell'ellisse *SRTQ* stanno a quelle dell'asse *hI* dell'ellisse *hMIN* come queste a quelle del cerchio.

Nel Cicloimbre abbiamo trovato che queste linee *SP*, *Sp* essendo i seni inversi dei seni dritti *RP*, *rp*, sono delle ascisse del diametro *ST*, le quali sono ancora per la stessa ragione che questi seni inversi ; poiché se si fa l'angolo *LSC* (***fig.62***) uguale all'angolo *LSC*, della Fig. 60 e *Si* perpendicolare su *SC*, e che si prendano su *SC* le parti *SP* e *Sp* uguali alle ascisse della fig. 61 se per questi punti *P* e *p*, si conducono *PO*, e *Po* perpendicolari alla linea *SL*, le linee *SO*, *So* saranno le ascisse di *hI*; dunque è chiaro che *SP*:*SO=Sp*:*So* a causa delle parallele *po PO*. Se infine si fa l'angolo *LSi*, uguale all'angolo *IHi*, e che si conducano dai punti *o* e *O* le linee *of*, *OF*, perpendicolari su *Si*, le linee *Sf*, *SF* rappresenteranno le ascisse del cerchio, cioè le fleches, di cui le doppie ordinate della sezione solida sono le corde, o i seni inversi delle ordinate considerate come seni dritti, le quali per la stessa ragione sono ancora; poiché *SO*:*SF=So*:*Sf=SP*:*Sp*, *come si voleva dimostrare*, cioè, che le ascisse dell'asse *SP* dell'ellisse *SRTQ* stanno a quelle dell'asse *hI*, dell'ellisse *hMIN* come queste stanno a quelle del cerchio.

Applicazione d'uso

131. Questa proposizione fa vedere qual è la curva di biforcazione di una lunetta obliqua in una botte, quando le imposte dell'una e dell'altra sono su uno stesso piano, o la curva della biforcazione, d'un pozzo o di uno spiraglio circolare, che raccorda una botte inclinata, come se ne vedono a Fort St. Jean a Marsiglia, e in molteplici fortezze.

TEOREMA XX

La sezione fatta dall'incontro delle superfici di due cilindri, di cui l'uno penetra l'altro di tutta la sua circonferenza, perpendicolarmente o obliquamente ai suoi lati, senza che i loro assi si incontrino, è un Ellipsimbre.

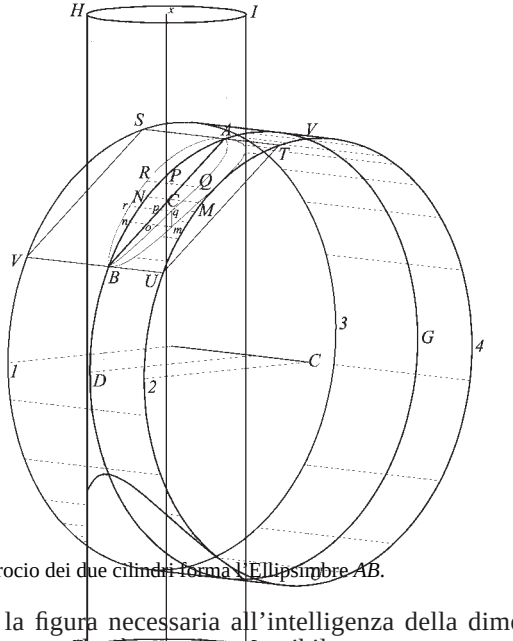


Fig. 63 L'incrocio dei due cilindri forma l'Ellipsimbre *AB*.

Per rendere la figura necessaria all'intelligenza della dimostrazione di questo teorema, il più semplice possibile, non supporremo che una parte del grande cilindro (fig. 63) fatta da due piani paralleli fra loro,

perpendicolari al suo asse, e tangenti al piccolo cilindro *HILK*, che supponiamo perpendicolare ai lati del grande cilindro, in modo tale che il suo lato *HB* cada ad angolo retto sul lato *Vu* del grande cilindro; vedremo qui di seguito che esso può cadere obliquamente senza che avvenga alcun cambiamento alla sezione solida.

Se (come in tutte le proposizioni precedenti) iniziamo per supporre un piano passante per l'asse del piccolo cilindro *HL*, e perpendicolarmente a quello del grande, vedremo che esso formerà due sezioni differenti, cioè un parallelogramma *HILK* nel piccolo e un cerchio *DVGU* nel grande, che si taglieranno ai punti *AB*, *EF*, i quali saranno di conseguenza comuni alle due superfici dei cilindri. Se per due di questi punti *A* e *B*, si fa passare un secondo piano parallelo all'asse del grande cilindro, esso formerà così due sezioni differenti in questi due corpi; cioè un parallelogramma *STUV* nel grande, e una ellisse *AMBN* nel piccolo, che esso taglia obliquamente, il grand'asse del quale sarà *AB* e il piccolo *MN*, uguale al diametro della base *HI*, e i lati del parallelogramma *STUV* saranno tangenti a questa ellisse all'estremità dei suoi assi, e di conseguenza al di fuori del cilindro; dunque non può essere la sezione comune alle due superfici; l'ellissi *AMBN* non può cosi essere una sezione comune, poiché essa è tutta all'interno della superficie del grande cilindro, con la quale essa non ha in comune che i punti *A* e *B*; dunque la sezione comune fatta dall'incontro delle superfici, sarà una curva diversa da queste due figure con le quali essa deve per altro avere i punti *A* e *B* comuni, di conseguenza essa non sarà in un piano, ma una curva a doppia curvatura, essa avrà pure tutte le ordinate al suo asse curvo eguali a quelle dell'ellisse, che è la sezione obliqua del piccolo cilindro per i punti comuni *A* e *B*.

Per trovare i punti per i quali passa quest'asse curvo, è più facile in questa proposizione che in tutte le precedenti Ellipsimbres; poiché esso non è una curva sconosciuta, ma un arco di cerchio *APB*, che è porzione di quello della superficie del grande cilindro, tagliato da un piano perpendicolare al suo asse, e passante per i punti *DBAV*, se il cilindro *HL* cade perpendicolarmente sui lati del grande.

O in un altro caso quest'arco curvo sarà una porzione dell'ellisse, fatta da un piano passante per l'asse del cilindro *HL*, e tagliante obliquamente il grande cilindro per i punti *A* e *B*.

Siano i punti *RQ* e *rq* l'incontro delle due superfici, le ordinate condotte da questi punti alla curva della sezione solida, saranno dunque sulla superficie del grande cilindro, di cui esse saranno parte dei lati, tali sono qui *PR*, *pr*, le quali saranno parallele e uguali alle corrispondenti *NC*: *no* nell'ellisse piana *AMBN* su dei piani paralleli all'asse *xX*; poiché le linee passanti per questi punti *NR*, *nr* parallelamente all'asse *xX* sono delle parti di lati del cilindro *HL*; di conseguenza parallele fra loro; ma poiché le doppie ordinate *NM*, *nm* sono parallele all'asse del grande cilindro, esse lo saranno pure ai lati dello stesso cilindro; dunque *RM* e *rm* sono dei parallelogrammi, di conseguenza *rq* ==*nm*, e *RQ* == *NM*; cioè, che le ordinate o doppie ordinate della sezione solida, sono uguali a quelle dell'ellisse piana, il grand'asse della quale è il sottendente dell'asse curvo *BPA*; dunque la sezione è una Ellipsimbre, come si voleva dimostrare.

Corollario I

132. Da qui segue che questo Ellipsimbre è molto più perfetto e più semplice di quello delle proposizioni precedenti; più perfetto in quanto il suo asse curvo è una porzione regolare di cerchio o d'ellisse; e più semplice in quanto le sue ordinate non sono una superficie differente da quella del cilindro grande, come nelle Ellipsimbres precedenti; e di conseguenza il centro *P* di questa sezione si trova sulla superficie del cilindro, dove è anche l'asse retto *RQ*, che lo divide ugualmente in due . Tutti gli altri diametri curvi, che passeranno per il centro *P* saranno delle porzioni di ellissi, le cui corde saranno i diametri retti della sezione, uguali anche a quelle dell'ellisse piano soggiacente *AMBN*.

Per il resto questa Ellipsimbre ha tutte le proprietà delle altre, le sue ordinate, per esempio, sono più strette da un lato che dall' altro, eccetto che esso è ancora più semplice nelle profondità del suo asse curvo, le quali si trovano naturalmente facendo di un punto dato sull'asse sottendente *ab*, messo alla base della figura 63. l'angolo *poa* o *PCa* uguale a quello dell'asse *xX*, con la linea *AB*, e tutte le linee parallele a *PC*, o *po* andranno a terminare nell'arco del cerchio *bPA* della base del grande cilindro, se il piccolo lo attraversa perpendicolarmente ai suoi lati, o ad un arco d'ellisse *bPA*, se esso lo attraversa obliquamente, come dalla figura 64 se si vuole avere le profondità perpendicolari all'asse sottendente *ba*, sarà ben facile abbassare delle perpendicolari *pd*, *PD* su questo asse, esse daranno queste profondità.

133. Non ci resta da far vedere che sia che il piccolo cilindro attraversi il grande perpendicolarmente ai suoi lati, come noi l'abbiamo supposto (fig. 63) sia che lo attraversi obliquamente, la sezione sarà sempre un Ellipsimbre, ciò che è abbastanza chiaro di per se stesso; poiché sia che il lato *HB* cada in un modo o nell'altro su *VB*, il piano *VSTU* formerà sempre un parallelogramma nel cilindro grande, e una ellisse *AMBN* nel piccolo, la sola differenza è, che la linea *AB* (fig. 63) è necessariamente il grande asse dell'ellisse, e che se il cilindro *hL* (fig.64) è obliquo sul lato *AB* del grande cilindro, essa può diventare il piccolo asse.

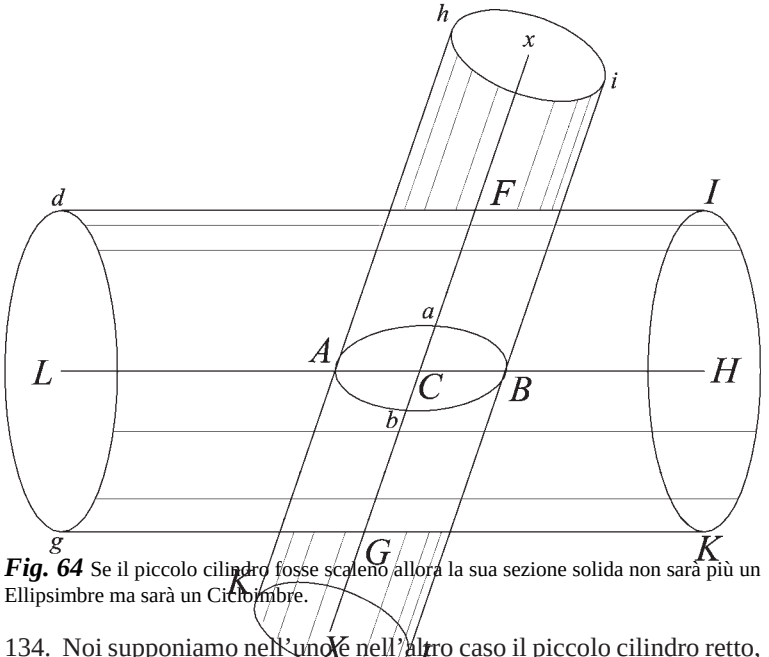
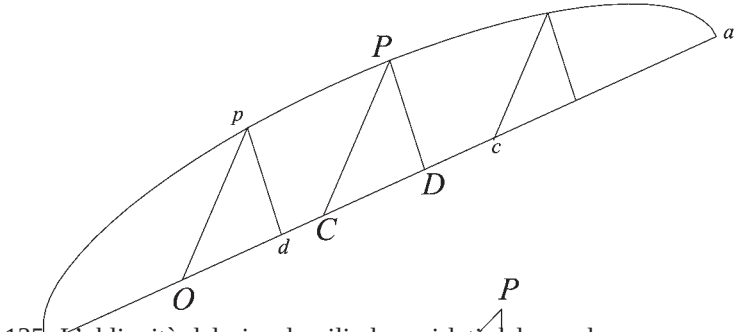


Fig. 64 Se il piccolo cilindro fosse scaleno allora la sua sezione solida non sarà più un Ellipsimbre ma sarà un Cicloimbre.

134. Noi supponiamo nell'uno e nell'altro caso il piccolo cilindro retto, se esso fosse scaleno, il piano *VSTU* potrebbe tagliarlo in modo che la sua sezione non sarà più una ellisse, ma un cerchio(Fig. 64), e allora la sezione solida non sarà più un Ellipsimbre, ma un Cicloimbre; poiché l'asse sottendente *ba* sarà uguale all'asse retto *AB*, e tutte le ordinate della sezione solida e della piana parallele e uguali, i diametri retti saranno uguali tra loro, ciò che è la proprietà del Cicloimbre, che ne costituisce la differenza con Ellipsimbre dove essi sono tutti ineguali.



135. L'obliquità del piccolo cilindro sui lati del grande, causa ancora una differenza nella maniera di trovare le profondità perpendicolari della sezione solida sulla sezione piana. In primo luogo, in quello che al posto di un arco di cerchio per il suo asse curvo, bisogna trovare l'arco dell'ellisse formata dall'obliquità del piano passante per l'asse del piccolo cilindro, della quale il grande asse sarà *FG* e il piccolo *hi* base del cilindro piccolo; ma non è sufficiente d'aver trovato quest'arco *ba*, poiché le perpendicolari *pd*, *PD*, sulla corda *ba*, non sono perpendicolari al piano *VSTU* della fig. 63, il quale è parallelo all'asse del grande cilindro, poiché la linea *PD*, e la parallela *pd* è ancora inclinata al lato del cilindro grande *dk*, di modo che per trovare questa inclinazione bisogna fare a parte l'angolo *PDy* uguale all'angolo *FCH* o *xCH* dell'asse *xX* con il lato *LH* del cilindro grande, la perpendicolare *Py* sul lato *Dy* sarà la profondità che si cerca.

Corollario II

136. Da cui segue come al Teorema X, che più il lato *HK* del cilindro piccolo s'avvicinerà all'estremità *D* del raggio *CD*, perpendicolare all'asse *xX*, più la sezione sarà allungata, e più le sezioni opposte *AB*, *EF* si avvicineranno, di modo che se il lato *HK* diventa tangente al cerchio *DVGU*, le sezioni si toccheranno al punto *D*, e che infine se esso è fuori dal cilindro grande, esse si troncheranno reciprocamente, e la sezione totale sarà composta da due porzioni di Ellipsimbre, come avevamo detto altrove.

Applicazione d'uso

Questa proposizione fa conoscere quale è la curva degli spigoli delle lunette rette o oblique, la cui origine è al di sopra delle imposte di una volta a botte, nella quale esse sono praticate, sia che le loro chiavi non salgano all'altezza di quelle della botte, come sono quelle della navata della Val de Grace a Parigi, e della Cappella di Versailles, sia che le loro chiavi siano di livello, come alle traverse del Rampart de Landau alla modanatura delle torri bastionate, che è il caso del secondo corollario, dove il lato del piccolo cilindro *HK* diviene tangente al grande al punto *D*; allora si forma una volta a crociera deforme nel fatto che esse non possono essere tracciate in linee dritte nelle diagonali, come nelle volte a crociera, le cui chiavi, e le cui imposte sono di livello. In effetti in queste, le intersezioni sono delle ellissi piane, come noi avevamo dimostrato al Teorema XVII e nell'altro caso queste sono degli Ellipsimbres, cioè, delle curve a doppia curvatura, che non possono essere tracciate in linea retta, in qualunque situazione che lo spettatore si possa mettere.

Se invece di fare attenzione agli incontri delle superfici concave dei due cilindri, si considera la convessità dell'uno e la concavità dell'altro, si riconoscerà la curva di incontro di una torre rotonda in volta a botte, o se ci si vuole soffermare a delle piccole opere, si noterà che è quella di una colonna rotonda Gotica, che collega un Capitello ottagonale in una modanatura di cavetto; come si vede di solito nelle antiche chiese fra la navata centrale e le laterali.

Si può dare un grande numero di altri esempi di costruzioni che hanno rapporto a questo Teorema, come sono le finestre a strombatura cilindriche, che illuminano le volte a botte, da una direzione che non tende ai loro assi, come sono quelli dei sotterranei a volta delle torri bastionate di Landau, le quali sono fortemente ribassate nel loro orifizio, cioè, che queste sono dei cilindri scaleni, i cui incontri con i cilindri retti delle botti, sono delle curve a doppia curvatura in Ellipsimbres.

Si vedrà al quarto libro, quando daremo i tratti delle volte di scale oblique che raccordano una volta a botte, l'uso del piccolo triangolo *DPy* che è sotto la figura 63 per trovarne la doppia obliquità.

TEOREMA XXI

La sezione fatta dall'incontro delle superfici di due cilindri, di cui l'uno penetra l'altro solo per una parte della sua circonferenza, e i cui assi non sono paralleli, è un Ellipsimbre composto.

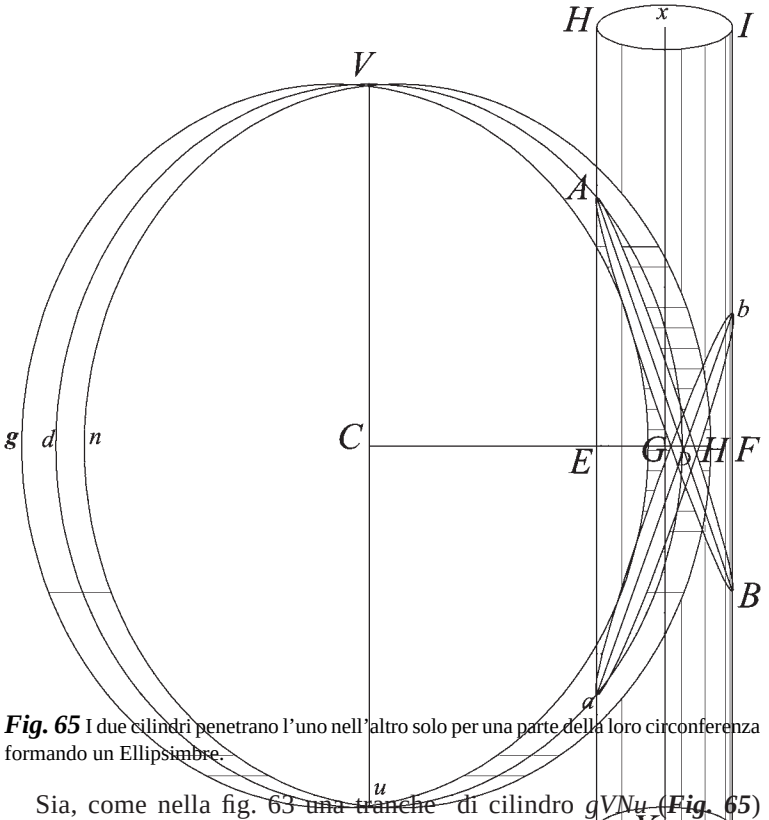


Fig. 65 I due cilindri penetrano l'uno nell'altro solo per una parte della loro circonferenza formando un Ellipsimbre.

Sia, come nella fig. 63 una tranche di cilindro *gVNu* (***Fig. 65***) rappresentata in prospettiva, la quale è penetrata dal cilindro *HL*, che non vi entra che in parte della sua circonferenza, il lato *IL* essendo fuori dal grande cilindro; dico che la sezione formata dall'incontro delle loro superfici sarà composta da due porzioni d'Ellipsimbre.

Poiché se si suppone un piano passante per l'asse *xX* del cilindro piccolo perpendicolarmente all'asse del grande, formerà nell'uno un parallelogramma, e nell'altro un cerchio, i quali tagliandosi ai punti *A* e *a* denoteranno che questi punti sono comuni alle due superfici dei cilindri, e se per il punto *D*, equidistante dai punti *A* e *a*, preso sulla circonferenza del cerchio *udVD*, si fanno passare due piani taglianti i due cilindri per i punti *A* e *a* parallelamente all'asse del grande cilindro, essi formeranno ognuno due sezioni differenti, cioè un parallelogramma nel cilindro grande, e una ellisse nel cilindro *HL*, la quale sarà in parte fuori dal grande cilindro, e poiché questi piani si incrociano in *D*, la loro comune intersezione *GH* sarà un'ordinata comune alle due ellissi *AHBG* e *aHbG*; ma poiché la sezione comune alle due superfici dei cilindri, che si tagliano, è un Ellipsimbre, per il teorema precedente, segue che ogni sezione piana ellittica corrisponderà a due porzioni di Ellispimbre, che si troncheranno scambievolmente, come le ellissi con le ordinate, con le quali esse hanno un rapporto d'uguaglianza, nei piani paralleli all'asse *xX*, e perpendicolare al piano passante per i punti *ADa;* dunque la sezione totale sarà composta da due porzioni di ellipsimbre, come si voleva dimostrare.

Peraltro poiché per la proposizione precedente la sezione solida può essere un Cicloimbre, nel caso in cui il cilindro, che ne penetra uno più grande, è scaleno, può anche accadere che la sezione totale sia un Cicloimbre composto.

137. Qualunque sia la sezione, se si vuole trovare l'ordinata comune alle due curve alla quale esse si terminano reciprocamente al loro angolo di inflessione, non c'è che da condurre dal centro *C* della sezione circolare del cilindro *dVDu*, la figura *CF* perpendicolare sull'asse *xX*, la quale taglierà i lati del cilindro *HL* in *E* e *F*; su *EF* come diametro, avendo fatto il mezzo cerchio *ETF*, si eleverà dal punto *D*, sezione delle linee *AB*, *ab*, la perpendicolare *DT*; questa linea che bisogna immaginare stesa sui lati del grande cilindro, parallelamente al suo asse, sarà l'ordinata che si cerca; poiché il punto *T* e il suo opposto al diametro, passante per l'asse *xX* del cilindro *HL*, saranno alla sua circonferenza, poiché questo cerchio *ETF* è uguale alla base, e che la linea *DT* è alla superficie del grande cilindro, benché dalla necessità di unire nella figura i piani che si suppongono perpendicolari fra loro, essa non paroisse nella sua situazione, che sarebbe quella di *DH*, e il suo doppio in *GH*.

Corollario

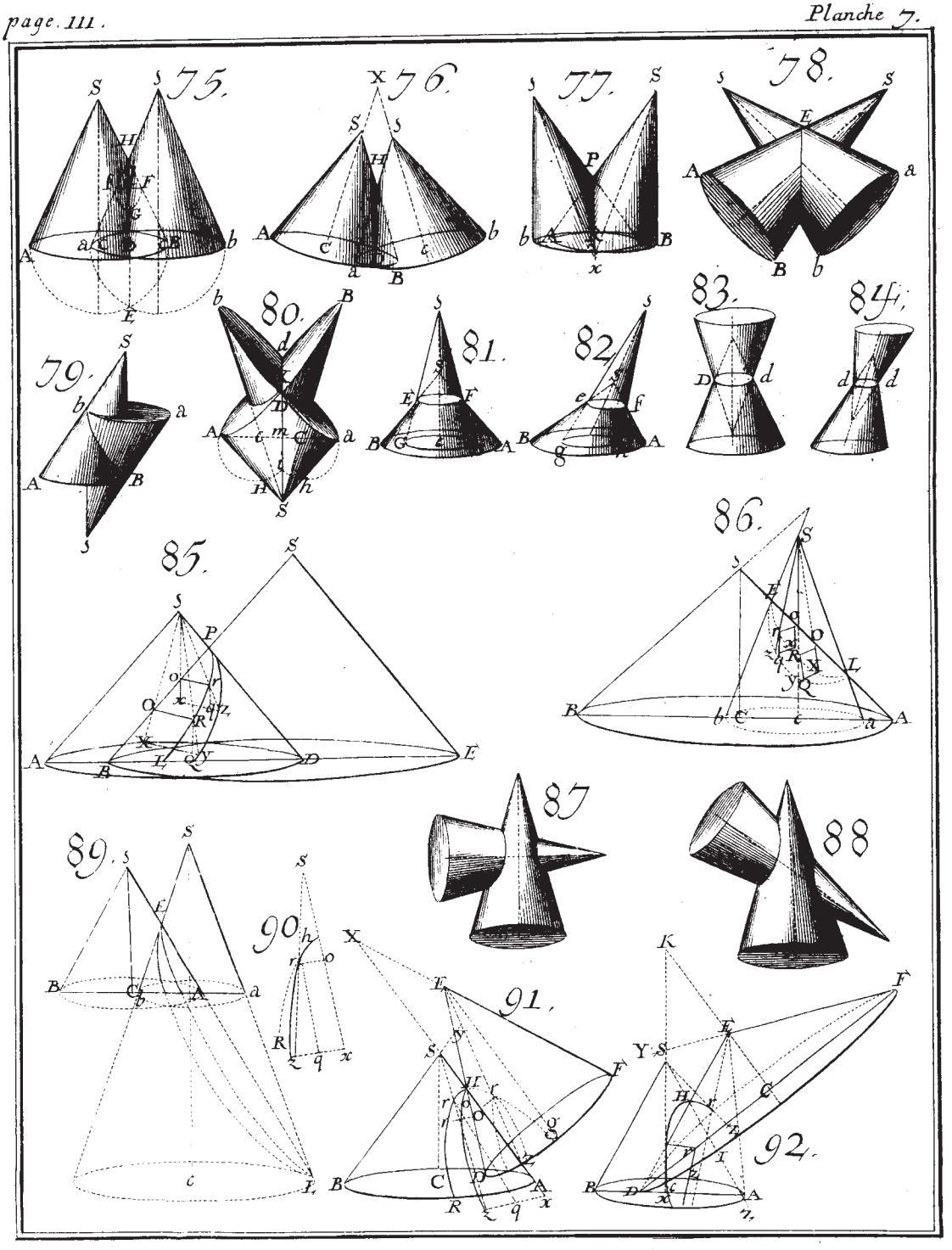
138. Si tirerà la stessa conclusione della differenza delle inflessione di metà dell'Ellipsimbre composto, che nella proposizione II cioè che più e meno il cilindro *HL* entrerà nell'altro, più l'inflessione sarà evidente, che più il punto *D* s'avvicinerà all'asse, meno sarà evidente, e che dal punto *D* verso *F* formerà un angolo saliente e al contrario da *D* verso *E*, formerà un angolo rientrante.

Applicazione d'uso

139. Si vede da questa proposizione qual è la curva di biforcazione di una torre rotonda, che raccorda una volta a botte di livello, o inclinata; e che non è possibile sopprimere i muri della torre sotto questa biforcazione, quando essa penetra la volta a botte al di là della chiave, poiché diventando saliente l'angolo d'inflessione, le *controchiavi* dell'arcata, che dovrebbero supportare la torre, spingeranno al vuide al contrario al di qua della chiave, sarà facile far sostenere la torre da un'arcata; poiché l'angolo d'inflessione è rientrante, e fa l'effetto di una volta in terzo punto.

OSSERVAZIONE

140. E' certo che le sezioni dei cilindri fra loro sono le più necessarie da conoscere; poiché le più comuni di tutte le volte sono quelle a botte circolare, o rialzate o ribassate; dunque qualunque siano le trinche dei loro *archi retti,* cioè, delle sezioni perpendicolari ai loro assi, tanto che essi non varieranno che dal cerchio all'ellisse, o da un ellisse ad un'altra più o meno allungata, non avverrà alcun cambiamento nella natura delle curve, che si formeranno dalle intersezioni delle loro superfici, poiché i cilindri rialzati o ribassati sono dei veri cilindri, i quali al posto di essere retti, sono scaleni; di modo che essi possono sempre essere tagliati, in modo che essi avranno per base un cerchio, come abbiamo detto nelle sezioni cilindriche, cosa che non è inutile ripetere, al fine che se ne faccia attenzione nella pratica.


page. 111.
Planche 7.
75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87
88
89.
90.
91.
92.

CAPITOLO VII

Delle sezioni fatte dalla penetrazione dei coni tra loro.

Un cono può essere rispetto ad un altro cono di grandezza diversa e in posizione diversa; da qui nascono i casi che cambiano la natura delle sezioni formate sulle loro superfici, dalla loro intersezione mutua.
La combinazione della loro situazione rispettiva può variare molto più di quella dei cilindri tra loro, i quali fanno dei solidi più semplici, e di cui le sezioni non possono che essere di tre specie; quelli dei coni invece possono essere di cinque specie, che danno nove combinazioni, scartando quelle inutili. Non dubito però, che non si possa trovare una formula generale, che comprenderebbe tutti i casi delle sezioni solide, che si possono avere tramite la penetrazione di coni tra loro, in qualsiasi situazione che siano i loro assi e i loro lati, gli uni riguardo agli altri, bisogna augurarsi che qualche Sapiente Algebrista voglia lavorarci. Il celebre M. BERNOULI di Basilea, che ha dato un' occhiata a questa piccola Opera, e ha dato delle istruzioni sulla Curva della sezione dell'Anello, mi ha detto che il calcolo per la formula generale dell' intersezione dei coni era più lungo che difficile, per me che lo trovo al di sopra delle mie forze, mi accontenterò di quello che la geometria lineare ci potrà indicare, seguendo il nostro metodo ordinario, della supposizione dei piani tagliando questi corpi in diversi modi, e paragonando le sezioni piane a quelle solide; e benché non ne approfondisca la Teoria, fornirò i mezzi necessari alla pratica per trovare le curve con quello della proiezione, cosa che basta al progetto di questa Opera , in cui ci siamo limitati alle conoscenze che devono essere di qualche uso in Architettura. Posso anche dire che gli incontri delle arcate coniche tra loro sono dei casi assai rari, come si vedrà al quarto Libro; però non lasceremo niente da parte di quello che può essere pratico, benché non possiamo dare qui una teoria completa su questa materia; qualche sapiente potrà forse supplire a quello che manca qui per la curiosità.

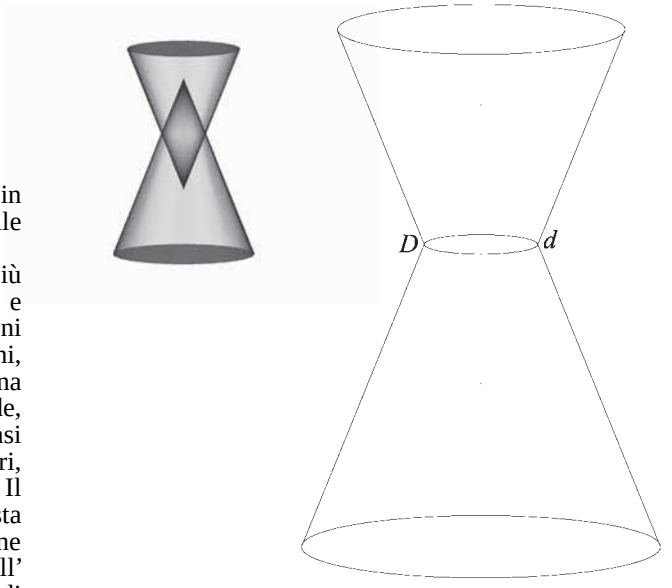


Fig 83. *Intersezione di coni con asse coincidente e vertice*

TEOREMA XXVII

Le Sezioni prodotte dalla penetrazione di due Coni uguali, ove gli Assi (se sono Retti) ed i lati simili (se sono Scaleni) s'intersecano a distanza uguale al loro Vertice, formano delle Sezioni Piane.

Questo Teorema contiene sette combinazioni di posizione di coni che si intersecano, quando hanno l' Asse comune e sono girati in senso contrario.

1.°QUANDO i loro assi si confondono e sono girati in senso contrario, come nella fig. 83.

2.° QUANDO i coni sono retti e i loro assi paralleli tra loro, come nella fig. 75

3.° QUANDO i loro assi sono inclinati tra loro, ed essendo prolungati si incontrano al di sopra dei vertici, come nella fig. 76.

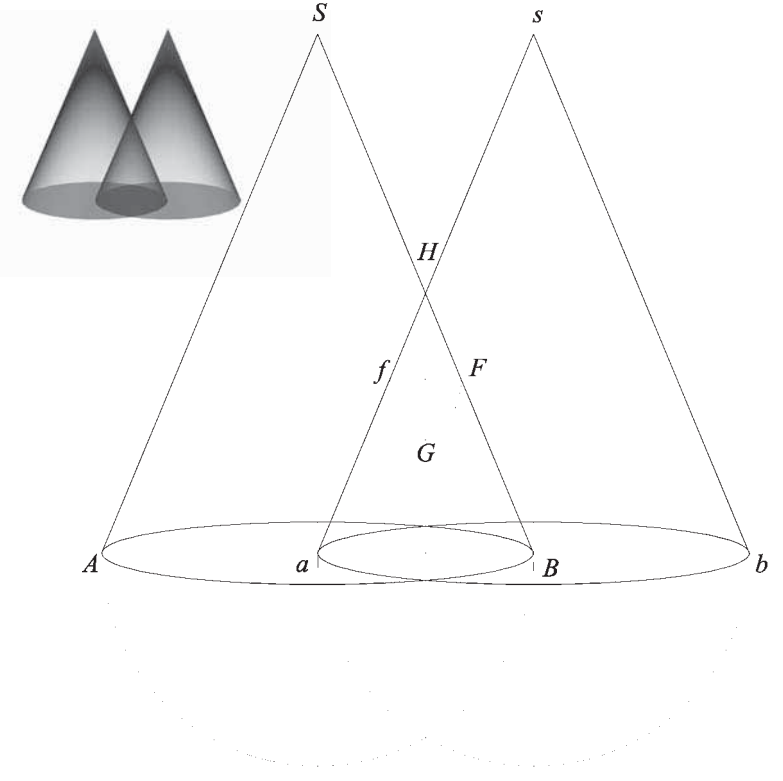


Fig 75. *Intersezione di coni ad asse parallelo*

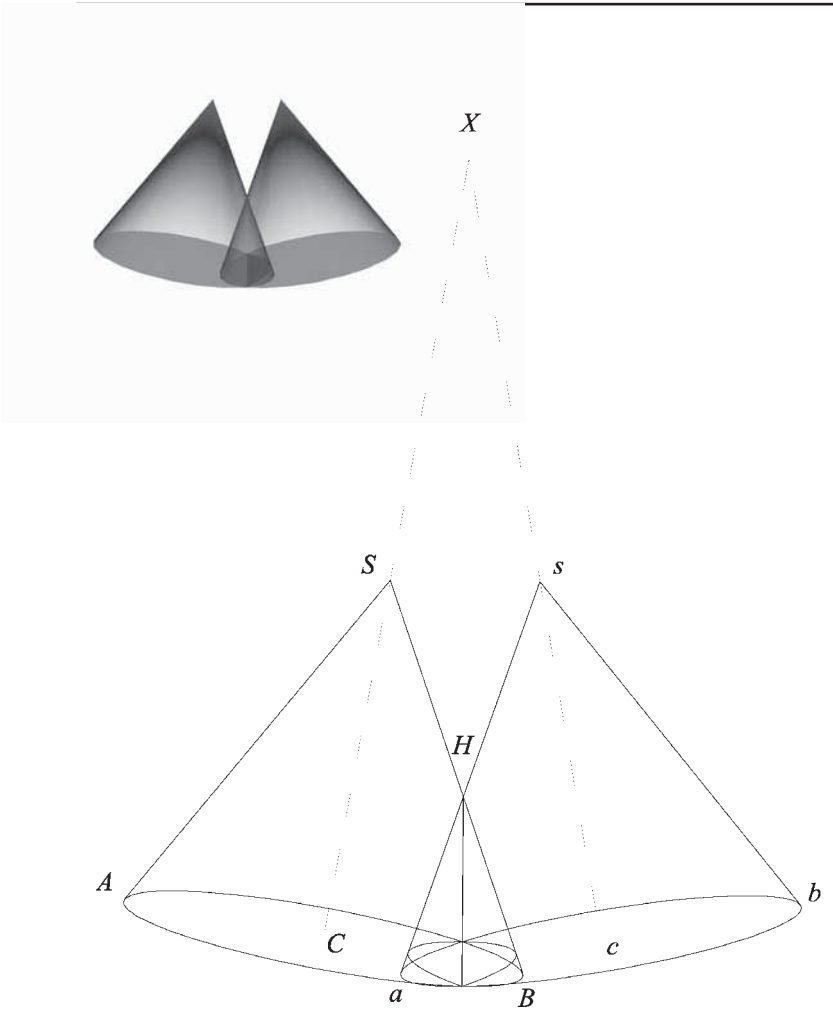


Fig 76. *Intersezione di coni con assi che, se prolungati, si intersecano al di sopra dei vertici*

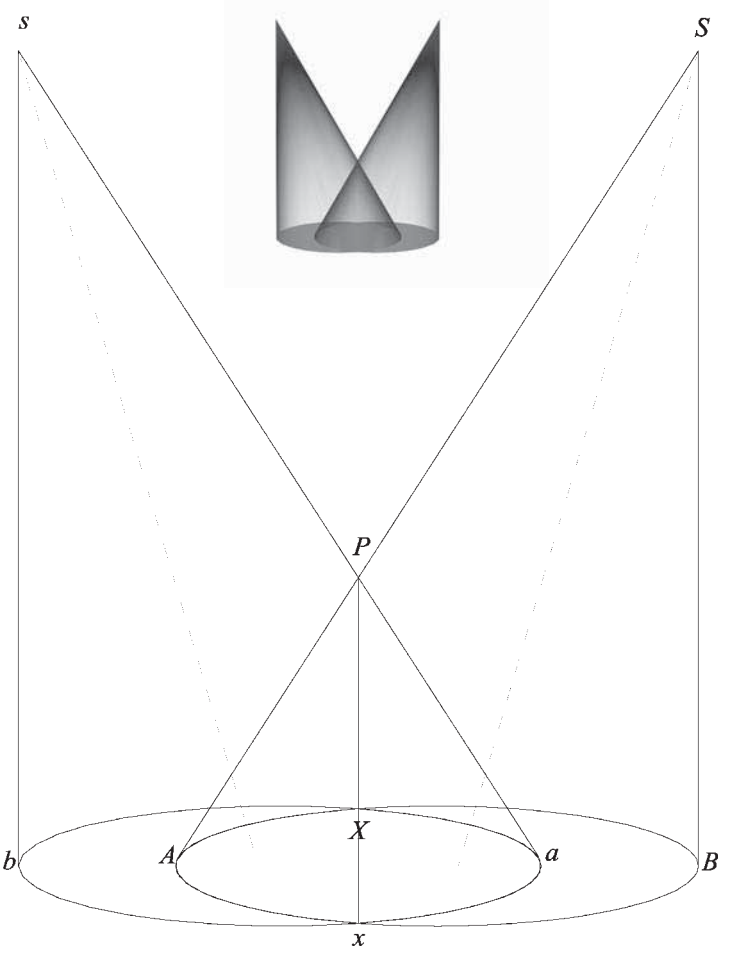


Fig 77. *Intersezione di coni scaleni con assi che si incontrano al di sotto dei vertici vertici*

4.° QUANDO, essendo inclinati essi si incrociano al di sotto dei vertici; e quando i lati opposti sono paralleli tra loro, come nella fig. 77.

5.° QUANDO essi si incrociano al di sotto dei vertici, e quando i quattro lati si intersecano, come in fig. 78.

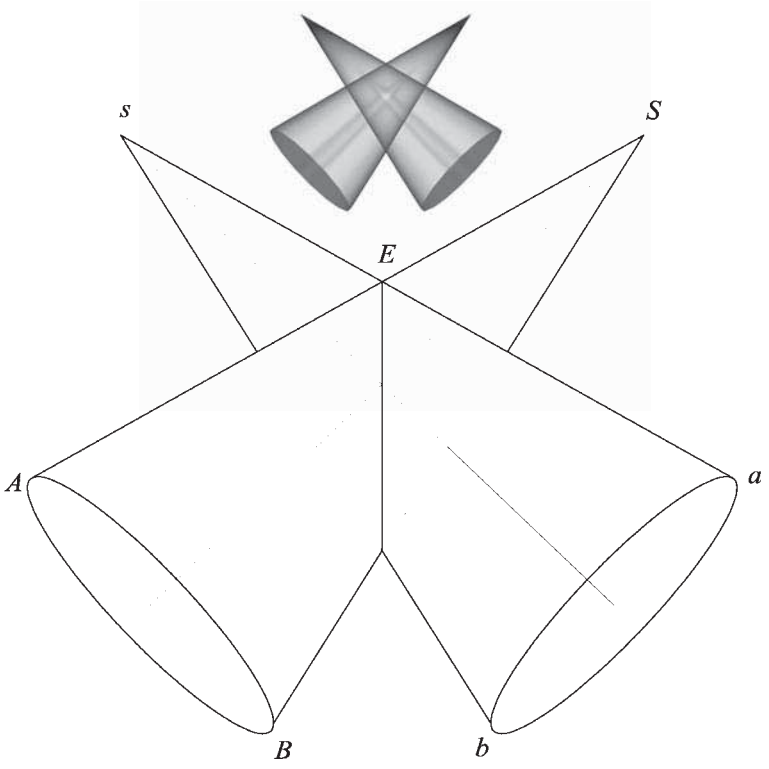


Fig 78. *Intersezione di coni con assi che si incontrano in un punto interno.*

6.° QUANDO, i coni essendo scaleni, i lati simili e opposti sono paralleli tra loro, ma girati in senso contrario, il vertice di uno dalla parte della base di quell' altro, come nella fig. 79.

7.° QUANDO essendo anche scaleni, essi sono girati in senso contrario, soltanto riguardo alla base, e che hanno un asse comune, come nella fig. 80.

Al secondo e terzo caso le sezioni *HD* è un' iperbole, al quarto una parabola, al quinto *EL*, al sesto *bB* un' bellissimi, al settimo, *SDd* un triangolo isoscele.

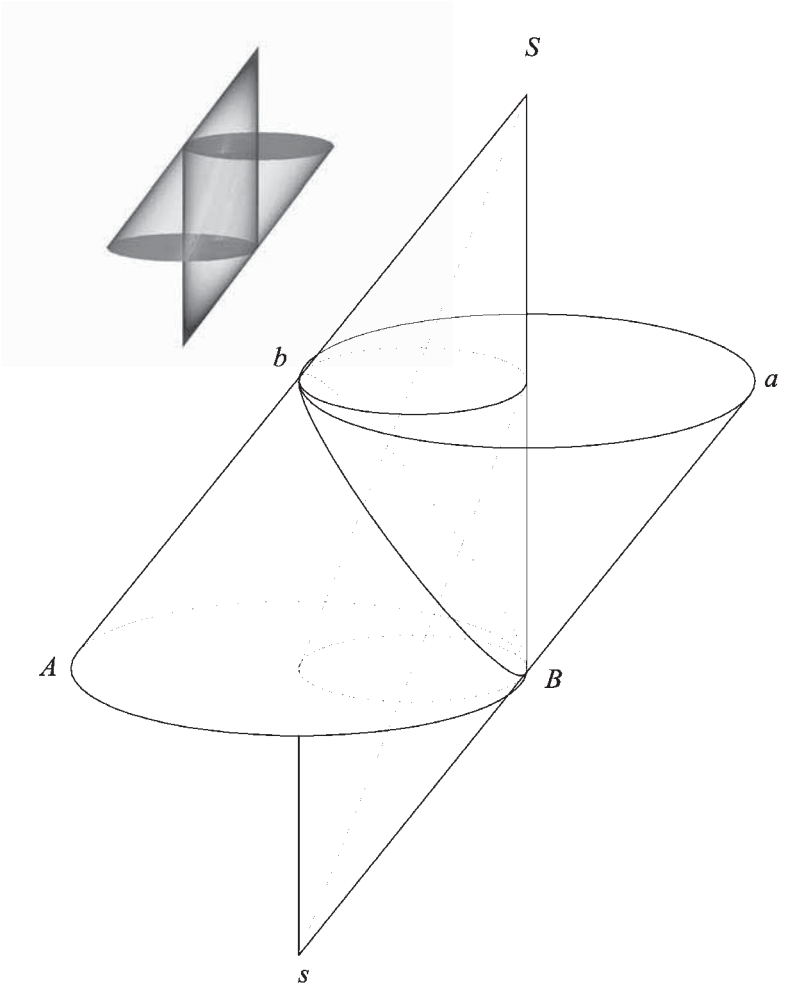


Fig 79. *Intersezione di coni scaleni con lati e assi paralleli*

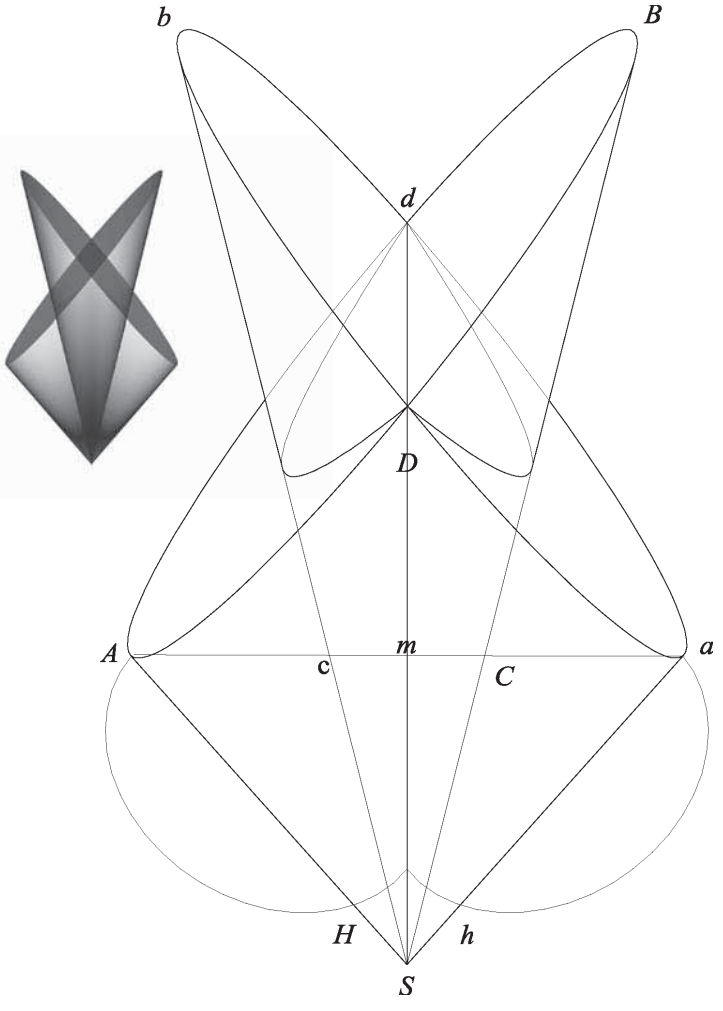


Fig 80. *Intersezione di coni scaleni in cui l' asse di uno coincide con il lato dell' altro e viceversa*

DIMOSTRAZIONE

Se si suppone un piano passante dagli assi dei due coni, farò per supposizione due triangoli simili e uguali *ASB, asb*, e se un secondo perpendicolare al primo, lo interseca nel punto di intersezione dei lati *SB, sa*,e degli assi *CX, cX* in *X*, oppure parallelamente agli assi, se sono paralleli tra loro come cerchio uguali in fig. 75, è chiaro che ritaglierà dei segmenti di cerchio uguali *DEa*, *DEb*, in ogni base del cono; poiché le absidi *Da, Db*, che sono le frecce degli archi, sono uguali per via della supposizione; quindi tutti gli archi di questi segmenti di cono, paralleli a quelli della base comune *fG, FG*, saranno ancora uguali tra loro, perché saranno intersecati nello stesso modo in ogni cono alla stessa distanza dalla base; quindi non avanzeranno né più né meno da un lato che da quell' altro; e di conseguenza giungeranno allo stesso piano, che farà due sezioni uguali, una a destra in un cono, e una a sinistra sull' altro, o per meglio dire una sezione equivalente a due.

QUANTO alla figura della sezione, è visibile che sarà determinata dalla posizione del piano intersecando perpendicolarmente i triangoli degli assi, come se non ci fosse che un solo cono, poiché la posizione riguardo all' altro è supposta uguale.

Applicazione all' uso

Questa proposizione, considerata 1.° al secondo e terzo caso, fa vedere quali sono gli spigoli di intersezione di *crenaux* (assi), paralleli, convergenti e divergenti, giunti insieme in una sola apertura interna, come se ne vedono in alcuni vecchi Castelli, e nelle Fortificazioni moderne alle Rotonde del Lussemburgo e altrove. 2.° Al quarto e quinto caso dei coni uguali, dove gli assi e i lati si incrociano, si vede quale è la curva, che si forma all' angolo rientrante degli inforcamenti delle arcate sferiche, chiuse in poligoni, alle loro diagonali nel metodo del *Tratto*,che suppone dei coni tronchi, iscritti nella sfera per formarci dei Pannelli di sviluppo, come vedremo al capitolo settimo del quarto libro, ove faremo vedere in cosa consiste l' errore del tratto del P. DERAN e del P. DECHALLES che lo ha seguito, e che M. de La Rue, che l' ha conosciuto pressappoco non ne ha percepito la ragione. 3.° Al sesto caso, questa proposizione fa vedere quale sarebbe la curva di spigolo di intersezione di un *corne de Vache double* di inforcamento di una Corna di Vacca doppia esattamente fatta, come se i suoi piedritti ossero quelli di uno passaggio sbieco. 4.° Al settimo caso fa vedere che le Trombe coniche, che tutti gli Autori del taglio delle Pietre mettono agli angoli delle Scale, sospesi a riposo, sono un composto di due coni, che fanno un *Jarret* in chiave, nell' angolo aggettante; poiché la sezione per i punti A e *a*, fatta da un piano perpendicolare ai due triangoli per l' asse comune *SX*, fa due Ellissi, una *AC* nel cono scaleno *ASB*, l' altro cono uguale *Sab*, le quali si incrociano in m o in i entro i due assi *cH* e *Ch*, cosicché questa sezione è una curva composta, così come è rappresentata in *AHiba*, e in proiezione per la retta *Acmla.*

TEOREMA XXVIII

La Sezione fatta dall' intersezione di Coni Retti diversi, di cui gli assi si confondono, oppure di Coni Scaleni diseguali, di cui gli Assi si confondono, e sono ugualmente inclinati rispetto alle loro Basi, è un Cerchio.

La verità di questa proposizione si presenta da se, e non ha bisogno di dimostrazione; poiché le sezioni piane, parallele alla base per i punti comuni *EF* e *Dd, dd*, sono dei cerchi comuni ai due coni, sia che le basi siano confuse come nelle figure 81 e 82, oppure parallelamente lontane come nelle figure 83 e 84.

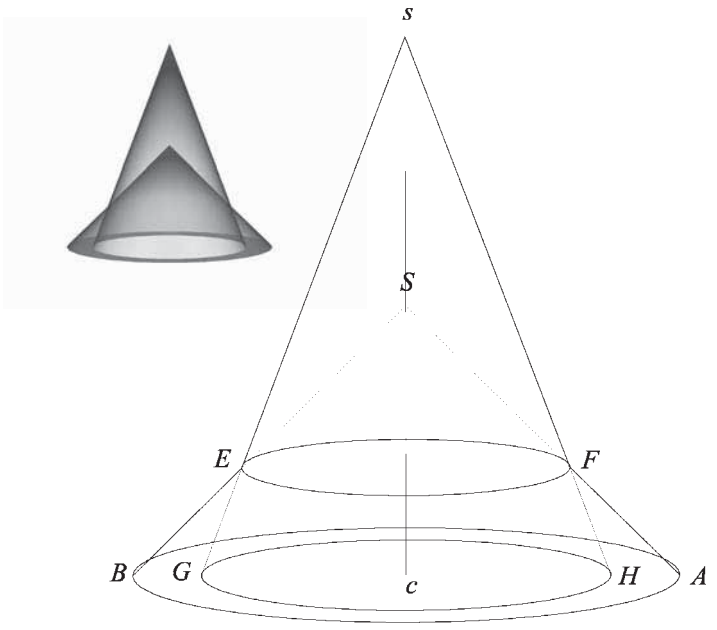


Fig 81. *Intersezione di coni in cui si confondono le basi e gli assi.*

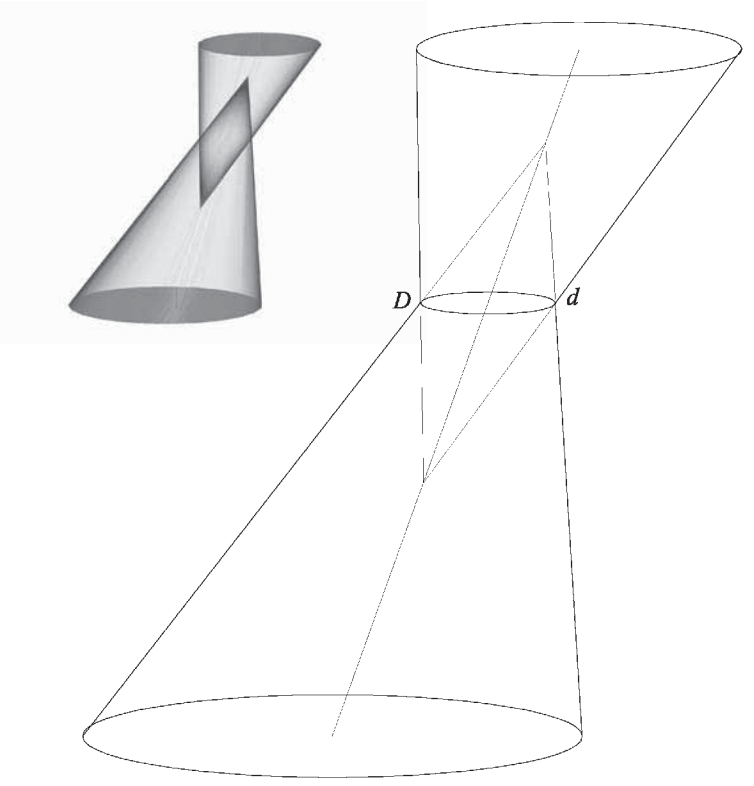


Fig 84. *Intersezione di coni in cui gli assi si confondono e le basi sono parallelamente lontane*

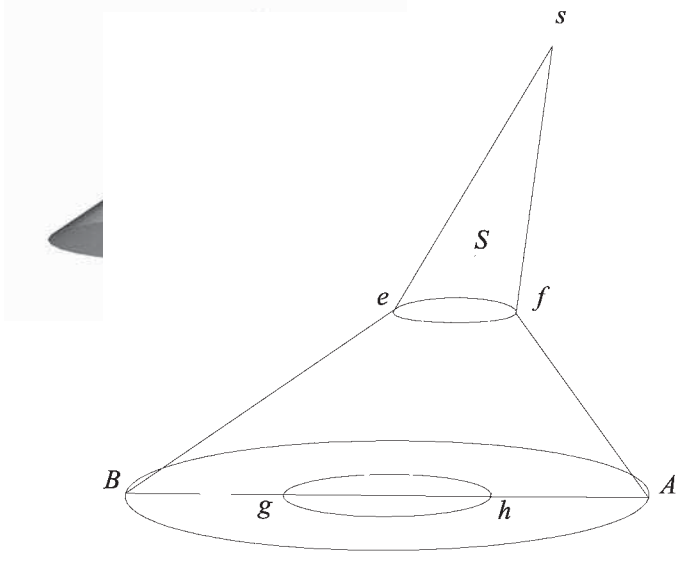


Fig 82. *Intersezione di coni scaleni in cui si confondono le basi e gli assi.*

TEOREMA XXIX

La Sezione fatta dall'intersezione di due Coni diversi, ma simili di cui gli Assi e i Lati sono paralleli tra loro, è un Paraboloidimbre.

Sia il triangolo *AsD* la sezione per l' asse del cono piccolo, e *BSE* quella del cono grande, e il punto *P* comune alle due superfici dei coni. Se supponiamo un piano che interseca il primo *AsD* perpendicolarmente, seguendo il lato *BS*, parallelo a *AS*, esso toccherà il cono grande , e farà nel piccolo una parabola rappresentata qui dalla curva *PrRL* di cui l' asse sarà *PB*, dal quale volendo si si tirano le coordinate *or, OR*, e per il vertice *s*, le rette *srz* e *sRy*, queste linee che saranno i lati del cono piccolo, essendo prolungate, incontreranno la superficie del cono grande *BSE* in alcuni punti *z* e *y*, dai quali si tracceranno *zx* e *yx* , parallele alle coordinate *or* e *OR*, fino all' incontro delle linee *sx*, *sX*, tirate dal vertice s ai punti *o* e *O*, infine dagli stessi punti *r* e *R* altre linee *rq*, *RQ* parallele a queste stesse linee *sx*, *SX*, avremo dei triangoli simili *sqz* e *sor, RQy* e *sOR*; di conseguenza le stesse omologie riguardo alla parabola piana, che abbiamo avuto nel teorema XXIII e XXV, riguardo all' Ellisse, da sapersi, la distanza dal vertice del cono all' ordinata della sezione piana, a questa stessa ordinata, come la distanza da quella della sezione è la differenza delle due sezioni *so : or :: rq : qz* , e *sO : OR :: RQ : Qy*;dunque la sezione è un paraboloidimbre, cosa che andava dimostrato.

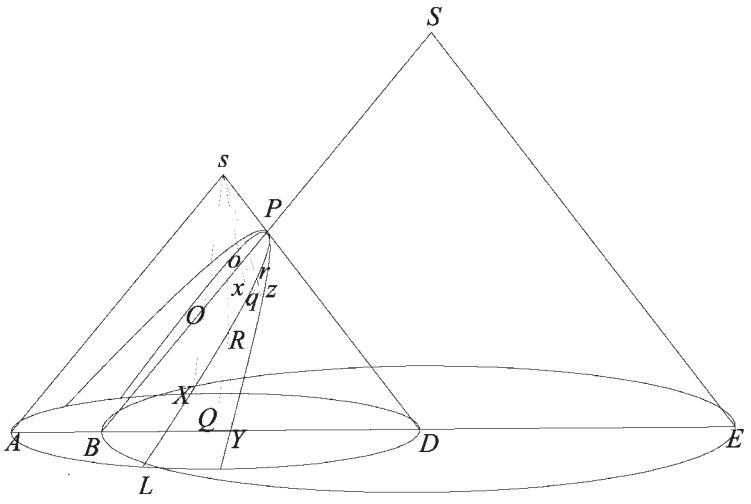


Fig 85. *Sezione data dall' intersezione di due coni diversi ma simili in cui assi e lati sono paralleli*

TEOREMA XXX

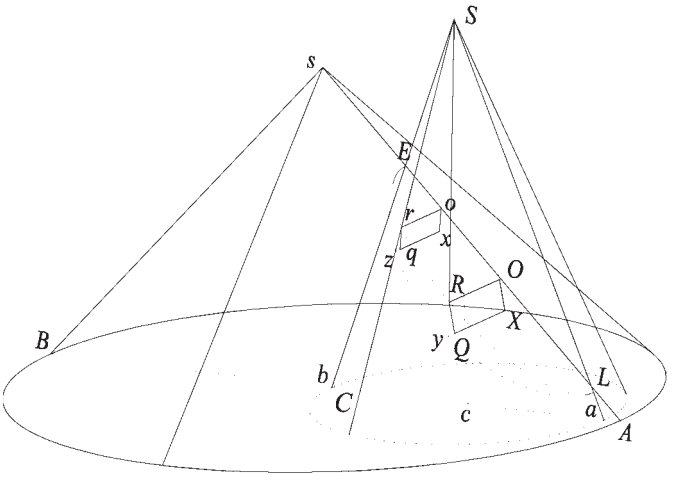
La sezione fatta dall' incontro di due Coni, che si intersecano, di cui gli Assi sono paralleli, e di cui un lato di uno dei Triangoli per l'Asse incontra quello dell' altro (prolungato se occorre), è un' Ellissoidimbre.

Siano (fig. 86) i triangoli *BsA* e *bSa* le sezioni fatte da un piano passante per gli assi dei due coni che lo intersecano, di cui i punti *E* e *L* sono comuni alle due superfici. Se supponiamo un piano passante da *EL* perpendicolarmente al piano *BsA* toccherà questo, e farà un' ellisse nell' altro *bSa*, che interseca obliquamente seguendo la linea *EL*, che ne sarà il grande asse, *ALE* al quale avendo portato delle "ordinate" *or* e *OR* a piacere, tireremo dai punti S delle linee *Sr* e *SR*, fino all'incontro della superficie del cono *BsA* in *z* e in *y*, questi punti saranno sulla circonferenza della sezione solida, la quale sarà la curva *EzyL*; così facendo, come nel Teorema precedente *zx*, parallela a *ro*, e *yX* parallela a *RO* fino all'incontro delle linee *So SO*, tirate dal vertice del cono, e prolungate verso *x* e *X*, e tirando poi gli stessi punti *r* e *R*, delle linee *rq* e *RQ* parallele alle linee *Sx* e *SX*, avremo le stesse analogie riguardo alle coordinate dell'Elisse, che abbiamo avuto nella proporzione precedente riguardo alla parabola; da sapersi: *So : or : : rq : qz*, e *SO : OR : :RQ : Qy*; quindi la sezione solida è un Ellissoidimbre, cosa che bisognava dimostrare.

Abbiamo aggiunto ai dati della proposizione, che il lato di uno dei triangoli per l'asse di un cono doveva intersecare quello dell'altro, prolungato (se occorre) perché può accadere come in fig. 89, che il lato *sA* del triangolo *BsA* non incontri il lato *Sa* dell'altro triangolo, ma lo incontrerà se l'uno e l'altro sono prolungati verso *L*; perché supponiamo che siano inclinati tra di loro, e non paralleli; così che la sezione sarà sempre la solita.

L'unica differenza che ci sarà con il caso precedente è che non sarà un Ellissoidimbre completo, ma mutilata, che sarà in mancanza di tutta la parte corrispondente a *AL* dell'asse sottendente *EL*, la quale è fuori dal cono.

Fig 86. *Sezione fatta dall'incontro di due coni con assi paralleli e con due lati che si intersecano.*



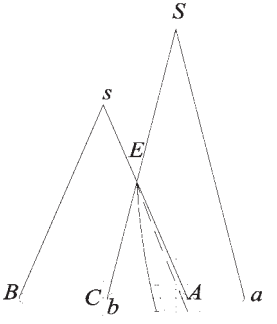


Fig 89. *Sezione fatta dall' incontro di due coni con assi paralleli e di cui due lati si intersecano.*

1 La curva indicata con linea continua rappresenta l' intersezione dei due coni, l'altra, tratteggiata, la sezione del cono grande con un piano perp. per *sA*.

NOTA

Bisogna notare che, benché il piano che faremmo passare dalla linea *SE* perpendicolarmente a quello dei triangoli per gli assi *sC*, *Sc*, debba fare un'iperbole nel cono *AsB* la sezione non sarà per questo un iperboloidimbre; perché i lati *As* e *aS* essendo divergenti verso *S*, sono convergenti verso *L*; così che prolungando questi lati, si torna sempre al primo caso dell'Ellissoidimbre.

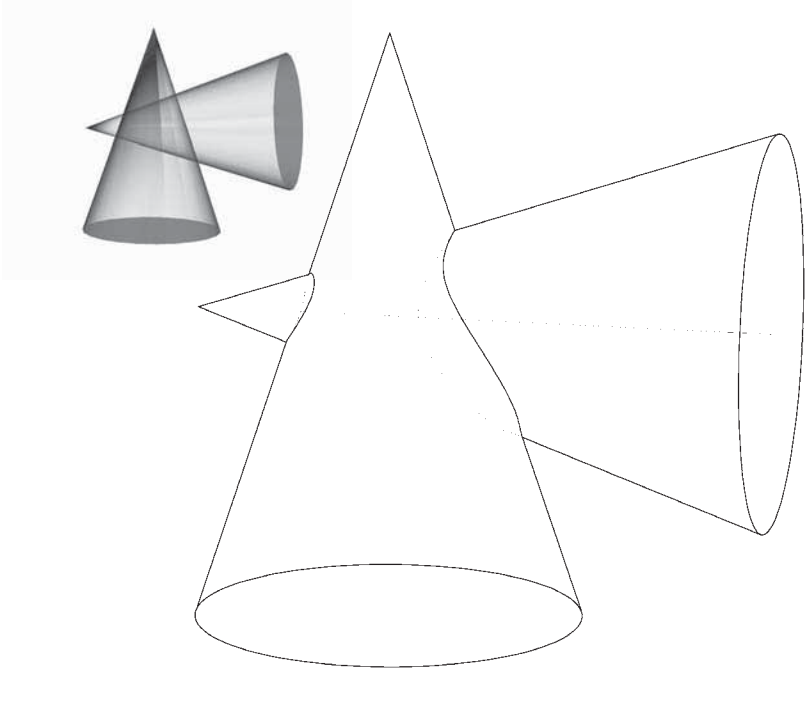


Fig 87. *Intersezione di due coni i cui assi si incontrano formando un angolo retto*

TEOREMA XXXI

La sezione fatta con l'incontro delle superfici dei due coni, di cui gli assi si intersecano perpendicolarmente oppure obliquamente di modo che i lati prolungati dell'uno o dell'altro, non si incontrano al di sopra o al di sotto del vertice di uno di loro, è un Elissodimbre.

La dimostrazione di questa proposizione è talmente simile a quella della precedente, che ci siamo accontentati di mettere qui la figura (87,88) per il caso in cui gli assi si intersecano perpendicolarmente; o nel caso in cui si intersecano obliquamente; tagliando i coni, che si intersecano come si è fatto prima, per piani tangenti ai coni che sono penetrati; come abbiamo fatto prima, sarà ben facile vedere i rapporti tra "ordinate"

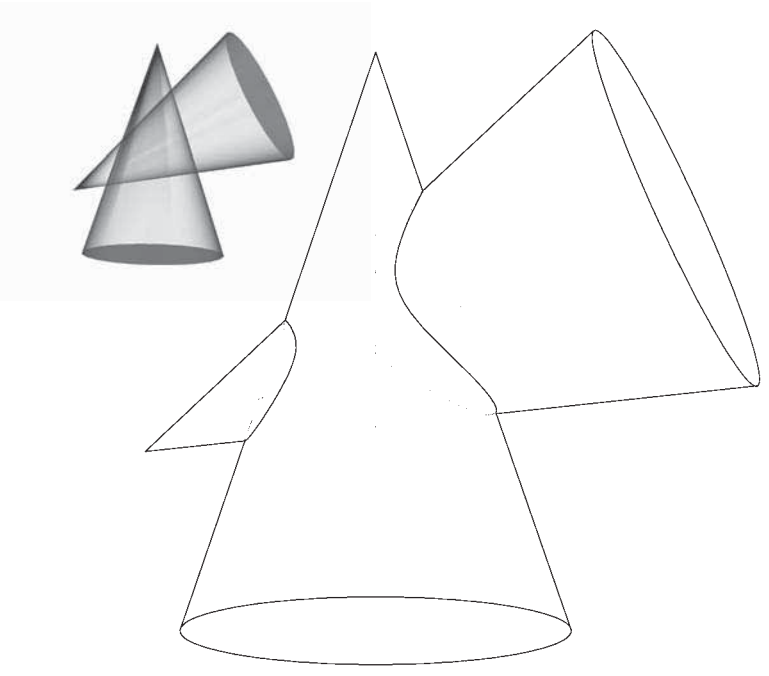


Fig 88. ***Intersezione di due coni i cui assi si incontrano obliquamrnte.***

della sezione solida e quella della sezione piana, e perché seguendo le ondizioni del teorema, queste sezioni piane non possono che essere Ellissi se i coni sono Retti, o cerchi se sono scaleni; ne segue che la sezione solida sarà un Ellissoidimbre, o specie di cicloimbre allargato o ristretto, cioè una curva, di cui le ordinate hanno un eccesso o un difetto su quelle del cerchio.
Non abbiamo niente da aggiungere a quello che abbiamo detto delle sezioni opposte; sono qui come altrove, le stesse, disposte in senso contrario riguardo al vertice, e sempre una più piccola dell'altra.
Vedremo nel teorema seguente, la ragione per la quale facciamo eccezione nei dati, del caso in cui i lati prolungati si incontrano (Rif. fig. 87 e 88).

TEOREMA XXXII

La sezione fatta dall'incontro delle superfici di due coni, di cui gli Assi si intersecano obliquamente, e di cui un lato di uno dei triangoli per l'Asse incontra i due dell'altro triangolo, che è nello stesso Piano, oppure uno dei lati essendo prolungato al di sopra del suo Vertice, è un Iperboloimbre in uno e l'altro cono.

Siano i triangoli *BSA* e *DEF* le sezioni di un piano passando dai due assi *CS* e *gE*, dei coni che lo intersecano in una posizione rispettiva, ove il lato *DE* incontra i due triangoli BSA, l' uno SA che interseca naturalmente in *H*, l'altro *BS* in *y*, poiché è prolungato al di là del punto *S* in *y*; oppure,
dove il lato SA del triangolo BSA incontra i due DE, EF del triangolo DEF, da sapersi DE in H, e FE prolungato in X.

Se supponiamo dei piani perpendicolari a quello che passa dagli assi e Eg, e che intersecano i coni, l'uno in HA, l'altro in HD, le sezioni che faranno saranno delle iperbole, di cui HA e HD saranno gli assi, e HX, HY, gli assi determinati, e gli stessi piani che intersecano un cono saranno tangenti dell'altro. Sia una metà di queste iperbole la curva HrR, sulla quale avendo preso il punto r, a piacere, porteremo l'ordinata ro all'asse HD, e dallo stesso punto r e il vertice S la linea Srz, questa linea incontrerà la superficie dell'altro cono DEF in qualche punto z, che sarà la circonferenza della Curva della sezione solida, che passerà dal punto H, comune alle due superfici, e dal punto z, comune anche esso a loro, poiché è l'incontro del cono BSA con la superficie dell'altro DEF; ora perché la linea Srz, inizia dallo stesso punto S, come la linea SA, queste linee si aprono e sono divergenti, di modo che si può supporre come nei teorema precedenti una linea parallela a SA, e portata dal punto r, fino all'incontro della linea zx, cosa non eseguita nitidamente nella figura per evitare la confusione delle linee, rappresentiamo bene nella fig. 90 posta accanto in cui hx rappresenta HD, e avremo dei triangoli simili sor, rqz; quindi So oppure Eo : or : : rq : qz; di conseguenza la curva che passerà da hz, sulla superficie dei coni, sarà un iperboloide, che andava dimostrato.
Uguale sarà per l'altro cono, e questa sezione comune varierà seguendo la differenza delle grandezze rispettive dei due coni.

dove il lato *SA* del triangolo *BSA* incontra i due *DE, EF* del triangolo *DEF*, da sapersi *DE* in *H*, e *FE* prolungato in *X*.
Se supponiamo dei piani perpendicolari a quello che passa dagli assi e *Eq*, e che intersecano i coni, l'uno in *HA*, l'altro in *HD*, le sezioni

Fig. 91. *Le sezioni delle superfici di coni generate da piani passanti dalla loro imtersezione (come spiegato nel testo).*

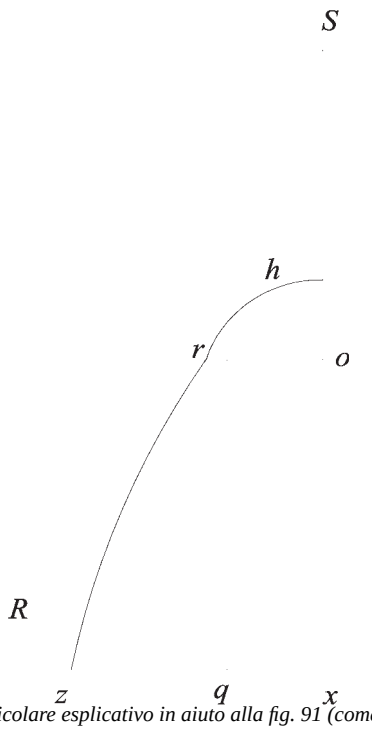


Fig 9o. *Particolare esplicativo in aiuto alla fig. 91 (come spiega il testo)*

TEOREMA XXXIII

La sezione fatta con l'incontro delle superfici dei due coni, di cui gli assi si intersecano obliquamente, e di cui uno dei triangoli per l'asse è parallelo ad uno dei lati dell'altro triangolo della Sezione per l'Asse dell'altro Cono, è una Curva ugualmente differente in ogni cono; cioè un Iperboloidimbre in uno dei coni, e un Paraboloide nell'altro, secondo che uno dei due Coni sorpassi od è sorpassato dall'altro, nell'allineamento di questi lati.

Siano (fig. 92) i triangoli *BSA* e DEF le sezioni di due coni, intersecati da un piano che passa dai loro assi *cS, CE*, i quali essendo prolungati verso *K* si intersecano obliquamente. Sia anche il lato *DE* parallelo al lato *BS*; bisogna dimostrare che la curva *Hx*, che è fatta dall'intersezione delle superfici di questi due coni, ha dei rapporti di eccesso e di difetto con le sezioni piane, fatte dai piani tangenti ai lati dei coni *SA* e *DE*, cioè che avverrà allo stesso modo che nella proposizione precedente; poiché il piano tangente via *DE* farà una parabola nel cono *BSA*, e il piano tangente in *SA* farà una iperbole nel cono *DEF*, di cui *YH* è l'asse determinato, e *HI* l'asse prolungato; ora se si prende nel contorno di queste curve differenti un punto *r*, da questo e dal vertice si porta una linea *Srz*, che incontra la superficie dell'altro cono in *z*, la curva, che passerà da *H* e *z*, sarà quella dell'intersezione dei due solidi; ma dallo stesso punto *z* portando al vertice *E* una linea *zE*, questa linea che sarà un lato del cono *DEf* passerà alla circonferenza dell'iperbole, di cui *HI* è l'asse e la sua coordinata; cioè la perpendicolare portata dal punto *z* al piano passando dagli assi, avrà un rapporto di eccesso o di difetto con questa iperbole, che sarà proporzionato alla profondità della sezione solida, cioè alla distanza del piano dell'iperbole, misurata in un piano passando dalle coordinate corrispondenti e il vertice del cono; quindi questa sezione sarà una paraboloide, considerata come stando nel cono *DEF*, e un'iperboloidimbre considerata nel cono *BSA*, ciò che andava dimostrato.

Fig 92. *Sezionifatte dall' incontro di due coni con due lati paralleli e di cui gli assi si intersecano obliquzmente.*

2 Alcune lettere riportate nel testo del teorema XXXIII non sono riportate in figura.

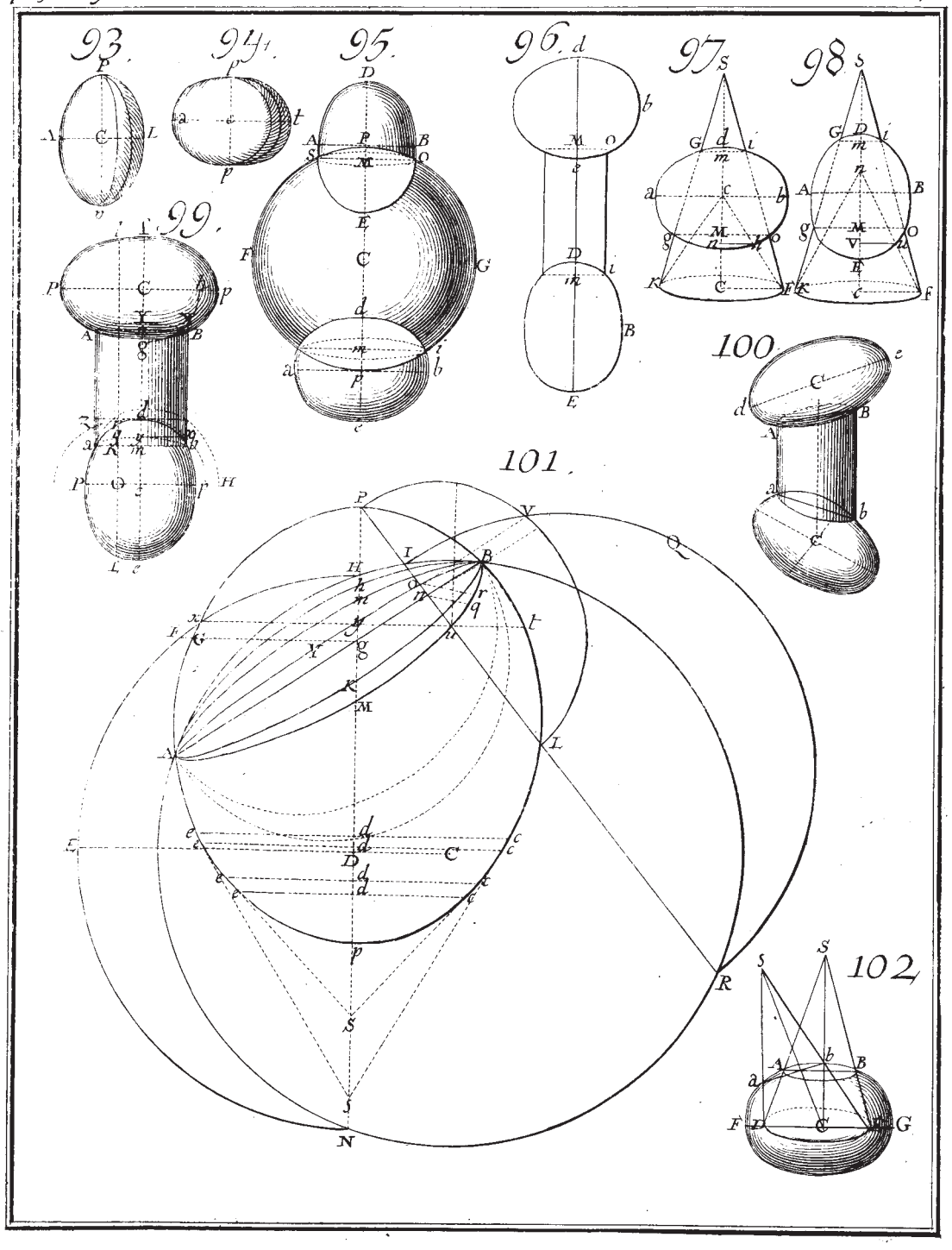
TRATTATO

Bisogna qui che l'immaginazione aiuti un po' la figura, che non è in grado di rappresentare bene il rilievo.
Ci rimarrebbe da determinare la curva, che si fa dall'intersezione delle superfici dei coni, di cui gli assi non si intersecano e non sono paralleli; ma sempre che ci sia il bisogno di un teorema generale possiamo trovarne tanti punti quanti vogliamo per ogni posizione rispettiva dei coni dati; cosa che basta alla pratica, poiché dimostreremo che ciascuno di questi punti sono ben trovati, come si vedrà nel libro seguente.
Non aggiungeremo niente qui delle sezioni composte di due porzioni di curve, che si mutilano reciprocamente, quando un cono ne interseca un altro solo con una parte della circonferenza; ne abbiamo detto assai nei Teorema **XXI** e **XXVII**, dove abbiamo anche fatto notare che queste parti di sezioni sono sempre disuguali; quella che avvicina più al Vertice essendo sempre la più piccola.

USO

157. Gli incontri delle arcate coniche tra di loro succedono raramente in pratica, ne troviamo esempi soltanto nelle Trombe e arcate coniche, che ricomprano una Torre rotonda e in pendenza nei lunotti di una arcata in cannoniera, o nelle scanalature che si incrociano, ciò che usa poco e consegue poco.

page. 119. Planche 8.



CAPITOLO VIII
Sezioni fatte alla superficie degli sferoidi, penetrati dalle sfere, coni o cilindri

Abbiamo distinto al capitolo IV diversi tipi di sferoidi, ma qui parliamo soltanto dei più regolari, che sono fatti dalla rotazione di una semiellisse su uno dei suoi assi, vale a dire dall'"Oblungo" *PLp*[1] [***Fig. 93***] sull'asse maggiore *Pp*[2] e dell'"appiattito" sull'asse minore *AL* come *Ptp* [***Fig. 94***].

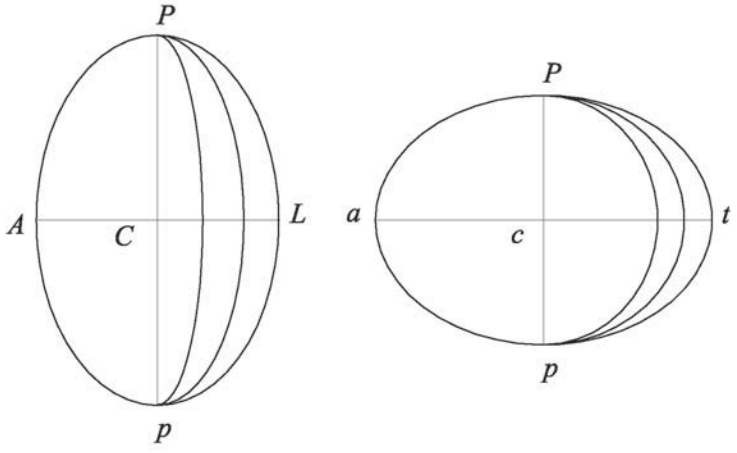


Fig. 93 e 94 Solidi regolari derivanti dalla rotazione di semiellissi attorno a uno dei loro assi (asse maggiore nel primo caso e asse minore nel secondo).

STEREOTOMIA

TEOREMA XXXIV

La sezione derivante dall'incontro delle superfici di uno sferoide con quella di una sfera, di un cilindro e di un cono, che lo penetrano o che sono essi stessi penetrati, in maniera che gli assi di questi corpi si confondano, è un cerchio.

Questa proposta è chiara se si fa attenzione alla generazione di questi corpi perché:
1. [***Fig. 95***] Per lo sferoide e la sfera, dato che lo sferoide è formato dalla rotazione di una semiellisse *DBE* o *dbe* sul suo asse, *DE* o sul piccolo *de*, e la sfera da quella di un semicerchio *PFp*, l'ordinata *MO* o *mi* all'asse comune *De*, al quale è perpendicolare, essendo comune allo

[1]All'interno della figura 93 originale leggasi "*p*" al posto di "*v*".
[2]All'interno della figura 94 originale leggasi "*P*" al posto di "*p*".

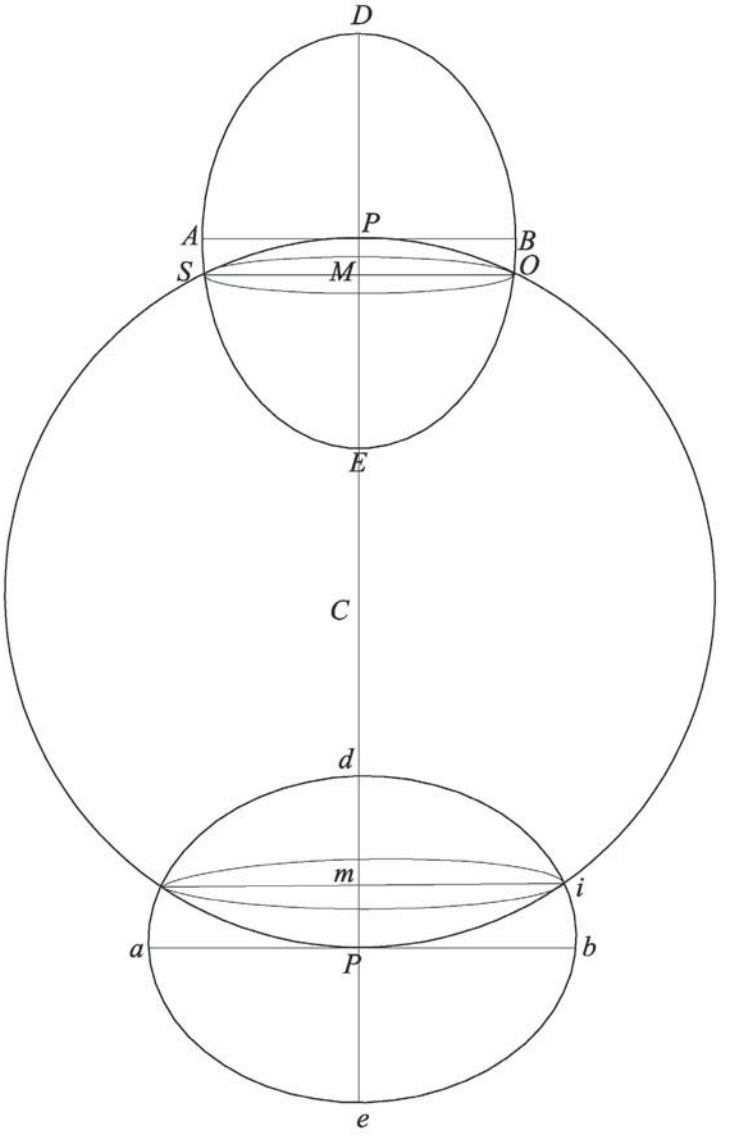


Fig. 95 L'intersezione tra due ellissoidi e uno sferoide sono due circonferenze comuni sia allo sferoide che all'ellissoide.

sferoide 2. [***Fig. 96***] Lo stesso ragionamento si applica naturalmente all'intersezione delle superfici dello sferoide e del cilindro retto; [***Fig. 96***] dato che quest'ultimo è formato dalla rotazione di un parallelogramma rettangolo *MOim*, sul suo lato *Mm*; quindi nella supposizione che questo lato, che è l'asse di un cilindro, si confonde con gli assi dello sferoide, sia appiattito come *dbe*, o allungato come *DBE*, è visibile che i lati *MO* e *mi* sono delle ordinate comuni, dalle quali la rotazione da un cerchio,

che sarà l'intersezione comune di questi due corpi.

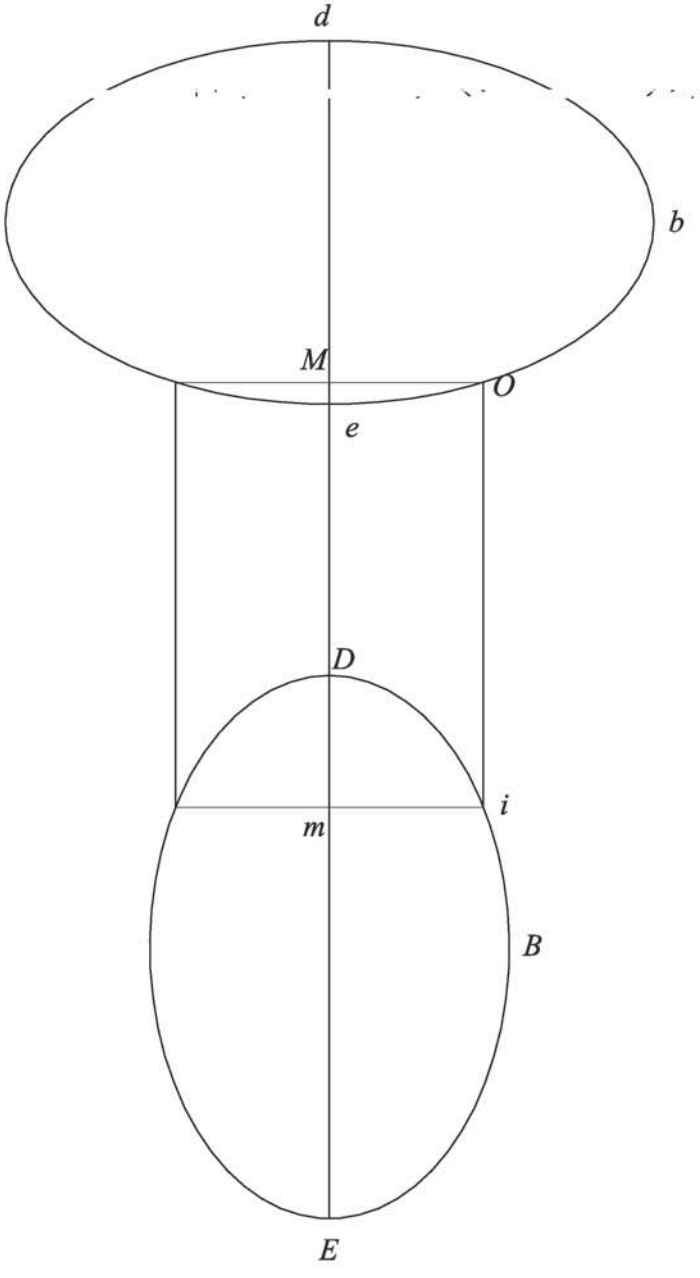
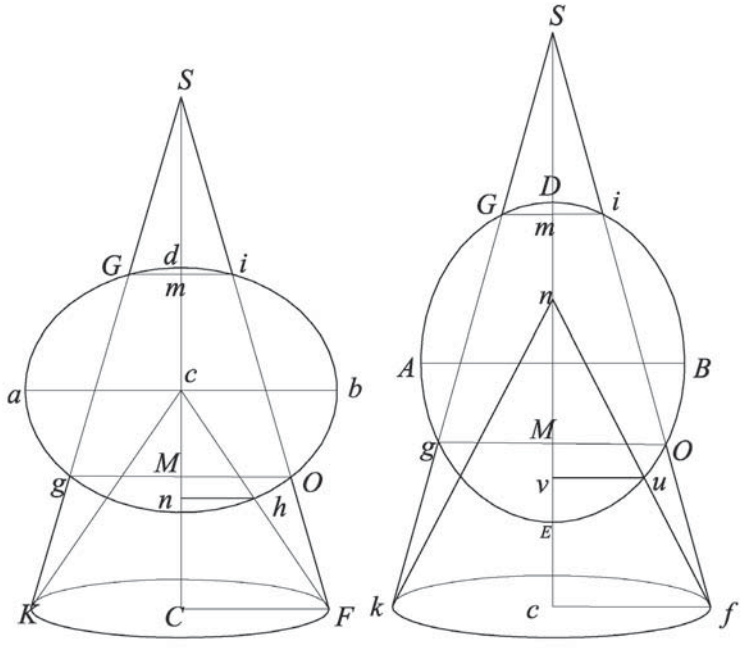


Fig. 96 L'intersezione tra due ellissoidi e uno cilindro retto

3. [***Fig. 97 e 98***] Sarà uguale per l'intersezione tra uno sferoide e un cono retto, che è formato dalla rotazione di un triangolo rettangolo *SCF* o *scf*, sul suo lato *SC* o *sc*, che ne diventa l'asse, passando dagli assi delle ellissi, che generano lo sferoide, le ordinate *MO* e *mi* saranno i raggi dei cerchi, dei quali la circonferenza sarà l'intersezione delle due superfici, sia che il vertice s del cono sia al di fuori dello sferoide o al di dentro come *KCF*, [***Fig. 97***] nel qual caso l'ordinata comune è *nh* o *vu* [***Fig. 98***].

Fig. 97 e 98 L'intersezione tra uno sferoide e uno cono retto è una circonferenza, sia che il vertice del cono sia all'interno o all'esterno dello sferoide.



APPLICAZIONE ALL'USO

Questa proposta fa vedere che lo spigolo d'inforco di una lunetta in "Berceau" o "Ebrafée", che riscatta una volta in conca absidale rialzata o ribassata, le quali imposte sono al livello di quelle della volta, e di cui la direzione, cioè quella dei loro assi, tende al centro della conca absidale, è una circonferenza di cerchio, in termine d'arte, un pieno centro.

TRATTATO

Lo stesso che lo spigolo d'inforco di una nicchia rialzata o ribassata, o piuttosto ricalcata o appiattita dal suo piano orizzontale, in una volta sferica, con le stesse circostanze di direzione del suo asse al centro di questa volta è un cerchio, ciò che non è raro negli edifici.

TEOREMA XXXV

La sezione derivante dall'incontro delle superfici di una sfera e di uno

sferoide, il cui asse non passa per il centro della sfera, è una specie di "Ellipsoidimbre", cioè, una curva a doppia curvatura, di cui si può mettere in evidenza qualche rapporto costante con l'ellisse.

Sia data una sfera *ABRN*, penetrata da uno sferoide *APBp*, il cui asse *Pp* non passa dal centro *C* della sfera. Se si suppone un piano passante dal centro e dall'asse dello sferoide, darà per sezione un cerchio nella sfera e un'ellisse nello sferoide, secondo il teorema V la cui intersezione nei punti *A* e *B* segnerà che questi punti sono comuni alle due superfici, ma non gli altri punti di queste due curve che sono l'una all'interno della sfera, l'altra al di fuori dello sferoide, in modo che nè l'una nè l'altra di queste sezioni possa essere comune alla sfera e allo sferoide.

A questo punto, se si vuole cercargli qualche rapporto con altre curve piane, bisogna supporre un piano perpendicolare al primo (come abbiamo fatto fino ad ora) passante dai punti comuni *A* e *B*, il quale darà due sezioni della stessa specie delle precedenti, cioè un'ellisse *AKB* nello sferoide, e un cerchio *AMB* nella sfera, da dove segue evidentemente che la sezione comune di queste due superfici è una curva a doppia curvatura; dato che non può essere nello stesso tempo cerchio e ellisse, e questa curva sta girata dal lato del Polo *P* dello sferoide, ha delle ordinate al suo asse curvo *AYB*, sempre minore a quelle dell'ellisse piana formata dai punti comuni *A* e *B* nel rapporto delle ordinate dell'asse *Pp* dello sferoide, che passa l'uno dall'asse sottendente *AB*, l'altro asse curvo *AYB*.

[***Fig. 101***] Si potrebbe considerare lo sferoide come un'infinità di piccoli coni troncati [***fig.101***] fatti dalla sezione di parecchi piani *ee*, perpendicolari al suo asse *Pp* ed è così infatti che si procede per lo più per la pratica del tagli delle pietre; questi coni troncati avrebbero tutti il loro vertice sull'asse *Pp*, prolungato, ad esempio, in *S*, e i lati del cono *Se*, diverrebbero tangenti allo sferoide.

Si potrebbe allora trovare la curva della sezione dalle analogie di quelle del cono nella sfera come nel Teorema XIV ma per ogni cono avremmo un nuovo vertice *S*, e proprio perché il numero di questi coni alla superficie dello sferoide è infinito, ci sarebbero tanti vertici quanti punti nell'asse prolungato; in modo che la curva di questa sezione non sia della stessa specie che l'"Ellissoidimbre", come l'abbiamo definita.

Tuttavia c'è un rapporto, la differenza è che le ordinate all'asse dell'ellisse e quelle all'asse curvo della sezione solida non hanno eccessi o difetti gli uni in confronto agli altri, in ragione aritmetica, come i lati del triangolo, ma in ragione geometrica, come le radici dei quadri delle ordinate delle ellissi piane, fatte dai piani passando da queste ordinate, e l'estremità dell'asse dello sferoide, ciò che dimostreremo in seguito.

Avendo supposto come qui sopra lo sferoide *APLp* [***Fig. 101***] che penetra una sfera *ABRN* e che i punti *A* e *B* sono comuni alle loro superfici, sia *ABKh* l'ellisse fatta dalla sezione di un piano passante da *AB* perpendicolarmente a quella che passa dall'asse dello sferoide e il centro *C* della sfera. Sia anche *AMBm* il cerchio dato dalla sezione dello stesso piano nella sfera.

Se dal centro *C* si tira una perpendicolare *CE* all'asse *Pp*, essa lo taglierà nel punto *D*, dal quale per centro e per raggio *DH* o *DN*, metà di *HN* considerata come corda della sfera, avendo descritto un semicerchio *HEN*, incontrerà in *x* la semiellisse *PAp* dello sferoide e darà così un punto *x* comune alle due superfici dal quale conducendo una perpendicolare *xy* all'asse *Pp*, avremo *xy* come ordinata della sezione solida; ma dato che la sezione piana passante da *A* e *B* taglia l'asse nel punto *g*, l'intervallo *gy* darà la differenza delle profondità delle due sezioni nella sfera e la linea *Fg* perpendicolare a *Pp* darà l'ordinata della sezione circolare della sfera e *Gg* quella dell'ellisse nello sferoide; quindi dalla proprietà dell'ellisse *Py* x *yp* : *Pg* x *gp* = *xy* : *Gg*. Dunque se si conosce la lunghezza delle ordinate, si troverà la loro distanza e se si conosce la loro distanza, cioè la profondità dell'asse curvo alla sezione piana da *AB*, si conosceranno le lunghezze delle ordinate e dunque le loro differenze.

Sarà uguale se dal punto *P* si fa passare un piano dalle ordinate *or* della sezione solida, e *nq* dell'ellisse piana, le quali sono qui espresse in forma di prospettiva in confronto al cerchio *AMB* e dell'ellisse *AKB*, i quali sono ugualmente rappresentati, perché questi due piani essendo in parte confusi insieme, e avendo il diametro comune *AB*, sarebbero anche confusi con questo diametro, se non ci aiutasse un po' l'immaginazione.

Per vedere queste ordinate più distintamente, bisogna considerarle come sopra, in un piano perpendicolare al primo piano *PANR* e passante dal polo *P* come *PR*, allora facendo un semicerchio *IQR* su *IR*, corda della sfera, e una semiellisse *PvL* su PL, come asse maggiore, di cui *u* è il centro, e su *uZ*[3] media proporzionale tra *xu* e *ut* per metà dell'asse minore, l'intersezione *v* del semicerchio *IQR* e della semiellisse *PvL* darà un punto *v* della sezione solida, dal quale abbassando una perpendicolare *vo* su *PR* avremo il punto *o* sull'asse curvo di questa sezione e il punto *n* sull'asse rettilineo con un'analogia uguale alla precedente *Po* x *oL* : *Pn* x *nL* = *ov* : *nz*[4].

COROLLARIO

158. In seguito si possono trovare tanti punti quanto si vuole dall'asse curvo e la loro distanza dall'asse rettilineo su un piano passante dal punto *P* perpendicolarmente al piano passante dall'asse *Pp* dello sferoide e il centro *C* della sfera; dato che abbiamo dimostrato nel Teorema V che tutte le sezioni piane dello sferoide, che sono oblique rispetto ai loro assi sono delle ellissi, e che quelle delle sfere sono dei cerchi, avremo sempre all'intersezione di queste due curve un punto comune, che sarà alla circonferenza della sezione solida.

USO

159. Questa proposta fa vedere qual è la curva dell'inforco di una nicchia ricalata o appiattita in una volta sferica, se le imposte non sono a livello,
cioè, che l'una delle due sia al di sopra o al di sotto dell'altro, benché ciascuna sia a livello tra loro, o che le une siano a livello e le altre rampanti; allora la curva dello spigolo che avviene all'incontro delle due

[3]All'interno della figura 101 originale manca la lettera "*Z*".
[4]All'interno della figura 101 originale manca la lettera "*z*".

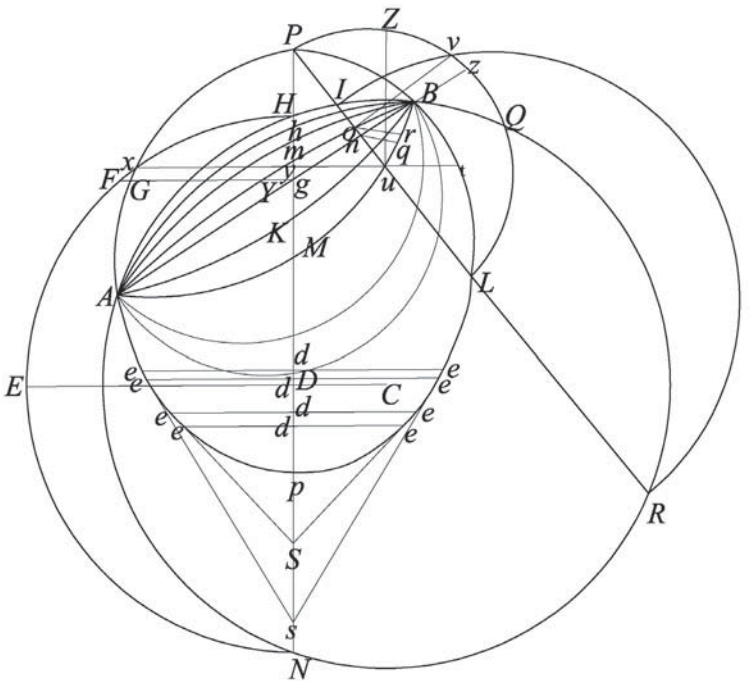


Fig. 101 Si può considerare uno sferoide come un'infinità di piccoli tronchi di cono ed è proprio su questo presupposto che si basa la teoria del taglio delle pietre.

superfici, è una curva a doppia curvatura dalla quale gli equilibri non si trovano in una linea retta come nel Teorema precedente, e questa curva ha qualche rapporto con quella che abbiamo chiamato "Ellipsoidimbre", perché queste ordinate al suo asse curvo sono sempre in un rapporto conosciuto con quelle della sezione ellittica o sferoide, tagliato da un piano passante da *AB*.

La stessa cosa succederebbe se le nicchie, invece di essere ricalate o appiattite orizzontalmente, fossero rialzate o ribassate verticalmente, l'unica differenza che ci può essere è il cambiamento del rapporto delle
ordinate, che hanno, in un caso, un eccesso su quelle dell'ellisse, e nell'altro un difetto, ma sempre in uguale proporzione.

TEOREMA XXXVI

La sezione derivante dall'incontro delle superfici di un cilindro retto e di uno sferoide, il cui asse è perpendicolare a quello del cilindro, è un "Cicloimbre".

[***Fig.99***] Sia dato un cilindro *ABba*, il cui asse mn, prolungato in *C* e *c*, è perpendicolare a quello di uno sferoide allungato *Pfpg*, o appiattito *Pdpe*. Avendo supposto questi corpi tagliati da un piano passante dai loro assi e una seconda volta da un altro piano perpendicolare al primo e passante dai punti *A* e *B*, *a* e *b* comuni alle due superfici del cilindro e dello sferoide, si riconoscerà che questa seconda sezione sarà un cerchio nel cilindro e una ellisse nello sferoide, la quale sarà uguale a quella

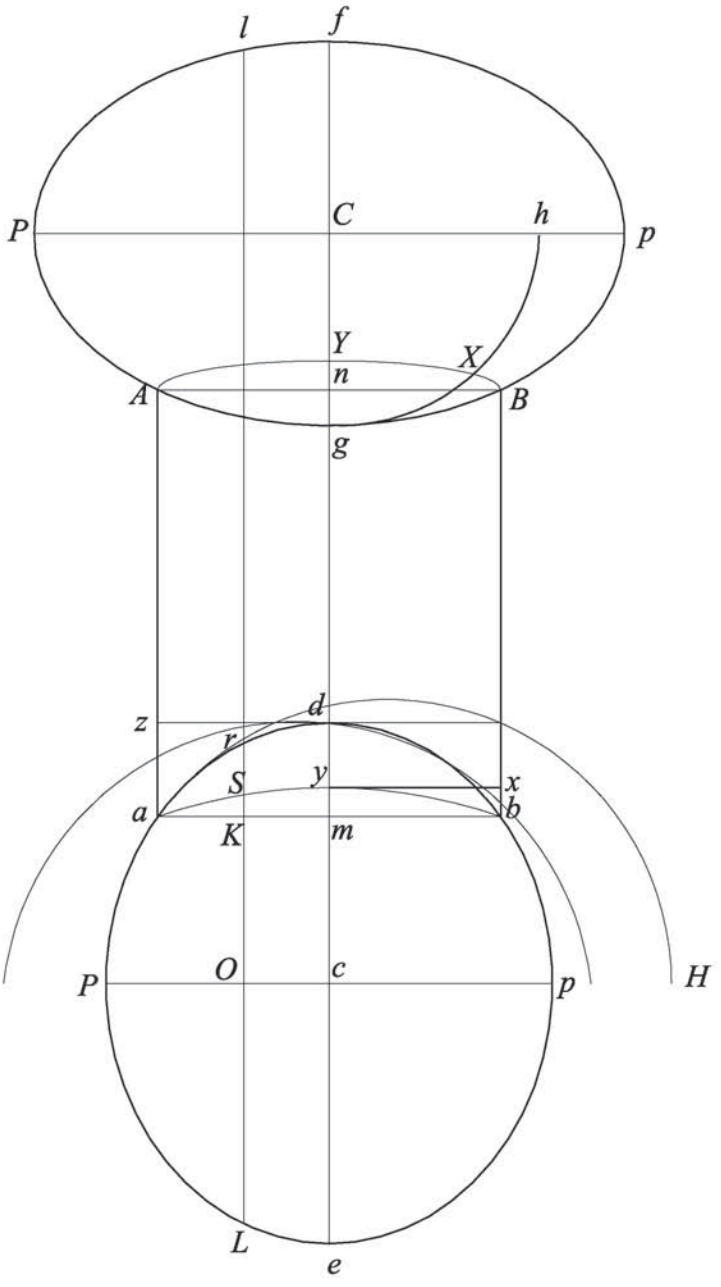


Fig. 99 La sezione fatta dall'incontro tra un cilindro retto e uno sferoide, i cui assi sono perpendicolari, è un "cicloimbre".

della sezione dell'asse *Pp*. L'incontro delle due superfici non è dunque nel piano, dato che l'ellisse è fuori dal cilindro, e il cerchio è all'interno dello sferoide; però essa deve passare dai punti *A* e *B* o *a* e *b*.

Supponendo un terzo piano perpendicolare al primo, passante dall'asse del cilindro, o parallelamente a questo asse, esso darà un cerchio in ciascuno sferoide, e un parallelogramma nel cilindro. Sia il quarto di uno di questi cilindri *dH* o *gh* e il punto *X* o *x*, quello dove incontra il lato del cilindro, questo punto sarà comune alle due superfici, dalle quali se si abbassa la perpendicolare *XY* o *xy* sull'asse *Cc*, che lo taglierà in *Y* o in *y*, questo punto sarà uno di quelli dell'asse curvo *AYB* o *ayb* della sezione solida; ma proprio perché tutte le ordinate a questo asse sono perpendicolari ai lati del cilindro, e che finiscono tutte alla circonferenza, di seguito sono tutte uguali e parallele a quelle della sua base, ciò che è evidente; dunque tutti i diametri retti saranno anche loro paralleli ed uguali a quelli della base del cilindro, come abbiamo dimostrato nello stesso caso nel Teorema XVIII, dunque la sezione solida è un "Cicloimbre", ciò che bisognava dimostrare.

La differenza che c'è da quello che si fa all'incontro degli sferoidi diversamente messi rispetto all'asse maggiore o minore, è che il "Cicloimbre", fatto all'incontro delle superfici del cilindro e dello sferoide allungato, si avvicina all'asse maggiore scavando, diciamo, in questo sferoide, e che allo sferoide appiattito, si allontana dall'asse minore avvicinandosi alla superficie, come si vede nella figura 99 con le linee *AYB* e *ayb*.

COROLLARIO

160. E' facile trovare tanti punti quanto si vorrà dall'asse curvo, tirando da un punto qualunque K della linea ab una linea Kl parallela all'asse Cc, e descrivendo su or e mA come raggi degli archi dei cerchi. Se si fa Kt=Ks e tz parallela a Cc come lato del cilindro, essa taglierà l'arco tr in z, da dove si condurrà zq perpendicolare a Ll, la quale darà su or un punto q che sarà quello della curva che si cerca.

Si applicherà qui tutto ciò che abbiamo detto del rapporto sulle profondità della sezione solida nel Teorema XVIII sia considerandole come le frecce delle corde iscritte in diversi cerchi, o come i sinus verses delle ordinate prese come sinus droits.

TEOREMA XXXVII

La sezione derivante dall'incontro delle superfici di un cilindro e di uno sferoide, in cui gli assi non si incontrano, è una specie di Ellissoimbre. E può essere un'ellisse in certi casi.

[Fig.100] Sia dato un cilindro ABba, che incontra obliquamente uno sferoide allungato o appiattito. Avendo supposto un piano passante dall'asse del cilindro, che darà per sezione un parallelogramma in questo corpo, e un'ellisse nello sferoide, di cui le intersezioni a e b, A e B danno dei punti comuni a queste superfici, se si taglia questi corpi con un piano perpendicolare al primo e passante da A e B, a e b, la sezione sarà di due ellissi che possono essere uguali, in questo caso la sezione fatta dall'incontro delle superfici diventa piano; ma come la differenza degli sferoidi può dare un'infinità di ellissi diverse, la sezione

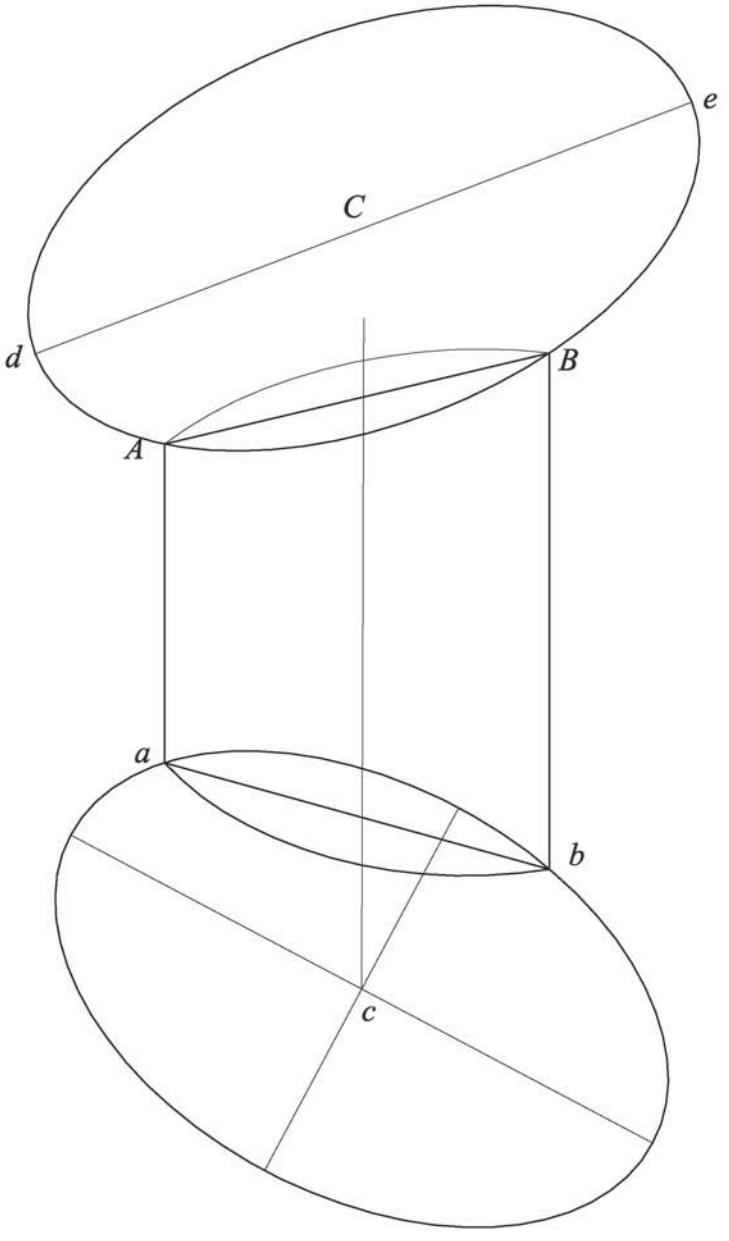


Fig. 100 La sezione fatta dall'inconro di un cilindro e di uno sferoide, i cui assi non si incontrano, è una specie di "ellissimbre"

sarà ordinariamente solida a causa dell'ineguaglianza delle ellissi, del cilindro e dello sferoide, ciò che è facile da vedere.

Proprio perché tutte le ordinate di questa sezione devono finire alla

superficie del cilindro così come a quella dello sferoide, ne consegue che esse devono tutte avere un rapporto d'uguaglianza con quelle dell'ellisse piana, che è la sezione obliqua del cilindro seguendo la linea AB, ciò che abbiamo spiegato a sufficienza nei teoremi IX e X, in modo che non sia necessario spiegare più in dettaglio.

E' talmente tanto tempo che ripetiamo la stessa dimostrazione, applicata a diverse occorrenze, che io temo che il lettore si trovi offeso per la sfiducia che sembra che si abbia della sua conoscenza, entrando in un così grande dettaglio.

COROLLARIO

Si possono facilmente scorgere i cambiamenti che i cilindri scaleni causerebbero alle sezioni fatte dall'incontro delle superfici dello sferoide; dato che le sezioni oblique, che abbiamo supposto ellittiche, possono essere circolari, e le perpendicolari agli assi delle ellissi.

APPLICAZIONE ALL'USO

Questa proposta e la precedente fanno vedere quale è la curva dello spigolo d'inforco di una botte, che riscatta una volta sferoide rialzata o ribassata o direttamente o obliquamente. Questo caso non è raro nell'architettura, così sono le lunette della volta sferica ribassata della Cappella del San Sacramento della Val de Grace di cui le nascite sono al di sopra di quelle della conca absidale o emisferoide appiattito.

TEOREMA XXXVIII

La sezione fatta dall'incontro della superficie di uno sferoide e di un cono, il cui asse incontra quello dello sferoide, perpendicolarmente o obliquamente, è di solito curvo con doppia curvatura, tale che è "Ellissoimbre", ma in certi casi può essere un'ellisse piana.

[Fig.102] La dimostrazione è facile; poiché:
I° se l'asse del cono SC passa fuori dal centro C dello sferoide, o che ci passa, ma non taglia obliquamente il suo asse FG come quello del cono DsE, è chiaro in queste due circostanze, che il piano perpendicolare a quello che passa dagli assi SC del cono, e FG dello sferoide, che si suppone anche, (come abbiamo sempre fatto) passante dai punti comuni alle due superfici A e B, dove a e b saranno due ellissi, l'una nel cono tagliato obliquamente, come in ab, l'altra nello sferoide, le quali saranno le stesse quando i loro due assi saranno uguali, fuori da questo caso essendo queste sezioni diverse, è chiaro che la sezione solida sarà una curva a doppia curvatura, come quella che abbiamo chiamato "Ellissoidimbre", che avrà degli eccessi o dei difetti sull'ellisse piana del cono, nel rapporto delle profondità dell'asse curvo.

II° Se l'asse del cono passa dal centro C dello sferoide, e perpendicolarmente al suo asse FG, ci saranno due sezioni in AB, di cui l'una sarà un cerchio nel cono, e l'altra un'ellisse nello sferoide; e di conseguenza la sezione solida sarà una curva a doppia curvatura della stessa specie delle precedenti, con questa differenza che gli eccessi o i difetti di queste ordinate sulla sezione piana del cono saranno paragonati a un cerchio e non a una ellisse.

APPLICAZIONE ALL'USO

Le lunette svasate nelle volte delle conche absidali rialzate o ribassate, o su un piano ovale, cioè, uno sferoide oblungo o appiattito, sono l'argomento di questo teorema, il quale fa vedere che lo spigolo di inforco

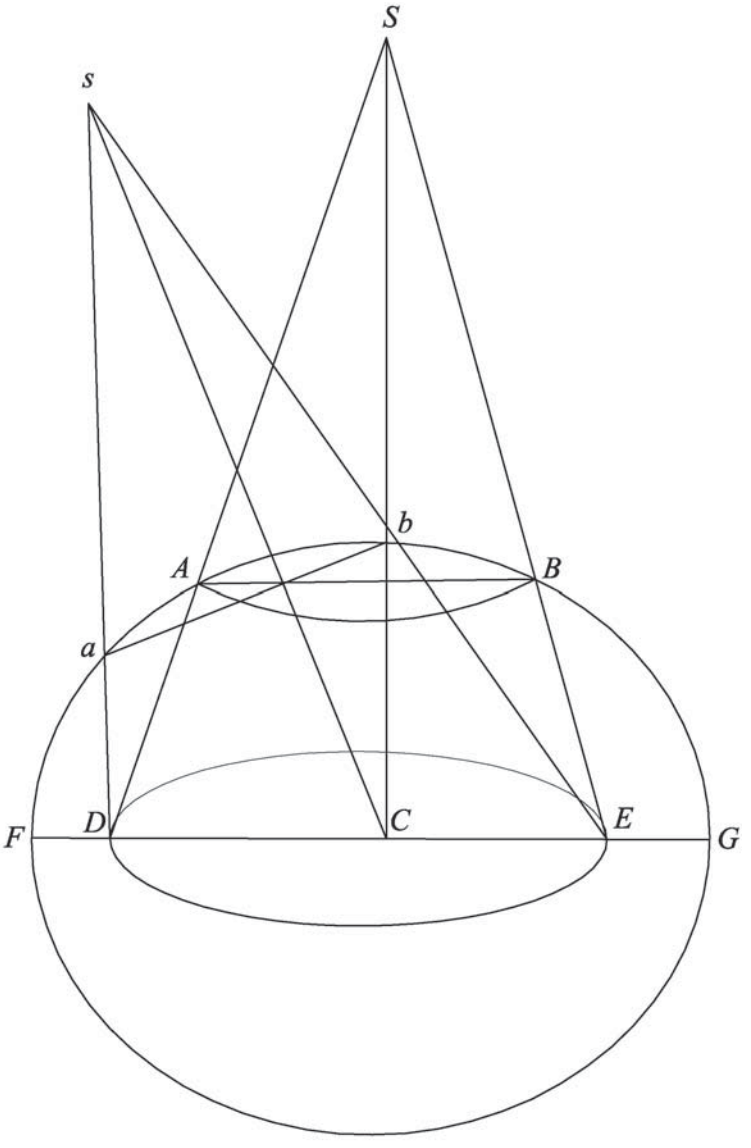


Fig. 102 L'intersezione tra uno sferoide e un cono, sia retto che obliquo, da una ellisse.

è a doppia curvatura, quando l'asse della lunetta, cioè, la direzione del suo mezzo tende verso il centro. II° Questo è di solito se è obliquo, e può però capitare in questo caso che sia ellisse piana.

Non aggiungeremo altro delle curve composte dalle sezioni degli sferoidi, crediamo di avere detto assai precedentemente per dare al lettore la possibilità di giudicarne paragonando le precedenti degli altri corpi

rotondi, è tempo adesso di occuparsi dei problemi che danno i mezzi di tracciare ogni tipo di sezione.

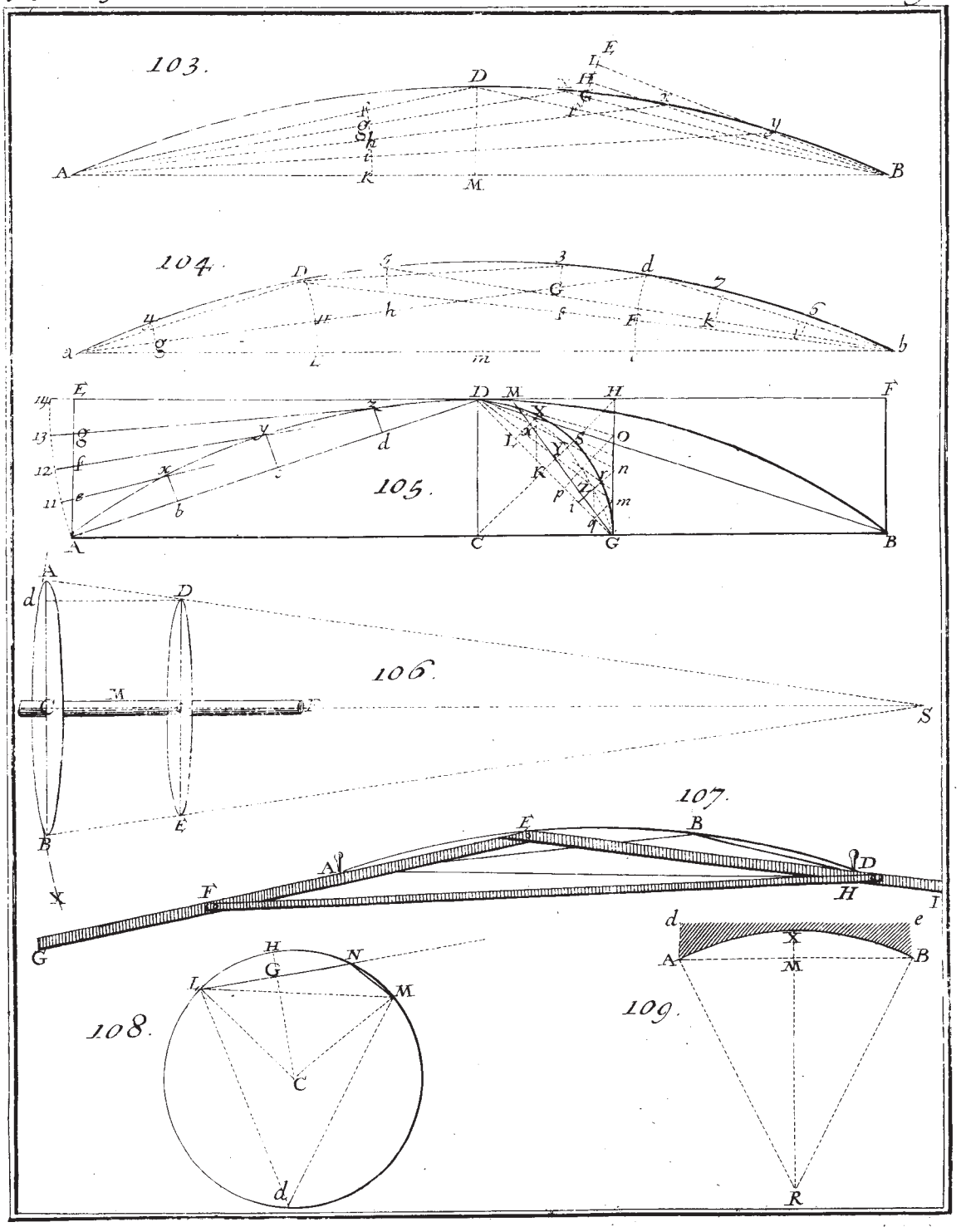
Se qualcuno fosse curioso di occuparsi in una maniera più approfondita e più generale della teoria delle curve a doppia curvatura, può studiare perfettamente sul bel trattato di M. Clairaut[5], del quale noi abbiamo parlato. Per capirlo non c'è bisogno che di una mediocre conoscenza del calcolo algebrico, tanto è chiaro e metodico nelle dimostrazioni.



[5] Citazione: Trattato di M. Clairaut per eventuali approfondimenti sulla teoria delle curve a doppia curvatura.

page. 129.

Planche 9.



CAPITOLO 1

SULLA DESCRIZIONE DEL CERCHIO

Abbiamo poche cose da dire sul cerchio, perché gli elementi ordinari della geometria ne trattano in maniera esaustiva per la pratica delle arti, e si suppone che il lettore sia già introdotto in questa materia.
Vogliamo solamente supplire a ciò che non si trova, se non indirettamente, per la soluzione di un problema che si presenta spesso in architettura, sia nell'esecuzione (nei disegni di volte) che nello "stondamento" dei muri dove il raggio è così grande che non si trova agevolmente il modo di tracciarlo, sia perché il luogo dove cade il centro è ostacolato da un oggetto, o nascosto in un bosco o edificio, sia perché la lunghezza di tale raggio rende difficoltoso l'uso della randa poiché se ci si serve della corda, questa si allunga e si altera la regolarità del contorno; se la si sostituisce con una catena, che sembra non allungarsi, ha anche essa degli inconvenienti; poiché l'attrito interrompe il movimento quando è poggiata di piatto su una superficie orizzontale o inclinata e la sua estensione è variata da qualche arrangiamento a cui si ricorre, cosa che succede quasi sempre.
È infatti dimostrato in Meccanica che, per piccolo che sia l'attrito, o il suo peso, se è appesa per i suoi estremi non si può tenere orizzontale e bisogna che questa forza nel mezzo, l'attrito o la pesantezza si annullino e affinché la curvatura resti sempre uguale, la forza o la potenza della mano che tira sia costante, cosa impossibile.
Di conseguenza non si può esser sicuri di descrivere regolarmente un arco di cerchio in questo modo.
Fare una randa con delle pertiche è più sicuro ma presenta delle scomodità, poiché bisogna aggiungerne pezzo per pezzo e tenerlo ben dritto senza farlo piegare, e supporre che il punto medio non sia occupato da un muro o altro oggetto.
È perciò utile poter evitare ciò con un metodo della geometria che è questo.

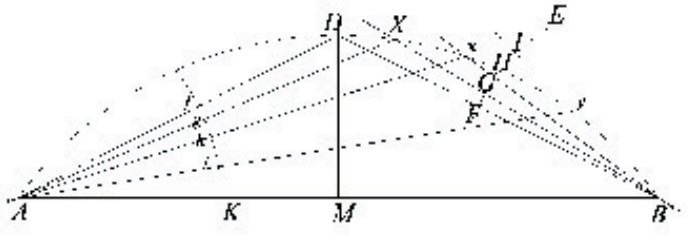
Problema I

PER 3 PUNTI DATI, TRACCIARE UN ARCO DI CERCHIO PASSANTE PER ALTRI PUNTI TROVATI O CON UN MOVIMENTO CONTINUO SENZA UTILIZZARE IL CENTRO.

Non si può senza 3 punti determinare né tracciare un arco di cerchio, poiché per 2 punti dati se ne possono far passare infiniti di diversa grandezza , ma essi possono essere dati in circostanze che offrano diversi modi di tracciarlo, poiché:
1)si danno tutti e 3 per la circonferenza;
2)o se ne danno 2 ed il terzo in ipotesi per il centro, determinando soltanto la lunghezza del raggio, senza specificarne la posizione riguardo ai punti dati.

Nel primo caso i punti possono essere dati a uguale distanza tra loro, cosa che succede spesso in architettura, dove si specificano i punti di origine, e quello di chiave per le volte, o quello del mezzo per lo stondamento dei muri; o ancora questi punti possono essere dati a diversa distanza.
Tali differenti esempi possono dare la possibilità di descrivere l'arco in diversi modi.

Fig. 103 Costruzione di un arco di cerchio per 3 punti dati (estremi e punto medio).



Siano ***(fig. 103)*** *A,D,B* i punti dati alle estremità e al punto medio dell'arco che si deve tracciare.
Tirate le corde *AB, AD, DB,* puntando il compasso in *A* con apertura a piacere, si tracci l'arco *fk* che interseca le corde *AD* e *AB* rispettivamente in *f* ed in *k*; poi con la stessa apertura, puntando in *B* si descriverà l'arco indefinito *FE* con il punto *F* sulla corda *DB*; poi per *A* si tireranno tante linee, ad esempio 3, per trovare dei punti nell'arco tra *D* e *B* e chiameremo tali linee *AX, Ax, Ay* che intersecano l'arco *fk* nei punti *g,h,i*.
Le porzioni di questo arco, prese tra *f* e *k*, si riportano sull'arco *FE*, all'interno di *F* e di *E*.
Così *fg=FG, fh=FH, fi=FI*, e per il punto *B* ed i punti *F,G,H,I* si tireranno delle linee tali che *BI* intersechi *Ay* in *y, BH* intersechi *Ah* in *x*, e *BG* intersechi *Ag* in *X*.
Si farà la stessa cosa per l'altra parte dell'arco *AD*.

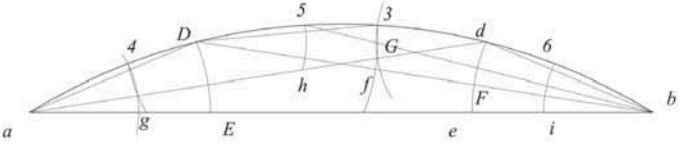


Fig.104 costruzione di un arco di cerchio per 2 punti estremi e altri intermedi.

Se il punto dato *D* non è nel punto medio come nell'esempio ***(fig. 104)***, si possono trovare più punti corrispondenti a tale punto *D* considerato come dentro un arco più grande o più piccolo.
Dal punto *a* come centro e raggio *aD*, si costruisca l'arco *DE*; dal punto *b* come centro e con la stessa apertura di compasso, si costruirà l'arco *ed*, uguale a *DE*, che ci darà un quarto punto *d*, poi si uniranno con una retta i punti *Db*, intersecando l'arco in *F*.
Dal punto *D* come centro e con uguale apertura *aD* si costruisca l'arco *f3=Fd* che darà il punto *3*. Si tracci una retta *da* che intersechi l'arco *f3* in *G*; dal punto *a* come centro e con raggio *d3*, si costruisca l'arco *g4=G3* che darà il punto *4*; così di seguito si troveranno tanti punti con i quali si potrà tracciare l'arco *Db* cercato.

DIMOSTRAZIONE

Nella prima costruzione, dove gli angoli *DAB* e *ABD* sono uguali, le rette *AX*, *Ax* e *Ay* formano degli angoli con la corda *AB* più piccoli di *DAB* di ampiezza di una parte dell'arco *fk* che ne è la misura: ad esempio *AX* dell'ampiezza di *fg*, della quale si è aumentato l'angolo *ABD*, tirando il punto *G* all'esterno, la retta *BX* che incontra *AX* in *X*; quindi la somma degli angoli *XAB*, *XBA*, è uguale a quella degli angoli *DAB* e *DBA*, dove l'angolo supplementare *AXB* è uguale all'angolo che è la circonferenza *ADB*: quindi [1] il punto *X* appartiene alla circonferenza dello stesso arco di cerchio come i punti dati *ADB*. Stessa cosa per i punti *x* e *y*.

Nel secondo caso è chiaro che si sia costruito l'angolo *bda=aDb*, come pure l'angolo *Dbd=bD3; ad3=da4*. Quindi tutti i punti trovati appartengono allo stesso arco come quelli dati *aDb*, poiché gli angoli compresi in ogni segmento sono sempre uguali a quelli compresi nelle corde dei punti corrispondenti *D-d*, *d-3*, *3-4*, *D-5*, ecc. Come volevasi dimostrare.

COROLLARIO

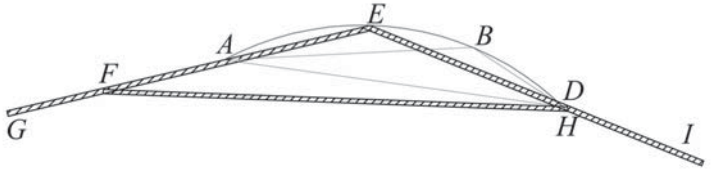
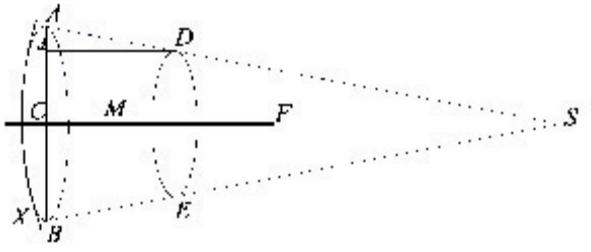


Fig. 107 Posizione del cerchio appena dimostrata, si vuole arrivare ad un modo di descrivere un arco di cerchio con un movimento continuo e senza l'uso del centro e senza conoscere la lunghezza del raggio, ma soltanto 3 punti dati.

Dalla proprietà del cerchio appena dimostrata, si vuole arrivare ad un modo di descrivere un arco di cerchio con un movimento continuo e senza l'uso del centro e senza conoscere la lunghezza del raggio, ma soltanto 3 punti dati.

Poiché, se si costruisce ***(fig. 107)*** con due regoli di legno *GE*, *EI*, fissati nel mezzo grazie ad un terzo *FH*, un angolo *GEI* uguale all'angolo *ABD*, da cui il segmento *AEBD* è capace, e si faccia scorrere questo strumento tra due chiodi o perni *A*, *D*, la matita nella sommità *E* traccia l'arco richiesto *AEBD* che passerà per i 3 punti dati *ABD*.

Bisogna precisare che ciascuna riga *EG*, *EI* deve essere lunga meno dei 2 punti *A* e *D* più lontani, affinché il vertice *E* sia portato in *D*, il segmento *EG* tocchi e si appoggi ancora al punto *A* che deve stabilire la direzione.



DIVERSAMENTE

Si può ancora tracciare l'arco richiesto con un movimento continuo con un altro metodo, ma più complicato del precedente. Due ruote *AB*, *DE*, di diametro diverso e collegate su un asse comune *FC* ***(fig. 106)***, sul quale la più grande *AB* è fissa, mentre *ED* è mobile, per poterla avvicinare o allontanare dalla prima se occorre e fermarla con un perno; poi puntando sull'asse verso il punto medio *M* si fa girare questa specie di treno zoppo, dove le ruote descrivono 2 archi di cerchio concentrici, è chiaro che i loro raggi siano tanto più lunghi dei diametri delle ruote meno diversi e più lontani tra loro; se fossero infinitamente più differenti, le loro tracce sarebbero linee dritte.

Questo metodo, inventato da Perrault, è più ingegnoso che utile; è praticamente impossibile eseguirlo con la precisione che richiede, poiché l'esperienza ci dimostra che è molto difficile far andare diritto un treno di due ruote uguali, a maggior ragione in linea curva con due diverse, sia per l'imprecisione della direzione della mano, sia per l'attrito tra l'asse ed il terreno sul quale si fa ruotare, e non si può controllare la

[1] per la 21 del 3° libro di Euclide

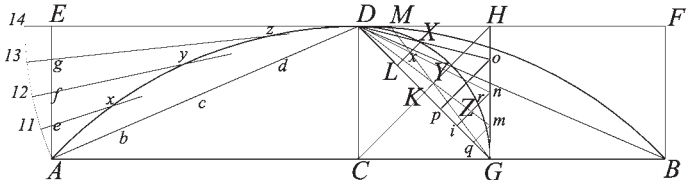
regolarità dell'arco che si va tracciando. Quale che sia l'esecuzione, se si vuole conoscere la lunghezza del raggio che la traccia della ruota grande descrive, non rimane che fare questa analogia: come la differenza *Ad* dei due raggi delle ruote *AC, Dc* sta al diametro *AC* della grande come la distanza *Dd* delle due ruote sta al raggio *SC* del cerchio o arco che la grande descrive, dove poi al contrario si ricava l'analogia necessaria per trovare la distanza delle due ruote, quando il raggio *SC* è dato, facendo *CA : CS = dA : dD*, ciò è chiaro guardando la figura 106, per i triangoli simili *SCA, DdA*.

Si può vedere che con due ruote di 6/7 pollici di diametro e un piccolo asse si potrebbero tracciare i centri di volte più grandi, se l'esecuzione corrisponde al principio su cui la macchina è basato, ma non se ne consiglia l'uso per le ragioni elencate.

ERRORE DEL DISEGNO DEL MAESTRO BLANCHARD

Il maestro Blanchard, nel suo trattato sul Taglio dei legni[2] ha voluto risolvere il problema con un disegno dove ha mostrato l'errore per far ricredere gli operai che non hanno le basi necessarie per scorgerlo.

Fig. 105 Individuazione di 3 punti (estremi e medio) per tracciare un arco di cerchio.



Supponiamo ***(fig. 105)*** 3 punti dati *A, B, D*. Egli disegna un parallelogramma *AEFB*, tira le corde *AD, DB* che divide in un numero di parti a piacere, qui ad esempio in 4, nei punti *b, c, d* sui quali tira le perpendicolari *bx, cy, dz*. Poi, dividendo il lato *AE* in eguale numero di parti, traccia le linee per unirli al punto *D*, intersecando i precedenti punti *x, y, z* che si trovano sulla circonferenza dello stesso arco di cerchio dove si trovano i 3 punti dati *A, B, D*.

È facile dimostrare che si sbaglia guardando solamente il disegno della costruzione, fatta in un quarto di cerchio come in *DG*, poiché dà al posto del quarto di cerchio *DGS* una curva *DYZG*, che si considera all'interno: ma conviene spiegare la figura con i criteri della geometria; è stato dimostrato[3] che le rette equidistanti dal centro del cerchio sono uguali tra loro; di conseguenza le rette *LX, iZ* equidistanti (per costruzione) dal punto di mezzo *K* della corda *DG* (uguale al raggio *CS*), devono essere uguali; ma non lo sono, quindi ***elles ne font pas terminées à la circonferenze du cercle.***

[2] alla pag. 6
[3] "Gli elementi di Euclide (L. 3, prop. 14)

Per vederlo subito, si deve portare la lunghezza *GM* in *DM* e tracciare *MG* che intersecherà la retta *LX* vicino al punto *x* che cade all'interno del cerchio *DSG*, di conseguenza ***il s'en faut d'environ la moitie' de la longueur iz que le point z parvienne au cercle en r.***

DIMOSTRAZIONE

Per dimostrarlo, sia la retta *KY* prolungata in *H*, e si portino per i punti *o* ed *m* le parallele *op, mq*.

Per la similitudine fra i triangoli *GHK* e *Gop*, si avrà che *Go : GH = Gp : GK; ma Go = ¾ GH*, quindi anche *Gp = ¾ Gk*; di conseguenza *pK* è l'ottava parte di *DG*, e *Dp* 5/8; ora, a causa del triangolo rettangolo isoscele *opG*, la retta *po* sarà uguale a *pG*.

Per rendere la dimostrazione più chiara, si supporrà ciascuna delle 8 parti suddivisa in 10, per evidenziare meglio la differenza della lunghezza delle rette *Lx* e *iZ*.

Per la similitudine dei triangoli *DLX, Dpo*, si avrà che *Dp*(50) : *po*(30) = *DL*(20) : *LX*(12), e per la similitudine dei triangoli *Dqm*, *Diz* si avrà che *Dq*(70) : *Di*(60) = *qm*(che è uguale a *qG*(10)) : *iz*8*4/7; dunque le rette *Lx* e *iz* stanno tra loro come 12 sta a 8*4/7, come a dire che sono diverse, e di conseguenza i punti *X* e *z* non possono stare sulla stessa circonferenza. In questa dimostrazione non si vede che il rapporto di queste rette tra di loro. Se qualcuno volesse verificare con la figura il rapporto con quelle che arrivano fino al cerchio in *S* o in *r*, lo potrà fare nel modo seguente.

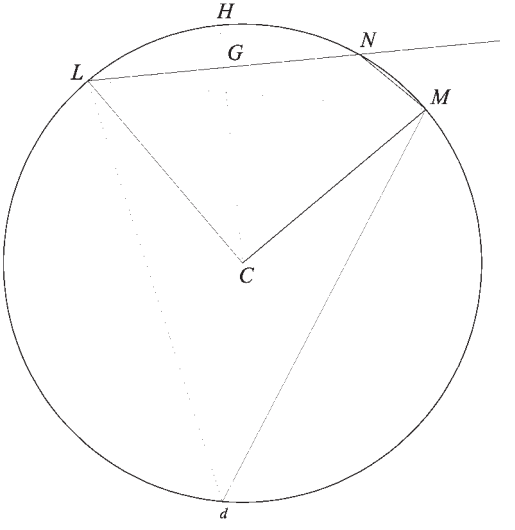


Fig. 108 Individuazione dell'angolo *LNM* per tracciare un arco di cerchio.

Tutti coloro che conoscono un po' di algebra sanno che l'equazione del cerchio (chiamando *d* il diametro, *x* l'ascissa e *y* l'ordinata) è *dx - xx = yy*; si cercherà il diametro ***en quarrant*** *DK* e *KC* e tracciando la radice quadrata della loro somma, pari al raggio *DC*, e il suo doppio al diametro *d*; poi, per avere l'ascissa *x* si aggiungerà la lunghezza *Ki* al raggio, dove si troverà *KL*; per la metà di queste 2 grandezze, si avrà *dx - xx*, si traccerà la radice quadrata da cui si otterrà la lunghezza *CK*, e il resto sarà la lunghezza *ir* che arriva al cerchio in *r*; da questo calcolo risulterà che il punto *x* è all'interno del cerchio più o meno di 1/3, e *z* di ¼ ("più o meno" a causa delle frazioni che rimangono).

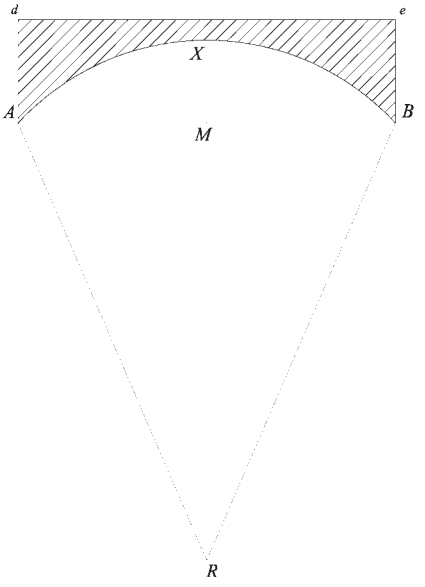
Ciò che noi dimostriamo qui con un quarto di cerchio si può facilmente ripetere per tutti gli archi con un minor numero di gradi; si troverà solo che la differenza delle lunghezze delle rette *LX* e *iz* diminuirà, ma esisterà sempre; così il metodo del Maestro Blanchard sarà sempre sbagliato per tracciare un arco di cerchio, e potrebbe servire solamente per un arco di sezione conica aperta, che non è il nostro problema.

Non resta che dare la soluzione del "secondo caso" di questo problema dove si è supposto che vi siano 2 punti dati per la circonferenza dell'arco di cerchio richiesto, e invece del terzo punto il raggio, indipendentemente dalla posizione del centro (che non si vuole o non si può usare).

Siano ***(fig. 108)*** *L* e *M* i 2 punti dati, unendoli si ottiene la corda dell'arco richiesto, e poiché si conosce il raggio, si ricavano i 3 lati di un triangolo isoscele *LMC* da cui si può trovare l'angolo *C* con la trigonometria, o meccanicamente con un triangolo simile fatto con una scala.
La metà dell'angolo *LCM* sarà il supplementare dell'angolo *LNM* necessario per tracciare l'arco richiesto per mezzo della descrizione del caso precedente, con 2 regoli che formano l'angolo *LNM* di cui il segmento *LHNM* è capace.

O ancora ***(fig. 109)*** si cercherà il punto *X* medio del segmento *AXB* con la metà della freccia *MX*; così, avendo il raggio dato *AR* è la metà *AM* della corda *AB*, si troverà il quadrato di *AM*, e del resto si estrarrà la radice quadrata del quadrato (?) di *AR* per avere il lato *MR*, dal quale avremo *MX* per la freccia cercata, e di conseguenza il punto *X* medio dell'arco richiesto. Grazie al punto *X* e agli altri due, *A* e *B*, si traccerà l'arco come si è detto nel primo caso.

Si può proporre una terza soluzione ***(fig. 108)*** di questo problema dando una precisa misura al perimetro dell'arco che si vuol descrivere , al posto dei 2 punti degli estremi, e poi la lunghezza del raggio; si avrà allora l'angolo *LMN* grazie ad un calcolo molto semplice.



Innanzitutto, per la metà della lunghezza del raggio sarà di aiuto trovare l'intera circonferenza, raddoppiarla e fare una proporzione, come 7 : 22 o 100 : 314; così il diametro dato sta alla circonferenza totale misurata in piedi, pollici e linee. Poi con una seconda proporzione si troverà il numero di gradi che deve avere l'arco di lunghezza data, dicendo che il valore trovato con la prima proporzione per l'intera circonferenza, sta a quello dell'arco dato: così 360 gradi dell'intera circonferenza stanno al numero di gradi dell'arco cercato, di cui è dato il perimetro; si avrà allora un angolo il cui supplementare sarà l'angolo cercato *LNM*. Così, supposto l'angolo trovato di 60°, si ottiene 180°, valore di 2 angoli retti: rimangono 120° per l'angolo cercato, che si traccia con 2 regoli, se lo si vuole descrivere come si è detto nel primo caso.

DIMOSTRAZIONE DEL 1° E DEL 2° CASO

L'angolo *LNM* vale la metà dell'arco sul quale insiste, e l'angolo *LdM* vale ugualmente la metà dell'arco *LNM*. Da cui, insieme, valgono la metà del cerchio, cioè 2 angoli retti . Di conseguenza la metà di *LCM*, che è uguale a *LdM* [4] sarà il supplementare dell'angolo cercato *LNM*, come volevasi dimostrare.

PRATICA

Questo problema è necessario per l'esecuzione di tanti disegni sul taglio delle pietre dove bisogna tracciare degli archi di cerchio con i centri molto lontani. Ad esempio, per trovare l'arco di sviluppo della base della porta di una torre rotonda in ***talud***, che è quella della porzione di un cono, il

[4] per la 20 del 3° di Euclide

cui vertice sta nel punto di incontro dei lati del cono prolungati, cioè dei lati della torre ***en talud,*** può trovarsi ad una considerevole distanza dalla base; supponiamo ad esempio che la torre abbia solo 15 piedi di raggio, 30 di altezza e 1/10 di ***talud***, il vertice del cono, che sarà il centro dello sviluppo, sarà a 50 piedi, lontano dalla circonferenza. Questo rende i precetti del Padre Deran e del suo seguace M. de La Rue impraticabili senza l'aiuto di questo problema.

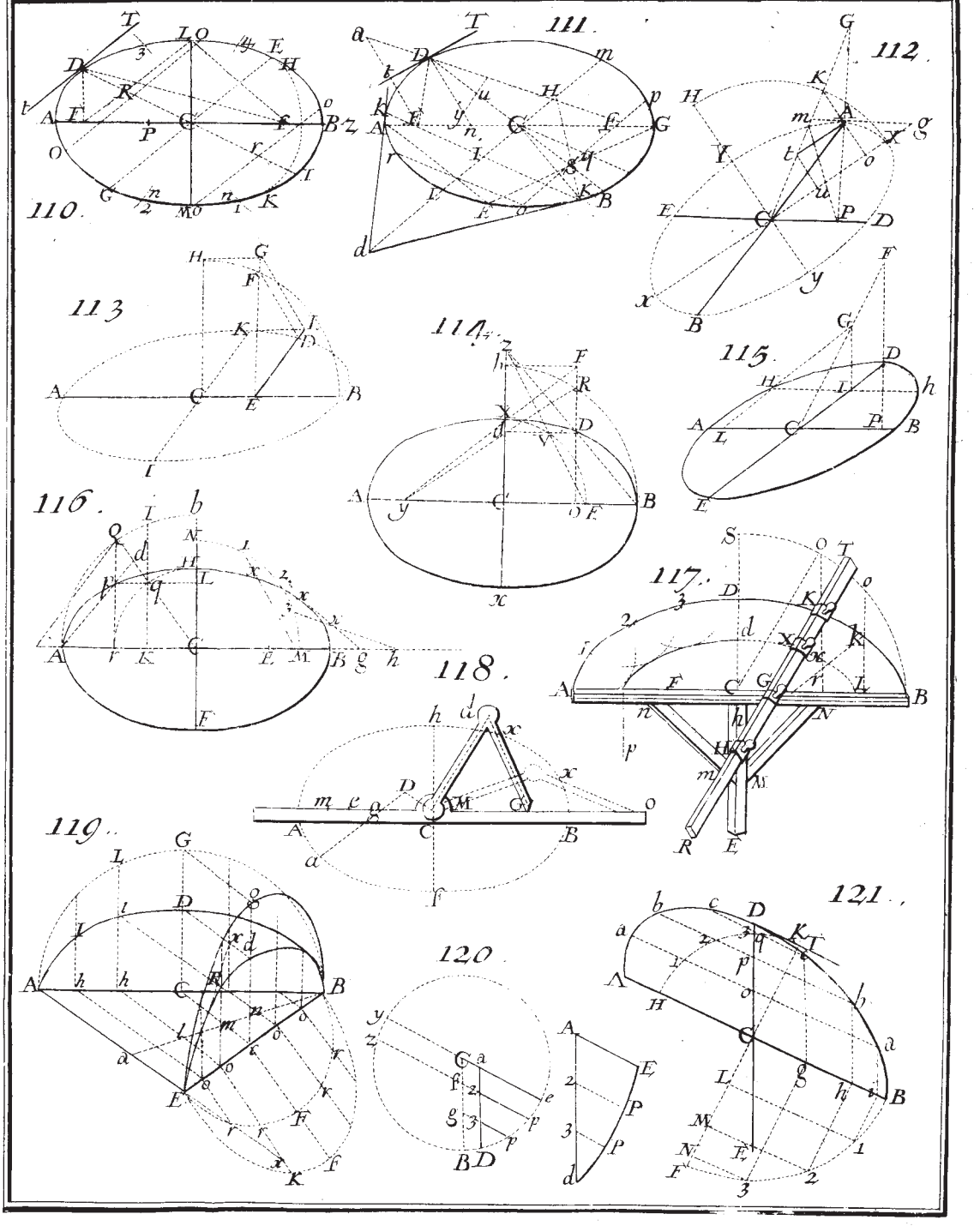
Il problema è necessario anche per trovare gli archi dei pannelli di intradosso dei primi ***affifes*** delle volute sferiche, sferoidali,
e nel nucleo del sistema di pratica che esegue queste volute per lo sviluppo di coni tronchi, come si dirà a suo tempo.

Per abitudine utilizzo la seconda pratica del secondo caso ***(fig. 109)*** per eseguire gli stondamenti dei controscarpa delle nostre fortificazioni per mezzo di un pannello *Ad* e *BX* ricavato da una tavola tagliata, come la parte tratteggiata della figura che metto sul rivestimento facendolo scorrere sui picchetti; ma come il paramento a ***talud***, questo arco di cerchio aumenta il raggio mano a mano che il muro si alza, si può allora ricorrere un pannello convesso sull'ultimo che è a piombo, per misurare lo spessore del contorno del paramento a ***talud*** ad ogni ***affifes***; tale metodo è di facile esecuzione per gli operai.

Se l'arco di cerchio che si deve descrivere è così grande da non poter utilizzare il compasso, per fare gli angoli uguali tra loro, ci si potrebbe servire di un semicerchio o Grafometro e dei picchetti di allineamento invece delle linee tracciate con riga o corda, da cui si troverà l'intersezione dei raggi visuali dei punti *A* e *B* per il centro dello strumento.
È cos che l'architetto della nuova città di *Carles-Rouhe*, che ha fatto costruire il Mangravio di Bade-Dourlack, ha potuto tracciare le strade concentriche intorno al castello di 200 -300 metri di raggio, come si può vedere a colpo d'occhio.

page 149.

Planche 10.



CAPITOLO II

Come dovrebbe essere fatta l'Ellisse assegnata.

Problema II

Trovare: 1° il centro. 2° i Diametri coniugati. 3° gli Assi. 4° i Fuochi di un'ellisse data.

*1° (Per il centro).*Sia data l'Ellisse *DEIG* (***Fig. 110***) si tracciano le linee *OO,oo* parallele fra di loro e fino ad incontrare la circonferenza dell'Ellisse. La si taglierà in due parti uguali in *r* e *R*, per le quali si farà passare una retta *DI* che formerà un Diametro: il punto *C*, è a metà di questo diametro, sarà il Centro che si cercava.

*2° (Per un diametro).*Dal Centro *C* si traccia una retta *EG* parallela ad *OO*, questa retta sarà un diametro coniugato al diametro *DI*, perché è parallelo alle ordinate *or OR* e alla tangente *Tt*, tracciata nel punto *D* del diametro *DI*.

3°(Per gli Assi). Partendo dal Centro *C*, e si apre il compasso a piacere e si descrive un arco *KH* che tocca la circonferenza dell'Ellisse in *K* e in *H*, e da questi punti presi come centri, e con apertura a piacere del compasso, si traccia una sezione
di due archi dello stesso raggio in *Z*, la linea *AB* tracciata passa per i punti *C* e *Z*, e finisce alla circonferenza dell'Ellisse da una parte e dall'altra, formerà uno degli Assi, e la retta *LM*, che sarà perpendicolare, passando per il centro *C* determinerà l'altro Asse.

4° (Per i fuochi). Si apre il compasso cui l'ampiezza sia uguale all'intervallo *AC* e si considera come il Raggio di un Cerchio, che avrà *L* o *M* per Centro, formeranno degli archi che intersecheranno l'asse *AB* nei punti *F* e *f*, questi punti saranno i Fuochi dell'Ellisse.

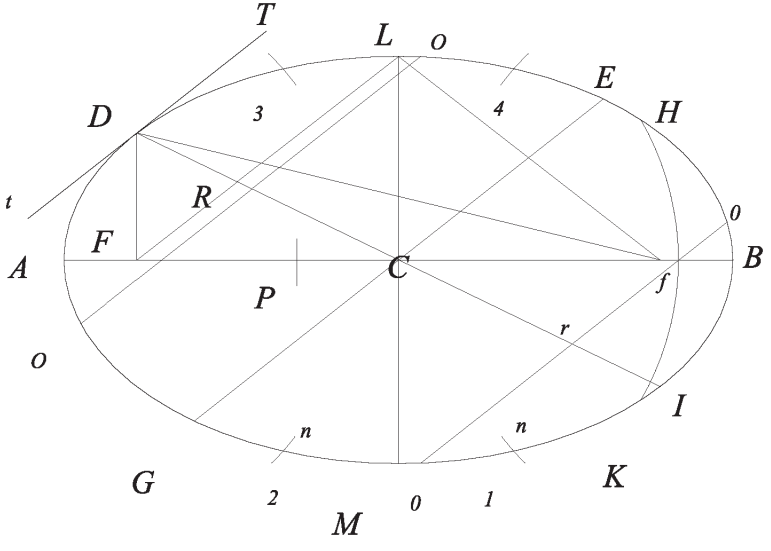


Fig. 110 Ellisse costruita per stadi, trovando in sequenza: il Centro, i Diametri coniugati, gli Assi e i Fuochi.

DIMOSTRAZIONE

Per la dimostrazione (*Art. 20*) i Diametri saranno delle rette che taglieranno in due parti uguali tutte le linee parallele fra di loro, di conseguenza anche la faccia dell'Ellisse, perché la si può considerare come la composizione di un'infinità di linee parallele infinitamente vicine.

2°. Per la dimostrazione (*nell'Art. 24*) il diametro parallelo a questo si chiama Coniugato.

3° Per la costruzione, i punti *K* e *H* si trovano alla stessa distanza dal centro *C*, e da quì si traccia una retta *AZ* perpendicolare alla corda che verrà tracciata da *H* in *K*, la quale sarà una doppia ordinata, che la taglierà in due parti uguali, e l'angolo retto, quello che si otterrà per definizione sarà un'Asse.

4° (Art. 28). Infine i punti *F* e *f* sono i Fuochi dell'Ellisse, perché formano delle rette *FD, Df* che presi insieme saranno uguali, il punto *D* giacerà sulla circonferenza dell'Ellisse. (*Art. 29*).

PRATICA

Si troveranno nella quarta Parte di questo Trattato più occasioni per far uso di questo Problema; perché l'Ellisse e la Curva la più ordinaria nella coupe de Pierres.

Problema III

Per un punto dato tracciare la Tangente ad un'Ellisse data.

I punti dati possono essere nella circonferenza, o al di fuori.

1° Se è nella circonferenza, per esempio in *D*, (***Fig 111***) e che i fuochi *Ff* siano dati, si manderanno da questo punto *D* delle rette *FD*, *fD* che formeranno un' angolo in *D*, che dividerà in due parti uguali la retta *Dn*; per questo punto *D* si traccia *TD* perpendicolare a *Dn*, questa retta *TD* o *Tt* sarà la tangente che si cercava.

Oppure si farà *fa* = all' Asse maggiore *GA*, da cui si traccerà *aF* che la dividerà in due parti uguali in *t* da dove si manderà una retta al punto dato *D*, la retta *tD* sarà la Tangente richiesta.

2° Se non si hanno i Fuochi; dopo avere trovato il centro *C* (***Fig. 111***) si traccerà per il punto dato *D* il diametro *DB* , e un altro preso a piacere come *GA* , per una delle due estremità da *A* o *G* si manderà la retta *AE* parallela a *DB*, che incontrerà l'Ellisse in *E*, da dove si traccerà una retta che incontri il punto *G* ottenendo *EG*, la quale sarà un'Ordinata al diametro *DB*, dalla quale si manderà una parallela per il punto *D*, la retta *tT* ottenuta sarà la Tangente richiesta.

3° Se il punto *D* dato è fuori dall'Ellisse come in d, si traccia per il centro *C* la retta *dC*, si farà *CK* perpendicolare a *Cd*, e uguale a *CL* fino ad intersecarsi con la retta *Cd*, e della circonferenza dell'Ellisse; la fuga tracciata *dK*, dalla quale si manderà la perpendicolare *KH*, che intersecherà *dC* e prolungarla sino in *H*, si porterà la distanza *CH* in *Ci* nella retta *Cd*, in seguito si traccerà il diametro *Lm* con un'ordinata qualunque (vedere l' art 31) per la costruzione precedente, quello che è stato fatto; giacchè non si tratta che di mandare una parallela a *mL* per un punto preso a piacere, come *oP*, che la dividerà in due parti uguali in *q*, & e tracciata *qC* si traccia la parallela or, dalla quale si traccerà una

parallela *iK* dal punto i, che incontrerà la circonferenza in *K*, la retta

tracciata da questo punto *K* al punto dato d fuori dall'Ellisse sarà la Tangente che si cercava.
Si procede col prolungamento di *Ki* fino ad incontrare la circonferenza dell'Ellisse in *k* da questo punto sarà ancora mandata un'altra retta, da *d* in *k*, è interessante sapere che da uno stesso punto dato *d*, si possono tracciare due Tangenti all'Ellisse *AEKGA*, una da una parte, l'altra dall'altra.

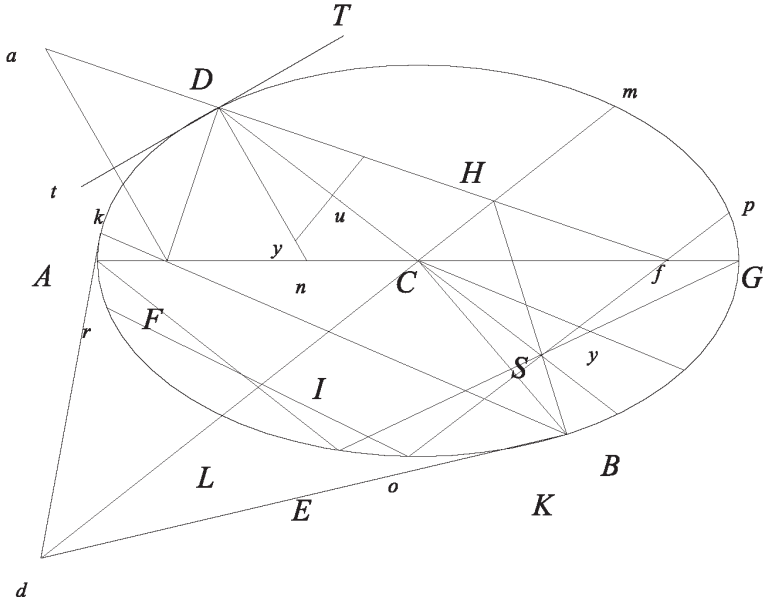


Fig. 111 Per un punto dato è stata tracciata una semplice ellisse.

DIMOSTRAZIONE
Per il primo caso, questo problema è stato dimostrato per la Sezione Conica che gli angoli *FDt*, e *fDT* sono uguali tra loro; Si è aggiunto da una parte e dall'altra degli angoli *FDn*, e *fDn* uguali fra di loro per la costruzione. Gli angoli *nDt* e *nDT* saranno di conseguenza uguali fra di loro; dunque *tT* sarà una Tangente al punto *D*.
Secondariamente. (***Fig. 97***). A causa delle parallele *AE*, *CB*, *GC* : *CA* :: *GS* : *ES*; ma *AC* semi diametro è uguale a *GC*, *GS* = *SE*, la quale è un'ordinata del diametro *DB*, perché la divide in due parti uguali; e (per la costruzione) Dt o tT è parallela a *SE*, dunque *Dt* è una Tangente dell'Ellisse nel punto *D*, come dovevasi dimostrare.
Terzo caso. Per la costruzione, si fa *CH* terzo proporzionale alla distanza dal centro *C* al punto *d*, fino ad incontrare la tangente *Kd* e di un semi diametro *CL*, prolungato in *d*, e da questo semi diametro *CL*, si fa anche *Ci* = *CH*, dunque *dC* : *CL* :: *CL* : *Ci*, distante dal centro *C* alla sottotangente *id*; dunque (art 46) *dK* e *dk* saranno le Tangenti all'Ellisse nei punti *K*, o *k* tracciata da un punto dato d fuori da questa Curva, come dovevasi dimostrare.

PRATICA

Questo problema è necessario per evitare le curve difettose nella congiunzione delle linee rette, con degli archi Ellittici, in più circostanze delle parti di rette contigue alle curve, come succede sovente in Architettura; perché l'angolo fatto incontra la Curva & quello con la Tangente è il più piccolo che si possa immaginare; dunque esso si differenzia poco dalla linea retta, nella congiunzione della curva, per la confusione il passaggio della linea retta alla curva diventa impossibile da vedere.

Come fare l'Ellisse richiesta
Problema IV
Dato un Diametro qualunque e la sua Ordinata, trovare il suo coniugato.

Sia *AB* (***Fig. 113***) il diametro dato e *ED* la sua ordinata, dal punto *C* centro di *AB*, tiro una perpendicolare *CH*, da cui si descriverà il quarto di cerchio *HFB*, in seguito si traccerà dal il punto *E* che incontra l'ordinata dell diametro *AB*, una retta *EG* parallela e uguale a *CH*, che intersecherà il cerchio in *F*, da qua e dall'estremità *D* dell'ordinata *ED*, si traccerà la retta *FD* e si manderà per il punto *G* la parallela a *GL* che incontrerà *ED* prolungato in *L*. Dico che *EL* sarà uguale a un semi diametro Coniugato che si cercava; si manderà dal punto *C* la retta *IK* parallela ad *EL*, si traccerà dal centro *C* da una parte e dall'altra *CK* e *CI* uguale a *EL*.

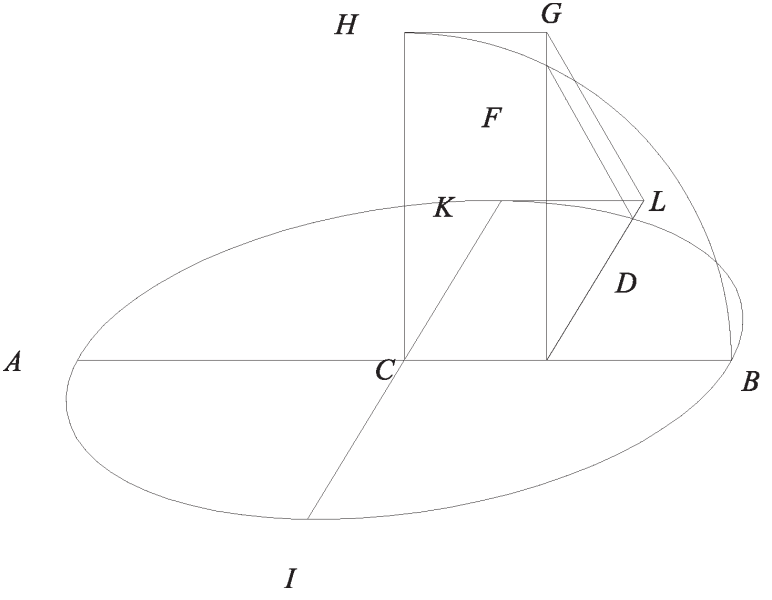


Fig. 113 Impiego di un Ellisse per trovare uno dei diametri coniugati avendo almeno un diametro e la sua ordinata.

DIMOSTRAZIONE
A causa delle parallele *GL*, *FD*, si avrà *EG* : *EL* :: *EF* : *ED*,e *EG* = *CH* e *EL* = *CK*, dunque *EF* : *CH* :: *ED* : *CK*; come dire, che le ordinate al diametro *AB* nel cerchio formano lo stesso raggio di quelli della curva, che passerà
per il punto *K* e *D*, questa è una proprietà dell'Ellisse; (art. 41) dunque si ottiene *CK*, raddoppiandola si ottiene *KI* che è il diametro coniugato di *AB*, come dovevasi dimostrare.

Problema V

Dati i Diametri coniugati, trovare gli Assi dell'Ellisse.

Siano (***Fig. 112***) le rette *AB*, *DE* date come diametri Coniugati di un'Ellisse da costruire, che si divide in modo uguale nel punto *C* centro dell'Ellisse. Dal punto *A* estremità del più grande, sarà abbassata la perpendicolare *AP*, e la si prolungherà fino ad incontrare G, portando la metà di *CD* del più piccolo in *AG*. Dopo aver tracciato *GC*, che la dividerà in due parti uguali, in *m*, da dove si traccerà per il punto *A* la retta *mg*, che sarà uguale a *mG*. Dal punto *g* si traccerà passando per il centro *C* la retta indefinita *gx*, e si avrà la posizione dell'Asse maggiore, dunque la lunghezza *Xx* sarà determinata portando da una parte e all'altra del centro *C* l'ampiezza della retta Cm e *mA* in *CX* e *Cx*; infine si alzerà dal punto *C* una perpendicolare a *gx*, dalla quale si porterà da una parte & dall'altra la lunghezza *Ag* da *C* in *Y*, e da *C* in *y*; la retta *yY* sarà l'Asse minore, come dovevasi dimostrare.

DIMOSTRAZIONE
Dal centro *C* e dal raggio C*X*, si descriverà un quarto di cerchio *XH*, e si manderà per il punto *A* la retta *Ko*, perpendicolare a *XC* che passerà dall'intersezione *K* dell'arco di cerchio *HX*, e della retta *CG*, perché *mA* = *mt* = *mK* e *At* parallela alla stessa.
Per supposizione il punto *A* che è all'estremità di uno dei due diametri, è nella circonferenza dell'Ellisse *AEBD*, bisogna dimostrare che i punti *X* e *Y* staranno sulla stessa circonferenza, e all'estremità degli assi.
Pertanto *mg* = *mC* (per la costruzione) *mt* sarà uguale a *mA*, e *tC* = *Ag* = *CY* (per la costruzione) or a causa dei triangoli fondamentale *CKo*, *Ctu*, *Ko* : *Ao* = *tu* :: *CK* = *CX* = *CH* : *Ct* = *CY*; dunque (*Art. 41*) il punto *Y* è nella circonferenza dell'Ellisse, lo stesso che il punto *X*, come è stato trovato dà la prova che è la stessa cosa.
E poiché le linee *CX* e *CY* sono perpendicolari fra di loro, formano dei semi – assi; dunque *Xx* e *Yy*, sono gli assi richiesti, come dovevasi dimostrare.

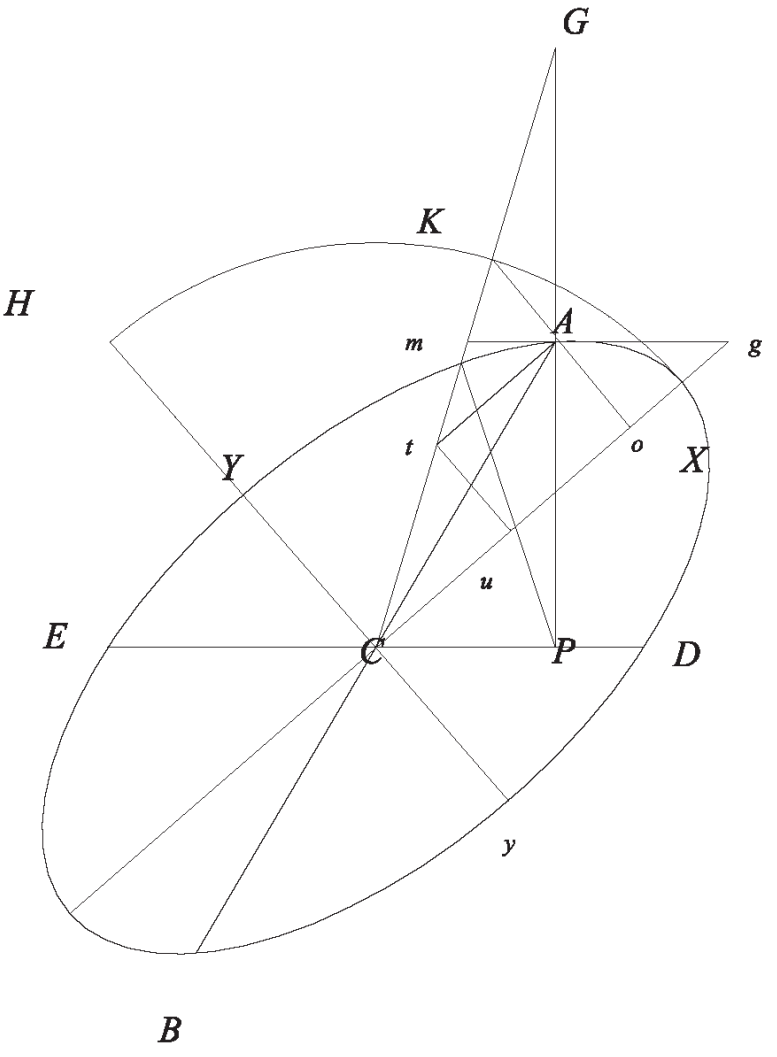


Fig. 112 Costruzione di un'ellisse avendo soloi diametri coniugati.

COROLLARIO
Da qui si traccia in maniera semplice la descrizione di un' Ellisse per un movimento continuo, o meglio con uno strumento composto da tre pezzi, specie,un piccolo braccio dritto *Cm*, un triangolo *mAP*, dunque l'angolo in m è attaccato attraverso un perno in m a questo braccio, e un importante regolo che si applica per il diametro *DE*, dal quale il piccolo braccio *Cm* è attaccato in punto *C* da un perno, grazie a questo può tornare, fino all'angolo del triangolo a formare l'altra estremità *m* : si conduce dallo stesso angolo *P* una linea retta, lunga quanto il regolo *DE*, si metterà

una matita nell'angolo in *A* che descriverà contemporaneamente il semi Ellisse *XYx*, lo stesso si può fare per il regolo posto nel triangolo *AmP*, e il braccio *mC* dall'altro lato del regolo *DE*, e la lunghezza coprirà una parte che non si può tracciare, questo perché si dovrà cambiare di lato.
Si può osservare che la retta *GP* non è sempre una forma definita diametro *CD*, e dalla perpendicolare *AP*, questa è sempre differente, infatti la direzione del braccio *Cm* cade tra i punti *A* e *P*.

PRATICA
Questa proposizione è utile per molti Trattati de la coupe de Pierres dove gli Assi coniugati sono stati assegnati, come negli Archi – dritti delle Defcentes in questo egli fornisce i mezzi per tracciare le Ellissi, attraverso il movimento continuo del Trattato del Giardiniere, dunque, ne parleremo nel Problema VII.

Problema VI
Dato un' Asse e un punto nella circonferenza dell' Ellisse, trovare l'altro Asse.

Questo problema non è che un'estensione del Corollario del Problema IV, perché le ordinate degli Assi sono delle perpendicolari; Dato un Punto nella circonferenza è come se stia dando l'ordinata dell'asse maggiore o minore.
Principalmente, dato l'Asse maggiore, cercare quello minore.
Sia *AB* l'asse maggiore (***Fig. 114***) e *D* il punto dato nella circonferenza dell'Ellisse, si abbasserà da questo punto passante per *AB* la perpendicolare indefinita *OF*, preso il punto medio *C* di *AB* come centro, e *CB* il suo Raggio, si descriverà un quarto di cerchio Bb, che taglierà *OF* in *R*; si porterà *OF* sul Raggio *CB*, cui si troverà il punto *F*, e la lunghezza *OD* in *Cd*, parallelamente ad OF.
Per i punti *R* e *d*, si traccerà *Ry*, che taglierà l'asse dato *AB* in *y*.
Se il punto *y*, lo uniamo col punto *F*, attraverso una retta *yF*, questa taglierà *CD* prolungato in *X*; dico che *CX* è la metà dell'asse minore che si cercava.
Secondariamente, dato l'Asse minore, cercare l'Asse maggiore.
Per il punto *D* posto sulla circonferenza, si traccerà una retta *CX* perpendicolare a *Dd*, poi dal centro *C*, e *cX* metà dell'asse minore dato come suo raggio, si descriverà il quarto di cerchio *XE* che taglierà *Dd* nel punto *V*, e la perpendicolare *AB* passante per il centro *C* nel punto *E*, per i punti *E* e *V*, si traccerà la retta Ez, che incontrerà il prolungamento *CX* nel punto *Z*; per i punti *Z* e *D*, si traccerà una retta *ZB*, che incontrerà la perpendicolare *AB* nel punto *B*, dico che *CB* è la metà dell'asse maggiore che si cercava.

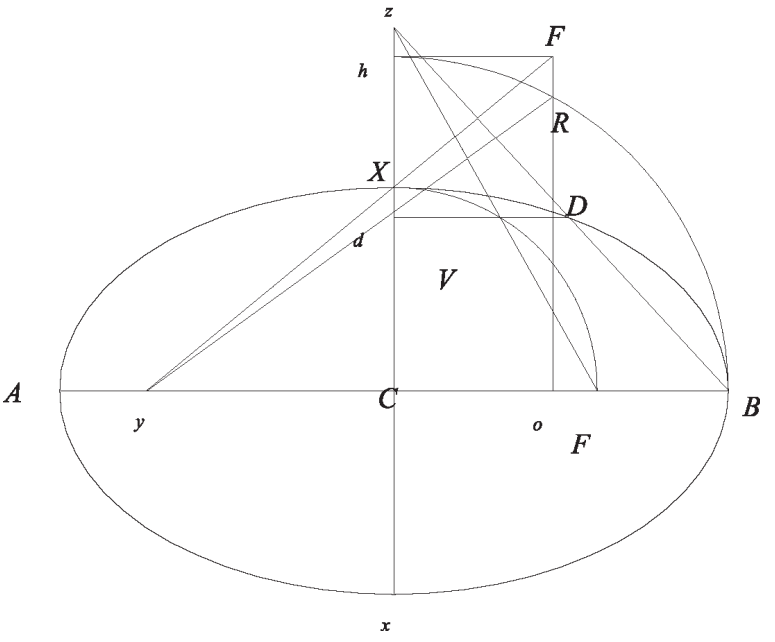


Fig.114 Costruzione di un'ellisse conoscendo solo l'Asse maggiore.

DIMOSTRAZIONE
Per il primo caso, a causa del Triangolo fondamentale *OyR*, *yCd*, e *yOF*, *yCX*, si avrà *yO* : *OR* :: *yC* : C*d*, e *yO* : *OF* :: *yC* : *CX* dunque *OR* : *OF* = *Cb* =*CB* : : *OD* = *Cd* : *CX*, dunque (art. 41) il punto *X* è nella circonferenza dell' Ellisse, e all'estremità dell'asse coniugato *AB*.
Per il secondo caso, a causa dei Triangoli fondamentali *ZCE*, *ZdV* e *ZCB*, *ZdD*, si avrà *Zd* : *dV* :: *ZC* : *CE*, e *Zd* : *dD* :: *Zc* : *CB*, dunque *dV* : *dD* : : *CE* = *CX* : *CB*, dunque (*per l'Art. 41*) il punto *B* sarà all'estremità dell'asse maggiore, come dovevasi dimostrare.

PRATICA
Entrare nel merito di questo Problema, se ne parlerà nel 4° Libro che è necessario per il Trait du Quartier de Vis fufpendu, seguendo il metodo di P. DERAN, e di M. de la Rue, e per il Trait de la Tompe più utilizzato in un angolo faillant
Potrà anche servire per l'abbassamento delle Colones, nel luogo della Conchoïde De NICOMEDE, dove è impiegato ordinariamente, si vorrebbe fare un arco Ellittico, dato l'asse minore e il diametro della base; il punto nella circonferenza, è l'estremità del diametro che fa da Aftragle du Chapiteau, distanziando dall'asse minore due tiranti della lunghezza di una colonna, si provoca il rigonfiamento della terza parte.

Problema VII

Dati gli Assi di un' Ellisse, descriverla per più Punti o per un movimento continuo.

Principalmente, più Punti trovati col compasso (***Fig. 110***).
Si considera il Raggio dell'Ellisse metà dell'asse maggiore, si porterà uno dei punti presi col compasso in *L*, da dove, come centro, si descriveranno degli archi che intersecheranno questo asse in *F* e *f* per avere i Fuochi.
Di questi punti *F* e *f* passanti per il centro, e di un'intervallo preso a piacere come Raggio, affinché sia più piccolo *fA*, o *FB*, si descriveranno degli archi di cerchio in quattro parti *1.2.3.4.* al di sopra e, al di sotto dell'asse *AB*, come in *In, 2n, 3n, 4n*, poi si porterà la stessa lunghezza del raggio *dc*, *A* in *P*, e con'apertura PB (della lunghezza dell'asse maggiore) per Raggio, si descriveranno dagli stessi centri *F* e *f* degli archi di cerchio, che intersecheranno i precedenti nei punti *1. 2. 3. 4.* che staranno sulla circonferenza dell'Ellisse; si ricomincerà con il solito procedimento con delle aperture di compasso, più o meno grandi per avere ancora quattro altri Punti; e si troveranno perciò tanti Punti, e uniti gli uni agli altri, si giungerà al proposito, per tracciare il contorno a mano libera e con particolare attenzione, dal centro dell'asse maggiore, con un Regolo ugualmente pieghevole e sottile, che si può fermare e curvare per il medio di qualunque punto di un chiodo piantato per i punti trovati in dentro e in fuori, tutto al di fuori attraverso la mano sinistra, o tracciarla con la destra.
Secondariamente, per un movimento continuo, si può utilizzare il procedimento. I°.
Per il medio di una Corda, si fa quello che si dovrebbe fare col compasso; si piantano due chiodi nei fuochi *F* e *f*, trovati come vi spiegheremo; poi fare un buco al bordo della Corda, e un altro a distanza da quello lì, perfettamente uguale alla lunghezza dell'asse maggiore *AB*, si mettono alcuni di questi fermagli alla chiusura dei fuochi, e come se la corda sia allentata, si fa scoppiare la cresta *FDf*, per farlo tendere, e si colora con una matita in *D*, o con una punta di qualsiasi Strumento; anche lo stesso corda che faceva la cresta *FDf*, farà un milione di creste *FLf*, e la matita che era in *D*, verrà portata anche in *L*, che sarà visto in tutte le Opere, che è inutile ripetere. Questa costruzione, che si chiama il Trait du Jardinier, sebbene Meccanico; dalla Geometria Curva, che si chiama sempre Ellisse, per distinguerla dalle altre Curve.
E' chiaro che per avere l'Ellisse intera, bisogna fare passare la corda al di sopra di *AB*, come al di sotto.

DIMOSTRAZIONE
Abbiamo detto nell'articolo 29 del primo Libro, che una delle principali proprietà dell'Ellisse consiste nell'uguaglianza della forma delle due rette tracciate dai Fuochi in uno stesso punto della circonferenza, con la lunghezza dell'asse Maggiore; dunque la curva tracciata è l'effettiva Ellisse che è una delle Sezioni Coniche; poiché la costruzione per più punti trovati col compasso, e le corde per il movimento continuo, forniscono sempre la stessa uguaglianza, come dovevasi dimostrare.

PRATICA
Questa pratica è molto utile, ma poco giusta per applicarla nelle grandi Opere, perché la corda si allungano, è più o meno lunga e storta, e si pone la matita nella cresta con una forza più o meno grande; una catenella è meno sensibile a questo inconveniente, ma essa ha le f ; fiens giacché oltre alla causa dell'ondulazione, è ancora un po' suscettibile della non uguaglianza di estensione, a causa del suo carico, in un piano verticale, o per produrre attrito in un piano orizzontale; di forte questa non può rassicurare una linea retta, per le regole della Meccanica; poi perché, o questo attrito, forma un terzo carico che fa sforzo contro quella delle basi, le quali non possono, tirare l'una contro le altre, e far rompere la catena, poiché la terza è infinitamente piccola; è perché noi abbiamo provato un altro metodo Organico che non ha questo difetto.

Secondo Metodo per tracciare l'Ellisse per più Punti, senza trovare i Fuochi, facilmente con due aperture di compasso, o col compasso per la metà di un cerchio e di una misura costante.
Si hanno (***Fig. 116***) gli assi dati *AB, HF* : si porterà la metà dell'asse minore *CH* da *C* in *E* sull'Asse maggiore, e si dividerà la restante parte *EB* in due parti perfettamente uguali da *M*.
Dal centro *C*, e dal Raggio *CM*, si descriverà un cerchio: il nostro scopo per esempio è di mettere il quarto *N2 M*: fuori della circonferenza di questo cerchio, si prenderanno a piacere alcuni punti, quanti se ne vorranno per tracciare l'Ellisse con più o meno esattezza, come qui i punti *1, 2, 3*, dei quali, come centri e sempre di uno stesso intervallo *CM* per Raggio, si descriveranno dei piccoli archi che taglieranno l'asse *AB*, prolungato nei punti *M, g, h*, da dove si congiungeranno con i relativi centri *1, 2, 3*, con delle rette *1M, 2g, 3h*, per le quali si porterà la metà della differenza dei semi – Assi *ME*, o *MB*, in *1x, 2x, 3x*, le quali daranno i punti *x, x, x*, alla circonferenza dell'Ellisse richiesta.

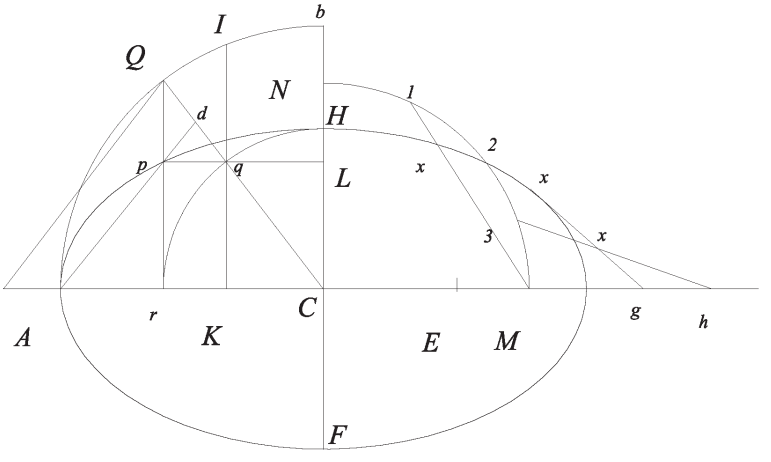


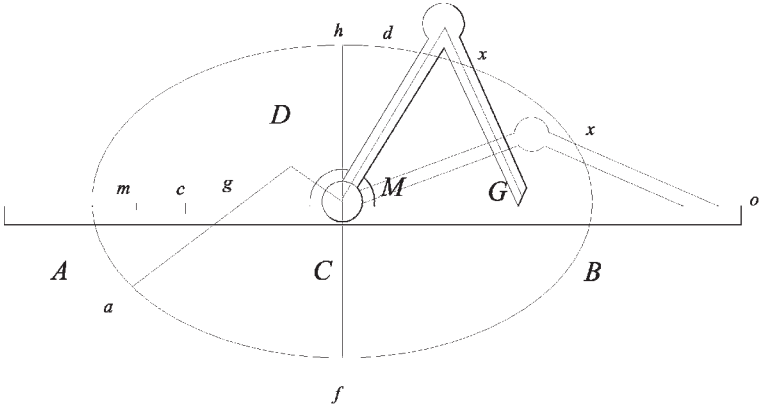
Fig. 116 Costruzione di un'ellisse per più punti.

DIMOSTRAZIONE
Dal centro *C*, e per Raggi le lunghezze *CA*, e *CH*, si descrivono due quarti di cerchio *AQb*, *rqH*; poi per uno dei punti trovati come d, si traccerà la retta *rQ* e *PL* perpendicolari agli assi; e infine per il centro *C*, la retta *Cq*.

A causa delle parallele *rC, Pq*, si avrà *Cq* : *CQ* :: *rP* : *rQ*; e *Cq* = *CH*, e *CQ* = *Cb*; dunque *CH* : *Cb* :: *rP* : *rQ*; è come dire, le ordinate dell'Ellisse all'asse AB, sono proporzionali a quelle del cerchio *AQb* sullo stesso asse, che è il diametro; dunque (art. 41 del primo Libro), il punto *P* è nella circonferenza dell'Ellisse, come dovevasi dimostrare.

La stessa organicamente per un Movimento continuo.
(***Fig 118***). Dopo aver diviso la differenza *Ae* dei due semi – Assi *CA*, *Ch* in due parti uguali in m, o formare in *eB* in *M*, si assemblarono due Regoli uguali ognuno alla metà di MB per metà di un perno, o di un chiodo antico, come *Cd*, *dG* in *d*, o due Regoli di diversa lunghezza, l'una *D*, uguale alla differenza *Am*, l'altra *Da* al semi – Asse *AC*, poi preso un terzo Regolo di lunghezza uguale a quattro volte *Cd*, o due volte eB, per la *I'* costruzione, con i Regoli *Cd*, *dG*, o solamente all'Asse maggiore per la seconda, si congiungerà al centro *C*, il Regolo *Cd*, o *CD*, con un perno; di forte il punto *C* forma l'allineamento di una delle parti *eG* poi si porterà per il braccio *dG* la lunghezza *Am*, si mette una matita in *x*, o porre il Regolo *Da* in *Dg*, per formare un punto proprio per colorare la lunghezza del Regolo *AB*, e la matita in *a*; in questa disposizione, non si fa altro che colorare il punto *G*, nel primo caso, o in g nel secondo, o la lunghezza del Regolo *AB*, le matite poste in *x*, o in *a*, tracceranno l'Ellisse che si domandava, come è chiaro per la dimostrazione precedente, per la costruzione per più punti; perché questa qui è la stessa riduzione strumentale.

Fig. 118 Costruzione di un'ellisse con l'ausilio di uno strumento e di un metodo particolare.



Altra Maniera Organica, con lo Strumento chiamato, Compasso Ovale.
Non si deve far altro che disegnare un quarto dell'Ellisse, il compasso Ovale è una Squadra, da un lato fa colorare due perni attaccati ad una certa distanza, da un Regolo, all'estremità del quale ci si serve di una matita per tracciare. Da dove, per un'Ellisse intera, si uniscono quattro Squadre separate da una couliffe per lasciare il passaggio di questi perni; supponiamo che si voglia tracciare una semi – Ellisse, con uno strumento composto da due squadre , con una couliffe tra i due, come si vede nella ***(Fig. 117)***. *ABCE*, e affinché il braccio di mezzo resti fermo, con l'aiuto delle linee, come *mn*, *MN*, che impediscono di non inclinarsi verso *A*, né verso *B*.
Si prende in seguito un terzo Regolo *RT*, e lo si pone dentro tre anelli di ferro o di rame *H*,*G* e *K*, nei quali si infilano, e alfine di poterli fissare dove si vuole, ci si aiuta con una vite.
In due di questi anelli posti nella piccola Boëte, tiene una corda di forma di perno conico, che fa entrare per le estremità delle rènure *CE*, e nelle rènure *AB*, e se ne fa una, che non è necessario che per i centri per il movimento del Regolo *RT*; si fanno queste rènure più larghe in fondo che per l'altro, e i perni sono conici, sebbene possano essere cilindriche.
Nella boëte in *K* nel luogo del perno, si mette una matita, o una punta appunto per tracciarla meglio.
Lo strumento, non si doveva muovere più per determinare la distanza dei perni *HG* tra loro, e a riguardo della matita *K*, per tracciare l'Ellisse attraverso la lunghezza degli assi dati.
Dopo aver riportato nell'Asse maggiore *AB*, la lunghezza *CD* della metà del piccolo, da *A* in *F*, la differenza dei due semi – assi *FC*, sarà questa la distanza che si cercava dal perno *H* o dal perno *G*; e la lunghezza *CD* quella del perno *G* alla matita *K*.
I perni e le matite sono fermi per mezzo della vite, affinché esse non possano muoversi, si deve far muovere il Regolo *RT* per i perni, essa è sempre obbligata nella rènure delle rette *AB*, *EC*, che formano un angolo Retto, perché gli Assi sono dati; e porre nella stessa posizione il Regolo fra due perni, la matita *K* traccerà l'Ellisse richiesta.
Ho detto che questi due couliffes erano ad angolo Retto, perché assegnato con i due Assi; al posto dei due assi, si assegneranno due diametri coniugati, che dovranno formare fra di loro altri angoli, uno ottuso da un lato, e uno acuto dall'altro, che ne formerebbero altrettanti acuti e ottusi, che i diametri coniugati avvicinandosi all'uguaglianza; prima (***Fig. 115***) di portare la distanza *CB* da *D* in *F*, si farà una retta inclinata rispetto al diametro dato *AB*, successivamente la retta *CF*, o questo che è la stessa cosa, successivamente gli angoli *FCB* e *ACF*, e si porrà la matita in *D*, e i due perni in *P* e *F*, di forte, le rette *CB* e *DP* saranno perfettamete uguali, questo strumento non possono avere più utilizzo.
Si sottolinea che la distanza *DP*, che è la differenza della perpendicolare *FP*, e del semi diametro *CB*, può arrivare nei punti *D* e *P*, affinché il semi diametro *CB* è più piccolo di *DP*.
Secondariamente, si può risparmiare la fatica di fare una retta per *AB*, piuttosto che tenere il perno in *G*, ***Fig. 117*** o in *P*, ***Fig. 115***, sempre applicato al Regolo *AB*.
Se si vuole tracciare con lo stesso procedimento una seconda Ellisse parallela, o poco vicino alla prima, non si deve far altro che aggiungere un quarto anello in *X*, per applicare una seconda matita, come si è fatto in *K*; ma queste due Ellissi non saranno uguali; perché i loro diametri non sono proporzionali, di contro non possono essere la sezione di un pergolato, o di un cavo cilindrico, dello stesso …..; la ragione è che i due semi – assi *CD*, *CB*, si tolgono delle quantità uguali a *Dd*, *BL*, i resti *Cd*, *CL* non sono più della stessa proporzione, *Cd* non è più a *CL*, come *CD* a *CB*, giacchè supposti *CD* = *2*, *cB* = *4*, *Dd* = *I*, *Cd* sarà uguale a *CL*, come *I* a *3*, quanto detto è tutto differente dal rapporto supposto *CD* : *CB* :: *2* : *4*.

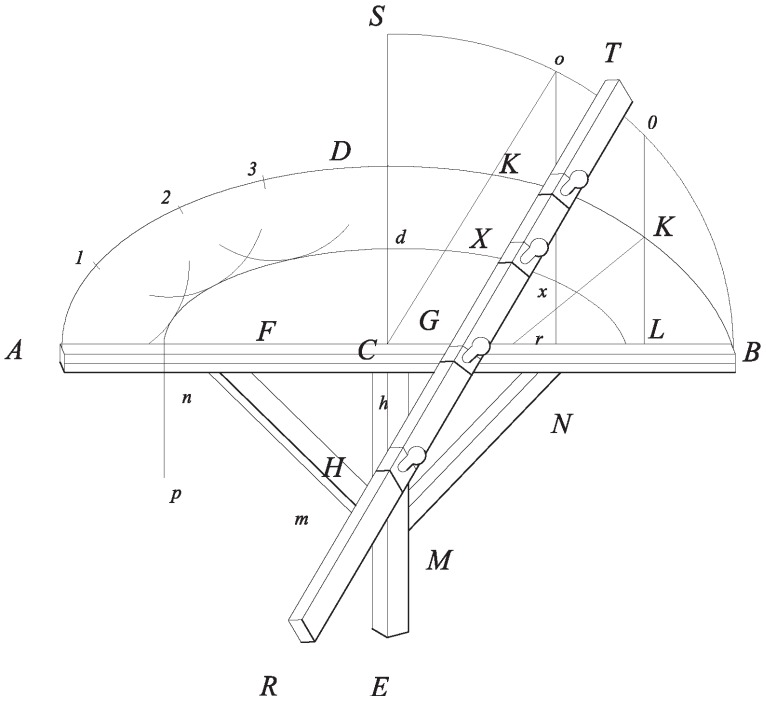


Fig. 117 Costruzione di un'ellisse con uno strumento chiamato Compasso.

DIMOSTRAZIONE
Preso il centro *C*, e l' intervello della metà dell'asse maggiore *CB* per Raggio, si descriverà il quarto di cerchio *SB*, e per il punto *K*, si traccerà per *CB* la perpendicolare *Or*, che intersecherà il cerchio nel punto O, e dal centro C la retta *CO*, che sarà parallela a *HK*, perché *OK* è parallela a *CH*, e che *HK = CS = SO*; dunque *CoKH* è un parallelogramma. Che *HK* sia uguale a *CS*, è evidente per la costruzione, poiché *GK = AF*, e *GH = CF*, e *CS* o *BC = CA*, e a causa del parallelismo, si avrà *CO* : *GK* : : *Or* : *Kr*; ma *CO = CS*, e *GK = CD*; dunque *CD* : *CS* :: *rK* : *rO* : dunque (*Art. 41*) la curva *DKB* è un'Ellisse.
Si può osservare. *I*° Che i due triangoli rettangoli *GHC*, *GHr*, che sono uguali, variano continuamente per il cambiamento della posizione del Regolo *RT*; in più i lati
CH, *CG*, *Gr*, *rK*, aumentano o diminuiscono, e pertanto l'unione delle ipotenuse *HG*, *KG* formano una linea retta.
2° SIA l'intervallo *CH*, la distanza dal centro *C* da un perno, è sempre uguale all'accesso *KO* dell'ordinata del cerchio, per quella dell'Ellisse.
Da qui si traccerà in maniera semplice per trovare altri punti che serviranno per una Ellisse vicina e parallela ad una data, come *dxL*, uguale a quella che è stata fatta con lo strumento. Non si deve far altro che portare l'intervallo *OK*, in *CH*, o *ok* in *Ch*, per avere le inclinazioni di più linee *HK*, *hk*, per le quali si riporterà la distanze data *Dd* in *KX*, e per tracciare i punti dati e trovare *d*, *X*, *x*, *L*, l'Ellisse richiesta, poco distante da *DKkB* data. Se la si vuole fare esattamente equidistante, bisognerebbe conoscere i Fuochi *F* e *f*, (***Fig. 111***) tracciare da ciascuna una retta al punto dato *D*, e tanti altri presi a piacere, e dividerà l'angolo *FDf* in due parti uguali da una retta *Dn*, la quale si intersecherà nel punto *D*, la larghezza du Bandeau, Archivolte, o di altre Opere che si possono avere esattamente per tutti con la stessa larghezza.
Per rendere questa operazione più semplice, non si deve far altro che prendere sul contorno dell'Ellisse data, o su altri punti della curva, più punti a piacere per il centro *1. 2. 3.* ecc. dei quali con l'intervallo dato *Dd* per la lunghezza, si faranno tanti archi di cerchio, al fine di intersecare una curva tangente *attd*, che sarà quella che si cercava.
Ma è da osservare che una di queste Curve, e tutte le altre che non sono ugualmente concentriche alla curva data, non è conveniente ai centri che devono prendere semplicemente per un piedritto, perché formano una gobba in a con il piedritto *ap*, il quale sarà più sensibile e spiacevole alla vista, più che l'intervallo *Dd* sarà grande; giacchè è visibile il perpendicolarismo alla curva *Ia*, e *Aa* che si incontra in qualche punto come in a; di intenso tutto questo arrotondamento della naiffance *AI*, fa ridurre la corda inferiore nel punto a, fuoco dell'Ellisse, da dove queste due perpendicolari si incontrano, per conseguenza, si trova meno una parte simile, che formerà un angolo col diametro *AB* più acuto di un angolo misto *aAI*, che è retto nell'origine *A*, o poco differente da quello retto, e uguale a quello di un piedritto perpendicolare per *AB*, dunque l'angolo misto della corda da, con il piedritto *ap* perpendicolare ad *AB*, formerà un angolo differente, che sarà altrettanto più acuto, più l'arco *AI* sarà grande, di conseguenza avrà una gobba; ciò che è insopportabile in Architettura.

COROLLARIO
SI può ancora parlare di un altro metodo, quelli che prendono la misura della larghezza dell'intervallo fra le due curve, per i diametri dell'Ellisse dati, come le insegna P. DECHARLES, Libro 5, Prop. 21 è ancora molto errato; poiché è visibile che questa distanza è, per esempio, *Dy*, per *Dn* o *Du*, per *DC*, il punto u si avvicina più alla circonferenza che il punto *y*, per conseguenza l'Ellisse non è più equidistante alle estremità *A D m G* date; Di forte in questo luogo, le Botti o Archivolte che si propongono di fare della stessa lunghezza, si troveranno più strette: la retta *Dn*, che divide l'angolo *FDf* in due parti uguali, non cade per il raggio, perché il punto *D* è all'estremità del diametro minore o asse minore; giacchè (per la 3ª prop. dal 6° Libro di Euclide), la linea che divide l' angolo di un triangolo *fDF* in due parti uguali taglia la base di questo triangolo proporzionalmente in due parti; ma il raggio o semi – diametro taglia la base *fF* in due parti uguali in C, dunque non divide l'angolo *FDf* in due parti uguali, dimostreremo ancora un altro procedimento la falsità di questa pratica, nel cap. VIII, del 4° Libro.

OSSERVAZIONE
Sebbene il Compasso a curva è un buono strumento, si può imparare il suo impiego, e operare nel modo più giusto nelle grandi Opere, si cercano più punti della circonferenza dell'Ellisse che si propone di fare, per la quale si pone un regolo sottile, e una épaiffeurs uguale che si ferma perfettamente, o con le mani, o con la punta di un chiodo, come abbiamo detto prima, e lungo la quale si può tracciare il contorno anche da fermi, e o anche con qualche Strumento; ecco altri problemi per l'uno e l'altro Metodo.

Problema VIII

Siano dati i diametri Coniugati, tracciare l'Ellisse per più Punti, o per movimento continuo, senza conoscere gli Assi ne i Fuochi.

Siano (***Fig. 115***) *AB*, E*D* i diametri coniugati, per il punto *D*, estremità del più grande, si traccerà per *AB* la perpendicolare indefinita *FP*, per la quale si traccerà la lunghezza *AC*, da *D* in *F*, da dove si traccerà dal centro *C* la retta *FC*; in seguito dal punto I preso a piacere per *CD*, si manderà una parallela *IG* alla retta *FP*, e un'altra *IH* al diametro *AB*. Se dal punto *G*, dove *IG* taglia *FC* per centro e per raggio *DF*, o *AC*, si fa un arco di cerchio che taglia *IH* in *H* e *h*, dico perciò che i punti *H* e *h* formano la circonferenza dell'Ellisse.

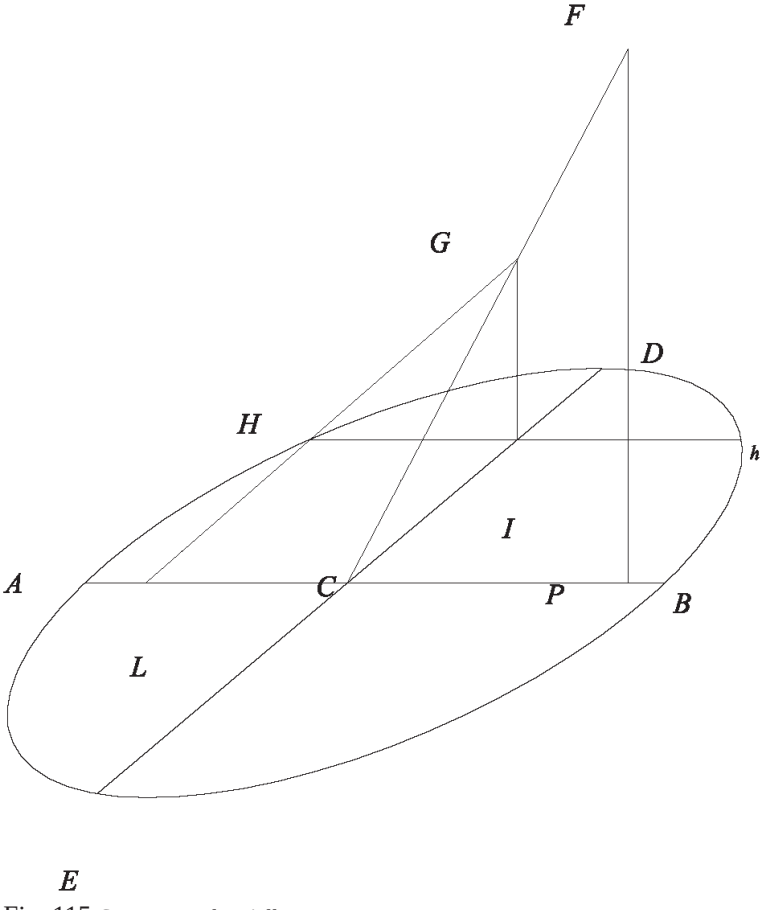


Fig. 115 Costruzione di un'ellisse per un Movimento continuo.

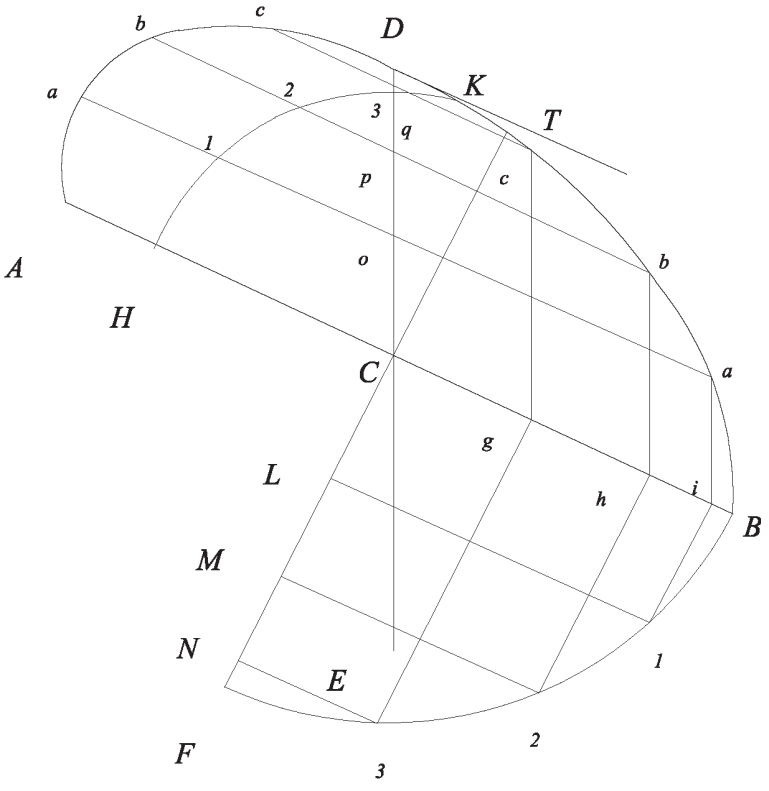
DIMOSTRAZIONE
Siano presi *CL* per *AB* uguali ad *HI*, e tracciare *LH* che sarà parallelo a *CD*.
A causa delle parallele *IG*, *PF*, si avrà *CD* : *DF* :: *CI* : *IG*, e *DF* = *GH* = *AG* per la costruzione, e *CI* = *LH*; e a causa del triangolo rettangolo *HIG*, $IG^2 = GH^2 - HI^2 = CA - CL^2$ = al rettangolo *BL x LA* (per la 5ª del 2° Libro di Euclide), dunque al posto di *CI*, si mette *LH*, e al posto di *DF* si mette *CA*, si avrà $CD^2 : LH^2 :: CA^2 : BL : xLA$: dunque il punto *H* è nella circonferenza dell'Ellisse, come dovevasi dimostrare.

COROLLARIO
Da qui si può descrivere un'Ellisse con un movimento continuo al contorno dei due assi coniugati, con un altro strumento che è un Regolo e una semplice squadra, o due altri Regoli che formano un' angolo uguale a *FCB*, trovato come vi abbiamo insegnato, e un terzo buco, fra le distanze *P, D, F*, per poter mettere una catena in *P*, e in *F*, per poterci appoggiare i Regoli *FC*, e *CB;* si metterà una matita nel terzo buco in *D*, o una punta proprio per tracciare l'Ellisse; si colora il punto *F*, dove è la catena, la lunghezza del regolo *FC*, e la catena *P* di lunghezza del regolo *CB*, la matita in *D* traccerà il quarto dell'Ellisse *DhB*, e si fa lo stesso dall'altro lato della retta *FC*, trasportando il Regolo *CB* in *CA*, e lo stesso per il Regolo *FP*, si traccerà l'altro quarto dell'Ellisse *ADB*, questo è quello che si doveva fare per un Movimento Continuo. Per non cambiare il Regolo *CB*, bisogna allungarlo, nel caso in cui cedano i punti *A* e *B* di qualche lato, della lunghezza *DP*.

PRATICA
Questo procedimento può servire per tracciare degli Archi Rampanti e per la progettazione di facciate Ellittiche in talud, dunque non si hanno sempre i diametri coniugati, e non vale la pena cercarli; ma si può utilizzare lo stesso procedendo per più punti con un procedimento ancora più semplice.

SECONDO METODO
Siano i diametri coniugati *AB, DE* : (***Fig. 121***) dopo aver mandato per il punto *D* la retta *DT*, parallela ad *AB*, e dal centro *C* la perpendicolare a *CK*, che incontrerà *DT* nel punto *K*, e la si prolungherà verso *F*. Preso *C* come centro, e per il raggio *CK*, si descriverà il quarto di cerchio *HK*, e dallo stesso centro; e per raggio il semi-diametro *CB*, si descriverà un altro quarto di cerchio *FB*, che si dividerà in tante parti uguali o ineguali come si vedrà, *1, 2, 3, F*; conviene per comodità e per la velocità dell'operazione che essi siano uguali, perché bisogna dividere anche l'altra parte di cerchio *HK*, con lo stesso numero di parti, e se sono ineguali, devono essere proporzionali al proprio corrispondente; per ciascuna di questa divisione *1, 2, 3*, nell'uno e nell'altro quarto di cerchio *HK* : e *IL, 2M, 3N*, nel quarto di cerchio *BF*; in seguito per gli stessi punti *1, 2, 3*, dello stesso quarto di cerchio FB, si tracceranno altre rette *3g, 2h, Ii*, parallele a *FC*, per conseguenza perpendicolari ad *AB*, le quali intersecheranno questo diametro nei punti *g, h, i*; si tracceranno per questi punti le rette *gc, hb, ia* parallele a *CD*, le quali intersecheranno le precedenti *aa, bb*, nei punti *a, b, c*, che straranno nella circonferenza dell'Ellisse.
Dopo aver trovato questi punti, sarà bene trovare anche quelli dell'altra parte del diametro *ED*; giacchè si porteranno le lunghezze *oa, pb, qc in oa, pb, qc*, per le stesse rette *aa, bb, cc*, dall'altra parte del diametro *CD*: si avranno anche più punti nella circonferenza dell'Ellisse, per i quali si traccia a mano o con un regolo fisso e si otterrà la semi Ellisse, e l'Ellisse intera, se si vuole; poiché la metà *CDB* è uguale all'altra, che passerà per *ACE*, ma disposta in modo contrario.

Fig. 121 Costruzione di un'ellisse senza conoscere gli Assi e i Fuochi.



DIMOSTRAZIONE
A causa delle parallele al diametro *AB*, e delle divisioni uguali in numero, e proporzionali nel quarto di cerchio *HK*, e *FB*, i raggi *CK* e *CF* dividono proporzionalmente, le stesse rette *CK* e *CD*, e anche tra di loro; dunque, *CD* : *Cq* :: *CF* : *CN* : e *CD* : *Cp* :: *CF* : *CM* e *CD* : *Co* :: *CF* : *CL* , ma *Cq* = *gC*, *Cp* = *hb* e *Co* = *ia* : e per la stessa ragione *g3* = *CN*, *h2* = *CM* e *iI* = *CL*, dunque *gc* : *hb* :: *g3* : *h2*, c'è da dire, che le ordinate ai diametri del cerchio, e quelle ai diametri dell'Ellisse formano lo stesso raggio tra di loro, come dovevasi dimostrare.

Problema IX

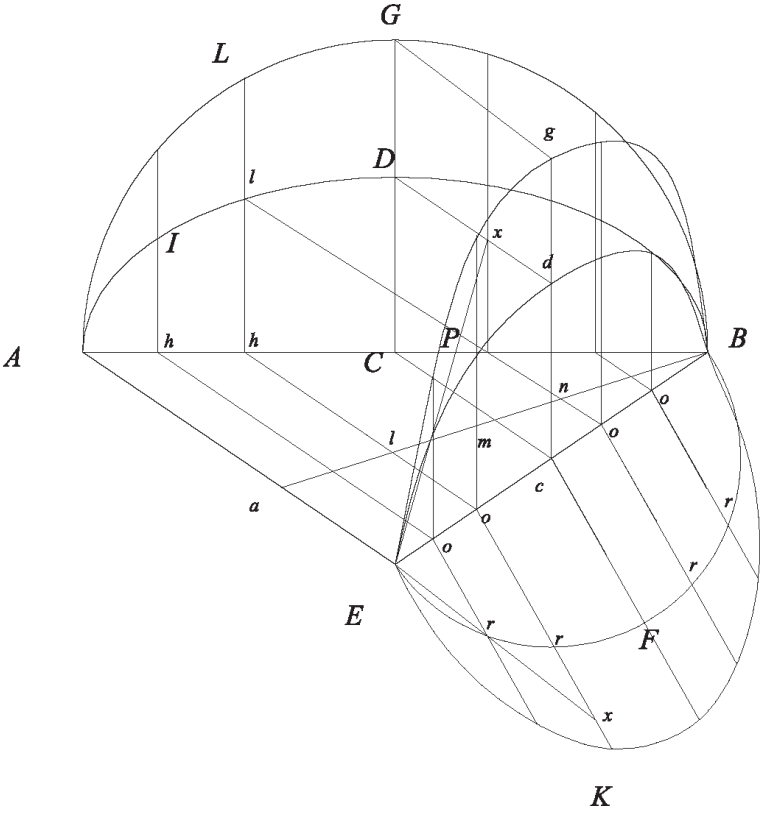
Allungare o accorciare le Ellissi nella Maniera che si vedrà,ricordandosi che queste sono sempre le

Sezioni di uno stesso Cilindro.

Sia (***Fig. 119***) il semi cerchio *BFE*, la base di un Cilindro qualunque; abbassare dal diametro *BE*, perpendicolarmente come si vedrà *or, or, cF*, fino ad incontrare l'asse *AB*, supponiamo che sia dato, o preso a piacere, il diametro *BE*, formare l'angolo che si vuole, come *ABE*, e si ricaverà la forma di un triangolo, si traccerà una retta per le estremità *A, E*; in seguito per tutti i punti *o, o* e *c*, si manderanno delle parallele alla retta AE, fino ad incontrare l'asse *AB*, nei punti *h,h,C*, per i quali si alzerà, per *AB* alcune perpendicolari indefinite *hi, hi, CD*, che saranno uguali alle ordinate *or, or, CF*, che termineranno nei punti iiD, per le quali si farà passare una curva disegnata a mano, o con un regolo fisso, e si avrà la circonferenza dell'Ellisse richiesta; per semplicità vi illustriamo la metà della figura, l'altra metà è perfettamente uguale.

Fig. 119 Costruzione di più ellissi.

DIMOSTRAZIONE
Se si suppone il semi cerchio *EFB*, rialzato in *EdB*, e la semi Ellisse



ADB perpendicolare al piano del triangolo *ABE*, tutte le perpendicolari al diametro *EB*, *AB*, lo saranno anche a questo piano, dunque le distanze delle fommets corrispondenti *F*, *D*, *r*, e *i*, che fanno lo stesso per *dD*, *Ri*, formano uguali alle altre distanze ho, *Cc*, del piano *ABE*; poiché le rette *or* e *oR* e *hi*, sono perpendicolari, e loro stesse *or* e *hi* uguali fra di loro;

dunque queste formano anche un parallelogramma, come *cCDd*, dunque sia la figura *EdBDAE* una metà del Cilindro, la retta *Cc* sarà il suo asse, e *Dd*, che gli è parallelo, sarà quello dell'altra parte; c'è da dire, che nella facciata: si farà lo stesso con tutti gli altri giunti delle fommets.; e *r* o *R*, come *hi, Ro, iR* che saranno parallele, e uguali ad ho, la quale è parallela a *Cc*, dunque *iR* sarà parallela all'asse *Cc*, e di conseguenza alla faccia del cilindro, come dovevasi dimostrare.
Che la retta *ADB* forma un'Ellisse, l'abbiamo fatto vedere nel Problema precedente; poiché a causa delle parallele *AE, ho, Cc*, le rette *EB*, e *AB* sono divise proporzionalmente, e le ordinate a questi diametri, sono uguali fra di loro, e per conseguenza proporzionale a quelle del cerchio, per la costruzione; dunque la retta *ADB* è un'Ellisse Geometrica.
E' a proposito di questa ragione, perché aggiungo qui l'epiteto Geometrico al nome proprio dell'Ellisse formato per questo problema; DAVILER è un famoso Architetto, che dice a gran voce, che a fare dell'arte erano stati pochi eletti in Geometria, per non conoscere l'attitudine di questa operazione, si immaginavano apparentemente che queste producevano curve di nuove specie; quello che a lui ha dato occasione di lasciare un' assurdità, dunque chi ha mostrato il fatto all'origine, e in più luoghi di questa Opera, la Severità delle regole Geometriche, (*dettate a pag. 237*) è inferiore alla pratica, come il metodo di ricerche prolungate molto meglio delle figure Geometriche, piuttosto che in quest'Arte la pratica è preferibile alla Teoria; il mestiere di capire anche il ragionamento di un Autore, di un Maestro dell'Arte, e quello che è ancora più singolare, si appellano al Tribunal di un Ouvrier che non è altro che una specie di Scimmia di un Geometra, nel trattato de la coupe de la Pierres, dunque si dice, è meglio prendere qualche abile Ouvrier per farsi condurre perché lui pretende e infiruit? Queste istruzioni può darle una persona che parla senza ragionare, e un'imitazione banale di quello che ha visto fare da un Maestro., che forse era anche più limitato di lui, incapace di capire che quello che egli diceva era difficile da interpretare; di conseguenza suscettibile di adottare il fatto; come lo vedi? Questo non significa scegliere un cieco per dirigere? Giacchè ritorniamo a questo Maestro, dicono che ha potuto tramandare queste regole perché è un Geometra? Un tale ragionamento non vale la pena ad essere considerato, non sono troppo comuni tra gli Architetti, e gli Ingegneri, dove non è molto semplice esaltarsi per qualche merito della facile pratica; non si possono sentire questi Chirurghi , che fanno del male alla Medicina, descrivono la medicina come possono, certi di risolvere con qualche cura, per molti di qualunque rimedio che hanno tratto da questa Scienza, e applicata o azzardata; Pensano, sfacciatamente che la pratica è meglio della Teoria della Facoltà; ma ritorniamo al nostro soggetto, questa descrizione va al di là del confine di una semplice osservazione.

COROLLARIO
E' evidente che al posto del diametro *AB*, o se è dato uno più piccolo, come aB, la costruzione sarà comunque identica; questa retta sarà divisa proporzionalmente alla retta *EB*, nei punti *l, m, n*, e *a*; e si prolungano per questi punti le perpendicolari ad *aB*, uguali ai corrispondenti *or*: si avranno altri punti sulla circonferenza dell'Ellisse, che formeranno molte più curve della precedente, e che giaceranno tutte nella faccia dello stesso Cilindro per la stessa ragione.

COROLLARIO II
DA qui si fa: *I°* l'angolo *BcC* può essere acuto oppure ottuso, il cilindro in questione sarà scaleno; non ci si potrà arrivare se non si prende un diametro uguale a *BE* che forma con *Cc*, un' angolo uguale a *BcC*, la sezione sarà ancora un cerchio, come per esempio *Ex*.
2° AL posto del semi – cerchio *EFB*, preso per base di un Cilindro scaleno, si avrà il semi – cerchio *AGB*, e si prenderà il diametro *EB* per l'asse di un' Ellisse rimpicciolita, si trovarono per le stesse costruzioni cf uguali alle metà dell'asse maggiore di questa Ellisse, e si porta *CG* in *cf*, e *hl* in *oK*; & lo stesso per tutte le ordinate.

COROLLARIO III
Non solamente, si può trasformare un'Ellisse in un'altra, più o meno allungata, o un'Ellisse in un cerchio, che è la base di uno stesso cilindro; ma si può anche trasformare una piccola parte della semi – Ellisse, o del semi cerchio in un altro più allungato, e o più accorciato, nella varietà che si vedrà, ma, sarà necessario avere i diametri, per il solo allungamento delle ascisse, e la ripetizione delle coordinate corrispondenti.
Sia (***Fig. 120***) un tratto, di cerchio *BCe*, o semplicemente un'arco *De* che fanno cambiare una parte dell'Ellisse *dE*, che forma la sezione dello stesso Cilindro, dunque *De* è parte della base. Dopo avere mandato per le estremità *D* e due linee rette *Da, ea* che formano fra di loro un angolo retto o qualunque altro in *a*; si taglierà la retta *aD*, in tante parti uguali come si vedrà, come qua in tre parti, e si tracceranno per i punti *2* e *3* delle parallele a *2p, 3p* e alla retta *ae*; in seguito, costruito a parte l'angolo *dAE*, uguale all'angolo *Dae*, si dividerà *Ad* con lo stesso numero di parti uguali, o proporzionali; se le divisioni delle prime rette *aD* erano ineguali; e per i punti *2.* e *3* di divisione della retta data *Ad*, si tracceranno delle rette *2P, 3P*, parallele & uguali alle precedenti, corrispondenti alle stesse divisioni *2p, 3p*; la linea curva che sarà tracciata per i punti *EPpd*, sarà la porzione dell'Ellisse che si cercava.
Per capire la ragione di questo Corollario, bisogna ricavare il cerchio, si troverà il centro *c*, dell'arco dato *De* & si manderà *CB* parallela ad *aD*; che taglierà la retta *p2, p3* prolungata fino ai punti *f* e *g*.
Principalmente, poiché per la *Figura 119*, si è proceduto per i diametri *AB, EB*; si può considerare il Triangolo *ABE*, come la sezione per l'asse del Cilindro, dunque il raggio *CB* della *figura 120* può rappresentare una parte della sezione di questo piano con la base *ByeB*, e la retta *aD*, quella di un piano parallelo alla sezione per l'asse, le quali detraggono delle linee parallele *fp, gp*, delle parti uguali *f2, g3*, non per cadere nella base del cerchio, ma ancora nell'Ellisse della sezione; di conseguenza, poiché le ordinate dell'Ellisse devono essere uguali a quelle del cerchio della base del Cilindro, si levano dalle corrispondenti, delle parti uguali, il resto dovranno ancora essere uguali, ma le ascisse per la costruzione saranno proporzionali, dunque all'arco *Ed* della sezione obliqua del Cilindro, corrispondente perfettamente all'arco *eD* della base, come dovevasi dimostrare.

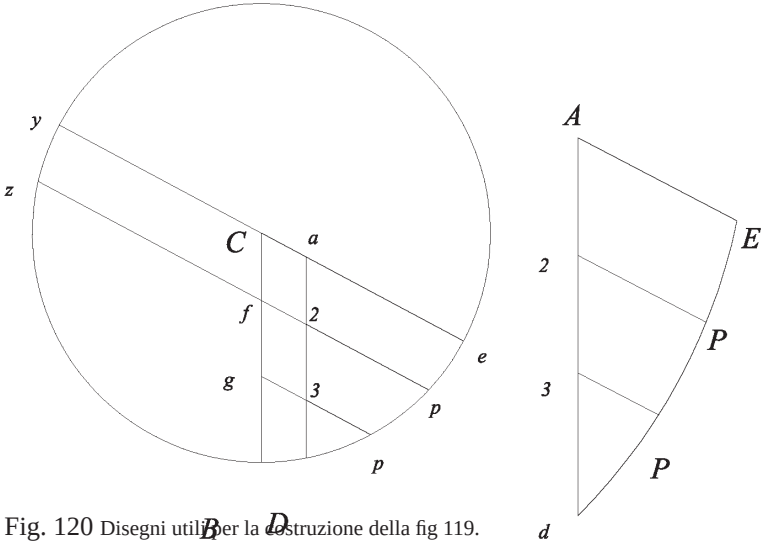
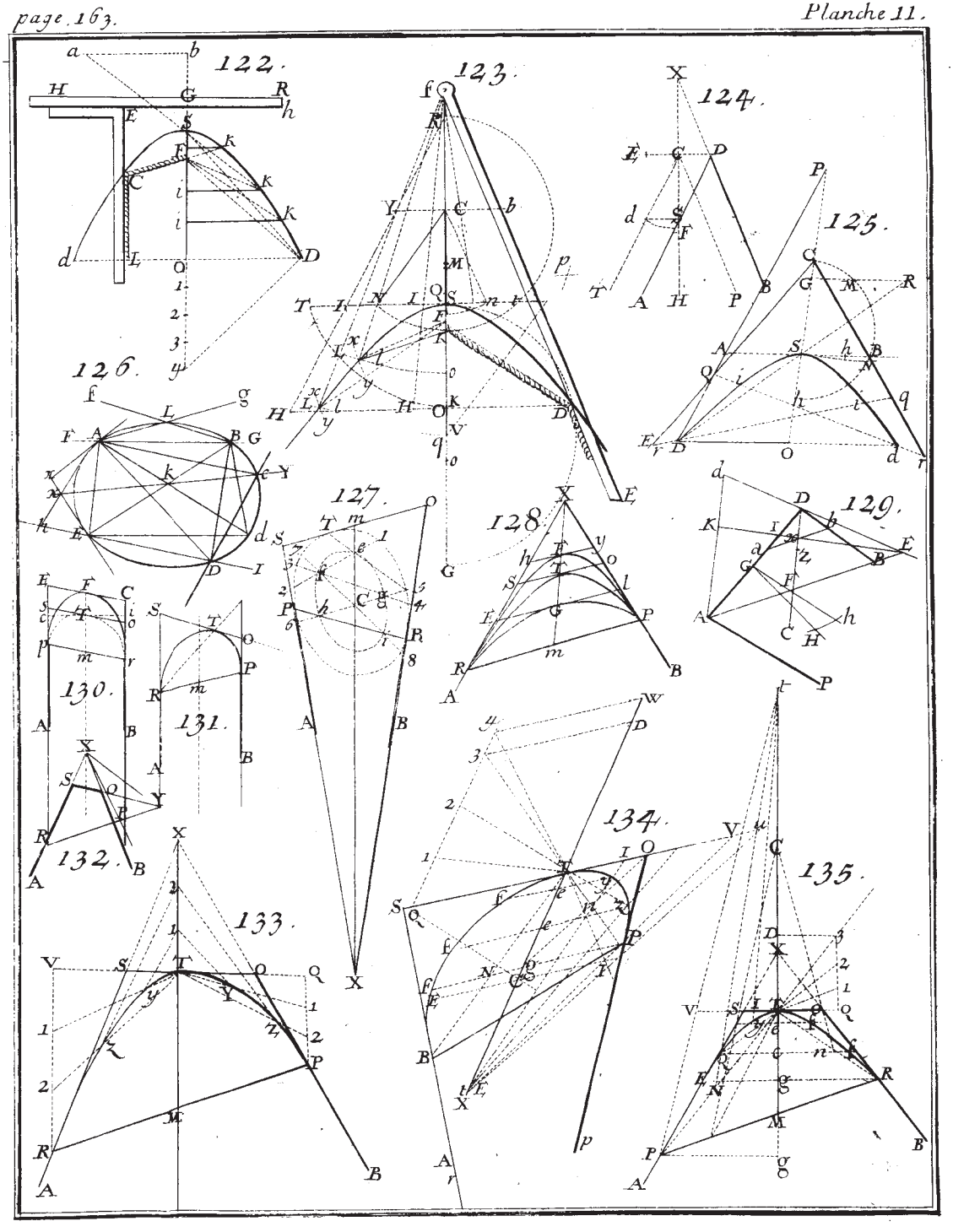


Fig. 120 Disegni utili per la costruzione della fig 119.

PRATICA

Questo problema e fra i contraddetti il più utile di tutti questi, dunque se ne fa uso per la Coppe de Pierre; giacchè più spesso si fanno dei Cilindri Retti o scaleni, e tagliare obliquamente per le differenze incontrate nel piano o nel Cilindro stesso, o della base Ellissoidica; Si ha continuamente bisogno di allungare o rimpicciolire la curva dei centri, quello dell' Operaio si chiama il Cerchio ribassato.

Quanto all'uso del secondo Corollario, si riscontra frequentemente, per esempio per trovare l'unione della Testa de la Porte en Tour ronde, ecc. come si vedrà nel 4° Libro.


page. 163.
Planche 11.
122.
123.
124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.

SULLA PARABOLA

Problema X

DATI L'ASSE DI UNA PARABOLA E UN PUNTO DELLA SUA CIRCONFERENZA, TRACCIARE LA PARABOLA PER PIÙ PUNTI, E CON UN MOVIMENTO CONTINUO.

Sia (***Fig.122***) *SO4* l'asse dato, e *D* il punto della parabola sul suo contorno.Avendo tracciato da questo punto una perpendicolare *DO* sull'asse *SO*, si traccerà la linea *SD*, sulla quale nel punto *D* si traccerà la perpendicolare *D4*, che intersecherà l'asse *SO* prolungato al punto *4*; la lunghezza *O4* sarà il parametro(è la distanza dal fuoco alla direttrice) della parabola, che divideremo in quattro parti uguali, di cui se ne porterà una da una parte e dall'altra del vertice *S* in *F*, per avere il fuoco *F*, e in *G*

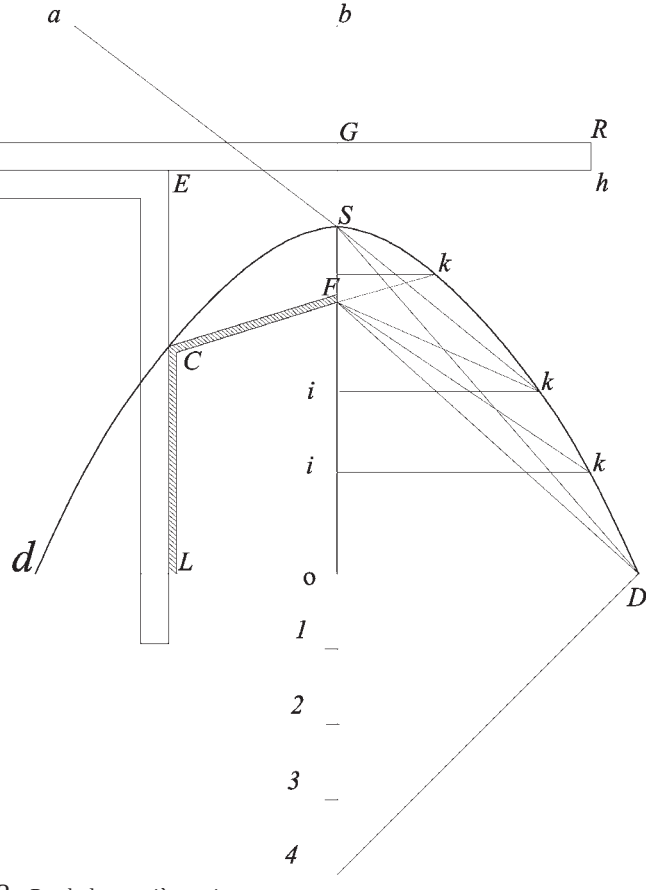


Fig. 122 Parabola per più punti.

sull'asse *4S* prolungato per ottenere la direttrice *Hh*, che è una perpendicolare all'asse prolungato di un quarto del parametro al di là del vertice *S*, ne diremo l'uso qui di seguito.

Si tracceranno poi tante perpendicolari quante se ne vorrà all'asse *SO*, per avere la stessa quantità di punti sul contorno della curva come iK, di cui i punti i e i sono presi a piacere; o meglio si cercherà il parametro, prendendo sul contorno della parabola un punto *K* a piacere, per il quale e per il vertice *S*, si condurrà *KS*a indefinita, poi portando in *Sb* la lunghezza *iK*, si traccerà per il punto b una perpendicolare all'asse prolungato, la quale intersecherà ka nel punto *a*, la linea ba sarà il parametro che stiamo cercando, di cui il quarto portato da *S* in *G*, darà la sezione dell'asse e della direttrice; in seguito aprendo il compasso della misura dell'intervallo *Gi*, in ciascun punto i in particolare, porremo una delle punte del compasso in *F*, da dove come centro, si descriverà un arco che intersecherà in *K* ogni perpendicolare in *iK*, per la quale si è preso l'intervallo *iG* corrispondente, facendo la stessa cosa per tutte le linee, ci serviremo dello stesso centro *F*, e per tutti i punti *S K K D*; si traccerà a mano, o con una squadra pieghevole una curva che sarà la parabola che stiamo cercando; faremo la stessa cosa per l'altra parte *SCd*.

Dimostrazione

La linea *O4* per la definizione del parametro nella prima costruzione, o *ab* nella seconda e avendone fatta una terza proporzionale all'asse *SO*, e all'ordinata *OD* o *iK*, è il parametro della parabola, il cui quarto è la distanza dal vertice *S* al fuoco *F*, e al punto *G* per dove passa la direttrice.

Ora la distanza di questa linea è sempre uguale a quella del fuoco dall'estremità dell'ordinata, come è dimostrato nelle sezioni coniche, dunque la curva *SKD* è una parabola.

Secondo metodo per movimento continuo.

Prenderemo una cordicella uguale alla distanza *OG*, di cui attaccheremo un estremità sul ramo *EL*, di una squadra *HEL*, misurando la sua lunghezza dal punto *E* del suo angolo, e l'altra estremità sarà fermata ad un chiodo sul fuoco *F*: in seguito avendo posato il ramo *EL* sull'asse *SO*, e l'altro ramo *EH* sulla direttrice *HA*, ci posizioneremo un regolo *HR*, poi spingendo con una matita o una punta sulla cordicella per tenerla posizionata contro il ramo *EL*, tireremo indietro la squadra lungo il regolo *HR*, e nella misura in cui ci discosteremo dall'asse *SO* sempre parallelamente a questa, scorrendo la matita nella piega della cordicella nel punto *C*, tracceremo la parabola da un lato dell'asse; porteremo in seguito la squadra per tracciare l'altra metà dal lato opposto.

Uso.

La descrizione della parabola non è di frequente utilizzo nel taglio delle pietre; questa serve tuttavia per tracciare gli archi sul prospetto dei pennacchi quadrati sul davanti con un angolo retto: l'asse che è la linea mediana orizzontale all'imposta è data, e l'intersezione del centro del pennacchio, con la perpendicolare alla fine di questa linea, è il punto dato del contorno della parabola.

Questa può anche servire per tracciare un arco rampante, i cui piedritti sono a strapiombo, in circostanze a proposito di cui parleremo in seguito. Questa serve anche per tracciare i montanti dei caminetti che sono i più adatti a propagare il calore del fuoco, come ha dimostrato M. Gauger nella Meccanica dal Fuoco, in cui egli ne fa vedere il vantaggio su quelli che sono paralleli tra di loro.

Poichè questa curva assomiglia molto alla catenaria, che alcuni matematici disprezzano, come il grande Galilei, e dopo di lui *Mrs. Blondel* nei Problemi dell'Architettura, *Parent* e il *P. Castel nella Matematica Universale*; potremmo servircene per tracciare i sesti delle volte, di cui si fanno i conci uguali. Credo anche di aver letto da qualche parte che un famoso architetto si servì della parabola nei sesti delle lunette in una volta a botte.

Infine potermmo fare uso di questo problema per l'entasi e la curvatura del profilo di diminuzione delle colonne, al posto dei due metodi di uso corrente, l'asse dato è il diametro della base, l'ascissa è la differenza dei due semi-diametri della base, e sotto il capitello; cioè nella diminuzione di un lato, il vertice è l'estremità di questo diametro; e il punto della circonferenza è quello di diminuzione del diametro superiore, cioè, la sua estremità sull'astragalo.

SULL'IPERBOLE.

Problema XI

DATI IL CENTRO, IL VERTICE E UN PUNTO DEL CONTORNO DELL'IPERBOLE, DESCRIVERLA PER PIÙ PUNTI, E CON MOVIMENTO CONTINUO.

Sia *C* il centro, *S* il vertice, e *D* il punto sulla circonferenza, la linea *CO* condotta dal centro dal vertice *S* in *O* sarà l'asse prolungato, a cui la perpendicolare *OD* sarà una ordinata. Dai punti *S* e *D* per centri, e per raggio un'apertura di compasso presa a piacere, faremo delle sezioni d'arco in *p* e *q*, per condurre da questi punti una linea pq, la quale essendo prolungata, se serve, intersecherà l'asse *CO* in *V*, da dove come centro, e dell'intervallo *VS*, o *VD*, si descriverà il semi cerchio *SDG*,che incontrerà *SO* prolungato in *G*: poi avendo portato la lunghezza *OG* sulla linea *DO*, prolungata in *OH*, ci condurremo per il punto *S* la parallela indefinita *IST*; prolungheremo *SC* in *R*, facendo *CR=CS*: tracceremo *RH*, che intersecherà *IT* in *I*; riporteremo la lunghezza *SI* in *SK*, per avere la linea *KR*, che divideremo in due parti uguali nel punto *M*, che sarà il centro del semi-cerchio *RTK*, di cui questa sarà il diametro, e di cui l'arco intersecherà la linea *ST* in *T*; poi avendo diviso *ST* in due parti uguali nel punto *N*, porteremo la distanza *SF* in *Rf*, otterremo l'altro fuoco.

Fatta questa preparazione, se si vogliono trovare più punti dell'iperbole con il compasso con un'apertura *fL* presa a piacere, previsto che questa sia più grande di *fS*, per raggio, e dal punto *f* per centro, faremo l'arco *lL*; poi porteremo lo stesso intervallo *fl* da *R* in o, per esempio, sull'asse prolungato, e prenderemo la differenza *oS* per raggio, e dal fuoco *F* per centro, faremo un altro arco *xy*, che intersecherà *lL* nel punto *x*, il quale sarà sulla circonferenza dell'iperbole, troveremo tanti punti quanti se ne vogliono di questa curva.

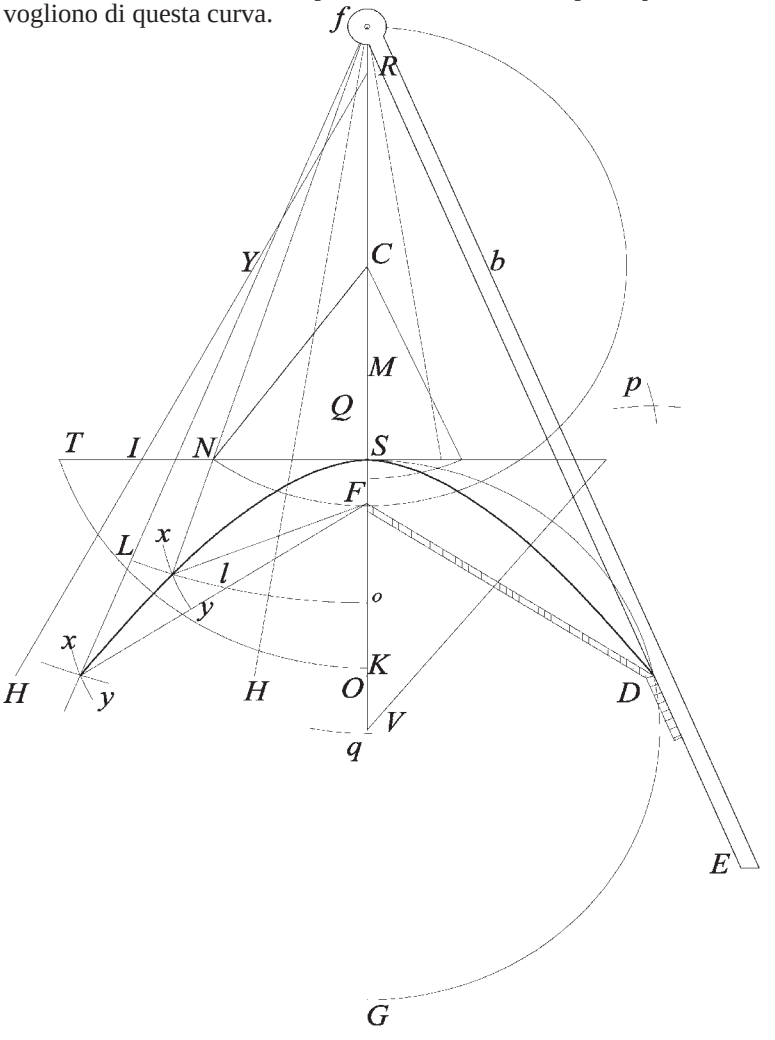


Fig.123 Iperbole per più punti, con movimento continuo dato il centro *C* .

Secondo metodo per un movimento continuo.

Avendo preso un regolo *fE* di lunghezza conveniente, che supera la più grande distanza *fD* del fuoco opposto *f*, nel punto *D* dato; ci faremo un buco all'estremità *f* per farci passare un chiodo, sul quale questa sarà mobile; porteremo su questo regolo la lunghezza *RS* dal primo asse da f in *Q*; poi prendermo una cordicella di lunghezza uguale a *QD*, di cui

un'estremità applicheremo all'altro fuoco *F*, poi posando il regolo *fE* su *Fo*, stenderemo la cordicella che è molle in questa situazione, tirandola da una piega da *F* in *S*, lungo il regolo, e allontanandolo dall'estremità *E*, restando fissa l'altra in *f*, spingeremo sulla piega della cordicella con una matita o una punta di un utensile contro il regolo, facendola scorrere verso D, e tracceremo così l'iperbole, come si era detto per l'ellisse e per la parabola.

Dimostrazione.

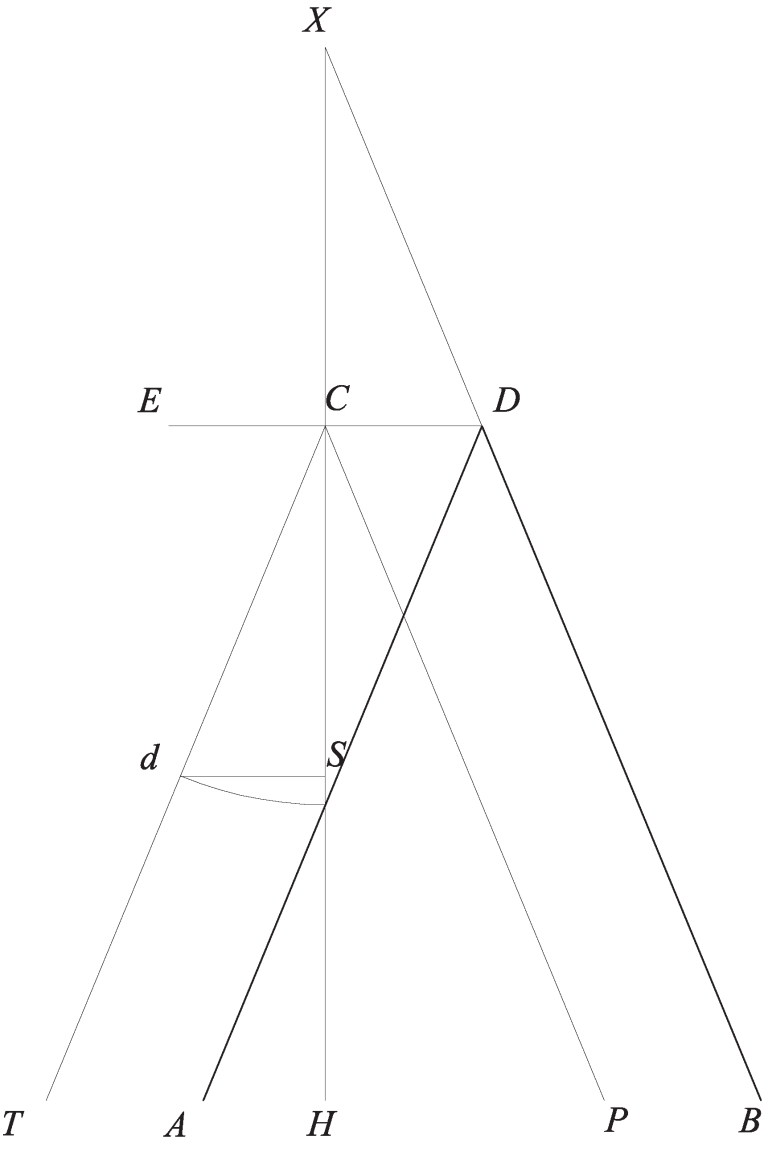
Abbiamo cercato una terza proporzionale OG all'acsissa OS, e all'ordinata OD, per trovare per mezzo di questa il parametro SI, poichè HO=OG:SI::RS; ma anche il parametro è terzo proporzionale al primo asse RS, e al secondo bY, dunque cercando un medio proporzionale ST tra SR e SI=SO, si avrà bCY che è il suo uguale; è dimostrato nelle sezioni coniche, che la distanza dal centro C al punto N, punto medio di ST, è uguale a quella da questo centro al fuoco, perchè SN è medio proporzionale tra RF e SF, o, che è la stessa cosa, tra fS e SF, come è evidente dalla costruzione; dunque i punti f e F sono i fuochi; è dimostrato anche che la differenza delle linee fD, FD tracciate dai fuochi ad un punto dell'iperbole, è uguale al primo asse RS; dunque l'iperbole è descritta dai punti S e D, ciò che bisognava fare.

E' chiaro che la seconda operazione, per movimento continuo, è precisamente la stessa della prima per più punti; poichè ci abbiamo preso la differenza FD del primo asse RS, per farne la distanza dal fuoco alla matita D; non è altro che la stessa cosa fatta meccanicamente con una cordicella, al posto di un compasso.

Corollario.

Se i due assi sono dati, i fuochi si trovano molto facilmente tirando su dal punto S una perpendicolare Sd=CD, e tracciando Cd che sarà la distanza dal centro C al fuoco F, che trasportiamo in F da un arco dF sul primo asse prolungato.

Bisogna sottolineare che nell'architettura dove i coni sono quasi sempre dati, e i punti o la posizione del piano della loro sezione nel triangolo per l'asse del cono, i due assi sono anche questi sempre dati; poichè (***Fig.124***) sia ADB il triangolo per l'asse, e il piano intersecante HSC prolungato; se si prolunga anche il lato BD fino all'intersezione del piano in X, la distanza SX è la lunghezza del primo asse, il quale essendo diviso in due parti uguali in C, la linea CD sarà la metà del secondo asse; e se per il centro C tracciamo due linee rette CP e CT, parallele ai lati DA, DB, si otterranno anche gli asintoti, di cui si può fare usoper descrivere l'iperbole per più punti. Tuttavia può succedere che il triangolo per l'asse del cono non sia dato, perchè si possaono considerare le sezioni coniche fuori dal cono. Vedremo come si possono trovare gli asintoti di un'iperbole, di cui si conosce solo il centro, il vertice e una ordinata; nello stesso modo della proposizione precedente, o solamente un diametro e un'ordinata.



Iperbole per più punti, con movimento continuo dati due assi.

Problema XII

ESSENDO DATO IL CENTRO, IL VERTICE, E UN'ORDINATA ALL'IPERBOLE, O SOLTANTO UN PRIMO DIAMETRO E UN'ORDINATA, TROVARE GLI ASINTOTI E DESCRIVERE L'IPERBOLE PER PIÙ PUNTI.

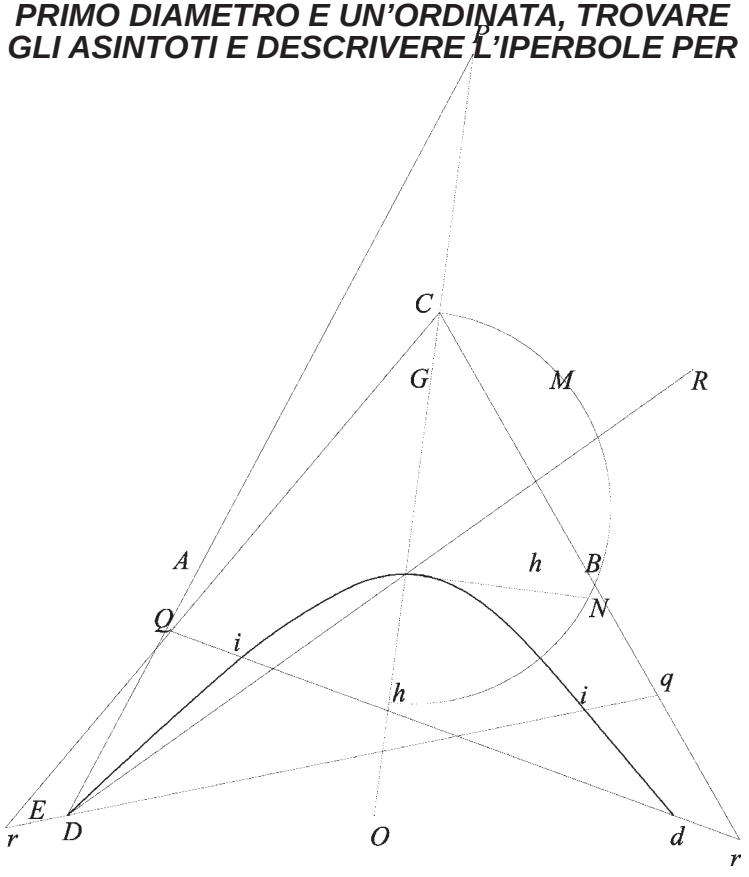


Fig. 125 Iperbole dati il centro *C*, il vertice *S* e l'ordinata *CO*.

Sia (***Fig . 125***) il centro *C*, il vertice *S*, e l'ordinata *DO*, avremo l'intervallo *CS* per metà diametro, il cui doppio *SP* sarà il diametro intero, al quale (essendo prolungato) la linea *DO* è un'ordinata che gli sarà perpendicolare, se questo diametro è un asse.

Per il punto *S*, condurremo *AB* parallela indefinita a *DO*, e per il punto dato *D*, sul contorno dell'iperbole, tracceremo la linea *DP* che intersecherà *AB* in *A*; faremo *SG* uguale a *AS*, e per il punto *G* avendo condotto *GR* parallela a *DO*, o *AB*, tracceremo la linea retta *DSR* che intersecherà *GR* nel punto *R*, la linea *GR* sarà il parametro che divideremo in due parti uguali in *M*; riporteremo la lunghezza *GM* da *S* in h, e su *hC*, come diametro avendo descritto un semi cerchio; tracceremo *SN* perpendicolare a *Ch*, la quale essendo medio proporzionale tra il semi-diametro *CS*, e il semi-parametro *GM=Sh*, sarà uguale alla metà del diametro coniugato al primo *SP*: riporteremo quindi la lunghezza *SN* in *SB*, che è parallela a *DO* (per costruzione); la linea condotta dal centro *C* per il punto *B*, sarà un asintoto: la stessa distanza riportata dall'altra parte verso *A* darà sempre il punto per cui deve passare l'altro asintoto *CE*; questo è ciò che bisognava principalmente trovare.

Dati gli asintoti, è molto facile trovare tanti punti quanti se ne vorranno sul contorno dell'iperbole; poichè avendo fatto *Od* uguale all'ordinata *OD* prolungata da una parte e dall'altra verso *r* e *r*, tracceremo a piacere le linee *qr*, *Qr* per i punti *D* e *d*, poi riportando le lunghezze *Dr*, *dr* da *q* in *I*, e *Q* in *i*, avremo i punti *i* e *i* appartenenti all'iperbole; tracceremo tante linee quante se ne vogliono dai punti i, e per questi punti, e i punti *D*, *S*, *d*, tracceremo una curva a mano, o con un regolo pieghevole, che darà il contorno dell'iperbole che stiamo cercando.

Notiamo, come nel problema precedente, che se abbiamo la metà del diametro coniugato tutta l'operazione è abbreviata; perchè non si tratta altro che riportarla da *S* in *B*, per avere il punto *B* dell'asintoto che dobbiamo condurre dal centro *C* dato.

La dimostrazione di questo problema dipende da alcune proprietà delle sezioni coniche que non possiamo qui ricordare; le troveremo in tutti i trattati di sezioni coniche.

La principale è che le linee che attraversano le iperboli da un asintoto all'altro sono intersecate nello stesso modo dai loro diametri; e poichè le ordinate *DO* e *dO* sono uguali, come in tutte le sezioni coniche, le rimanenti *Dr*, e *dr*, sono anch'esse uguali; ciò che rappresenta la base dell'operazione.

Uso.

Incontriamo abbastanza spesso le iperboli, quando si tratta di fare delle volte o altri corpi conici. La descrizione di questa curva è necessaria, I° per fare l'*épure* della porta in una torre rotonda, e a scarpa, seguendo il nostro metodo; 2° per il disegno del pennacchio conico a tre falde; 3° per il pennacchio di una torre rotonda eretta su una linea retta; 4° per i giunti del Corno di Vacca; 5° per le origini delle volte interne convesse; 6° per la nuova volta interna di Marsiglia; 7° per le lunette strombate in una volta sferica; 8° gli archi rampanti i cui piedritti saranno a strapiombo in alcuni casi; 9° per i giunti montanti degli arrotondamenti conici degli

angoli a scarpa; 10° per la soluzione del problema che dà il metodo di tracciare i giunti di testa dei sesti ellittici o iperbolici per dei punti dati fuori da queste curve; 11° infine il problema precedente può servire se si vuole al disegno della curva di diminuzione e di rigonfiamento delle colonne, al posto della Concoide di Nicomede; secondo me l'iperbole andrebbe meglio per la grazia del suo contorno, poichè se le diminuiamo come facevano gli antichi dal basso, il fusto della colonna avrà più grazia se è una porzione di iperbolide che di cono troncato; e per la natura dell'iperbole la parte inferiore della colonna avrà il maggior arrotondamento che diminuirà e si raddrizzerà salendo sotto il capitello; cosa che avrà una grande analogia con ciò che la natura fa agli alberi, e di conseguenza una maggior bellezza, che è una più perfetta imitazione della natura.

Avremo dunque per vertice il lato di base, per punto della circonferenza dell'iperbole, e per ordinata quello della diminuzione sotto l'astragalo del capitello, e per il centro la distanza del modulo, o semi diametro della colonna alla base riportato sul prolungamento di questo diametro fuori dalla colonna, che ricade nel caso del problema precedente.
Da tutto ciò che si è detto, e da molte altre parti in cui abbiamo parlato delle sezioni coniche, possiamo concludere che coloro che dicono come l'autore moderno della pratica del taglio delle pietre, che le sezioni coniche non sono necessarie, non ne conoscono gli usi.

Scolio.

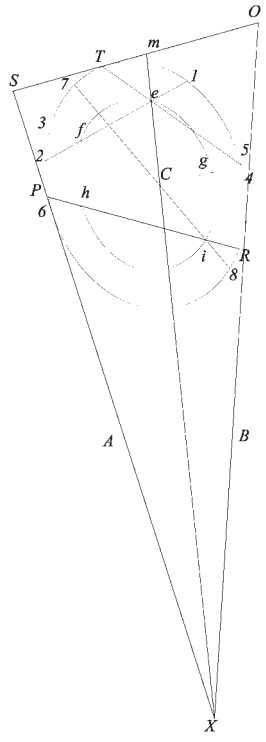


Fig. 127. Ellisse dato in sito per cinque punti.

Con una costruzione simile a quella di questo problema, possiamo descrivere fuori o dentro una sezione conica qualsiasi una curva simile, di cui è sufficiente avere un solo punto dato.
Sia, per esempio, (***Fig 127***) un ellisse dato *PTB*, nel quale vogliamo descrivere una simile curva per un punto dato e; tracceremo a piacere per questo punto e una linea *1.2*. che intersecherà l'ellisse dato nei punti *1.2*. riporteremo l'intervallo e*1*. da *2*. a *f*, il punto *f* sarà un secondo punto dell'ellisse richiesto.

Questo servirà per trovarne un terzo, conducendo per f una linea sempre a piacere *g4*; riporetremo l'intervallo *3f*, da *4* a *g*, dove sarà il terzo punto, il quale servirà a trovarne un quarto *h*, tracciando *5g6*, e riportando *g5* in *6h*, e così via.

Ciò che qui diciamo per l'ellisse conviene anche per la parabola e per l'iperbole; è per questo che M. de La Hire ha chiamato le figure simili, inscritte o circoscritte ad una sezione conica con questa proprietà, asintotiche, in ciò che l'una può essere considerata nei confronti dell'altra, come un asintoto curvo, spiego questo nome che adotterò qualche volta per evitare le perifrasi, perchè ho conosciuto un grande matematico che non lo accettava di buon grado.

Problema XIII

PER CINQUE PUNTI DATI CHE NON SIANO ALLINEATI SU UNA RETTA, TRACCIARE UNA SEZIONE CONICA QUALSIASI CON UN MOVIMENTO CONTINUO, SENZA CONOSCERNE GLI ASSI, I DIAMETRI, I CENTRI E NÈ I FUOCHI.

Siano (***Fig 126***) i punti dati *ABCDE*, per i quali si vuole far passare una sezione conica che troveremo seguendo la loro disposizione, un ellisse, una parabola o un'iperbole; nell'esempio proposto, questi sono adatti per un ellisse. Avendo tracciato per due di questi punti, come *AB* una linea *FG*, prolungata al di là dei punti *A* e *B*, tracceremo le linee *AC*, *AB*, *AE* e *BC*, *BD*, *BE*: in seguito prenderemo con due regoli, o con lo strumento che chiamiamo Saltarella gli angoli *DAF*, *DBG*, di cui applicheremo i l lato *AD* in *AC*, il ramo *AF* si disporrà su *Ax*, così come il ramo *BD* dell'altro angolo sarà portato in *BE*, l'altro ramo *BG* si disporrà in *BX*; faremo nuovamente degli angoli *BEh*, *BDI*, e avremo l'intersezione dei lati *Eh* con *Ax* nel punto *x* e *i*, con *BY*, nel punto *Y*. Tracceremo la linea retta *xy*; poi avendo fatto con le solite Saltarelle o con quattro regoli gli angoli *BAD*, *ABD* mobili sui punti *A* e *B*, come su dei perni, faremo incrociare i due rami delle Saltarella lungo tutta la linea retta *xy*, come per esempio in *k*, i due altri rami *Ag*, *Bf* s'incroceranno in un punto comune *L*, che sarà sulla circonferenza della sezione conica; continueremo così conducendo l'incrocio di *K* lungo tutta la linea *xy*; ma visto che i rami *Bf*, *AG* saranno sotto a *B* e *A* dal lato della linea *xy*, bisognerà prolungarne l'allineamento con un regolo applicato lungo *Ag* o *BF*.

La dimostrazione di questa costruzione è un pò troppo lunga per drle

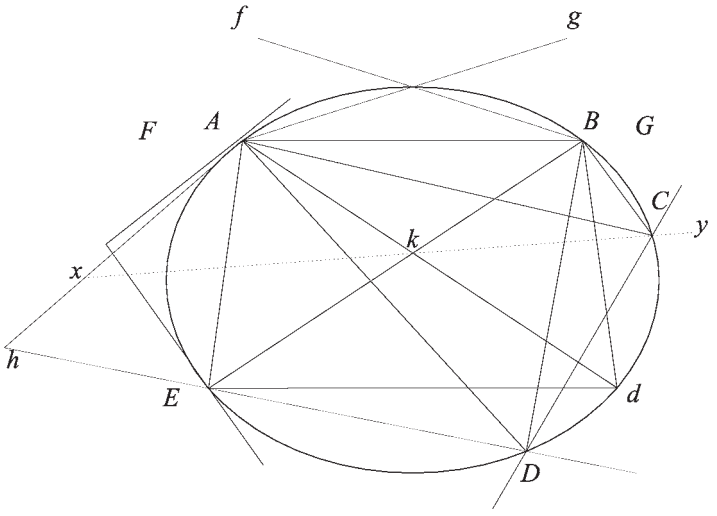


Fig. 126 Sezione conica, dati i punti *ABCDE* non allineati.

grazioni: sarà sufficiente dire che è dimostrato nel trattato delle sezioni coniche, che si può farne passare svariate diverse curve per quattro punti dati, ma non per cinque; ora supponendo (come è vero) che questo movimento organico non può altro che produrre una curva di secondo ordine, se i punti si trovano disposti per un ellisse; non ce ne sarà che una che soddisfa la proporzione. Possiamo vedere su questo il sapiente libro di M. Mac-Laurin intitolato Geometria Organica.

Problema XV

DATE DUE TANGENTI AD UNA SEZIONE CONICA, E LA DIREZIONE DI UN SOLO DIAMETRO, TROVARE TANTI PUNTI QUANTI SE NE VOGLIONO DI QUESTA CURVA, SENZA CONOSCERE IL CENTRO DELLA SEZIONE, NÈ LA GRANDEZZA DI UN DIAMETRO.

Siano le due tangenti date *AD, DB*, (***Fig. 129***) che tangono la sezione conica cercata nei punti *A* e *B*: sia anche la linea *AP* porzione di un diametro, di cui non si ha la lunghezza, ma soltanto la posizione, cioè l'angolo *DAP*, che questo forma con la tangente *AD*: avendo tracciato la retta *AB* da un punto di tangenza all'altro, la divideremo in due parti uguali in *F*, per dove si traccerà la linea retta *DFC* indefinita, che sarà porzione di un diametro, sul quale cercheremo un punto della curva.

Sappiamo che se la sezione è una parabola, questa linea *DC* sarà parallela ad *AP*, altra porzione del diametro dato: se questa dovrà essere un ellisse, le linee *AP* e *DC* saranno convergenti verso *C*, e se dovrà essere un'iperbole, saranno divergenti, e si incontreranno fuori dalla curva.

Per il punto *F* tracceremo *FG* parallela ad *AP*, che intersecherà *AD* nel punto *G*, e divideremo *GD* in due parti uguali in *I*; per il punto *G* condurremo *GH* perpendicolare ad *AD*, poi dal punto *I* come centro, e con l'intervallo *IA* come raggio, faremo un arco *Hh*, che intersecherà *GH* nel punto *H*: poi condurremo *Ad* parallela a *DC*, faremo *AK* uguale, se si vuole ad *GH*, di cui prenderemo una parte aliquota, come la metà, un terzo o un quarto, oppure la faremo più grande, e faremo *Ad* uguale ad *AD*, o alla solita parte aliquota, che *AK* è di *GH*, e tracceremo per il punto *D* la linea *dE*, fino all'incontro di *AB* prolungato, se è necessario, in *E*, per cui tracceremo EK che intersecherà DC nel punto x, il quale sarà uno di quelli (punti) della curva.

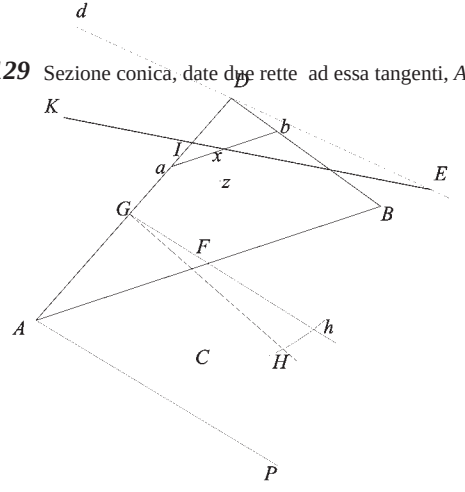


Fig. 129 Sezione conica, date due rette ad essa tangenti, *AD* e *DB*.

Per ottenere poi un altro punto di questa curva, condurremo per il punto x

1 Vedere la *Hire l.z.p.19.*
2 Vedere la *Hire l.z.p. 19-L'Hopital Art. 20.*

una linea ab parallela ad *AB*, e si farà la solita operazione sulle linee *Aa*, e *ax*, e *Bb* e *bx* che saranno due tangenti date, che abbiamo prima fatto sulle due *AD*, *DB*, e avremo due altre tangenti, di cui una sarà comunque una parte di *AD*; e così di seguito finchè non si avranno i cinque punti della curva per tracciarla con un movimento continuo con il Problema XIII o che i punti trovati non saranno molteplici e vicini il più possibile, per tracciarla esattamente a mano o con un regolo pieghevole.

Dimostrazione.

E' dimostrato nelle sezioni coniche che un diametro, che essendo stato prolungato passa per l'incotro di due tangenti, taglia in due parti uguali la linea che passa per i due punti di tangenza [1]; e di conseguenza tutte quelle che sono parallele a questo, e al contrario se si divide una linea che passa per i punti di tangenza di altre due, in due parti uguali e per il centro di questa linea, se ne conduce un'altra prolungata, questa passerà per il centro della sezione conica, se ne ha uno; per la costruzione noi abbiamo tagliato *AB* in due parti uguali in *F*; quindi la linea *DFC* è un diametro.

Abbiamo anche detto nell'*Articolo 46* che la parte di questo diametro intersecata dalla linea *AB*, che congiunge i punti di tangenza, quella che è intersecata dalla curva della sezione, cioè il semi diametro di quelle che hanno i centri, e l'intervallo dal centro all'intersezione delle due tangenti sono continuamente proporzionali; quindi supponendo questo centro in *C*, che sarà per questa proposta (se lo si vuole) fuori dalla ***Fig. 129*** sarà sempre vero che *CF:Cx*::*Cx*:*CD* e che *AP* e *DC* devono incontrarsi nel centro della sezione, se ne ha uno; ma poichè si è fatto *HG* medio proporzionale tra *AG* e *GD*, se si riporta *GH* in *AI*: la linea *Ix* sarà parallela ad *AP*; come *FG* lo è ad *AP* (per costruzione) presentemente a causa di tre linee CF, Cx, CD che sono in proporzione continua, o delle tre AG, AI, AD; si avrà CF:Cx::Fx:xD, o ::AG:AI, cioè ::AK:Ad (per costruzione) quindi a causa delle parallele Ad e FD, si ha Fx:xD::AK:Kd::CF:Fx::Cx:CD; quindi il punto x appartiene alla sezione, poichè taglia FD in modo che Cx è medio proporzionale tra CF e CD: è ciò che si voleva dimostrare.
Abbiamo detto che se CD è parallela ad AP, la sezione sarà una parabola, quindi il punto G cadrà in D, e AI diventerà uguale ad AD, da cui segue che è sufficiente dividere FD in due parti uguali in z per avere questo punto della parabola; cosa che si troverà anche dalla prima costruzione, perchè AK e Kd saranno uguali, e di conseguenza Fx e xD che sono loro parallele nel triangolo ADE.
Se le linee DC e AP s'incontrano al di fuori, la costruzione sarà sempre la stessa, ma rovesciata, tale è l'iperbole nei confronti dell'ellisse.

Uso.

Questa proposta può servire negli arrotondamenti degli angoli delle figure irregolari, per esempio per la gabbia di una scala in un angolo acuto o ottuso, di cui si prende l'origine per dei punti dati a seconda della convenienza del luogo: questa può anche servire per gli archi rampanti, dove si hanno tre tangenti e tre punti di tangenza dati; ma per questo caso daremo il problema seguente.

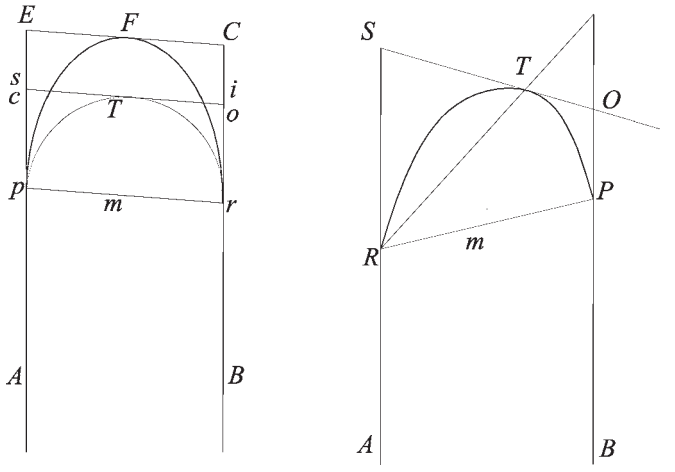


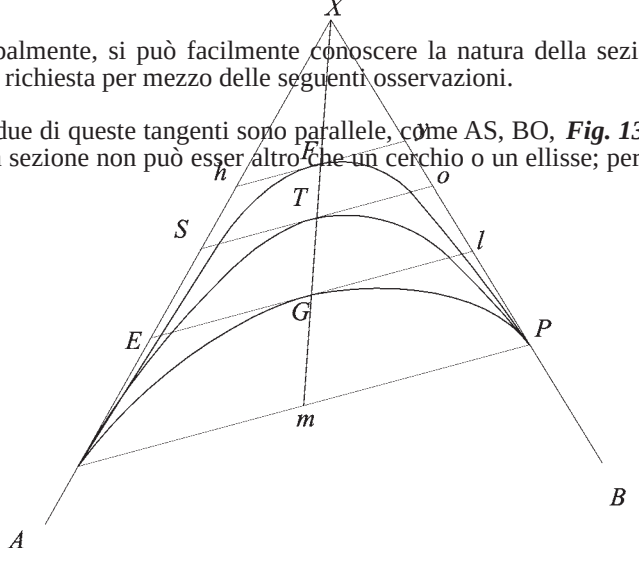
Fig. 130,Fig.

Problema XIV

ESSENDO DATE TRE TANGENTI AD UNA SEZIONE CONICA, E I LORO PUNTI DI TANGENZA, TROVARE QUELLA SEZIONE A CUI SONO TANGENTI, E LE LINEE NECESSARIE PER DESCRIVERLA.

Principalmente, si può facilmente conoscere la natura della sezione conica richiesta per mezzo delle seguenti osservazioni.

1° Se due di queste tangenti sono parallele, come AS, BO, ***Fig. 130*** e ***131***, la sezione non può esser altro che un cerchio o un ellisse; perchè



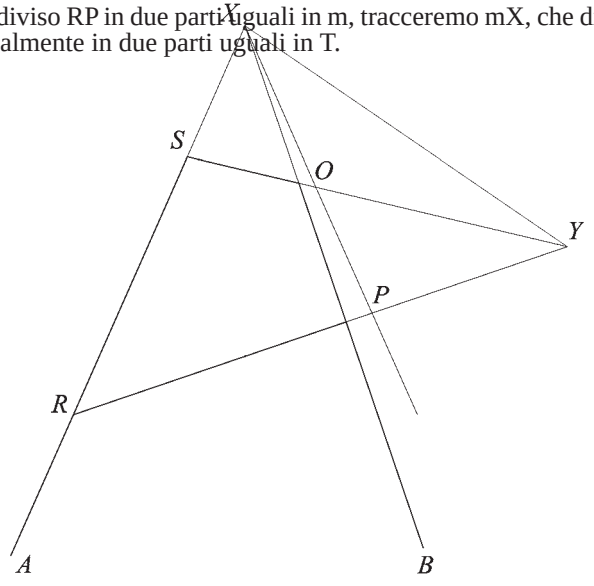
Sezione conica, date due rette ad essa tangenti, non parallele.

non ci sono che queste che ripiegano su se stesse. Sarà un cerchio se le tangenti PC, CT sono uguali a Ti e ir, e una ellisse se sono disuguali, come PE, EF* e RS, ST,ecc.

2° Se due di queste tangenti, non essendo parallele, s'incontrano in X ***Fig. 128*** dal lato opposto al terzo punto di tangenza T dato, come PA, RB, la sezione richiesta sarà ancora un ellisse, per la stessa ragione, o un cerchio.

3° se prolungando le due tangenti estreme AS, BO, esse s'incontrano sul lato del terzo punto di tangenza T dato, e la tangente media è parallela alla linea RP ***Fig. 128*** che passa per i punti di tangenza P e R delle tangenti estreme, come SO parallela a RP, sarà ancora più facile capire qual'è la curva che soddisfa la richiesta.
curva sarà una parbola, se il rapporto di *SY* con *YO* è minore di quello di *XO* con *OP*, sarà un ellisse, se è più grande sarà un'iperbole.

Fig. 128
Avendo diviso RP in due parti uguali in m, tracceremo mX, che divideremo ugualmente in due parti uguali in T.



1° Se la tangente media SO passa per questo punto T, la curva richiesta sarà una parabola.

2° Se questa linea passa al di sotto, come in *EL*, sarà un ellisse.

3° Se passa al di sopra del lato di *X*, come in *hy*, sarà un'iperbole.
4° *Se la tangente media *SO* non è parallela a *RP*, che passa per i due punti di tangenza delle tangenti estreme, conosceremo ancora più facilmente qual'è la sezione che soddisfa la proposta; perchè avendo prolungato *RP* e *SO*, finchè queste s'incontrano in *Y*, si tratta solo di esaminare il rapporto delle parti delle linee *SY* e *PX*, se *SY*:*SO*::*XO*:*OP*, la

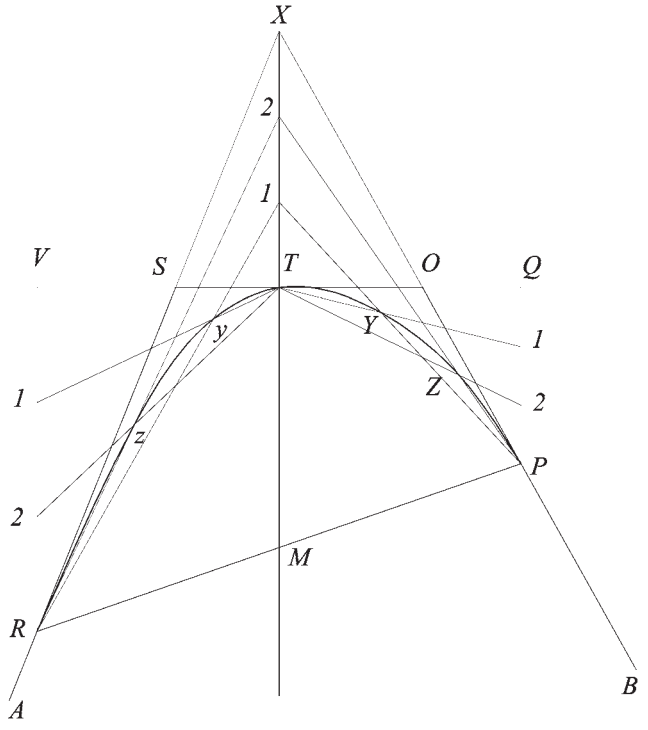


Fig. 132*Sezione conica, data una retta per due punti delle tangenti estreme.

Prima soluzione per la parabola, avendo diviso *RP* in due parti uguali in *M*, e tracciata *MX* che intersecherà *SO* in *T*, condurremo per i punti *P* e *R*, le parallele *PQ*, *RV* finchè non incontrano *SO* prolungata, che le intersecherà nei punti *V* e *Q*; divideremo in seguito le linee *TX*, *PQ*, *RV* in uno stesso numero di parti uguali, qui per esempio in tre, cominciando la divisione verso la linea *SO*; le linee condotte per i punti corrispondenti *1* e *1.2* e *2* s'intersecheranno nei punti *y* e *z*, *Y* e *Z* che apparterranno alla circonferenza della parabola; così conducendo una linea a mano, o con un regolo pieghevole per i punti *RzyTYzp*, avremo il contorno della sezione che tange le tre linee date.

Fig. 133 Parabola .

Seconda soluzione per l'ellisse e l'iperbole, per i punti di tangenza dati RTP, avendo tracciato le linee *RT*, *PT* (***Fig. 134***) le divideremo in due parti uguali in *N* e *n* per il quale, e per i punti S e *O* condurremo le linee *NS*, no le quali essendo prolungate, s'intersecheranno nel punto *C*, dove sarà il centro della sezione, per mezzo del quale si ha già un diametro riportando *CT* su *Ct* sulla stessa linea prolungata; così la domanda

prolungamento ***Fig. 135***, in e e g, e che si faccia *ef*=*ey*, *gf*=*gP*, avremo i punti *P*, *f* e *f* corrispondenti a quelli dell'altro lato della curva, e potremo

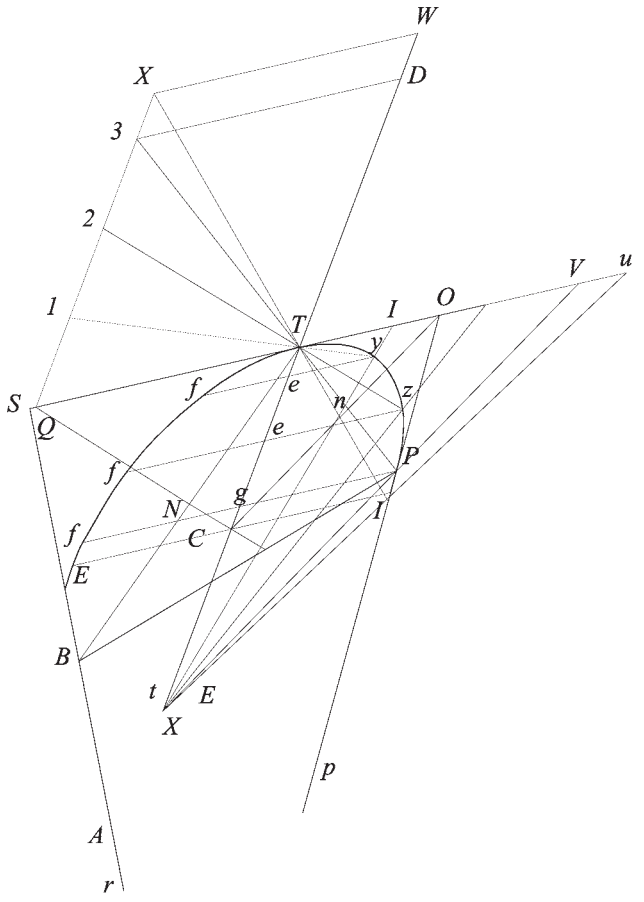


Fig. 134 Ellisse, dati i punti di tangenza.

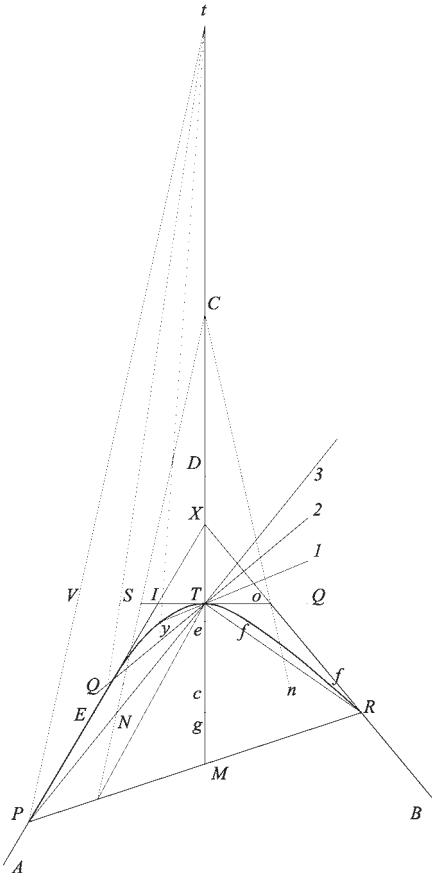


Fig. 135 Iperbole, dati i punti di tangenza.

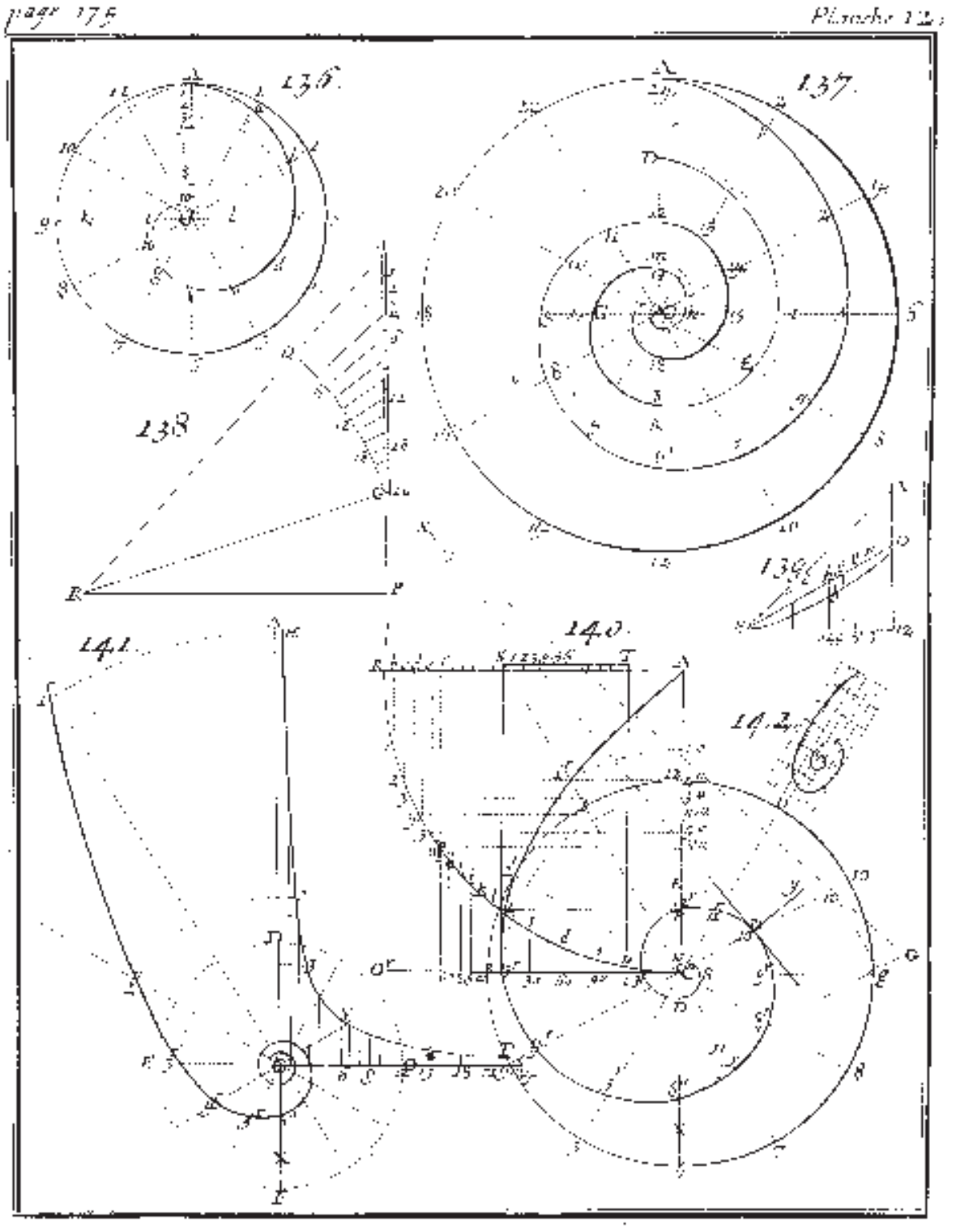
Dimostrazione.

Principalmente, per la ricerca del centro della sezione. Poichè le linee *RT* e *TP* che congiungono i punti di tangenza sono divise in due parti uguali in *N* e *n*, e che le linee *NS* e *nO* passano per il punto d'incontro [2] delle tangenti; queste sono nella direzione dei diametri, di conseguenza ciascuna passerà per il centro che sarà nel punto *C* che è loro comune, e appartenendo il punto *T* alla circonferenza, la linea condotta per *CT* sarà ancora un diametro uguale a 2*CT*=*Tt*, per costruzione; e poichè *SO* tangente passa per *T*, ogni linea come *gP* che gli saranno parallele, sarà un ordinata a questo diametro; per mezzo della quale abbiamo trovato il suo parametro, che deve essere un terzo proporzionale al primo *Tt*, e al secondo sconosciuto, che supponiamo qui per facilitare la dimostrazione uguale a *EI*, ***Fig. 134*** .

Corollario.

sarà ridotta a questa: essendo dati un diametro e una ordinata a questo diametro, trovare il suo parametro, e tanti punti quanti se ne vorranno della sezione.

Avendo condotto per i punti *P* e *t VPt*, che intersecherà *SO* prolungata in *V*, riporteremo *VT* in *TD* sul diametro *Tt* prolungato ***(Fig. 134***) e sul prolungamento, condurremo *D3* parallela a *SO*, che si concluderà nel punto *3* con la retta *PT3*; per questo punto, condurremo *3Q* parallela, e uguale a *DI*, e divideremo le lunghezze *3Q* e *TV* nello stesso numero di parti uguali, per le quali e per il punto *T*, condurremo le linee *1Ty*, *2Tz*, e dal punto *t* per le divisioni di *TV*, le rette *ty*, *tz*, che intersecheranno le


136
137
138
139
140
141
142

DE STEREOTOMIA Lib. II.

Abbiamo detto nel libro I. di quale utilizzo sta questa curva nelle volte sul “Noyau & la vie St. Giles” ; vedremo l’applicazione al “trait” di queste volte nel libro IV. Ecco all’incirca tutte le sezioni dei corpi, che ne dobbiamo conoscere le curve.

Della Spirale

Anche se la spirale non sia una sezione di questi corpi regolari, che fanno il principale oggetto della nostra stereotomia; rappresenta una sezione di quello che la natura produce, e che l’architettura imita in diversi casi, così sono le conchiglie e le corna degli animali : per questa ragione abbiamo creduto di dovergli dare spazio nella descrizione delle curve usuali, per la costruzione e la decorazione degli edifici.

Non esistono curve nella geometria che possono essere soggette a delle variazioni come la spirale; M. Varignon in una memoria custodita presso l’accademia delle scienze ne ha fatto vedere diverse generazioni, che possono essere spinte all’infinito, noi che ne vogliamo solo la pratica,

Problema XVII

Tracciare la spirale la più semplice e la più uniforme, che chiamiamo la spirale d’Archimede (Plan. 12).

Dal centro C, (Fig. 136) e dell’intervallo CA come raggio preso ad arbitrio per quello di una rivoluzione intera della spirale; descriviamo un cerchio A 3, 6, 9 A, dividiamo la circonferenza in tanti parti quanto ne vogliamo avere come punti sul contorno della spirale: la dividiamo comodamente in 12, come in questa figura, portando sei volte il raggio sulla circonferenza del cerchio, non ne abbiamo che a dividere in due ogni sesto, e tirare i diametri A 6, 9, 3 e C. Possiamo moltiplicare questa divisione tante volte quante ne vogliamo, per avere la curva più esatta. Poi dividiamo il raggio CA in tanti parti quante ne abbiamo diviso la circonferenza, per trovare con il loro mezzo su ogni posizione del raggio AC, la lunghezza del raggio della curva, che parte dal punto A si avvicina al suo centro C, oppure se lo vogliamo considerare in altra maniera, partendo dal centro C si allontana continuamente, girando intorno a

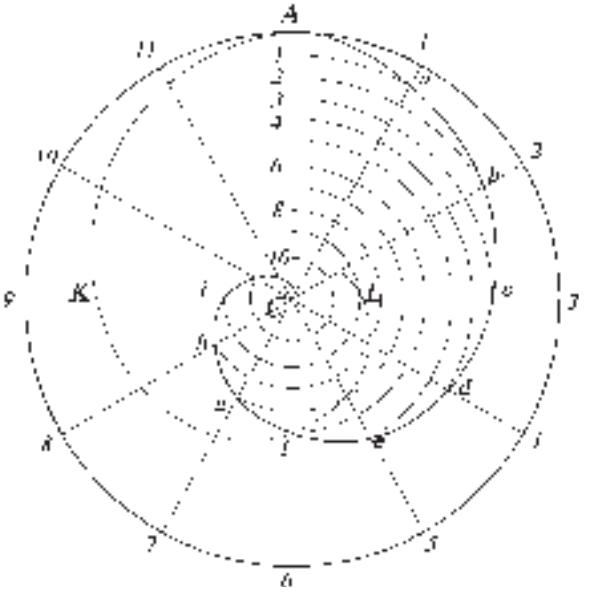


Fig. 136 Spirale d’Archimede.

Dal centro C, e come raggio l’intervallo C1, parte di CA, descriviamo l’arco 1°, che taglia il raggio Ca1, della prima divisione della circonferenza A1, nel il punto a sul contorno della spirale, di seguito dallo stesso centro e di un intervallo più piccolo di una divisione C2, descriviamo tra i raggi Ca1, Cb2, l’arco 2b, che darà il punto b sul raggio Cb2. Proseguiremo con la stessa maniera per trovare gli altri punti c,d,e,f,g,h ecc. Diminuendo il raggio di una dodicesima parte, fino a percorrere tutta la circonferenza A3 6 9 A, e allora otterremo una rivoluzione intera della spirale, che ritorna sul raggio AC, da dove è partita.

Il cerchio che racchiude la prima rivoluzione si chiama cerchio circoscritto, e quello che si trova all’interno o all’esterno del punto A si chiama “cerchio di rivoluzione”, e gli archi 1°, 2b, 3c, archi di rivoluzione.

COROLLARIO I

Segue per questa generazione che le parti del raggio AC, sono essenzialmente proporzionali agli archi di rivoluzione oppure che è la stessa cosa, a quelli del cerchio circoscritto, in maniera che se il raggio percorrendo la 24° o 36° partizione, questo raggio si accorcerà o si allungherà per ogni arco di rivoluzione di una 24° o 36° partizione,

COROLLARIO II

Segue ancora che quando vogliamo avere più di una rivoluzione, per esempio, una e mezzo, o due e un quarto, dobbiamo dividere il raggio AC, che supponiamo sempre preso a volontà, in un numero di partizioni conveniente a questo disegno, per esempio per una e mezzo, nella supposizione della divisione del cerchio in dodici, dividiamo il raggio in diciotto partizioni, e per due e un quarto in ventisette, e allora avremo più di un punto della spirale su ogni raggio del cerchio di rivoluzione, tracceremo infine da un punto all'altro , una curva a mano, o per mezzo di una curvilinea, e avremo la spirale che desideriamo, se la vogliamo regolare, ma siccome qualche volta desideriamo allungare o accorciare il contorno, seguendo i diversi effetti che ci proponiamo, diremo come si può variarlo.

COROLLARIO III

Se dopo aver tracciato una spirale come in A c f i C, dalla parte destra, tracciamo la stessa linea dalla parte sinistra, come la A k f l C , che incrocia la precedente in f, partendo dallo stesso origine A, e arrivando allo stesso centro C; si formerà una figura con il centro a forma di cuore, che può servire agli ornamenti delle griglie di ferro, e altre opere della stessa natura, che erano fortemente di moda nelle finestre dell'architettura gotica.

Problema XVIII

Allungare o accorciare il contorno della spirale.

Possiamo risolvere questo problema in un infinità di modi, perché possiamo fare i raggi degli archi di rivoluzione nel rapporto delle ordinate di tali ascisse della curva che vorremo scegliere, e gli archi di rivoluzione nel rapporto di loro ordinate, ciò rende questo problema molto generico. Possiamo ancora, senza variare gli archi di rivoluzione farli tutti di ugual numero di gradi, e variare soltanto i raggi di questi archi nella maniera che desideriamo, come nel caso delle tangenti oppure delle secanti, o delle potenze, come le radici , i quadrati, i cubi, ecc. gli architetti si servono del rapporto delle tangenti: ne vogliamo dare un esempio,dove possiamo aumentare l'inegualità delle divisioni elevando il raggio a dividere AC (Fig. 137) al di sopra del punto P, dove è l'angolo retto del seno totale

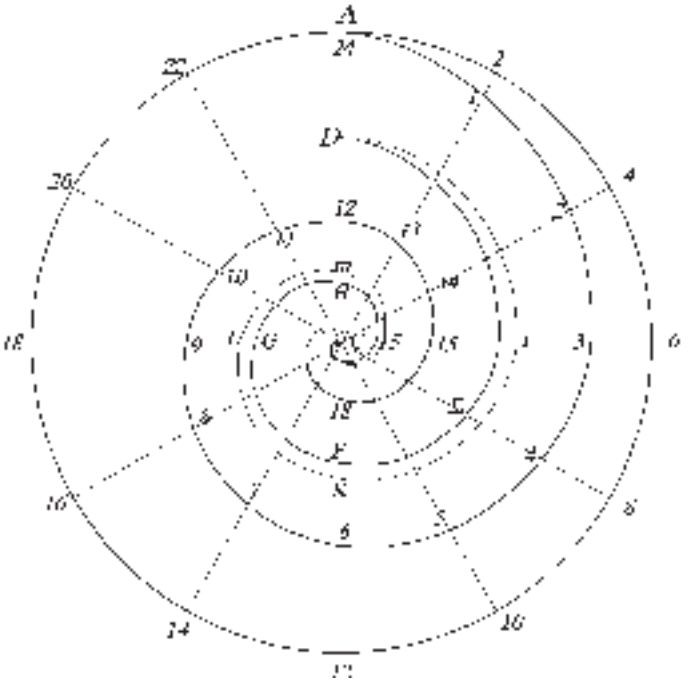


Fig. 137 Cambiare il contorno della spirale.

Sia quindi il raggio dato AC, per il più grande della spirale (Fig. 137,138) per il quale vogliamo che il contorno si riferisce più che la spirale regolare, a misura che la spirale si avvicina dal centro C, e al quale vogliamo fare due rivoluzioni: trasportando questo raggio in aC, (Fig. 138). e avendo preso ad arbitrio il punto R, in maniera che avendo tracciato a questo punto una linea CR, forma con aC, un angolo aCR, tiriamo aR, e dal punto R come centro e come raggio RC; tracciamo l'arco CD che taglia DR in D; dividiamo questo arco in ventiquattro parti per due rivoluzioni, e per ogni divisione, e per il centro R, tiriamo delle linee fino aC, che darà ventiquattro divisioni non uguali, diminuendo verso il punto C, portiamo questi divisioni sul raggio AC, (Fig. 137) dove le marcheremo con delle cifre, per evitare confusioni, e operiamo su questo raggio nella stessa maniera del problema precedente, questo darà una spirale, come la vediamo alla figura 137.

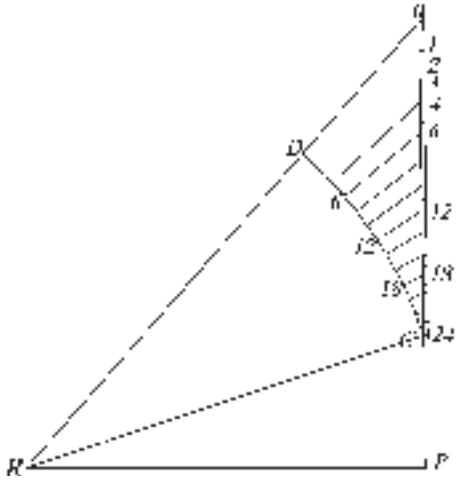


Fig. 138 Allungare o accorciare il contorno della spirale.

COROLLARIO

A questo punto tiriamo la maniera di fare una spirale in un altra, come nelle volute dei capitelli delle colonne di qualche ordine di architettura; in maniera che si rifaccia più o meno al desiderio dell'architetto; partendo se lo vogliamo da uno stesso punto D, arriveremo allo stesso centro C per diversi cammini, quindi la spirale D i k l m n C si avvicina più dell'insieme A 3 6 9 12 C che la spirale D E F G H C, anche se l'una o l'altra partono dallo stesso punto D, e arrivano allo stesso centro C.

Sia (Fig. 139) la lignea A 12, uguale alla distanza data della prima rivoluzione alla seconda, e in questo intervallo un punto D ad arbitrio preso per il tracciamento della spirale interna, che piazzeremo anche sul raggio AC della (Fig. 137). Facciamo 12 S perpendicolare e uguale a 12A, poi tiriamo SD e SA: su 12 S, porteremo gli intervalli della prima spirale presa sui raggi tirati dal centro C: C2, C4, C6 ecc. Per esempio 15, 3 di S in 3 alla (Fig. 139). 18, 6 di S in 6, e cosi via; e per i punti 3,6,9,&C. Avendo tracciato delle parallele a A 12 che secano SD nei punti e f g h, avremo le lunghezze e3, f6, g9, h12 che daranno sugli stessi raggi dei cerchi di rivoluzione A 6 12 18 A i punti E, F, G, H, delle diminuzioni dei raggi per la spirale interna. Dove serve elevando o abbassando il punto D, cambiamo il contorno della spirale: se al posto della retta SD, facciamo un arco di cerchio s c D o S b D, avremo una spirale che sarebbe cominciata e finita allo stesso punto come la precedente, ma che non segue la distanza proporzionale triangolare.

Possiamo non solo cambiare le lunghezze dei raggi, ma ancora il rapporto degli archi di rivoluzione; il che può fornire il mezzo per fare un infinità di spirali, sempre diverse; perché possiamo fare questo rapporto uguale a quello delle ordinate di una curva qualsiasi geometrica oppure meccanica, come l'avrebbe immaginata M. Varignon, che ci ha aperto la strada a delle infinite variazioni della spirale, voglio dare un esempio di quelle che chiama "Paraboliche verticalcentrali", che vuol dire, che hanno il loro vertice al centro della spirale, scegliendo la più semplice, quella che tiriamo dal cerchio; e possiamo applicare all'ellisse, alle altre sezioni

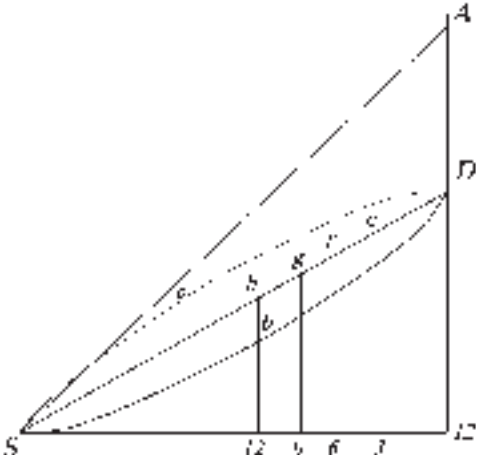


Fig. 139 Tracciare una spirale in un altra.

Spirale, Circolare o Ellittica o Parabolica, ecc.

Sia (Fig. 140) la linea AX presa come l'asse di una spirale, avendo la curva generatrice un quarto del cerchio CLR: sia AC, il raggio maggiore della spirale, e il punto C come centro, la linea AC sarà presa come l'asse della curva che scegliamo come Generatrice, in questo caso è un cerchio, del quale sarà il raggio, e il punto A il centro: l'asse della spirale AX, il suo centro C, e la curva Generatrice C 6 R essendo data, ci determineremo il numero di rivoluzioni, che vogliamo che faccia, e prenderemo una linea costante S T, che sia contenuta nella più grande ordinata R A della curva Generatrice R L C, tante volte quante ne vogliamo di rivoluzioni complete o incomplete: la prenderemo in questo esempio contenuta due volte e mezzo in R A, per avere due giri & mezzo della spirale; di seguito bisogna fare sempre questa analogia.

Come la linea costante S T,
é all'ordinata variabile della curva Generatrice.
Di seguito il cerchio di rivoluzione 12,g[1], 6, 3,
Sarà rispetto all'arco di rivoluzione, al primo giro, oppure al cerchio di rivoluzione, più a un arco della seconda rivoluzione data.
All'arco di rivoluzione cercato;
Se la curva Generatrice è un Ellisse, una Parabola, oppure una iperbole,

Per risparmiare il calcolo di questa analogia; divideremo la linea data S T in parti uguali, per servirsi di una scala proprio per associare il rapporto di questa costante con le ordinate del cerchio tirato con i punti dell'asse AC, che saranno presi per la terna dei raggi degli archi di rivoluzione, come C1a, C2a, C3a, C4a, &c. quali terne, saranno anche quelle delle ascisse di questo asse AX; supponendo, in questo esempio, la linea S T divisa in 12. e il cerchio di rivoluzione 12, g[1], 6, 3, anche in 12, oppure in 360 gradi, dei quali 30 rispondono a una divisione di S T; divideremo l'ordinata AR in 30 parti uguali per due rivoluzioni e mezzo, e per questi divisioni b c d e F, ecc. manderemo delle perpendicolari all'asse AC, che lo taglieranno nei punti 1a, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, di seguito per ognuno di questi punti, e dal punto C come centro; descriveremo degli archi di rivoluzione proporzionali alla parte della costante S T, per esempio, per la prima, l'arco 1°, 1r di 30 gradi; 2°, 2r, di 60 gradi; 3°, 3r, di 90 gradi; 4°, 4r, di 120 gradi, e cosi via: quello che si fa facilmente dividendo il cerchi in 12 e aumentando di un dodicesimo della sua circonferenza all'intersezione con il raggio, al quale deve terminare; come lo vediamo nella figura nei punti 1r, 2r, 3r, 4r, 5r, &c. Per tutti questi punti trovati, tracceremo una curva a mano, oppure con una curvilinea, e otterremo una spirale, come si è proposto per il numero delle rivoluzioni: daremo anche il mezzo per fissare gli intervalli delle rivoluzioni, come lo giudicheremo a proposito.

Faremo osservare che possiamo trovare i raggi degli archi di rivoluzione in un'altra maniera; trasportando le divisioni della linea S T su C r, perpendicolare a C A, per esempio in 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, da dove tirando delle parallele a C A, che taglieranno la curva Generatrice nei punti f g h i k l m; avremo delle lunghezze 6f, 7g, 8h, 9i, 10k, 11l, 12m, che saranno quelli delle ascisse, che dovremo prendere come raggi degli archi della soltanto in parte; c u sarà uguale a C V, 9°s[2], a C S e C D a 6° d[2], ecc. e senza prendere l'impegno di fare degli archi di rivoluzione; si tratta di portare queste partizioni sui raggi che le corrispondono, che vuol dire, i corrispondenti al numero delle divisioni della costante, più o meno una, o più rivoluzioni, come L 3r su C A, l3 su C11r, K10 su C 10r, i9 su C 9r, H8 su C 8r, ecc.

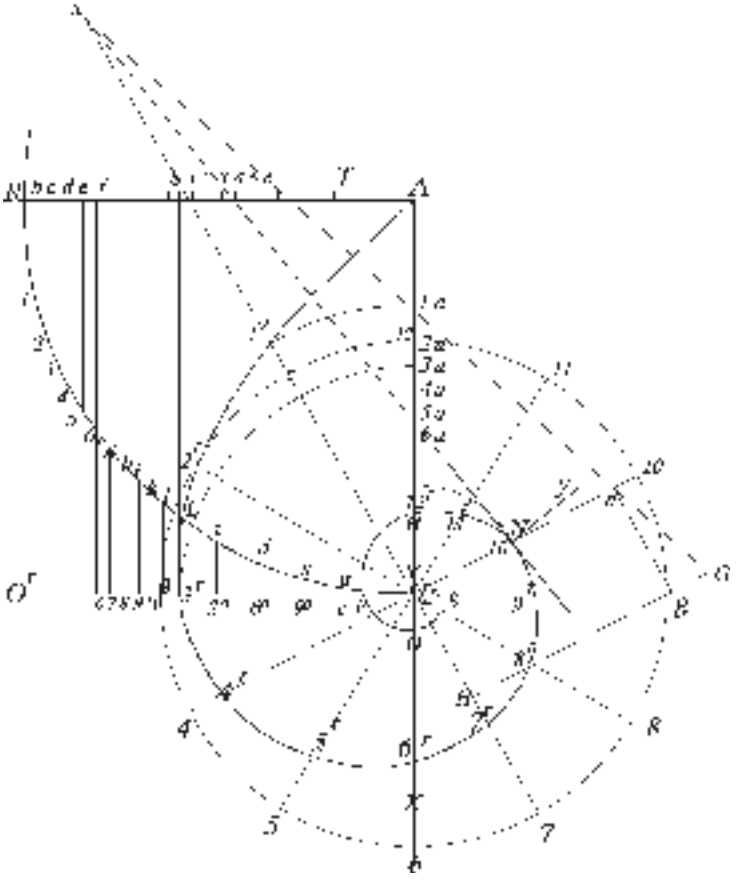


Fig. 140 Spirale circolare o ellittica o parabolica.

COROLLARIO I

Da dove lo tiriamo il modo per fissare la prima rivoluzione della spirale, a tale distanza che vogliamo dal centro C, sull'asse A C: perché se lo vogliamo, per esempio, che comincia in B, manderemo per questo punto B la linea B L perpendicolare all'asse A C, finché incontra la curva

1. Nel testo originale è scritto 9.
2. Nel testo originale è scritto 90s, 60d.

taglierà l'ordinata R A nel punto S, la distanza S R sarà la lunghezza della linea costante che qui è uguale a S T, la quale ha sempre un certo rapporto con la circonferenza del cerchio di rivoluzione 12, 3, 6, g; ma questo punto B essendo una volta determinato, non dobbiamo modificare le altre rivoluzioni; si trovano regolati dal rapporto delle partizioni della

COROLLARIO II

L'inverso del corollario precedente è chiaro alla sola ispezione della Figura (Fig. 140); perché se vogliamo sapere a che punto dell'asse A C si concluderà la prima rivoluzione; dobbiamo tirare dal punto S, estremità della costante S T, posare da R in S, una lignea S L parallela all'asse, finché taglia la curva generatrice in L, e per questo punto L, mandare la perpendicolare L B allo stesso asse, la quale darà il punto B che cerchiamo: se la linea S T è contenuta più volte in A C, troveremo con

COROLLARIO III

Segue naturalmente a questa costruzione: 1. che se al posto del cerchio, avessimo preso un quarto d'ellisse come curva Generatrice, e che avessimo messo al posto di R A, la metà del suo maggior o minore asse; avremmo allungato o accorciato la spirale: 2. più volte la linea S T sarà contenuta in A R, più la spirale sarà arrotondata, e al contrario; dove vediamo che questa costruzione, indipendentemente del cambiamento che proviene dalla curva Generatrice, che possiamo scegliere, da una grande facilità di accontentarsi sul suo contorno più o meno raddoppiato: al posto di posare il vertice della curva Generatrice al centro della spirale; la possiamo mettere in una situazione diversa; ma allora la spirale che risulterà, non sarà del numero di quella che chiamiamo Verticocentrale, del quale parliamo: do un esempio di un'altra specie che M. Varignon chiama Concentrali.

Sia (Fig. 141) la curva H Y P, un iperbole equilatera, di cui A C e C 24 sono gli asintoti, i quali formano un angolo retto in C, dove piazzo il centro della spirale; e per conseguenza quello del cerchio di rivoluzione D E F G, che faccio di una apertura di compasso presa ad arbitrio, e ne divido la circonferenza in tale numero di partizioni quanti ne voglio avere dei punti della spirale a ogni rivoluzione, per esempio in dodici; di seguito avendo preso a volontà una linea costante, per esempio C G, la divido anche in dodici partizioni uguali, che vuol dire, in un stesso numero della circonferenza del cerchio di rivoluzione, & per ognuna di questi partizioni, mando delle parallele ad uno degli asintoti A C, che prendo l'iperbole al di fuori di questo asse in H; inizio la mia spirale nel punto 1r; allontanata dall'asse A X di una dodicesima partizione della rivoluzione A 1 r del punto 2. dove la seconda divisione della costante C G, da il punto 2. faccio un arco 2, 2r di due dodicesimi della rivoluzione, che mi da il punto 2r, & del seguito, come nelle spirali paraboliche, verticocentrali; ma alla fine perché l'iperbole H Y P, non tocca mai il suoasintoto C G, questa spirale non sarà che intorno al centro C, al quale si avvicina sempre per ogni rivoluzione, senza poterne mai arrivare.

Non mi fermerò alle differenze di posizioni delle curve Generatrici, che incrocia l'asse della spirale, una da una parte, l'altra dall'altra di questo asse, le quali sono uguali e tracciato nel senso opposto, come l'abbiamo
detto sulla spirale d'Archimede (Fig. 136) se le due parti della curva Generatrice sono uguali; ma se non sono uguali, è chiaro che la Figura di cuore che ne risulta diventa irregolare; una parte essendo più o meno gonfiata dell'altra; il quale non è di nessun impiego per gli ornamenti di Architettura: è per questo che passo sulle infinite varietà che ne possono risultare; gli esempi che vengo a dare, essendo sufficienti per esercitare gli architetti e gli artisti che hanno degli ornamenti a tracciare in piacevoli

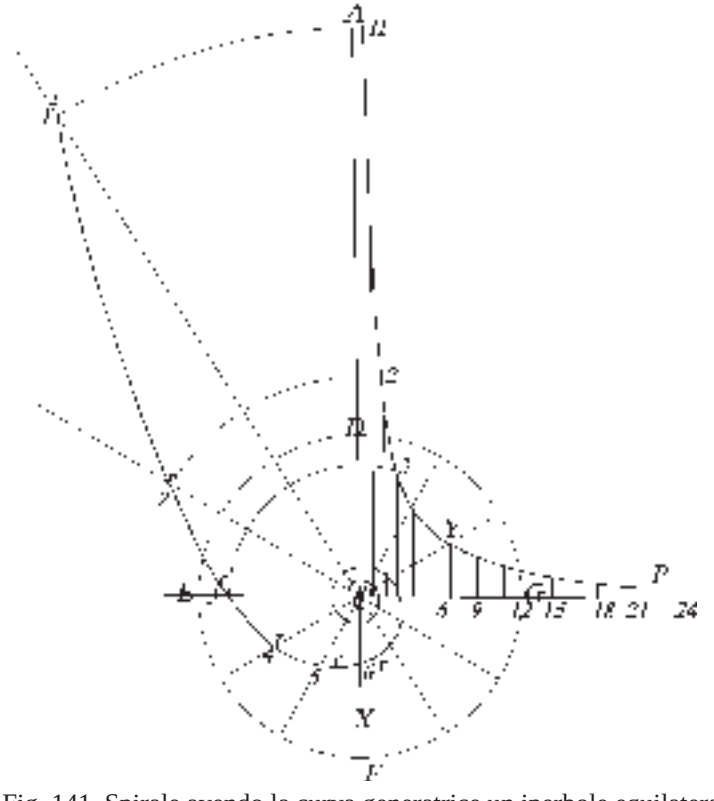


Fig. 141 Spirale avendo la curva generatrice un iperbole equilatera.

Avvertirò soltanto; 1. se la curva Generatrice si ferma dalla parte dell'asse della spirale, come se prendiamo un semi cerchio, o un semi ellisse, al posto del loro quarto; la spirale non continuerà a girare dello stesso senso, dopo la più grande ordinata; ma ritornerebbe in qualche maniera sulle sue tracce, avendo la sua concavità girata dalla stessa parte.

2. Se prendiamo come curva Generatrice, una iperbole equilatera, concentrica, vale a dire, abbia lo stesso centro della spirale; quella che ne sarà generata, non avrà né un inizio né una fine, vale a dire, che comincerà a una distanza infinita dal suo centro, e non arriverà mai a questo centro; e comunque dandole un inizio, taglierà il suo asse dopo la prima rivoluzione; quello che è una proprietà degli asintoti, che si avvicina all'infinito dall'iperbole, senza poterne arrivare, come veniamo di dire.

3. Se prendiamo come curva Generatrice una curva logaritmica, al posto dell'iperbole, la spirale che ne sarà generata, avrà un inizio, & non avrà fine, oppure se ne ha una fine, non avrà un punto di inizio; a seconda che mettiamo il suo asintoto sull'asse, o perpendicolarmente all'asse della spirale.

Possiamo fare la stessa cosa per mezzo dell'iperbole, mettendo il centro della spirale non al centro dell'iperbole; ma su uno dei suoi asintoti a qualche distanza da questo centro; il quale fornisce un mezzo molto comodo per tracciare un infinità di volute, che possiamo fare arrivare da un punto lontano dal centro e dall'asse, e farele terminare al centro con un occhio circolare, come fanno gli architetti alle volute ioniche; perché possiamo salvare più delicatamente la nocca che si forma alla giunzione della spirale e di questo occhio, se è della natura di quelle che girano intorno al loro centro, senza arrivarci; per la stessa ragione, facciamo più perfettamente la giunzione del ramo destro del limone, con la voluta

Possiamo ancora cambiare ogni sorta di spirale allargandole, oppure ristringendole nella maniera che desideriamo, per il mezzo della riduzione dei quadrati cambiati in parallelogrammi, e anche in trapezi; se vogliamo stringerla da una parte più dell'altra, supponendo per esempio che seguendo un disegno che mi propongo; trovo la spirale A L B V C molto aperta sul suo diametro 2r C 8; non si ha da fare altro che dei parallelogrammi ristretti secondo questa condizione, come lo vediamo alla (Fig. 142) tracciare sull'originale dei quadrati dallo stesso numero, quello che non abbiamo fatto qui per evitare la confusione; perché tutti i disegnatori sappiano ridurre il quadrato dal piccolo al grande, e che non ci sia qui altri differenze, che quella della figura dei quadrati, che lo sono dissimile, ma comunque proporzionale in un senso.

UTILITA'

La spirale è una curva, della quale fare utilizzo in architettura in diverse occasioni; prima di tutto è molto frequente negli ornamenti in ferro battuto e nelle sculture; trova impiego nelle volute dei capitelli ionici e compositi in piccola scala, e in grande scala nell'arredamento delle diverse sale di architettura, particolarmente per le console e le estremità dei contrafforti oppure le colonne che eleviamo, per ornare le volte delle chiese, come vediamo in quattro diversi ambienti al di fuori di "Val de Grace" a Parigi, & in tutte le chiese moderne, in Italia dove gli architetti hanno il gusto di tracciare l'ornamento, gli danno dei contorni movimentati allargando o stringendo ogni parte, a seconda che trovano l'occhio più o meno soddisfatto: se erano a conoscenza di questo corso di geometria, dubito che riuscissero meglio nel tracciamento del contorno, il quale essendo intrinsecamente regolare, si presenta per tutti le sue parti con una uniformità che non accontenta né lo spirito né gli occhi.

Alla fine la spirale è una curva necessaria per formare le estremità delle scale , che gli operai chiamano chiocciole: la circolare, come quella che abbiamo dato nella figura, conviene di più rispetto a quella d'Archimede, come ne ho avuto l'esperienza da un mio amico dove l'ho impiegata, & quella iperbolica, concentrale ancora meglio, daremo di seguito la

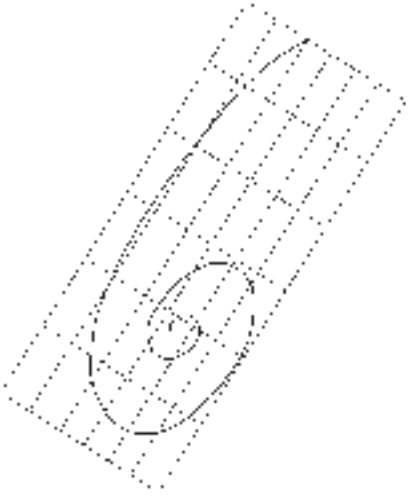
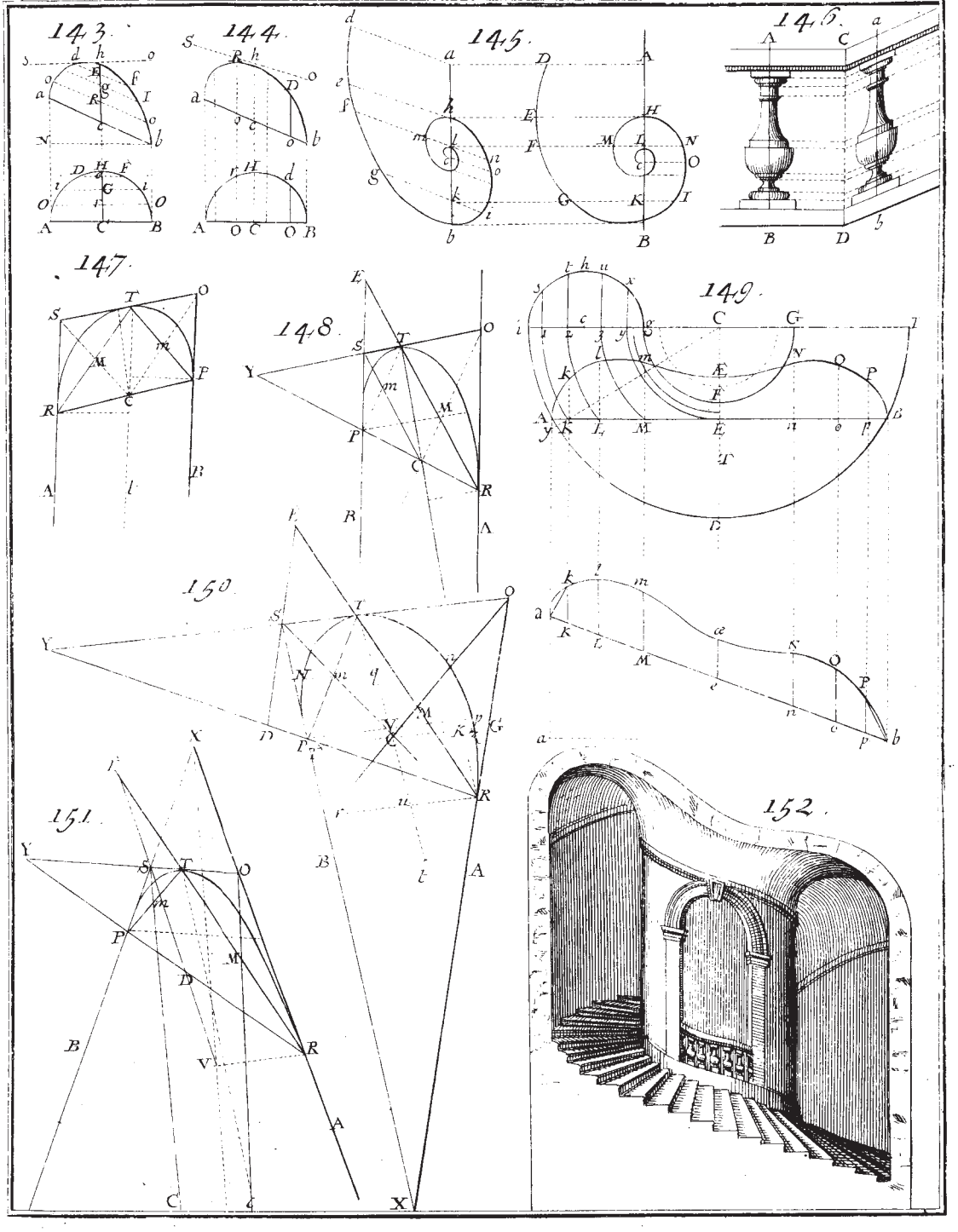


Fig. 142 Allargare o ristringere la spirale.

page. 181.

Planche 13.



Gli Archi Rampanti

In termini architettonici le linee che non sono né verticali né orizzontali, ma inclinate all'orizzonte, sono chiamate *Rampanti*, e gli archi, le cui origini non sono allo stesso livello, essendo le une più basse delle altre, sono chiamati *Archi rampanti*, come sono gli archi destri delle rampe di scale oblique, le cui basi dal centro della facciata sono allo stesso livello, e le arcate presenti al di sotto delle Rampe delle terrazze o delle scalinate.
Per spiegare geometricamente, e più in generale, il significato di questo termine riguardo alle linee curve, si può dire che tutte quelle le cui ordinate non sono perpendicolari ad un diametro verticale, mentre sono parallele alla linea che passa per le origini dell'arco, sono le curve Rampanti e *gli Archi Rampanti*.
E' bene qui sottolineare che gli "Aparailleurs" chiamano particolarmente *Curva Rampante* quella della longarina della scala a chiocciola a giorno; ma noi non riteniamo di doverci privare di una espressione generale per conformarci ad un linguaggio così poco rispettabile.

Problema

CAMBIARE IN ARCO RAMPANTE UN ARCO DI CERCHIO, O DI UNA CURVA QUALUNQUE
Sia dato (***Fig. 143***) l'arco di cerchio *AHB* che supponiamo sia un semicerchio nonostante possa essere un segmento più o meno ampio; al centro *C* della corda *AB*, si eleva una perpendicolare indefinita *Ch*, dalla quale si tracciano due parallele dalle estremità *A* e *B*; dopo si prenderà su *Ch* un punto c a piacere per il vertice dell'angolo *Ccb*, che si farà uguale al complemento dell'inclinazione che si vuole dare alla Rampa con una linea di livello *bM*, e si traccerà la linea *ab*, che sarà delimitata dalle parallele indefinite *Aa*, *Bb*, le cui intersezioni in *a* e *b* determineranno i punti di origine superiore e inferiore dell'arco Rampante che ci siamo proposti di fare.
In seguito dopo aver tracciato a piacere diverse parallele *OO*, *ii*, *DF* alla corda *AB*, che taglieranno *CH* nei punti *r*, *G*, *e*; si riporteranno le ascisse *Cr*, *CG*, *Ce*, *CH* in *cR*, *cg*, *cE*, e *ch*: e per i punti *RgE*, si tracceranno delle parallele ad *ab*, sulle quali si riporteranno da una parte e dall'altra le distanze *rO*, *Gi*, *eD* del semicerchio che determineranno i punti *o*, *I*, *f*, *h*, *d*, *c*, per i quali si traccerà a mano, o con una riga pieghevole il contorno dell'arco rampante *ahb*, che è stato richiesto.
Si può fare la stessa cosa anche in un altro modo, tracciando a piacere (***Fig. 144***) tante parallele quante se ne vogliono alla linea *Ch*, prolungate indefinitamente, e riportando su ciascuna di queste parallele, quali ad esempio *oR*, *oD*, le distanze *Or*, *Od* comprese nel segmento di cerchio dato, in *OR* e *OD*, al di sotto della linea inclinata *ab*, e si avranno tanti punti quanti se ne vorranno *aRhDb* dell'arco rampante richiesto, che è come si vede una porzione di ellisse.

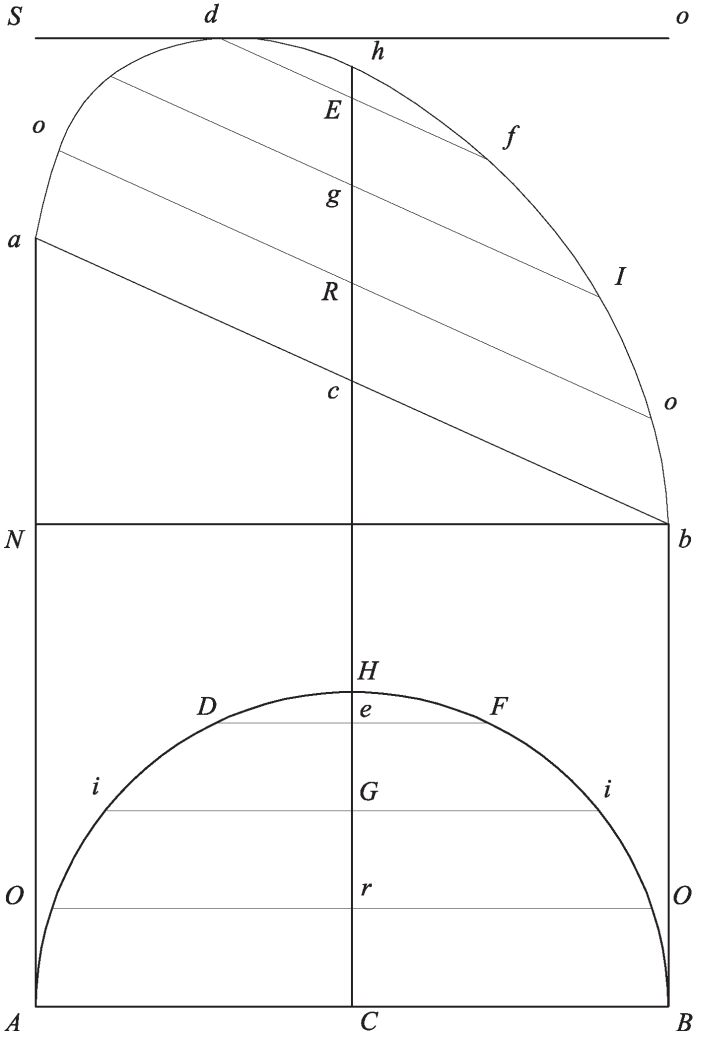


Fig.143 Come determinare un arco rampante dato un arco di cerchio. Metodo 1.

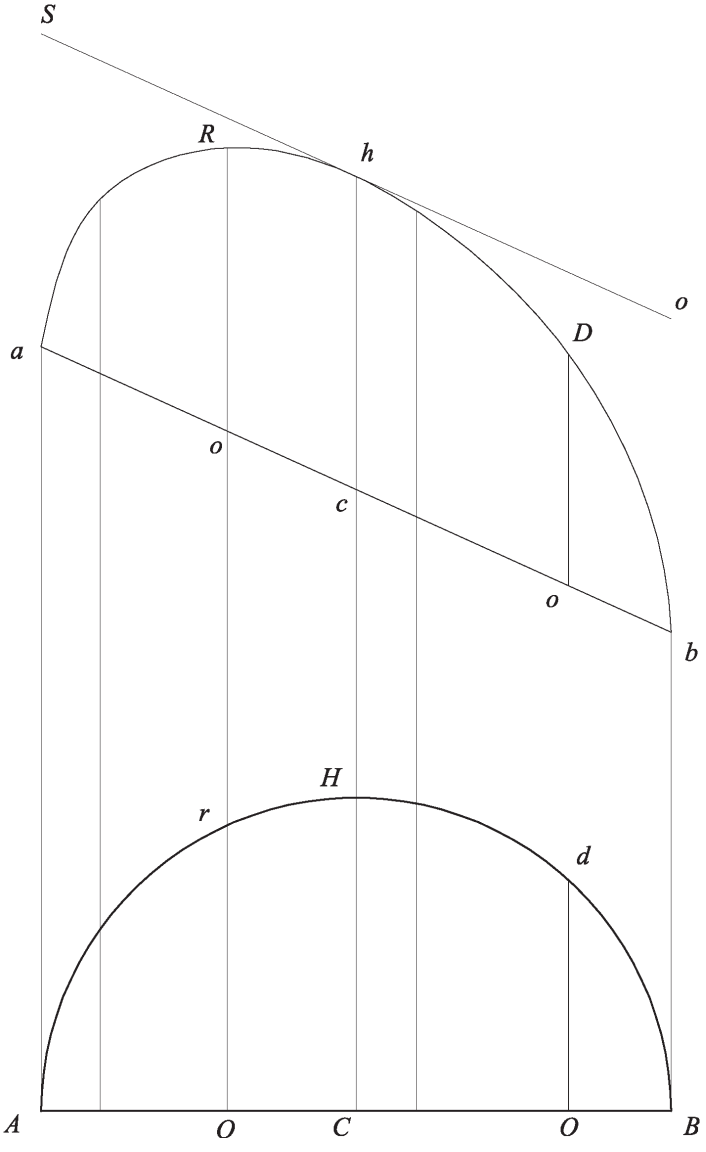


Fig.144 Come determinare un arco rampante dato un arco di cerchio. Metodo 2.

SECONDO ESEMPIO PER TUTTE LE ALTRE CURVE TRANNE IL CERCHIO.

(***Fig. 145***) Data una spirale *DBHLc* che si vuole fare rampante in tutto o in parte, si prende per asse la verticale *AB*, che passa per il centro della spirale, alla quale gli Architetti hanno dato il nome di Cateto; da questo si tracceranno a piacere tante perpendicolari quante se ne vorranno dai punti della spirale rampante, come *AD*, *EH*, *FN*, *GI*, ecc. che si prolungheranno fino ad incontrare un'altra linea *ab*, parallela ad *AB* e distante a piacere, che determineranno i punti *ahlkb*; in seguito si farà l'angolo *hki* uguale al complemento dell'inclinazione che si vorrà dare alla Rampa, per determinare la posizione di una delle ordinate *ki*, dalla quale si tracceranno le parallele indefinite per i punti trovati *ahlk*, come *ad*, *he*, *ln*, *co*, *kg*, sulle quali si tracceranno le lunghezze delle ordinate dall'asse *AB*, come *AD* in *ad*, *HE* in *he*, *LF* in *lf*, ecc. secondo il loro ordine, e si avranno i punti *defgbinhmlc*, per i quali si traccerà a mano una spirale, che è quello che si domanda.

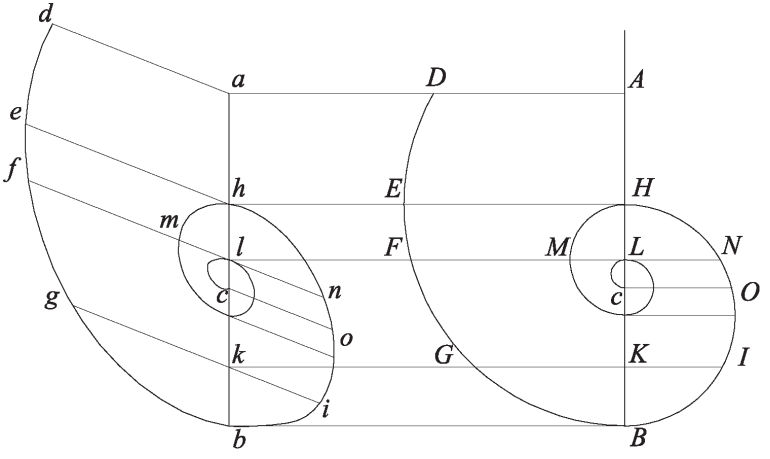
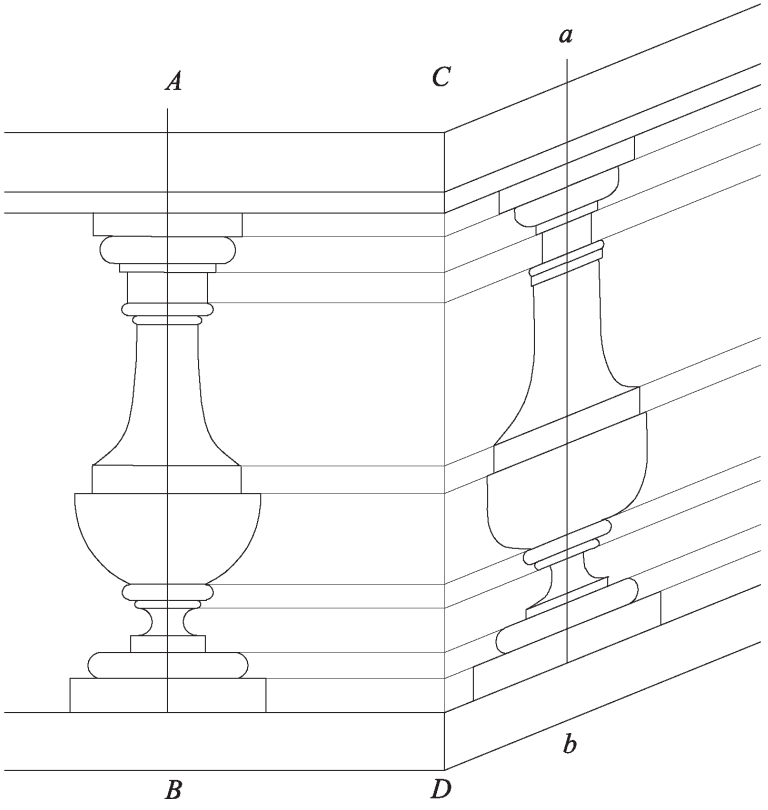


Fig.145 Costruzione di una spirale rampante.

*TERZO ESEMPIO PER LE FIGURE MISTE DALLE CURVE DIFFERENTI, PER ESEMPIO (**FIG. 146**) UN CONTORNO DELLA BALAUSTRA DRITTA, CHE SI VUOLE FARE RAMPANTE PER FARE UN SOSTEGNO DELLA RAMPA DELLA SCALINATA.*

Avendo preso le perpendicolari all'asse *AB*, cioè, dalla linea di mezzo della Balaustra dritta, fino ad incontrare una parallela *CD* posta a una distanza presa a piacere, si tracceranno per tutti i punti di incontro tante linee inclinate a *CD*, secondo la pendenza della Rampa data, o determinata dai luoghi, che incroceranno una terza parallela *ab* presa per l'asse della Balaustra rampante, a una distanza a piacere, nei punti corrispondenti alle divisioni della Balaustra dritta, che saranno le metà delle distanze dei lati della Balaustra rampante, come si è appena detto per la spirale nell'esempio precedente; questo è ciò che la ***figura 146***



illustra visivamente.
Fig.146 Come determinare una balaustra rampante, data una balaustra dritta.

Utilizzo

Il problema, ed in particolare gli ultimi due esempi, sono il fondamento della pratica di tutti gli ornamenti di legno, di pietra o di ferro, che si mettono come sostegni delle rampe delle scalinate; poiché avendo cominciato a tracciare in linea di massima le Balaustre, le Incisioni e le Volute di Racemi e gli altri disegni, così come li si vuole in orizzontale; si allungano le parti inferiori, e si accorciano quelle superiori, in una giusta proporzione, tale che l'occhio non sia scioccato dal cambiamento, e lungi dal causare differenze nei contorni degli ornamenti, sembra al contrario che creino una varietà gradevole alla vista.

Ciò può servire per gli archi delle Arcate e delle volte Rampanti, quando non si ha alcuna limitazione di altezza o direzione del piedritto, perché allora non c'è che da cambiare l'arco circolare in Rampante; ma a causa delle differenze che possono insorgere, dobbiamo qui affrontare un Problema più generale.

Le Curve che si addicono a quelle specie di Volte e di Arcate che si chiamano Archi Rampanti.

Abbiamo parlato nel problema precedente della trasformazione delle curve, le cui ordinate sono orizzontali in curve inclinate all'orizzonte; si tratta al momento di trovare il modo di far passare una curva per certi punti dati, che sono quelli delle Imposte e delle Chiavi di volta degli archi Rampanti, con una circonferenza tale che sia toccata dalle linee dritte che passano per questi punti, delle quali devono anche essere date posizione o direzione.

Le linee che devono toccare gli archi Rampanti, sono in primo luogo i due *piedritti* o i *montanti* che sostengono l'arcata; i quali possono avere tre posizioni differenti, la 1°, verticale, quando sono *a piombo*, in termini artistici, la 2°, inclinata a *strapiombo*, la 3°, inclinata in "talud".

In secondo luogo, una linea reale o immaginaria che termina l'altezza dell'arco Rampante, la quale può essere orizzontale, o inclinata all'orizzonte.

La posizione più ordinaria dei piedritti è quella verticale; tuttavia, qualche volta per una maggiore solidità, gli si danno i "talud", e qualche volta anche per meglio puntellare e sostenere una volta o un muro, la si fa a strapiombo, questo caso è più raro nella pratica del precedente; poiché non si fanno più gli archi "boutans", come nell'Architettura Gotica; i Moderni cercano di nascondere la necessità di queste specie di contrafforti attraverso metodi più piacevoli alla vista, come sono i gruppi di colonne, o le mensole riverse.

La posizione più naturale per la delimitazione dell'altezza di un arco rampante sembra essere una linea orizzontale, in effetti può sempre esserci una tale linea, che dovrà essere chiamata la linea di *Sommità*; ciò nonostante si chiamano così tutte le linee date che attraversano i piedritti prolungati, e che devono toccare la curva dell'arco rampante.

Oltre a queste tre linee essenziali all'arco rampante che esse devono toccare, ne consideriamo una quarta, che unisce i loro punti di attacco coi piedritti che taglia, i quali non sono alla stessa altezza ovviamente di questa tipologia di arco, la si chiama *la linea di Rampa*.

Le differenze di posizione di queste quattro linee, cioè dei due piedritti, della linea di sommità, e della linea di rampa, sono tutte le difficoltà e le varietà dei casi, dove occorre cercare le Curve più opportune.

E' evidente a tutti quelli che conoscono un po' di Geometria, che si può trovare un'infinità di curve, che possono toccare le tre prime linee dritte in tutti i casi, o almeno in molti di quelli che si possono proporre; ma in architettura ci si limita a quelle di sezione conica, che sono le più conosciute, per evitare le difficoltà che le altre si portano con sé, o nella loro costruzione, o nel modo di tracciare delle tangenti, in alcune circostanze importanti.

Io trovo a proposito di questa difficoltà che le spirali di M. di Varignon diano un profilo di arco altrettanto e ancor più gradevole alla vista di quello delle sezioni coniche, che si possono utilizzare per un arco Rampante: potrei anche parlare della spirale di Archimede, ma non la si può altrettanto modificare, come l'altra; o quella difficoltà non è minore, se si volesse procedere geometricamente; si può anche dire che è insormontabile perché Archimede ha dimostrato che la sottotangente della spirale è uguale alla circonferenza del cerchio di rivoluzione, da cui segue che se si potesse tracciare una tangente ad esso, si troverebbe la Quadratura del cerchio: tuttavia, supponendo la rettificazione della circonferenza del cerchio, conosciuta a sufficienza per non trovare errori

nella pratica, si possono tracciare delle tangenti a questa spirale, come diremo qui di seguito.
Ci si domanderà, se è assolutamente necessario che la curva della centina dell'arco rampante tocchi i due piedritti, e perché.
A ciò, rispondo come ho già detto altrove, che poiché l'arco deve essere una continuazione del piedritto, si deve fare una transizione impercettibile dalla linea dritta del piedritto alla curva dell'arco rampante; o il raccordo fra la linea curva e quella dritta si può fare solo al punto di attacco, o l'angolo che creano è infinitamente grande, pertanto impercettibile alla vista, poiché differisce infinitamente poco dalla linea dritta, l'occhio non può essere ingannato se non con questo artificio; tutte le altre unioni lontane dai punti d'attacco diventano difformi, e disturbano la vista: l'Architetto della cappella di Versailles non ha avvertito questo difetto, quando ha fatto gli archi rampanti sotto gli archi "boutans" o sopra il lato basso; poiché la loro giunzione al grande muro è una piega ben marcata, c'è un arco troncato e applicato contro tale muro senza arte e senza naturalezza sopra un piedritto, o sopra un "Dosseret".
Il più grande soggetto di variazione degli archi rampanti deriva dalla linea di sommità, che è lasciata alla scelta dell'architetto, se avvicinare o allontanare le imposte dell'arco, e dargli quelle direzioni e inclinazioni che ha giudicato opportune, secondo le sue intenzioni; e riguardo alla posizione dei luoghi, come quando l'arco rampante deve sostenere un Pianerottolo, o termina sotto un Plinto del livello, la linea di sommità diventa orizzontale; qualche volta conviene dare a queste linee una direzione parallela a quella della linea di Rampa, come quando l'arco rampante sostiene una seconda Rampa uguale e parallela alla prima, talvolta più o meno inclinata; se questa seconda Rampa o un Plinto o un Cornicione o sopra è più o meno inclinata; in questi due ultimi casi, il punto di attacco della linea detta di sommità, non è al vertice della Curva, cioè al luogo più elevato, come mostrato nelle ***Figg 148 e 150***: poiché tale punto è variabile, si tratta di trovarlo, una volta determinate la distanza e l'inclinazione della linea di sommità.

Problema XX

DATE LA DIREZIONE DEI PIEDRITTI, LA LINEA DI RAMPA, E QUELLE DI SOMMITÀ DI UN ARCO RAMPANTE, DESCRIVERE LA SEZIONE CONICA, CHE RAPPRESENTA LA CENTINA DELL'ARCO.

IN TERMINI GEOMETRICI.

DATE LE PRIME TRE LINEE INCLINATE, CHE DEVONO TOCCARE UNA SEZIONE CONICA, I CUI PUNTI D'ATTACCO DEI DUE ESTREMI SONO DATI, TROVARE QUELLI DELLA MEDIA, E LE LINEE NECESSARIE PER DESCRIVERE TALE CURVA.

Siano i piedritti AR, BP (***Fig. 147, 148, 150, 151***), la linea di Rampa *RP*, la linea di sommità *SO*: in primo luogo, se i piedritti *AR*, *BP* sono paralleli tra loro, come anche le linee di Rampa *RP*, e di sommità *SO*; è chiaro che il punto di attacco di queste ultime è dato nel mezzo di *SO* nel punto *T*; poiché in questo caso la sezione che soddisfa il Problema è una Ellisse, come abbiamo detto dinanzi, e che la linea *Tt* che passerà per la metà di *RP*, farà un diametro congiunto alla linea di Rampa, dove sarà il centro *C*; poiché essendo *BP* e *SO* delle tangenti, le linee che sono a loro parallele, e che passano per il centro *C* sono i diametri coniugati; ciò non comporta nessuna difficoltà.

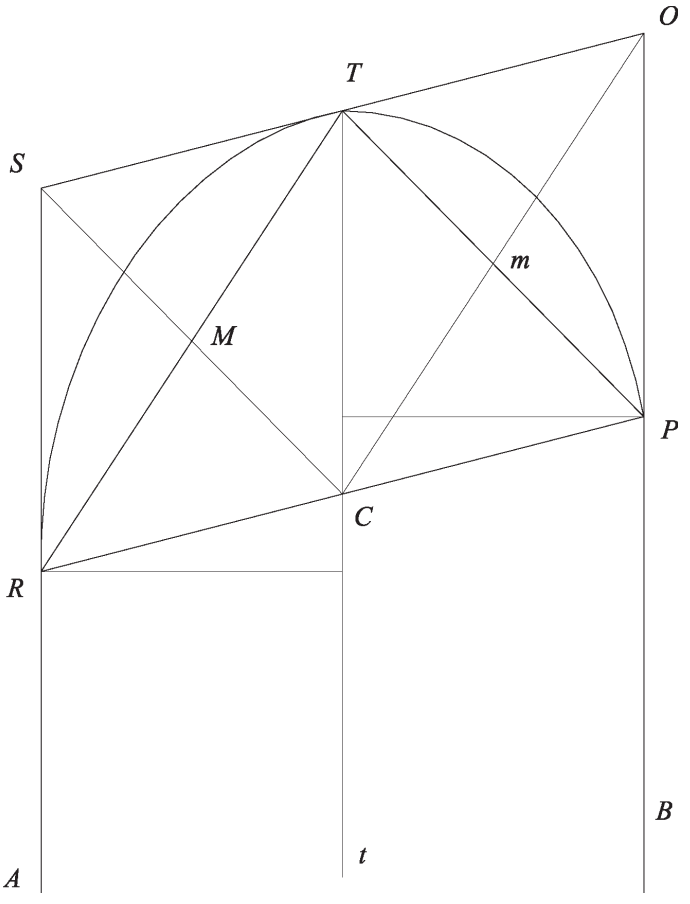


Fig.147 Sezione conica che rappresenta la centina dell'arco, dati i piedritti paralleli e le linee di Rampa e di Sommità parallele.

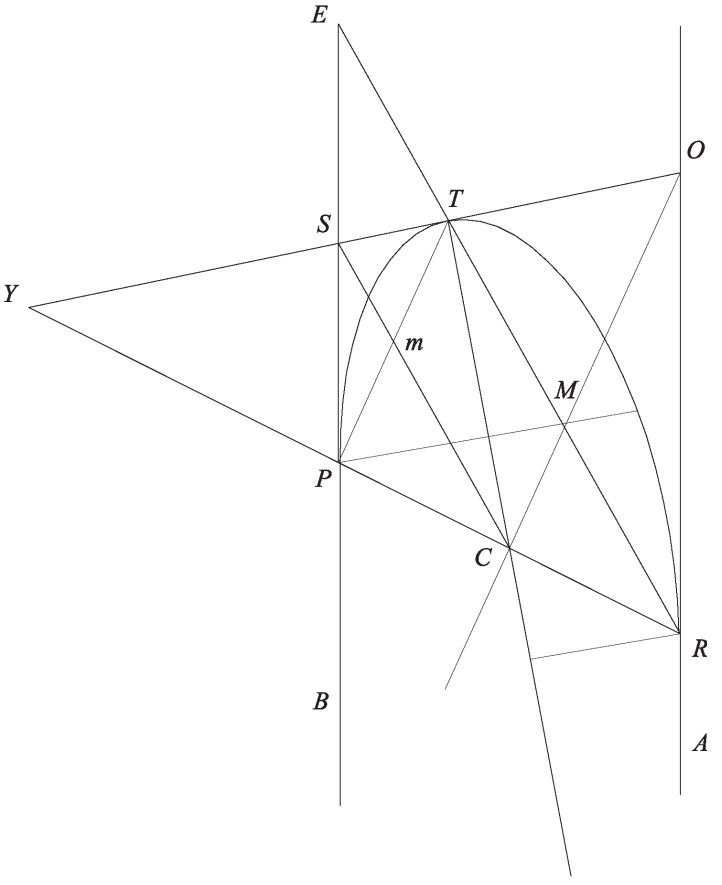


Fig.148 Sezione conica che rappresenta la centina dell'arco, dati i piedritti paralleli e le linee di Rampa e di Sommità non parallele.

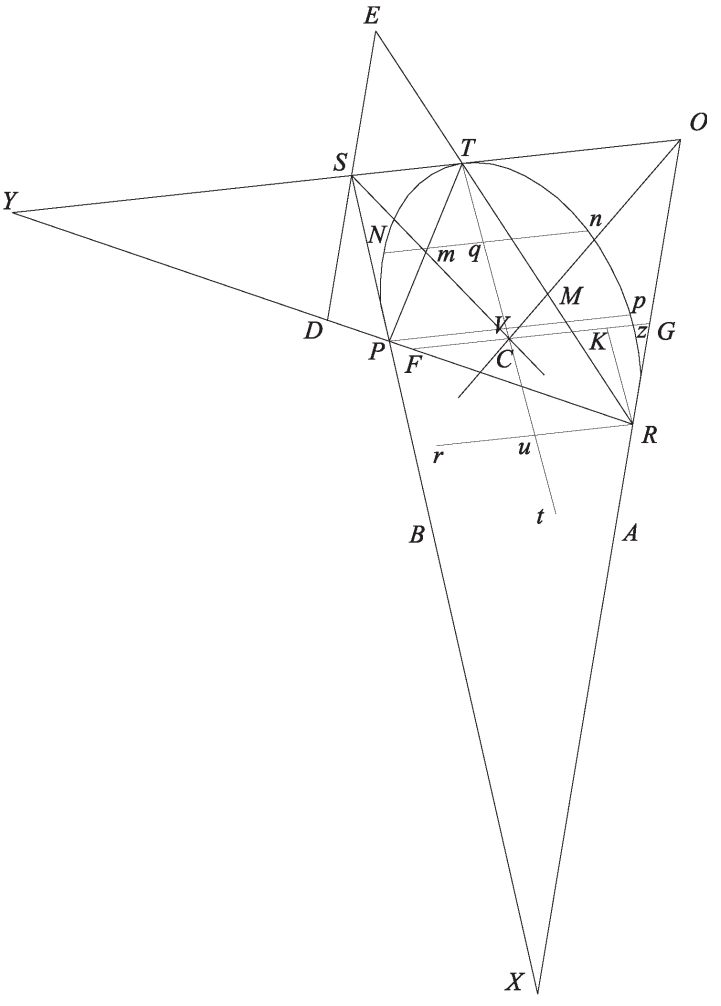


Fig.150 Sezione conica che rappresenta la centina dell'arco, dati i piedritti non paralleli e le linee di Rampa e di Sommità non parallele.

In tutti gli altri casi in cui le linee di Rampa e di sommità non sono parallele; sia che i piedritti siano paralleli tra loro, sia che non lo siano; si troverà il punto *T*, dove la curva deve toccare la linea di sommità, come di seguito descritto.
Abbiamo prolungato le linee *RP* e *SO* date fino a dove quelle si incontrano in *Y* per il punto *S*, si traccerà una parallela *DE* a *OR* che, se i piedritti non sono paralleli, come nelle ***Figure 150 e 151***, taglierà *RY* in *D*, e sarà un piedritto prolungato, se invece sono paralleli come nella ***Figura 148***; in seguito avendo riportato *DS* in *SE*, in Figura 148, *PS* in *SE*; si traccerà *ER* che taglia *SO* nel punto *T*, dove si farà il punto d'attacco che si cerca.

Avendo determinato questo punto:
1°.(***Fig. 150-A***) Sarà facile descrivere la sezione conica che deve toccare le tre linee *AO*, *OS*, *SB* nei punti *RTP* attraverso il problema XIV.
2°. (***Fig. 150-B***) La si potrà anche descrivere attraverso il problema XIII. Perché abbiamo cinque punti dati; se essa è un'Ellisse o un'Iperbole, il cui centro sia l'estensione del piano dove la si vuole descrivere; poiché tracciando le parallele a *SO* per i punti dati alla circonferenza *P* e *R* che tagliano il diametro *Tt* in *V* e *u*: se si pone *Vp=PV*, *ur=uR*, *qC=Cu*, e si traccia per *q* una parallela a *SO*, sulla quale si prende *qn*, *qN=uR*, *ur* e *Ct=CT*, si avranno già otto punti dell'ellisse.

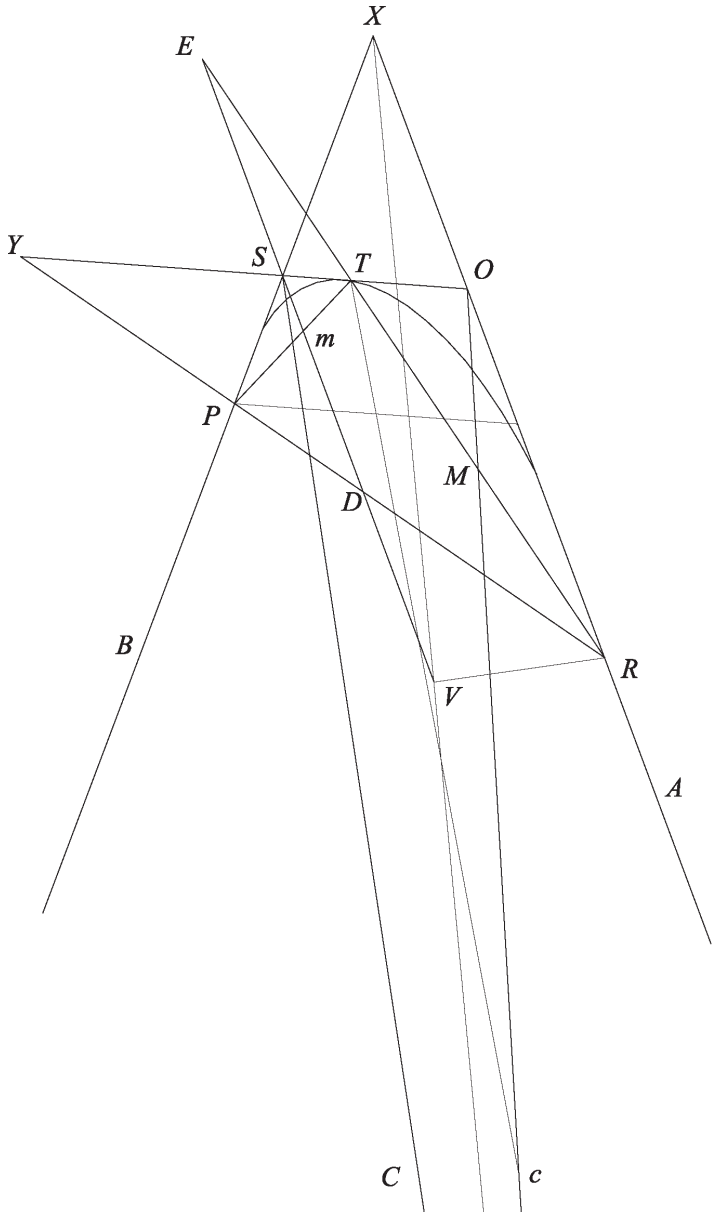


Fig.151 Sezione conica che rappresenta la centina dell'arco, dati i piedritti non paralleli e le linee di Rampa e di Sommità non parallele.

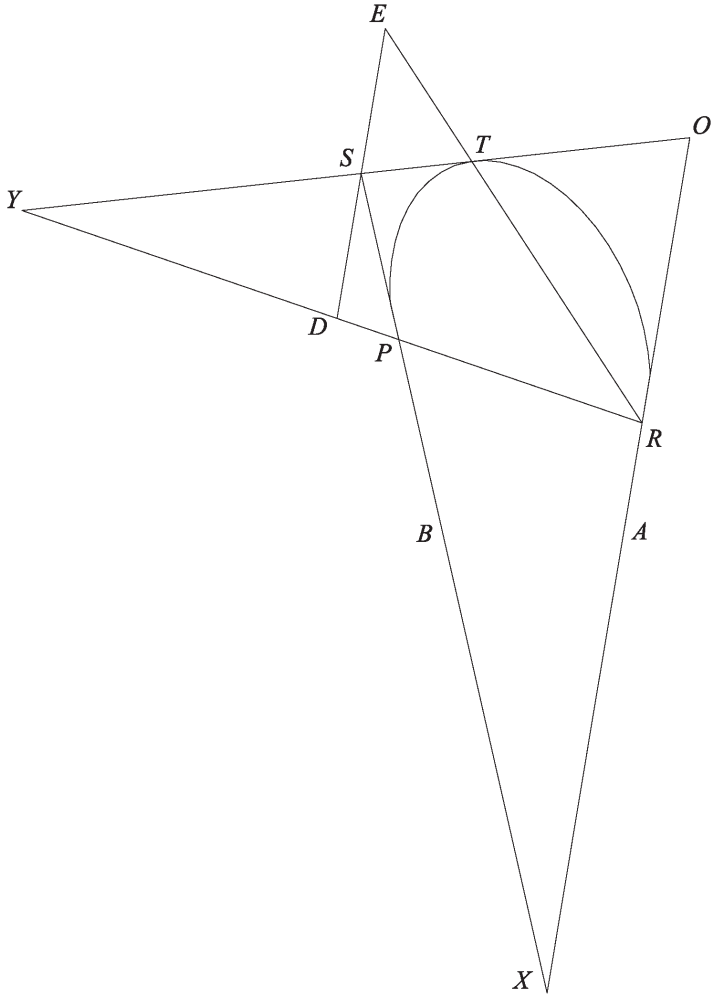


Fig.150-A.

3°. (***Fig. 150-C***) Supponendo che il centro si trova al di fuori della superficie, sulla quale la si vuole descrivere; si potranno trovare tanti punti quanti se ne vorrà attraverso il problema XV, perché si hanno due tangenti, e la posizione di due diametri *Sm* e *OM*, che passano per i punti *S, m, O, M*, supponendo *PT* e *TR* divisi in due parti uguali in *m* e *M*.

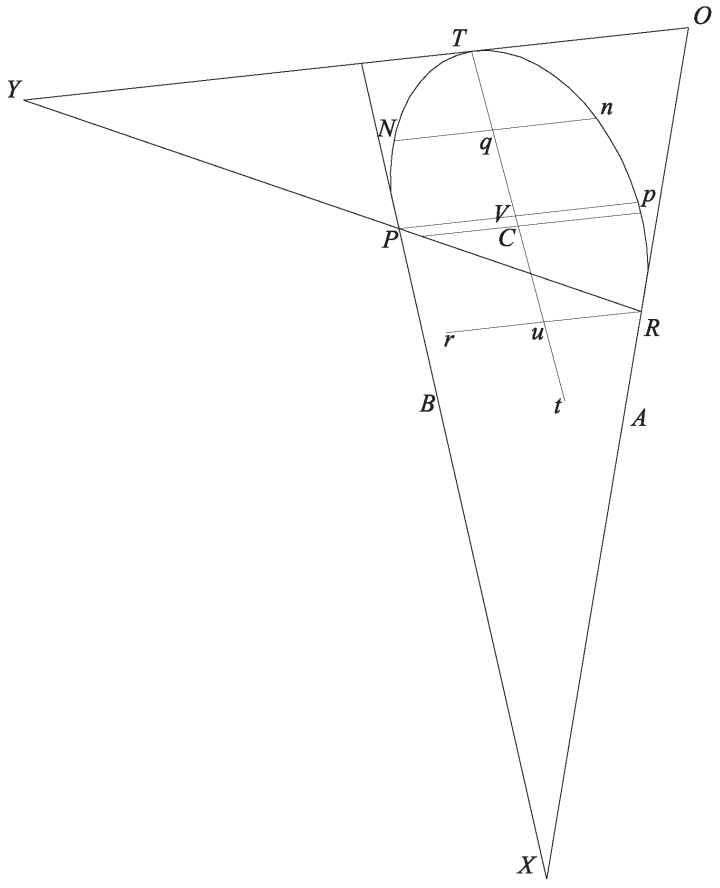


Fig.150-B.

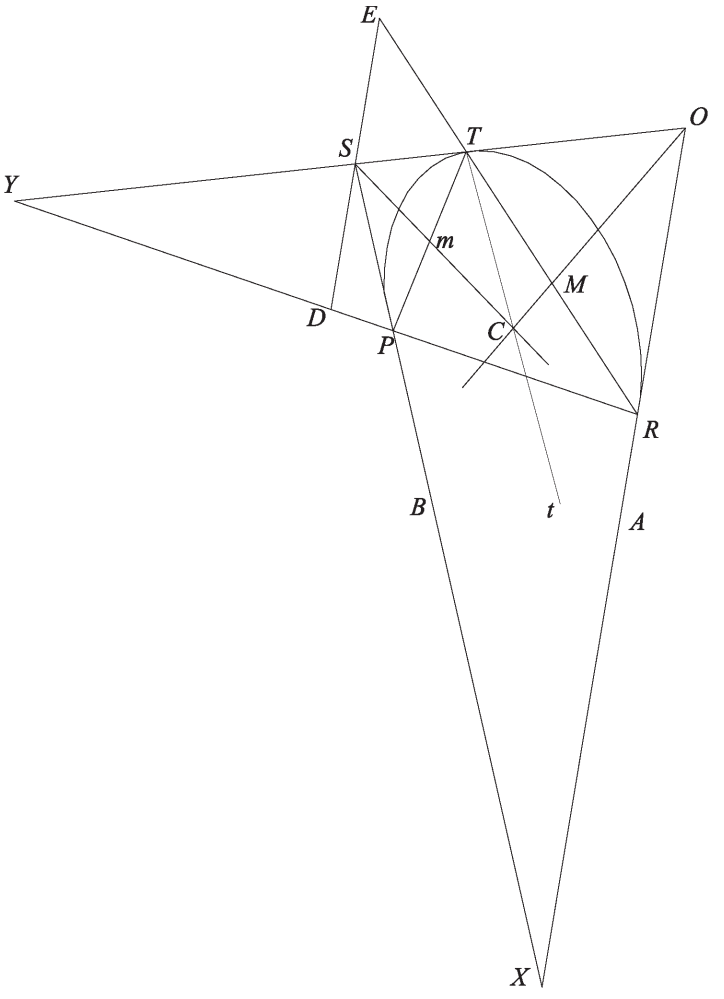


Fig.150-C.

4°. (***Fig. 150-D***)Si può in questo modo trovare i diametri coniugati; dal momento che *Tt* è dato, facendo *Ct=CT*, deve passare per il punto *C* trovato, come nel problema XV e parallelamente a *SO*, non occorre altro
che trovare la lunghezza da una parte e dall'altra del punto *C*; ciò lo si può fare anche attraverso il problema IV poiché si ottengono due ordinate al diametro *tT*, come *Ru* e *ru*[1], o con un altro metodo di seguito riportato.
Avendo tracciato dal centro *C* una linea *FG* parallela a *SO*; si traccerà anche *RK* parallela a *Tt*; poi si cercherà la media proporzionale tra *CK* e *CG*, la quale determinerà *Cz* per la metà del diametro congiunto a *Tt* (rif. art. 46) che dice che le linee tracciate dal centro alla tangente, e interrotte da una ordinata, sono divise in modo proporzionale *CK*:*Cz*= *Cz*:*CG*.

[1] Nel testo originale era scritto *Pu.*

Dimostrazione

Abbiamo detto prima sulle sezioni coniche Art. 48, che le tangenti ad una sezione conica che si incontrano, e che sono terminate da altre linee tracciate dai due punti d'attacco, si tracciano per ragioni armoniche; ciò che abbiamo detto essere stato dimostrato nel corso di queste sezioni: ora che la tangente *OY* è delimitata dalla linea *RP* prolungata, che passa per i due punti d'attacco *R* e *P*, e per le tangenti *RO* e *PS*, che passano esattamente per questi punti *R* e *P*; perciò da tre punti della divisione armonica si ricavano *O*, *S* e *Y*, rimane solo da dimostrare che il quarto punto *T* è stato correttamente determinato.
A causa dei triangoli simili *YOR*, *YSD*, si avrà *YO*:*OS*=*YS*:*SD*=*SE*, e a causa dei triangoli simili *ORT*, *SET*, si avrà *OR*:*SE*=*OT*:*ST*; perciò per ragioni di uguaglianza *YO*:*OS*=*OT*:*ST*, cioè quello che occorreva dimostrare.

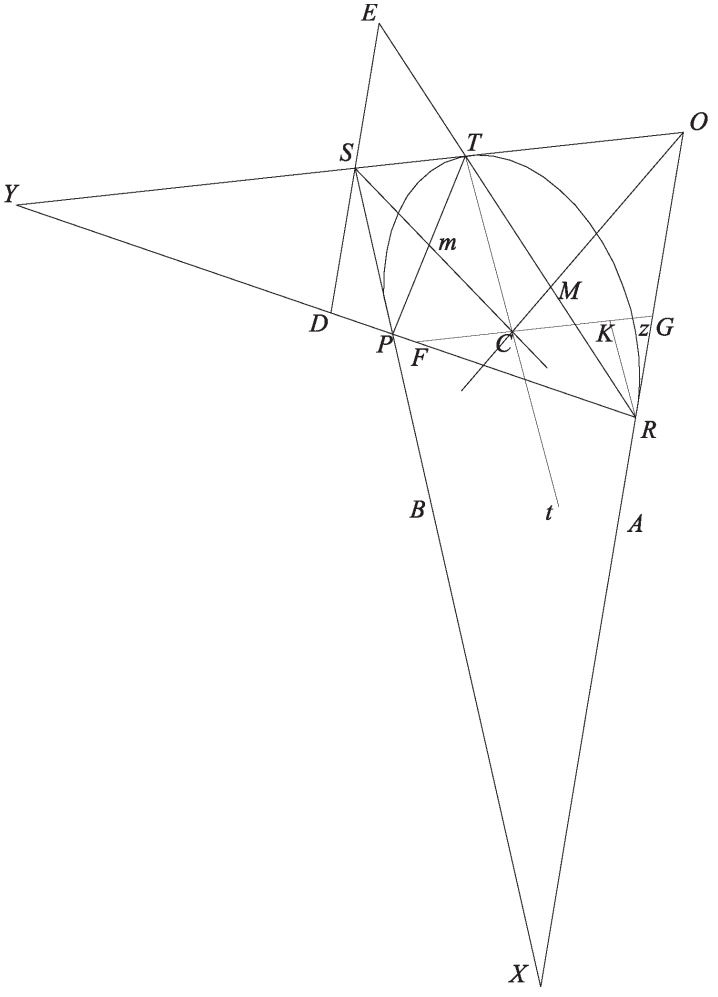
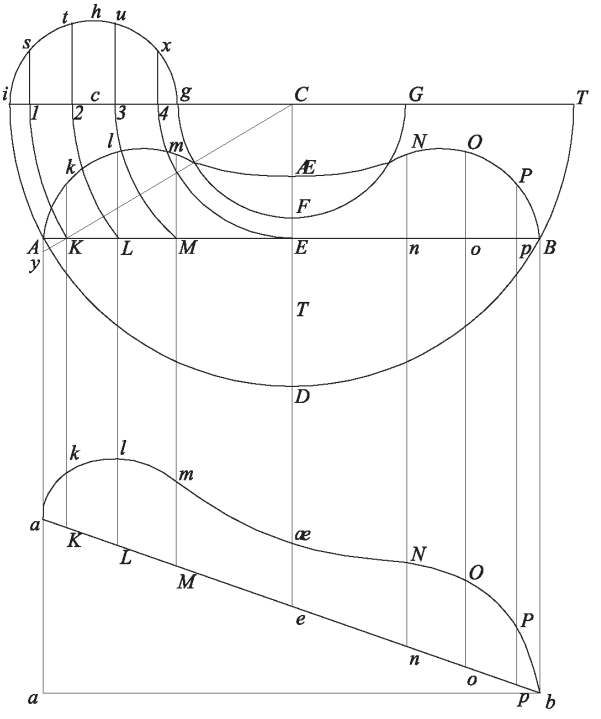


Fig.150-D.

Nota

Queste proposte racchiudono quindici problemi che M. Blondel ha dato per trovare le curve delle sezioni coniche, che possono adattarsi a tutti i tipi di piedritti e tutte le linee di sommità in ogni possibile posizione per formare un Arco Rampante; così riassume molto questa materia.

Fig. 149



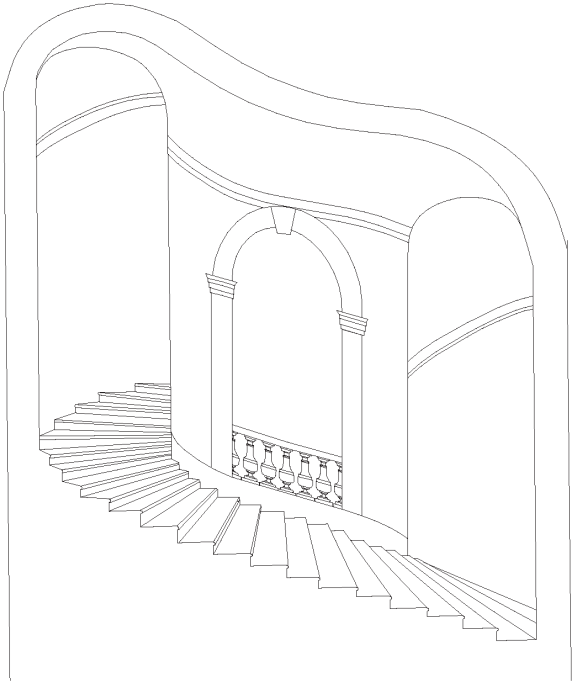
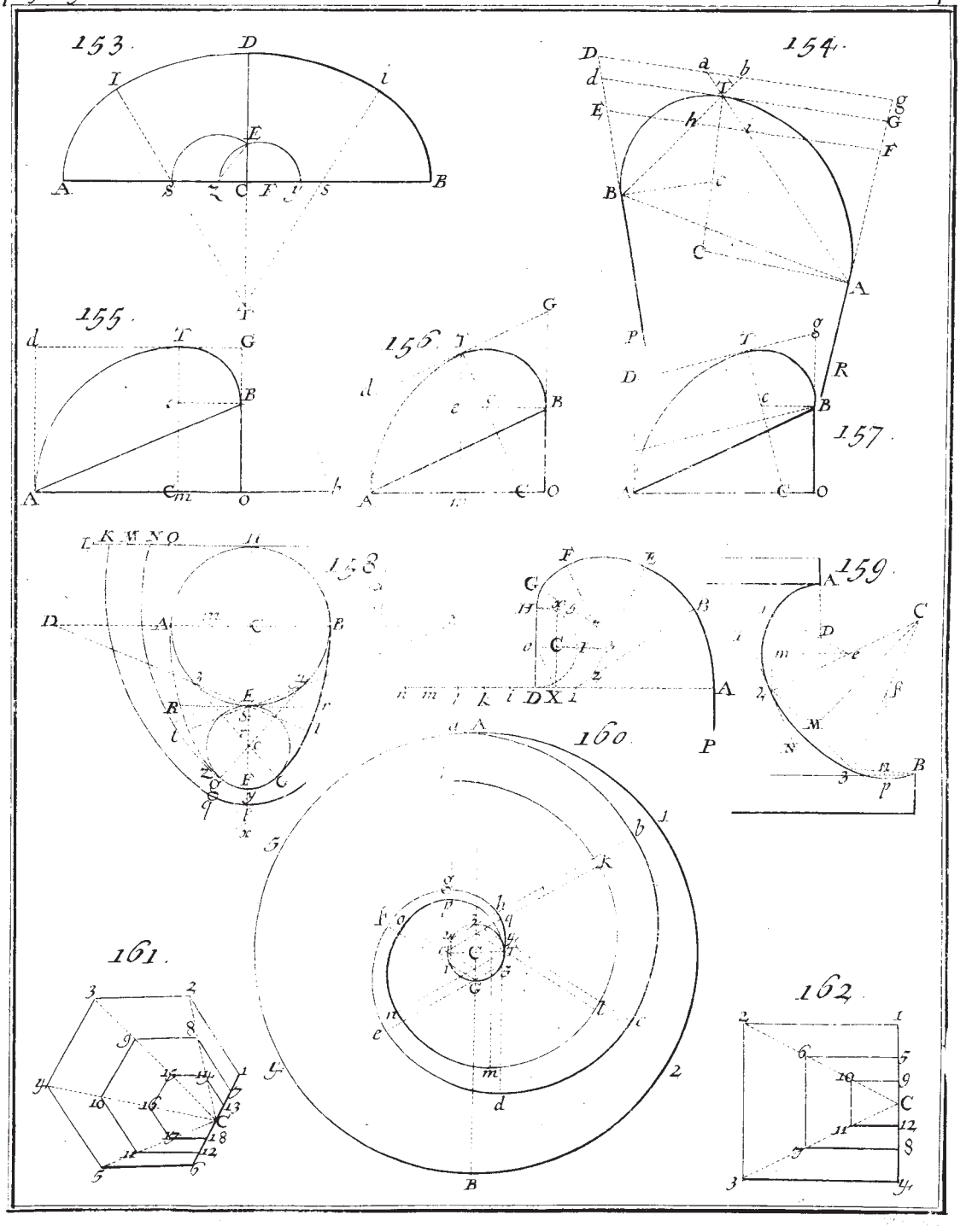


Fig. 152

page. 191. Planche 14.



CAPITOLO IV

L'IMITAZIONE DELLE CURVE REGOLARI ATTRAVERSO LA COMPOSIZIONE DI ARCHI DI CERCHI.

Quando si ama la regolarità, non ci serviamo di queste Curve che sono solamente simili alle originali, esse sono quindi solamente delle copie imperfette, formate dalla composizione di parecchi archi di cerchi di differenti raggi; l'originale è senza dubbio preferibile alla copia; tuttavia l'ignoranza sulle proprietà delle Curve, anche le più comuni, come sono le sezioni coniche & le spirali, unita ad una più grande facilità apparente di tracciare degli archi di cerchi, o ancora quella di unire a tratti delle volte, fanno cercare più modi di imitarli attraverso l'accostamento di porzioni di cerchi; & l'ellisse è una delle più comuni, i Disegnatori & gli Architetti si sono sforzati per molto tempo, ma inutilmente, di imitarlo perfettamente senza imperfezioni con 3, 4, o 5 porzioni di cerchi, gli assi erano dati: per convincersene, non c'è che da guardare due delle tavole del Libro di Bosse, in cui trattando il modo di disegnare l'architettura, è stato riunito ciò che era stato fatto di meglio fino ad allora: questa scoperta fu riservata ad un Geometra, come M. PIT0T dell'accademia Reali delle Scienze che ha trovato che con la posizione di tre centri, & la lunghezza di due Raggi si può imitarlo quasi alla perfezione, come lo diremo qui di seguito.

Lo stesso sembra anche per le tavole del Libro del P. DERAN, particolarmente per quella del Capitolo XIX, in cui questo Autore che si era esercitato a tanti "Traits", non aveva capito l'imitazione dell'ellisse; in quanto la differenza della giusta posizione dei centri dei suoi archi Rampanti è troppo considerevole, & le imperfezioni troppo sensibili, perché si possa incolpare l'Incisore. Tuttavia questi "Traits" sono guardati in Architettura come cose di un certo rilievo: una persona che si dedica a questa Arte mi fece notare una delle particolarità del nuovo Ponte di Compiegne, un arco ribassato che aveva cinque centri; gli risposi sorridendo che sarebbe stato più bello & migliore, se al posto di cinque centri, avesse avuto due Fuochi.

REGOLA GENERALE

Tutta l'arte di imitare le Curve tramite differenti archi di cerchi, consiste nel porre i due centri degli archi che si congiungono su una stessa linea diritta che passa nel punto del loro incontro, in modo che la perpendicolare che verrà tracciata a questo punto sia tangente comune, all'uno & all'altro arco nello stesso punto; la ragione è: I. che l'angolo dell'arco con la tangente è infinitamente piccolo da una parte & dall'altra del punto di tangenza, dunque il Raggio è quasi perpendicolare a questo arco, che sulla tangente è, ad una distanza infinitamente piccola. 2. che l'angolo composto da queste due rette sarà infinitamente grande, di conseguenza i suoi lati saranno diretti in una linea così poco differente della linea diritta, che l'oeil non può vedere la piega, ad esempio un Poligono di un'infinità di lati infinitamente piccoli inseriti nel cerchio.

Tuttavia l'oeil Geometrico che è un Giudice severo, percepisce bene il cambiamento improvviso della convessità & della concavità, in particolare se i Raggi dei due archi che si uniscono, diventano considerevolmente differenti in lunghezza, siccome è spesso necessario che lo siano per formare una semi-Ellisse di tre archi; allora anche le persone meno esperte percepiscono bene di questa irregolarità, senza saperne la ragione; ecco perché non consiglio a nessuno di fare ricorso a questo artificio dell'ignoranza; sebbene io qui dia le migliori regole per nasconderne i difetti, lo faccio solamente per accontentare quelli che amano risparmiarsi della pena a scapito di una più grande perfezione di lavoro, o per quando la cosa non è abbastanza importante da meritare una cura maggiore, o per facilitarne l'esecuzione agli Operai che non sono capaci di un'operazione più perfetta.

PROBLEMA XXI

Siano dati due Assi , imitare una Ellisse per un accostamento di quattro Archi di Cerchi.

O indifferentemente, imitare una semi-Ellisse con tre archi di 60 gradi ciascuno.

Sia AB l'asse maggiore (Fig.153) & CD la metà dell'asse minore: si porterà in primo luogo la lunghezza CD di questa metà conosciuta sull'asse maggiore in By, per avere la differenza dei due semi-assi Cy, questa si dividerà in due in F, poi si porterà CF in Cz: preso zy, come diametro, si farà il semi cerchio ZEy che taglierà CD in E, si porterà la lunghezza ZE in ZS, & la distanza CS da un lato e dall'altro, CS in Cs: i punti s & S saranno i centri degli archi minori dell'estremità dell'ovale, & le linee As & sB i loro Raggi; infine presi i punti s & S, come vertici, & la lunghezza sS, si traccerà il triangolo equilatero STs il cui vertice T sarà il terzo centro ricercato; & le parti di questo triangolo prolungato, determineranno la congiunzione degli archi piccoli e grandi in i & I sui quali si prenderà Ts - sB per Raggio dell'arco maggiore; così i tre archi saranno di sessanta gradi ciascuno, & avranno dei Raggi comuni; questo è quello che si deve fare.

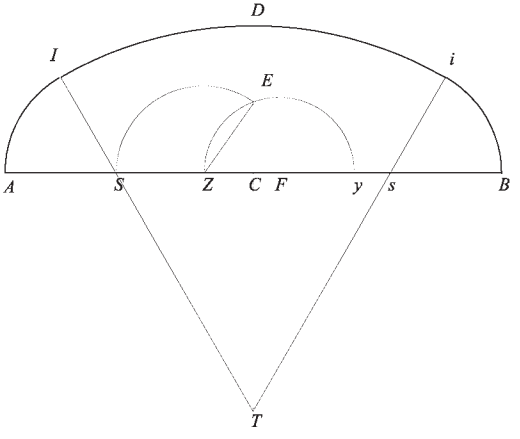


Fig.153. Imitazione di un'ellisse attraverso tre ararchi di cerchio di 60 gradi ciascuno.

DIMOSTRAZIONE.

Sia *AC=a*, *CD=b* e l'incognita *CS=x*, per la costruzione *CY=a-b* & *CZ=a/2-b*, così come *CE*=S(*a-bxa/2-b)* & *ZE*=S(*a/2-b*²-a/4-*b*²), ma

CS(*x*)=*CZa/2-b-ZS* o *ZE*S(*a/2-b²-a/4-b²*) quindi *a/2-b-*S(*a/2-b²-a/4-b²*) quello che dovevamo dimostrare

P R O B L E M A XXII.

Imitare con due archi di Cerchi le porzioni di ellissi fatte su due Diametri che non sono degli Assi congiunti di cui uno è delimitato da due Tangenti ai suoi estremi, & di cui la Congiunzione è determinata da un terza Tangente assegnata.

Non si può imitare con una composizione di due archi di cerchio riuniti, ogni tipo di ellisse fatta su dei diametri congiunti che non sono degli assi, & che devono toccare una linea assegnata & posta ad una certa distanza; ma si può fare in modo che l'ovale tocchi la parallela della terza tangente data.
Per conoscere se il problema puo'essere risolto da archi di cerchio

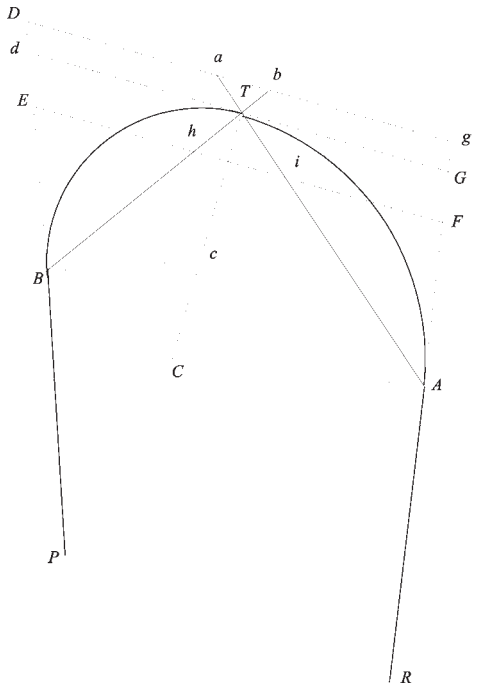


Fig.154:Imitazione di un'ellisse costruita da archi di circonfrenza i cui raggi non appartengono alla stessa retta

Siano [***Fig.154***] *PD* & *RG* due tangenti nei punti *B* & *A*, & *Dg* una terza linea che deve toccare l'ovale che si deve fare; si porterà la lunghezza *DB* sulla linea *Dg* in *Db*, & la lunghezza *gA* in *ga*, se questi due punti *a* & *b* non cadono sullo stesso punto, il Problema non può essere risolto; perché è dimostrato nella Geometria Elementare che se da un punto *d* o *G* preso fuori dal cerchio, gli si conduce due tangenti *dB*, *dT*, o *GA*, *GT*, queste sono uguali tra esse; supponendo dunque la linea Dg assegnata, è necessario per risolvere questo problema fare *Db=DB*, & *ga=gA*, tracciare *Aa* & *Bb*, il punto *T* della loro intersezione sarà quello di tangenza della tangente *dG* da cui, si traccerà la perpendicolare indefinita *TC*, & per gli altri due punti di tangenza A & B dati, facendo B c perpendicolare a *dP*, & *AC* perpendicolare a *RG*; i punti *C* & *c*, dove queste linee intersecheranno *TC*, saranno i centri degli archi di cerchi che devono rappresentare l'ellisse che ci proponiamo di fare, o il caso che si possa avvicinare di più. Se la linea *Dg* assegnata è al disotto del punto *T*, come *EF*, bisogna fare *Eh=EB*, & *Fi=FA*, tracciare *Bh* & *Ai* che prolungandoli, si incontrino al punto *T* che è quello di tangenza che si cerca per cui avendo tracciato una parallela *dG*, cade su *Dg* o su *EF*; si verifichi che la somma delle linee *B d* & *AG* sarà uguale a quella di *dT* & *GT*.

DIMOSTRAZIONE
A causa delle parallele *Dg* & *dG* o *EF*, *DB:Db=dB:dT* & *gA:ga=GA:GT*,ma *gA=ga*, (per costruzione,) & *DB=Db*, dunque *dT=dB*, & *GA=GT*; dunque il punto *T* è quello di tangenza della linea *DG*, questo è quello che si doveva trovare.

COROLLARIO

Da dove si trova la maniera di fare ogni tipo di arco Rampante, con porzioni di Cerchio in casi in cui i Piedritti siano a strapiombo, fra loro paralleli o "Talud", & nei vari casi in si trovi la linea di sommità *dG*: ecco degli esempi, dei più comuni in cui i piedritti sono paralleli fra loro.
Primo caso dove la linea di sommità *dG* è orizzontale, & i piedritti a piombo.Vedi ***Fig.155***. la linea di Pendenza assegnata *AB*, è all'altezza BO sull'orizzonte, ribaltandola su *Ob* allineata alla linea orizzontale *AO*. si dividerà *Ab* in due parti uguali in m, da dove si traccerà la perpendicolare *mT*: poi dal centro *m*, & per Raggio *Am*, si descriverà l'arco di cerchio *AT* fino all'incontro di *mT*; avendo preso poi su *mT*, la lunghezza *mc=OB*, il punto c sarà il centro del secondo arco *BT* che incontrerà il primo nel punto di tangenza *T*, questo è ciò che si deve fare per rendere la congiunzione impercettibile.

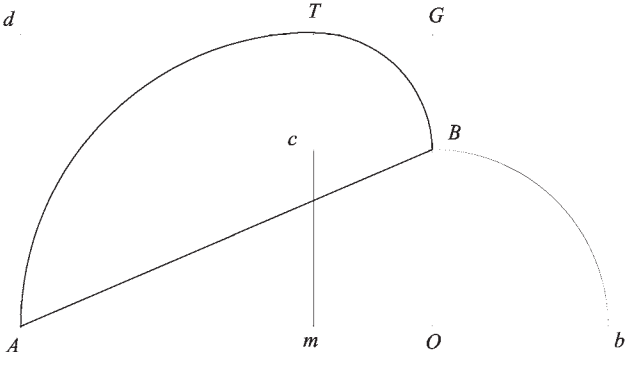


Fig.155: Costruzione di un arco rampante in cui i piedritti sono paralleli e la linea di sommità orizzontale

Secondo caso dove la linea di Pendenza *AB* è parallela a quella di sommità *dG*,

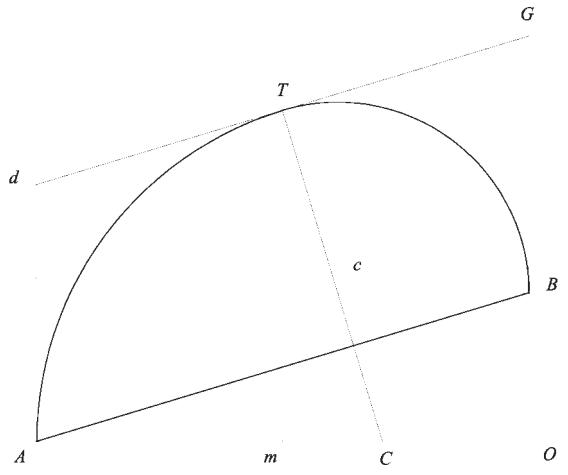


Fig.156:Costruzione di un arco rampante in cui i piedritti sono paralleli e la linea di pendenza è parallela a quella di sommità

Avendo diviso l'orizzontale *AO* in due parti uguali, [***Fig. 156***], in *m* & alzato in questo punto la verticale *mT* che intersecherà la linea di sommità *dG* nel punto *T*, dobbiamo fare *Ad=dT*, come abbiamo detto all'inizio di questo caso; poi dal punto *T*, tracciare la perpendicolare *TC* a *dG*, e quindi alla parallela *AB*; il punto *C* dove questa perpendicolare taglierà l'orizzontale *AO*, sarà il centro del arco di cerchio maggiore *AT*: poi si conduca da *B* la parallela ad *AO*, che intersecherà *T C* nel punto *c*, il quale sarà il centro del secondo arco *TB* che si unirà all'arco maggiore nel punto di tangenza in *T*, come è necessario.

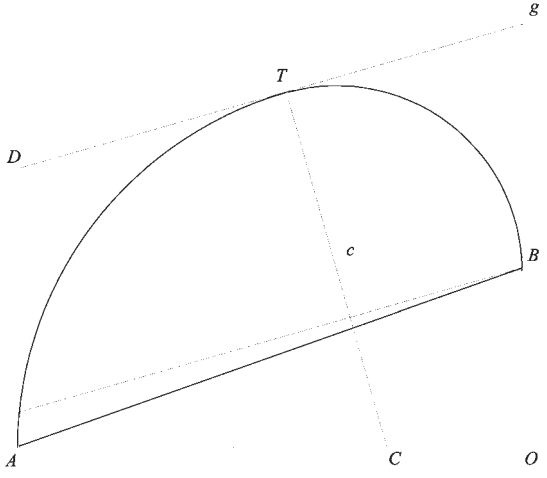


Fig.157:Costruzione di un arco rampante in cui i piedritti sono paralleli e la linea di pendenza non è parallela a quella di sommità

Terzo caso dove la linea di sommità *Dg* [***Fig.157***.] non è parallela alla linea di Pendenza *A B*

Avendo trovato il punto *T*, come si è detto al principio di questo Problema; si traccerà *CT* perpendicolare a *Dg*, & *Bc* parallelo ad *AO*, si avrà, come al caso precedente, i punti *C* & *c* come centri dei due archi che devono formare l'arco Rampante *ATB*.

DIMOSTRAZIONE.

Si vede che in fondo tutti questi casi non differiscono in niente per la costruzione: Perché, I.°[***Fig.155***], poiché *AO* & *dG* sono paralleli tra loro, come pure *CT* & *Ad*; è evidente che *Ad=dT*, & poiché *Cb=CA=CT*, & *Ob=OB*, *BG* sarà uguale a *CO=TG*, dunque le due tangenti di ciascuno di questi archi *AT*, *TB* sono uguali, di conseguenza si riuniscono al cerchio, & i centri *C* & *c* sono sulla una stessa linea e la stessa tangente *dG* è comune ad entrambi i cerchi.

I due seguenti casi sono dimostrati per il Principio generale che stabilisce la posizione dei centri, & le stesse condizioni delle tangenti di cui abbiamo appena parlato.

COROLLARIO.

Da ciò si trae il modo di tracciare l'ovale appuntito se è permesso di usare qui questa parola, per esprimere la disuguaglianza del suo contorno alle estremità del suo asse maggiore, che a causa della sua somiglianza con il contorno di un uovo chiamato in latino Ovum,è chiamato in Architettura un Ove: come un ornamento di cui si fa grande uso nelle Cornici, & di cui si trovano falsi "Traits"nei Libri; vado a correggerli. Alberto DURET nella sua Geometria ne dà due tesi, una è tratta dal Cono il cui il contorno fa un'imperfezione ad ogni estremità dell'asse maggiore, come è facile dimostrare, se la cosa ne vale la pena; l'altro "Trait" che è stato seguito da alcuni Autori, è una composizione di archi di cerchi, dove è stato fatto ancora un errore grossolano, unendo il secondo & terzo arco al di sopra del punto *I* in *S* al fuori dei Raggi comuni *D I*: *3I*. ***Fig.158***

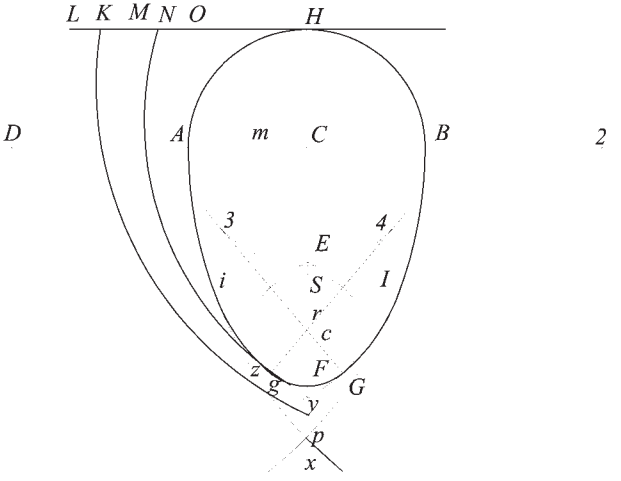


Fig.158: Costruzione attraverso archi di cerchio dell'ovale appuntito, chiamatoin architettura Ove; è una figura a cui vieneratto spesso ricorso nelle cornici, come ornamento

Sia dato il diametro minore *AB* per la larghezza maggiore dell'Ove; lo si dividerà in quattro parti, & si prolunghi questo diametro da una parte & dall'altra, di tre quarti della sua lunghezza in modo che *DA* & *B2* siano

uguali a *mB*: poi preso il punto *C*, posto a metà di *A B*, per centro, si descriverà un cerchio *AHBE* che si dividerà i quarti di circonferenza *AE*, *BE* in due parti uguali nei punti *3.* & *4.* per i quali si condurrà le linee *DI*, *2i*, che saranno uguali a *DB* o *2A*, descrivendo due archi *BI*, *Ai* dai punti *D* & *2*. tali archi prolungati, si intersecheranno nel punto *x* , & per il centro *C* si traccerà la linea *Hx*: poi presi i punti *3* & *4* come centri, & la distanza *3I* per Raggio, si descriverà due archi che si intersecheranno in *y* sulla linea *Hx*: si divida l'intervallo *Ey* in due parti uguali in *c*, da dove si tirerà le linee *3G*, *4g*, che rincontreranno questi archi in *G* & *g* ; infine preso il punto *C* per centro, & *cG* o *cg* per Raggio si descriverà l'arco *Gg* che finirà l'ovale in Ove.
È facile vedere che si può allungare o accorciare questo Ove alzando o abbassando i centri *3.* & *4.* & l'ultimo *c*.
Gli Architetti pongono abitualmente questo Ove in una Nicchia di cui Bosse regola così il contorno, fa *HL* perpendicolare & uguale al diametro *HE*; la divide in due parti uguali in *O*, & la metà *OL* in quattro parti uguali: divide poi anche l'asse maggiore *HF* in tre parti uguali, & questo terzo in cinque, porta una di queste cinque parti di *F* in *p*, & del segmento *Sp* un terzo di *FH*, descrive un arco *Fz*, di cui non specifica di quanti gradi; questo sarà tuttavia necessario per avere gli intervalli dei Raggi *qK*, *z N* che sono le corde & i raggi di questi archi.
Tutta questa costruzione è solamente una fantasia & un gusto di disegno arbitrario imitato apparentemente dai resti delle Cornici antiche, dove si vede queste Nicchie formate da differenti elementi, in parte rialzati & divise tra loro con ornamenti di foglie, & qualche volta di dardi; cosa che non riguarda il nostro argomento.
Abbiamo dato il modo di descrivere dei semi-ovali, per il mezzo di tre archi di cerchi di 60 gradi ciascuno, supponendo gli assi assegnati; ci resta da mostrare come si può farli di tanti archi di cerchi quanti si desidera, o regolarmente di forma ovale, o irregolarmente in porzione di Ove; ciò che è necessario per tracciare differenti tipi di gusci, o sagomature cave, & i contorni di alcuni ornamenti che si chiamano Pieducci.
Siano per esempio, (***Fig.159***.) dati più punti *A, 1, 2, 3, B*, posti in modo adatto al contorno cavo che si propone; si prenderà il segmento *A1* come lato di un triangolo equilatero *A1D*, & dal punto *D* preso per centro, si descriverà l'arco *A1*: avendo tracciato poi la corda *1, 2*, & avendola divisa in due in *m*, si traccerà da lì una perpendicolare me che intersecherà *1, 2*, prolungata in *e*, dove sarà il centro del secondo arco di cerchio *1, 2*, si tirerà la stessa corda *2, 3*, & sul suo mezzo *M*, si alzerà la perpendicolare *M C* che intersecherà *2e* prolungata al punto *C*, che sarà il centro del terzo arco *2, 3*, così via, si avrà l'ultimo centro *f*.
La ragione di questa pratica è chiara per la sola costruzione, dove si riconosce l'applicazione della Regola generale, in cui ci sono due centri sulla linea diritta, dove viene fatta la congiunzione degli archi che devono toccarsi, questo significa, avere una tangente comune, come *TN* che tocca ugualmente gli archi *21* & *23*, ecco cosa si deve fare per evitare tutte le imperfezioni.

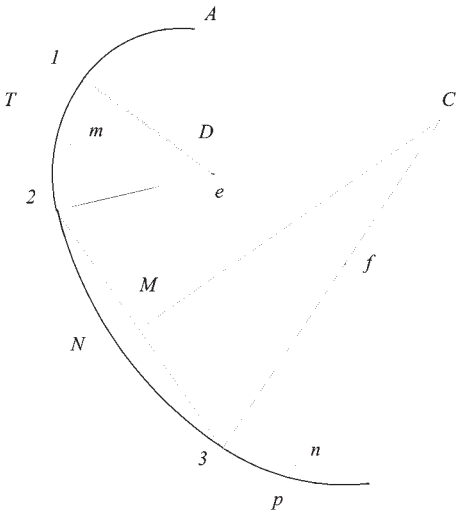


Fig.159: Costruzione di semi-ovali attraverso un numero indefinito di archi di cerchio

COROLLAR IO.

Segue da questo esempio che sebbene abbiamo composto degli archi rampanti di due soli archi di cerchi di un numero di gradi uguali o non; si può ancora meglio formarli da un numero di archi che si desidera; perché se si considera la ***Fig.159***. cambiata di situazione, & si prende i punti *A*& *p* per le Imposte, è evidente che la Curva *A1 2 3 p* può servire per il centro di arco Rampante: ma allora il seguente Problema servirà più d'introduzione all'imitazione della spirale che a quella dell'ellisse.

P R O B L E M E XXIII.

Data la differenza di altezza delle Imposte *A* & *H* & l'intervallo Orizzontale *DA* dei Piedritti di un arco Rampante assegnato, tracciare un sesto composto di un numero archi di Cerchi a piacimento diversi per Raggi, ma uguali in numero di gradi, o se si vuole, in determinate circostanze, di un numero maggiore.

Sia [***Fig.160a***] il sesto *ABH* che ci proponiamo di fare, per esempio di cinque archi di cerchi; sull'altezza data *DH* presa come diametro, si traccerà un semi-cerchio *HID*, che si dividerà in cinque parti uguali, ossia, in cinque archi da cui si tireranno le corde, alle quali si condurrà le parallele tangenti al cerchio, per circoscriverci la metà di un decagono: avendo prolungato poi la linea Ad verso *n*, si porterà successivamente le cinque parti di *D* in *n*.
Si dividerà *nA* in due parti uguali in *X*, da dove si condurrà *Xx* parallelo & uguale a *DH*, su cui preso come diametro, si è tracciato un semi-cerchio, in cui si circoscriverà lo stesso Poligono; ma girando differentemente iniziando a portare una parte in *X i*, & *x5*, sulle parallele *DA* & *H5*, si farà *C3* uguale ad *O2*, distanza del centro *O*, ad un angolo del Poligono & dai punti *3* & *1, 3* & *5* presi per centri & preso per raggio il lato del Poligono, si farà delle intersezioni di archi che daranno i punti *2* &*4*, per tirare per i punti *2, 3, 4, 5* i lati che si prolungheranno indefinitamente verso *B, E, F, G*; infine dai punti *1, 2, 3, 4, 5* presi per centri & con raggi

1A, *2B*, *3E*, *4F*, *5G*; si descriverà degli archi *AB*, *BE*, *EP*, *FG*, *GH* che formeranno insieme senza nessuna imperfezione la curva che si chiede: se il numero di lati del Poligono non è completo, che ci sia una metà di più, ci sarà anche un arco di cerchio in meno che gli altri; ciò avverrà sempre, quando i lati saranno insieme la metà di un numero dispari, come il triangolo Equilatero, il Pentagono, l'Eptagono, ecc.

Non è necessario spiegare il perché di questo concorso di archi di cerchi

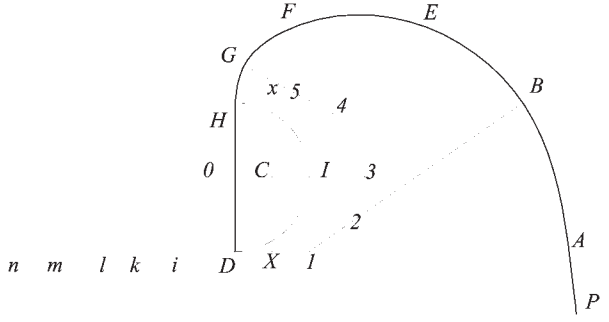


Fig 160a: Costruzione di semi-ovali attraverso di un numero indefinito di archi di circonferenza di uguale numero di gradi

che si incontrano in un punto comune di tangenza; basta dire il perché, si è portato i lati del Poligono circoscritto sopra la linea *Ad* prolungata; è per avere l'asse *Xx*, & il centro *C* del Poligono generatore che devono essere nel mezzo di una linea composta dall'assegnata *DA* & dell'aggiunta *D n*; perché ogni Raggio degli archi che seguono diminuisce della lunghezza di un lato del Poligono *1 2*, *2 3*, *3 4*, ecc. di conseguenza tutti insieme diminuiscono della lunghezza Dn, all'interno di un semi-cerchio che avrà *XA* o *Xn* per Raggio, & sarà parte del cerchio di rivoluzione della spirale di cui questo arco Rarnpante è una metà. Si vede perciò la ragione della costruzione della ***Fig.155***. dove abbiamo portato l'altezza OB in Ob sulla AO prolungata; perché essendoci proposti di fare un centro di due archi di 90 gradi ciascuno che è la metà del cerchio, il Poligono generatore deve essere un quadrato la cui l'altezza OB è un lato che deve essere diminuito sulla lunghezza del Raggio del secondo arco: ciò si vedrà più chiaramente al seguente Problema che è solamente una specie di Corollario di questo.

Ho detto che bisogna che l'arco Rampante faccia una semi-rivoluzione, perché ho supposto i piedritti a piombo paralleli fra loro, ma se essi fossero in "Talud",necessita di una rivoluzione maggiore, & a strapiombo minore, per la ragione che abbiamo ripetuto spesso, che i piedritti devono essere tangenti agli archi nelle loro origini.

P R O B L EM E XXIV.

Imitare la spirale con porzioni di arco di cerchio.

Seguendo il principio generale che tutti gli archi non uguali devono riunirsi in un punto comune di tangenza, affinché non si veda la congiunzione; non si procede così per imitare la spirale che ha sempre di seguito due centri su uno stesso Raggio, sebbene questo raggio diminuisce sempre in una certa proporzione che possa molto variare, & che gli angoli sono fra loro sufficientemente uguali o variabili, sempre in una certa proporzione, come l'abbiamo detto delle spirali; questo si può concepire bene dopo ciò che abbiamo detto di questa curva, & eseguirlo secondo la nostra intenzione di fare una maggiore o minore rivoluzione, imitando la spirale regolare: ma visto che non siamo in presenza di una imitazione di così grande precisione , non può convenire una composizione di archi di cerchi; ci basta dare il modo generale di fare ciò che si chiama in Architettura Voluta.

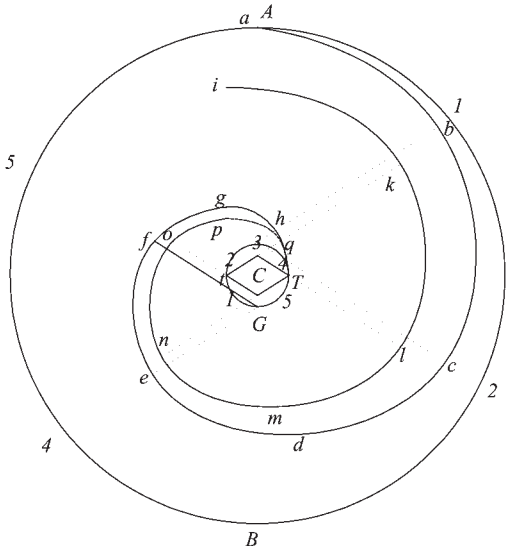


Fig.160b: *Costruzione di una voluta attraverso un un poligono regolare in questo caso un esagono*

Avendo preso un punto C per centro della spirale o voluta; (Fig .160b) si prenderà questo punto nel centro del lato di un Poligono qualsiasi: diamo qui per esempio l'Esagono Fig.160b & 161. & lo si traccerà della grandezza che si vorrà, in base al maggiore Raggio che si vuole dare alla voluta, & dello spazio che si vuole occupare con i Raggi opposti di cui si può calcolare la diminuzione attraverso il numero dei cambiamenti dei centri di ogni arco, & la lunghezza dei lati del Poligono uniti insieme. Gli Architetti, per finire le rivoluzioni verso il centro, in un cerchio che chiamano l'occhio della voluta, si regolano con la grandezza di questo occhio a cui assegnano un certo numero di parti del Modulo, ossia, di un divisione fatto sul diametro delle colonne, seguendo sistemi arbitrari.

Per noi che proponiamo solamente un modo generale da cui si può dedurre facilmente i particolari; diremo soltanto che avendo fatto un Poligono qualsiasi, Fig. 161. & avendo preso il mezzo di uno di suoi lati per centro della spirale; si traccerà da questo punto C a tutti gli angoli del Poligono delle Diagonali C4, C5, C 3, C 2, & essendo fissato poi un numero di rivoluzioni, si inscriverà altrettanti Poligoni simili al primo che avranno sempre uno dei loro lati comuni col primo 6C1, & i lati di questi Poligoni saranno ancora come si vorrà, in base a che nel disegno proposto la voluta si restringa più o meno rapidamente.

Avendo stabilito ciò, si prolungherà tutti i lati da una parte solamente

di questi Poligoni, & a piacimento, più o meno vicini in base alla lunghezza dei Raggi, seguendo il primo *AC* che è stato dato come si vede nella ***Fig.160b***. *12a*, *23b*, *34c*, *45d*, *5Ge*,*G1f*, & 1*2a*, dove finisce la rivoluzione.

Poi del centro *2*, & per Raggio *2a*, si farà l'arco *ab* finito in *b* per il Raggio *2hb1*; del centro *3* & dell'intervallo *3b* per Raggio, si descriverà l'arco bc; del centro *4*, & per Raggio *4c*, si descriverà l'arco *cd*, & così via cambiando centro ad ogni arco, ponendo la punta del compasso su uno degli angoli del Poligono, & fermando l'altro al Raggio fatto sul lato di questo Poligono prolungato.

Dopo la prima rivoluzione, si continuerà lo stesso per il secondo Poligono inscritto immediatamente nel primo, & alla fine di questa seconda rivoluzione, si continuerà sugli angoli del terzo Poligono, seguendo l'ordine delle cifre della ***Fig.161***.

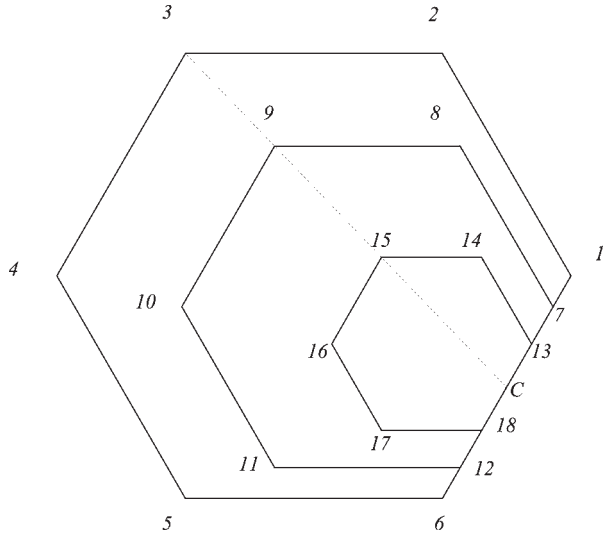


Fig 161:Costruzione necessaria da cui si deve partire per la costruzione di una voluta utilizzando, come figura di base l'esagono

Occorre notare che la seconda rivoluzione, cominciando da due centri 6, 7 che sono su un Raggio comune, non deve fare imperfezione con la prima; ma fa una forte di irregolarità, in quanto la distanza del centro 6 al centro 7 non è uguale a quella del centro 5 al centro 6, come è stata dal punto 1, fino al punto 5, & come lo deve poi essere agli intervalli 8, 9, 10, 11, & 12; la stessa cosa arriva alla terza rivoluzione; tuttavia gli Architetti che danno a buon mercato la Geometria, dicono come DAVILER che la voluta di Goldman che è fatta su questo principio, è Geometrica, sebbene lei non sia che un caso del nostro metodo, la sola differenza è che il suo Poligono centrale è un quadrato, come si vede nella Fig.162. ma infatti la voluta ionica, non si ha bisogno di guardarla da vicino; perché gli Architetti da questa non ne vogliono che una decorazione, & non una grande precisione.

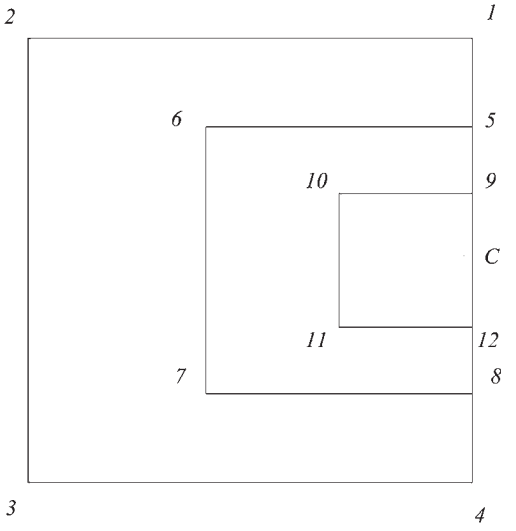


Fig 162: Costruzione necessaria da cui si deve partire per la costruzione di una voluta utilizzando, come figura di base il quadrato (Voluta di Goldman)

COROLLARIO I.

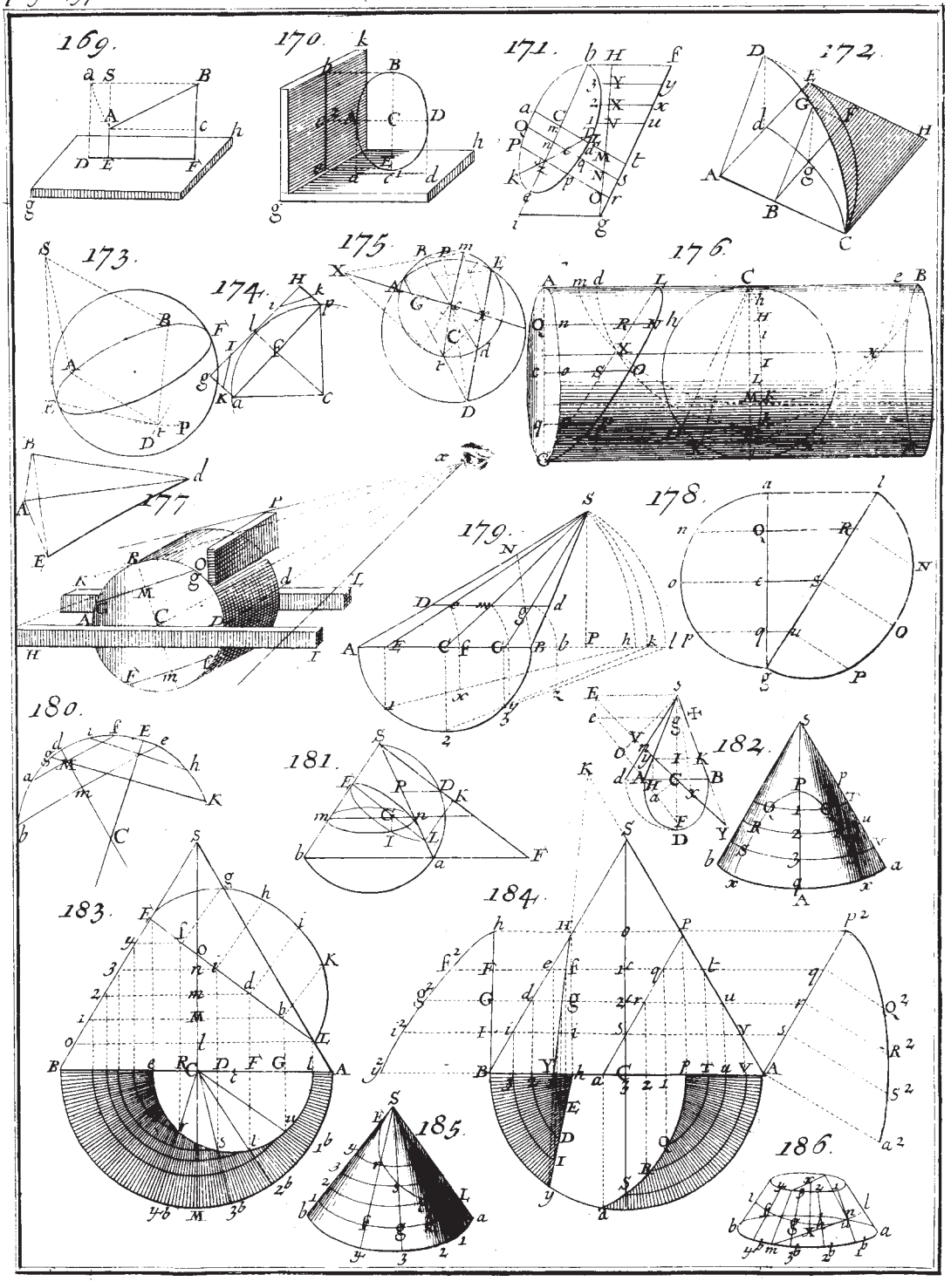
Si deduce che se si vuole ingrandire verso l'esterno la voluta, si può farlo ingrandendo i Raggi, continuando di seguito gli archi, cambiando centri sugli stessi angoli dei Poligoni, o su di altri circoscritti sullo stesso lato 6C1.

COROLLARIO II.

In secondo luogo se si vuole fare un doppio tratto che venga restringendosi col primo; avendo determinato la larghezza ai sul Raggio ca, si cercherà il lato di un poligono simile al primo, per stessa ragione, ci, ca, sono in analogia ca:ci=c1:cx, chiamato x il punto che farà l'angolo del secondo poligono sul raggio sotto 2b; le ridotte dimensioni della Figura non ci hanno permesso di evidenziare queste differenze, per paura di fare confusione: non facciamo commenti come quelli fatti per le linee; perché supponiamo che parliamo a Lettori che cercano di trovare una quadratura proporzionale a tre linee date, come ha insegnato EUCLIDE liv. 6. prop. 12

page 237

Planche 16.



SECONDA PARTE

Dal secondo libro

CAPITOLO V

Sulla descrizione delle sezioni dei corpi che non devono, o non possono essere descritti che sulle superfici concave o convesse

Le sezioni di cui noi abbiamo parlato nella prima parte di questo libro sono state considerate, come dovessero essere descritte su delle superfici piane, anche se sono originariamente delle superfici curve. Si tratta ora di tracciarle su delle superfici che sono loro naturali, in modo che queste non possono essere descritte su dei piani ai quali esse non possono adattarsi. Tuttavia, i punti dei contorni di questi ultimi non possono trovarsi che attraverso delle linee dirette che non si possono cercare su delle superfici curve, in quelle che non sono nella superficie del solido, ma dentro, come i raggi, le ordinate e le ascisse. A tal punto, bisogna fare ricorso ad una rappresentazione imperfetta e defigurata, fatta su una superficie piana, attraverso delle parallele abbassate su questa superficie da più punti della curva; ciò che noi chiamiamo proiezione, dalla parola latina *projicere*, che vuole dire gettare. Come se tenendo un corpo in aria, si getta o si lascia cadere da ognuno dei suoi punti una goccia di inchiostro su un piano, la fuga di queste gocce legate da una linea continua, darà una figura che farà la proiezione di questo corpo.

Sulla proiezione

La parola proiezione ha più significati, si può applicare all'azione di gettare, ma noi qua la riferiamo alla descrizione di un corpo formato su un piano da delle perpendicolari a questo piano, o se si vuole spiegare ancor di più, attraverso delle parallele portate dagli angoli di questi corpi o di più punti del suo contorno su questo piano in qualche situazione che lo riguardi.

Basta tuttavia all'uso che noi ne dobbiamo fare, considerare le linee verticali ed orizzontali, perché è a questi due generi di situazioni costanti che si possono sempre determinare, che si devono rapportare le linee inclinate all'orizzonte; secondo questa restrizione noi possiamo dire, per esprimerci secondo i termini dell' arte, che la proiezione di un corpo è la traccia dei *plufieurs a-plombs*, abbassati dai loro angoli o dai loro contorni per farne il piano o iconografia, o più linee di livello tirate comunque dai suoi angoli, o dal suo contorno su una superficie a piombo, per farne i profili o le elevazioni.

COROLLARIO GENERALE

Da dove risulta che la proiezione fatta su un piano verticale o orizzontale, raccorcia la rappresentazione di tutte le linee e superfici che non sono paralleli al piano sulla quale lo si fa.

Sia (***Fig.169***.) la linea *AB*, di cui si fa la proiezione sul piano *gh*, è evidente che se questa linea è nella situazione *aB*, parallela a questo piano, le perpendicolari *aD* e *BF* abbassate dalle sue estremità saranno anche parallele ed uguali. La rappresentazione *DF* sarà uguale ad *aB*, ma se si trasporta il punto a in *A* senza muovere il punto *B*, si raccorcerà la rappresentazione di questa linea alla distanza che ci sarà dalla perpendicolare *aD* ad *AE*, che è uguale al seno verso *aS* dell'angolo *aBA* dell'inclinazione della linea *AB*, abbassata alla sua estremità *A* al disotto della linea orizzontale *aB*, se la proiezione si fa attraverso delle verticali; dunque la rappresentazione *EF* sarà più piccola che la linea *AB*.
Si può dimostrare questa verità in un modo più semplice, portando *AC* [1] parallelo a *EF*, poiché allora si riconoscerà che la proiezione di una linea che non è parallela al piano dell' iscrizione è sempre uguale al lato di un triangolo rettangolo, di cui la linea oggettiva è l'ipotenusa. Da cio, noi tiriamo la presente conclusione che è fondamentale per tracciare i disegni che si chiamano disegni tridimensionali per il taglio delle pietre.

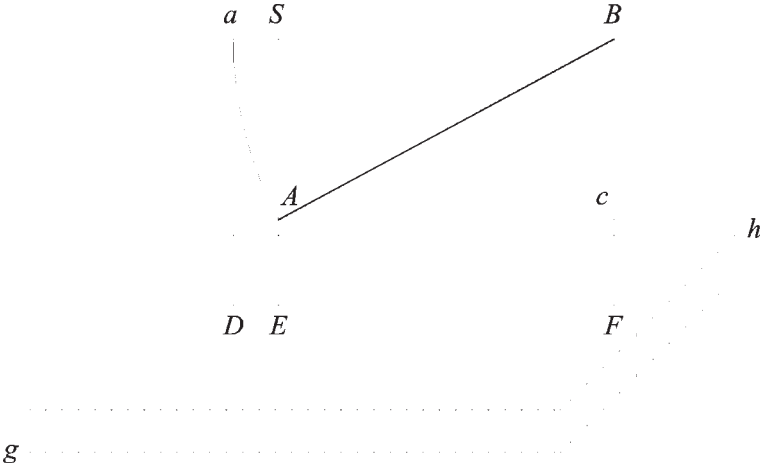


Fig. 169 La proiezione della linea *AB* sul piano *gh* non parallelo ad essa, è più corta della lunghezza reale

TEOREMA

[1] Nella figura 169 la lettera *C* è minuscola.

Le proiezioni delle linee curve che sono in un piano perpendicolare ad uno o più altri piani di descrizione, sono delle linee rette, dunque le divisioni fatte da queste parallele portate da più punti di queste curve, sono sempre nella stessa proporzione con le ascisse coordinate.

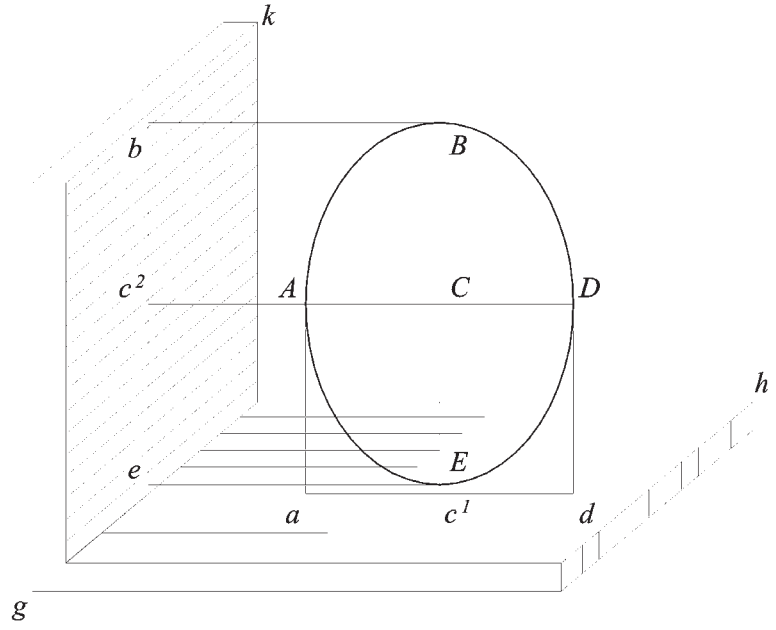


Fig. 170 La proiezione dell'ellisse, sia sul piano orizzontale che su quello verticale, è una linea retta

Per primo, è chiaro che la proiezione di una linea curva che è ***(Fig. 170.)*** in un piano perpendicolare a quello di descrizione, è una linea retta. Dunque tutte le linee portate dai punti della curva su un piano di descrizione, sono nello stesso piano, e non si deve più considerare la sezione dei due piani, la quale segue la geometria elementare, la quale è necessariamente una linea retta. Così la proiezione dell'ellisse *ABDE* ***(Fig.170.)*** è la linea *ad* nel piano *gh* e la linea *be* nel piano *gk,* l'una *ad* orizzontale sul piano orizzontale, e l'altra *be* verticale sul piano verticale, ed i punti c^1, e c^2 [2]di queste due linee sono la rappresentazione dei tre punti uniti in uno. Il punto *c* [3] che rappresenta i punti *B, C, E, e* C^2 i punti *A, C, D,* in modo che *ca* e *cd* [3] siano le rappresentazioni di un quarto o di una metà di ellisse, ciò che è visibile, e alla quale bisogna abituarsi per capire tutto ciò che diremo inseguito su delle figure, dove noi esprimeremo spesso le linee curve, attraverso quelle diritte.

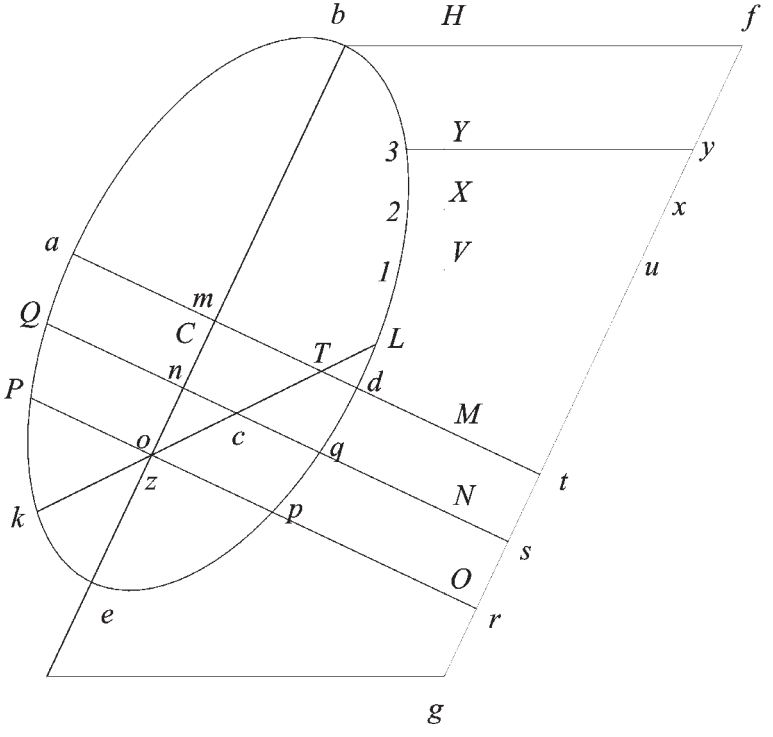
[2] Nel testo originale la lettera c^2 è maiuscola

[3] Nella figura 170 la lettera *c* è c^1 minuscolo

Quanto alla seconda parte di questo teorema, toccando il rapporto delle divisioni fatte dalle parallele portate da più punti delle curve, noi capiremo la dimostrazione alle sezioni coniche, che sono quasi le sole con cui noi abbiamo a che fare, in particolare le sezioni del cerchio e dell' ellisse.

Sia una linea *kLo be* (***Fig. 171.)***, tagliata dalle parallele *at, Qs,Pr.* Il rettangolo per *aTxTd :ktxTL:: Qcxcq:kc x cL,* è lo stesso dei rettangoli fatti dalle parti delle linee *be* tagliate dalle parallele *at,Qs, Pr;* dunque i punti *Tcz,* sezioni delle linee tirate dai punti *aQP,* sulla linea *kL* danno delle divisioni su questa linea che hanno lo stesso rapporto tra di esse, che è quello che gli stessi punti *aQP* danno sulla linea *be,* anche se differentemente situati nei riguardi dell' arco *aP* dell' ellisse, all' interno della curva.

Non sarà difficile, far vedere che lo stesso rapporto sussisterà a riguardo delle linee che sono fuori della curva, per esempio di *gH*, poiché si porta dal punto *g* una linea *gf* parallela a *be,* ed è evidente che le divisioni *rs* e *st* sono uguali a *zn* e *nm.* Tuttavia, a causa delle parallele *at, Qs,Pr,* i triangoli *gtM, gsN, grO* sono simili, dunque *rs=zn:st=nm:: ON:NM::zc: cT*, e di conseguenza, le proiezioni dei punti *PQa,o pqd,* fatte dalle linee parallele tra loro, danno sempre delle divisioni che fra loro stanno nello stesso rapporto , su dei piani differentemente situati, sia dal di dentro, che dal di fuori della curva , e qualche angolo che le linee di proiezione fanno con questi piani; ciò che si doveva dimostrare.



COROLLARIO I

Da ciò segue, che la proiezione fatta su dei piani perpendicolari alle parallele di proiezione, non è una rappresentazione più regolare degli oggetti, che quella che è fatta da delle linee oblique, e questo modo di rappresentare i corpi è geometrico, poiché conferisce sempre un certo rapporto delle parti delle curve proiettate.

COROLLARIO II

Di qua segue, che se si fa la proiezione di un cerchio attraverso delle linee parallele, perpendicolari o oblique al piano di descrizione, le divisioni corrispondenti ai due lati della linea di proiezione che passa dal suo centro, saranno uguali tra di loro, a causa dell'uniformità di questa curva. Sarà lo stesso nei riguardi dell' ellisse, poiché la proiezione avverrà attraverso delle linee perpendicolari al piano di descrizione.

Ciò che noi diciamo del cerchio e dell'ellisse è ancora vero a riguardo della parabola e dell'iperbole, poiché le linee di proiezione sono parallele alle loro assi.

Si può estendere questo teorema a delle altre curve con delle sezioni coniche, come alle spirali e alle ovali, fatte dalla sezione dei corpi anulari, di cui noi abbiamo parlato. In una sola parola, la proiezione conferisce sempre una certa regolarità del rapporto, che è il solo mezzo per cui adattare ad una linea retta qualche proprietà di una linea curva, e per applicare su un piano le superfici concave o convesse, senza confondere le loro parti; anche se essa trasforma una curva in un'altra.

TEOREMA

La proiezione di un cerchio,che non è parallelo al suo piano di descrizione è un ellisse, al contrario quella dell'ellisse può essere un cerchio; quella delle ellissi, parabole e iperboli, è una curva della stessa specie più o meno allungata.

Sia ***(Fig.172)***, il quarto del cerchio *AEFC* nel piano *AEHC*, sul quale si fa la proiezione dello stesso quarto di cerchio supposto elevato su questo piano *D*, nell'intervallo di arco *DE*, misura il suo angolo di inclinazione *DAE*, fissando il raggio *AC* sul piano. Siano i punti *D* e *G*, presi a piacere avendo tracciato sullo stesso piano le perpendicolari *Dd* e *Gg*, che bisogna supporre tali anche se essi non sono nella figura a causa della prospettiva. Se attraverso i punti *d* e *g*, si tracciano le dritte *AdE*, *BgF* perpendicolari al raggio *AC*, si avrànno due triangoli simili *AdD* e *BgG*, rettangoli in *d* e *g* per costruzione; dunque gli angoli in *A* e *B* sono uguali, poiché sono gli angoli dell'inclinazione dei due piani dei quarti di cerchio *DAC* e *EAC*, di conseguenza *Ad:AD::Bg:BG*, ma *AD=AE* e *BG=BF*, dunque *AE:Ad::BF:Bg*. Ciò dimostra che le ordinate della curva, sono tra loro come quelle del cerchio; ciò non appartiene che all' ellisse , *quello che si doveva dimostrare*.

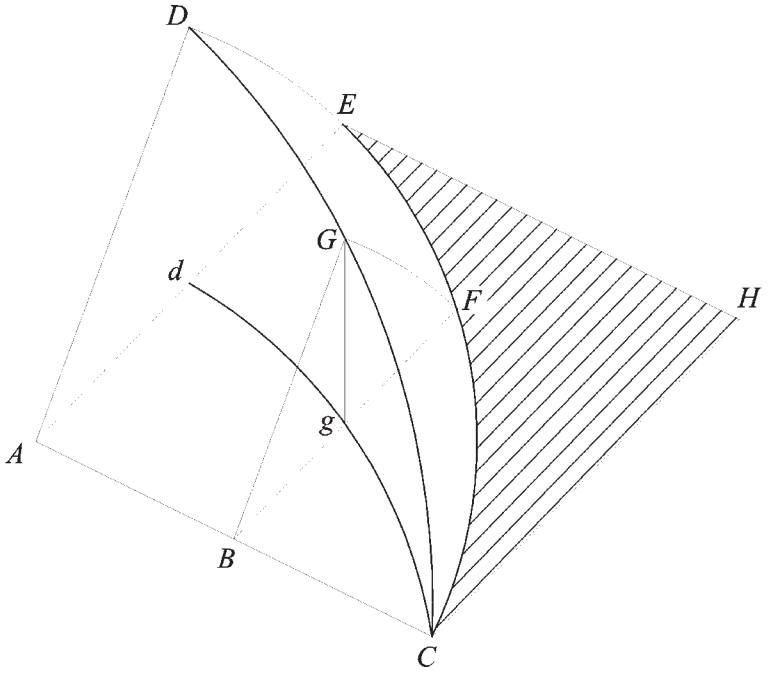


Fig. 172 La proiezione del quarto di cerchio su un piano non parallelo ad esso è un
Si sarebbe potuto dimostrare tutto ciò in un unica volta, considerando il cerchio alla superficie di un cilindro scaleno, la cui sezione perpendicolare all'asse è un elisse, poiché le linee di proiezione, essendo moltiplicate all'infinito e passando alla circonferenza di un cerchio formeranno la superficie di un cilindro.

Attraverso questo mezzo si dimostra tutta insieme la seconda parte di questo teorema, che dice che la proiezione di un ellisse è spesso un cerchio, ed è spesso un ellisse più o meno allungata . In tal modo, l'ellisse, considerata la superficie del cilindro destro, si riduce ad un cerchio alla base, e se il cilindro è tagliato più o meno obliquamente, sia che esso sia retto o scaleno, la sezione è un ellisse più allungata e ristretta.

La stessa dimostrazione serve per la terza parte, che dice che le proiezioni delle parabole e delle iperboli sono delle curve della stessa specie, come è stato detto nel teorema III, e che non differiscono da quelle che si vogliono rappresentare attraverso la proiezione. Tutto ciò, in quanto esse sono più o meno allungate o accorciate, e seguono più o meno fedelmente l'obliquità della sezione. Considerando che le linee di proiezione moltiplicate all'infinito formano corpi cilindrici che hanno per base una parabola o una iperbole, si ha l'inverso del teorema III.

COROLLARIO

Da ciò risulta, che più linee di proiezione sono gli angoli acuti, con il piano della figura che si vuole proiettare. Inoltre, più la figura si ristringe, in modo che queste linee stiano in un angolo infinitamente acuto, piu esse

cadono nel piano della figura, e la riducono ad una linea diritta, come noi gli abbiamo detto precedentemente.

USO

L'applicazione di questo enunciato, si presenta tutti i giorni nella pratica per il taglio delle pietre e per altre opere di architettura. Riguardo la proiezione, parlando in termini artistici, considero il piano di una porta sia in pieno centro, sia rialzato, sia ribassato in un muro in scarpa, come sono ordinariamente quelli dei rivestimenti delle fortificazioni,essa è un ellisse molto ristretta, che segue più o meno l'inclinazione della scarpa, e quella di una giuntura del letto di una nicchia sferica in conchiglia, che è ugualmente un ellisse che si ristringe verso una chiave dove essa diventa una linea diritta, e si apre verso le imposte dove diventa un arco del cerchio.

Questi due enunciati sono ancora necessari per capire le figure seguenti, e quelle dei trattati in generale, dove si rappresentano spesso i cerchi e le ellissi con delle linee rette che ne fanno la proiezione, o attraverso ellissi estremamente ristrette.

Sulla descrizione del cerchio sulle superfici concave o convesse della sfera, del cono e del cilindro.

PROBLEMA XXX

Attraverso due o tre punti dati sulla superficie di una sfera, descrivere un cerchio.

Si deve considerare la superficie della sfera come composta da due figure, una concava e l'altra convessa. Questa differenza non è oggetto per la teoria, dove non si guarda l'impenetrabilità dei corpi, ma bensì per la pratica che può operare sull'una come sull'altra.

In primo luogo, si tratta di descrivere un cerchio maggiore su una superficie concava; è sufficiente che si abbiano due punti dati, previsto che si conosca il diametro della sfera, e che non sia diametralmente opposto. E' chiaro che per la generazione della sfera (art.1), il diametro di un cerchio diventa l'asse della sfera, allorché lo si fa muovere intorno a questo diametro; dunque è comune a tutti i cerchi che passano dall'asse della sfera.

Se i due punti dati sono meno distanti di 180 gradi, non si può far passare un solo cerchio maggiore, ma un' infinità di cerchi minori di diverse grandezze, da dove risulta che, per questi, non sono abbastanza i due punti dati, ma necessitiamo di tre punti, per determinarne la posizione e la grandezza, in quanto bisogna cercare il diametro, come dimostriamo di conseguenza.

Siano i tre punti dati *ABE* ***(Fig.173 a e b)***, in una superficie concava della sfera. Si misureranno le distanze, per fare a parte, su un muro o su un'altra superficie piana un triangolo *ABE*, in seguito attraverso i punti *B* e *E*, si tracceranno le linee *AE* ed *AB*, delle perpendicolari *Bd* e *Ed*, che si incontreranno nel punto *d;* se da questo punto e dall'opposto *A* si traccia una linea *Ad*, essa sarà il diametro che si cerca.

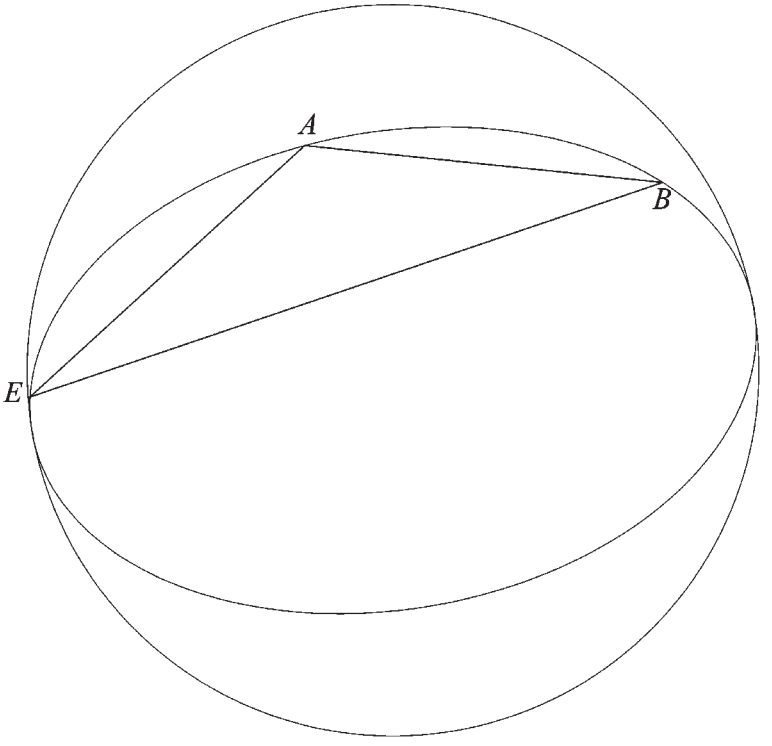


Fig. 173 a Attraverso i punti dati sulla superficie della sfera viene descritto un cerchio

COROLLARIO

Da questo metodo si cerca di trovare il diametro di una sfera. Poiché con una corda di lunghezza arbitraria, ed un punto *P* preso a piacere per il polo, si descrive un cerchio sulla superficie concava, avendo trovato il diametro attraverso la pratica precedente, si farà un triangolo isoscele della lunghezza del segmento AE per base, e delle due lunghezze della corda AP e EP [4] per i lati, i quali faranno ai punti A ed E due perpendicolari, che si incontreranno al punto *D*. La linea *PD* sarà il diametro della sfera che si cerca.

[4] Il punto *P* nella figura è stato preso sulla superficie della sfera

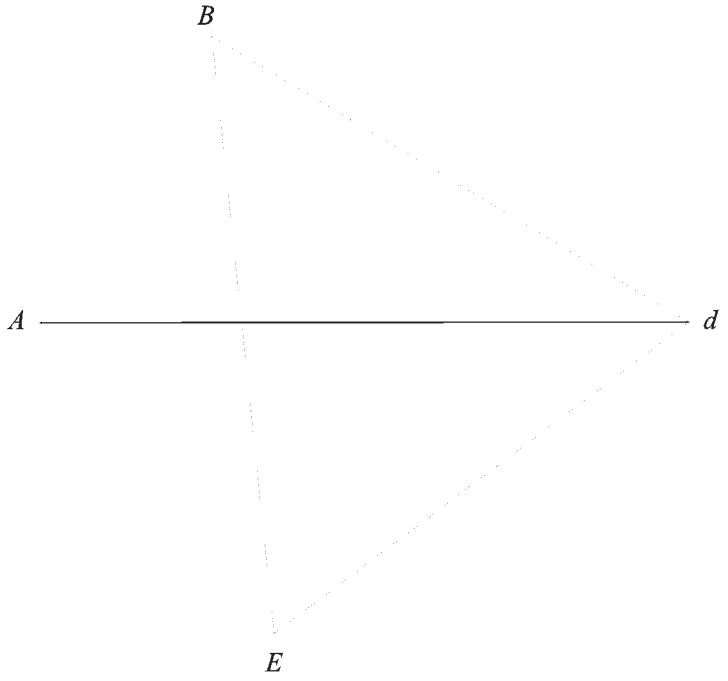


Fig. 173 b Per trovare il diametro del cerchio le distanze tra i punti della sfera sono riportate su una superficie piana

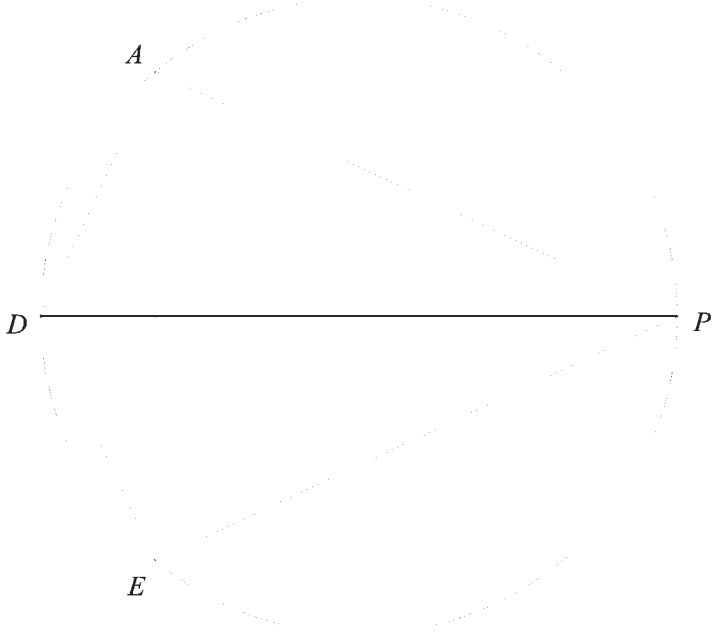


Fig. 173 d Per trovare il diametro della sfera, si ripete la costruzione della figura 173 b

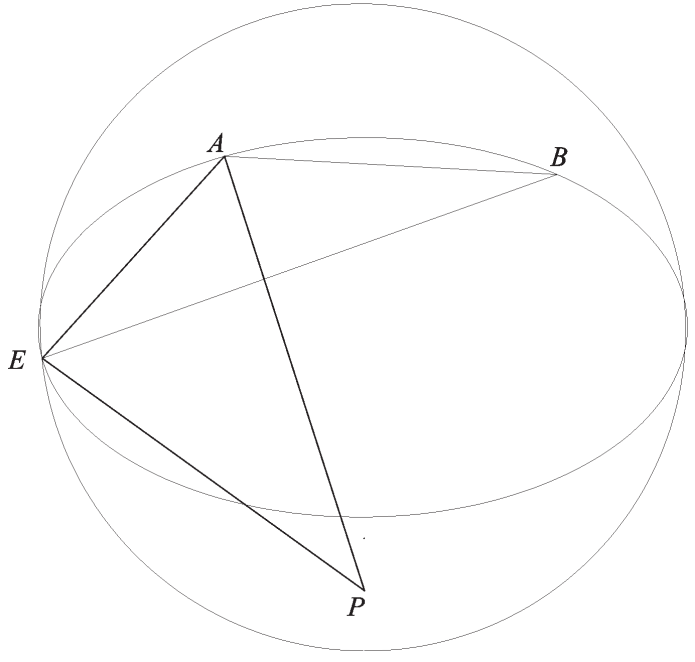
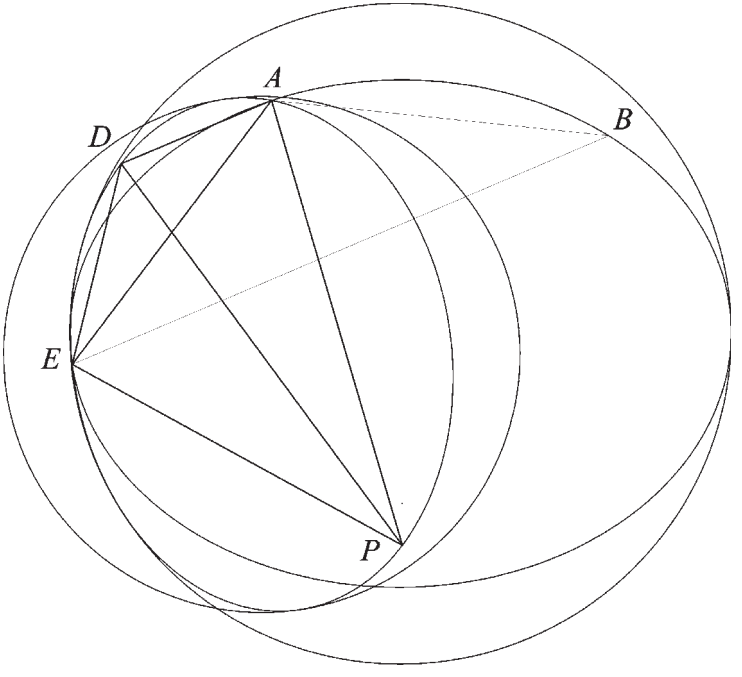


Fig. 173 c Il punto *P* della figura rappresenta il polo



Questo è stato supposto per descrivere un cerchio maggiore attraverso i due punti dati *A* e *B* ***(Fig.173 c, d, e)*** che bisogna tracciare a parte su una superficie piana un quarto di cerchio, ***(Fig.174 a)***, o ciò è la stessa cosa, di un triangolo rettangolo isoscele; dunque i segmenti *ac* e *pc* sono uguali al raggio della sfera, l'ipotenusa *ap* sarà la corda di un'a rco di 90 gradi che servirà a trovare il polo del cerchio proposto.

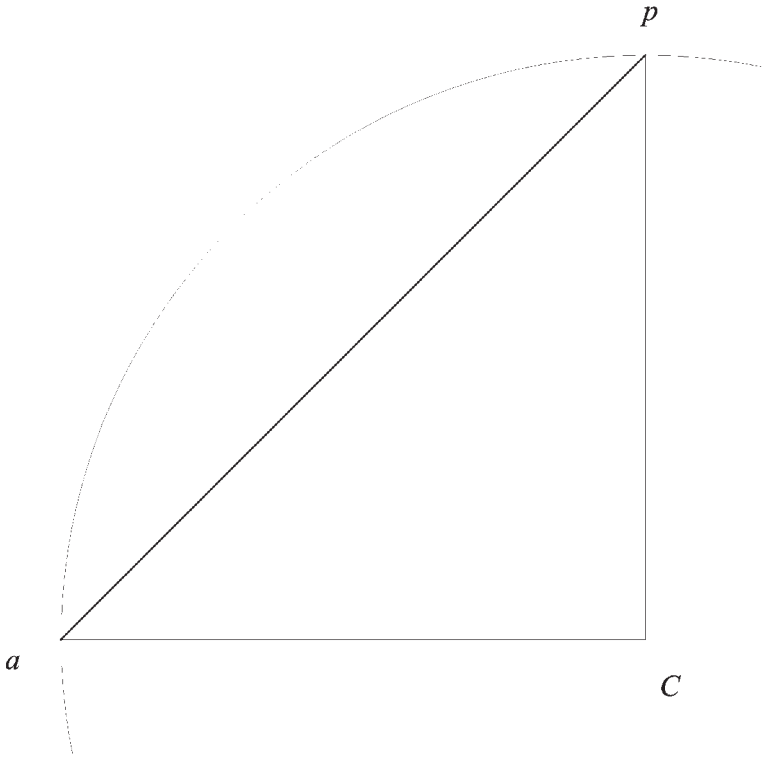


Fig. 174 a Considerando la superficie concava della sfera, la corda *ap* dell'arco di 90° verrà utilizzata per determinare il polo.

Dati i punti *A* e *B* come centri, ***(Fig. 173 f)*** e la corda *ap* per raggio, si farà un intersezione dei due archi di cerchio dove sarà il polo, da ciò si descriverà il cerchio maggiore *EABF*, qui rappresentatoin prospettiva. Si fisserà cioè il cordone, una pertica o una randa, per tracciare il cerchio sulla superficie concava della sfera, quasi come ci serviamo di un centro su una superficie piana [5].

[5] Nella figura 173 della Planche 16, compaiono le lettere *D* e *t* che nel testo non sono menzionate

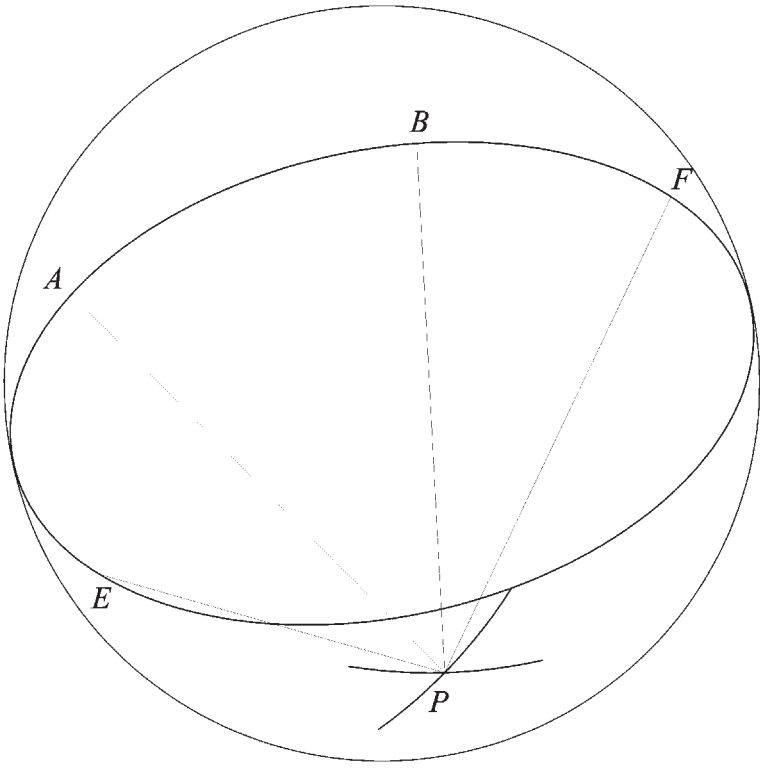


Fig. 173 f attraverso il polo *P* è stato disegnato il cerchio maggiore *EABF*

Ho detto nella superficie concava, perché è visibile che non si può operare lo stesso sulla convessa ,sulla quale invece di servirsi della corda *aB* per raggio di intersezione che dà il polo, bisogna servirsi dell' arco *aLp* [6]; e per questo c'è bisogno di uno strumento , o un compasso a punte curve, per supplire, se la sfera è piccola come sono nell' Artiglieria, *le Palle* e *le Bombe*. Tuttavia, se la sfera è grande come una volta, al posto di una corda, bisogna servirsi di un assemblaggio di tre pezzi di legno *pH*, *Hg*, *ga*, assemblati all'angolo diritto, la cui grandezza *Hg* sia uguale alla corda *pa*, e le altre due all'asta *fL* [6], e per trattenerli in questo stato bisogna legarli con materiale cementato o traverse *IK*, *ik*,che le impediscono di aprirsi o di fermarsi ***(Fig. 174 b)***.

Per trovare il polo di un cerchio minore, di cui si hanno tre punti dati ***(Fig. 175)***, si descriverà su una superficie piana, attraverso l'aiuto di un triangolo *ABE* , il cerchio *AEd*. In seguito, avendo diviso l'arco *BE* in

[6] La lettera *L* nella figura è minuscola

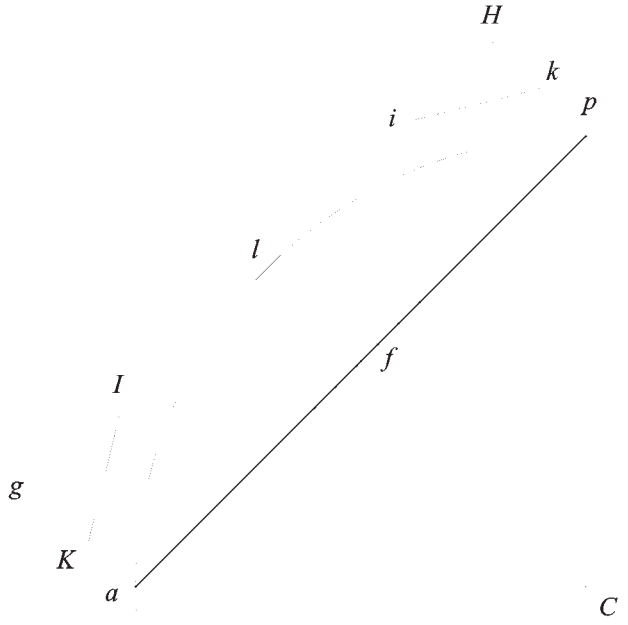


Fig. 174 b Considerando la superficie convessa della sfera, per trovare il polo, verrà utilizzato l'arco *aLp*

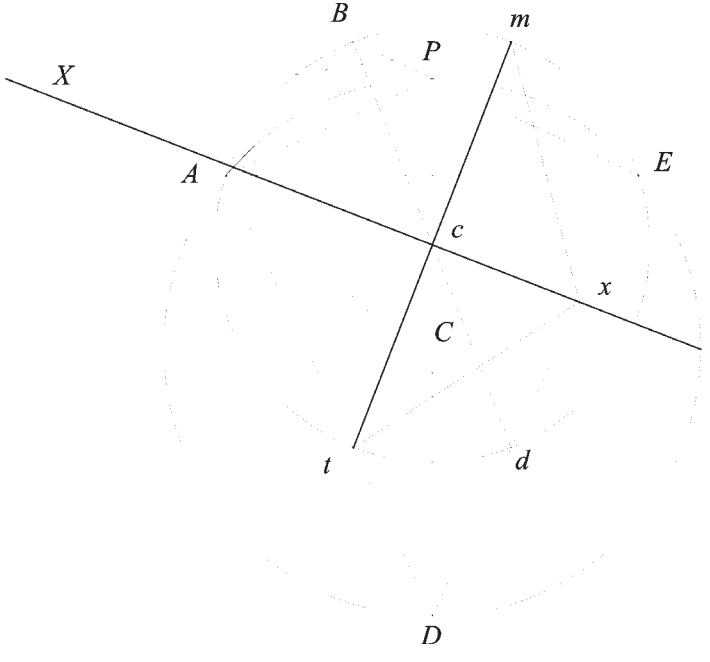


Fig.175 Metodo per individuare i poli *x X* di un cerchio minore

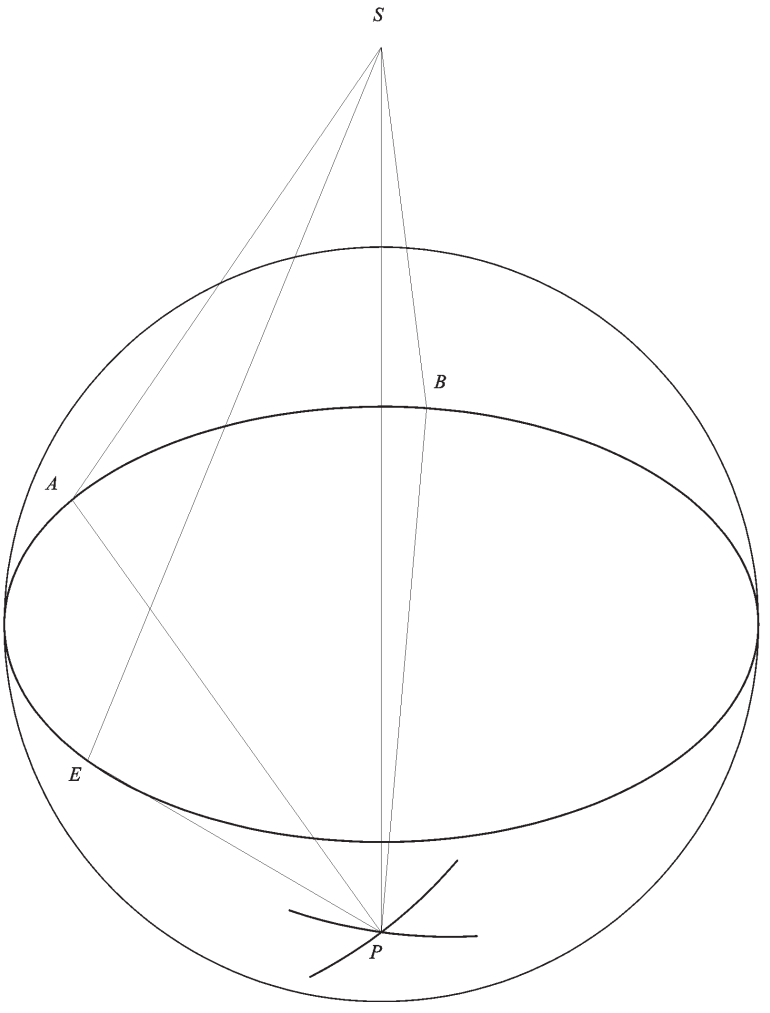


Fig. 173 g Altro metodo per l'individuazione di un cerchio maggiore

due segmenti uguali in *m*, si traccerà il diametro *mt* perpendicolarmente a *BE*, nel punto medio *c*, dal quale si porterà la perpendicolare *Xcx*, poi dal punto *m* o *t* , per il centro, e dall'intervallo del semidiametro della sfera per il raggio, si descriveranno gli archi del cerchio che taglieranno la perpendicolare *Xx*, ai punti *x e X* dove saranno i poli del cerchio minore *ABEd* che si cerca. In tal modo, le distanze *Xm, xt* saranno i raggi d'intersezione degli archi del cerchio e noi faremo dei punti *B* e *E*, i centri per avere il punto di uno dei poli, come noi abbiamo detto sulla ***Figura 173***.

Ancor più meccanicamente,ma anche con una esattezza sufficiente per la pratica, si infileranno tre cordicelle uguali in un anello ***(Fig.173 g)***, in *S* per la superficie convessa, e in *P* per la concava. Queste saranno di una lunghezza proporzionata quasi a quella che si può giudicare a vista d'occhio, e un po' più lunga, si legheranno insieme da una parte

e si attaccheranno le altre ai punti dati, poi facendo scivolare l'anello, e avvicinando la superficie della sfera alle tre corde ugualmente tese, si arriverà esattamente al polo, dove si attaccherà una delle corde per tracciare il cerchio richiesto sulla superficie della sfera.
Questo metodo è quello di comodo che può servire sulla superficie convessa, allontanando l'anello al di sopra del polo tanto quanto si vorrà, per evitare lo sfregamento del cordone che lega la randa, quale deve essere tangente alla sfera, che per non essere piegata per niente sulla superficie convessa, dove piega piuttosto questa curvatura, causerà delle ondulazioni con lo sfregamento.

Ma se si avrà un cerchio maggiore per descrivere i basamenti o le parti di una copertura a cupola, come quella che si vede a *Les Invalides*, non si potrà elevare abbastanza il punto S per evitare lo sfregamento, ed è per questo che si necessita della livella o del piombo. Infatti se le centine devono essere a livello come i basamenti, o a piombo come le parti, o se tali ornamenti sono inclinati, come intrecci di cerchi, bisognerebbe avere, dal polo una pertica perpendicolare alla superficie convessa per la pratica di cui noi parliamo, che servirà ad allineare la corda, affinché la curvatura, non devii per niente della sua direzione. In quanto se si curva a destra o a sinistra, anche per poco, si scorcerà e darà dei punti falsi del cerchio proposto.

DIMOSTRAZIONE

In primo luogo, è chiaro che avendo trovato la corda ai 90 gradi della circonferenza della sfera, e avendola applicata ai due punti dati, il punto di incontro dei due punti di queste corde uguali è il polo, che è sempre lontano di 90 gradi da un grande cerchio, secondo l'enunciato 16° delle sferiche di Teodosio.

In secondo luogo, per trovare il diametro di un cerchio, di cui si hanno tre punti dati, noi abbiamo alzato delle perpendicolari su *AB* e *AE* per avere la posizione di questo diametro; poiché (secondo il 31°enunciato di Euclide l.3.) l'angolo retto è sempre in un semicerchio, e poiché le linee *Bd* e *Ed* sono ben ferme, il loro incontro si determinerà al punto della circonferenza del cerchio diametralmente opposto al punto *A*. La stessa costruzione è ancora più comprensibile nel corollario per trovare il diametro della sfera.

In terzo luogo, si è dimostrato nel 13° enunciato delle sferiche di Teodosio, che se nella sfera, un cerchio ne taglia un altro in due parti uguali e perpendicolari, i poli di questo che è tagliato, sono nella circonferenza di colui che lo taglia, ed a distanze uguali. E' chiaro che il cerchio minore *ABEd* è tagliato in due parti uguali dal suo diametro *mt*, il quale è la corda di un cerchio maggiore, di cui il diametro *Xx* è alzato perpendicolarmente su questa corda; dunque i punti *X* e *x* sono i poli del cerchio *ABEd* e le linee *Xm, Xt, xm e xt* , sono le distanze di questi poli dal cerchio. Nonostante i due cerchi maggiori e minori stiano in questa figura sullo stesso piano, bisogna conservarli ad angolo retto l'uno rispetto altro, in modo che ponendo il minore in un piano di carta, il maggiore sarà alzato in aria perpendicolarmente, tornando sulla corda *mt*, che deve essere immobile.

USO

Questo problema è necessario ai pittori o agli scultori in stucco o in gesso, ai marmisti che hanno degli ornamenti circolari da tracciare sulle superfici concave di una volta sferica, o su la superficie convessa, come per esempio quelle dei basamenti, dei lati degli archi doppi dei bordi di basso rilievo,o delle aperture finte o degli intrecci circolari.
Per quello che riguarda le aperture vere o finte, fatte dopo un taglio in una volta sferica, direi che Viviani, *ha trovato il modo di forare una volta semisferica in quattro parti attraverso delle finestre, in modo che il resto della porta sia geometricamente quadrato.*

Poiché questo enunciato non ha alcun rapporto con il nostro soggetto, che non ha che come scopo la divisione delle superfici e non la loro estensione, io credo che nessuno si arrabbierà per questa piccola digressione. La costruzione di questo problema, consiste nel dividere la base dell'emisfero in due diametri ed angoli retti, sulla quale si sono fatti quattro piccoli semicerchi, per base di quattro metà di cilindri retti, che forano l'emisfero, il resto delle quattro aperture, è quadrato, cioè, se ne può trovare la superficie geometricamente. Ciò si è visto attraverso i nostri principi al teorema VII, in cui la curva che fa in un ognuno di questi semicilindri è un Ellipsimbre. In tal modo, non si tratterebbe più che di uno spazio quadrato rinchiuso in queste Ellipsimbre per avere la superficie totale dell'emisfero. Ma poiché la geometria non è arrivata a questo grado di perfezione, essa ci fornisce per la pratica, dei mezzi sufficientemente esatti.

PROBLEMA XXXI

Da un punto dato sulla superficie di un cilindro tracciare un cerchio.

Se il cilindro è retto, e la base è data, non c'è nessuna difficoltà, non c'è che da seguire il contorno della base, a distanze uguali prese sempre parallelamente all'asse; prese con un righello o con una corda o in piccolo con questo strumento di falegname che si chiama *trusquin.* Ma se non si ha la base, o perché essa è obliqua o spezzata, o occupata da qualche corpo che la copre, come se si volesse tracciare un ornamento circolare, come una base o un astrologo ad una colonna gotica in luogo, bisogna cominciare dal portare più rette parallele all'asse, e tracciare il cerchio, e se si tratta di un cilindro scaleno, come un'ellisse su un cilindro retto, così come noi diremo, noi parleremo solamente di un cilindro retto.
Il primo modo di tracciare le parallele alle assi del cilindro , *avendo dato la base*.

Sia una base retta o obliqua *ABDE* [7], avendo distesa questa base, ci si porterà due linee *gG* ed *fF* parallele tra di loro, che divideranno in due segmenti uguali, in M ed *m*, da dove si traccerà la linea *BE*, il suo punto

[7] Nella figura 177 della planche 16, la lettera *E* non compare

medio *C* sarà l'estremità dell'asse del cilindro. Si farà altrettanto per la base opposta per trovare l'altra estremità della stessa asse; in seguito avendo messo una riga *HI* a piacere su questa base, previsto che essa passi dal piede *C* dell'asse, si traccerà la linea *AD*, posando anche un'altra riga *KL* sulla base opposta, si farà tornare sull'estremità dell'asse, fino a che si guarderanno l'una con l'altra e la loro direzione sia parallela. Tutto ciò, affinchè quella la cui parte copre così bene l'altra, cioè quando le due linee superiori o inferiori di queste righe si confondono in una, ciò che una persona sola può fare, fermando una delle righe nella posizione, e tenendo per girare, come conviene, per fare in modo che il raggio visuale rasenti le due righe, in modo che sembri che si incrociano. Ciò che si chiama *bornoyer,* perché si ferma ordinariamente l'occhio , e che noi abbiamo espresso con delle linee che partono da un occhio come la ***Figura 177***. In questa situazione si tracciano dei diametri su delle basi, la linea portata alla superficie del cilindro attraverso l'estremità di questi diametri così corrispondenti ,è una parallela all'asse del cilindro.

Questo, perché le basi sono occupate, come per una colonna nel posto,

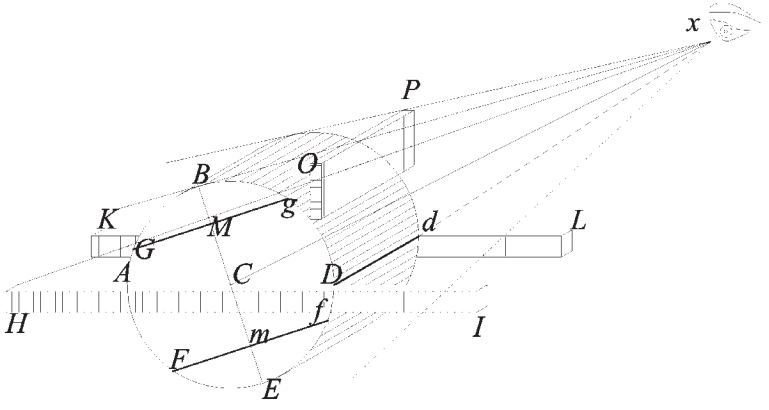


Fig. 177 Primo metodo per tracciare le parallele all'asse

che è occupata dall'alto e dal basso, ed obbliga a dovere ricorrere a delle maniere meccaniche per tracciare delle parallele degli assi.

La prima, la più semplice, è quella di servirsi del piombo per i cilindri posti verticalmente come delle colonne tonde, e essi sono inclinati, si applica lo *champ,* una riga molto larga, *OP*. Di conseguenza i lati opposti sono paralleli lungo la colonna, e girandola in modo che guardandola dal di sopra, questa riga non incroci per niente la linea tangente della colonna; ciò affinchè i raggi visivi *xO* e *xP*, rasentino l'uno e l'altro, la superficie della colonna. La linea tracciata sulla stessa superficie cilindrica lungo il lato della riga che appoggia sul cilindro, è una parallela all'asse.
La seconda maniera ***(Fig. 176 a)***, che è ancora meccanica, è di tracciare con un compasso un punto *C* come centro ,e con una apertura presa a piacere una linea curva *dEe* , sulla superficie del cilindro, come se descrivesse un cerchio su una superficie piana. In seguito, con una apertura del compasso un po' più grande della prima ma più piccola rispetto alla lunghezza dell'arco del cilindro, di cui essa è la corda sviluppata, cioè rettificata, si descriverà su del cartone un semicerchio, o solamente un settore di cerchio che è in vicinanza, in cui si poserà il centro in C. Dopo averlo applicato e piegato sulla superficie del cilindro, ci si traccerà il contorno, che taglierà quello della curva precedente in due punti *X* e *x* , con il quale si tira una linea dritta. In tal modo, si avrà la parallela all'asse che si cerca ,dalla quale sarà facile tirare altre linee per dei punti dati, se c'è bisogno. Si può fare la stessa cosa con una corda, ma in modo meno esatto; questo è possibile, come sia la preparazione necessaria per tracciare i cerchi e le ellissi sulla superficie del cilindro.

Se il cilindro è retto, non si tratta che di fare delle sezioni perpendicolari alle linee parallele all'asse, così si prenderanno a piacere i punti *x* e *X* per i centri, ed un certo intervallo, preso a piacere, per raggio. Si faranno delle

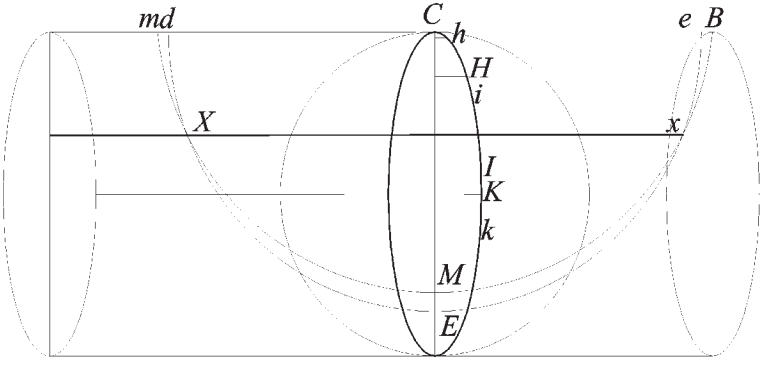


Fig. 176 a Secondo metodo per tracciare le parallele all'asse

intersezioni d'arco in *H* e in *K*, e più lontano in *h* e in *k*, o più vicino in *I* e *i*, si applicherà su questi punti *kK, Ii,Hh,* una riga pieghevole, con la quale si traccerà il cerchio intorno al cilindro, se è retto, se è scaleno, la sezione perpendicolare all' asse sarà un ellisse .In tal caso, per descrivere un cerchio con dei punti dati, bisogna portare attraverso questo punto un contorno parallelo alla base, facendo un angolo al contrario [8].

Per tracciare delle linee parallele all'asse dalla superficie concava di una porzione del cilindro, come in una volta ***(Fig.180)***, al posto di prendere due parallele in due parti del centro, si prenderanno tutte e due dalla stessa parte, come *af* , *be*, e si dividerà ciascuna nella propria mezzeria *M* e *m* . Si porterà da questi centri, la linea *dC* che sarà un diametro, ma poichè il cilindro non è completo, questo diametro non sarà terminato che da una parte in *d* , in quanto non essendo più in là di *C*, non si potrà avere il centro *C* in nessun altro modo che ripetendo la stessa operazione con due altre linee *ih e kg* , che daranno un secondo diametro *Ec* che taglierà la prima in *C*, centro della base, o parallela all'asse del cilindro. Si farà altrettanto con la base opposta, e si avrà l'altra estremità di questa asse

[8] Le lettere *D, X e x* che compaiono in basso nella figura 176 della Planche 16, non vengono menzionate nel testo

alla quale non sarà difficile portare delle parallele, tenendo una corda da un capo dell'asse all'altra, mirando con queste linee due punti nella superficie concava, in modo che l'asse sia nello stesso piano, e che la corda copra l'occhio che deve essere un po' lontano dalla corda, dalla parte opposta ai punti che si vogliono marcare sulla superficie concava, per tracciare una parallela all'asse del cilindro.

DIMOSTRAZIONE

Il primo modo di tracciare una parallela all'asse del cilindro, è fondato

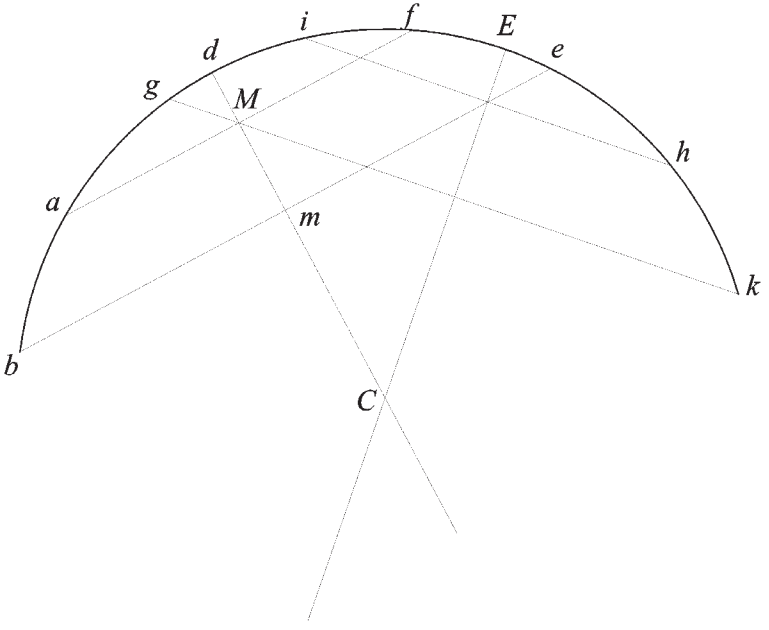


Fig. 180 Terzo metodo per tracciare delle linee parallele all'asse

sul fatto che le ordinate di un diametro sono tagliate in due parti uguali da questo diametro, il quale essendo così diviso in due segmenti uguali, dà il centro della base del cilindro, sia che esso sia circolare che ellittico, o che esso sia l'asse passante dal centro. Le due righe *HI* e *KL* che si dirigono dal raggio visuale nello stesso piano attraverso l'asse, danno i lati del parallelogramma dall'asse, di cui i lati opposti sono paralleli; dunque *Dd* è una linea parallela a l'asse , *ciò che si doveva dimostrare.*

Il secondo modo di tracciare una parallela all'asse del cilindro per mezzo di una riga di una certa larghezza, anche se meccanicamente, è esatto nel suo principio, poiché dopo che essa è stata diretta dai raggi visivi in un piano tangente al cilindro, questo piano non la toccherà che seguendo una linea parallela all'asse, e il piano della riga essendo di lunghezza uguale da un capo all'altro, sarà un parallelogramma, di conseguenza una parte sarà su un piano tangente, l'altra sul cilindro, sempre ad uguale distanza dalla linea del tocco leggero, dunque sarà parallela e per conseguenza sarà parallela anche all'asse.

Il terzo modo anche se meccanico e anche esatto nel suo principio. Si tracciano sul cilindro due curve a doppia curvatura *dEe* ed *mMB*, di differente natura, che non possono incontrarsi solo che in quattro punti, sapendo in *Xx*, due punti di ciascun lato di una sezione che passa attraverso l'asse *AFG*, quella di queste curvature che è tracciata con il compasso, a tutti i suoi diametri passanti nel centro C, curve di curvature ineguali, ad eccezione di *de* che è retta, e di contorno inegualmente lungo, che hanno dei sostenimenti sempre uguali, i quali fanno delle linee rette, che si immaginano di passare attraverso i due punti del compasso. Al contrario, quella che è tracciata con un cerchio piegato, ha tutti i suoi diametri del contorno ugualmente lunghi, e tutti i sostegni ineguali. Ognuna di queste curve ha un diametro retto che è loro comune sulla parte AB, ed uno circolare che gli è perpendicolare, sapendo che *CE* è nella prima, e *CM* nella seconda. Tutte le altre sono ellittiche, la cui curvatura si raddrizza man mano che si avvicina ad *AB*, in modo da essere tutte ineguali da ogni parte. Esse non possono andare a finire nello stesso punto, si avvicinano ugualmente a questo diametro diritto, che è la parte del cilindro, come in *X* e *x*, quindi la linea *Xx* è parallela al lato, e dunque all'asse, *ciò che si doveva dimostrare.*

In quanto al modo di tracciare il cerchio sulla superficie del cilindro, è chiaro che si suppone che il cilindro sia retto, affinché i punti *Ki* e *gH*, essendo ognuno ad uguale distanza dai punti *xX*, sono nello stesso piano perpendicolare al lato *xX* del cilindro, dunque al suo asse, al quale questo è essenzialmente parallelo.

Da questo risulta una sezione parallela alla base,cioè, un cerchio.
Ma è anche chiaro che, se il cilindro fosse scaleno, questa sezione perpendicolare al lato sarebbe un ellisse che non sarebbe per niente parallela alla base. Così per descrivere un cerchio sulla superficie di un cilindro scaleno bisogna avere la base , tracciare delle parallele agli assi sulla superficie, cioè più lati, e portare su ciascuno di questi lati la stessa distanza del punto dato al contorno della base, in modo tale da avere tanti punti per ciascun lato. A tal punto non ci si può più servire della riga pieghevole, messa su un piano per tracciare il cerchio, perché la direzione della sua piegatura ruota perpendicolarmente al lato del cilindro, al posto di quella del contorno del cerchio che lo taglia obliquamente in un angolo uguale a quello che l'asse forma con il piano della base. Tuttavia, ce ne possiamo servire mettendola di *cant,* cioè, sul suo spessore applicato su questi punti trovati, perché l'ellisse è una curva piana, e con una riga di una larghezza molto più grande del suo spessore, essendo piegata, si dirige facilmente su un piano. Non sarebbe lo stesso se si trattasse di una curva a doppia curvatura, bisognerebbe infatti che lo spessore fosse uguale alla larghezza, affinché essa non facesse più resistenza a piegarsi da una parte all'altra.

Infine l'ultima operazione per tracciare delle parallele all'asse in una superficie concava di porzione del cilindro, è la stessa di prima, raddoppiata, dal momento che il centro della sezione essendo presente in ogni diametro, sarà nel punto del concorso dei due, dove essi si incroceranno.

USO

Questo problema è uno dei principali, riguardo la costruzione delle volte cilindriche, perchè serve a trovare l'arco retto dei pergolati a forma di

volta, circolari o ellittici, o attravero l'intero centro, o attraverso una piccola porzione, come è un cuneo, per posarci la *centina*, cioè, il modello della curva, la quale deve essere presentata perpendicolarmente a una linea parallela all'asse. Perchè per poco che questa linea sia stata inclinata, il modello della curva circolare o ellittica marcherebbe una concavità o una convessità, la quale essendo continua, e seguendo la direzione di una linea che incrocia la direzione dell'asse, darebbe una superficie diversa da quella che ci si propone, come si può scorgere dalla differenza di sezione del piano che passa per questa curva.

Questo problema può ancora servire a tracciare su un intradosso del pergolato a forma di volta, ornamenti di pittura o di stucco, come per gli archi doppi.

La maniera di tracciare alcune parallele all'asse, può essere impiegata nello stesso modo, per esempio, per manovrare una cornice in un pergolato a forma di volta rampante, di cui la regolarità dell'imposta è dubbiosa; cosa che si ha spesso modo di esaminare a causa della poca esattezza degli operai nelle volte, anche nelle più semplici.

Infine questo problema è necessario per la costruzione di quello che segue.

PROBLEMA XXXII

Per un punto dato alla superficie di un cono, far passare un cerchio.

Primo caso. Quando il cono è retto, e la sommità è data, non si tratta che di fissare una corda o una riga alla sommità, e da questo punto come polo descrivere un cerchio, girando sulla superficie concava o convessa, questo è molto semplice.

2.° Ma se la sommità non è data, come in un cono tagliato, bisogna tirare sulla superficie del cono due linee dritte, cioè, due lati, i quali essendo prolungati, si incontreranno sulla sommità del cono.

Per tirare questi lati, basta applicare una riga ben retta sulla superficie del cono, di modo che non lasci nessuna luce tra lei e questa superficie; se però il cono fosse tagliato con una grande circonferenza, potremmo sbagliarci, potremmo infatti, anche involontariamente, andare di sbieco con la riga, in quanto la superficie si presenta con una convessità poco sensibile soprattutto verso la base. Per cui se vogliamo operare con esattezza, bisogna tirare delle parallele sui piani delle basi opposte, che supponiamo prima di tutto parallele tra di loro, e fare per questa specie di tronco di cono, la stessa operazione che noi abbiamo fatto alla ***Figura 177*** per trovare la parte del cilindro. A questo punto, si sarà sicuri che l'incontro delle parti del cono trovate con questo mezzo, darà esattamente il vertice, se si vuole servirsene, ma si può fare anche a meno, perché avendo trovato due parti del triangolo attraverso l'asse del cono che divide le due basi in parti uguali, si suddividerà ognuna di queste parti nello stesso numero di parti uguali, e si tireranno delle linee rette dalle une e dalle altre alla base superiore ed inferiore, come si vede nella Figura 186. La distanza del punto dato alla superficie del cono preso da una delle basi, e portato su ognuna di queste linee o parte del cono, darà dei punti, attraverso i quali si porterà a mano una linea curva, che sarà il cerchio richiesto.

Bisogna rimarcare che non ci si può servire, per tracciarle, di una riga pieghevole posata su un piatto, perché la superficie della larghezza che si applica perpendicolarmente sul lato del cono e la direzione della sua piega, darebbero una curva che si allontana dai punti marcati ,diventando

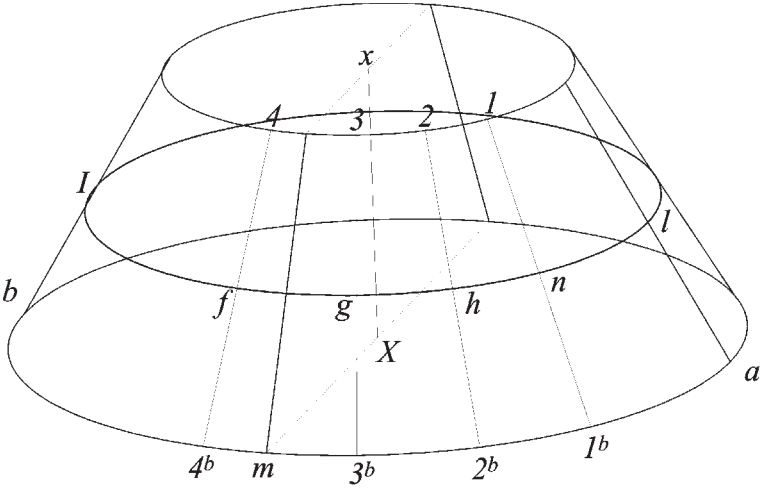


Fig. 186 Metodo per determinare un cerchio sulla superficie di un cono tagliato.

una ellisse, una parabola o una iperbole, seguendo l'apertura dell'angolo del vertice del triangolo attraverso l'asse. Ciò è chiaro, ma ci si può servire posandola in *cant* o sul campo, ci si serve ancora della riga ma in una maniera diversa, si mirano attraverso una sua parte due o tre punti, seguendo quelli si tiene appoggiata una parte, ed in aria l'altra parte, poi chiudendo un occhio, si segue con il lapis l'allineamento di questa riga, senza spostare l'occhio dal posto.

Se le basi opposte del cono tagliato non sono parallele, è chiaro che uno sarà circolare, e l'altro sarà ellittico, e che è di quello circolare che bisogna prendere le misure della distanza del punto dato.

Ma supponendo che la base circolare è solo piana ,e che la parte troncata non è piana, si possono ancora tracciare le parti sulla superficie del cono, prendendo dei punti nel suo contorno equidistanti di 3. dal punto medio dei due,e da questi punti come centro, fare delle intersezioni di archi ,come se si elevasse una perpendicolare su una superficie piana, e sui lati così trovati, tracciare il cerchio attraverso il punto dato, come abbiamo appena detto.

Il terzo caso. Poiché il cono è scaleno, quanto il suo stesso vertice sarà dato, non ci si può più servire di un polo per tracciare il cerchio attraverso il punto dato, né della distanza del punto dato alla superficie misurata su un lato fino alla circonferenza della base, in quanto il contorno del cerchio parallelo alla base, non è ugualmente distante da quello della base, anche se i piani dell'uno e dell'altro siano stati supposti paralleli, e di conseguenza equidistanti.

Bisogna allora (***Fig.179***), abbassare una perpendicolare *SP* dal vertice *S* del cono scaleno dato *ASB* sul piano della base *AB* prolungata, questa è un'operazione familiare a quelli che sanno fare bene dei quadranti per trovare il piede dello *stile*, il quale è un problema dell' XI libro di Euclide, prop. XI. Quelli che non sono geometri, lo fanno con una squadra, che posano su un lato di questo piano, ed appoggia l'altro al vertice *S*, e girando sul lato *SP*, marcano il punto *P*, con il quale si traccia una linea per il centro *C*. In tal modo si avrà il triangolo rettangolo *APS*, e di conseguenza l'angolo obliquo *ABS*, che è la più obliqua di tutte le sezioni attraverso l'asse del cono, cioè, che marca il lato più lungo *AS*, e il più piccolo *BS*.

Prima di descrivere questo triangolo su una superficie piana, ed il semicerchio *A2B* come metà della base del cono, si dividerà in tante parti quante se ne vorrà avere, attraverso i punti di cerchio richiesti. Come qui in quattro, ai punti *1,2,3,* da dove si tracceranno delle perpendicolari sul diametro *AB*, che li taglieranno ai punti *ECG*, dai quali si tracceranno delle linee al vertice *S*. In seguito attraverso i punti dati *D* o *d*, se è in questo triangolo *ASB*, si traccerà una linea *Dd* parallela ad *AB*, e se non lo è, si vedrà in seguito l'operazione che bisogna fare per tracciare questa parallela.

Dal punto *E* per il centro e per il raggio *ES*, si farà un arco *Sh* che taglierà *AB* prolungata in *h* ,da dove si traccerà al punto *1* , la linea *1h*, che sarà il lato del cono passante dal punto *1*. Si troveranno comunque i lati *2K*[9], e *3L* [10] che arriveranno in *b* [11] *kl*, in diversi punti dati su *AB*, che è un segmento prolungato attraverso la trasposizione delle linee *CS* e *GS*.

In seguito dal punto *E* per il centro e per il raggio *Ee*, dove *ES* taglia *Dd*, si farà un arco *ef*, che darà su *AB* il punto *f*. La linea *fx*, portata parallelamente ad *E1*, darà poi sul lato *1h* il punto *x* che si cerca, che è uno di questi della circonferenza del cerchio richiesto, preso sul lato *1h*, la cui proiezione è *ES* nel triangolo per l'asse *ASB*. Il raggio *Cm* darà un punto vicino a *G*, da dove tracciando *Gy* parallele a *C2*, si avrà così il punto *y*, nonché tutti gli altri.

Se il punto dato *D*, non è sul lato del triangolo attraverso l'asse *ASB*,ma è per esempio in *g*, avendo tracciato al vertice del cono il lato *Sg*, si taglierà la base nel punto *3*, dove avendo trovato il lato *3l*, si porterà su questo lato la distanza data *3z* uguale a *3g*, presa sulla superficie del cono. In seguito, da *z* tracciando *zb* perpendicolare sulla AB prolungata, la distanza *Gb* darà su *GS* il punto *g* da dove deve passare la parallela *Dd* ,per trovare i punti della circonferenza del cerchio dato, come abbiamo appena detto.
Non è necessario parlare qui della sezione del cerchiosotto contraria, in quanto si cerca di supplirvi, facendo attenzione che al posto di operare sulla linea *Dd* parallela alla linea *AB*, si tracci un'altra linea *NB*, o su una delle sue parallele ,in modo che formi con *SA* un angolo uguale all'angolo *SBA*.

[9] Nella figura 179 la lettera *K* è minuscola

[10] Nella figura 179 la lettera *L* è minuscola

[11] Nella figura 179 la lettera *b* è *h*

DIMOSTRAZIONE

È chiaro per la natura del cono che non si possono trovare le linee

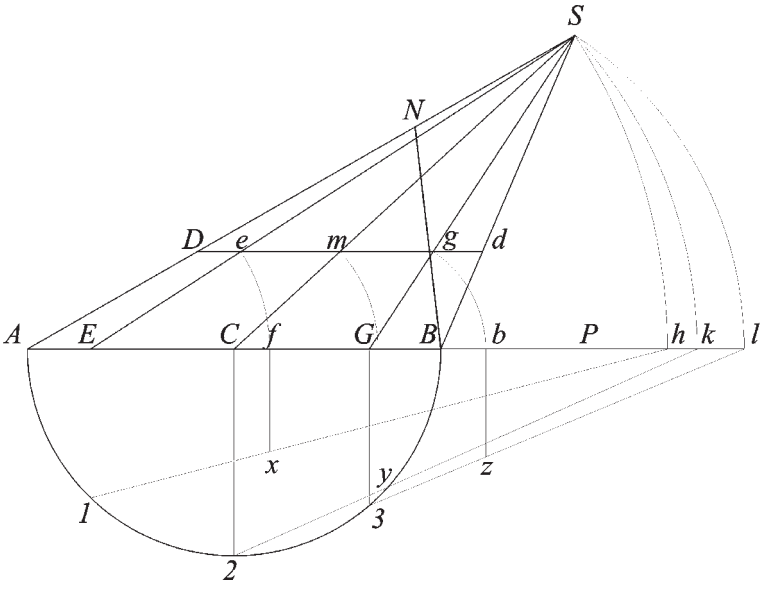


Fig. 179. Metodo per trovare i punti sulla superficie data dal vertice

dritte dalla superficie, se non quelle che sono portate dal vertice alla circonferenza della base, che tutte queste linee sono nel cono retto, e non uguali in quello scaleno. Se esse sono uguali, chi ne ha una, le ha tutte; ma se sono ineguali, non si può trovarle attraverso la proiezione sul triangolo per l'asse *ASB*, come si sono trovati qua davanti gli angoli del cilindro sul parallelogramma attraverso l'asse, perché le linee *ES,CS,GS*, sono dei lati del triangolo rettangolo, dunque il lato del cono che corrisponde a loro, è l'ipotenusa. E' chiaro che trasportando, per esempio, *ES* in *Eh* , il lato *Er* resta immobile all'angolo retto su *AB*, la linea *1h* rappresenta il lato del cono, e *1x* la distanza della base da una sezione parallela, fatta da un piano perpendicolare al triangolo attraverso l'asse *ASB*, e parallelo alla base.

Che gli angoli *SE1, SC2, SG*3 siano retti, è una conseguenza della costruzione, perché il piano del triangolo per l'asse *ASB*, passa attraverso la linea *SP* che è stata fatta perpendicolare al piano della base *AB*, cioè ad un semicerchio *A2B*; di conseguenza tutte le linee *E1,C2,G3* perpendicolari alla comune sezione *AP* di questi due piani sono perpendicolari a tutte quelle che sono tracciate nel piano *ASP*,come *SE, SC, SG*, etc.

Noi abbiamo supposto in questo problema che il cono sia retto, o inclinato

su una base circolare, ma se non si avesse che una base ellittica, e si volesse tracciare un cerchio sul cono, bisognerebbe cercare l'angolo di inclinazione di un piano, tagliando questo nella base, in modo che la sua sezione sia un cerchio, in modo tale da avere il profilo del triangolo attraverso l'asse del cono ellittico. Siccome questa proposizione non è stata data da nessuno degli autori del trattato delle sezioni coniche, che io conosca, e siccome io avevo trovato delle grandi difficoltà, sono ricorso al celebre *M. Bernoulli*, uno dei primi matematici del nostro secolo, che ha voluto gentilmente darmi delle soluzioni. Lui è convenuto al fatto che questo problema fa parte di quelli che, quando non si prendono bene, portano in un calcolo difficoltoso, conducono a delle equazioni in quattro dimensioni, e che la soluzione è una cosa nuova.

Questo grande uomo che ha la fortuna di avere un figlio che cammina sui suoi passi nella scienza, come ha fatto capire dopo poco con il suo operato, e che ha preso il premio dell'accademia di scienze di Parigi. Avendogli parlato della mia questione, il degno figlio l'ha risolta in un'altra maniera, di cui ha voluto farmi partecipe. Noi vedremo inseguito quella di suo padre, che io metto qua parola per parola, persuaso che ciò che viene dai grandi uomini deve essere conservato senza alterazione. In questa idea avrei copiato per intero la lettera che mi ha fatto l'onore di scrivermi, se non fosse disseminata di espressioni così lodevoli sulla mia opera, che non potrei ripeterle senza peccare di modestia. Bisognerebbe almeno per me togliere le parole di gentilezza, e benevolenza, di cui mi onora ,ed alle quali sono estremamente sensibile.

PROBLEMA XXXIII

Sia dato un cono ASB retto, su una base ellittica ADB, di cui AB è la piccola asse, dunque il piano deve essere concepito perpendicolare al piano del triangolo isoscele ASB; si chiede la posizione di un piano inclinato sull'ellisse, la cui sezione nel cono sia un cerchio.

1°.Chiamerò *il grande lato* del cono ellittico la retta *SD,* (o S*d*) tracciata dal vertice *S* all'estremità *D* del grande semiasse dell' ellisse , di cui il piano deve essere considerato come perpendicolare al piano del triangolo isoscele *ASB.*

DEFINIZIONI

2. *Il piccolo lato* del cono sarà *SA* tracciato dal vertice *S* all'estremità *A* del piccolo asse dell'ellisse.
Siano nominati:
L'altezza o l'asse del cono *SC*
= a
La piccola semiasse dell'ellisse *CA* o *CB.*
= b
Il grande semiasse dell'ellisse *CD.*
= c

Il grande lato del cono *SD*= V*cc+aa= n*, la differenza del quadrato di *CD* e del quadrato di *CA*,cioè, *cc-bb=hh,* per cui cc-bb=h. Per fare una linea dritta uguale ad *h* in *a*v *cc-bb*, non c'è che da descrivere un semicerchio su *CD*, e inscriverci la corda *Ca* uguale a *CA,* tracciando in seguito l'altra corda *Da*,*si* avrà *Da*=v*cc-bb=h,* ossia nell'angolo retto *ACD*, tracciata una ipotenusa *AF* uguale a *CD*, si avrà *CF=vcc=bb=h.* Notate che il punto *F* sarà uno dei fuochi dell'ellisse.

Soluzione. Essendo il piano dell'ellisse *ADB,* perpendicolare al piano del triangolo *ASB,* io cerco la posizione di una linea dritta *yY* nel triangolo isoscele *ASB,* il quale passa per il centro *C* dell'ellisse, e sul quale si traccia un piano anche esso perpendicolare al piano *ASB.* Voglio che il piano innalzato faccia nel cono, attraverso la sua sezione, un cerchio, di cui il diametro sarà *yY,* e *CD* un'ordinata comune all'ellisse e al cerchio. Poiché il piano dell'ellisse ed il piano del cerchio si tagliano nella retta *CD*, bisognerebbe dunque attraverso le proprietà del cerchio, che *CD* sia la media proporzionale tra i due segmenti di diametro *Cy* e *CY*, e pertanto che il rettangolo *Cy* x *CY* di questi due segmenti sia uguale al quadrato dell'ordinata *CD,* ed è questo che bisognava eseguire.

Avendo prolungato *Yy* fino ad *SE* perpendicolare a *SC,* sia *SE=x:,* si avrà a causa dei triangoli simili *SyE* e *AyC, SE:AC::Ey:yC*, e componendo *SE+AC:AC::Ey+Yc* o *EC:yC,* cioè, *x+b: v:xx+aa:yC= bv xx+aa/x+b.* Lo stesso a causa dei triangoli simili *SYE, BYC,* si avrà *SE:BC::EY:CY*, e dividendo *SE-BC:BC::EY-CY* o *EC:yC*, cioè, *x-b:b:: vxx+aa:ca= b v xx+aa/x-b*; il rettangolo *yCXCY* dovendo essere uguale al quadrato del *CD*, si avrebbe prima questa uguaglianza *b v xx+aa/x+b X bv xx+aa/x-b o bbxx+bbaa/xx-bb=cc,* da dove si trova attraverso la riduzione *xx= bbcc+bbaa/cc-bb =bbmm/hh,* per conseguenza *x=bm/h ; quello che bisognava dimostrare.*

Costruzione geometrica.

Fatta questa analogia come *h o v CD²-AC² o CF* è *a b* o *AC,* così *m o SD* è ad un quarto . Io dico che se voi prendete *SE* uguale a questo quarto, e voi tracciate attraverso il centro *C* la retta *EY* , la parte *yY* intercettata tra i due piccoli lati *SA* e *SB* prolungati ,sarà la posizione e la grandezza del diametro cercato, sul quale si innalza un piano perpendicolare al triangolo *ASB*. La sezione di questo piano, sarà nel cono un cerchio, così tutti gli altri piani paralleli a questo faranno attraverso le loro sezioni tutto come gli altri cerchi.

SCOGLIO

Se vi piace di più trovare trigonometricamente l'angolo dell'inclinazione della sezione, sapendo che l'angolo *ACy* è uguale all'angolo *E,* voi non dovete fare altro che questa analogia, come *ES* è a *SC*, e così il seno totale è la tangente dell'angolo *ACy.*

COROLLARIO

Si trova adesso tutto ciò che si vuole, per esempio, *Cx,* o la distanza dal centro dell'ellisse al centro del cerchio. Da *Yy=yC+CY=b v xx+aa/x+b + bv xx+aa/x-b=* (sostituendo il valore di x) *cn/m+h + cn/m-h = 2mcn /mm-hh* =(sostituendo il valore di *mm-hh* che è *=aa+bb=nn*) 2*mcn/ mm-hh=2mc/n,* dunque la metà *mc/n=* Y*x* o *yx,* e tagliando *Cy,* dove *cn/m+h* resta *Cx=mc/n – cn/m+h=mmc –nnc-hmc/mn-bn=*(sostituendo per *mm-nn* il suo valore *cc-bb* o *hh*) *hhc+bmc/mn+hn=hc/n:* così *Cx*

sarà il quarto proporzionale di *n, h* e *c*,cioè, di *SAv CD² -AC²* e *CD* , o di *SA,CF* e *CD*.

Ciò che voi trovate (ed è sempre *M. Bernoulli* che parla in risposta), che *il quarto della metà del diametro yY che si cerca, è uguale ad un quarto di metà della grande asse CD, e della base più al quarto di Cx*, non è altra cosa che una applicazione di una proporzione del II libro di Euclide, che è una linea diritta come *yY* essendo tagliata ugualmente in *x*, ed inegualmente in *C*, il quarto della metà *yx* è uguale al rettangolo dei segmenti ineguali *yC* x *CY* più al quadrato dell'intercezione *Cx*. Poichè come io ho rimarcato sopra, il rettangolo *yC* x *CY* deve essere uguale al quadrato *CD*, dunque si avrà anche *Yx²* o *yx²=CD²+ cx²*, come voi avete trovato. Questo è ancora confermato da quello che ho appena dimostrato in ultimo luogo , dove ho trovato Y*x= mc/n, Cx=hc/n* e *CD=c*. Bisogna dunque far vedere che effettivamente *mmcc/nn* sarà *=cc+hhcc/nn=nncc+hhcc/nn;* è chiaro che *mm-nn* essendo uguale *cc-bb=hh*, avremo *nn+bb=mm* dunque *nncc+hhcc/nn* diviene = *mmcc/nn;* inoltre abbiamo *Yx²=mmc/nn* e anche *CD² + Cx²=mmcc/nn* di conseguenza *Yx²=CD² + Cx²*.

Voi dite, signore, che lei non conosce *CX*, perché l'angolo *ASX* è sconosciuto;ecco *CX* trovato, perché è uguale *hc/n*, indipendentemente dall'angolo *ASX*. Se comunque per curiosità, si vuole trovare questo angolo io lo prenderò in questo modo.

Nel triangolo *ACy*, si è trovato l'angolo *ACy*, l'angolo *CAy* è dato, il lato *AC* è anche esso dato, di queste tre cose date si trova *CyA*, il lato *Ay*, dunque nel triangolo *xyS*, si avrà l'angolo *xyS*, e i due lati *xy* e *Ys*, questa serve a trovare l'angolo che si cerca.

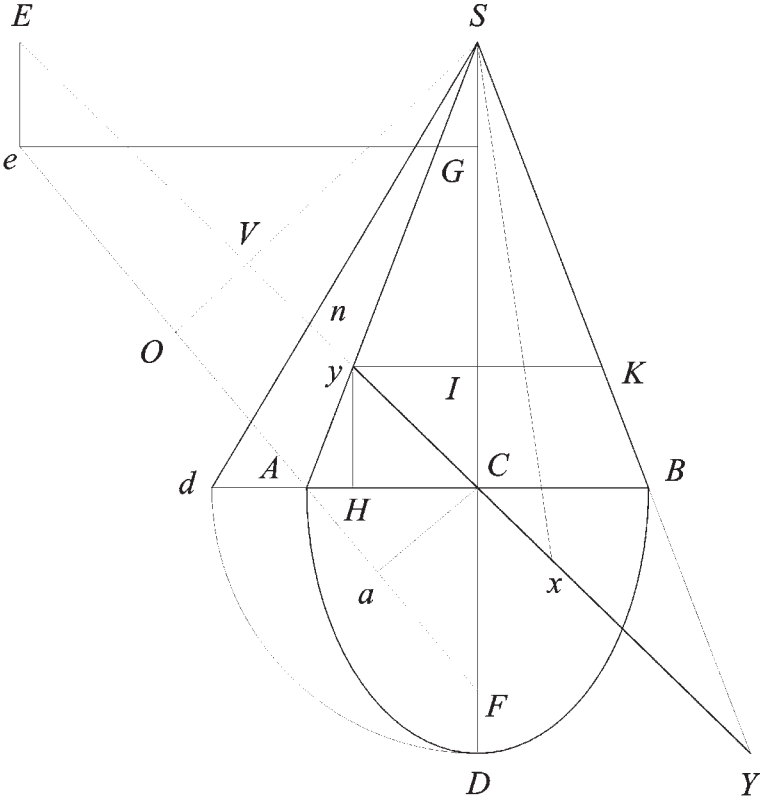
Quanto al lato *Ay*, noi lo troviamo immediatamente attraverso la prima fila *militu* dei due triangoli *SyE* e *CyA* , facendo come *SE+AC* sta ad *AC*, così *Sy+Ya* o *SA* sta ad *Ay*,cioè, *x+b:b::nnb/x+b=Ay*, e mettendo per *x* il suo valore *bm/b* si avrà *nb/x+b* o A*y=hn/m+h*. Facendo dunque come *m+h* o *SD+Cd* è *h* o *Cd*, così *n* o *SA* è un quarto, questo quarto sarà quello alla quale bisogna prendere *Ay* uguale, e tracciando in seguito attraverso il centro dell'ellisse *C*, la retta *yCY*, questa retta sarà ancora il diametro del cerchio cercato; ciò è quello che ho voluto rimarcare in questa occasione.

Supponendo al posto di un cono retto, un cono scaleno o obliquo su una base ellittica, si risolverà il problema attraverso lo stesso metodo, e con la stessa facilità.

Altra soluzione dello stesso problema di M.Jean Bernoulli il figlio.

Supposto che il punto sia il punto *y* cercato nella linea *AS*, attraverso il quale il piano in questione deve passare.

Avevano tracciato questo punto alla linea *yH* perpendicolare alla base *AB* del triangolo *ASB*, e la linea *yK* parallela alla stessa base che unisce i due lati *SA* e*SB* di questo triangolo, io nominerei:
SA=SB(il piccolo lato del cono)=*d*
SD (il grande lato del cono) = *e*
CD(Il semiasse grande dell'ellisse) =*a*
AC=CB(la semi asse piccola) =*b*
FC (La distanza del fuoco *F* al centro *C* dell'ellisse) = *f*
Ay(La distanza dell'estremità *A* della piccola asse al punto cercato) *y=x*.
Essendo state fatte queste dimostrazioni, avrei:
SC(l'asse del cono) *=v dd-bb* e *SA(d):SC(vdd-bb)::Ay(x):IC*, così *IC=yH=xv dd-bb*, ugualmente *SA (d):AC(b)::Sy(d-x):yI*. Avremo *yI= =IK=HC=bd-bx/d*, o *C²=Yh+HC²*, dunque *yC v xx-2bbx+bb/d*. Per trovare *CY*, faccio questa analogia *yK=2yI: CB::Yy:Cy*, e dividendo *yK-CB(bd-2bx/d):CB(b)::yY-CY=Yc(xx-2bbx+bb/d):CY*, noi troveremo *CY=vd xx-2bbx/d +bb/d-2x*.
Adesso poiché il cerchio cercato e la base del cono si tagliano nella linea *CD* ,questa sarà la corda del cerchio, la linea *yY* ne sarà un'altra, ed anche essa sarà un diametro, che ha applicato il semi asse grande *CD*, dunque il rettangolo dei segmenti di questo diametro dove *yC* x *CY* sarà uguale a *CD²*, cioè *vdxx-2bbx+bbd/a-2x=aa*, riducendo *bb* da una parte e dall'altra *dxxx/a-2=aa-bb=(*per la proprietà dell'ellisse) *CF²=ff*, dunque *xx=-2ffx/d +ff* e *x=-ff/d+f/dv ff+dd* o (sostituendo per *ff+dd* il suo valore *e)x=fe-ff/d* facendo dunque come *d* o *SA* è a *f* o *FC*, così *e-f*, o *SD-FC*, è un quarto ,questo quarto sarà quello cercato.
I corollari che si potranno trarre da questa soluzione, sono gli stessi di quella precedente.



Per ridurre queste due soluzioni alla pratica del righello e del compasso, che è la più comoda per gli artisti, si opererà come nella prima .
Dal centro *C* e *CD* metà della grande asse per il raggio, si farà l'arco *Dd* che incontrerà *BA* prolungata in *d* , se si tira *dS*, questa linea rappresenterà il grande lato del cono.

Per il fuoco *F* e il punto *A*, avendo tracciato l'estremità della piccola asse indefinita *FAe*, si porterà su questa linea la lunghezza del grande lato del cono *Sd*, di *F* in *e*, da dove si porterà *eg* parallelo ad *AB*, che taglierà *CS* in *g*, dal vertice *S* si porterà la linea *SE* parallela e uguale a *eg*. Infine attraverso i punti *E* e *C* si traccerà *EY* che taglierà i lati *SA* e *SB* prolungati in *y* e *Y*, la parte *yY* sarà il diametro del cerchio che si cerca, la quale essendo divisa in due parti uguali in *x*, avrà per centro il punto *x*.
Se di questo stesso punto *x* per *S* si traccia *xS*, questa linea sarà l'asse del cono.

Per la seconda soluzione, avendo tracciato una linea *Ae*, facendo un angolo qualunque con *AS*, si porterà la lunghezza *CF*, distanza dal centro al fuoco dell'ellisse, di *A* in *o* [12] su *Ae*, e da *d* in *n* su *dS* , poi facendo *SV* uguale a *Sn* su *oS*, si traccerà attraverso i punti *V* e *C* la linea*VY*, che taglierà *AS* in *y*, la dove è il punto cercato. Così la linea *yY* sarà il diametro del cerchio richiesto, che si traccerà sulla superficie del cono ellittico nello stesso modo in cui l'ellisse è sul cono retto circolare, di cui parleremo dopo questa descrizione dell'ellisse sul cilindro.

USO

Questo enunciato serve per i tratti delle volte coniche chiamate trombe, sia diritte che oblique, cioè, le basi (che sono le loro facce) sono perpendicolari od oblique al loro asse, in quanto le giunture di intradosso e le facciate delle strombature sono sempre dei cerchi o porzioni di cerchi paralleli a questa base.
D'altra parte, allorché le facce non fossero piane come quelle delle trombe sul cono, che sono angolari, convesse o concave, dei girotondi o dei giocavi, le onde come quelle di anet. Bisogna sempre per facilitare l'esecuzione supporre una base circolare del cono retta o obliqua, della quale, come un limite, si portano gli allungamenti al di fuori, o gli indietreggiamenti in dentro, delle parti eccedenti o delle parti che vengono a meno delle concavità o delle convessità delle facce

[12] nella figura la lettera o è maiuscola

Sulla descrizione dell'ellisse sulle superficie concave o convesse del cilindro e del cono.

PROBLEMA XXXIV

L'asse maggiore di un ellisse con un punto alla superficie del cilindro di cui la distanza a uno degli assi è conosciuta, ci si tracci l'ellisse.

Si possono trovare i punti necessari per descrivere un ellisse sulla superficie del cilindro in due modi: o su dei cerchi paralleli alla base, o sulle delle linee diritte parallele all'asse. Siccome la prima è la più lunga e la più complicata delle operazioni, perché oltre a molti cerchi che bisogna descrivere sulle superficie curve è necessaria ancora almeno una parallela all'asse del cilindro, noi preferiamo la seconda ***(Fig. 176 b)***.

Se il punto dato, sta ad una delle estremità della grande asse, per esempio,

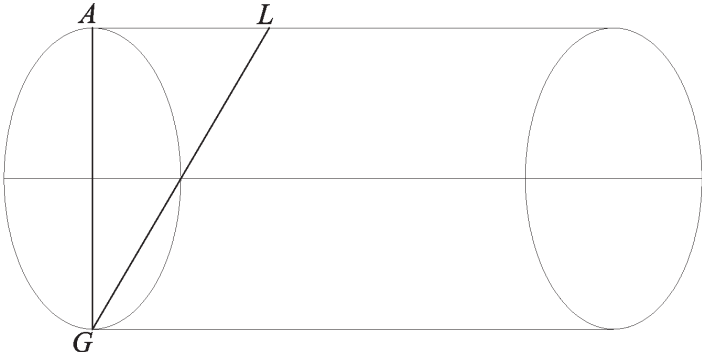


Fig. 176b Costruzione dell'ellisse sulla superficie del cerchio mediante linee diritte parallele all'asse

si farà su una superficie piana a parte ***(Fig. 178)*** un angolo *lga*, uguale a quello dell'asse del cilindro sulla base, retto se il cilindro è retto ed

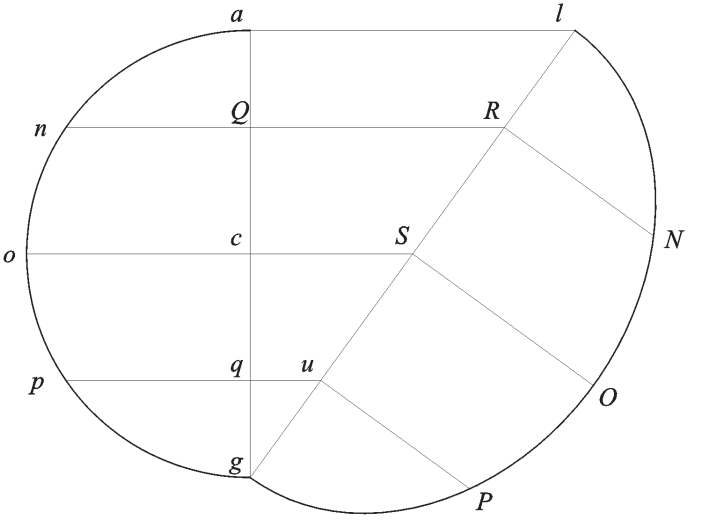


Fig. 178 Costruzione sul piano per la determinazione dell'ellisse sul cilindro.

acuto o ottuso se è scaleno. Su uno dei lati di questo angolo come a*g*, si porterà il diametro del cilindro, poi dal punto *g* preso come centro, si traccerà un arco del cerchio, che taglierà il lato *al* in *l.* La linea *gl* sarà la posizione dell'asse dell'ellisse nel parallelogramma, attraverso l'asse del cilindro poi si descriverà su *ag* come diametro, il semicerchio *anopg* , che si dividerà in tante parti uguali quante se ne vorranno avere dei punti dell'ellisse, come qui in quattro, o i punti *nop,* attraverso i quali si porteranno delle perpendicolari su *ag* o si prolungheranno fino al diametro *gl* . Le linee comprese tra i diametri *ag* e *gl* saranno le distanze del contorno del cerchio della base all'ellisse richiesta.
Si trasporteranno sul contorno della base del cilindro ***(Fig.176 c)***, le divisioni *a, n, o, p, g* della ***Figura 178***, e attraverso questi punti si tireranno delle parallele all'asse , sulle quali si porteranno le distanze *QR* , *cS* [13], *qu* della ***Figura 178***, e sia avranno sulla superficie del cilindro, i punti *L N O P G*, attraverso i quali si traccerà a mano l'ellisse richiesta.
Se il punto dato è da un'altra parte, piuttosto che essere all'estremità della grande asse, si farà la stessa costruzione, ma si chiederà una preparazione per la posizione del cerchio che deve rappresentare la base del cilindro.

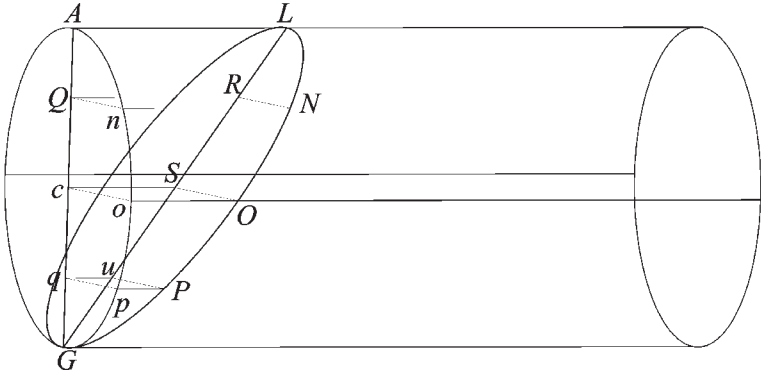


Fig. 176 c Rappresentazione dell'ellisse di sezione

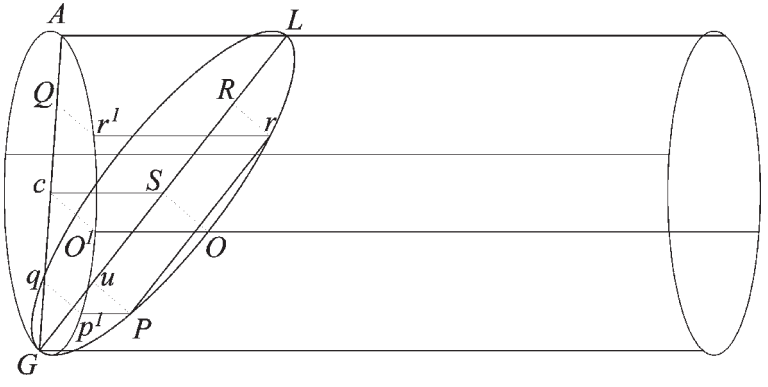


Fig. 176 d Secondo metodo per rappresentare l'ellisse di sezione

Si descriverà sul grande asse dell'ellisse, una semi ellisse, o solamente il quarto dell'ellisse, dove si trova il punto dato *P*, di cui si conosce per supposizione l'arco *Pg* [14], poi avendo tracciato sulla superficie del cilindro, attraverso questo punto una linea *rP*, parallela all'asse, ci si porterà la distanza *qu*, uscita dall'ordinata P*u*, e attraverso il punto *P*[1], si traccerà un cerchio sulla superficie del cilindro che rappresenterà quello nella base e si continuerà come nel caso precedente ***(Fig. 176 d)***.

DIMOSTRAZIONE

Il grande asse dell'ellisse deve sempre essere nel piano del parallelogramma, attraverso l'asse del cilindro, perché esso divide l'ellisse in due parti uguali, come questo parallelogramma divide il cilindro. Ora, il triangolo *lga* rappresenta una parte del piano di questo parallelogramma, ed il piano dell'ellisse, anche esso perpendicolare a quello della sezione attraverso l'asse del cilindro. Dunque le distanze dei punti del contorno della base a quella dell'ellisse, presi su delle parallele all'asse, sono uguali a quelli dei punti corrispondenti dei diametri dell'uno e dell'altro, come sono *uq, c*S, *QR,* poiché si può supporre ad ogni punto *p, o, n*, una sezione perpendicolare al piano *gla*, seguendo le linee *pq, O* [15]*c*, *R* [16]*Q,* che saranno anche dei parallelogrammi dove le ordinate dell'ellisse *uP* e *SO*, *RN* saranno dei lati paralleli, perché i due piani della base e dell'ellisse sono perpendicolari al terzo *gla*. Dunque (attraverso la nona del IX libro di Euclide) le linee *pq* e *uP* saranno uguali tra di loro nello stesso modo che le distanze *qu* e *Pp*, non in questa ***figura 178***, ma alla superficie del cilindro, ***figura 176***, così le altre *cS* e *oO*,*QPL* e *lnN* anche se non lo sono nella figura, dove questi due piani non possono essere rappresentati nelle loro vere situazioni, uno rispetto all'altro, perché devono essere nello spazio, perpendicolarmente al piano *gal*; di conseguenza l'operazione è esatta.

USO

Questo problema è d'uso molto frequente nel taglio delle pietre. Poichè la maggir parte delle volte sono delle volte a botte, spesso obliqua alla testa, o perchè non sono orizzontali, come le discese, o perchè il muro di facciata è in scarpa, o perchè la loro direzione è obliqua a questo muro al contrario dei luoghi. In tutti questi casi, si suppone una sezione perpendicolare alla volta a botte, di cui chiamiamo *l'arco retto*, dal quale si fanno partire sulle parallele all'asse della volta a botte, le distanze che eccedono l'arco retto per formare una faccia ellittica; cosa che si vedrà più volte nel libro IV.

PROBLEM A. XXXV.

Dato un punto sulla superficie del Cono, che sia all'estremità dell'asse maggiore dell'Ellisse dato, dove da una ordinata conosciuta, si traccia

[13] La lettera *c* nel testo originale è maiuscola

[14] La lettera *G* nel testo originale è minuscola

[15] La lettera *o* nel testo originale è maiuscola

[16] La lettera *r* nel testo originale è maiuscola

l'Ellisse sulla superficie curva del Cono.

Poiché sull'asse maggiore di un Ellisse, si ha sempre la sua posizione nel Cilindro, in quei punti in cui si posizionano le due estremità, sarà sempre uguale. Non è lo stesso nel Cono, se il punto di posizione non è stato determinato. L'Ellisse che si può trovare con l'asse maggiore dato può variare, il suo asse minore può essere più o meno grande, e a seconda se sarà inclinato alla base, l'Ellisse sarà più o meno differente dal cerchio di questa base, a meno che non abbia il punto di posizione dell'estremità dell'asse maggiore. Bisogna inoltre conoscere l'asse minore, o una ordinata, in qual caso si troverà la situazione dell'asse maggiore dell'Ellisse nel triangolo attraverso l'asse del Cono.

Si inizierà ***(Fig. 181 a)***, ricercando il parametro dell'asse dato *EL* e dell'ordinata conosciuta; come abbiamo detto al problema XIV questo è facile. Si inscriverà in seguito, il triangolo attraverso l'asse del Cono *bSa* in un cerchio *Sba*, in seguito si cercherà una quarta proporzionale all'asse dato, al suo parametro ed al lato *Sa*, che darà sulla *Sa*, la lunghezza *aP*. Attraverso il punto *P* si porterà *PD* parallela a *ba*, che taglierà il cerchio al punto *D*, da dove e per il punto *S* si traccerà l'indefinita *SDF*, sulla quale portando la lunghezza dell'asse dato di *S* in *KF*, si porterà attraverso il punto *K*, la linea *KL* parallela a *Sb*, e attraverso il punto *L* la linea *LE* parallela a *SK*. Questa linea *EL* sarà l'asse dato nella posizione, dove deve essere affinché l'Ellisse sia nella posizione in cui la si richiede rispetto alla superficie del Cono; dunque *bSa* è la sezione del triangolo attraverso l'asse, al quale il piano che taglia il Cono deve essere perpendicolare, questo procedimento è concluso.
Sia ***(Fig. 183 a)***, il triangolo attraverso l'asse del Cono *BSA*, l'asse dell'Ellisse *EL* e l'asse del Cono *SC*, dal punto *C* mediano della base *BA*, si descriverà il semi-cerchio *BMA*, e dei punti *E* e *L*, estremità dell'asse dell'Ellisse avendo abbassato delle linee *Ee*, *Ll* perpendicolari a *BA*, o

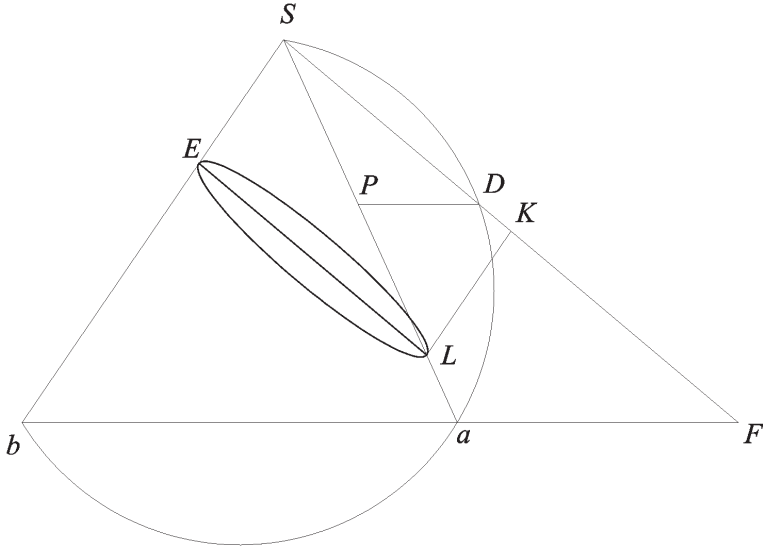


Fig. 181 a Rappresentazione dell'ellisse sulla superficie del cono

parallele all'asse *SC*, si dividerà l'intervallo ben in due parti, ugualmente in *c*, e si descriverà da questo punto come centro, e per raggio *ce* il semi-cerchio *erstl*, che sarà la proiezione della metà dell'Ellisse proposta.

Si prenderanno in seguito sul lato *BE* tante parti uguali, quante se ne vorranno dei punti alla circonferenza dell'Ellisse, attraverso i quali si

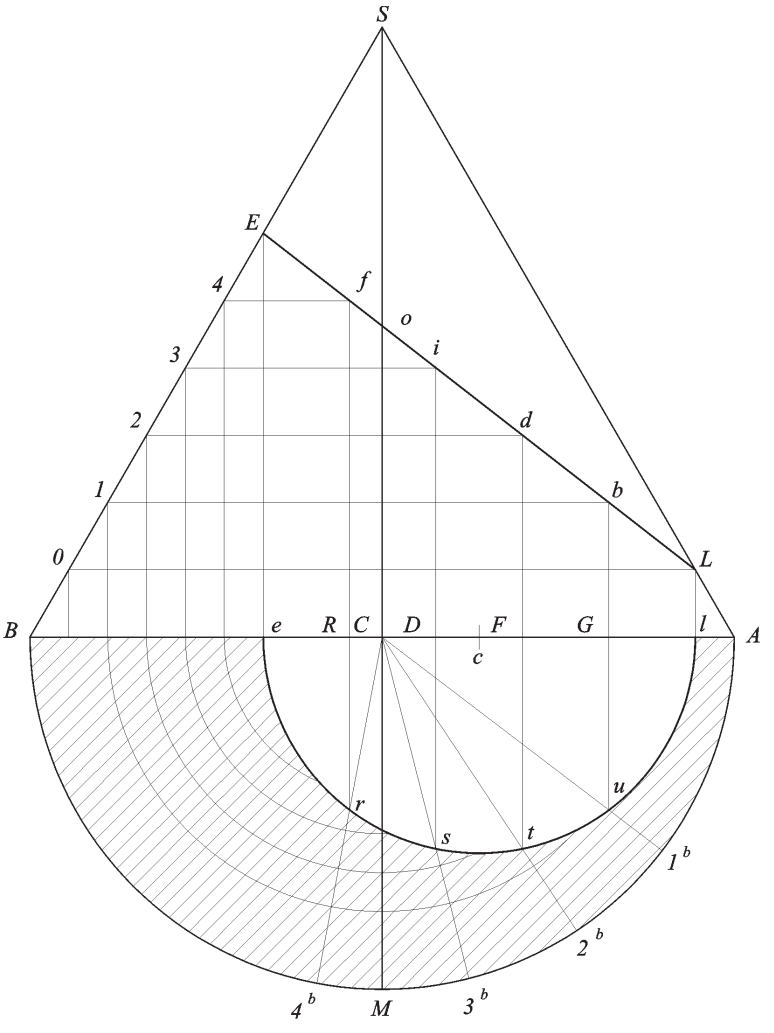


Fig. 183 a Rappresentazione della sezione ellittica in proiezione ortogonale

porteranno delle parallele a *BA*, come *4f*, *3i*, *2d*, *1b*, *0L*, fino all'incontro dell'asse *EL* , e attraverso i punti f*i*, *db*, si caleranno delle perpendicolari alla base *BA* prolungate fino al cerchio *esl*, come *bu*, *dt*, *is*, *fr* che taglieranno la sua circonferenza ai punti *r, s, t, u*, attraverso i quali e attraverso il centro *C* si tracceranno le linee *Cr4*^{b}, *Cs3*^{b}, *Ct2*^{b}, *Cu1*^{b}, che daranno sulla base del Cono i punti *4*^{b}, *3*^{b}, *2*^{b}, *1*^{b}, attraverso i quali e attraverso il vertice *S* si tracceranno delle linee rette sulla superficie che non è stata segnata nella ***Figura 183***, ma bensì nella ***Figura 185***, che

avrebbe dovuto essere di grandezza uguale all'altra, se il posto l'avesse permesso. Queste linee serviranno per trovare i punti della circonferenza dell'Ellisse, portando le divisioni corrispondenti alla loro origine, per esempio *B4* su *4S* in *4r, B3* su *3S* in *3s, B2* su *2S* in *2t, B1* su *1S* in *1u*, e si avranno cosi dei punti alla superficie del Cono, attraverso i quali portando una linea curva a mano, si avrà l'Ellisse proposta [17] .

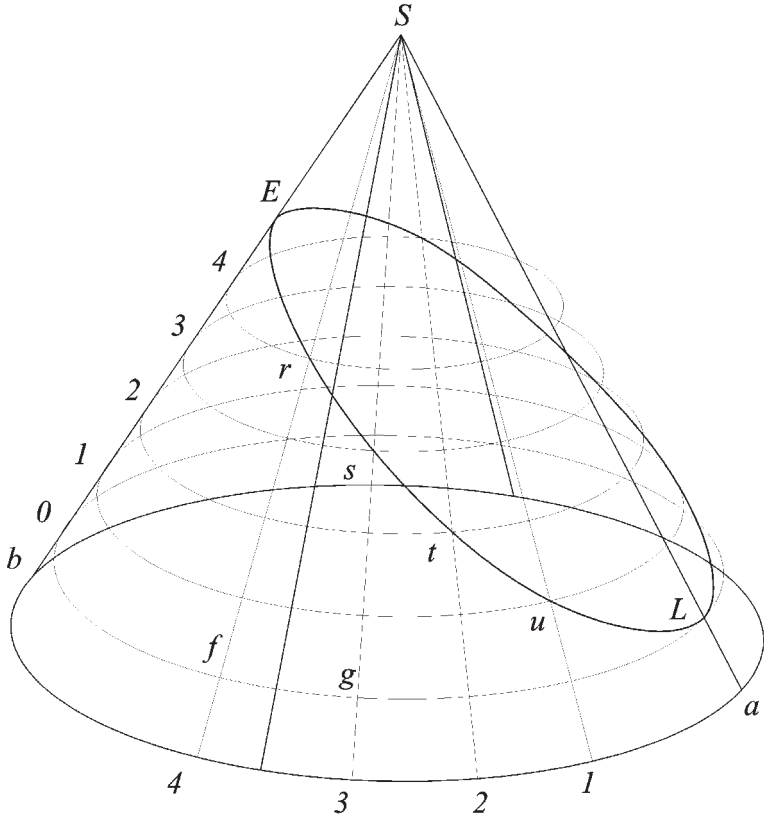


Fig. 185 Vista tridimenzionale.

DIMOSTRAZIONE

Ora per la posizione dell'asse *EL* , bisogna dimostrare che deve essere al suo parametro come *aS, aP*.

[17] Nella figura 185 della Planche 16 ci sono delle lettere che non sono leggibili e che non sono indicate nel testo; nell'illustrazione originale i cerchi orizzontali sono 4, mentre nel disegno inserito nel testo sono 5 sulla base della figura correlata 183

Se si suppone un piano che taglia il Cono parallelamente alla base, come in *mn*, il cerchio che si farà attraverso questa sezione avrà una ordinata *GI* comune con l'Ellisse *EIL*, all'intersezione dei due piani del cerchio e dell'Ellisse; dunque *GI=nGxGm* e *LgxGE*: GI^2*:: EL* sta al suo parametro; o a causa dei paralleli *LE* e *SF*, che sono i triangoli simili *LGn*, Sfa, si avrà *LG: Gn:: SF: Fa*, e *EG : Gm:: SF: Fb*, dunque *SF: FaxFb*:: *EL* sta al suo parametro; o a causa del cerchio *SDab, FDxDS=FaxFb*, dunque l'asse *EL* sta al suo parametro::*SF: FDxFS:: aS: SP, ciò che bisognava dimostrare.*

In secondo luogo, per dare ragione del modo con il quale sono stati trovati i punti alla circonferenza dell'Ellisse.

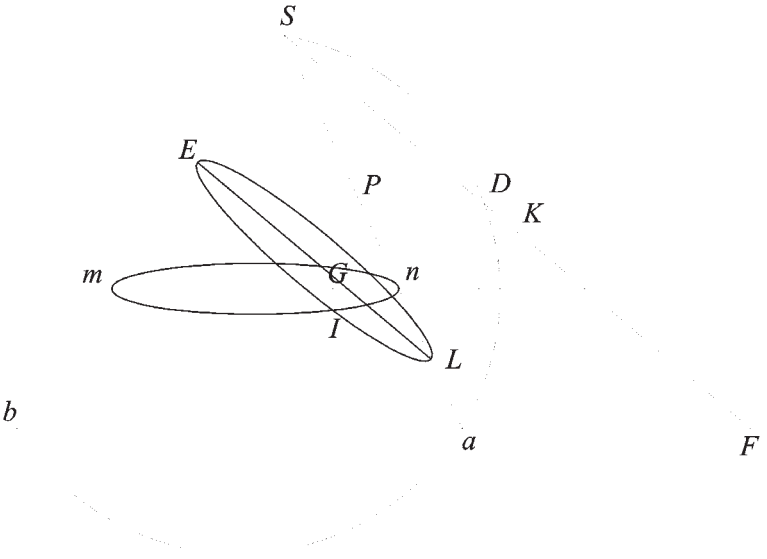


Fig. 181 b

E' chiaro che quello che noi abbiamo detto della proiezione, nel Teorema, che quella dell'Ellisse *EL* è un cerchio, o la sua metà un semi-cerchio *esl*, e che si sono supposti dei piani perpendicolari a quello del triangolo attraverso l'asse *BSA*, e paralleli a questo asse *SC* del Cono, le loro intersezioni con il piano dell'Ellisse, si farà seguendo le ordinate che sono uguali nell'Ellisse e nel cerchio, che è la sua proiezione. Poiché queste sono comuni alle due sezioni, allora i punti *r, s, t, u* sono nella loro posizione orizzontale, a riguardo del punto *C* che rappresenta l'asse.

Non resta più, che determinare la loro altezza al di sopra della base *BA* del Cono, la quale deve essere trovata sulle linee alla superficie che passano attraverso i punti *r, s, t, u*, e attraverso il vertice S, le quali sono rappresentate attraverso la proiezione $Cr4^b$, $Cs3^b$, $Ct2^b$, $Cu1^b$. In quanto non si possono avere queste altezze verticalmente, ma sulla superficie inclinata del Cono, bisogna concepire più piani paralleli alla base, e passanti attraverso i punti *foidb*, a questo punto le sezioni faranno dei cerchi che taglieranno le linee tracciate attraverso i punti della base 4^b, $M\ 3^b$, 2^b, 1^b, in dei punti che saranno alla circonferenza dell'Ellisse, poiché

taglieranno tutta l'ellisse in due punti, e che le linee 4^bS, 3^bS, 2^bS, 1^bS, la taglieranno anche ai punti delle ordinate segnate. Dunque ciascuna intersezione dei cerchi e delle linee corrispondenti, che tracciano, come i cerchi, la loro origine dei punti *foidb*, sarà uno dei punti dell'Ellisse, ciò che bisognava trovare.

Se il Cono è retto, le divisioni *E4, 34, 42* sono uguali su tutti i lati tracciati dalla base del Cono al suo vertice S. In tal modo, si può, senza tracciare i cerchi, portare questi intervalli su ogni lato del Cono tracciato dai punti corrispondenti 4^bM3^b, 2^b, 1^b, dalla base al vertice, visto che i cerchi paralleli li tagliano tutti in parti uguali.

Se il Cono è scaleno, le divisioni non saranno più uguali, ma soltanto proporzionali, e allora non ci si può dispensare dal tracciare i cerchi per avere i punti della loro intersezione con i differenti lati più o meno inclinati, seguendo l'obliquità del Cono.

USO

Questo problema è una introduzione alla costruzione delle trombe coniche in scarpa, o in piombo, o oblique, di cui le facce sono Ellittiche.

PROBLEMA XXXVI

Dato un punto alla superficie di un Cono per vertice di una Parabola, descrivere questa curva sulla superficie concava o convessa.

Sia ***(Fig. 184 a)***, il triangolo *ASB*, la sezione del Cono dato, attraverso il suo asse *SC*, e attraverso il punto dato *P* tracciato su una superficie piana, si porterà per questo punto *P* una linea *Pa* parallela al lato *SB*, che taglierà la base del triangolo in *a*. Dal punto *C*, nel mezzo di questa base, per il centro e per raggio *CA*, si descriverà un semi cerchio *ByA* che rappresenterà la metà della base del Cono. In seguito, avendo diviso la linea *Pa* che rappresenta l'asse della Parabola chiesta, in altrettante parti uguali o ineguali, in modo che si abbiano dei punti alla sua circonferenza, come anche ai punti *q, r, s*, si porteranno, attraverso questi punti, delle parallele ad *AB*, che tagliranno l'asse del Cono *SC* ai punti *0*, 1^c, 2^cs, e il lato *SA* ai punti *PtUv* [18] , dai quali si abbasseranno su *BA* delle perpendicolari che la taglieranno ai punti *pTu*V [19], e dei punti *qrs*, di altre perpendicolari o parallele all'asse prolungate al di sopra di *BA*. Infine dal punto *C* come centro e per raggi le lunghezze *CT, Cu, CV,* si descriveranno degli archi di cerchio concentrici *TQ, uR, CV* che taglieranno le parallele all'asse *SCS* ai punti *Q, R, S*. La linea curva portata attraverso questi punti *PQRSa,* nel semi cerchio della base del cono *ByA*, sarà la proiezione della parabola chiesta, per mezzo della quale si traccerà sulla superficie concava o convessa del cono, come si sta per dire.

Sia (***Fig.182***), il cono *bSa* uguale a quello della ***Figura 184***. Questo non

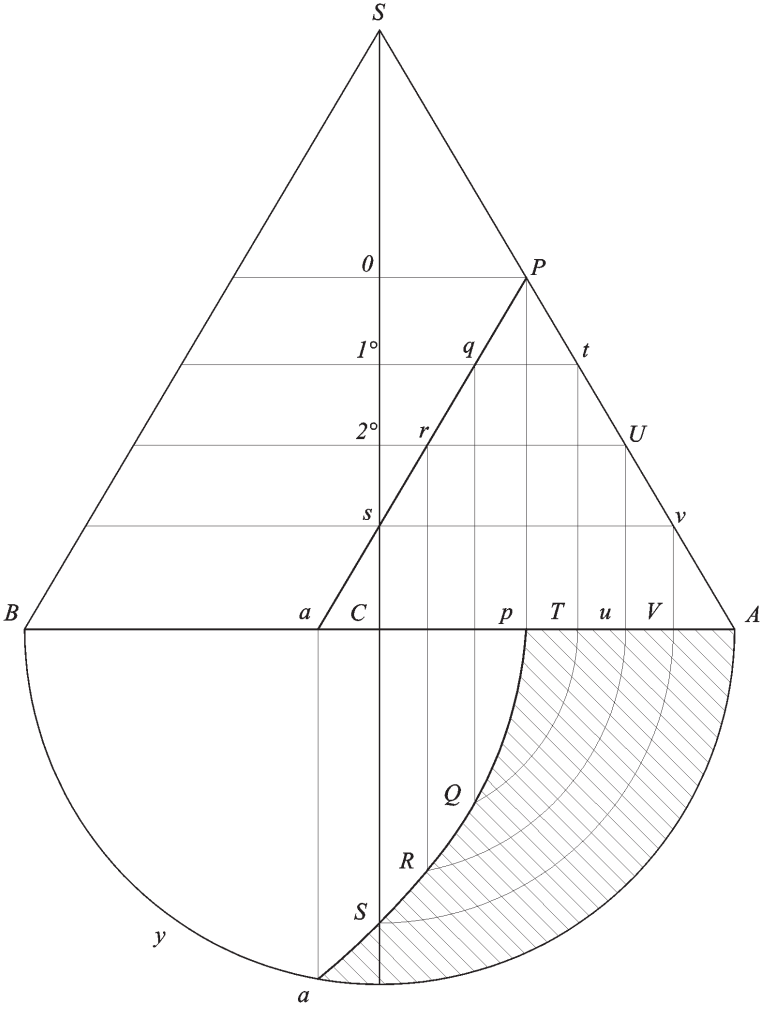


Fig. 184 a Rappresentazione della parabola di sezione in proiezione ortogonale

si è potuto osservare in questa illustrazione a causa del posto, ma che si può supporre, si porterà, infatti, dal vertice *S*, attraverso il punto *P* dato alla superficie, una linea retta *SA*, sulla quale avendo portato le distanze *St, Su, Sv, SA* della ***Figura 184***, ai punti *1, 2, 3, 4*, si traccerà attraverso ciascuno di questi punti un cerchio, seguendo il Problema XXXII, sul quale si porterà, da una parte e dall'altra della linea *SA*, l'arco della proiezione che è corrispondente a questa divisione: per esempio, l'arco *TQ* che è il primo al di sotto del vertice *P*, di *1* in *Q*, l'arco *uR*, di *2* in *R*,

[18] Nel testo originale la lettera *U* è minuscola, la lettera v è maiuscola

[19] La lettera *p* nel testo originale è maiuscola

e infine l'arco *VS* della ***Figura 184***, in *3S* della ***Figura 182*** e attraverso i punti ***PQRSx***, così trovati da un lato, e le equidistanze dell'altro lato dalla retta ***SA***, si traccerà a mano o con riga piccola e larga posta accanto alla parabola chiesta. Ho detto con una riga piccola e larga, perché questa curva, anche se descritta su una superficie convessa o concava, è piana nel suo contorno.

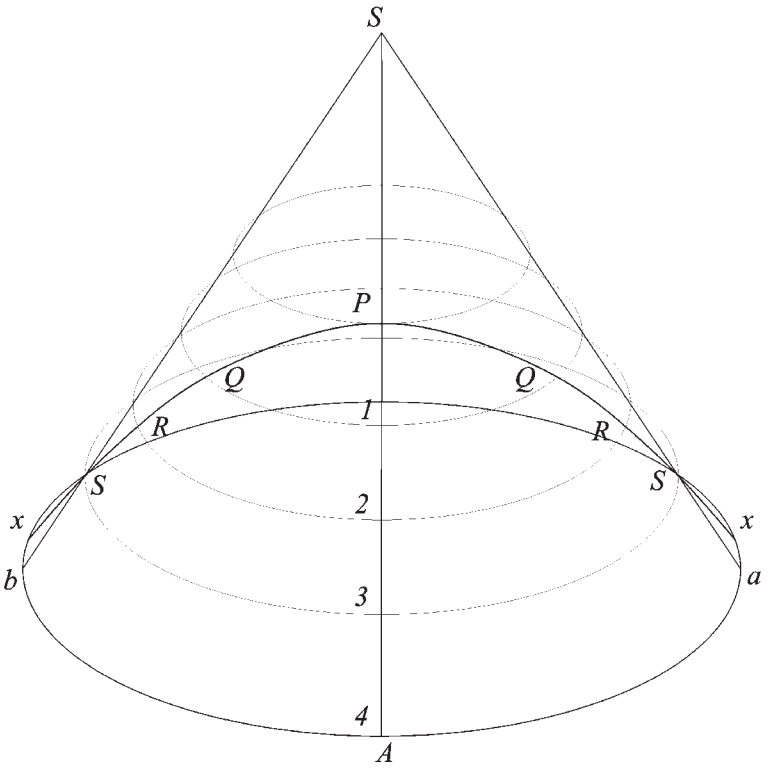


Fig. 182 Vista tridimensionale

DIMOSTRAZIONE

La ragione di questa costruzione è facile da trovare, per poco che si faccia attenzione alla ***Figura 184***. In primo luogo, perchè si taglia il Cono in più parti parallele alla base, che sono inoltre delle sezioni circolari di raggi ineguali, trasportati su quello della base *Ca* attraverso le perpendicolari *Pp, tT, uu, VV* [20] , in modo che il centro *C* che rappresenta in un solo punto di proiezione tutto l'asse *01ᶜ, 2ᶜs* e tutte le parallele all'asse *q1Q, r2R, sCS, a* , rappresenti delle sezioni verticali dei piani, che tagliano questi cerchi perpendicolarmente al triangolo attraverso l'asse *BSA*, e attraverso i punti d'intersezione, dove i diametri dei cerchi tagliano l'asse della Parabola. Di conseguenza, danno le corde di questi archi circolari attraverso l'intersezione dei due piani perpendicolari fra loro, e del terzo *Pa*, che forma la Parabola attraverso la sezione nel Cono, dove terminano gli archi delle sezioni circolari.

La lunghezza delle corde dei semi-archi *TQ, uR, VS, Aa,* che sono state così trovate, è chiaro che sono state ben trasportate sul Cono alla ***Figura 182*** e nei loro giusti posti, e di conseguenza, che i punti alla circonferenza della Parabola sono stati trovati sulla superficie concava o convessa del Cono, *ciò che bisognava fare.*

E' anche chiaro, attraverso questo, ciò che noi abbiamo detto prima della proiezione delle sezioni coniche, e con il Teorema III del libro I, cioè che la curva *PQRa* tracciata nel piano della base *ByA*, è ancora una parabola, poiché diversa da quella della sezione proposta *Pa*.

Noi abbiamo detto al Problema X a cosa serve la descrizione della parabola.

PROBLEMA XXXVII

Dato il primo asse di un iperbole, un punto appartenente ad una delle sue estremità e la superficie del cono, tracciare questa curva sulla superficie concava o convessa.

Sia ***(Fig 184 b)*** il triangolo *BSA*, la sezione attraverso l'asse del cono, e attraverso il punto dato *H* si prolungherà indefinitamente il lato *AS* verso *K*, poi dal punto *H* per centro e per raggio la lunghezza del primo asse dato *HK*, si farà un arco che taglierà *AS* prolungato in *K*. Se da questo punto *K* attraverso *H* si porta una linea retta *KY*, si avrà la posizione dell'asse dell'iperbole nel cono, la quale, è stata data. A questo punto, non c'è altro da fare che la sua proiezione alla stessa maniera di come si è fatta quella della parabola, cosa che la Figura fa vedere a sufficienza, senza che sia necessario ripetere la costruzione. Si osserverà soltanto: 1.° che essa è molto succinta, poiché l'asse *KH* è parallelo all'asse del cono *SC*, perché la proiezione *hy* è una linea retta, che termina tutto ad un tratto tutti gli archi *1E, 2D, 3I;* 2.° che se l'asse *HY* sporge verso *S*, la proiezione del contorno avrà la sua concavità girata verso *B*, e al contrario se questo asse sporge al di fuori [21].

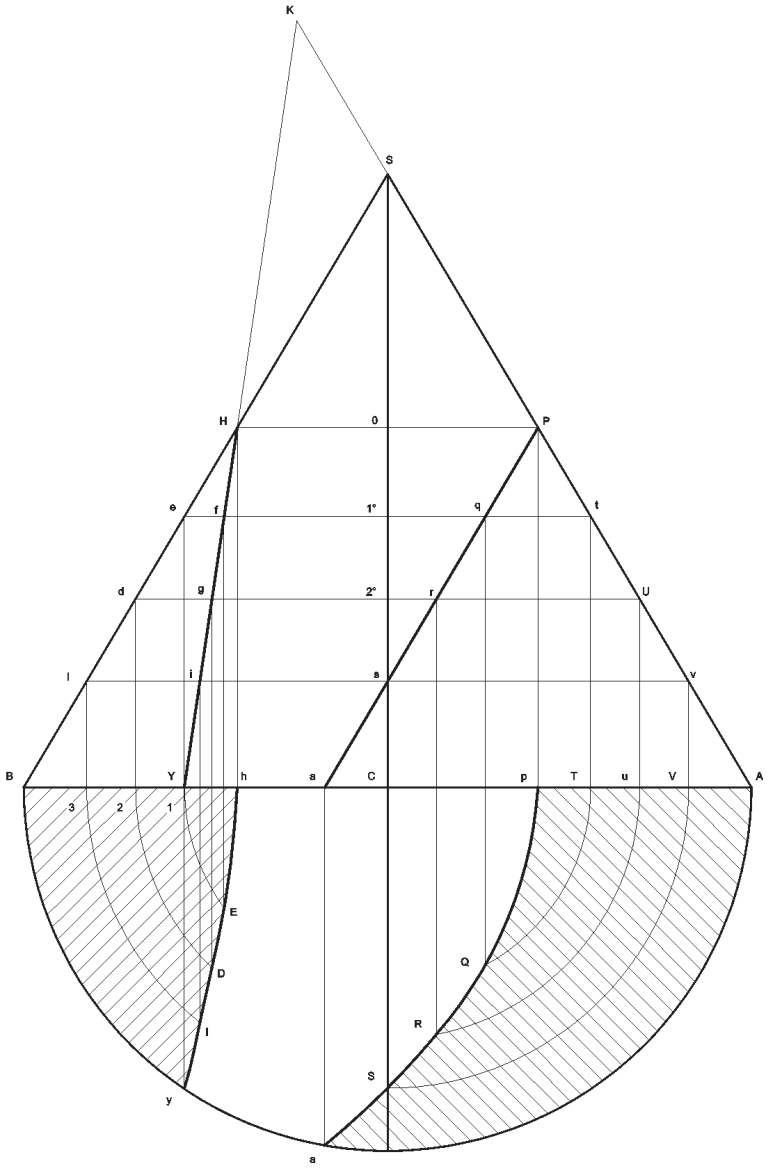
Noi abbiamo detto al Problema XII a che serve la descrizione dell'iperbole.

Corollario generale sulla proiezione delle sezioni coniche

Il seguito del metodo che noi abbiamo utilizzato per descrivere le sezioni coniche sul cono; che si può anche molto comodamente usare per descrivere su un piano tutte i tipi di sezione conica, il triangolo attraverso l'asse del Cono, e un asse della sezione dato in questo triangolo.

[20] Nella figura 184 le lettere sono una maiuscola e l'altra minuscola

[21] Nel disegno la linea KH non è parallela a SC, ma sporge verso S ed infatti la concavità è girata verso B



Perché, se al posto di prendere gli archi della proiezione delle parti parallele, che danno dei cerchi concentrici, terminate attraverso la proiezione del piano che forma la sezione, si prendono le corde di questi archi sistemati successivamente su un asse ad angolo retto, queste saranno altrettante ordinate, attraverso l'estremità dalle quali si farà passare la curva cercata.

Primo esempio per l'ellisse

Sia il triangolo attraverso l'asse del cono *BSA* ***(Fig 183 b)*** nel quale l'asse *EL* dell'ellisse è stato dato; avendo diviso quest'asse in altrettanti dei punti che si vorranno *bdif,* si abbasseranno attraverso questi punti e attraverso le estremità *EL* delle perpendicolari alla base *BA,* al di là della quale si prolungheranno in *rstu*; in seguito su *el* come diametro, si fa un semi cerchio *erstul*; taglierà tutte queste parallele ai punti *rstu*, che determinano la lunghezza delle ordinate che convengono all'ellisse ai punti *bdif*; così avendo alzato delle perpendicolari a questo asse su queste divisioni, si porteranno le lunghezze delle ordinate al cerchio, che è la proiezione dell'ellisse su queste perpendicolari, sapendo *Rr* su *fg*, *Ds* su *ib*, *Ft* su *di*, *Gu* su *bK*, e si avranno i punti *EghiKl*, attraverso i quali si traccerà la semi-ellisse a mano, o con una riga pieghevole.

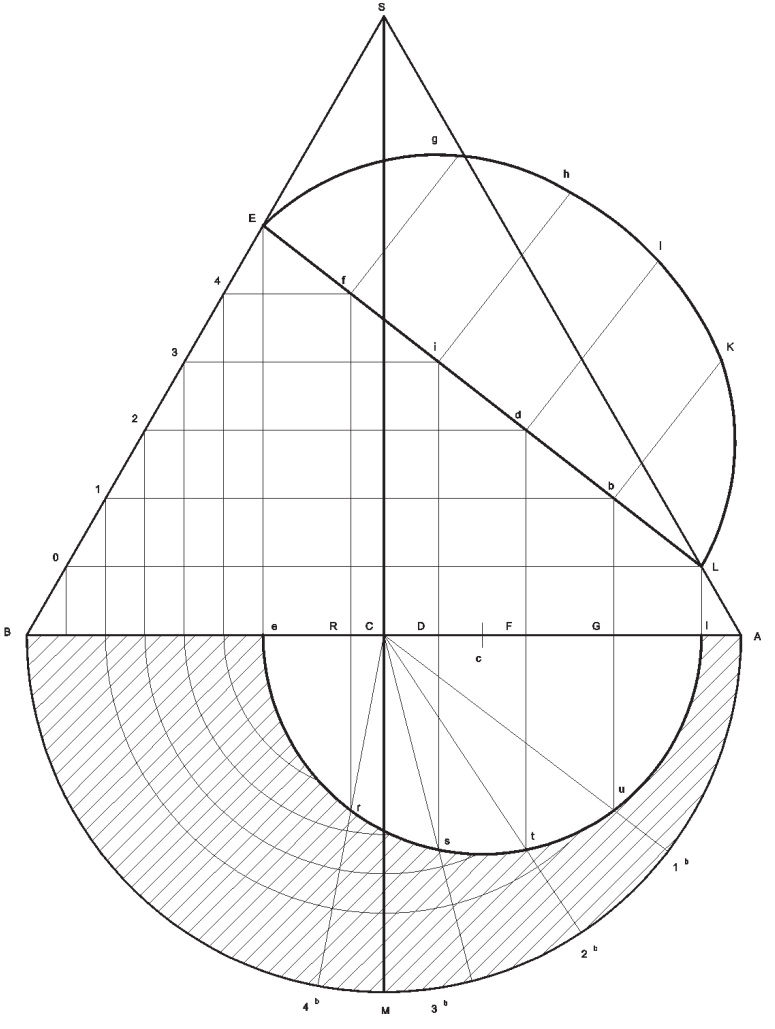


Fig. 183 b Sezione del cono: ellisse

Secondo esempio per la parabola

Sia il triangolo attraverso l'asse del cono *BSA* ***(Fig 184 c)*** e l'asse della parabola *Pa* dato in questo triangolo; avendo diviso questo arco attraverso diversi piani paralleli alla base *BA*, e passanti attraverso i punti presi a piacere *qrs*, si farà la proiezione dei cerchi che sono nel cono, e la proiezione della parabola *aRQP*, come abbiamo detto avanti, attraverso le parallele *aa, sS* [22], *Rr, Qq, Pp*, si faranno delle perpendicolari su *Pa* ai punti *qrs*, o per evitare la confusione delle linee su una parallela P^2A, e si porteranno su queste perpendicolari le i seni degli archi *QT, Ru, SV*, sapendo *aa, S3, R2, Q1*, i quali saranno sistemati successivamente ai punti corrispondenti dell'asse della parabola, come *1Q* in qQ^2, *3R* [23] in rR^2, *3S* in sS^2, e *Ca* [24] in Aa^2, e si avranno dei punti Q^2, R^2, S^2, a^2, attraverso i quali si traccerà la parabola a mano o con una riga pieghevole.

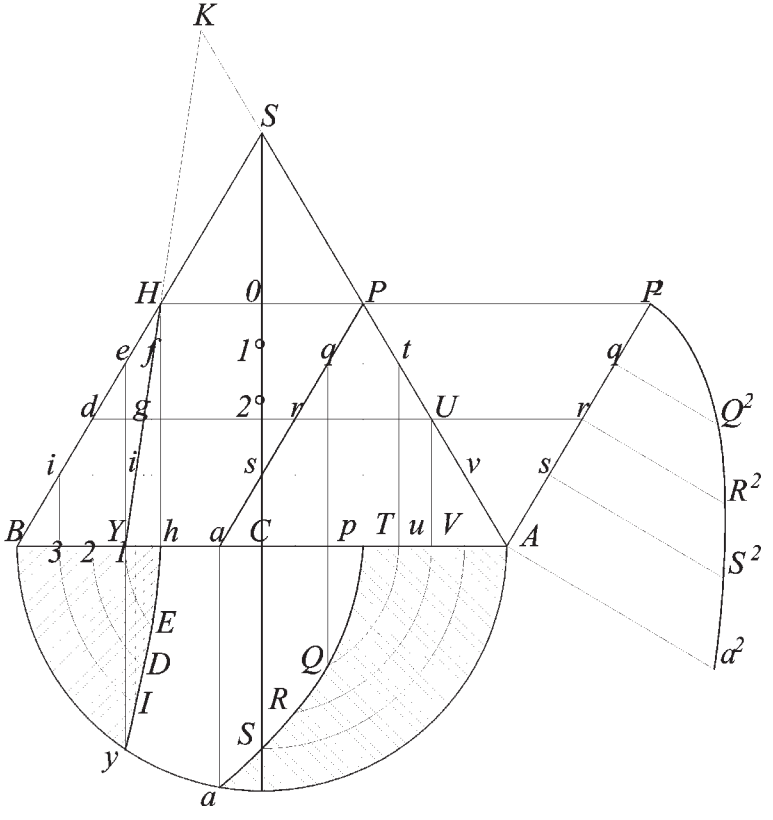


Fig. 184 c Sezione del cono: parabola

[22] Nella figura 184 le lettere sono entrambe maiuscole

[23] Nella figura 184 il punto 3R è in realtà 2R

[24] Nella figura 184 il punto Ca è in realtà aa

Terzo esempio per l'iperbole

Sia ***(Fig 184 d)*** il triangolo attraverso l'asse del cono *BSA*, e l'asse dell'Iperbole data *HY*, in questo triangolo; avendo diviso questo asse in altrettante parti che si vorranno attraverso dei piani che tagliano il cono parallelamente alla base, in *fgi*, e avendo fatto la proiezione degli archi di cerchio che passano attraverso i punti *edi* [25], attraverso la metà delle parallele all'asse *SC*; si tracceranno altrettante perpendicolari all'asse *HY* dato o a qualche altro uguale, e ugualmente divise come *bB*, sulle quali si porteranno i seni dei semi-archi della proiezione, *1E, 2D, 3I, By* corrispondenti a ciascuna divisione; vuol dire, le perpendicolari su *Bb* tracciate dai punti *FGIB* che si trasporteranno in *F*, f^2, *G*, g^2, *I*, i^2, e attraverso i punti *b*, f^2, g^2, i^2, ^2y, si traccerà a mano una curva che sarà l'iperbole cercata.

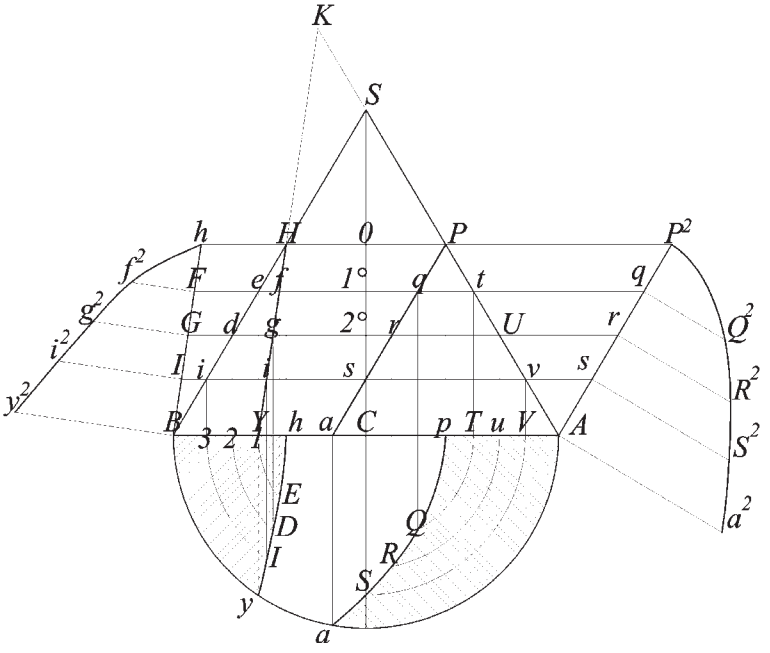


Fig. 184 d Sezione del cono: iperbole

La dimostrazione di questa pratica è la stessa che quella che noi abbiamo dato della descrizione di queste curve, sulle superfici concave o convesse; in effetti non è cambiato niente, anziché prendere gli archi di proiezione

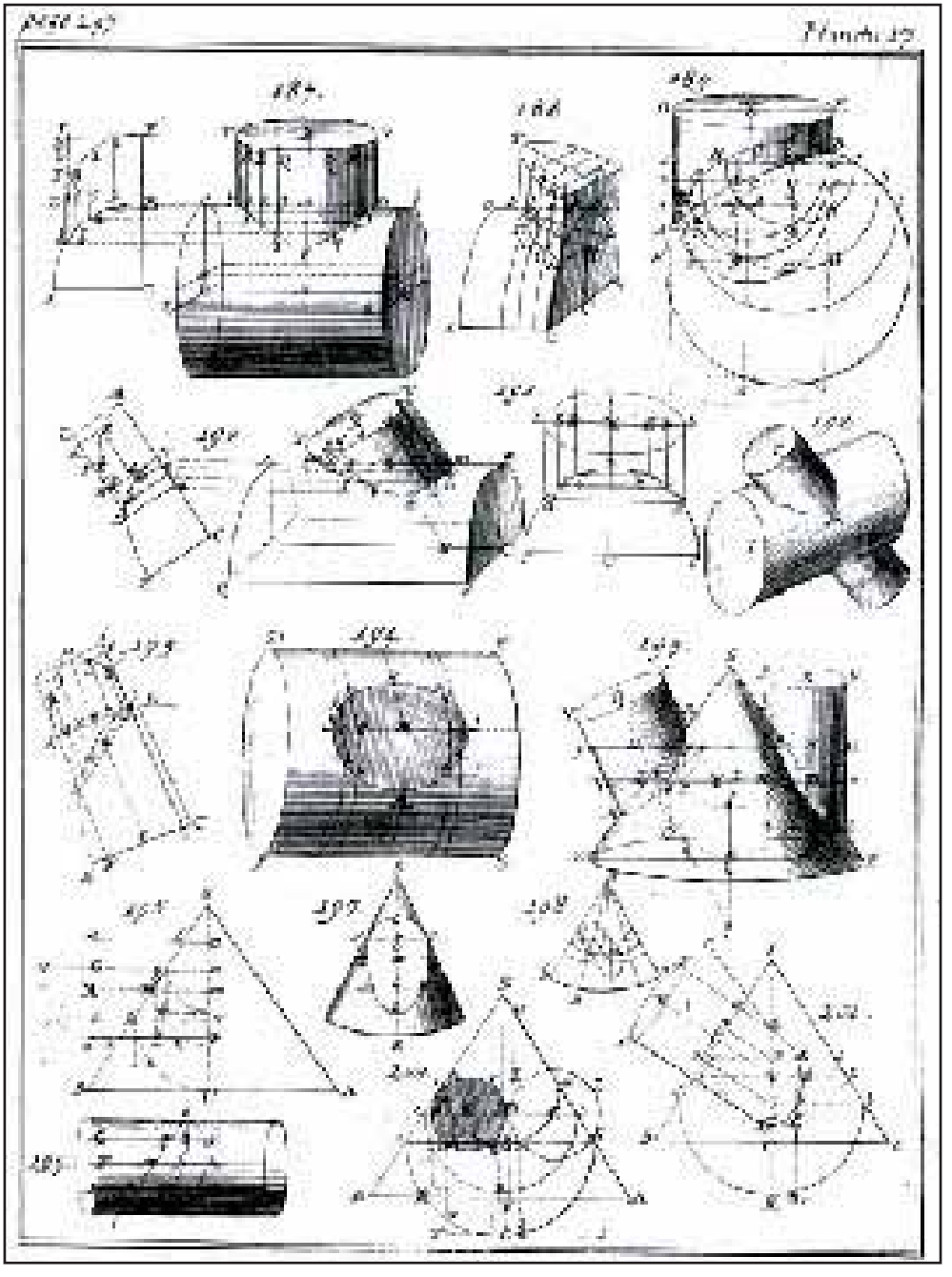
[25] Nella figura 184 e, d, i sono tutte maiuscole

per portarli da una parte all'altra di un lato del cono, sui cerchi paralleli alla base, qui si prendono le semi-corde di questi stessi archi sulle linee parallele a questa base su un piano.

Osservazioni su questo uso

Ci si può sempre servire del metodo della proiezione nell'architettura per il taglio delle pietre; perché i coni sono dati ordinariamente, allo stesso modo che gli assi delle sezioni in questi coni, e perché si è sempre obbligati a fare dei piani e dei profili, si ha anche la proiezione delle divisioni di questi coni attraverso le parti che sono ordinariamente le file delle pietre; non si tratta che di riconoscere le corde che sono le ordinate e le ascisse, le quali sono sempre uguali sul lato del cono, e sull'asse della parabola, e nelle altre sezioni dove sono ineguali sul lato del cono, e sull'asse, sono sempre nella stesso modo con quelle dell'asse, perché l'una e l'altra sono divise attraverso dei paralleli alla base del cono; sccome questa pratica di proiezione è di grande importanza per formare questo disegno, che gli architetti chiamano l'abbozzo, noi lo spiegheremo più a lungo nel libro seguente.

Se abbiamo ben capito il modo di tracciare le sezioni coniche attraverso questo mezzo, non sarà difficile concepire che è applicabile a tutte le altre curve, che possono formarsi su dei corpi regolari, e lo stesso irregolari, come spiegheremo avanti.



TERZA PARTE

Dal secondo libro

CAPITOLO VII

Delle sezioni che non possono essere descritte che su delle superfici curve e per mezzo della proiezione su delle superfici piane.

PROBLEMA GENERALE

Trovare tanti quanti si vogliono punti di contorno fatti alla superficie di sfere, coni e cilindri che si penetrano reciprocamente.

Quando si tratta di descrivere delle curve che sono su una superficie piana, si trovano i punti del loro contorno attraverso il rapporto tra le ordinate e le ascisse dei loro assi o delle loro coordinate. Ma, per quelle che non sono su un piano, questo rapporto non è sufficiente, perché non essendo i loro assi o diametri delle linee rette, anche le ascisse non sono rette. Sono delle curve alle quali bisogna condurre delle altre ordinate ad una linea retta, che è come la loro sottendente, in modo da trovare la curvatura attraverso le differenti distanze della corda dall'arco. In modo che il rapporto delle due linee conosciute, non possa essere sufficiente, poiché in qualche modo il piano taglia la sfera, il cono o il cilindro. In tal modo non si produrrà che una sezione conica o un parallelogramma, e se si suppone un secondo piano perpendicolare o inclinato al precedente, la loro comune sezione sarà una retta nella quale deve trovarsi un punto della sezione solida. Ma questa linea non ne determina la posizione, infatti, bisogna far ricorso ad un terzo piano che taglia i due precedenti in determinate circostanze, per determinare questo punto sulla linea, dove si sa che debba essere. Tali sono i punti di questa curva a doppia curvatura, che io qui chiamo punti delle sezioni solide, perché provengono dalla sezione di un solido tagliato o penetrato da un altro solido e non danno un piano come le sezioni coniche.

Nel numero di tre piani, che bisogna supporre per trovare i punti di queste curve, ce n'è sempre uno dato, che fà una sezione conica, il cui asse è la sottendente della curva a doppia curvatura, che noi possiamo chiamare imbriqueè, perché è fatta come il contorno di una tegola scavata, o che è tangente a uno dei vertici di questa curva per distinguerla dalle altre curve a doppia curvatura che hanno più di una inflessione.

Il secondo piano, deve essere parallelo al primo, in modo da trovarci le ordinate all'asse curva della sezione solida, e paragonarle a quelle della sezione conica che corrisponde loro.

Infine, il terzo piano deve tagliare i due precedenti attraverso le ordinate della sezione conica e del solido imbriqueè, in modo da trovarne le distanze, o attraverso delle perpendicolari, o attraverso delle linee inclinate di una inclinazione data.

Se si capisce bene questo principio, si vedrà che tutti i problemi da risolvere qui proposti, non sono che una applicazione di ciò, seguendo la differenza dei casi.

Si riconoscerà anche, che questo metodo molto semplice è molto geometrico è la chiave di tutti gli elementi delle volte che rappresentano quasi tutta la difficoltà nell'arte del taglio della pietra.

Non si tratta dunque che di tagliare dei solidi che si penetrano, con dei piani paralleli tra di loro, come attraverso delle fette che sono sempre delle sezioni simili in ciascun corpo, ma differenti l' una dall' altra.

In secondo luogo, non si tratta che di riconoscere in ciascuna delle fette, la parte comune ai due corpi. Se si tracciano su un piano le due sezioni differenti nelle loro rispettive distanze, si vedrà che se si tagliano in due punti del loro contorno, che sono comuni alle due superfici di questi corpi.

In terzo luogo, non si tratta che di seguire, voglio dire di legare, attraverso dei tratti, i punti comuni alle due superfici passanti dall'una all'altra sulle superfici curve stesse, per avere la curva naturale, o su una superficie piana per averne l'imitazione prodotta attraverso la proiezione, come noi l' abbiamo spiegata sopra.

Ora, poiché seguendo la geometria dell' infinito, è possibile considerare i solidi come composti da un'infinità di fette parallele sottili, nelle quali le ordinate e le ascisse delle sezioni piane aumentano o diminuiscono secondo un rapporto dato, si può determinare una infinità di punti di contorno delle curve a doppia curvatura, che non sono applicabili su una superficie piana, o per appiattirle, per così dire, riducendole attraverso la proiezione a delle curve piane senza farci altri cambiamenti, non sopprimendo la terza dimensione; cosa che è necessaria per giungervi a gradi, come sarà in tutti i problemi seguenti.

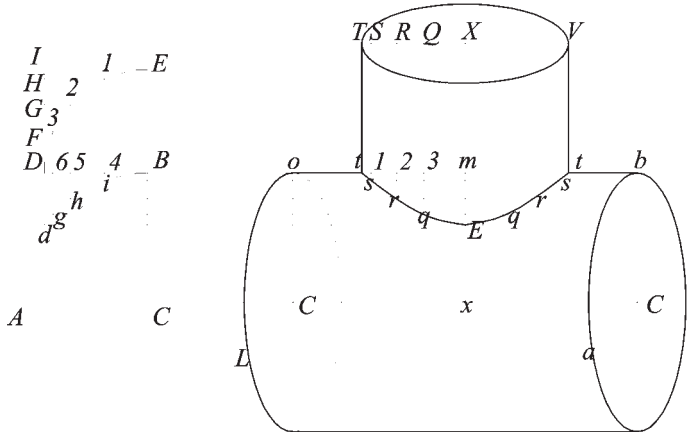
Si può chiarire il metodo, che consente di trovare più punti a doppia curvatura più o meno facili, seguendo la situazione che si dà ai piani che tagliano i corpi in parti parallele, quando gli assi dei corpi o dei cilindri che si penetrano sono paralleli tra di loro. La situazione più comoda delle fette, è di essere perpendicolari a queste assi, in modo che i punti comuni non siano che le intersezioni di cerchi differenti. Se le assi di questi corpi tagliano ad angolo retto, la posizione delle fette deve essere parallela a uno dei due, per avere un cerchio, un parallelogramma o un iperbole e un cerchio, o obliquamente per avere due ellissi che si tagliano. Tutto ciò diventerà più comprensibile attraverso gli esempi dei problemi seguenti.

SULLA CICLOIMBRE

PROBLEMA XXXVIII

Tracciare una cicloimbre su due cilindri disuguali che si penetrano ad angolo retto.

FIG 187. Intersezione fra due cilindri che seguono un angolo retto.



Sia dato il cilindro O L a b, intersecato da uno più piccolo T t u V, cioè da uno di un diametro più piccolo, il cui asse x X cade perpendicolarmente a quello del più grande C c. Bisogna tracciare la curva che si crea dall' intersezione delle due superfici, l'una posta sopra l'altra, dei due cilindri; per giungervi bisogna cominciare a seguire il metodo qui illustrato.

Avendo fatto, a parte su un piano, un quarto di cerchio CAB, il cui raggio CA sia uguale a quello del cilindro più grosso. Sul raggio C B prolungato dal punto B per il centro, si traccerà un altro quarto di cerchio DEB, dentro il raggio DB, che sarà uguale a quello del cilindro più piccolo, e parallelo ad AC. Si dividerà l'arco DE, in tante parti uguali quante se ne vuole, per esempio, in quattro, ai punti 1, 2, 3, per i quali si condurranno fuori dal quarto DE, delle parallele ad AC, ed altre parallele a CE come 1i, 2h, 3g, Dd, fino all'incontro dell' arco AdB in d,g,h,i, da dove si condurranno altre parallele ad AC indefinite. Su DB, prolungato, si prenderà ob per una parte a lato del grosso cilindro, e più grande del diametro del piccolo, lo si dividerà in due parti uguali al punto m, dal quale si porteranno da una parte e dall' altra le distanze DI,DH,DG,DF in mt ,m1, m2, m3. Per tutti questi punti, m,3,2,1,t, si tireranno le perpendicolari ad ob, su ciascuna delle quali si porteranno successivamente, e nell' ordine delle divisioni corrispondenti da una parte all' altra del punto m, le divisioni del raggio CB, o le loro uguali, che sono le distanze della tangente DB all'arco AdB, cioè D d in mF, 6g in 3q, 5h in 2r, 4i in 1s, e lo stesso dall' altro lato del punto m, tirando verso il punto u. In tal modo si avrà la proiezione della metà di una curva solida, che si crea attraverso l'intersezione delle superfici dei due cilindri, la quale proiezione non è assolutamente necessaria, ma molto utile per condurci dentro la descrizione della curva sulle superfici convesse o concave dei cilindri, come si vedrà nel VI libro.

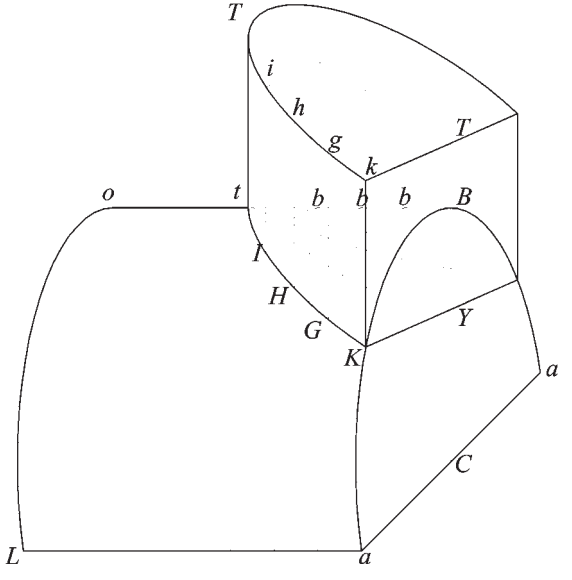
Avendo fatto questa preparazione, si vuole descrivere il cicloimbre, sul grande cilindro.

Avendo tracciato una parallela al suo asse, come ob, si porteranno le distanze da m3,m2, m1,mt da un lato dal punto m preso a piacere, e altrettanto dall'altro verso u. Per i punti m,3,2,1,t, ecc., si tracceranno tanti cerchi paralleli fra di loro, e perpendicolari al lato ob, sui quali si porteranno, seguendo l'ordine delle divisioni corrispondenti dell' arco AB, da una parte all'altra del punto m, gli archi di cerchio Bd, sul cerchio rappresentato qui dalla linea retta mF, con Bg sull'arco 3q, Bh su 2r e Bi su 1s. Ciò si vede più distintamente, nella Figura 188, dove questi archi sono definiti in prospettiva con delle lettere simili a quelle della Figura 187. L' arco AdB rappresentato dall' arco aKB, Bg da bG, Bh da bH e Bi dall'arco bI, che daranno sugli archi dei cerchi paralleli, tracciati sul grosso cilindro, i punti K, G, H, I, t attraverso i quali si traccerà a mano una curva che sarà il cicloimbre proposto. Si farà allo stesso modo sugli altri quarti di questa curva, che sono tutti uguali fra di loro, e al quarto che appare nella Figura 188.

Comunque, bisogna sottolineare che la curva tFu, che si è tracciata nella Figura 187, è quella dell'asse curvo del cicloimbre, rappresentato nella Figura 188 dalla linea curva tY, che passa per il mezzo delle corde di tutti gli archi limitati dal grosso cilindro.

Fig.188. Intersezione tra un cilindro con base circolare ed uno con base ellittica e con asse inclinato.

In secondo luogo, se si vuole tracciare il cicloimbre sul piccolo cilindro,



si descriverà sulla superficie un cerchio, la cui proiezione (Fig.187) è la linea diritta tmu, ed avendo diviso la sua circonferenza in parti uguali a quella dell'arco DE, dal quarto di cerchio DEB, si condurranno per i punti di questa divisione tante parallele al suo asse, le quali saranno perpendicolari al cerchio, se il cilindro è retto come noi lo supponiamo, e su ciascuna di queste parallele (Fig.188), rappresentate dalle linee kK, gG,hH,Ii,Tt, si porteranno le lunghezze Dd,6g,5h,4i, della Figura 187,

seguendo il loro ordine e dopo aver tracciato il cerchio tmu, che è il loro termine comune. Le lunghezze riportate quattro volte di seguito, daranno i punti, attraverso i quali passa il cicloimbre sul piccolo cilindro, attraverso i quali si traccerà la curva a mano, ciò che bisognerebbe fare.

DIMOSTRAZIONE

La ragione di questa operazione si può dedurre facilmente dal nostro problema generale. Poiché si suppone il grande cilindro tagliato da parecchi fette parallele tra di loro, e perpendicolari al suo asse, queste fette saranno tutte racchiuse dentro due cerchi, ma lo stesso piano che taglia ciascuna fetta del grande cilindro, che si è supposto tagli il piccolo cilindro parallelamente al suo asse, formerà delle fette comprese entro due parallelogrammi disuguali, di cui l'uno sarà più grande dell' altro in modo che si abbia una successione di cerchi uguali tagliati da dei parallelogrammi disuguali, i cui rapporti dei lati sono espressi da delle linee tangenti BD, B6, B5,B4, attraverso le quali, gli altri lati che attraversano quelli ad angolo retto, sono espressi dalle linee Dd, 6g,5h,4i, di cui le più lontane dal punto B, che è sull'asse del piccolo cilindro, sono tagliate più lontano dalla tangente DB attraverso l'arco AdB, seguendo l' ordine dei seni versi dell'arco Bd,Bg,Bh,Bi, come abbiamo detto nel teorema XVIII, che si dovrebbe fare.

UTILIZZO

Questo problema, è la base della pratica dei tratti del taglio delle pietre, dove si tratta di trovare i costoloni delle travature delle volte a botte disuguali, che si incrociano ad angolo retto, di cui noi abbiamo fatto un piccolo elenco per l' applicazione del teorema citato.

Vi si possono anche includere quelli che si incrociano obliquamente, di cui la differenza del tratto non è che una modificazione di questa pratica, come si andrà a vedere nel problema seguente.

PROBLEMA XXXIX

Tracciare una ellissimbre formato da una sezione di una sfera intersecata da un cilindro, il cui asse non passa attraverso il centro della sfera.

Sia data una sfera(***Fig. 189***), o una porzione di sfera *ARBt*, il cui centro è *C*, penetrata da un cilindro *DEFG*, che entra dentro la sfera attraverso il contorno. Questo la dividerà, seguendo il problema generale, in fette parallele tra di loro e perpendicolari all' asse del cilindro, attraverso delle linee rette *1r,2s,3t*, che rappresenteranno i piani che tagliano questi due corpi, i quali avranno sempre per sezione due cerchi, di cui si avranno i raggi su queste linee, se le si considera, come intersezioni di un piano passante per l'asse del cilindro, e di questi piani che gli sono perpendicolari. Si prenderà infine, il raggio del cilindro *DX*, e dei punti *f,e,d*, intersezioni dell'asse *Xx* del cilindro, e delle perpendicolari a questo asse *1f, 2e,3d*, prese a piacere e in così grande numero, che si vorranno avere dei punti per centro. Si descriveranno degli archi o dei semicerchi, *14o,25p,36q*, e dei punti *X,h,g,i* per centri, presi al centro della corda della sfera *Rr,Ss,Tt*. Si descriveranno altri semicerchi che porteranno i precedenti nei punti *4,5,6*, per i quali si abbasseranno delle perpendicolari sulle linee *1r,2s,3t*, che le taglieranno nei punti *n,m*,l, i quali daranno la proiezione dei punti della curva a doppia curvatura, che io chiamo ellissimbre, attraverso i quali si traccerà la linea *AlmnB*, che sarà il suo asse curvo.

Avendo fatto questa preparazione, se si vuole tracciare l'ellissimbre sul cilindro dopo avere tracciato la parallela al suo asse, per esempio *AD*, si porteranno su questa linea gli intervalli delle divisioni che sono state prese a piacere, *A3,A2,A1*, per le quali si tracceranno tanti cerchi paralleli tra di loro,e perpendicolari all'asse del cilindro che noi supponiamo retto. Poi si porteranno da una parte all' altra della linea *AD*, tracciata sulla superficie del cilindro, gli archi dei cerchi determinati attraverso le intersezioni di quelli della sfera, ossia l' arco *14* per il primo cerchio,l'arco *25* per il secondo, e l'arco *36* per il terzo, e per i punti *A,6,5,4,B*, si traccerà a mano una metà dell'ellissimbre, e l'altra dall' altro lato, ugualmente; cosa che la ***Figura 189*** non può esprimere, perché i semicerchi *14o, 25p, 36q*, devono essere rilevati a immaginazione nell'area, perpendicolarmente al piano della sezione per l' asse del cilindro, e che lo rappresentano ancora su una metà della curva essendo l'altra, dall' altro lato della linea *A D* del cilindro.

Secondariamente, se si vuole tracciare l'ellissimbre sulla superficie laterale della sfera, al posto della linea *AD* che noi abbiamo preso per la metà degli archi, la cui figura ci dà le metà, si traccerà sulla sfera un cerchio più grande, passante per i punti *A* e *B*, sul quale si porteranno gli intervalli delle divisioni fatte attraverso le parallele *1r, 2s, 3t*, che sono gli archi *AT, AS, AR, AB*, per i quali si descriveranno tanti cerchi paralleli tra di loro, e perpendicolari al maggiore. Si porteranno, inoltre, da una parte all' altra di questo cerchio maggiore gli archi di cerchio minori determinati dall'intersezione dei semi cerchi del cilindro, che sono nei piani corrispondenti. Così si porterà sul primo, l'arco *R4*,sul secondo l'arco *S5*, sul terzo l'arco *T6*, e si avranno sulla superficie della sfera i punti *A,6,5,4,B* attraverso i quali si traccerà a mano una curva che sarà l'ellissimbre proposta. Si farà altrettanto dall'altro lato dell'arco *ARB* sul la superficie della sfera, per l'altra metà dell'ellissimbre.

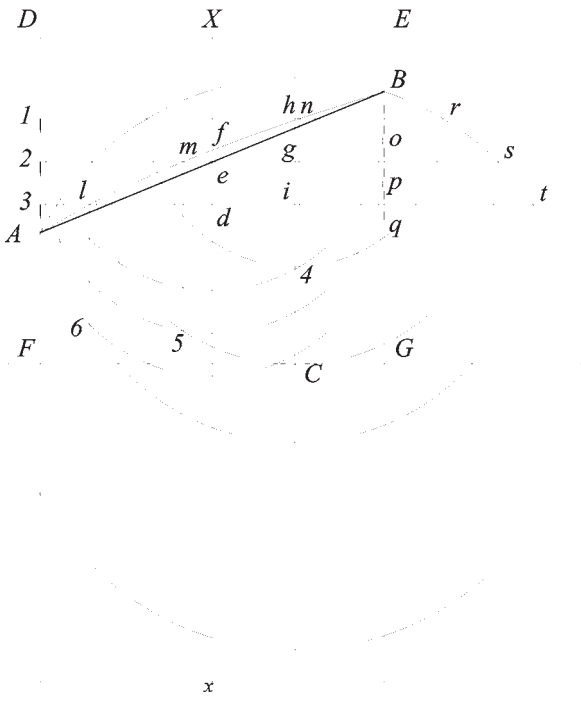
Si può ancora tracciare questa curva sul cilindro e sulla sfera in un altro modo.

Per prima cosa, sul cilindro si può tracciare una ellisse per i punti *A* e *B* (attraverso il problema *XXXVI*), ed avendo preso su questa ellisse gli archi corrispondenti alle parti dell' asse *AzAY*. Con la proiezione si faranno passare attraverso i punti *z* e *Y* delle parallele all'asse del cilindro, sulle quali si porteranno le lunghezze *Zl, Ym* della proiezione, le quali daranno i punti *l,m* ed *n*; tuttavia questo metodo è più lungo.Si traccerà, allo stesso modo, sulla superficie un cerchio maggiore *AB*, da dove si porteranno gli archi corrispondenti alle lunghezze *lZ, mY*, per avere i punti *l,m* e *n*, ma questo modo che sarebbe più lungo sarebbe anche meno corretto nell'esecuzione. Lo si propone qui come una idea, che illustra i differenti modi che si possono impiegare per arrivare allo stesso risultato.

Fig.189. Intersezione tra una sfera ed un cilindro.

DIMOSTRAZIONE

La ragione della prima costruzione, è sempre fondata sul problema generale della divisione dei corpi in parti parallele, per mezzo delle quali si hanno parecchie intersezioni dei cerchi disuguali della sfera e



del cilindro, nelle quali vi sono dei punti d'incontro delle due superfici e conseguentemente dell' ellissimbre. Poiché, benché siano stati tracciati dei cerchi differenti sul piano della figura, che è quello che passa attraverso l'asse del cilindro, bisogna raddrizzarli con immaginazione, perpendicolarmente a questo piano, cosa che non cambia la loro distanza relativa al piano tangente supposto sulla linea *AD* del cilindro, poiché le linee *4n, 5m, 6l*, gli sono parallele come lo sono all'asse della sfera *CP.* Poiché la curva deve sempre avere due punti comuni alle due superfici, segue che essa passerà attraverso le intersezioni delle curve formate dal piano che taglia i due corpi, *cosa che bisognerebbe trovare.*

Si giungerà alla stessa descrizione, anche se, invece di fare le parti perpendicolari all' asse del cilindro, le facciamo parallele ad esso. In questo modo, i punti della curva si troveranno all'intersezione dei cerchi della sfera e dei parallelogrammi del cilindro. Questo è sempre lo stesso principio applicato in modo diverso.

Se il cilindro non è retto ma scaleno, ci saranno dei cambiamenti per le figure delle sezioni, poiché supponendo le parti perpendicolari al suo asse, esse sarebbero circolari nella sfera ed ellittiche nel cilindro, e non ve ne sarebbero di circolari, se invece non lo fossero le parti oblique al l'asse e parallele alla base. Ciò che è facile rappresentare o concepire, senza l'aiuto di una figura, ancor meglio facendo una sezione sotto contraria. Tuttavia per aiutare l'immaginazione, ci si può esercitare su una palla e su un cilindro realizzato in rilievo, vale a dire realizzato con l' argilla o un altro materiale morbido.

L'utilizzo di questo problema è indicato nel teorema *X* per le travature delle lunette praticate dentro una volta sferica.

PROBLEMA XL

Siano dati i diametri di due cilindri che si intersecano, e l'inclinazione dei loro assi che si incontrano, tracciare l'ellissimbre che si forma dall'incontro delle loro superfici.

La costruzione di questo problema è così simile a quella del penultimo, che la sola ispezione della ***Figura 190***, ne farà vedere la differenza, che consiste nella preparazione, dove al posto di due quarti di cerchio bisogna fare due quarti di ellisse, ed invece di sistemarle ad angolo retto sul lato del grande cilindro, bisogna dare ai loro assi l'inclinazione che devono avere su quel lato.

Tuttavia per una più ampia spiegazione (***Fig.190***), sia la metà del grande cilindro *QB* intersecata da una più piccola *Tm*, il cui asse *Xx* forma con l'asse *cC* del grande, l'angolo *Xxc*. Si prenderà la linea *BC*[(1)] per metà del grande asse di un ellisse, il raggio *eC* per metà del diametro del grande cilindro, per metà del piccolo asse, verrà descritto su un piano a parte il quarto di ellisse *NDE*, il cui centro sarà *C*. Poi avendo prolungato la metà del grande asse *CN* fino ad *M*, in modo che *NM* sia uguale ad *hm*, preso per metà del grande asse di un altro quarto di ellisse, si prenderà per metà del piccolo asse, la linea *NH* uguale al semidiametro della base *TV* del piccolo cilindro,e si traccerà il quarto dell' ellisse *H21M*. In seguito, avendo tirato verso *H* la linea *DL* parallela a *CM*, si dividerà il quarto di ellisse *HM* in tante parti uguali quante se ne vorrà, per esempio qui si divide in tre parti, attraverso i punti *2* ed *1*, attraverso i quali si condurranno *1G, 2F*, paralleli a *CM*, e *ML, 1K, 2I*, paralleli a *HN*. Avendo fatto questa preparazione, si dividerà questa circonferenza del piccolo cilindro *Tm* in quattro parti, e le quattro in altrettante parti uguali, come per l' ellisse *HM*, che qui, per esempio, è stata divisa in *12* parti. Poiché il quarto *HM* è diviso in tre parti: *I°*, se si vuole avere la proiezione di questa divisione sulla linea *Am*, si farà *hi=HI, hk= HK*, e *hm=HL*, o *MN*, poi si condurranno attraverso questi punti *h, i, k*, delle parallele all'asse *Xx* del piccolo cilindro, prolungate al di là dei punti *h,i,k*, sui quali si porteranno le distanze della tangente *HN* al quarto di ellisse *EDN*; ossia, *HD* in *hd, PF*[(2)] in *pf* e *if, OG*[(3)] in *og* e *Kg*[(4)], e per i punti *A*[(5)], *g, f, d, f, g, m*, si traccerà la curva che rappresenta l'asse curva dell' ellissimbre, o la proiezione del suo contorno.

2°. Adesso se si vuole tracciare l'ellissimbre sul piccolo cilindro *t* ed *m*, si traccerà un'ellisse sulla superficie, la cui circonferenza taglierà le parallele *Rg, Sf, Ld,* ecc, nei punti *o, p, h, i K*, di ciascuno dei quali, per finire, si porteranno le distanze *Hd*[(6)] in *hd*, *pF* in *if* e *pf*, *OG* in *og* ed in *Kg*[(7)], e così lo stesso dall' altro lato del cilindro, per i punti trovati sulle parallele all'asse del cilindro. A questo punto, si traccerà a mano la curva che sarà l'ellissimbre proposta.

3°. Se si vuole tracciare questa curva sul grande cilindro *QB*, avendo tracciato una linea *AB* parallela al suo asse *Cc*, si prenderà a piacere un punto h per quello di mezzeria, dalla sezione del quale si porteranno da una parte all'altra le distanze *HI, HK, HL*, per avere su questa linea *Am* i punti *o, p, h, i K*, per i quali si tracceranno, per il problema *XXXVI*, tante ellisse parallele tra di loro, seguendo l' inclinazione data *Ahd*. Poi si porteranno da una parte all' altra della linea *Am* su ciascuna di queste ellisse , gli archi corrispondenti del quarto di ellisse *EDN*, ossia *ND*[(1)] su *hd*,*NF*[(2)] su *pf* e *if*,*NG*[(3)] su *og* e *Kg*[(4)],e per i punti *g, f, d, f, g*, che terminano

[(1)]. Riferimento alla linea *hx* della ***figura 190.***
[(2,3,4,6,7)]. Riferimento rispettivamente ai segmenti, *pF, oG, kg, HD, kg*, della ***figura 190.***
[(5)]. Riferimento al punto *t* della ***figura 190.***

gli archi dell'ellisse tracciata sul cilindro, si farà passare una linea curva da ciascun lato della linea *Am*, che sarà che l'ellissimbre proposta.

DIMOSTRAZIONE

La ragione di questa costruzione è sempre dedotta dallo stesso problema generale come i precedenti. Si tagliano i due corpi in parti parallele, che sono dentro il piccolo cilindro dei parallelogramma, in quanto i piani taglianti, sono paralleli al suo asse, e dentro il grande cilindro le sezioni degli stessi piani sono delle ellissi. Ora, poichè tutte queste ellissi sono uguali, esse sono rappresentate attraverso il quarto di ellisse *EDN*, che è stato fatto nella preparazione, e poiché tutti i parallelogrammi sono disuguali, si esprime la metà dei loro lati attraverso la linee *HI*, *HK*, *HL*, che sono le distanze dai punti *1,2, H*, attraverso i quali passano i piani che tagliano il piccolo cilindro. Ciò perchè si considera il quarto di ellisse *H21M*, ad angolo acuto sul piano dell'ellisse *EDN*, in modo che i semiassi *CN e NM*, formino un angolo uguale all' angolo *x, h, m*, sarebbe a dire, dentro la figura, in modo che *NM* sia posto su *NA*. E' chiaro, che la proiezione della linea *HN* si ridurrà a un punto *N*, piazzato in mezzo al piccolo cilindro, com' è il punto *h*, la proiezione del punto *2* sarà su *NA* ad una distanza uguale ad *HI*, ciò che ne deriva dalla costruzione. Allora *hi* per un lato, e *hp* per l'altro, e tutto il quarto di ellisse *M12H* saranno dentro un piano tangente al grande cilindro *QB*. Seguendo la linea *hm*, parte dell'ultimo lato *Am*, e gli intervalli delle divisioni *H, 2, 1, M* all'ellisse, che è la sezione dello stesso piano nel cilindro,saranno espresse attraverso le linee *HD, pF, oG*, che sono perpendicolari alla tangente *HN*, e parallele all'asse *NC*, le cui distanze sono tra di loro come i seni versi, o le frecce del doppio degli archi *DN, FN, GN*, le quali sono ancora tra di loro come i seni versi degli archi di cerchio corrispondenti alla base del cilindro, come abbiamo dimostrato altrove. Ciò che abbiamo rappresentato alla ***Figura 191***, che è la veduta della precedente dall'estremità del grosso cilindro, come sarà facile riconoscere attraverso le stesse lettere sistemate ai punti corrispondenti, anche se doppie, poiché essa fa vedere i due lati, e di conseguenza i parallelogrammi delle sezioni del piccolo cilindro. Attraverso la costruzione, le lunghezze di queste frecce o, che è la stessa cosa, le lunghezze a loro uguali, sono state portate da *h* in *d*, da *i* in *f*, ecc, dunque la curva *tdm* è l'asse curvo dell'ellissimbre, ed indica la profondità dentro il cilindro *QB*, e poiché si sono portati gli intervalli degli archi dell'ellisse *DE*, che è uguale a tutte le altre sezioni, parallele su ciascuna della sezioni corrispondenti, si avrà l'incontro dei parallelogrammi del piccolo cilindro con le ellissi del grande, dove sono i punti comuni alle loro due superfici.
Dunque, essi stanno alla circonferenza dell' ellissimbre, e questa curva passerà per tutti quei punti che sono stati così determinati, *che è quello che si dovrebbe fare.*

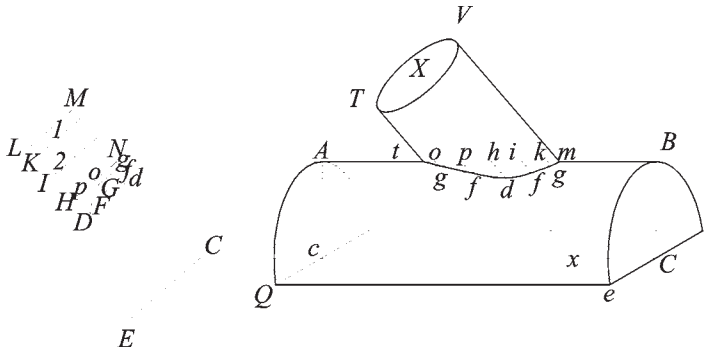


Fig.190. Intersezione tra cilindri con assi inclinati.

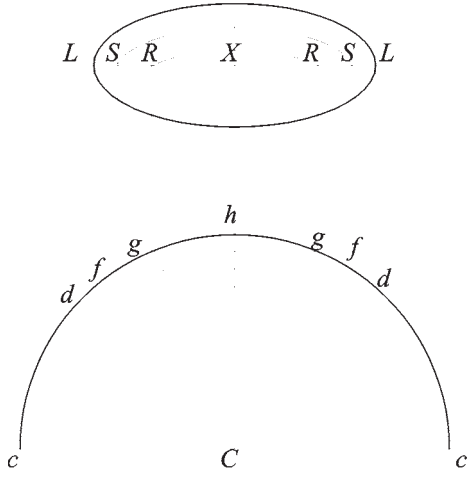


Fig.191. Ellisse generata dall'intersezione dei due cilindri.

L'utilizzo di questo problema è stato indicato al teorema *XIX*, serve per le travature delle volte a botte, o parti di volte a botte rialzate o riabbassate, o che sono sbieche, cioè inclinate tra di loro, supponendo che i loro assi si incontrino.

PROBLEMA XLI.

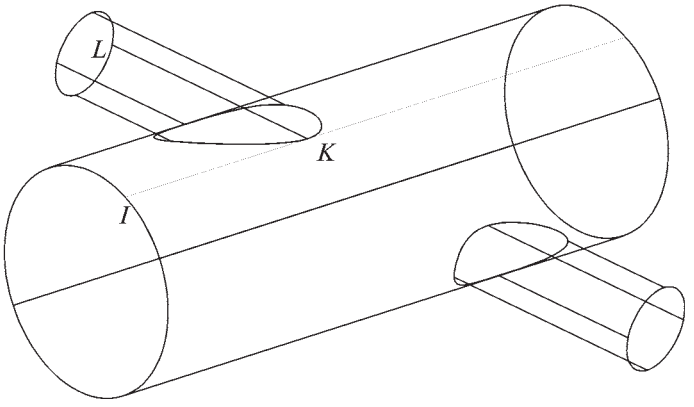
Siano dati i diametri di due cilindri che si intersecano con tutte le loro circonferenze senza che i loro assi si incontrino, e l'inclinazione reciproca dei loro lati. Tracciare l'ellissimbre formata dall'incontro delle loro superfici.

(1,2,3,4). Riferimento ai segmenti *Nd, Nf, Ng, kg*, della ***figura 190.***

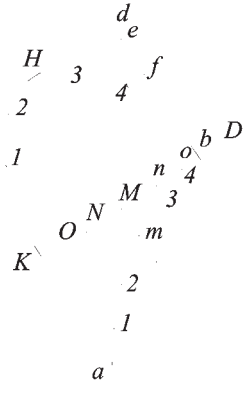
La ***Figura 192***, è fatta per mettere in evidenza la differenza di questo problema con il precedente, che non consiste se non nel fatto, che gli assi del cilindro non si incontrano, e la ***Figura 193***, per la costruzione.

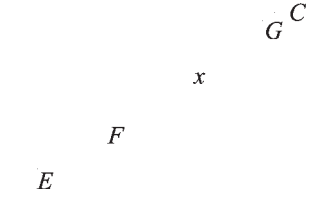
Fig.192. Intersezione tra cilindri, i cui assi non si incontrano.

Si possono distinguere due casi in questa proposizione, il primo quando il piccolo cilindro cade perpendicolarmente sul lato del grande, cioè sulle linee parallele al proprio asse, il secondo, quando le linee parallele al piccolo cilindro cadono obliquamente su quelle che sono anche parallele all'asse del grande cilindro. Se i loro lati sono perpendicolari fra di loro, si farà come per la preparazione dei quarti di cerchi o semicerchi uguali



alle loro basi, come si è fatto nel problema *XXXVIII* per la cicloimbre,





e se i loro lati sono obliqui, si farà come per la preparazione delle semi ellissi e quarti di ellisse, come alla ***Figura 193.***

Sia dato *EabD*, un quarto di ellisse, della sezione obliqua di un piano tagliante il cilindro *DEGF,* parallelamente all'asse del piccolo cilindro, che interseca il grande, come si vede alla ***Figura 192***. Sia così *KHb* la metà dell'ellisse fatta dentro il piccolo cilindro, attraverso la sezione del piano tangente al grande, a questo punto si dividerà a piacere la circonferenza[1] ai punti *1, 2, 3, 4,* e attraverso queste divisioni si condurranno delle parallele all'asse *Hx,* che taglia il quarto di ellisse del grande cilindro in *m* e *x*, più o meno lontano dal centro *C,* attraverso cui passa l'asse del grande cilindro. Supponendo che la posizione del piccolo nel grande cilindro è data in *abGF,* queste linee *1O, 2N, mM, 3N, 4o*, essendo prolungate verso il quarto di ellisse *EabD*, lo incontreranno nei punti *1, 2, m, 3, 4.* Si condurrà così attraverso il punto *H* la linea *Hd,* parallela al diametro *Kb,* ugualmente per *3e* e *4f,* che incontrano il lato del cilindro *Gb* prolungato in *d* fino ai punti *e* ed *f,* avendo fatto questa preparazione.

Per descrivere l'ellissimbre sulla superficie del grande cilindro *DEGF,* si comincerà a tirare una linea *dd* parallela al suo asse, come nel problema *XXXI*, sulla quale avendo preso il punto *M*, come punto medio della sezione, si prenderanno da una parte all'altra di questo punto, sulla linea *dd*, le distanze *bf* della ***Figura 193***, allo stesso modo in cui si porterà in *Mf, be* si porterà in *Me*, e *bd* si porterà in *Md,* così da una parte all'altra del punto *M*. Poi si faranno passare per tutti questi punti delle ellissi, che si tracceranno sulla superficie del grande cilindro, seguendo l'angolo di inclinazione del lato del piccolo cilindro sul grande, per esempio, *IKL* ***(Fig.192)***, o dei cerchi, se il piccolo cilindro cade ad angolo retto sui lati del grande.

Su ciascuno di questi cerchi o ellissi, si porteranno da una parte all'altra della linea *dd*, gli archi di cerchio o di ellisse, determinati attraverso le parallele all'asse del piccolo cilindro, che passano per le divisioni della sezione ellittica. Conoscendo *ma,* dalla Fig. sulla preparazione di *MA,* e *mb* su *MB*, l'arco *m1* in *f1,* da un lato e dall'altro del punto medio *M,* e l'arco *m4* su *f4,* ugualmente da una parte all'altra, infine l'arco *m2* su *e2*, e *m3* su *e3*, e attraverso i punti *d, 3, 4, B, 4, 3, d, 2, 1, A, 1, 2,* si farà passare una curva che sarà l' ellissimbre proposta sulla superficie del grande cilindro.

Per tracciare questa curva sul piccolo cilindro, si farà la stessa cosa che si è fatta nel problema precedente,cosa che è inutile ripetere. La sola difficoltà che si avrà, è quella che i due lai della curva non sono uguali, il quarto del piccolo cilindro non è sufficiente per dare i punti delle quattro parti, come alle ***Figure 187*** e ***190***, e bisogna avere tutte le distanze di una metà della curva alla metà *Kb*. Avendo così descritto un'ellisse intorno al piccolo cilindro, sarà tale la sezione di un piano tangente al grande, la si dividerà in due dopo il punto di contatto, rappresentato nella preparazione dal punto *b*, e avendo diviso la semicirconferenza in parti uguali a quelle della semi ellisse *bHK*, ossia *b4, 43, 3H*, ecc. Si condurranno per ciascuna delle sue divisioni delle parallele all'asse del piccolo cilindro, sulle quali si porteranno, successivamente, da un lato e dall' altro le distanze della tangente *Kb* a l'arco dell'ellisse *ab*, ossia *o4, n3, Mm, n2, o1, Ka*, le quali daranno dei punti sui quali si traccerà l'ellissimbre proposto.

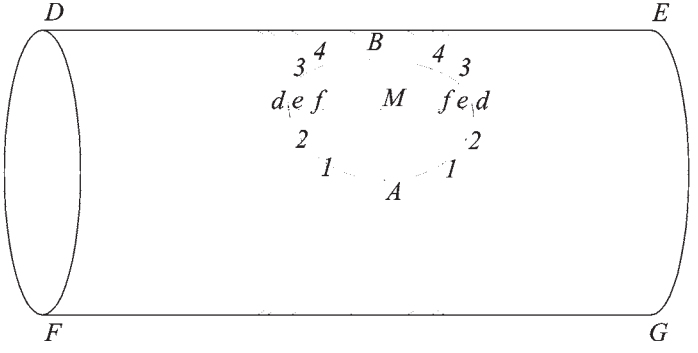
[1]. La circonferenza a cui si riferisce è l'ellisse *EabD* della ***figura 193.***

Se si volesse avere la proiezione di questa curva su un piano, invece degli archi che si sono tracciati nella ***Figura 194*** a mo' di prospettiva sul grande cilindro, bisognerebbe prenderne le corde o semicorde, e la costruzione sarebbe sempre la stessa.

Fig.194. Curva di intersezione tra i cilindri.

DIMOSTRAZIONE

Questa costruzione deriva dallo stesso principio delle precedenti. Si suppongono i due cilindri tagliati in parti, attraverso dei piani paralleli tra sé e all'asse del piccolo cilindro, nel quale vi sono per sezioni dei



parallelogrammi, i cui intervalli sono indicati da quelli delle linee *4f, 3e, Hd,* che dipendono dalla divisione che si è voluta fare del contorno del piccolo cilindro, preso su un cerchio se è perpendicolare al lato del grande, o su un'ellisse se è obliquo, come nel caso presente. Poiché si suppone, questo piccolo cilindro tagliato da un piano tangente al grande, al fine di avere un termine da cui si possa contare di quanto ciascuna linea parallela all' asse avanza al di sotto di questo piano, per giungere alla superficie del grande cilindro, cioè alla curva che questo piano fà nel grande cilindro. Si ha che questa curva è un cerchio quando il piccolo cilindro è perpendicolare al lato del grande, e un'ellisse, quando gli è obliquo, e poiché tutti i piani delle parti sono paralleli, tutte le ellissi che si formano sono anch'esse uguali tra di loro, in modo che nella preparazione ci si serva di un'ellisse che vale per tutti; così l'ellisse *Eab* rappresenta quella che è fatta sul piano passante per i punti *23e*, attraverso *14f* e *Kb.* In ciascuna intersezione dei parallelogrammi del piccolo cilindro e l'ellissi del grande, non vi sono che due punti comuni, ossia, *ab* per quello del punto medio, *1*e *4*, per l'intersezione della parte seguente, *2* e *3*, per la terza, le quali essendo distanziate da una parte e dall'altra dalla linea *AB*,danno i punti del contorno dell'ellissimbre, *che si dovrebbe trovare.*

L' utilizzo di questo problema è stato indicato al teorema *XX*.

PROBLEMA XLII

Data la posizione di un cilindro rispetto ad un cono che lo interseca, descrivere l'ellissimbre formata dall'intersezione delle loro superfici.

Questo problema comprende diversi casi, che possono tutti risolversi nello stesso modo: *1º* poiché o le assi del cilindro e del cono sono parallele tra sé; *2º* o si tagliano; *3º* o perpendicolarmente o obliquamente; *4º* o non sono parallele, e non si tagliano; *5º*o l'asse del cilindro è perpendicolare al piano passante per l'asse del cono; *6º* o gli è inclinato; *7º* o non interseca totalmente il piano, quando gli è perpendicolare; *8º* o non lo interseca nemmeno quando gli è inclinato.

Tutti questi casi precedenti, si possono risolvere con lo stesso procedimento, che è stato spiegato nel problema generale, ossia tagliando il cono ed il cilindro in parecchie parti attraverso dei piani paralleli tra sé, la cui posizione nei confronti degli assi del cono e del cilindro è arbitraria. Tuttavia ci sono delle scelte per comodità di esecuzione, infatti conviene metterle in modo tale che esse diano sempre le sezioni più semplici. Noi nella ***Figura 195***, le abbiamo messe perpendicolarmente all'asse del cono, in modo da avere l' intersezione dei due cerchi, l'uno dentro il cono, l'altro dentro il cilindro. Quando gli assi *SC* e *Xx* sono paralleli tra sé, se si sono disposte le parti parallelamente agli assi, si avrà per intersezione un parallelogramma o un' iperbole che è meno facile da tracciare di un cerchio.

Se gli assi sono inclinati fra di loro, come il piano *SC* e *Qq*, il piano *yG* tagliante i due corpi, darà dentro il cono un cerchio, e dentro il cilindro un'ellisse, di cui *yK* sarà la metà del grande asse, ed il diametro della base del cilindro sarà il piccolo asse. In tale maniera non si tratta che di descrivere questa ellisse, e di tagliarla attraverso un cerchio che ha per raggio *1i*. Poiché tutte le ellissi che saranno fatte attraverso le sezioni ai piani paralleli a *yy* sono uguali, non si può che descrivere un'ellisse e tagliarla attraverso dei cerchi disuguali, che saranno le sezioni dei piani paralleli nel cono, mettendo i loro centri nella distanza in cui devono essere da quello dell'ellisse. Attraverso questo mezzo si avrà la sequenza di archi di cerchi e di ellissi, le quali essendo trasportate sulle superfici del cono e del cilindro, come abbiamo detto nel problema precedente, daranno tanti punti sulla circonferenza dell' ellissimbre, che si vorranno moltiplicare il numero delle parti attraverso le sezioni parallele. Questa cosa è chiara dopo gli esempi dei problemi precedenti, tuttavia per non divenire oscuro, volendo essere conciso, ne faremo applicazione pratica.

Siano dati, per il primo caso in cui gli assi sono paralleli, i piani *yG* ed *Yn*, paralleli tra di loro, e perpendicolari all' asse *SC* del cono, e *Xx* del cilindro. Dal punto *1* per il centro e per il raggio *1i*, si descriverà un quarto di cerchio *1di*, e dal punto *H* per centro, e per raggio il semidiametro *HG* del cilindro, si descriverà un altro quarto di cerchio, che taglierà il precedente nel punto *Z*, dal quale se si abbassa una perpendicolare sul *yG*, si avrà il punto *5* per proiezione del punto *Z* e uno di questi dell'asse curvo *b5* dell'ellissimbre. Si troverà allo stesso modo un altro punto *f* di questo asse, attraverso l' intersezione dei due cerchi *oem* del cono, e *Nzn* del cilindro; questa preparazione è stata fatta.

Per tracciare l'ellissimbre sul cono, avendo tirato dalla cima *S* una linea a questa base, che si prenderà per mezzo dell'ellissimbre, si sistemeranno su questa linea i punti *ba* delle sue due estremità, dentro le loro distanze

dalla sommità *S*, ed in seguito i punti *i* e *m*, attraverso i quali si faranno passare i due cerchi, sui quali si porteranno da una parte all'altra della linea retta, gli archi *iZ* e *mz*, che daranno i punti *z* e *Z*, attraverso i quali si farà passare a mano la curva che sarà l'ellissimbre richiesta. Non si è fatta una figura per questa trasposizione degli archi trovati, perché è la stessa della ***Figura 182*** e ***185*** della tavola *16*.

Per il secondo caso, dove l'asse del cilindro cade obliquamente a quello del cono, si agirà nello stesso modo che nel caso precedente, fatta eccezione che per il cilindro *AVTB*, dove si fanno delle ellissi attraverso la sezione obliqua dei piani y*G*, *Yn*. Si tracceranno delle ellissi uguali che avranno per grande asse la linea *yy* o *YY*, e per piccolo asse il semi diametro della base *VT* del cilindro, così il punto *P*, che è l'incontro delle due superfici, si troverà attraverso l'intersezione del cerchio del cono, di cui 1i sarà il raggio, e dell' ellisse *yPy*, ugualmente per il punto *O* attraverso l'intersezione del cerchio del cono che ha per raggio *2L* e dell'ellisse *YOY*.

Se dai punti *O* e *P*, si abbassano le perpendicolari *Oo* e *Pp* sulle linee *yG* ed *Yn*, si avranno i punti *p* ed *o*, che saranno la proiezione dei punti di incontro delle superfici *O* e *P*, e sull'asse curva dell'ellissimbre, che sarà la curva *BpoA*; questa preparazione è stata fatta.

Se si vuole tracciare l'ellissimbre sul cono, si traccerà attraverso il suo vertice una linea retta, sulla quale si sono sistemati i punti *B* e *A* sommità della curva, vi si indicheranno anche i punti *I* e *L*, attraverso i quali si farà passare una curva sui quali si prenderanno da una parte all'altra della retta gli archi *IP* ed *lo* e si avranno i punti *P* e *O*, per mezzo dei quali ed attraverso i punti *A* e *B* si traccerà a mano l'ellissimbre richiesta, come nel caso precedente.

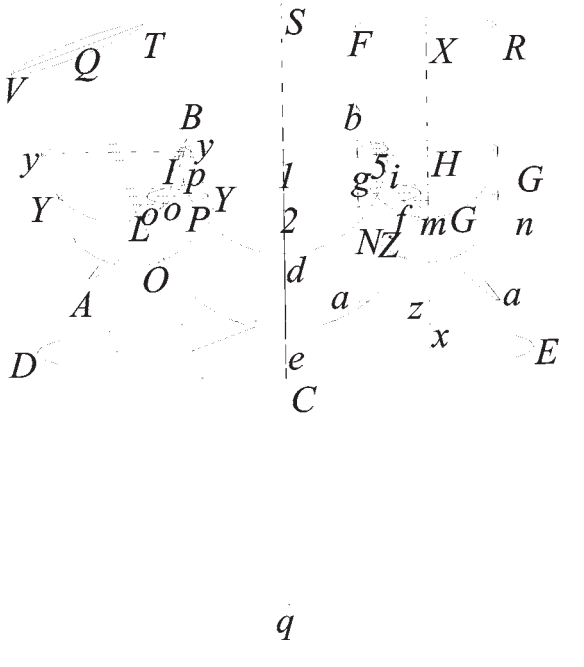


Fig.195. Intersezioni tra un cono e due cilindri.

Per tracciare la stessa curva sul cilindro, si comincerà a tracciare *IN* parallela al suo asse, sulla quale si porteranno i punti *D* ed *A* per le estremità della curva, e i punti *G* ed *N*, nella loro distanza da questi punti. Si faranno passare sui punti *G N* ed *A*, dei cerchi paralleli alla sua base per il primo caso e delle ellissi per il secondo caso, e si porteranno su questi cerchi gli archi *GZ* ed *MZ* per il primo, ed *YP* ed *YO* per il secondo. Per i punti *AoA*, si prenderà la semicirconferenza per avere i punti *BZ* ed *ZA* da un lato della parallela all'asse, e altrettanto dall'altro lato, o *BPOA* da un lato e lo stesso dall'altro della linea che passa per il vertice del cono, e la metà della sezione; attraverso questi punti così trovati si traccerà l'ellissimbre richiesto.

Ma se il cilindro fosse perpendicolare al piano del triangolo attraverso l'asse del cono, non si potrebbe più utilizzare la stessa costruzione, perché i piani che tagliano il cono perpendicolarmente al suo asse taglierebbero il cilindro parallelamente al suo asse, e vi sarebbero per sezione dei parallelogrammi i cui lati non determinerebbero l'incontro delle due superfici. A questo punto, bisogna far ricorso alle tangenti delle sezioni del cono.

Sia dunque dato il cilindro *DOpd*[(1)], che è perpendicolare all' asse *SC* del cono, il quale è tagliato da un piano passante per l'asse *Xm* del cilindro, ed *SC* del cono. Si taglieranno l'uno e l'altro di questi corpi, attraverso delle linee *Hn*, *Fm*, *IN*, che daranno sull'asse *SC* i punti *n*, *m*, *N*, dei quali come centri e per raggi *ng*, *Mm*, *Nk*, si descriveranno degli archi di cerchio *gy*, *Mz*, *Kx*[(2)], dai quali si traccieranno le tangenti *gh*, *Mf*, *ki*, uguali alle ordinate della base del cilindro *GH*, *XF*, *KI*. Attraverso i punti *h*, *f*, *i*, si condurranno delle parallele all'asse del cilindro, fino all'incontro degli archi come *hy*, *fz*, *ix*, i quali serviranno a tracciare la curva come diremo

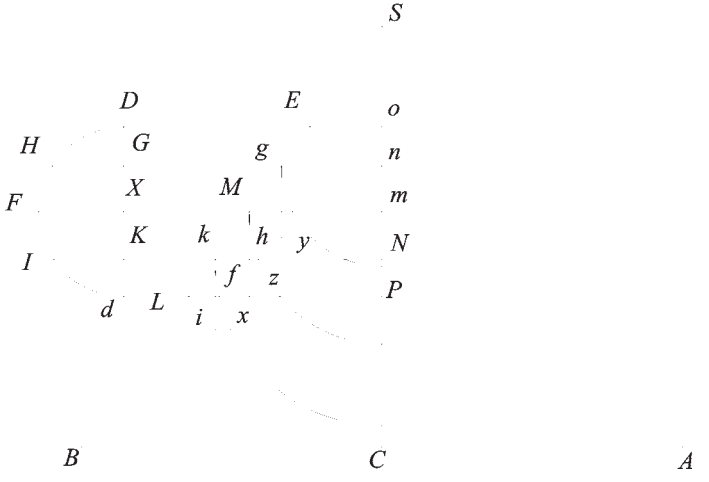


Fig.196. Intersezione tra cono e cilindro con assi perpendicolari.

Avendo tracciato sul cilindro un'ellisse, attraverso i punti *E* ed *L* dati dal problema *XXXIV*, come *e*, *h*, *f*, *il*, ***Figura 199.*** Si condurranno per i punti *hfi* dati, alla circonferenza di questa ellisse, delle parallele al suo asse *Gy*, *Fz*, *Ix*, sulle quali si porteranno le lunghezze trovate *hy*, *fz*, *ix*, che daranno su queste parallele i punti *y*, *z*, *x*, attraverso i quali e per i punti *e* ed *l*, si traccerà a mano una curva che sarà quella che si richiede.

[(1)]. Riferimento al cilindro DOPd della ***figura 196.***
[(2)]. Riferimento all'arco kx della ***figura 196.***

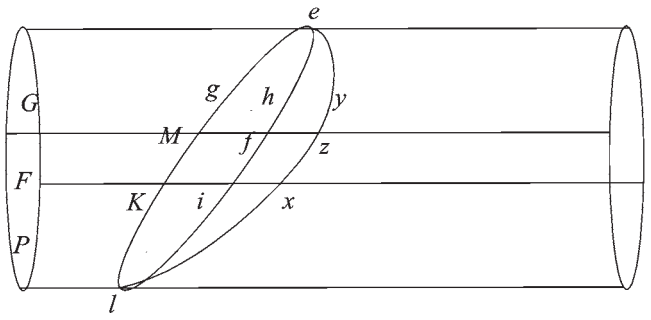


***Fig.199*[(1)]**. Sezione cilindrica con piano inclinato rispetto all'asse.

Se si vuole tracciare la stessa Ellipsimbre sul cono, il cui triangolo *SBA* della ***figura 196*** è la sezione attraverso l'asse, si opererà come per i casi precedenti. Così supponendo quello per la ***figura 197*** che è più piccolo, per mancanza di spazio nella tavola, uguale a quello della ***figura 196***, si comincerà a tirare dal vertice *S* alla base una linea retta qualsiasi *SB*, sulla quale si porteranno le distanze *SE, Sg, SM, Sk, SL* della ***figura 196***, ed avendo tracciato sulla superficie di questo cono dei cerchi passanti per i punti *g, m, k,* si prenderanno da una parte all'altra di questi punti, gli archi *gy, Mz, kx* , della ***figura 196***, che si porteranno da una parte all'altra della linea *SB*. Si avranno dei punti *e y z x l x z y e*, attraverso i quali si traccerà a mano la curva proposta, supponendo come ho appena detto, un rapporto tra le ***figure 196*** e ***197***, che non si è potuto osservare per mancanza di spazio, ma poiché non si tratta qui che di una spiegazione, si possono supporre uguali delle figure che uguali non sono.

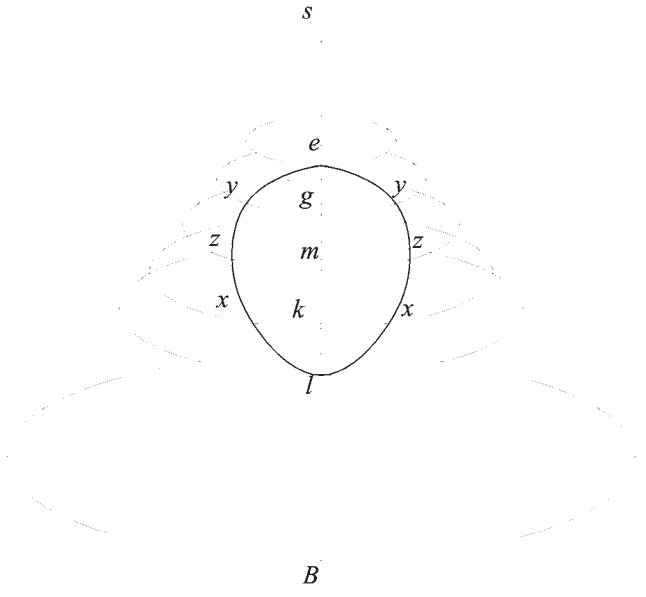


Fig.197. Sezione di un cono con piano inclinato rispetto all'asse.

[(1)]. *Fig.199.* L'autore la spiega tra la ***figura 196*** e la ***figura 197***.

Quando il cilindro che interseca il cono è perpendicolare al suo triangolo attraverso l'asse, e gli assi non si incontrano,le tangenti agli archi di cerchio delle sezioni fatte attraverso i piani che tagliano i coni in parti parallele, non sono uguali da una parte all'altra dei lati del cilindro, prolungati come nel caso precedente. Ciò perchè bisogna disporre la figura come la figura *200.*

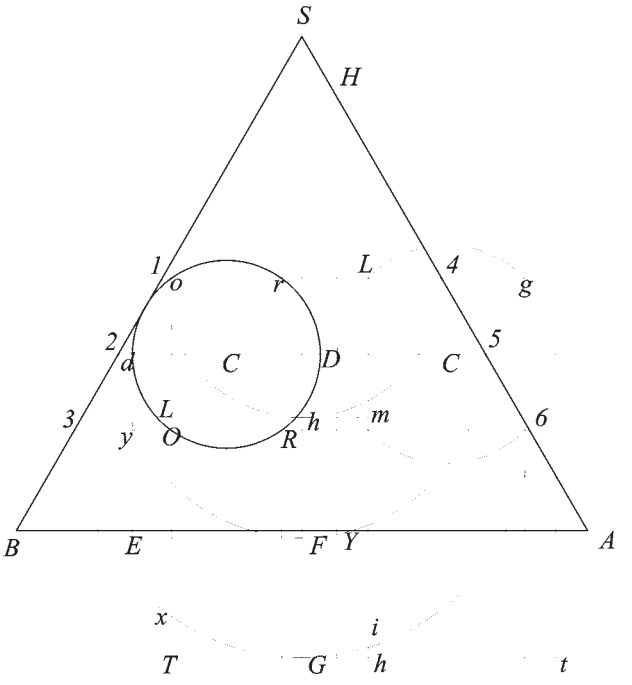


Fig.200. Intersezione tra un cilindro ed un cono con gli assi perpendicolari.

Avendo sistemato il centro *C* della base del cilindro, attraverso il quale passa l'asse che cade perpendicolarmente al triangolo *BSA* attraverso l'asse del cono; si descriverà da questo centro un cerchio *or D R O* che si taglierà così bene che il cono attraverso dei piani paralleli tra di loro, e all'asse del cilindro e perpendicolare a quello del cono, i quali piani sono rappresentati dalle linee *1, 4, 2, 5, 3, 6*[(1)], che tagliano il cerchio della base del Cilindro ai punti *or*, *dD*, *OR*, attraverso i quali si tireranno a queste linee delle perpendicolari indefinite *oT, RG, dE, DF*; in seguito avendo descritto dei semi-cerchi *1 h 4, 2 F 5, 3 G 6,* si condurranno a loro delle tangenti *Lh, EF, TG,* parallele ai loro diametri *14, 25, 36,* i quali determineranno le lunghezze dei lati del cilindro fuori dal cono, per le parallele all'asse che passano per i punti *odO, rDR*; così il lato del cilindro che passa per il punto d esce dal cono della lunghezza *yE*, colui che passa per il punto *O* esce dal cono dell'intervallo *xT,* e così degli altri; e poiché i punti *G* ed *F* sono molto vicini ai punti di contatto delle tangenti, essi escono poco dal cono.

Ora per tracciare questa curva sul cilindro, si opererà come sulla ***figura 199*** eccetto che in quella là noi abbiamo supposto le distanze dell'Ellisse che taglia il cilindro uguali, da una parte all'altra del suo asse, e qui invece esse sono disuguali.

[(1)].Riferimento alle linee *14, 25, 36,* della ***figura 200***.

Per tracciare la stessa curva sul cono, si seguirà qui lo stesso metodo che nella ***figura 197*** tranne che non si porteranno le misure degli archi paralleli sui due lati della linea *SB*, ma tutte su un lato.

Si traccerà sul cono un Iperbole *HY* tangente al cerchio della base del cilindro, per servire da termine, da cui si misureranno gli archi che tagliano i lati del cilindro; poiché i punti della curva saranno sempre nell'intersezione dei cerchi delle parti del cono parallele alla base, e dei lati del cilindro paralleli al suo asse.

La stessa operazione serve per il caso in cui il cilindro non entra nel cono tranne che per una parte della circonferenza, come si vede nella stessa ***figura 200*** al cerchio *Dg6*.

Secondariamente, se invece di fare le parti parallele attraverso dei piani perpendicolari all'asse del cono, si vogliono fare parallele all'asse del cilindro, la soluzione del problema sarà ugualmente geometrica, ma un po' più difficile; perché al posto dei cerchi nel cono, si avrà per sezione delle ellissi, delle parabole o delle iperboli, seguendo l'inclinazione dell'asse del cilindro a quello del cono; ma così si avranno nel cilindro solo dei parallelogrammi.

Al fine di poter scegliere la maniera che conviene maggiormente, daremo un esempio della curva formata attraverso la penetrazione di un cilindro all'asse del cono.

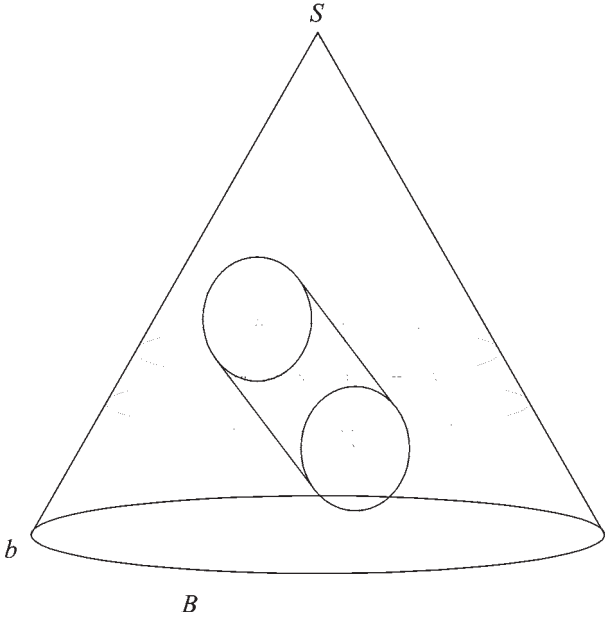


Fig.198. Intersezione tra cono e cilindro.

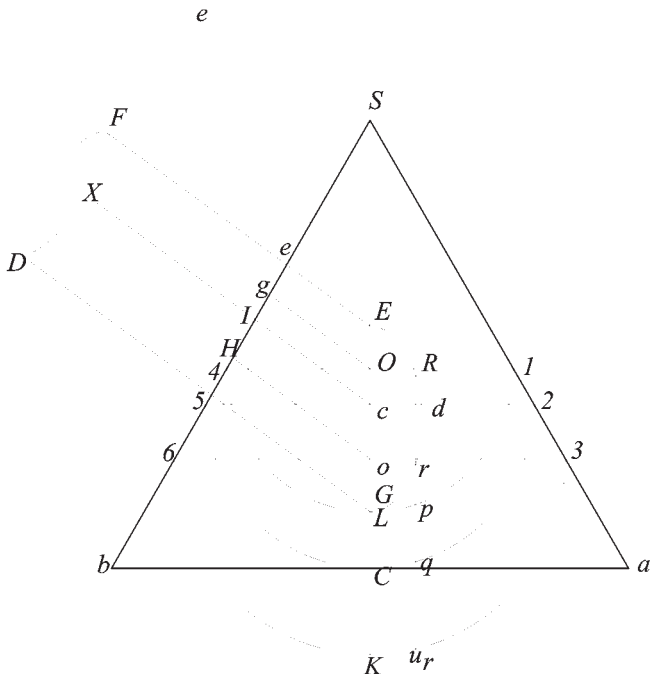


Fig.201. Intersezione tra cono e cilindro.

Sia (***fig. 201***) il triangolo attraverso l'asse del cono *bSa*, l'asse di questo cono *SC*, quello del cilindro *Xc* che lo incontra, o che non lo incontra, supponiamo dapprima che lo incontri; la sezione piana di questo cilindro per un piano perpendicolare a quello che passa per il suo asse, e seguendo l'incontro con l'asse *SC*, sarà un'ellisse, di cui *EL* sarà il grande asse, e il piccolo asse sarà il diametro *DF* della base del cilindro. Sia la metà di questa ellisse *EdL* che sarà attraversata da tante linee rette parallele quante se ne vorranno avere di doppi punti della curva come *4, 1, 5, 2, 6, 3*, che taglieranno l'asse nei punti *o, c, O,* attraverso i quali si condurranno delle parallele all'asse del cilindro, sino all'incontro del lato *Sb* del Cono, come *Og, cI, oH*; ognuna di queste linee sarà una parte dell'asse della curva che sarà fatta nel Cono attraverso la sezione di un piano parallelo all'asse del cilindro, ed i punti *g, I, H* ne saranno i vertici; nell'esempio presente queste curve saranno delle ellissi, perché le linee *gO, Ic, Ho* prolungate, incontreranno dentro i due lati del Cono *Sb* e *Sa* prolungati, ma se il cilindro fosse stato inclinato seguendo la linea E*e* parallela a *SA*, queste curve sarebbero state delle parabole. Quelle che possono essere queste sezioni, saranno sempre simili tra di loro, benché disuguali; si ha quindi l'asse ed il vertice di queste sezioni, e si hanno anche due punti del loro contorno che danno una doppia ordinata *4, 1, 5, 2, 6, 3*, perché a causa dell'uniformità del cono si può concepire il lato *So* del cono in aria sul lato *SC* in un piano perpendicolare al piano *Sca*, come si vede rappresentato in prospettiva nella ***figura 198***, ma poiché non si può fare questa preparazione sul solido, si tracceranno delle curve sul piano del triangolo *bSa*, portando le lunghezze degli assi *Og, cI, oH* sull'asse *SC* in *OG, cG* e *oK*, e attraverso i punti *4GI, 5C2, 6K3*, si

descriveranno le ellissi o le parabole, o Iperboli che i piani delle parti fanno nel cono, e attraverso i punti *Rdr* delle ordinate della semi-ellisse *EdL*, si condurranno delle parallele all'asse *SC* sino ad incontrare le curve *4GI*[(1)], *5C2*, *6K3*, ai punti *p*, *q*, *v*[(2)].

Avendo fatto questa preparazione, si potrà tracciare l'Ellipsimbre sul cono, tracciando una linea S*b*, (fig. 198), dal suo vertice S alla base, per servire da mezzo alla curva, sulla quale avendo portato le lunghezze S*e*, S*g*, SI, SH, S*l* della Figura 201, e sui lati S*b* ed Sa della Figura 198, delle lunghezze uguali a S4, S1, S5, S2, S6, S3, si tracceranno sulla superficie del cono le ellissi, parabole o iperboli che devono passare attraverso questi tre punti, sui quali si porteranno da una parte all'altra della linea S*b*, gli archi K*u*, C*q*, G*p*, i quali daranno i punti ed i due vertici *e* ed L, attraverso i quali si traccerà a mano l'Ellipsimbre richiesta.

Per tracciare la stessa curva sul cilindro, bisogna aggiungere alla preparazione, delle tangenti a questi archi, come *KT*, per avere la distanza di queste tangenti agli archi delle curve formate attraverso i piani delle parti sui lati del Cono.A tal fine, ce ne serviremo per descrivere l'Ellipsimbre sul cilindro, come si è fatto alla ***Figura 197***. Bisogna ancora sottolineare, che le ***figure 201, 198*** sono state fatte di una grandezza relativa, per mancanza di spazio.

Se l'asse del cilindro non incontra quello del cono, come alla ***Figura 200*** ma che l'ellisse fatta attraverso il piano del triangolo attraverso l'asse che taglia il cilindro al lato, bisogna prolungarne le ordinate fino all'asse e cercare i vertici delle sezioni, e trasportare la linea di mezzo al lato di quella che passa per i vertici delle sezioni coniche della quantità di cui deve essere allontanata dal piano che passa per l'asse dell'ellisse, che sarà nel cono un Iperbole, prendendo questo intervallo sull'arco della sezione conica che taglia questa iperbole; cosa che non è difficile da concepire attraverso gli esempi che vi abbiamo dato per trovare i punti dell'Ellipsimbre sugli archi delle sezioni coniche formate attraverso le parti parallele all'asse del cilindro: in modo che la preparazione possa servire a tracciare le sezioni solide, dove il cilindro non entra nel cono con tutta la sua circonferenza.

DIMOSTRAZIONE.

Lo stesso principio che è servito di base alle dimostrazioni dei problemi precedenti, si applica così naturalmente a questo qui che non richiede che una mediocre attenzione.

Ora per la ***Figura 196*** bisogna tener conto che le linee *gh, Mf, ki* che sono nel piano del triangolo *BSA* devono essere a lui perpendicolari, lo stesso che le linee *GH, XF, KI* che sono le ordinate al diametro *Dd* della base del cilindro, e le corrispondenti che si fanno uguali, devono anche essere ritenute parallele, e nello stesso piano che gli archi del cerchio *gy, Mz, kx;* in modo che se si immaginano delle linee parallele all'asse *Xm* del cilindro passante per i punti *hfi* che sono della superficie, queste linee che ne fanno dei lati, rincontreranno gli archi in determinati punti, come *y, z, x,* che saranno quelli dell'immersione del lato del cilindro nel cono, per conseguenza comuni alle due superfici, e alla circonferenza della curva formata per loro intersezione, dunque gli archi *gy, Mz, kx* sono la misura della distanza dei punti dell'Ellipsimbre al suo asse retto *EL*, sulla superficie del cono.

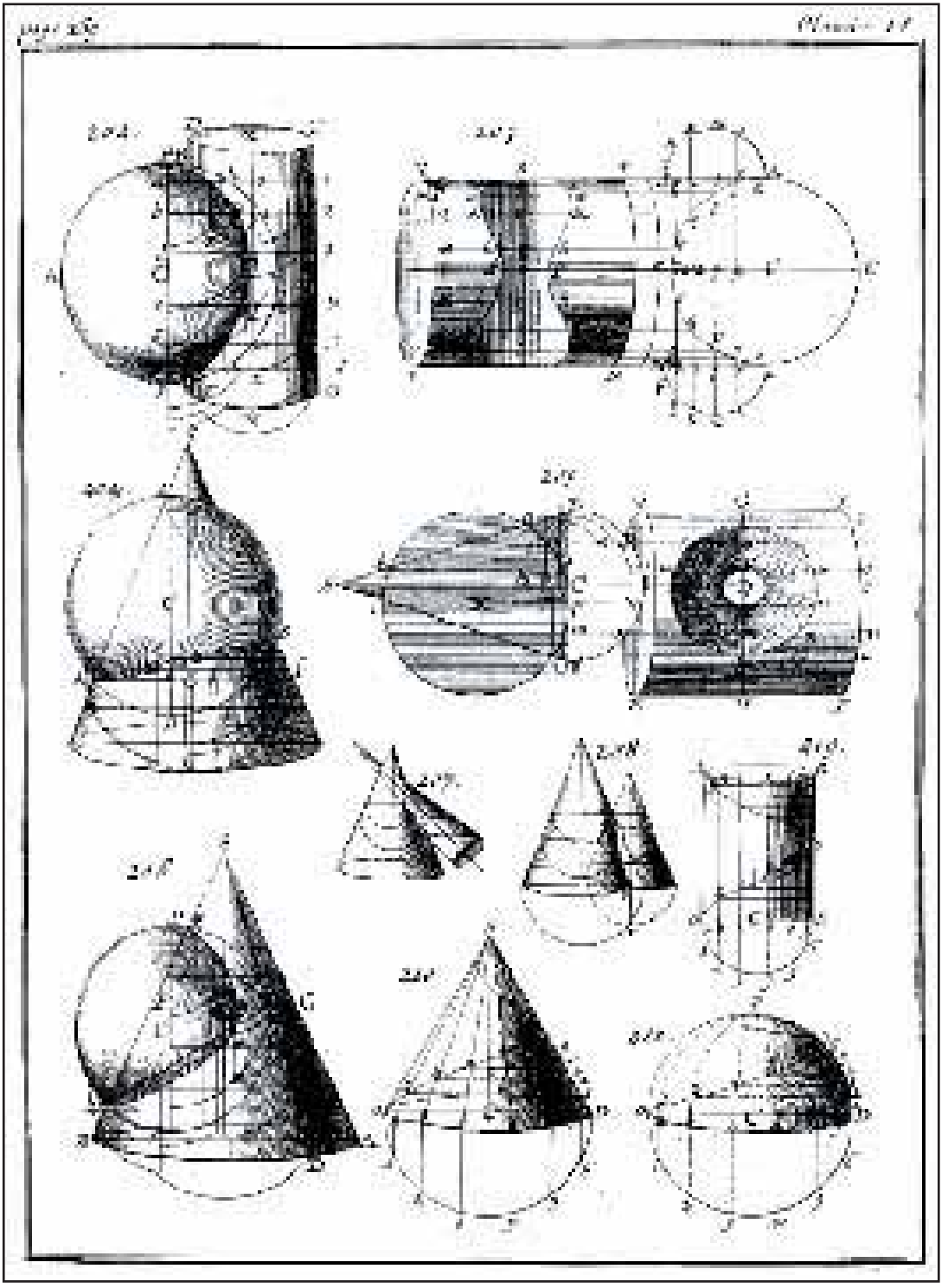
(1). La curva passa per i punti *4G1*.
(2). Riferimento al punto $u_{r.}$

Ma poiché non si possono prendere le stesse misure nel cilindro, quando si vuole tracciare la stessa curva alla superficie, si fa ricorso alla supposizione di un piano tangente al cono, e perpendicolare a quello che passa per l'asse del cilindro, e il lato *EL* del cono, il quale piano tangente fa nel cilindro un ellisse, perché lo taglia obliquamente seguendo la linea *EL*, che è inclinata all'asse *Xm*: o questa ellisse è tutta fuori dal cono, e le linee *gh, Mf, Ki* sono delle ordinate al suo asse *EL*, poiché devono essere supposte perpendicolari, e se sono state fatte uguali a quella del cerchio della base del cilindro; dunque la distanza delle estremità di queste ordinate agli archi di cerchio del cono, prese su delle parallele all'asse del cilindro, danno esattamente i punti di immersione dei lati passanti per i punti *hfi* della circonferenza dell' ellisse piana, tangente al cono; dunque queste distanze sono state portate, come è stato detto alla ***Figura 199*** per avere i punti dell'Ellipsimbre *da tracciare.*

Ciò che noi possiamo aggiungere toccando le pratiche indicate dalle ***Figure 200*** e ***201*** non è che una più ampia spiegazione della prima: bisogna sempre tener presente che attraverso dei piani paralleli che tagliano la base del cilindro e del cono allo stesso tempo, si sono dati dei punti alla superficie del cilindro, come *o, r, D* etc ***Figura 200*** e *Rdr* ***Figura 201*** attraverso i quali si devono fare passare delle parallele all'asse del cilindro per avere dei lati indicati alla superficie; e perché questi lati nella supposizione della ***Figura 200*** sono perpendicolari al piano del triangolo attraverso l'asse, in essa non vi sono stati espressi seguendo le regole della proiezione che attraverso un punto; bisogna dunque inclinare sullo stesso piano di questo triangolo, così come pure gli archi delle sezioni circolari del cono, che non vi sono espresse seguendo le stesse regole della proiezione *1, 4, 2, 5, 3, 6*, e attraverso questo mezzo si trovano le intersezioni di questi archi con i lati del cilindro, i quali danno dei punti comuni alle due superfici; cioè, dei punti della curva che si devono tracciare; e per conseguenza si è obbligati di supporre dei piani tangenti al cono, come noi abbiamo detto, bisogna tirare delle tangenti a ciascuno degli archi di sezione del cono, i quali saranno tutti nello stesso piano che si è supposto tagliare il cilindro e fare un ellisse.

L'ultima pratica è stata sufficientemente spiegata attraverso la costruzione, e da ciò che è stato detto sopra.

L'utilizzo di questo problema è stato indicato al Teorema *XXVI* si presenta assai spesso nelle Fortificazioni in cui i muri sono quasi sempre in scarpa, e dove ci sono degli arrotondamenti, che sono conseguenza delle porzioni di coni troncati, i vertici sono talvolta in basso, come di arrotondamenti delle Controscarpe, e dei fianchi concavi, e qualche volta in alto, come nelle Torri in scarpa, e arrotondamenti degli Orecchioni; in Architettura civile, è più raro.



GLI ELLIPSIMBRES COMPOSTI

Problema XLIII

TRACCIARE UN ELLIPSIMBRES [1] COMPOSTO, FORMATO DALLA COMPENETRAZIONE DI UNA SFERA E DI UN CILINDRO, LA CUI CIRCONFERENZA ENTRI SOLO IN PARTE NELLA SFERA.

Questo problema si rifarà come tutti i precedenti al nostro metodo generale, tracciando delle perpendicolari all'asse del cilindro (fig.202) che attraversano anche la sfera, per le quali si suppone altrettanti piani paralleli tra loro, e perpendicolari al piano passante per l'asse del cilindro, e il centro della sfera, le cui sezioni faranno dei cerchi nell'uno e nell'altro di questi corpi.

Sia dunque la sfera APKp [2] compenetrata dal cilindro DEGF il cui asse è XX per il quale, e per il centro C della sfera, questi due corpi sono tagliati da uno stesso piano: si condurrà per il centro C un diametro PC parallelo a quest'asse, e avendo condotto a queste due linee tante perpendicolari quante se ne vogliono a1, b2, d3, e4, ecc. dai punti a, b, d, e, ecc. per centri e per raggi ah, bi, dk, ecc. si descriveranno altrettanti archi di cerchio (i quarti sono sufficienti) e dai punti o, p, q, r, ecc. presi sull'asse del cilindro per centri, e per raggi i semi diametri della base o1, p2; si tracceranno tanti altri archi di cerchio sino a che non incontreranno quelli fatti precedentemente nella sfera sugli stessi diametri prolungati. I punti delle loro intersezioni x e x saranno comuni alle due superfici, e se da questi punti si abbassano le perpendicolari agli stessi diametri, si avranno le loro proiezioni sul piano passante per l'asse del cilindro e il centro della sfera, sul quale daranno altrettanti punti dell'asse curvo della sezione Pyyyp.[3]

Fatta questa preparazione, ce ne serviremo per tracciare l'Ellipsimbre composto, come abbiamo fatto per gli Ellipsimbres semplici, tracciando altrettanti cerchi sulla sfera e sul cilindro, cominciando a misurare gli archi hx, ix, kx [4], da un cerchio maggiore, in cui ci saranno i due Poli P e p di tutti questi archi; e sul cilindro per tracciare un lato EG o DF, da dove si misureranno a destra e a sinistra gli archi 1x, 2x, 3x, 4x, o le loro differenze, come converrà meglio, perché è sempre più comodo prendere e portare le misure di archi che sono sotto i 90 gradi, che quelli che sono più grandi, a causa della rotondità del cilindro.

[1] *Ellipsis Imbricata*: curva che si ottiene dall'intersezione di due solidi di rotazione,definita nella Planche 3, primo tomo,corollario V.
[2] Nel testo *ABkbA*.
[3] Tutte le costruzioni della planche 18 si devono considerare come sezioni orizzontali dei solidi, successivamente ribaltate per individuare i punti che definiscono le curve d'intersezione, e tali punti infine riportati con rette di richiamo ai piani orizzontali.

La dimostrazione di questo problema è troppo simile a quelle dei precedenti per fermarvisi; ogni arco di cerchio che abbiamo fatto qui, sul foglio di carta, che è quello che passa per l'asse del cilindro, e il centro della sfera, può essere tirato su ad angolo retto su questo piano sulle linee che ne sono i diametri o i raggi, senza che porti alcun cambiamento alla loro intersezione x, e alla loro proiezione y, che è nello stesso piano, e in quello dell'arco.

L' USO di questo problema è stato anche indicato al Teorema XI, è inutile ripeterne la spiegazione.

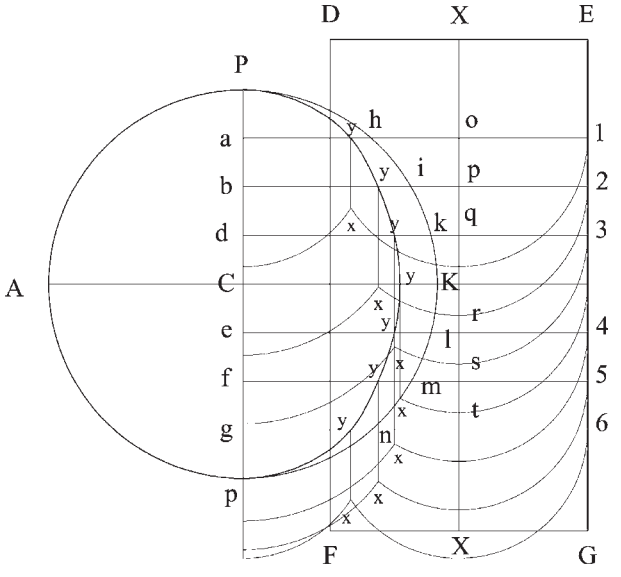


Fig. 202 Ellipsimbre formato dalla compenetrazione parziale di un cilindro con una sfera.

Problema XLIV

TRACCIARE UN ELLIPSIMBRE COMPOSTO, FORMATO DALLA COMPENETRAZIONE DI DUE CILINDRI, DI CUI LA CIRCONFERENZA DELL'UNO ENTRI SOLO IN PARTE NELL'ALTRA.

Ci sono due casi in questo problema, che non cambiano assolutamente la costruzione; sia che i cilindri si taglino ad angolo retto, od obliquamente, in qualsiasi modo s'intersechino, bisogna sempre supporre che siano tagliati da dei piani tangenti a ciascuno dei cilindri che li tagliano reciprocamente, e perpendicolarmente ai piani passanti per ciascuno dei loro assi; di modo che se i cilindri s'intersecano ad angolo retto, le

sezioni di questi piani tangenti ad uno dei cilindri saranno dei cerchi, e se si attraversano obliquamente, le sezioni fatte dagli stessi piani saranno degli ellissi nell'uno e nell'altro cilindro; supposto questo, scegliamo nella figura 203 il caso in cui sono perpendicolari per maggior facilità.

Sia il cilindro YLNI visto dalla base rappresentata dal cerchio AEaB, il quale è compenetrato da un altro cilindro dAaD, che non s'interseca col primo con tutta la circonferenza; di modo che resti una parte FB del suo diametro fuori, la quale corrisponde al doppio dell'arco Dg della base Dha [5], estesa qui per supposizione sul piano del parallelogramma DA passante per il suo asse ll.

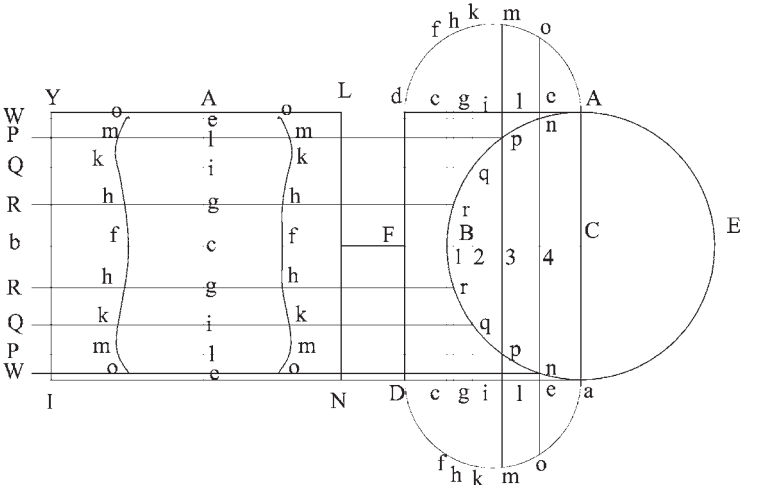
Avendo tracciato un diametro Aa sulla base del primo cilindro BAEa, il quale si confonde qui con il lato del secondo, sia che possa passare tra C e B, o tra C ed E; si traccerà su una delle estremità di questo diametro la perpendicolare dA, o aD che rappresenterà il piano tangente al grande cilindro, e il diametro della base del piccolo, sul quale si traccerà il semi cerchio Dma che rappresenterà la metà di questa base, la quale deve essere però ad angolo retto sul piano del parallelogramma dAaD, ma il cui cambiamento di situazione non ne fa alcuno alle intersezioni delle linee che se ne devono tirare.

Si dividerà poi una delle due basi dei cilindri, in parti uguali o disuguali; divideremo, per esempio qui, l'arco del semi cerchio aBA, o soltanto il quarto di cerchio BA in parti uguali o disuguali Br, rq, qp, pn, nA, e per questi punti n, p, q, r, si tracceranno le parallele all'asse ll del cilindro DA prolungate fino all'arco della base dmA, o Dma, che esse intersecano nei punti h, k, m, o[5].

Fatta questa preparazione, se si vuole tracciare l'Ellipsimbre sul grande cilindro YN, si comincerà a fare alla sua superficie un cerchio parallelo alla base, dove si vuole, se i cilindri sono tagliati ad angolo retto, o un ellisse, seguendo l'obliquità della direzione dei lati del secondo cilindro che lo compenetra. Si trasporteranno su questo cerchio le divisioni Br, Bq, Bp, Bn, in bR, bQ, bP, bN da una parte e dall'altra del punto b, che è stato preso a piacere dalla superficie del cilindro, se la sezione è un cerchio, o un punto corrispondente al punto B, se è un ellisse; e per i punti b, R, Q, P, N si condurranno altrettante parallele all'asse del grande cilindro; poi dopo aver tracciato un cerchio per il centro della sezione, se non si era fatto subito, si porteranno su queste parallele all'asse tutte le ordinate della base del cilindro piccolo da parte a parte del cerchio preso per la metà, come qui aA[6] seguendo l'ordine della loro posizione nei confronti del punto B sulla metà della divisione; cosi si porterà l'ordinata cf proveniente dal punto B in cf sul cilindro grande da una parte e dall'altra del punto c, gh quattro volte in gh, sulle due parallele Rh, Rh; nello stesso modo si continuerà portando iK due volte su ogni parallela QK da una parte e dall'altra dei punti i ed i, e cosi di seguito; e si avranno i punti o, m, K, presoh, f, h, K, ecc. per i quali si traccerà a mano l'Ellipsimbre richiesta.

Se si vuole tracciare la stessa curva sul cilindro DA; si traccerà un cerchio sulla superficie per un punto preso a piacere, o un ellisse, se i due cilindri si tagliano obliquamente, si dividerà la circonferenza di questo cerchio in parti uguali a quelle della base dmA, in alto alla figura, portando subito gli archi df, fh, hK, Km, mo, e ricominciando nell'altro semi cerchio; e per tutti questi punti di divisione avendo tracciato altrettante parallele all'asse del cilindro, si porterà da una parte e dall'altra del cerchio preso per la metà le lunghezze delle semi corde 1r, 2q, 3p, 4n, che daranno i punti r, q, p, n, per i quali si traccerà la curva che è l'ellisse richiesta, la quale sarà uguale alla precedente, sebbene su un cilindro diverso.

DIMOSTRAZIONE



Per dimostrare questo problema, è sufficiente rappresentare i diversi effetti delle sezioni dei piani che tagliano a pezzi i due cilindri, seguendo il nostro principio generale; perché se ci immaginiamo i due cilindri tagliati da dei piani paralleli tra di loro, e ad uno dei due assi, è evidente che essi formeranno dei parallelogrammi in quello in cui i pezzi sono paralleli al suo asse, e dei cerchi nell'altro, se i cilindri si compenetrano ad angolo retto, o degli ellissi uguali se si tagliano obliquamente; ma come si può supporre le sezioni dei piani successivamente paralleli ai due assi, si avranno dei parallelogrammi e dei cerchi in ciascun cilindro che daranno con mezzi diversi gli stessi punti della curva, ciò che abbiamo fatto in questa costruzione per abbreviare; perché si poteva ugualmente dividere il secondo cilindro DA in cerchi paralleli a dA, e prendere su ciascuno, a cominciare dal lato dD, gli archi corrispondenti a ciascuno di questi cerchi, raccolti sulla base dmA, cioè , che al cerchio di mezzo passante per F e B, si sarebbe portato due volte l'arco df, poi alle due collaterali due volte l'arco dh, e così di seguito; ma visto che l'uso delle

[5] Nel testo *Dga.*
[6] Nel testo *gKmo.*
[7] Nel testo *aa.*

linee rette è più comodo e più esatto nell'esecuzione, che quello delle curve tracciate su delle superfici curve, si è scelto le une preferibilmente alle altre, poiché l'una e l'altra maniera devono dare ugualmente i punti di contorno dell'ellisse, che bisognava trovare.

USO

Abbiamo fatto sottolineare nel Teorema XXI che l'uso di questa curva era abbastanza frequente nei centri delle volte, perché la maggior parte sono cilindriche, e che spesso una volta è forata solo da una porzione di cilindro, come accade alle tramogge [8] e alle rampe di cantina.

LE ELLIPSOIDIMBRE

Problema XLV

TRACCIARE UN ELLIPSOIDIMBRE [9] FORMATO DALLA COMPENETRAZIONE DI UNA SFERA E DI UN CONO, IL CUI L'ASSE NON PASSI PER IL CENTRO DELLA SFERA.

La soluzione di questo problema è sempre la stessa, cioè, fondata sul solito principio; si tratta di tracciare delle linee parallele tra di loro sul piano che passa per l'asse del cono, e il centro della sfera, e che siano perpendicolari a quest'asse, le quali saranno i diametri dei cerchi, che i piani passanti per queste linee perpendicolari al triangolo per l'asse del cono, faranno nel cono e nella sfera; le intersezioni dei cerchi del cono con quelli della sfera, che sono sullo stesso piano, daranno i punti della curva sulle superfici dei due corpi, alle quali saranno comuni, e le perpendicolari abbassate dai punti d'intersezione degli archi sui loro diametri comuni daranno le loro proiezioni, e i punti dell'asse curvo dell'Ellipsoidimbre; la figura 204 fa vedere che è cosi che si è tracciato l'asse curvo AdB con una procedura del tutto simile alle precedenti, senza che sia necessario aggiungerci una lunga spiegazione, che potrebbe essere utile solo a quelli che leggeranno questo problema, senza aver letto prima qualcuno dei precedenti; è sufficiente dire in loro aiuto che il punto y è stato trovato dall'intersezione degli archi di cerchio dEx e gfx, avendo abbassato dal punto x la perpendicolare xy sul diametro comune Ef degli archi fatti, l'uno dal centro d preso sul diametro della sfera ID, e l'altro dal centro g preso sull'asse del cono Sh.
Quando diciamo che i piani che formano i pezzi dei due corpi devono essere perpendicolari all'asse del cono, si intende che non è altro che per comodità nell'esecuzione, come avevamo già avvertito il Lettore precedentemente, perché allora tutte le sezioni nel cono essendo dei cerchi, sono le figure più semplici e più facili a descrivere; perché niente impedisce che si facciano le parti parallele all'asse; ma allora i loro piani formeranno delle iperboli nel cono; in modo che i punti dell'Ellipsoidimbre siano sull'intersezione delle varie iperboli,con cerchi differenti, cioè di diversa grandezza; perché le iperboli saranno sempre simili, essendo formate da piani tra loro paralleli. Niente impedirà, almeno che non si facciano le parti inclinate all'asse del cono, ma allora i punti della curva potranno essere nell'intersezione dei cerchi della sfera, e delle altre tre sezioni coniche, ellissi, parabole o iperboli, seguenti l'inclinazione dei piani che tagliano l'asse del cono; poiché il centro della sfera è stato dato nel triangolo dall'asse del cono, si perverrà sempre al solito fine, ma per delle vie più ingarbugliate; cosa che va evitata.

L'uso di questo problema è indicato nel Teorema XIV, per gli spigoli delle lunette strombate, o volte di feritoie, che raccordano una volta sferica, o di un pennacchio che raccorda un conca absidale.

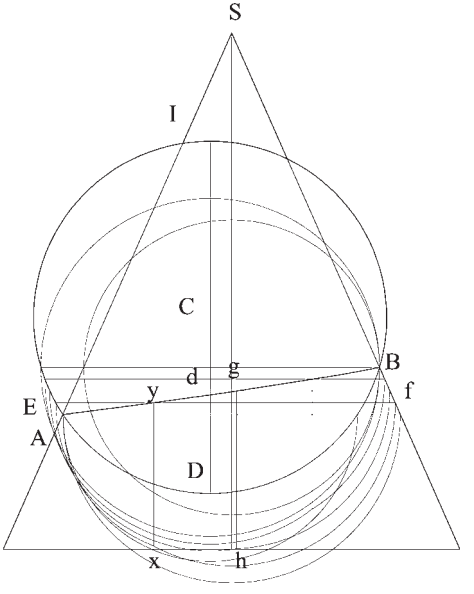


Fig. 204 Ellipsoidimbre formato dalla compenetrazione di un cono con una sfera.

[8] Nel testo *abajours*, qui inteso abat-jour.
[9] La definizione di questa curva è trattata nella Planche 3.

Problema XLVI

DESCRIVERE UN ELLIPSOIDIMBRE FORMATO DALLA COMPENETRAZIONE DEL CONO NEL CILINDRO, SULL'INCASTRO DELLE LORO SUPERFICI.

Sia (fig. 205) il cerchio KBAi, che rappresenta la base del cilindro, e il triangolo SDd, che è la sezione del cono per il suo asse SC, il quale passa, o non passa per il centro X della base del cilindro: le intersezioni di questo cerchio con il triangolo danno i punti comuni alle due superfici del cono e del cilindro; sapendo, due punti nella sua immersione AB, e due punti senza la sua emersione iK, i quali sono conseguentemente dell'Ellipsoidimbre.

Si dividerà l'arco BA avendone delle parti uguali o disuguali che si vorranno, per le quali si tireranno le perpendicolari all'asse SC del cono, come gn1, eo2 o em3, e i punti g ed e per centri, e per raggi la parte compresa nel rono g1, e2 o e3, si descriveranno degli archi di cerchio 1R, 2u, 3x, e per i punti n, o, m delle divisioni, si condurranno le parallele all'asse SC fino a che non incontreranno questi archi, che saranno tagliati nei punti R, u, x, le quali saranno sul contorno della curva; se si suppongono questi archi sollevati in aria perpendicolarmente al triangolo per l'asse sui loro diametri.

Per fare uso di questa preparazione nella descrizione dell'Ellipsoidimbre sul cilindro, si traccerà un cerchio sulla superficie, per fare da centro alla curva, per esempio GH, sul quale avendo trasportato le divisioni dell'arco BA, a cominciare dal punto Q preso dal punto C della preparazione, si porterà Co e Cp, in Qo e Qp, Cn in Qn, e Cm in Qm, e per i punti n, o, m, p, si condurranno delle parallele all'asse del cilindro, sulle quali a cominciare dal cerchio GH, si porteranno da una parte e dall'altra del cerchio le ordinate degli archi 1R, 2u, 3x, che sono nR in rn, ou in ou [10], mx in mx, e per i punti r, u, x, ecc. trovati sulla superficie del cilindro, si traccerà a mano la curva che sarà l'Ellipsoidimbre proposto.

Secondariamente, se si vuole tracciare la stessa curva sul cono, si tirerà dalla sommità S due lati sulla superficie diametralmente opposta, come SDSd; si prenderà su ciascun di questi, le distanze SB, SA, e SK, Si, se si vuole tracciare la piccola sezione, e sul lato SD avendo portato gli intervalli B1, B2, si tracceranno per i punti 1 e 2 dei cerchi paralleli alla base, sui quali si porterà da una parte e dall'altra di questo lato, gli archi 1R, 2u, sull'altro lato sempre da una parte all'altra l'arco 3x, e per i punti R, u, x, si traccerà sul cono a mano, o con una riga, o con un bastoncino rotondo e pieghevole, la curva che sarà l'Ellipsoidimbre richiesto.

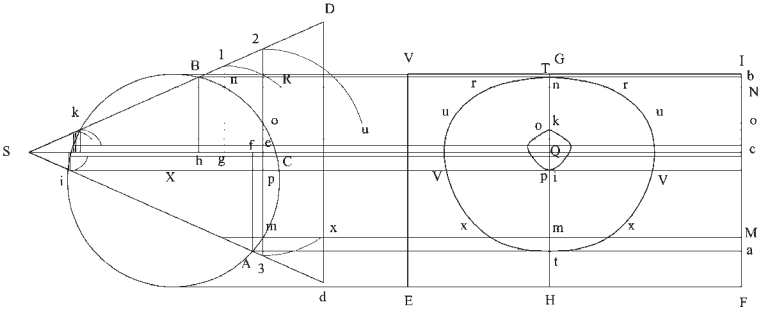
[10] Nel testo manca la *o*.

[11] Nel testo Talud, qui tradotto come *Talus*=scarpa, obliquo.

Se l'asse del cono era inclinato rispetto al lato del cilindro, è chiaro che al posto dei cerchi, bisognava tracciare degli Ellissi.
La Figura fa anche vedere a colpo d'occhio, come si deve fare la proiezione di questa curva, tirando per i punti dati n, o, m le parallele all'asse del cono, le quali essendo attraversate da una perpendicolare GH sullo stesso piano, se si porta da una parte all'altra di questa linea su ogni parallela l'ordinata corrispondente del cerchio fatto per ogni parte, si avranno i punti T, r, u, x, t, ecc. per le quali conducendo una curva, si avrà la proiezione dell'Ellipsoidimbre richiesto.

La dimostrazione di questo problema è facile da percepire, se ci si rappresenta gli archi 1R, 2u, 3x elevati perpendicolarmente sui loro diametri, e sul piano del triangolo per l'asse del cono; perchè allora le ordinate nR o mx rappresentano i lati del cilindro che passano per i punti R, u, x, della superficie del cono, dove sono le loro intersezioni; e di conseguenza i punti comuni alle due superfici, che sono sul contorno dell'Ellipsoidimbre; ciò che bisogna trovare.

Abbiamo indicato nel Teorema XXVI l'uso di questa curva, le nostre strombature nelle torri, o nei piani concavi senza scarpa [11], o delle porte



strombate in muri arrotondati dai loro piani senza scarpa, sono delle porzioni di cono che compenetrano dei cilindri.

Problema XLVII

DESCRIVERE UN ELLIPSOIDIMBRE FORMATO DALL'INTERSEZIONE DELLE SUPERFICI DI DUE CONI I CUI ASSI SI INTERSECANO.

Questa curva si descriverà attraverso il nostro metodo generale, tagliando i coni con dei piani paralleli tra di loro, e perpendicolari all'asse di uno dei due; la curva sarà nell'intersezione dei cerchi e delle ellissi, di cui si hanno i centri e i diametri o raggi, e gli assi delleellissi che si troveranno nel piano che passerà per i due assi; la figura 207 e ciò che abbiamo detto altre volte in simili costruzioni sono sufficienti per mettere questa

pratica sotto gli occhi.

L'USO di questo problema è principalmente per le strombature o porte

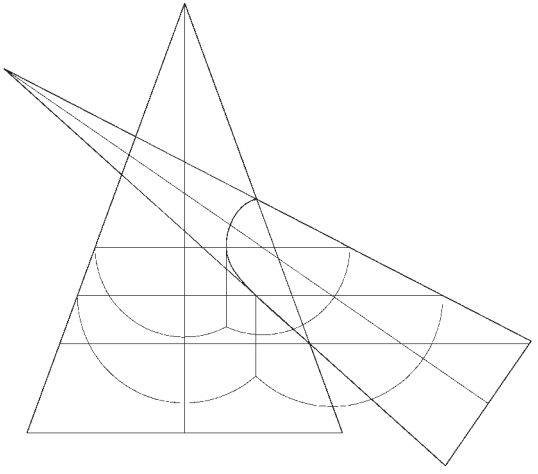


Fig. 207 Ellipsoidimbre composto formato dall'intersezione di due coni

strombate in torre cava o rotonda, e nella scarpa, supponendo che siano diritte,cioè che il loro asse o linea di direzione, sia perpendicolare alla tangente del muro arrotondato, o alla corda che il diametro della porta o strombatura; se la direzione è rampante, questi sono due coni di cui gli assi si tagliano obliquamente.

GLI ELLIPSOIDIMBRES COMPOSTI.

ProblemaXLVIII

TRACCIARE UN ELLIPSOIDIMBRE COMPOSTO SULLE SUPERFICI DEL CONO E DELLA SFERA CHE SI COMPENETRANO.

La soluzione di questo problema non ha niente di particolare, se il modo di trovare gli assi diritti delle due parti delle curve che s'incrociano per [12] Vedi Planche 3.

farne una da due; ciò determina i loro punti di curvatura sul piano passante per l'intersezione di questi due assi, perpendicolarmente a quello che passa per l'asse del cono.
Sia la figura 206 la sezione di un cono per il suo asse, e di una sfera per il suo centro; se si tira dalla sommità S una tangente STD al cerchio della sfera PTH, le linee tracciate dai punti E e H, dove la sfera taglia il cono nel punto di contatto T, saranno quelle che cerchiamo, e il punto y, proiezione del punto x, intersezione degli archi Tx della sfera fatta dal centro F, e Gx del cono di centro m, sarà quello di curvatura formato

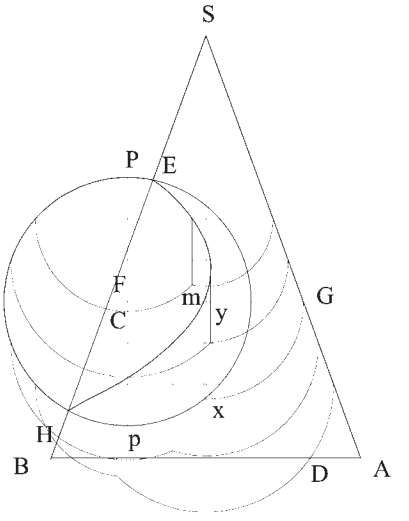
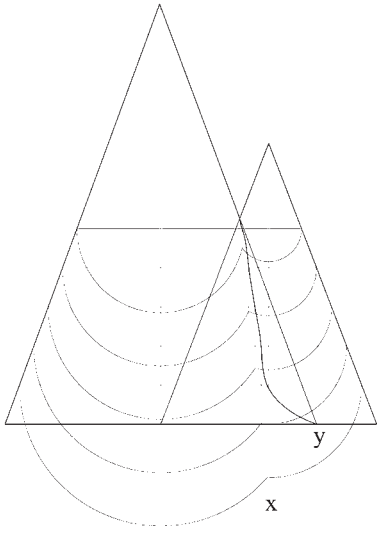


Fig. 206 Ellipsoidimbre composto formato dalla compenetrazione di un cono ed una sfera.

dall'incontro dei due punti dell'ellisse della parte superiore e inferiore del cono; gli altri punti si troveranno come al solito con l'intersezione degli archi della sfera, i cui centri sono sul suo diametro Pp parallelo all'asse del cono, e degli archi di sezioni del cono, i cui centri sono sul suo asse Sm.

APPLICAZIONE DELLE PRATICHE PRECEDENTI A CURVE QUALSIASI FORMATE DALLE INTERSEZIONI DI CILINDRI E DI CONI.

Poiché si sa che le sezioni delle sfere, sferoidi, coni e cilindri fatti per dei piani, sono sempre del numero di quelle che chiamiamo coniche che non escono mai dal secondo grado, e che quando sono parallele, esse sono sempre simili: qualsiasi possa essere la sezione di questi corpi che si compenetrano, sia nei confronti dei loro assi, o dei loro lati, si



troverà sempre su ogni porzione l'intersezione di due di queste curve, che darà due punti della curva piana o a doppia curvatura, che si forma dall'incontro delle due superfici; questo basta per colmare nella pratica ciò che può mancare alla nostra teoria, riguardanti i Parabolidimbres, Hyperboloidimbres [12] o altri possibili, come si vede nelle figure 207 e 208.

SULLA DESCRIZIONE DELLE ELICHE E DELLE LIMACES [13].

Sebbene le eliche non siano dello stesso numero delle curve che sono prodotte dalla sezione dei corpi, alle quali ci siamo limitati; queste sono così usuali in architettura, che si ha spesso bisogno di tracciarle.

La parola elica viene dal greco Heliso, cioè, circumvolvo, giro intorno; alcuni matematici hanno applicato questo nome alla spirale,che è una curva piana, cioè descritta su un piano; ma la maggior parte l'hanno riservato per quelle che si elevano sopra un piano girando intorno ad un corpo, come l'edera, il vilucchio e il convolvo intorno ad un albero. Per me che cerco di evitare le perifrasi, restringo il significato a quelle che girano intorno ad un corpo cilindrico senza avvicinarsi al loro asse, per distinguerle da quelle che avvicinandosi, che chiamo Limaces, in cui si distingue un'altra curva che è sul piano, e che si chiama la Limaçon [14] di M. Pascal, che è una specie di spirale.

[13] *Limace*=lumaca.
[14] *Limaçon*= chiocciola.

Divido ancora le eliche in regolari e irregolari, le regolari sono quelle che salgono intorno ad un corpo cilindrico con un movimento uniforme, come sono le viti, il cui intervallo di ogni rotazione che chiamiamo il passo della vite è sempre lo stesso; le irregolari sono quelle, il cui passo di ogni rivoluzione, aumenta o diminuisce seguendo una certa proporzione che ci siamo fissati.

Problema XLIX

TRACCIARE UN'ELICA SU UN CORPO

CILINDRICO.

Per descrivere questa curva, si traccerà un cerchio intorno al cilindro, se è retto su una base circolare, o un'ellisse se è scaleno, ma dritto su una base ellittica, e si dividerà la circonferenza in altrettante parti uguali come si preferisce, come figura 209 in sette per la metà che si vede, cioè, 14 per il circuito intero; e per queste divisioni si condurranno altrettante parallele all'asse del cilindro; poi si regolerà l'intervallo di rotazione a piacere, e se ne dividerà uno come OA o il suo uguale BD in tante parti uguali quante sono quelle che dividono la base del cilindro (nell'esempio presente in 14 parti) e si porterà su ogni parallela all'asse una di più che della precedente. Così cominciando da niente nel punto o, si porterà una di queste divisioni sulla parallela ag al punto 1, sulla seconda bh due, al punto 2, sulla terza ci tre, al punto 3, e così di seguito finchè non si arriva alla metà del punto 7 allora si ritornerà verso il punto A facendo lo stesso accrescimento, e continuando così fino alla sommità del cilindro.Se l'elica è irregolare, le divisioni da D a B saranno nel rapporto di tangenti o di secanti, o di altre progressioni; la costruzione sarà sempre la stessa, e la stessa proporzione regnerà tra i passi della vite, che abbiamo fatto regnare nell'intervallo di uno solo.

COROLLARIO

Da qui segue che se due eliche di basi differenti, cioè di diverso diametro, fanno lo stesso numero di rotazioni intorno ad un asse comune, gli intervalli dei passi avranno una proporzione più grande alla loro base più sono piccoli, e al contrario più piccola proporzione nei confronti dei più grandi; cioè, che i passi della vite, anche se alla stessa distanza, saranno più inclinati e gli altri più calanti.

USO

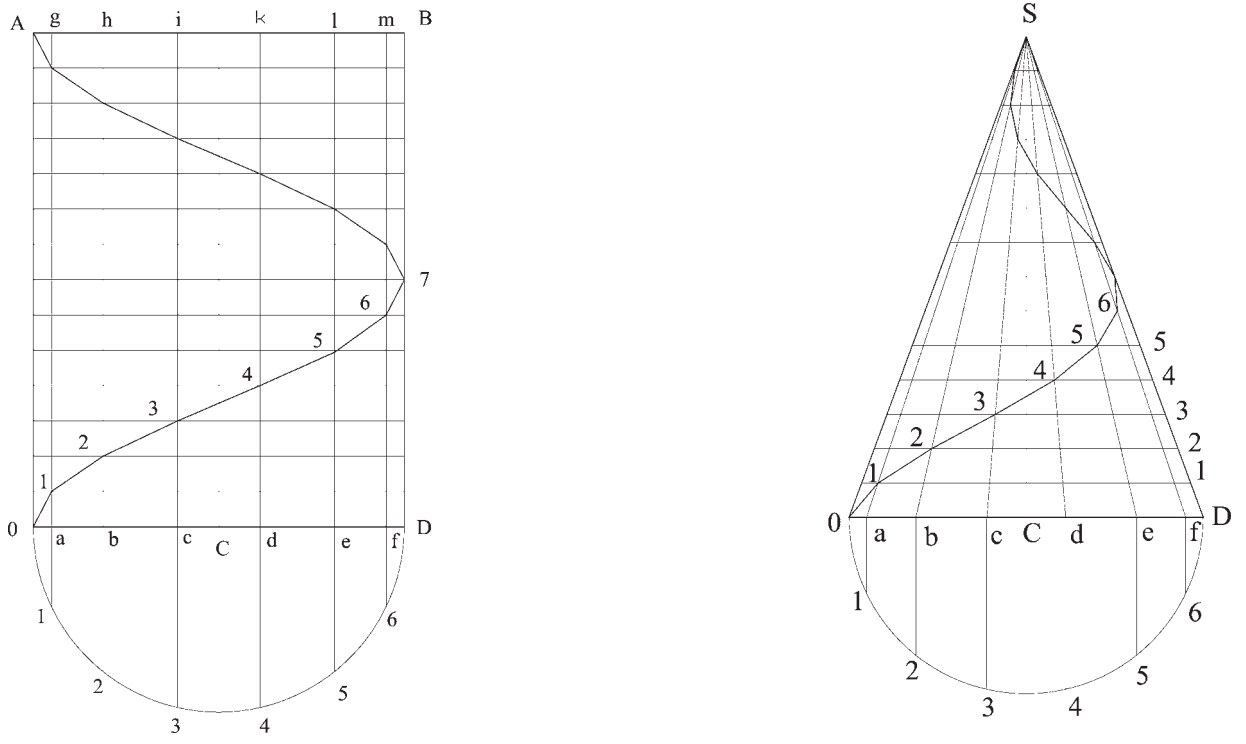


Fig. 209 Elica tracciata su un corpo cilindrico.

Questo problema serve per svariate opere. Principalmente a tracciare le grandi viti, le colonne tortili, l'origine delle volte tornanti e rampanti, come la vite S.Giles, e i giunti di Doele della stessa vite, i montanti girevoli, che gli installatori chiamano la curva rampante, il sotto dei gradini tornanti della vite, gli appoggi delle finestre e delle balaustre nella torre rotonda o cava, ecc. così come l'applicheremo nel IV Libro.

LE LIMACES

Le Limaces sono, come si è detto, delle eliche che si avvicinano continuamente al loro asse. Oppure esse possono avvicinandosi in questa proporzione che si vorrà far regnare tra le linee rette tirate dai punti della curva perpendicolarmente al loro asse; così si può descrivere questa curva su tutti i corpi conici, sferici o conoidi e sferoidi, ellissoidi, parabolidi, o iperboloidi, o altri corpi formati dalla rotazione di qualche curva sul suo asse; diamo qui per esempio il cono e la sfera, figura 210 e 211.

Si può ancora far regnare una certa progressione tra gli intervalli di ogni rivoluzione di questa curva, o farli uguali seguendo il disegno che si propone.

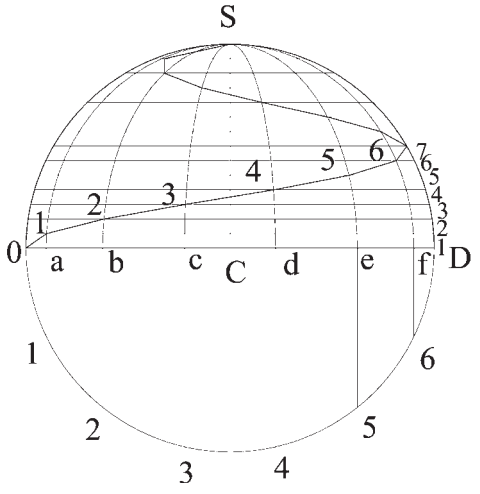
Problema L

TRACCIARE UNA LIMACES SU DI UN CONO O SU DI UNA SFERA, O SFEROIDE.

Si dividerà la base del cono (Figura 210) o la base circolare o ellittica di una semisfera o di un semisferoide in tante parti uguali che si vogliono, per cui si tirerà altrettante linee rette alla sommità del cono, o tanti cerchi o ellissi al polo P della sfera o dello sferoide. Dopo si dividerà il lato del cono in uno stesso numero di parti, se si vuole una rotazione, o se se ne vogliono svariate in un più gran numero, come il doppio, il triplo o quadruplo, e si faranno queste parti uguali se si vuole, o decrescenti

seguendo un certo rapporto, per esempio per il cono, si possono far diminuire seguendo il rapporto delle parallele alla base di un triangolo isoscele formato da due dei lati del cono, e per la prima divisione presa a piacere, e per la semisfera, per gli archi paralleli alla base di un triangolo sferico, come cdP (Figura 211) la cui base cd sarà presa a piacere per il primo intervallo; ciò che darà una scala di divisioni disuguali, che porteremo su ogni linea del cono tendente alla sommità, come su aS (Figura 210) una divisione, su bS due, su cS tre, e così via.

Per la sfera, si porteranno sul cerchio tendente al polo le misure seguenti lo stesso con il loro aumento di una parte su ognuna.



USO

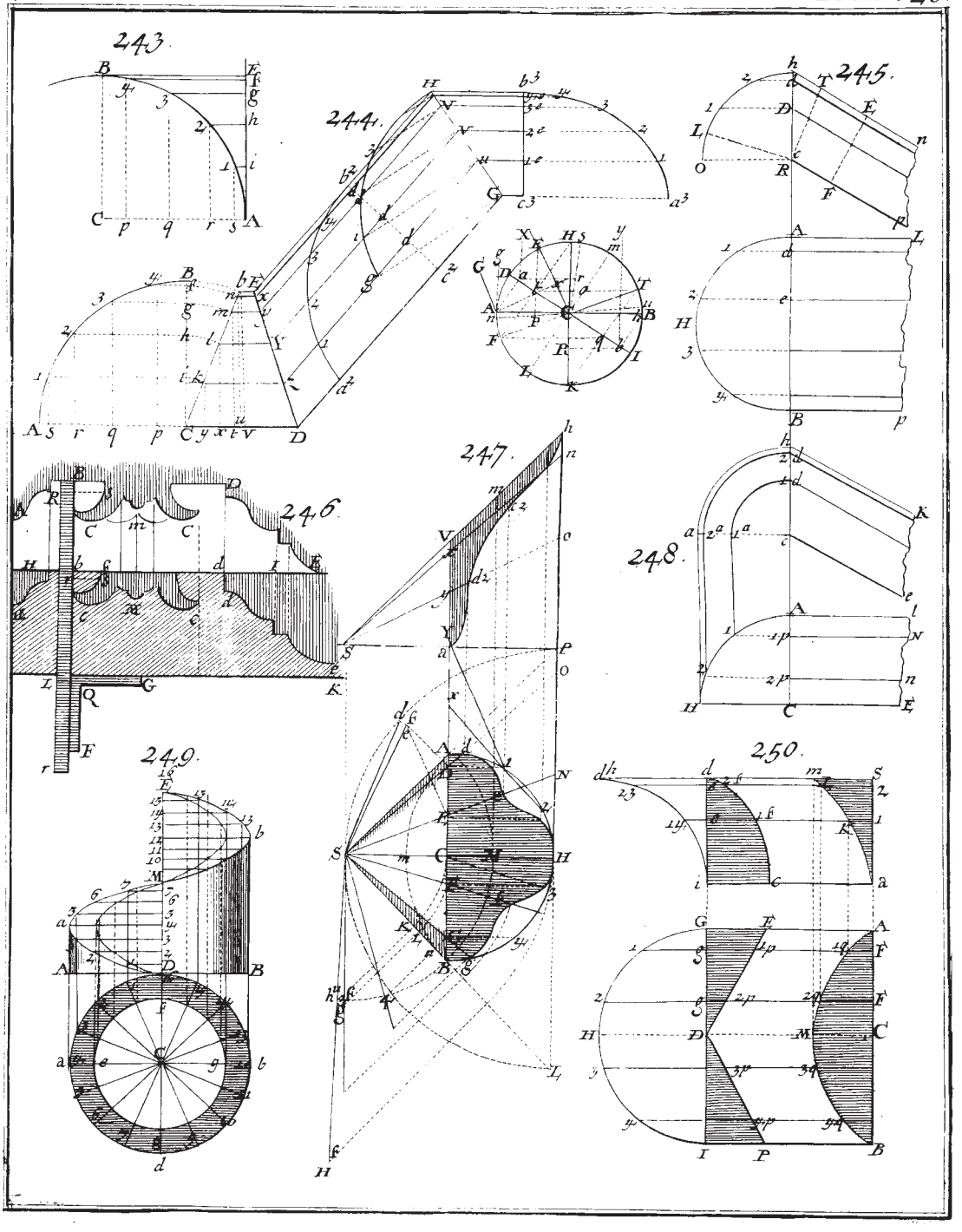
Non è senza esempi che si sono fatti degli edifici a Limaces. Abbiamo riportato una stampa di un progetto di una cappella per il centro del Louvre, la cui sommità si conclude a Limace; si crede che la torre di Babele fosse così, come la vediamo nel Trattato che ha fatto P. Kirker, il Cavaliere Borromini ha fatto anche la Lanterna [15] che corona tutta la volta della Chiesa di Sant'Ivo [16] alla Sapienza a Roma; ma senza esser ricorsi all'applicazione di questo problema in edifici grandi, possiamo trovarla abbastanza spesso nei piccoli, per certi Ornamenti di volute fallanti o rientranti. La natura ci dà meravigliosi esempi di varietà di



[15] Nel testo *Chapiteau*=capitello.
[16] Nel testo *Saint Leon de la Sapience* (?).

page 311

Planche 20.



CAPITOLO III

Sull'ortografia, o sulla proiezione su un piano verticale

I °

IL PROFILO

Come noi abbaiamo appena detto, si può trovare per mezzo della proiezione orizzontale, ovvero per mezzo del *piano* iconografico, cioè le misure orizzontali; ma perché si ha anche bisogno di misure verticali, e qualche volta delle proiezioni su di un piano inclinato, bisogna rapportarsi ad un piano verticale; in questo modo il disegno si chiama *profilo*, e non è meno necessario della precedente che si chiama *il piano*.
La proiezione verticale cambia il nome, seguendo la situazione nella quale si rappresentano gli oggetti; se essi sono rappresentati di lato, seguendo la loro profondità, si chiama *profilo;* se sono rappresentati nel loro interno, seguendo una lunghezza parallela alla loro superficie, che si suppone tolta, si chiama *spaccato;* se (gli oggetti) sono visti di fronte, si chiama *elevazione.*
Questa differenza consiste soltanto nella definizione, mentre non c'è alcuna differenza nel metodo di rappresentazione: si tratta sempre di una proiezione sul piano verticale; considerandola meglio ci rendiamo conto che è anche lo stesso metodo che utilizziamo per fare la proiezione orizzontale; si tratta infatti di supporre una posizione di un piano verticale, al posto di un piano orizzontale e condurre su questo piano delle linee orizzontali, al posto delle verticali, attraverso gli angoli o divisioni dell'oggetto. Se non si trattasse qua di introdurre il lettore nei principi di un arte, di cui bisogna dargli delle idee distinte, noi avremo confuso il piano, il profilo e le elevazioni sullo stesso nome di *proiezione;* perché le regole che ne costituiscono la differenza, sono puramente accidentali.

PRIMA REGOLA

Per le volte cilindriche

Dato un centro supposto in posizione verticale, bisogna condurre attraverso tutti i punti della sua divisione in cuneo di linee orizzontali, fino all'incontro di una linea verticale o supposta tale, per farne il profilo.

Questa regola non differisce dalla quarta del capitolo precedente, solo perché queste linee non sono portate sul diametro orizzontale, ma su una linea che gli è perpendicolare. Consideriamo *AE*, (***Fig.243***) sul raggio *CA*, sul quale si è portato le parallele all'orizzonte *BE, 4f, 3g, 2h, 1i*, per avere le altezze dei punti *4, 3, 2, 1*, uniti su questa linea *AE*.

Si poteva invece dalle orizzontali *BE, 4f, 3g*, etc. abbassare delle perpendicolari *4p, 3q, 2r, 1s*, come faremo più avanti per la proiezione orizzontale, e trasportare con il compasso la lunghezza di ognuna di queste linee su *AE*, a cominciare dal punto *A*; sapendo *p4* in A*f, q3* in A*g*, etc. avremmo avuto gli stessi punti *Efgh;* ma è più pratico cercarli attraverso delle perpendicolari su *AE*, perché esse ne fanno conoscere le origini ,e il punto di divisione che si è voluto rappresentare; ciò permette di non fare confusione: ogni punto della linea *AE* ne rappresenta sempre due, poiché i centri sono ugualmente divisi in ognuna delle loro metà (come avviene di solito e a causa di più motivi geometrici); per questo motivo nella nostra ***Fig. 243*** e ***Fig. 244*** noi consideriamo solo un quarto di cerchio, che è una metà del centro, al posto di un semicerchio che fa un centro tutto intero; dove si può rimarcare che è indifferente piazzare la verticale del profilo fuori del cerchio, come *AE* nella ***Fig. 243*** o dentro il cerchio, come *hR* nella ***Fig. 245***

.

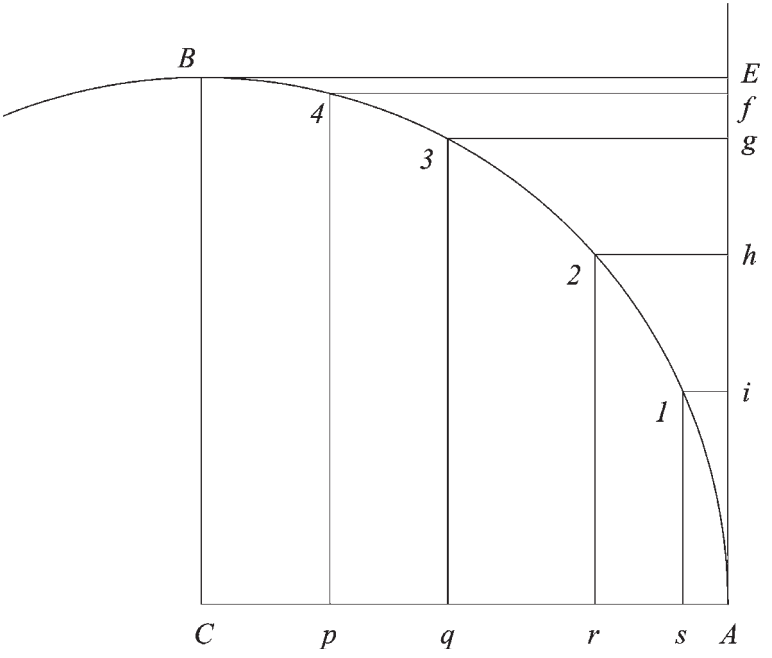


Fig. 243 La figura rappresenta i due possibili metodi per dividere la curva in parti per la regione per la quale si uniscono così tutte le altezze delle divisioni di un centro su una sola linea, è:
Le ragioni del profilo
PRIMO, per far vedere l'effetto di una volta vista dal lato, dove le direzioni delle giunture di letto si ristringono via via che ci si avvicina alla cima del vertice, poiché essi sono distribuiti intorno al centro a distanze uguali.
SECONDO, per cambiare la direzione di queste giunture, quando le volte a botte sono inclinate, come in ***Figura 245*** dove s'incontrano su qualche angolo, come vediamo nella ***Figura 244***, questo determina le altezze disuguali delle volte a botte della stessa larghezza, che sono inclinate tra loro.
TERZO, per trovare le altezze delle divisioni dei centri delle facce inclinate all'orizzonte, perché supponendole su un piano verticale, come *CBA*, ***Figura 244*** ed unendole su una linea anche essa verticale *CB*, non si tratta più che di inclinare questa linea, come in C*b*, nella situazione

dove essa deve essere a riguardo dell'orizzonte, cioè, seguendo il suo talud, e attraverso degli archi di cerchio *Bb, fn, gm,* etc.. Si determinano così tutte le altezze di queste divisioni *bv, nu, mt, lx, ky,* le quali sono diverse dalle prime BC, *4p, 3q, 2r, 1s,*che erano più grandi.

SECONDA REGOLA

Portare delle parallele alla direzione delle volte a botte, attraverso i punti delle loro proiezioni su una linea verticale, per evidenziare le giunture del letto quando queste parallele incontrano una linea di congiunzione di due botti; riprodurre queste stesse linee parallelamente alla direzione della seconda botte, e così di una terza.

Questa regola si capirà più facilmente attraverso l'esempio della ***Fig. 245*** dove si è rappresentato una discesa *hnpR,* e della ***Fig. 244*** dove si è rappresentato un'altra *HD,* che porta due botti orizzontali *EDCb* nel basso, e *HG, c³, b³* nell'alto.

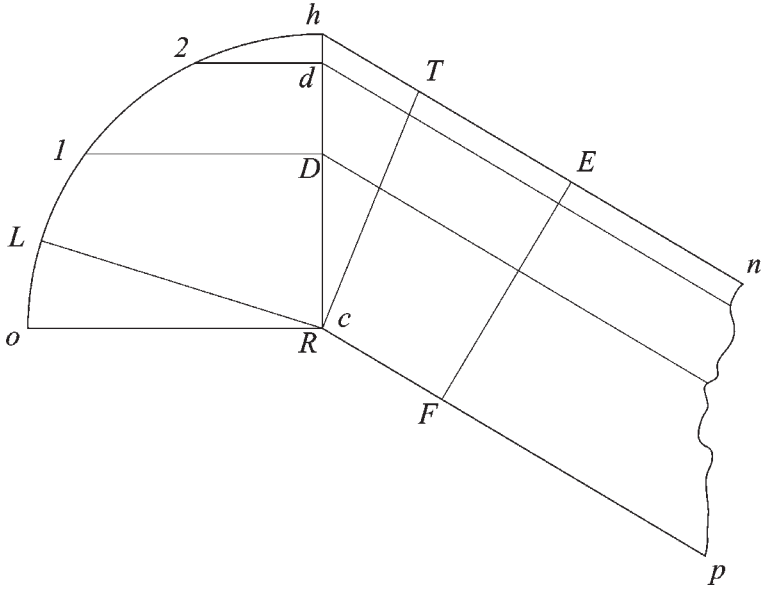
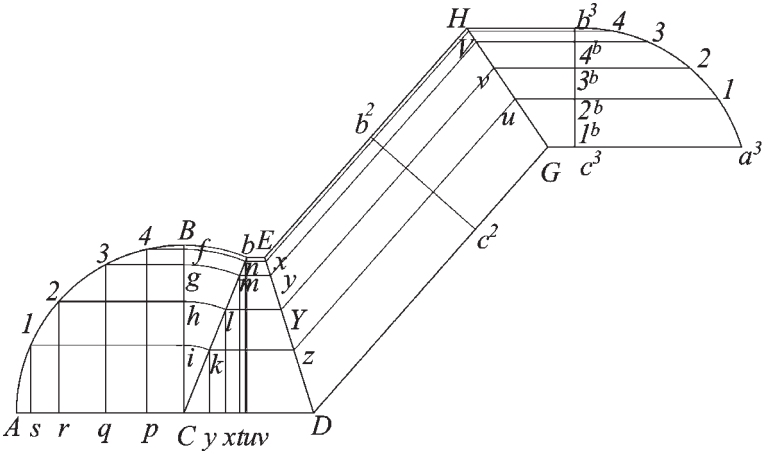


Fig. 245 Il testo non descrive il metodo per determinare il punto L.

Avendo trovato attraverso la regola precedente le divisioni della linea *Cb,* uguale a *CB,* si traccerà attraverso i punti trovati *nm, lk* (1), le parallele *nx, my, lY, k2,* (2) fino all'incontro della linea *ED,* che rappresenta il piano dell'ellisse comune ai due cilindri *EDCb e HD*; attraverso i punti *x, y, Y, z,* si tracceranno tante parallele alla linea *EH* o *DG*, che daranno intervalli delle giunture del letto della seconda botte più ristretta fino alla seconda linea *HG*, da dove si riprodurrà parallelamente a *Hb³,* la direzione della terza botte; se ce ne sono altri, e si continuera con lo stesso metodo per tuttele direzioni di letti del quarto.



La ragione di questa operazione, è che le giunture di letto devono essere continuate in linea diritta, parallelamente alla direzione dei piedritti delle volte, e delle loro imposte; è per questo motivo che sono rappresentate attraverso delle linee parallele nel *profilo*, analogamente a quanto abbiamo fatto per il *piano;* la sola differenza è che le parallele della proiezione orizzontale si ristringono verso le imposte, e che nel profilo, essi si ristringono verso la chiave; intervalli di queste parallele misurate perpendicolarmente, sono seni diritti dell'inclinazione delle corde degli archi di ogni cuneo, come gli intervalli delle parallele della proiezione orizzontale, sono il seno dei loro complementi; in modo tale che avendo trovato le une e le altre attraverso questi due metodi di proiezione, si ha che le due gambe dei triangoli rettangoli, la cui ipotenusa è la corda dell'arco del centro, individuano le divisioni di ogni cuneo. In questo modo si determina la posizione di questa corda rispetto all'orizzonte, l'angolo che deve fare con la corda dell'arco seguente, sia per la porzione del cerchio sia per la porzione dell'ellisse.

TERZA REGOLA

Trasportare tutte le perpendicolari tracciate di divisioni del centro primitivo al raggio verticale, sul semidiametro di ciascuna volta, per avere la curva dei centri secondari, tanto degli archi diritti, che degli inclinati.

Sia ***Fig. 241*** (3) il quarto di cerchio *CBA*, metà del centro primitivo diviso alla sua circonferenza dai punti *1,2,3,4;* avendo tracciato attraverso questi punti delle perpendicolari al suo semidiametro verticale, come *1i, 2h, 3g, 4f,* se le trasporterà su tutti i diversi semi diametri delle botti: 1° come inclinato sul talud C*b,* 2° la verticale *bv,* che è l'arco diritto.

(1) Nella costruzione i punti trovati sono *n, m, l, k*

(2) Nella costruzione la lettera è *z* minuscola e non *2*.

(3) Il disegno appartiene alla planche 19

3°l'inclinazione d'incontro *FD*.
La perpendicolare alla direzione c^2, b^2, che è l'arco diritto della discesa *HD*. L'inclinazione del rincontro *HG*.
La verticale di uscita c^3, b^3, che è anche un arco diritto, in una parola dappertutto dove si vorrà avere il cambiamento dei centri che danno le diverse sezioni dei piani passando attraverso questi semi diametri. Così per formare il centro dell'arco diritto della botte rampante *HD*, avendo tracciato a piacere la perpendicolare b^2, c^2, che taglierà le parallele originarie dei punti *1,2,3,4,* ai punti *d, d, d,* si porterà su ciascuna di queste parallele le lunghezze corrispondenti dei centri primitivi *AB*, delle ordinate *1i, 2h, 3g, 4f,* in *d1, d2, d3, d4,* e si avrà l'arco diritto b^2, a^2, abbassato si trasporterà così le stesse ordinate perpendicolarmente sulle divisioni della linea *HG*, per avere l'arco d'incontro *H3, ig*, infine sulla linea c^3, b^3, come lo marcano le stesse cifre per avere l'ultimo centro di faccia superiore b^3, a^3.
Si osserverà la stessa costruzione a riguardo della linea *DE,* se si voleva avere il centro d'incontro di diversi botti, con questa sola differenza: al posto delle linee oblique che tagliano il profilo, bisogna portare delle perpendicolari su ognuna delle divisioni, che danno queste linee, come si vede in *Ggt, u1, v2, v3;* cosa che non si è fatto in questa Figura per evitare confusione.La ragione di questa operazione, è che essendo le larghezze delle botti tutte uguali, la loro differenza non può essere che nelle altezze. Poiché le botti sono inclinate all'orizzonte, le ordinate parallele al piano, che passano tra le imposte, saranno delle orizzontali e dunque uguale a quelle che erano parallele al raggio *AC*, le quali determinano le larghezze, e tagliano i semidiametri, che sono nei piani verticali in parte proporzionali, tali che devono essere le ascisse dell'ellisse.
Se le botti fossero rampanti seguendo le imposte, allora la linea *AC* diventerebbe inclinata al raggio verticale *CB*, e tutte le altre ordinate gli sarebbero parallele.
A questo proposito basta ricordarsi di prendere per centro primitivo una faccia distesa in talud come *Cb,* o la sua altezza verticale *bv,* che è l'arco diritto della botte orizzontale; poiché è in pieno centro, l'altro sarà riabbassato o sormontato. Sta all'architetto vedere ciò che conviene meglio al suo disegno.

Sui profili delle botti a doppia obliquità

Tutti i profili di cui abbiamo appena parlato, suppongono solo un'obliquità, o una direzione, a riguardo di un piano verticale, come le discese o l'inclinazione della faccia, come le talud; in altri casi che se ne può esprimere i profili, senza scorciare o le facce o le assi in modo che non sia più necessario prenderci la misura, come sono le obliquità della smussatura semplice, della smussatura o del talud unite insieme, o della discesa e della smussatura; perché allora se il piano di descrizione è parallelo ad una delle direzioni, non lo è all'altra.
Si vedrà nel IV libro il modo di fare i profili di queste differente tipi di volte oblique, e di come utilizzare il piano orizzontale, e dei secondi profili al restringimento che si trovano nelle parti del primo, e che non ci possono essere nelle loro misure.
Come noi non diamo qua che delle regole generali, noi non entreremo per niente nel dettaglio di tutte le differenti composizioni di obliquità; ma faremo vedere come si possono ridurre in una sola.

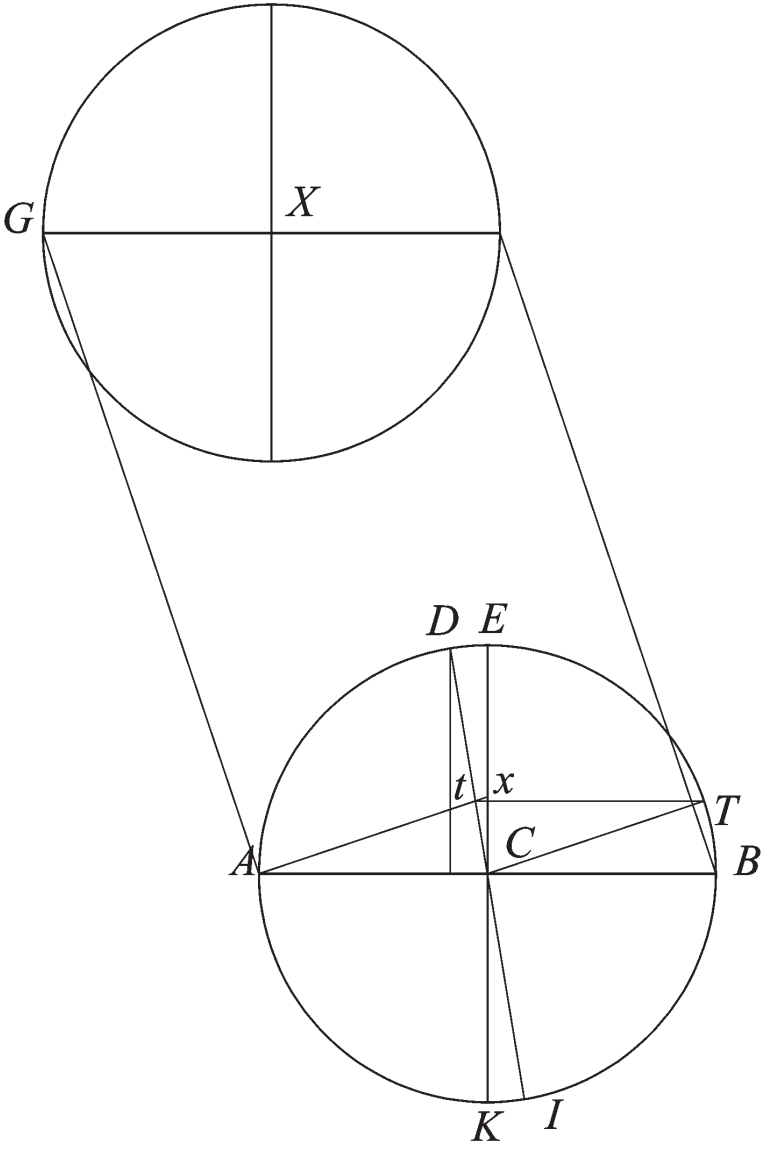
PROBLEMA II

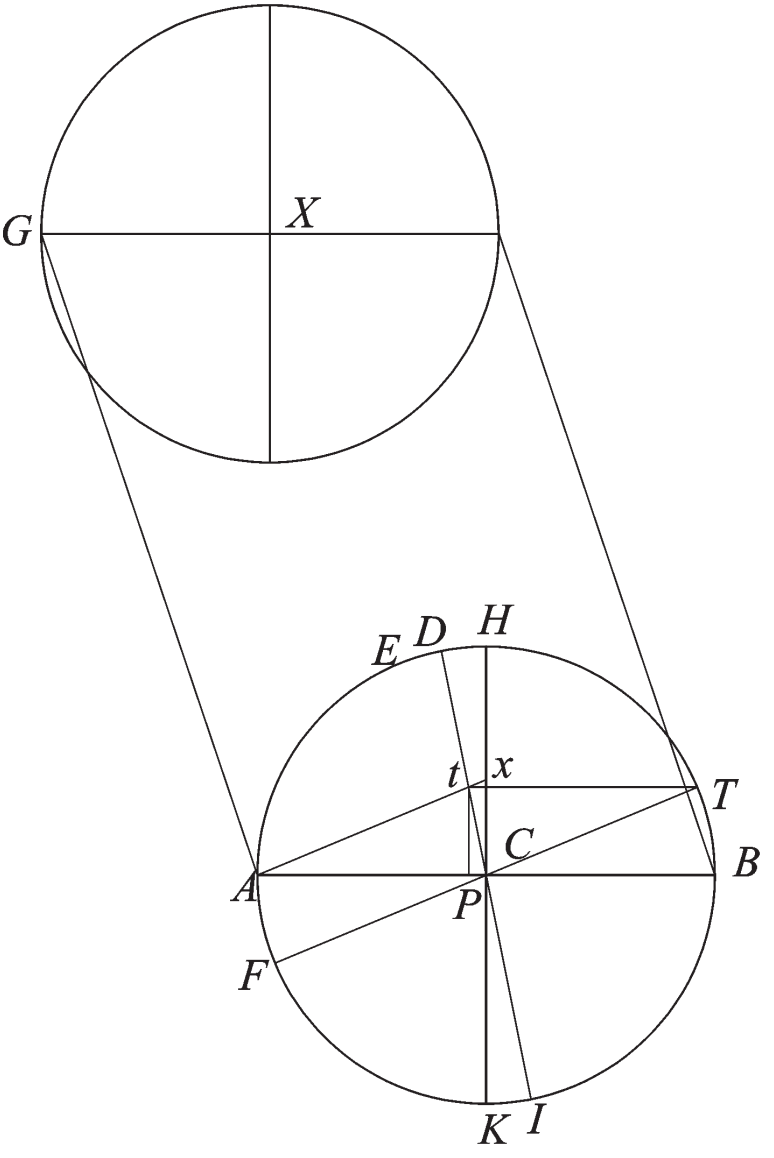
Ridurre tutte le differenze oblique di smussatura, di talud e smussatura, di smussatura e discesa, di discesa, talud e smussatura, in una sola , per non fare che un profilo che esprime tutte queste obliquità , e conserva le misure che noi dobbiamo prendere.

Questo problema è il principio segreto e misterioso del metodo di DESARGUES, sarà spiegato in particolare nel IV libro per tutti i tipi delle botti , dove noi spiegheremo anche ciò che si è nascosto sotto dei nomi impropri, che si trova nel libro di BOSSE.
IN PRIMO LUOGO, è chiaro che tutte le obliquità che non sono delle direzioni diverse, possono ridursi in una sola; così nella ***Fig. 244*** in una discesa *HD*, il talud *HG* o lo strapiombo *ED,* essendo perpendicolare al piano verticale, passando attraverso l'asse del cilindro *DG*, possono essere espresse nello stesso profilo differentemente situato, senza alcun cambiamento; perché se io prendo *DG* per una orizzontale, poiché essa sia inclinata, ne risulterà un altro cambiamento che è quello del nome; sapendo che avevo chiamato *HG* talud al riguardo dell'orizzonte Ga^3 o *CD,* si chiamerà strapiombo a riguardo di un orizzonte *DG*, e al contrario *DE,* che era uno strapiombo, diventerà un talud. Così io ho già ridotto due obliquità della discesa in una sola di strapiombo, e quella di discesa e strapiombo in una di talud.
IN SECONDO LUOGO, (**Fig.245**.) io posso cambiare un'obliquità semplice in un'altra obliquità conosciuta con un nome diverso; se per esempio io considero la semi botte *Rhnp,* come inclinata all'orizzonte *OR*, posso considerare anche l'orizzontale su *Rp*, ma smussata a riguardo di una linea di faccia *Rh* considerata come se fosse in un piano di supposizione orizzontale *hRp,* invece che nella prima supposizione, essa era verticale nello stesso piano considerato una situazione verticale, senza che ne risulti un altro cambiamento, che quello del *livello* a *piombo;* la sola differenza che ne risulta, è la trasposizione della chiave al posto di dove era l'imposta e la divisione dei cunetti che si comincerà ad una estremità del raggio, al posto di cominciarla dall'altro, se l'arco di faccia è circolare; se è abbassato o rialzato, ne risulterebbe una trasposizione dell'asse del grande al posto del piccolo, e del piccolo al posto del grande; ciò arriverà all'arco diritto se l'arco di faccia è circolare.
Del resto è chiaro che questo arco diritto non è suscettibile a nessun altro cambiamento , quanto meno si aumenterebbe o diminuirebbe il talud, la smussatura, la discesa o lo strapiombo.
Se comunque le obliquità delle facce sono doppie di diverse direzioni, come la smussatura del talud tutto insieme, o la discesa e la smussatura, allora non si può unirle in un'unica trasposizione del livello a piombo; bisogna cercare la posizione del diametro della più grande obliquità, che è quella della sezione di un piano che passa attraverso l'asse perpendicolarmente alla faccia della botte.
SIA *AB* (***Fig. 247 b 1***) il diametro orizzontale di una botte, di cui la direzione orizzontale del suo piede dritto è *AG*, e quella della sua asse, che gli è parallela, è *CX;*, facendo con *AB* l'angolo acuto *XCA,* sia anche l'inclinazione della faccia in talud, seguendo un angolo dato *SCT,* o il suo complemento *TCB*, dal punto *C* per il centro e *CA* per raggio, avendo descritto un cerchio *ASBK*, che taglierà *CT* in *T;* da questo punto *T* si traccerà una parallela ad *ACB,* e dal punto *A* una perpendicolare *Ax* all'asse data *CE,* che taglierà *Tt* in *t* ([4]).
Se attraverso questo punto *t* e il centro *C,* si traccerà una linea *DI,* si avrà l'obliquità semplice *t*C, composta da due *PC* della smussatura, e

tP del talud, la quale sarà la proiezione di un piano passante attraverso l'asse perpendicolarmente alla faccia, e dunque questa di una parte dell'asse sul diametro della più grande obliquità. Per separare queste due linee confuse da questa proiezione, si traccerà attraverso il punto *t* una perpendicolare indefinita *tF*, che incontrerà la linea del talud *TC* prolungata in *F*; io dico che l'angolo *tCF* è quello dell'asse con il diametro della sezione della faccia tagliata attraverso un piano che passa attraverso l'asse perpendicolarmente a questa faccia.

DIMOSTRAZIONE





(4) Il testo non è molto chiaro. Si interpreti semplicemente di costruire il raggio perpendicolare ad *xC*

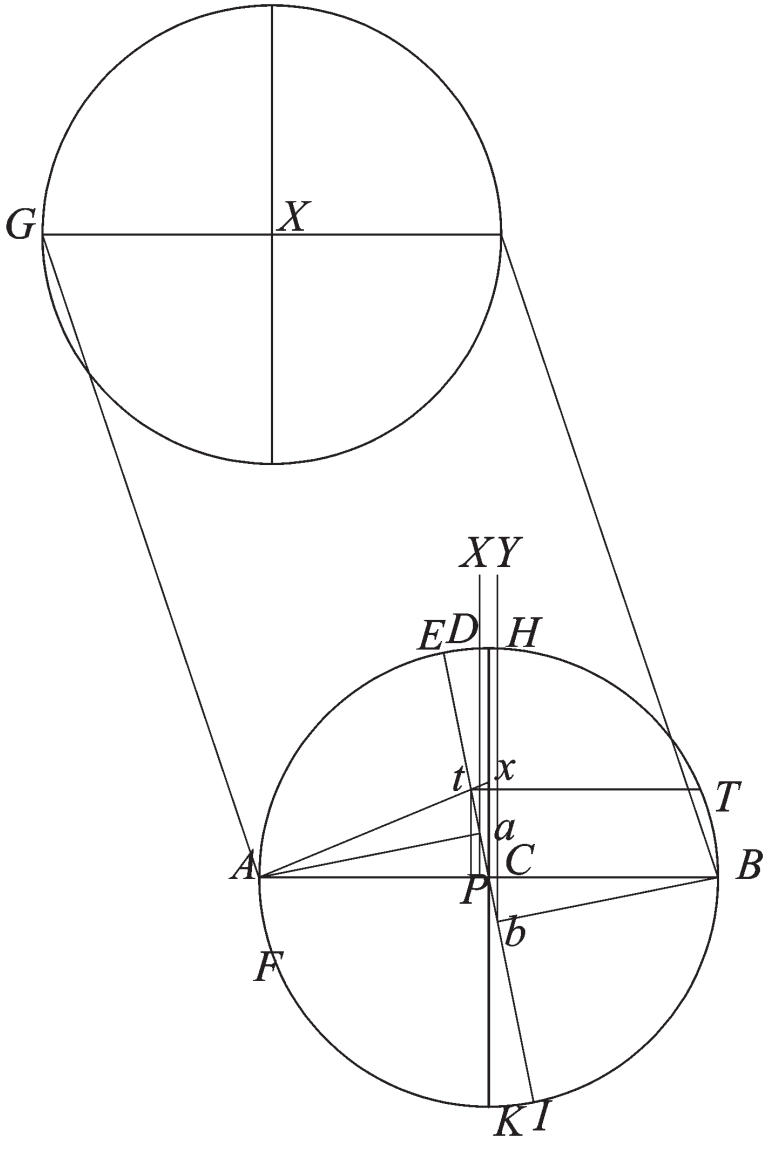


Fig. 247 b 3

Sia tirata *Ax* perpendicolare ad *EC* che incontrerà *Tt* al punto *t.* Si suppongano due cilindri orizzontali di base uguale e di diverse direzioni di smussamento e di talud, che noi esprimeremo attraverso quelli delle loro assi *EC* obliqua su *AB*, e *SC* che gli è perpendicolare. Se si fa muovere questi due cilindri in senso contrario ognuno intorno alla sua asse, è chiaro che il punto *T* descriverà un arco di cerchio in aria, dunque la proiezione è la linea *Tt*, che il punto *A* girando intorno all'asse *XC* descriverà un altro arco, la cui proiezione è *Ax*, che incontrerà la precedente in un punto in aria, che sarà espresso nel piano orizzontale attraverso il punto *t* come ai due diametri.

La linea *tC* sarà la proiezione del raggio *CT* in un piano verticale, comune alle due basi del cilindro; il quale raggio è anche comune alla base del terzo cilindro,che avrà per asse *DC*, e per inclinazione della faccia l'angolo *DCF*; perché se si fa muovere il diametro *TCF* intorno a questa asse, è chiaro che il punto *F* descriverà nell'aria un arco; *Ft* è la proiezione , dunque al posto di considerare i due cilindri precedenti, io posso considerare il terzo, la cui obliquità *FCD* sulla sua asse *CD* assomiglia a quelli degli altri due, supponendo sempre le basi uguali. È visibile che se si prolunga la perpendicolare fino alla circonferenza del cerchio in *H*, e che se si traccia *HC*, si avrà un angolo *DCH* uguale a *DCF;* il diametro della più grande obliquità potrà essere rappresentata al di sopra in *HK*, e al di sotto in *FT*, e l'asse attraverso *HC* o *DC*, poiché l'angolo del loro incontro è sempre lo stesso in *C*.

Questa suppone che se si prende *DI* per diametro della base, sarà evidente che sarà quello della più grande obliquità, poiché il piano *tHC* passa attraverso l'asse *HC*, e attraverso la perpendicolare *Ht* che è orizzontale su una linea *DI*, che è in piano inclinato tagliato da una verticale; o questa linea *Ht* che è il seno retto dell'angolo *HCD*, è la più corta di tutte quelle che si può portare dal punto *H* all'asse del diametro *DI*; dunque l'angolo *HCD* è il più piccolo di tutti quelli che l'asse può fare con uno dei diametri della base; *cosi come si voleva dimostrare.*

COROLLARIO I

Dalla conoscenza di questo angolo, segue che si può fare il profilo di una botte a doppia obliquità, seguendo le stesse regole usate per quelli che non ne hanno che una, o due della stessa direzione, ridotte ad una; la differenza che ci sarà è che al posto di prendere la base orizzontale della faccia data per quella della proiezione delle divisioni del suo centro in cunei, si prenderà il diametro *DI*, trovato sul quale si abbasserà le perpendicolari dei punti di queste divisioni; ciò obbliga alla descrizione di un po' più della metà della base, aggiungendo al disotto di *AB* l'arco *BI=AD*; così per fare la proiezione delle imposte *A* e *B*, si porterà da questi punti sul diametro *DI* le perpendicolari *Aa*,*Bb* che daranno dei punti *a* e *b*, i quali non saranno più all'estremità del diametro della base, come erano avanti. Perciò è visibile che se attraverso questi punti *a* e *b*, si portano delle parallele *aX*, *bm* ([5]), all'asse *HC*, si ritornerà nel caso della pratica ordinaria della ***Fig. 244;*** ciò accade supponendo l'angolo *ApR* uguale all'angolo *DCH* sia che si riduca le due obliquità ad una semplice smussatura, o ad una semplice discesa dritta.

COROLLARIO II

Poiché questa costruzione cambia l'angolo *XCA* della prima smussatura in *HCa*, quello del piede diritto *AG* sarà trasportato in *aX* parallelamente all'asse, e le linee *ar* e *bR* perpendicolari all'asse esprimeranno, il

([5]) La lettera *m* è una *y*

semidiametro dell'arco diritto, passando attraverso le giunture del letto dell'imposte, sarà così per tutte le altre giunture del letto; ciò fa vedere come si può ritornare alla stessa pratica del profilo che è stata spiegata alla ***Figura 244***. dove si è fatto l'arco diritto a^2, b^2, attraverso il mezzo del semidiametro c^2, b^2, perpendicolare all'asse *DG*, diviso nelle sue ascisse, cioè, che sono delle distanze equivalenti alle altezze delle ricadute; ciò che noi spiegheremo più a lungo nel libro IV.

COROLLARIO III

Se al posto di considerare il diametro *AB*, come orizzontale in un piano inclinato, lo si considera come se fosse in un piano verticale, il diametro *DI* sarà inclinato all'orizzonte; se si vuole supporre *DI* orizzontale, *AB* sarà inclinato all'orizzonte, e *mL* perpendicolare a *DI* sarà una verticale la quale sarà perpendicolare all'asse orizzontale *HC*, poiché tutti gli altri diametri possibili gli siano inclinati; da ciò segue che qualunque smussatura che sia una volta, sarà sempre una testa di letto, dove non ci saranno tutti i punti della smussatura, e sarà perfettamente a squadra.

COROLLARIO IV

Segue anche che tutti gli angoli della testa del letto dei cunei compresi tra *m* e *D* saranno ottusi, e tra *m* e *I* saranno acuti più o meno, secondo che essi si avvicinano alle estremità *D* e *I;* ciò che deve estendersi anche ai lati opposti al di sotto del diametro *DI*;
Poichè i lati dei cilindri sono paralleli alla loro asse, l'angolo di ognuno di questi lati con il diametro dato, è uguale a quello che fa l'asse con lo stesso diametro.

COROLLARIO V

Poiché gli angoli che l'asse fa con ognuno dei diametri del cerchio della base del cilindro o la faccia della botte, sono tutti ineguali, segue che si può fare un infinità di profili diversi di uno stesso cilindro scaleno, nei quali apparirà più o meno inclinato; in modo che esso è fatto attraverso il diametro perpendicolare a quello della più grande obliquità; il profilo di questo cilindro, o il cilindro stesso, di un botte obliqua, sarà lo stesso di un cilindro retto.

COROLLARIO VI

Si traccia anche una perpendicolare *nu* all'asse *HK*, questa rappresenterà uno dei diametri dell'arco diritto; essendo sul posto circolare, la curva della faccia sarà un ellisse, dunque la grande asse sarà nella più grande obliquità *DI*, il piccolo asse in *mL*, che gli è perpendicolare; ciò permette con gran facilità di tracciarne il centro.

COROLLARIO VII

Almeno che qualche curva non sia il centro della faccia, o quello dell'arco diritto, il modo di trovare il diametro della più grande obliquità sarà sempre lo stesso; perché il semidiametro *CT* sarà uguale a *FC*, poiché si sostituisce un ellisse al posto del cerchio *THF*, e le perpendicolari *Tt* e *Ax* alle direzioni *SC*, *EC* si incontreranno sempre allo stesso punto *t*; senza considerare l'arco di faccia, si prende su *AC* una lunghezza uguale a *CF* o *CT*, che è indipendente dal centro della faccia.
In effetti è chiaro che comunque se ne prenderà solo la metà di queste linee, cioè le perpendicolari *Tt* e *At,* che si possono considerare come i lati di un parallelogrammo; detti lati, non fanno che avvicinarsi parallelamente, e di conseguenza si taglieranno sempre nella stessa diagonale *Tc*; ciò basta per determinare l'angolo *DCF* dell'asse con il diametro della più grande obliquità che si cerca.

COROLLARIO VIII

Poiché l'inclinazione del diametro *DI* della più grande obliquità, con la linea orizzontale data per base della faccia *AB*, e l'angolo di questa linea *DI*, con quella che rappresenta l'asse *HC*, sono le sole cose essenziali a ridurre l'obliquità, è chiaro che la loro trasposizione al di sopra o al disotto della linea *AB*, non cambierà niente nella costruzione. Perciò non importa che l'asse sia in *HC* o in *FC*, visto che l'una e l'altra di queste linee passano lo stesso angolo con la linea *DI;* non importa neppure fare il profilo di talud al disopra o al disotto della linea *AB*; in questo caso bisogna peròcambiare il lato della perpendicolare all'asse da *A* a *B*.
SECONDO, bisogna osservare che il talud lo strapiombo, la discesa e la montata all'apertura dell'angolo uguale con l'orizzontale *AB*, daranno sempre lo stesso angolo dell'asse *HC* con il diametro *DI*, ma in modo diverso; in questo modo le direzioni opposte daranno degli angoli di natura diversa, l'uno acuto e l'altro ottuso; ma saranno sempre i supplementari a due diritte l'uno dell'altro.
TERZO, i profili degli angoli di un inclinazione perpendicolare ad una stessa direzione, come la discesa ed il talud, la salita e il talud, devono essere sistemati in uno stesso lato al di sotto dell'orizzontale *AB*, poiché l'uno deve essere sottratto all'altro, e agli altri due lati, quando essi devono essere aggiunti; sapendo, il talud al disotto, e la discesa al di sopra, come noi faremo vedere nel libro IV, se si ritaglia dall'angolo del montante quello del talud, l'angolo della faccia con l'asse che era già acuto, diventa ancor di più. E se si ritaglia il talud dall'angolo della discesa, che è equivalente ad uno strapiombo a riguardo dell'asse considerata in situazione orizzontale, e dunque ottusa, lo strapiombo diminuisce e si avvicina di più alla retta. Si otterrà lo stesso risultato se si aggiunge l'angolo del talud al complemento dello strapiombo o discesa; quest'angolo che era acuto con questa addizione si avvicinerà di più alla retta, dunque l'obliquità dell'asse sulla faccia diminuirà.

Sui profili delle volte coniche

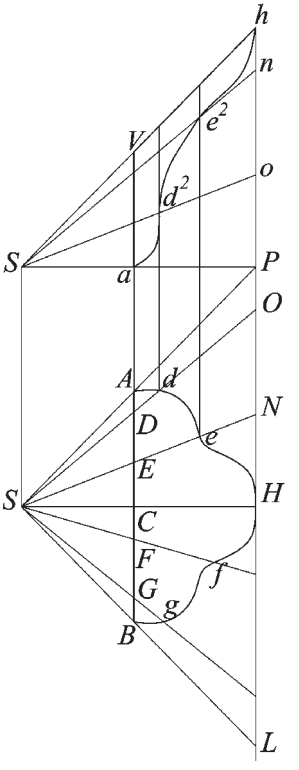
I profili delle trompes e le altre volte coniche fatte seguendo le stesse regole di quelle dei cilindri o delle botti, sono inutili per la costruzione dei trattati.
La ragione è che le proiezioni delle giunture del letto, non essendo parallele tra loro, non possono esserlo neppure allo stesso piano verticale; dunque (attraverso il I corol.del capitolo IV. del I libro) questi punti non possono essere rappresentati nelle loro giuste misure; saranno tutti più corti al profilo, che nella realtà, eccetto uno che può essere in un piano verticale. Così supponendo il profilo *ShP* ***(Fig.247)*** formato su una proiezione *SLP*, non si troveranno delle misure giuste; basta considerare la lunghezza del centro della chiave *Sh*, di cui *SH* è la proiezione orizzontale; inoltre è visibile che l'imposta *SL*, non è uguale ad *SP*, ma è più corta del suo profilo *Sp*; poichè *SP* è l'ipotenusa di un triangolo

rettangolo, di cui *saP* è un lato, le altre linee *sn, so* che rappresentano le giunture del letto, saranno un pò meno scorciate, in misura che esse si avvicinano al piano verticale *ShP*.
Poichè tutti questi profili si scorciano in modo ineuguale, segue che dalle giunture del letto non si possono trovare tutti i valori rassomiglianti in un solo piano, come quelle delle giunture delle botti, eccetto le volte che sono le porzioni di coni retti su una base circolare; perchè in questo modo il valore di tutte le giunture del letto è dato solo con l'aiuto del profilo nel solo piano orizzontale, essendo questi letti tutti uguali a quello delle imposte.

QUARTA REGOLA

Nei tratti delle volte coniche scalene, bisogna fare anche dei profili che ci sara nelle giunture del letto; dunque le altezze o le proiezioni orizzontali sono ineuguali, per trovargli il giusto valore.

Io intendo con la parola *scaleno*, non solamente la volta di cui la proiezione orizzontale o verticale è un triangolo scaleno, ma anche quella di cui il piano orizzontale è un triangolo isoscele, e il cui asse è retta sulla base, che non è circolare, ma ellittica, o di un'altra curvatura.
SIA (***Fig.247***) *SAB*, il piano orizzontale di una trompe, che noi non consideriamo come smussatura, poichè essa sia diritta, per non moltiplicare le figure; su *AB*, come diametro della base di un cono, che è la faccia della trompe, si descriva la curva del suo centro, come il semicerchio *AHB* o una semiellisse; avendo diviso le sue cunette ai punti *1,2,3,4*, si abbasseranno le perpendicolari di ognuno su *AB*, per averne la proiezione orizzontale ai punti *D, E, F, G*, da dove attraverso il vertice *S* del cono, si tireranno le linee *DS, ES, FS, GS*, che saranno le proiezioni delle giunte del letto alla doele , di cui bisogna cercare il valore attraverso il profilo (cfr ***figura 247 a 1***).
Poiché tutte le giunture incontrano il piano orizzontale in *S*, è visibile che sono tutte ognuna ipotenusa di un triangolo rettangolo, di cui conosciamo i due lati dati sapendo l'altezza dei punti *1, 2, 3, 4*, sul piano orizzontale e la distanza delle loro proiezioni *D, E,F,G* del vertice *S* nella proiezione orizzontale.
Si possono fare questi profili in diversi modi che portano tutti allo stesso risultato.
1°.si può elevare ai punti *D, E, F, G* delle perpendicolari uguali alle altezze *D1, E2, F3, G4*, e tracciare le ipotenuse richieste, come *E2* in *Ee*, *D1* in D*d;* le linee *Se* e *Sd*,, saranno le vere lunghezze delle giunture del letto.
2°. per abbreviare ed approfittare degli angoli retti tutti fatti, si può portare le proiezioni sulla base *BA* prolungata; per esempio, *ES* in *Ex*, e *DS* in *DY*, le linee *x2* e *Y1*, saranno, le vere lunghezze delle giunture del letto, alle quali le opposte corrispondenti ai punti *3* e *4* saranno uguali, poiché il cono è retto; essendo la trompe sfalsata non sarebbe lo stesso se fosse scaleno.
Queste due maniere sono buone, ma quando ci sono molti cunei, essi producono una moltitudine di linee che causano confusione; ed è per questo che io credo che conviene di portare tutti i profili fuori del piano su una base comune.
3°si prenderà una linea qualunque che passa attraverso il vertice S fuori del piano, come *SL* sulla quale si trasporterà attraverso degli archi di cerchio, fatti dallo stesso punto *S* per il centro, tutte le lunghezze delle proiezioni *SC, SF, SG*, in *K, L, n*, dove si alzeranno le perpendicolari *KH*([6]), *L3f, n4;* le linee *3fS, 4s* saranno i profili delle giunture del letto, passando attraverso i punti *3, 4, HS*, quello del mezzo della chiave. Com'è evidente attraverso la costruzione, che è la stessa della precedente, questo metodo libera il *piano*, e gli archi *CK, FL, Gn*, marcando le origini dei profili, per non fraintendersi. Il resto della figura serve per i discorsi seguenti.



Avendo trovato i valori delle giunte del letto , sarà facile fare i profili delle superfici dei letti, cioè, le sezioni del cono attraverso i punti dati alla circonferenza della base, e attraverso il suo vertice *S* perpendicolarmente ad ogni tangente portata da questi punti; perché se la base è circolare, si hanno tre lati del triangolo di questa sezione; sapendo che l'asse è comune a tutti, allora il raggio della base è sempre lo stesso, la giunta di letto trovata è circolare, l'angolo supplementare alle due diritte del

([6]) La lettera *h* è *h*^{u}

raggio con la giunta del letto, e il profilo della testa del letto.
Ma se la base è ellittica o di qualsiasi altra curvatura, allora la sezione del letto prolungata non passerà più attraverso l'asse del cono, ma sempre attraverso il vertice *S*; l'incontro della giuntura di testa con il piano orizzontale sarà facile da trovare, perché supponendo *Ne* una giuntura di testa perpendicolare alla curva data *AeH*, non c'è che da prolungarla fino all'incontro del diametro della faccia *AB* in *E*; la linea *SE* sarà la sezione che tiene luogo all'asse, quella del raggio della faccia; così con la giuntura del letto, si avrà il triangolo della sezione interna del cono, di cui l'angolo supplementare alle due rette sarà il profilo della testa del cuneo.
Si vede che non si ha la stessa facilità di quella della botte dove quest'angolo è sempre uguale a quella del diametro della base con l'asse del cilindro, perchè i lati dell'angolo sono convergenti.
Noi non abbiamo considerato fino ad ora che una sola obliquità nel cono; se si deve porre attenzione a più obliquità, come quando una trompe è falsa o inclinata in talud, bisogna ridurre queste due obliquità ad una, nella stessa misura che abbiamo detto per le botti, ed avendo trovato il diametro della più grande obliquità, e il suo angolo con l'asse, si farà il profilo di una volta a doppia o tripla obliquità, come per la semplice obliqua o inclinata.

PROBLEMA III

Tracciare il profilo di una volta conica a doppia o tripla obliquità di smussatura, talud e discesa.

POICHE' si può esprimere la lunghezza di una linea inclinata a un piano solo attraverso la sua proiezione su un piano che gli sia parallelo, è chiaro che non si può fare un profilo di un cono scaleno che in un piano parallelo a quello che passa attraverso la sua asse e perpendicolare alla base; questo profilo può solo servire a trovare le misure delle tre linee che sono in questo piano poichè conosciamo soltanto i due lati, il più lungo ed il più corto, e l'asse del cono; così è inutile volere intraprendere il profilo di un cono scaleno su tutto altro diametro, che quello della più grande obliquità.
Abbiamo già detto tanto per i profili dei cilindri scaleni, ma a causa che i lati sono paralleli all'asse, l'obliquità non provoca loro nessun cambiamento, come i coni dove si scorciano, e si allungano continuamente da una parte e dall'altra della sezione perpendicolare all'asse.
Così il problema si riduce a cercare questa sezione.
SIA, tavola 22 ***Fig.265*** ([7]) il cerchio *AHBK*, la base del cono avendo tracciato per il centro *C* un diametro qualunque *DE* prolungato verso *G;* si porterà da *C* in *G* la più grande obliquità, come quella della smussatura, e l'altra del talud in *GP* perpendicolarmente a *GE*; la linea *PB* portata dal centro *C* sarà la sezione di un piano perpendicolare alla base *AHBK*, passando attraverso l'asse del cono; a questa sono state ridotte le due obliquità della smussatura e del talud in una sola di semplice smussatura *PC*, la più grande delle altre due, essendo ipotenusa di un triangolo rettangolo , di cui esse sono i lati.
ADESSO si può trovare tutti i lati del cono senza aver fatto ricorso a nessuna nuova proiezione; si alzerà *PX* perpendicolare su *PB*, e uguale all'altezza del cono, o distanza perpendicolare della base al vertice. Avendo preso a piacere al contorno della base tanti punti che si vorrà *1, c, 3, E,5, 6, 7, D,* si prenderà gli intervalli di ognuno di questi punti al punto P, e si porteranno sul *PB* ai punti *7° 6° 5° 3°,* e attraverso questi punti, ed il vertice *X*, si traccerà le linee *XA, X7°, X6°, X5°,X3°,XB,* che saranno che saranno le vere lunghezze dei lati del cono, con la quale ognuno in particolare, la lunghezza dell'asse *XC*, e il raggio *CA* formano tanti triangoli, si avrà dei profili in tutte le sezioni del cono, e dunque prendendo i supplementi degli angoli del lato, e del raggio, tutti i profili delle teste dei letti.
Se si paragona questo profilo con quello della proiezione verticale S*de*, fatta su una base *de* parallela al diametro dato *DE*, si riscontrerà che nessuna delle sue linee non è uguale, né di lunghezza né di inclinazione che deve avere sul piano della base; dunque sono inutili per alcuna misura del profilo, ciò è abbastanza chiaro senza dimostrazione, poiché *Ic=GC* è più piccola che *PC*, e l'altezza *PX=IS*, segue che l'angolo *IcS* è più grande che *PCX*, di conseguenza il profilo della proiezione non è abbastanza obliquo.

USO

Questo problema ci servirà a far vedere che si può abbreviare molto i tratti delle volte coniche oblique in discesa, o in strapiombo o in talud; poiché noi parleremo dei tratti particolari nel IV Libro; poiché si può ridurre tutte queste obliquità diverse in apparenza in una sola come alle botti, la montante può essere ridotta in talud, in talud semplice, la discesa in strapiombo semplice, la montante in talud, ad un talud più obliquo della quantità del talud, la discesa in talud, ad uno strapiombo meno obliquo della qualità del talud, la smussatura in talud o in strapiombo, a una più grande smussatura, come si vede in questo esempio; in modo che tutte le obliquità siano ridotte ad una, non resta più che vedere quale angolo del diametro dato *DE* fa con quello della più grande obliquità *AB*, per apportarci le proiezioni dei punti di divisioni in cunei, che si ha l'abitudine di fare sul diametro dato ordinariamente, orizzontale o inclinato, si tratterebbe di una faccia rampante.
Se al posto di una proiezione verticale su un diametro *DE*, si era voluto farla sul diametro *c6* al posto della smussatura *GC*, si sarebbe avuto per tutte le obliquità dell'asse quella del talud *GP*, che si sarebbe dovuto portare da *I* in *p* per l'orizzontale *dp*, e tracciare *pS* che da una obliquità dell'asse tutta diversa; infine si aveva supposto il profilo sul diametro *HK* perpendicolare a *PC*, tutta l'obliquità sarebbe vanificata, la linea *SI* avrebbe rappresentato l'asse, allora il profilo del cono scaleno non avrebbe niente di diverso rispetto a quello del cono retto.
Da dove segue che un'infinità di profili possibili, non ne ha neanche uno che possa dare le misure dei lati, e dell'asse di un cono scaleno.

Considerazione sui profili in generale

([7]) La figura a cui si fa riferimento appartiene alla Planche 22

La moltitudine di linee che si trovano nei tratti vengono principalmente dai profili, o io guardo come una massima che
Si deve evitare quanto è possibile l'insieme dei più profili su uno stesso piano, particolarmente le linee inutili che non indicano che le da lontano, attraverso dei lunghi rinvii le loro origini; ed è per questo che quando si ha un grande numero di cunei in una faccia, conviene di più mettere i profili ognuno a parte, o almeno in una parte di un lato, e l'altro dell'altra parte, che invece di metterle sulla base della loro proiezione.
La ragione di questa massima è molto semplice, quando gli oggetti si presentano in numero troppo grande, essi dividono troppo la nostra attenzione, e stancano lo spirito occupato a sbrogliare quello che noi dobbiamo scegliere, ciò succede particolarmente, quando le linee di doele e d'estradosso sono tracciate, come mischiate; in secondo luogo, perché è facile sbagliarsi e prendere l'una al posto dell'altra.

Io aggiungo che bisogna ritagliare le linee inutili che non servono che ad indicare attraverso i lunghi circuiti le origini dei profili, perché se ne trova spesso questa specie nei trattati degli autori del taglio delle pietre,

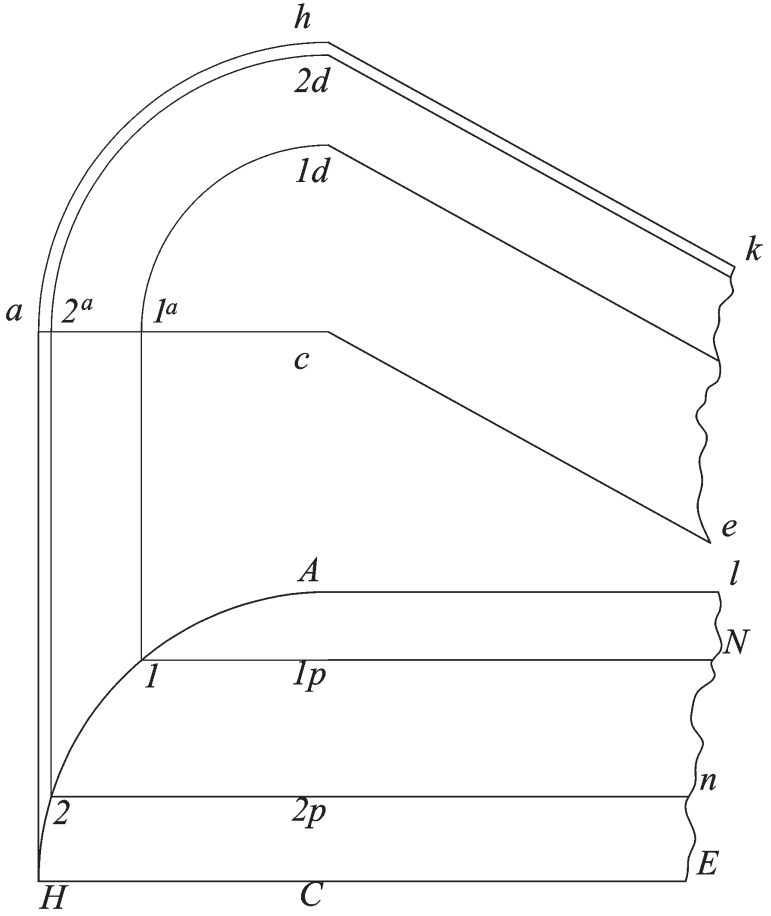


Fig. 248 Curvatura di una volta a botte.

che imbrogliano molto i disegni.

Io posso dare per esempio il profilo di una discesa nella ***Fig.248***. dove il parallelogrammo *AE* è la metà di un piano orizzontale di una botte con le sue proiezioni di giuntura del letto *1pN, 2pn* provengono dalle divisioni *1, 2,* della metà del centro di faccia *HA*; il parallelogrammo *he* è il profilo della botte, dove si vuole situare le giunture di letto nella distanza che conviene. Il modo comune, è di condurle attraverso lunghi circuiti delle linee che si vede alla ***Figura 1*** *1ª 1d, 2 2ª 2d, Hah,* che si può sopprimere senza privarsi dell'indicazione dell'origine dei profili, come si vede alla ***Figura 245*** perchè avendo fatto come al solito le proiezioni orizzontali delle giunte del letto attraverso il mezzo del centro *AHB,* diviso nei suoi cunei ai punti *1, 2, 3, 4,* si troverà i profili delle stesse giunture del letto, ripetendo la metà dell'arco della faccia in *oLh,* e portando attraverso le sue divisioni *1, 2,* delle orizzontali *1D, 2d,* che daranno sulla linea del profilo *ARh* i punti *d* e *D* , attraverso dove si porterà delle parallele alla rampa *Rp,* le quali saranno i profili richiesti; ciò sopprime come si vede le linee diritte e gli archi dei cerchi inutili, e marca, più o meno, l'origine di ognuna delle linee del profilo, senza offuscare inutilmente il lettore.

Sull'elevazione

È ancora una specie di ortografia, cioè, di rappresentazione delle altezze,che si chiama *elevazione,* la quale non differisce dal profilo che essa ha per oggetto le parti esterne, e apparenti da fuori , invece che il profilo è destinato per esprimere le profondità quanto le altezze.
IN tutti i trattati, è necessità indispensabile fare elevazione della faccia della volta, di cui si tratta, per trovare gli intervalli orizzontali delle giunte del letto, e le loro altezze al disegno delle imposte, al meno alla loro origine sull'arco della faccia; è lì il principale uso che si fa dell'elevazione: dunque noi faremo vedere che questa specie di proiezione verticale di un corpo o di una volta qualunque sia, conduce alla sua esecuzione, tanto che quella del *piano* e del profilo.
È chiaro che quando si vuole fare uso di questo tipo di disegno deve essere fatto secondo le leggi della proiezione verticale, come il profilo; cioè, essa deve essere fatta su un piano parallelo all'oggetto o alla parte che se ne vuole rappresentare.Da ciò segue che:
1° Che non si può fare elevazione di un corpo cilindrico, sulla quale si possa prendere altre misure, che seguendo la sua lunghezza, perché non ci sono che lati paralleli alla sua asse che sono in linea diritta, dunque che possono essere al piano della descrizione. In quanto alle parti del suo contorno rappresentate in elevazione, è chiaro che essi sono tutti non uguali e si scorciano tanto più che esse si allontanano dall'asse del cilindro.
2°. Che non se ne può trovare che tre misure sull'elevazione di un corpo conico,sapendo, i tre lati di un triangolo attraverso l'asse del cono che è parallelo al piano della descrizione, di cui due sono dei lati del cono, e la terza il diametro della base.
3°. Che non si può prendere che una sola misura sull' elevazione di un corpo sferico, concavo o convesso, sapendo, il diametro del cerchio parallelo al piano della descrizione.
La poca utilità di queste due ultimi tipi di elevazione, ci dispensa di darne degli esempi, basta quello di un corpo cilindrico, sul quale è tracciata una linea qualunque,che noi supporremo qua una elica , per mostrare come si deve fare l'elevazione di una scala a vista nel disegno di architettura.

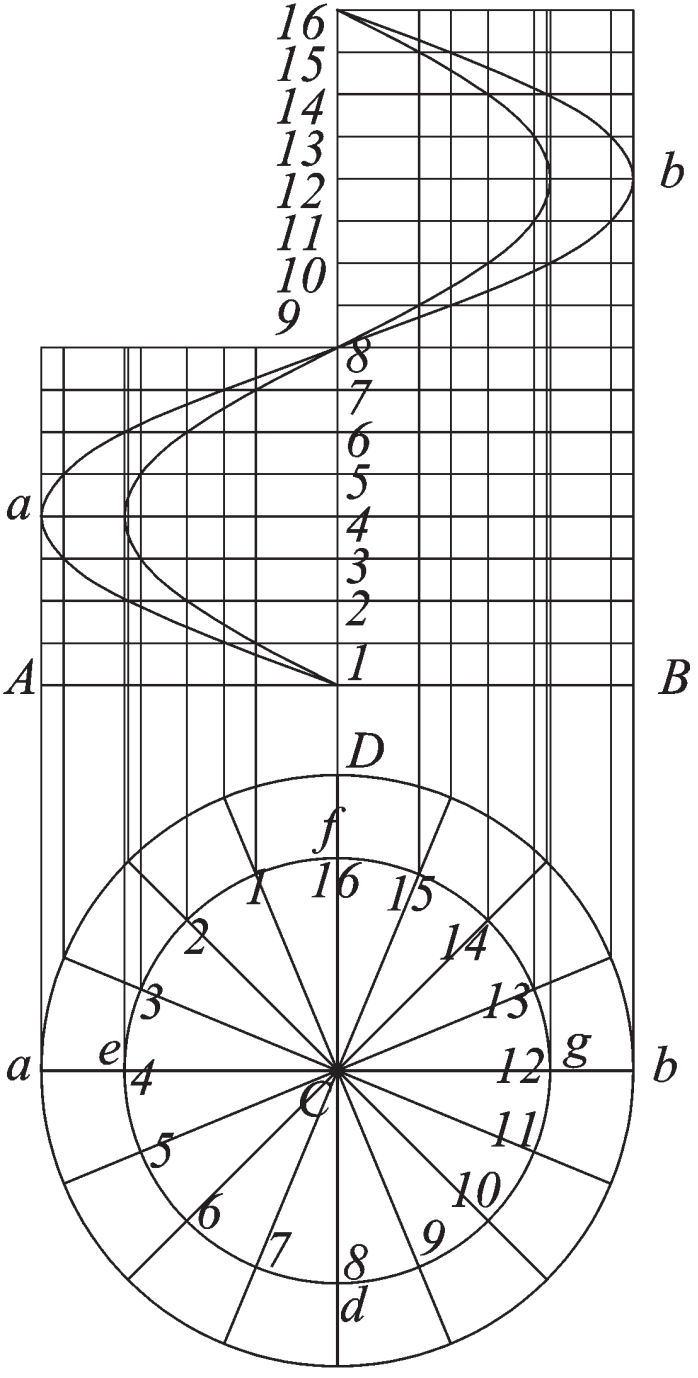


Fig. 249. 1 Costruzione della scala dentro la torre

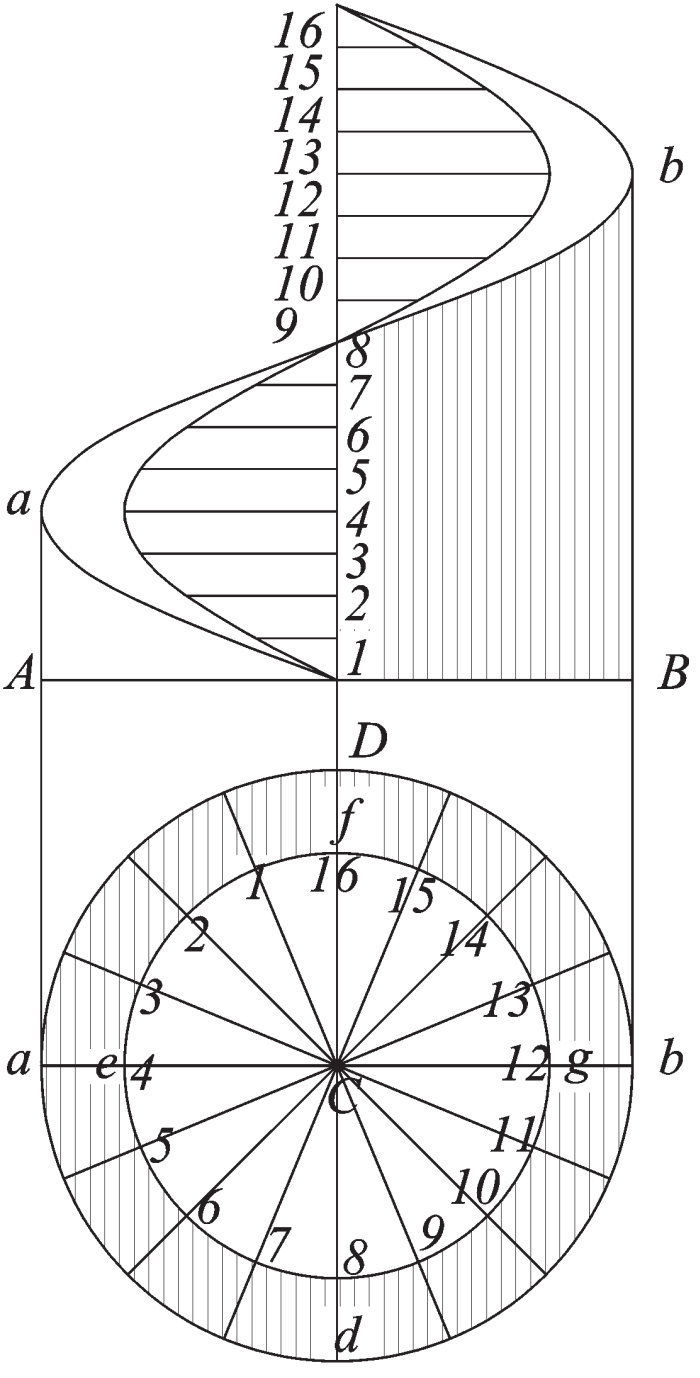


Fig. 249. 2 Rappresentazione della scala dentro la torre

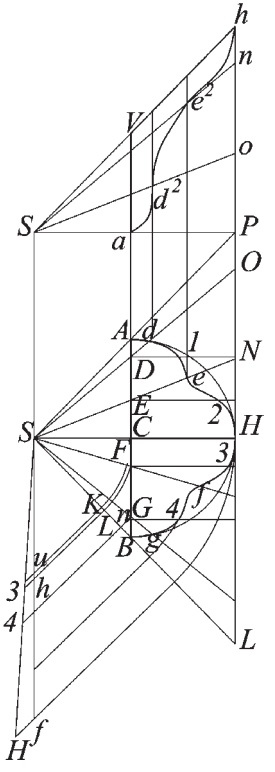
SIA ***(Fig.249 1 e 2)*** la corona del cerchio *aDbd* il piano orizzontale di una torre nella quale vi è una scala, basta di tracciarne la metà, perché noi la supponiamo ugualmente divisa da una parte all'altra. Avendo diviso il suo contorno in un certo numero di scalini, se si tratta di una scala, o in parti uguali arbitrarie, se si trattasse di un elica tracciata la superficie di questo corpo, si porterà attraverso il centro *C* una perpendicolare *CE* al diametro *ab*, che si prolungherà quanto si terrà opportuno; poi su questa linea avendo preso a piacere un punto *D*, gli si porterà una perpendicolare che sarà parallela a *ab*, e attraverso i punti delle divisioni dei contorni della corona del cerchio, si porterà delle parallele all'asse *CE* indefinite. Si marcherà inseguito sufficientemente ogni altezza dello scalino su questa asse *CE*, se si tratta di una scala, o le parti aliquote di una rivoluzione, se si tratta di una vite o di una colonna tronca, e attraverso tutte queste divisioni si porterà delle parallele alla base *AB* che incontreranno le parallele alla asse *CE*, in dei punti *1,2,3, a,5,6,7,M,e,C*. per i quali si traccerà a mano la curva *DaMbE*, che sarà la rappresentazione dell'elica sulla superficie esteriore di un cilindro o della torre.
Basta vedere che quella della superficie interna *efg* del *piano* si traccerà nella stessa maniera. Bisogna solamente osservare che perché le larghezze siano inferiori, le altezze devono essere le stesse per l'elica esterna ed interna, perché si tratta della scala, questa è la stessa altezza dello scalino, e ne sarà la stessa delle altre eliche, che fanno la loro rivoluzione nello stesso tempo; ed è per questo che i punti *DMDME* diventano comuni all'esterno ed all'interno, l'elevazione che deve dare le prime misure del piano orizzontale del disegno non contengono altre difficoltà che quelle di tracciare il genere della curva che si propone per il centro della volta, non abbiamo niente da aggiungere a quello che è stato detto al II libro.

CAPITOLO IV

I mezzi per fare i piani, i profili e le elevazioni delle figure irregolari

Ci sono due modi di irregolarità nelle volte: una consiste nei loro contorni, che possono non essere né circolari né ellittiche, ma di qualche altra curvatura di fantasia, come sono le facciate delle trompe ondulate, come questa volta conica che si chiama trompe d'ANET ***(Fig.247)***; l'altro consiste nella curvatura delle loro superfici che non sono né cilindriche, né coniche né sferiche, cosi sono quelle della maggior parte delle volte costruite dietro un'apertura centinata.
Il mezzo più facile di conoscere queste irregolarità, è di paragonarle a delle figure regolari, o attraverso *l'iscrizione* o attraverso la *circoscrizione*, i contorni possono essere conosciuti attraverso un modo o un altro; ma le superfici irregolari non possono esserlo che attraverso il mezzo della circoscrizione nella pratica del taglio delle pietre, dove non si tratta solo di levare come nelle opere di stucco; si può dunque paragonare il contorno di una figura irregolare ad una regolare attraverso il suo eccesso sulla regolarità inscritta, o attraverso il suo difetto alla regolarità circoscritta.

Sia, per esempio, una volta conica, ***(Fig.247 a 2)*** ondulata la cui proiezione orizzontale è la Figura *SAHB*; si può levare il cono retto *SAB*, tirando la linea *AB* perpendicolarmente sulla sua asse *SC*, e guardare il resto della figura, che è tratteggiata, come un eccesso di questo cono,



che si può trovare tirando dal vertice *S* tante linee che si vorrà, come *SE,SD,SC*; si prolungheranno fino all'estremità di questo eccesso e si avranno le linee *Ee,Dd,CH*, che bisognerà aggiungere in linea diritta alle prime, sia in proiezione per averne il piano orizzontale, sia in profilo , come *Vh*, xe^2, yd^2 ([8]).

Un metodo alternativo a quello appena descritto, è di tirare una perpendicolare sull'asse *SH*, e formare un cono retto *SPL* che lo richiude tutto intero; allora avendo tracciato delle linee diritte *SN, SO* nel vertice *S* del cono, se ne leverà le parti *En*, *dO* per avere i punti *e* e *d* del contorno

([8]) L'autore inverte le lettere *o* e *n*.

irregolare della faccia ondulata, e tante altre che si vorrà nello stesso modo, cercando il loro difetto dentro il cono circoscritto *SLP* ([9]).
L'UNO e l'altro metodo può avere le sue applicazioni seguendo le differenti circostanze; la circoscrizione che da più grandi misure, può avere la sua incomodità nelle grandi opere, e l'iscrizione potrebbe essere più soggetta a dei piccoli errori di esecuzione, ma in se stesse, sono ugualmente corrette.
Ciò che noi diciamo qui dei contorni irregolari attraverso le loro ondulazioni diventa più facile per quelli che sono composte da linee diritte, perché basta tirare delle linee attraverso i loro angoli per avere la posizione ed i contorni regolarmente; è per questo che si può per una più grande precisione iscrivere i contorni ondulati nei poligoni.
La via dell'iscrizione e circoscrizione è più comoda nella botte a cui le facce sono irregolari, perché non si tratta solo che di tirare delle linee parallele alla loro direzione, e delle perpendicolari alle estremità delle parti le più sporgenti, per iscriverli nei parallelogrammi.
Sia (per esempio, ***Fig. 250***) la proiezione orizzontale di una porta sul cono *AEDPB,* la cui faccia interiore *AMB* è arrotondata; si circoscriverà a questa figura irregolare mista il parallelogrammo *BAGI*; si tracceranno tante parallele ad *AG*, come *gF, gF* che si vorranno avere dai punti al profilo.
Si formerà in seguito su *GI* come diametro il semicerchio *GHI* per centro dell'arco diritto, che queste linee prolungate taglieranno ai punti *1, 2, H, 3, 4.*
La proiezione orizzontale essendo così preparata, si farà per il profilo un secondo parallelogrammo *aSdi* sui lati *BA, IG* prolungati; in seguito avendo portato le altezze *g1, g2, DH* in *aS, a2, a1*([10]), si porteranno attraverso questi punti *1, 2, S* le parallele alla base *ai*, sulle quali si porterà gli eccessi del parallelogrammo *GABI* sul piano orizzontale della porta *EAMBPD*, così si porterà *F 1q* in *1K, F 2q* in *2L, CM* in *Sm*, e attraverso i punti *mLKa* , si traccerà a mano una curva che sarà il profilo della metà concava della faccia interiore della porta.
Per tracciare il profilo della metà della faccia esteriore sporgente, si porterà, lo stesso, gli eccessi *GE* del piano orizzontale in *ic* del profilo, *g1p* in *e1f, g2p* in *e2f*, e attraverso i punti *d, 1f, 2f, c* si traccerà a mano una curva che sarà la metà della faccia esteriore.
Per abbreviare il trasporto delle altezze, si può tracciare il quarto del cerchio i*14,23, dh*([11]) uguale a *GH* del piano orizzontale, ed ugualmente diviso, e attraverso queste divisioni *14,23* portare delle parallele alla base *i* del profilo, i quali marcano più sensibilmente le loro origini.
La ragione di questa operazione di circoscrizione, è che le linee diritte e le perpendicolari sono i termini i più semplici, da dove si possa cominciare a misurare le obliquità e le sinuosità delle facce; attraverso questo mezzo che abbrevia la riduzione delle facce curve in linee diritte, e in triangoli rettilinei, di cui bisognerebbe cercare in particolare gli angoli, i lati, e la loro situazione rispettiva.
Questo modo è necessario per formare i profili che sono le proiezioni verticali, ma per levare questi che sono delle sezioni dei corpi ,si può renderla più facile, ed abbreviarla come stiamo per dire.

PROBLEMA IV

Tracciare su un piano un contorno simile ed uguale a quello di un corpo

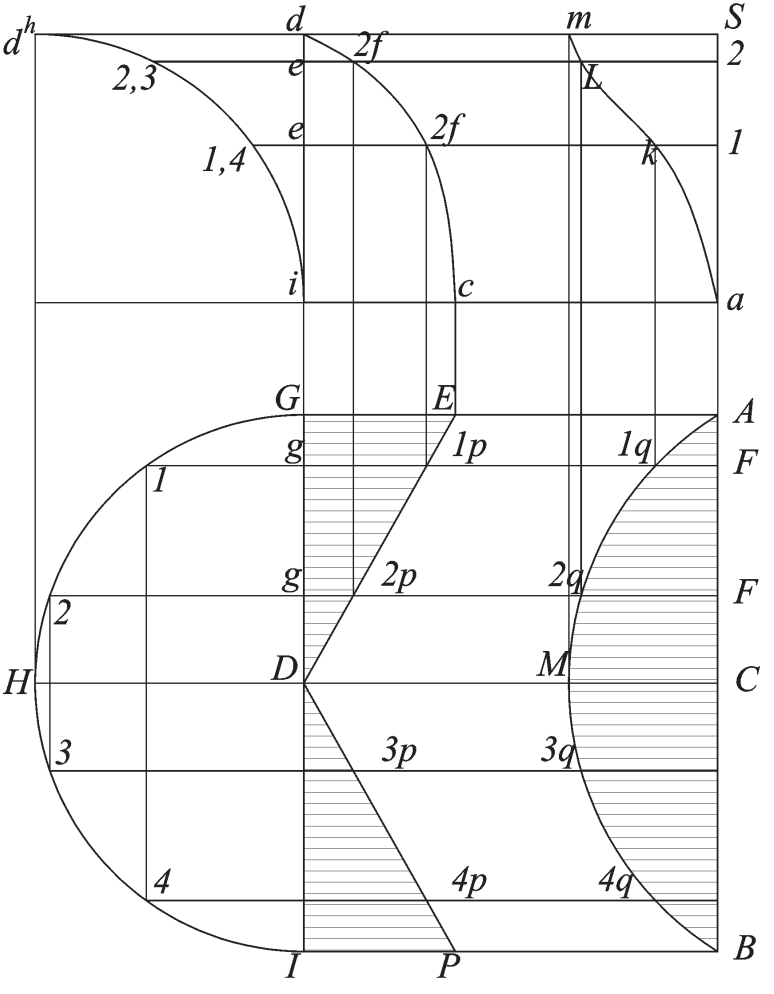


Fig. 250. Proiezione orizzontale di una porta *qualsiasi supposto tagliato da questo piano.*

(9) Per completare la figura, traccio a mano il profilo passante per *a d^h e^2 n.*

(10) L'ordine delle lettere è invertito

(11) La lettera *h* sta in apice

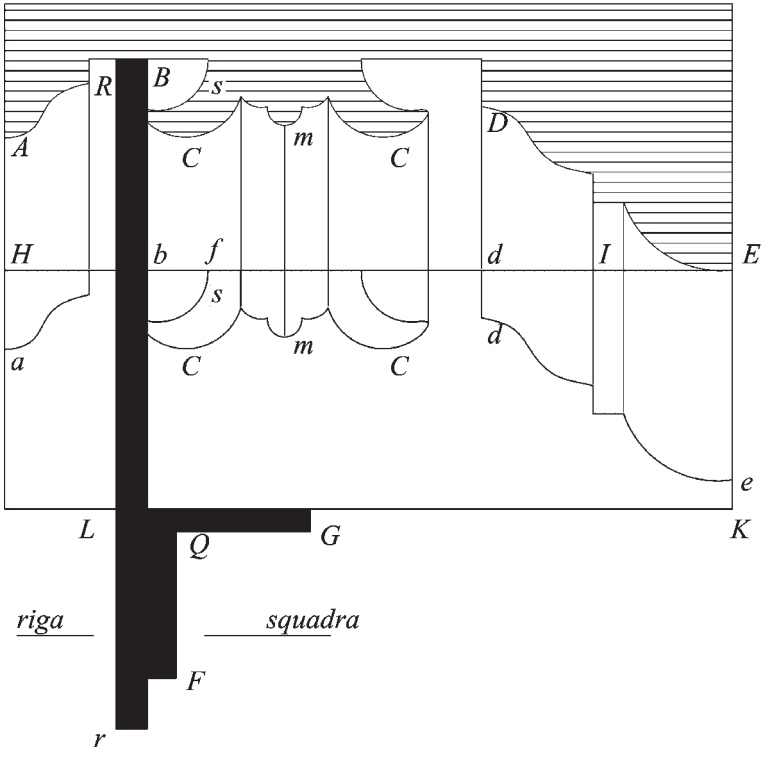
In termini dell'arte.

ALZARE UN PROFILO

Sia un corpo qualunque, ***(Fig. 246)*** il cui contorno sia tanto irregolare quanto si vorrà (si dà qui per esempio un rosone e delle modanature *ABCDE*); bisogna imitare esattamente il contorno della sezione che sarà fatta attraverso questo piano, se lo tagliasse come potrebbe fare una sega.

Si piazzerà il cartone o la tavola sulla quale si vuole tracciare il profilo nella situazione dove si vuole che sia rispetto dei corpi, di cui si vuole imitare il contorno; per esempio un platsond sul quale si metterà a strapiombo, o contro un muro di livello; si fermerà e si terrà ferma in questa situazione, perché essa non vari perché l'inclinazione ne cambierebbe l'imitazione.

Si appoggerà questa tavola contro le parti le più sporgenti, come in *E*, inseguito avendo posato una riga *Rr* perpendicolarmente su uno dei lati della tavola *KL*, attraverso il mezzo di una squadra *FQG*, si prenderà con il



compasso o una misura di legno che servirà di asta di livello la più grande cavità *Bb*, che si trasporterà sulla parte più sporgente *Ee*, per vedere se la tavola sarà abbastanza larga per contenere *E* in *e*, perpendicolarmente sul lato *KL* o *HI*, che noi supponiamo retto, e parallelo se lo si vuole; poi si farà scorrere un braccio della squadra *GQ* sul lato *KL*, in modo che una parte del suo spessore sporga abbastanza dalla tavola, perché si possa appoggiare la riga mobile *Rr* contro l'atro braccio della squadra *QF*, alla quale essa deve essere sempre applicata, così scorrere in lungo, e spingendolo nei vuoti, e rigirandola nelle sporgenze.
Presenterà così la riga su ogni infossamento, come in *B* e in *D*, portando sempre la stessa apertura del compasso *Bb*, o la stessa asta di livello o misura di legno, di *B* in *b*, e di *D* in *d*, e si segneranno sulla tavola i punti *b* e *d*, lo stesso su ogni sporgenza *AmCE*, marcando i punti che la misura darà la lunghezza della riga in *Mc* e *e*. Si continuerà ugualmente facendo scorrere la squadra e la riga per avere tanti punti che si vorrà, attraverso i quali si traccerà a mano il contorno *abcMcde* sulla tavola ,dalla quale si eleverà la parte superiore con la sega; o altrimenti si avrà il profilo che gli operai chiamano le modanature o *calibro* il quale si sistemerà perfettamente alle modanature platsond, seguendo la stessa linea *AE*; in modo che se si volesse farci un tramezzo, esso ne tapperebbe esattamente i vuoti.
Si può anche attraverso questo mezzo alzare i contorni degli infossamenti ricoperti come in *S*; perché tirando con la squadra la perpendicolare e la portante alla stessa distanza di *BR* in *br*, e facendo *rs* uguale a *RS*,si avrà l'infossamento *S*, nonché degli altri.

DIMOSTRAZIONE

È chiaro attraverso la costruzione che: la riga non cambia per niente la situazione a riguardo della linea *KL*, alla quale essa è sempre perpendicolare, poichè essa è sempre un prolungamento di un lato della squadra; tutti i punti del corpo sono ugualmente lontani dal contorno tracciato, dunque le due curve sono parallele ed uguali, poiché le due ascisse sono comuni, e le ordinate sono uguali attraverso la costruzione.

USO

Questo problema di pratica è di frequente uso in architettura, particolarmente nelle riparazioni dei vecchi edifici, dove bisogna raccomodare degli ornamenti sporgenti, e rinforzare, o dei centri alterati, cioè, delle curvature irregolari ,o per sbaglio di costruzione, o attraverso l'assestamento che si è fatto. Sbagliando l'uso di questo metodo gli operai sono obbligati ad andare per tentativi per molto tempo, preferendo più volte il profilo che essi hanno levato per vedere cosa bisogna levare da una parte e aggiungere dall'altra; cosa che gli prende molto tempo e fatica che essi potrebbero risparmiare attraverso la semplice pratica di questo problema.

Supposizioni di superfici piane per giungere a l'imitazione delle curve attraverso delle sezioni piane

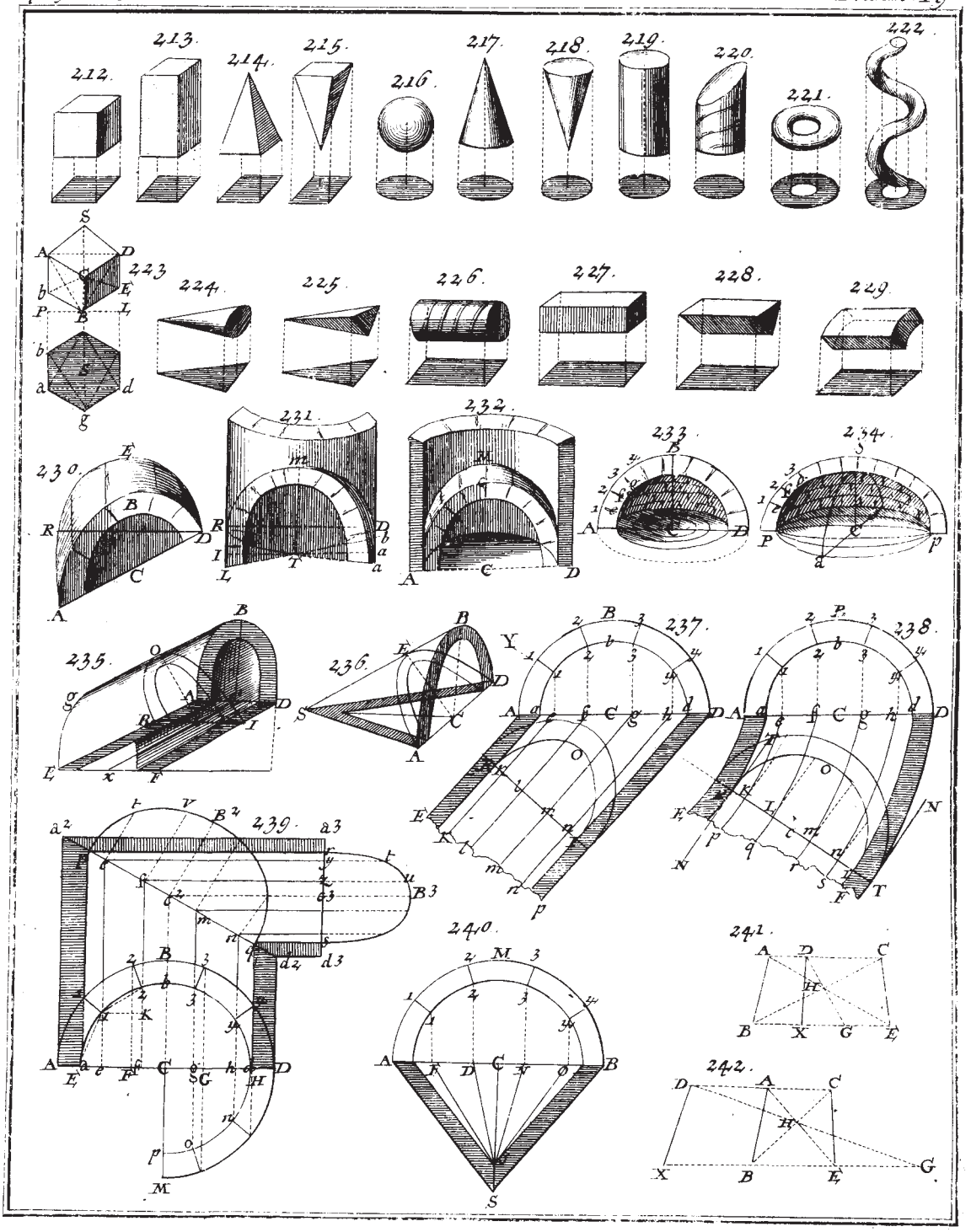
E per il taglio delle pietre in termini artistici

Le pietre piane

La ragione che ci induce a supporre delle linee diritte dopo delle curve, per conoscerne la sinuosità, ci obbliga anche a supporre delle superfici piane davanti a delle curve, per conoscerne la concavità o la convessità; in particolare quando è irregolare e la loro curvatura è regolare, e la loro superficie è supposta terminare attraverso dei piani; la supposizione di una superficie piana davanti alla curva serve a far conoscere la posizione e la distanza dei suoi angoli.
Prima di iniziare a scavare la porzione di un cilindro, (per esempio) terminante attraverso quattro o più piani, bisogna formare una superficie piana per sistemarci i quattro angoli di questa porzione di cilindro a le loro rispettive distanze; il modello di questa figura per doeles des voussoirs si chiama pannello de doele plate è un piano passante per la corda dell'arco

del centro compreso dentro il cuneo, il quale tocca necessariamente tre angoli del cuneo, e di solito quattro, e come i centri sono divisi in più parti dentro il loro contorno, seguendo il numero dei cunei che compongono la volta, le pietre sono divise in tante superfici piane o le doeles pletes che riducono il cono in cilindro, il cono in piramide, e la sfera in poliedro.
La ragione di questa supposizione è che:
Primo: dentro queste operazioni composte conviene per facilità e sicurezza di esecuzione cominciare da cose semplici; così, prima di scavare una superficie curva, si deve prima porre gli estremi nella loro giusta distanza, questi limiti sono gli angoli solidi dei cunei, dei quali ce ne sono almeno tre, e di solito anche quattro, che possono essere applicati a una superficie piana. Si arriva più avanti se questi cunei sono fatti per una volta conica o cilindrica, si possono piazzare sulla stessa superficie piana i lati opposti che sono retti in modo che avendo formato una superficie piana, che si chiama in termini artistici dreffe un parement, si può mettere una grande parte del contorno del cuneo, che deve restarci finchè sarà finita e non resta da scavare solo la parte concava, che è compresa dentro questi limiti.
Secondo, questa supposizione è necessaria per trovare l'inclinazione delle superfici piane delle giunture, con le curve dei doeles, o delle teste, perché queste inclinazioni possono cambiare ad ogni cuneo, come è ben visibile dentro le volte di centri ellittici rialzate o ribassate, o dove l'angolo della doele con la lit cambia continuamente apertura; o è più facile applicare dei calandrini o recipiangoli rettilinei su le superfici curve, che dei calandrini ad angoli misti perché questi possono aprirsi e resistere attraverso la costruzione degli strumenti, e adattarsi a tutti gli angoli invece di cambiare il modello dell'angolo misto a ogni posizione dei giunti della curva di centro ellittico.
Terzo, quando il doele o le altre superfici dei cunei sono sinistri, cioè danno degli angoli che non sono sullo stesso piano, è una specie di necessità supporre una superficie piana che passa per tre dei suoi angoli, per trovare la posizione del quarto, o del quinto se c'è; perché comunque non si può conoscere la natura delle linee curve, che per le proprietà delle rette inscritte o circoscritte, o ordinate a qualche diametro, così non si può conoscere le superfici curve che non sono regolari, che attraverso le loro distanze a queste superfici piane, misurando le lunghezze delle linee perpendicolari a questo piano, o la cui inclinazione è conosciuta, terminata in differenti punti della superficie curva, alla quale la si paragona. E poiché non c'è che un solo triangolo, che sia necessariamente dentro un piano, le superfici con più di tre lati possono avere i loro angoli in differenti piani, dal momento che esse possono essere divise in triangoli; così una pietra piatta di quattro lati può essere divisa in due triangoli, quella di cinque in tre, e così via. Ora le superfici curve irregolari possono essere tagliate attraverso più piani, in modo che i loro angoli siano dentro lo stesso piano, una tegola cava, sebbene di una curvatura conica, si adatta così bene su una tavola che toccano i suoi quattro angoli. Una porzione del cilindro, una porzione di sfera, tali sono quelle dei conci delle volte regolari, ha la stessa proprietà. Non è la stessa di una porzione d'Arriere-Voussure di Marsiglia o di St. Antoine, e c. un cuneo posto su una tavola non la toccherà che attraverso tre dei suoi angoli, il quarto resterà in aria. Per sapere quanto si scosta da questo piano, bisogna che questa distanza sia misurata da una perpendicolare abbassata dal suo vertice su questa superficie piana; quindi l'importante è supporre un piano per trovare la posizione delle parti delle superfici irregolari, e farlo attraverso la precisione necessaria.

page 289. Planche 19.



Nei due libri precedenti, non abbiamo avuto per oggetto che le figure di lineee superfici formate dalle sezioni dei corpi e l´arte di descriverli. Ora noi abbracciamo lo spazio compreso tra una,due o parecchie sezioni; vale a dire le parti solide che risultano dalla divisione dei corpi tagliati da superfici piane o curve; e noi ci preoccupiamo di cercare i mezzi per rappresentarli su un piano più esattamente possibile, al fine di trovare le lunghezze dei loro.
Per parlare in termini d'arte, si tratta di quella specie di disegno che gli architetti chiamano il tratto *e trait & epure* nel quale consiste tutta la difficoltà del taglio delle pietre.

Io vado a trattare questa materia e stabilire i principi per ridurla ad un piccolo numero di regole appoggiate dalle loro ragioni e di cui l'applicazione sarà tanto piú facile, perché il lettore è già pienamente istruito sul modo di descrivere tutte le specie di curve che possono essere tracciate.
Si sa che è impossibile rappresentare esattamente un solido su una superficie piana, non solo quello che ha curve, ma anche quello che non è compreso che tra due piani, perché non se ne può rappresentare che un solo lato mentre un solido ne ha almeno quattro, di solito nell'uso dell'architetture sei e qualche volta di più. Si è obbligati a considerare i solidi nelle differenti relazioni e situazioni delle loro parti, per mezzo delle quali si giungono a rappresentare in differenti riprese.

Per conoscere la distanza orizzontale dei loro angoli sono stati supposti come appoggiati su un piano orizzontale per conoscere le loro altezze sono stati pensati come su un piano verticale, qualche volta per conoscere in un colpo d'occhio tutte le loro superfici e vederne il rapporto sono stati *annoverati- riordinati* su una superficie piana. Infine per sapere quali sono gli angoli che sono tra le superfici, sono stati misurati gli angoli misti, curvilinei e rettilinei per mezzo di corde dai o con degli strumenti, fino ad ora nessuno ha immaginato nulla di meglio.

Si può ridurre tutta l'arte di tracciare un'assonometria a quattro tipi di descrizione la prima ha per oggetto le misure orizzontali; si chiama in termini d'architettura il piano, nel linguaggio della matematica iconografia o proiezione orizzontale. Siamo obbligati a adottare quest'ultimo termine per evitare gli equivoci nei ragionamenti geometrici dove la parola piano significa in generale una superficie piana qualunque. Secondariamente per evitare il modo di parlare che conferma una specie di contraddizione, come adire il piano di un punto, o di una linea per indicare la sua proiezione. Infine per evitare la cacofonia allorché occorrerà dire il piano di un piano, al posto della sua proiezione.

Il secondo tipo di descrizione dei solidi ha per oggetto le misure verticali: si chiama nel linguaggio delle scienze ortografia e in termini d'architettura ha un differente nome. Quella che rappresenta le facce degli edifici o di loro parti si chiama elevazione : quella che né fa vedere il dentro, seguendo una sezione fatta attraverso la sua larghezza si chiama profilo e quella che rappresenta così gli interni, seguendo le loro lunghezze si chiama sezione (spaccato) e profilo.

La terza specie di descrizione dei solidi ha per oggetto l'estendersi delle superfici; si chiama in termini d'arte lo sviluppo perché raffigura e si stende su una superficie piana, quella di cui il solido è come circondato; questa non ha un nome specifico usato nei libri ma poiché i predecessori li fanno derivare dai Greci, nulla impedisce che si chiami con M. de Lagny dell'accademia delle scienze *Epiedrografia* (memorie dell'Accademia 1627).

La quarta specie di descrizione necessaria all'assonometria ha per oggetto le aperture degli angoli rettilinei, curvilinei e misti formati da termini di superfici piane e curve e dall'inclinazione che hanno tra loro. Questa non ha un nome proprio si chiama o beuveaux oppure bevaux ma piuttosto seguendo l'etimologia latina bivium, si può chiamarlo con lo stesso termine di M. Lagny la Goniografia: queste quattro specie di disegni sono essenziali all'assonometria e i soli necessari perché chiunque abbia una quinta maniera di rappresentare i solidi per mezza della *scenografia*, cioè la prospettiva, non può avere alcun aiuto per il taglio delle pietre perché essa cambia le misure dei solidi rappresentati, diminuendo le parti che si allontanano dalla parte anteriore della rappresentazione.

INTORNO ALL'ADATTAMENTO DEI DISEGNI ALL'ASSONOMETRIA

La confusione che si trova nei disegni dei libri che trattano del taglio delle pietre deriva spesso dalla molteplicità delle rappresentazioni che si riuniscono nella stessa assonometria, perché spesso si confonde il piano con il Profilo qualche volta ancora con l'elevazione e si mescolano gli uni con gli altri senza divisione è necessaria una grand'attenzione per districare ciò che appartiene a ciascuno: in effetti spesso la stessa linea fa parte del piano e dell'altezza e lega ancora il Profilo.

Spesso gli oggetti verticali sono ripiegati come se al punto di salire essi cadessero dall'alto in basso, qualche volta sono messi di fianco perché dovevano essere verticali; spesso si fanno delle linee e degli archi cerchi inutili alla costruzione, che non servono che ad indicare gli allineamenti le eguaglianze delle linee trasposte o l'apertura dei loro angoli: si arriva anche per analizzare una proiezione a servirsi per comodità e abbreviare l'operazione di un angolo diritto che si è trovato fatto quantunque per un soggetto differente. Questo doppio impiego delle linee confonde l'attenzione dei lettori o esige una stancante tensione per dipanare queste differenti considerazioni.

La necessità di rappresentare piú oggetti in un unico foglio rende l'errore inevitabile; tanto più quanto sono stati indicati i loro rapporti.

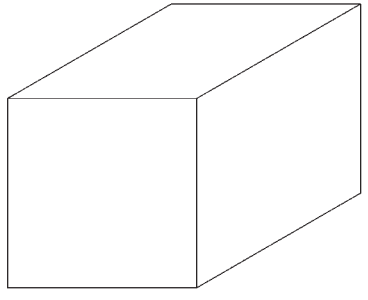
Nonostante le cure che si sono prese per evitare la confusione,

è bene avvertire il lettore che non deve contare di connessità necessaria tra le linee dei disegni che quella è indicata dal disegno che ha avvicinato nel quale si avrà cura di affermare che questa linea che era dall'elevazione o dal piano deve essere considerata con un'altra ipotesi come se fosse del profilo; ma se si sarà omesso quest'avvertimento e si guarderà una linea del profilo, occorre abbandonare l'idea che la linea faccia parte del piano e prender quella che conviene al profilo di cui si è parlato.

Sebbene sia mettere qualche specie di disegno da parte è tuttavia vero che questa semplicità di oggetto indica meno sensibilmente i rapporti delle linee e che si trova meno comodità che riunire e lo stesso qualche volta a mescolare il piano, il profilo, l'elevazione si tenderà pertanto per arbitrare l'arrangiamento delle loro situazioni, gli uni dopo gli altri o dentro gli altri o sopra o sotto, o a fianco, visto che le parti ne siano distintamente distinte

Capitolo 1
LA PROIEZIONE IN GENERALE

Noi abbiamo già spiegato nella seconda parte del secondo libro ciò che noi intendiamo con la parola proiezione: ora basta ripetere cos'è la descrizione di un corpo fatta da linee perpendicolari a un piano tirato da ciascuno degli angoli e



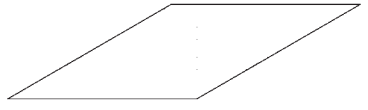


Fig. 212

divisioni reali o immaginarie di questo corpo, tale è la traccia della (*goutiere*) tetto (sommo, apice, culmine) che descrive la figura del suo contorno sulla linea di terra.

Lo stesso corpo posato in differenti maniere da differenti figure di proiezione, cosí (dez) posato sul piano su una delle superfici, fig.212 avrà per proiezione il quadrato sul quale appoggiato perché le perpendicolari tirate dai quattro angoli solidi che sono fuori dei piano di descrizione, sono le stesse di quelle che sono alla giuntura dei (quarrez) perpendicolari tra loro; ma sé il(dez) supposto non essere appoggiato che su uno dei suoi angoli, le perpendicolari tirate dalle sue sommità degli altri angoli formeranno su questo piano il contorno di un esagono che sarà regolare se l'ottavo angolo si trova nella stessa perpendicolare al piano del primo, come si vede nella fig. 223.

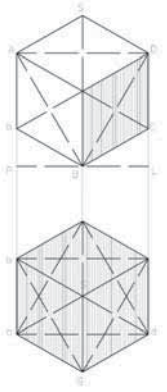


Fig. 223

Da qui consegue:
1° per fare la proiezione di un corpo non è necessario capire perfettamente la figura, ma occorre conoscere o determinare la posizione dei suoi angoli, perché la variazione di questa posizione cambia le misure delle distanze orizzontali o verticali che si cerca in questo genere di disegno; perché le perpendicolari tirate dagli angoli solidi si avvicina o si allontanano seguendo l'inclinazione delle superfici dei solidi e talvolta si confondono tanto che due punti differenti non sono rappresentati che da uno solo sul piano di descrizione.

2° Una sola proiezione verticale o orizzontale non è sufficiente per esprimere su un piano la figura, o la situazione di un solido nei confronti di questo piano , ma sono necessari tutti e due 1° perché gli stessi corpi in differenti posizioni possono avere la stessa proiezione, così una piramide a base quadrata dritta o un cono dritto, per esempio, figura 215-218 appoggiati sulla

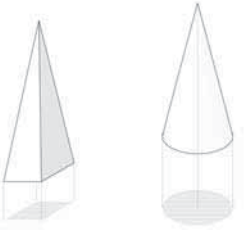


Fig. 214 - 217

sua sommità finché il suo asse è perpendicolare al piano di descrizione, a come proiezione un quadrato, il cono un cerchio, come se fosse stato appoggiato su la sua base fig.214-217.

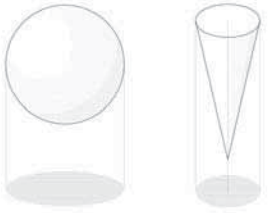


Fig. 216 -218

Poiché i corpi differenti possono avere la stessa proiezione, cosí

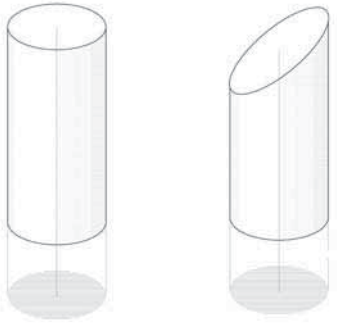


Fig. 219 -220

un cono, un cilindro una vite e una sfera danno ugualmente un cerchio per proiezione, fig,216-217-218.219-220 lo stesso che un

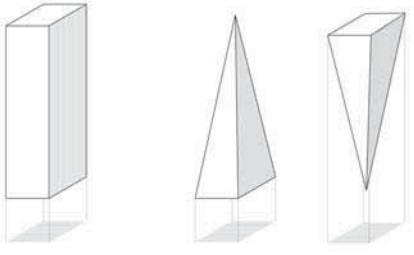


Fig. 213-
214-215

cubo, un parallelepipedo e una piramide a base quadrata danno un quadrato per proiezione, fig,212-213-214-215 un cerchio e una spirale hanno egualmente ciascuna una corona di cerchio o d'ellisse per proiezione, fig.221-222 o se noi prendiamo gli

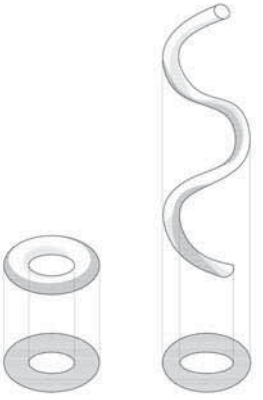


Fig. 221-222

esempi dell'architettura noi troveremo che il piano di una volta su (noyau) e quello di una vite Saint Gilles degli stessi diametri non differiscono in nulla; quello di una volta in pieno centro dritto sormontato e ribassato o inclinato in scala danno così lo stesso parallelogramma nella loro proiezione come le volte cilindriche e le sferiche danno lo stesso profilo,

3° Perché dei corpi tondi hanno delle proiezioni rettilinei uguali o simili a quelle dei corpi terminati con delle superfici piane, così (fig,224) un cono coricato ha per proiezione un triangolo

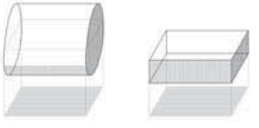


Fig. 226-227

rettilineo, come una piramide fig.225 e un cilindro e una vite da un parallelogramma, cosi bene che un primo rettilineo, fig.226-



Fig.228-229

227-228 e lo stesso un misto.(fig.229)

4° Poiché la proiezione cambia spesso la natura delle cose, la proiezione di una linea perpendicolare al piano di descrizione non è che un punto; quella di un piano in una simile situazione non è che una linea, quella di una linea curva che è in questo piano diventa una linea diritta, o se è inclinata al piano può cambiare specie come abbiamo detto nel libro precedente, da cerchio può diventare ellisse o da ellisse può diventare un cerchio.

5° Infine poiché dalla proiezione dei solidi ne risultano qualche volta delle figure così differenti di quelle del loro superfici, che non si può prevederli che con una grande attenzione come noi avevamo fatto rimarcare di quella del cubo posato su uno dei suoi angoli, allorché, il diametro che passa per gli opposti, è perpendicolare al piano di descrizione, la sua proiezione è un esagono regolare; perché non si dubiti, io vado a darne dimostrazione.

Sia fig.223 il cubo A E posto sul suo angolo B; in ragione che la sua diagonale S B sia perpendicolare al piano PL: avendo diviso le tre superfici quadrate che comprendono l'angolo solido S per mezzo delle diagonali, come il quadrato A S B G per la diagonale A D; a causa dell'uguaglianza dei quadrati, queste diagonali saranno uguali fra loro e formeranno un triangolo equilatero parallelo al piano di descrizione perché questo triangolo è la base di una piramide triangolare dritta, di cui l'asse, che è partita dal diametro è perpendicolare al piano di descrizione (per supposizione) dunque la proiezione di questo triangolo sarà così un triangolo uguale alla base di questa piramide. La stessa cosa giungerà allo sguardo di tre altre superfici del cubo che comprendono l'angolo solido opposto B, di cui le divisioni dei quadrati per mezzo delle diagonali (retrancheront) levare? Una piramide uguale alla precedente, ma rovesciata e girata differentemente, in ragione del fatto che gli angoli dell'una saranno davanti alle facce dell'altra e a distanze uguali; poiché per la supposizione i fianchi e le loro inclinazioni sono uguali; questi due triangoli equilateri dunque la posizione di sei degli angoli del cubo e gli altri due che sono all'estremità del diametro, riuniti dalla proiezione in uno stesso punto, cadranno in mezzo dei due triangoli equilateri e saranno il centro dell'esagono, dunque la proiezione del cubo così posto, è uno esagono regolare.

Per fare conoscere gli angoli elevati e quelli della proiezione, si sono marcati gli uni e gli altri con le stesse lettere differenziate da delle maiuscole.

Occorre rimarcare che per sapere se un solido è contenuto in un altro, per esempio un tetraedro in un cubo o un altro solido in un parallelepipedo tali quali fanno i massi di pietra da taglio, occorre fare tanto la proiezione di questo solido che il parallelepipedo dalle superfici che non sono ripetute nei loro opposti cioè poiché ne ha sei e applicare ciascuna delle sue proiezioni alla faccia che gli conviene sapere se non eccede (se non lo supera)

Nell'architettura queste proiezioni non si fanno che su piani orizzontali e verticali perché non si realizzano che per mezzo del filo a piombo e la livella. Così dei tre ce n'è sempre una orizzontale che è chiamata il piano, e due verticali di cui una è il profilo, perché è vista di fianco e la terza è l'elevazione perché è vista di faccia; perché un solido può essere compreso da delle superfici ineguali da tutte le parti, può capitare che si abbia bisogno di sei proiezioni due orizzontali e di quattro verticali, cioè una per ciascuna faccia del parallelepipedo, dentro il quale si deve formare il solido.

Capitolo II°
L'ICONOGRAFIA O PROIEZIONE ORIZZONTALI
In termini d'arte è il piano

Nel disegno che noi dobbiamo realizzare il lettore attraverso dei principi generali ha la conoscenza delle proprietà particolari delle sezioni dei corpi per trovare i modelli delle parti che compongono differenti specie di volte; sarà sufficiente di ricordare quelle delle sfere, coni e cilindri, come abbiamo già fatto fino ad ora, ma poiché questo terzo libro è una preparazione alla pratica del taglio delle pietre c'è sembrato a proposito d'entrare nel dettaglio dell'architettura e di parlarne la lingua, di cui noi abbiamo (joint? Dato) qui una spiegazione alla quale si potrà ricorrere per intendere i termini usuali, ma siccome non è abbastanza ampia per dare una perfetta comprensione delle relazioni dei centri (trinca) noi cominceremo con il sostituire.

Intorno alle differenze rispettive dei centri
Si sa che le differenti sezioni dei corpi rotondi, quali sono le volte, producono differenti linee alle loro superfici curve o dritte che hanno ciascuna un nome per designarli; le sezioni trasversali e continue sono spesso chiamate *centri*, le parti di queste sezioni interrotte dal legamento dei conci si chiamano (Joins de doele?). Le sezioni longitudinali si chiamano (Joins de lit), queste sono diritte nei coni e nei cilindri e curve nelle sfere e negli anelli e eliche le parti di queste sezioni che sono nello spessore della volta si chiamano congiungimento di testa.

Gli intervalli o divisioni dei congiungimenti di letto devono essere continuati con una certa regolarità, presto in linee diritte parallele, qualche volta riavvicinandosi con una certa uniformità come concorrendo a un punto fortemente allontanato, spesso in linee curve parallele o concorrendo ad uno stesso punto, come nelle volte sferiche.

Allorché i congiungimenti di letto sono paralleli tra loro come nelle volte cilindriche, è chiaro che i centri circolari e ellittici che li traversano devono essere divisi in uno stesso numero di parti proporzionali, in forza che se due centri non sono paralleli tra

loro nelle volte nelle volte nel berceau, l'una essendo circolare l'altra sarà necessariamente ellittica o tutte due saranno ellittiche e le divisioni dell'una determineranno necessariamente quelle dell'altro per la quantità e la grandezza dei conci che sono le pietre che la compongono. Questa dipendenza rispettiva obbliga l'architetto a organizzarsi sulla curva che vuole formare ad una faccia della volta, piuttosto che all'altra o a quella che risulta della sezione di un piano perpendicolare al suo asse, quello di questi centri al quale si fa più attenzione e che occorre per fare la divisione più regolare dei suoi conci, si chiama il *centro primitivo* l'altro di cui la curvatura e le divisioni dipendono dal seguito dei congiungimenti di letto e della differenza di posizione del punto di vista di questo si chiama *centro secondario*.

Figura 230 Il centro primitivo è qualche volta reale come in A B D (Fig.230) dove si suppone una faccia obliqua che deve

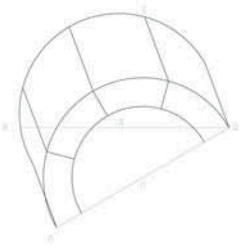
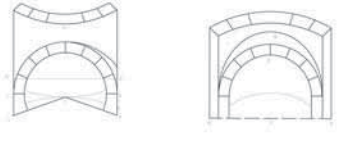


Fig.230

(paroitre?) e sussistere o semplicemente immaginario e supposto come *i m a* fig.231 dove si suppone un piano tangenta ad una torre , nella quale si vuole fare una porta di cui il centro reale che non può essere descritto su una superficie piana, né può servire a regolare le divisioni dei conci, per cui si è obbligati o svilupparli per stenderli su una superficie piana, e allora diventa centro primitivo, oppure di supporre un centro dentro un piano tangente alla torre che è un primitivo supposto; perché non deve sussistere né servire che a determinare le divisioni del reale, che è il secondario.

Ma se si sviluppa il centro reale R m D su un piano, per farne

Fig.231-232



il centro primitivo come quando qualcuno vuole le teste di conci siano uguali lo stesso centro considerato come applicato alla superficie curva della torre è un secondario, sia che la superficie sia convessa come nella fig.231 che sia concava come nella fig.232 dove il centro A S D è supposto come primitivo per regolare la divisione del reale A M D nel disegno dell'assonometria solamente. Dove occorre rimarcare che sia che questo centro primitivo sia preso sopra la corda dell'arco concavo di una torre o su di un piano tangente alla torre parallela a questa corda, non risulta alcun cambiamento al centro reale *i m a* fig.231 o A M D fig. 232 e che questo centro primitivo supposto è lo stesso che quello dell'arco dritto, di conseguenza si può dire allora che l'arco diritto è il centro primitivo, ma se la divisione si fa sopra uno sviluppo, diventa il secondario in ciò che le sue divisioni ne dipendono e diventano ineguali quando quelle dello sviluppato sono uguali.

Se il centro primitivo supposto non era in un piano parallelo alla corda R D che è perpendicolare alla direzione della porta, come L b che gli è inclinata allora si avranno tre centri da considerare, di cui le divisioni sarannotutte ineguali; sapere: 1° quelle del centro primitivo immaginario, 2° del centro reale alla superficie della torre, 3° del centro dell'arco diritto nello spessore della torre e ciascuno di questi centri avrà una curvatura differente: circolare o ellittica occorre spiegare ciò che intendiamo per arco diritto.

L'arco diritto
Il centro che è la sezione di un piano coprente l'asse di una volta in berceau ad angolo diritto si chiama l'arco diritto ,tale è l'arco R E D (fig.230) o R O I (fig.235 e 237) o A B D fig.239, questo genere di centri può essere primitivo o secondario, seguendo l'attenzione principale che si ha alle facce o all'interno di una volta. Nelle fig. 230 e 235 sembra essere naturalmente il secondario, se si guarda la regolarità del centro della faccia apparente A B D. Nella fig.239 è primitivo sé A B D è la faccia apparente perché è perpendicolare alla direzione del berceau.

Da qui deriva 1° che l'arco diritto non è a piombo che nelle volte orizzontali e che è (talud) e a strapiombo negli inclinati,

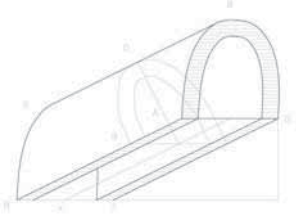


Fig.235

come Roi.fig.235.

Secondariamente non è mai parallelo agli archi di facce sbieche alla direzione dei berceau, sia che siano a livello o in discesa,

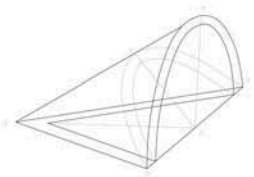


Fig. 236

come si vede nelle figure 230 e 235 dove l'arco R E D, Roi non è parallelo a A B D.

Per terzo che l'arco dritto di tutte le volte sbieche e in discesa non può avere una curvatura, né una larghezza o una altezza uguale a quella dell'arco visto di fronte, così fig.230 , supponendo l'arco di faccia circolare, l'arco diritto R E D sarà sormontato ellittico, di cui il piccolo asse R D sarà più corto del diametro A D; e al contrario (alla fig.235) sé A B D è circolare Roi sarà

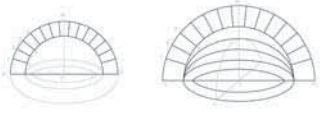


Fig233-234

ellittico superato di cui in mezzo asse O c sarà più piccolo del raggio B C .

Per quarto, che non ci può esserci arco dritto propriamente detto dentro una volta conica, come nelle trombe (fig.236) perché la superficie della sua (Doele) non può essere ad angolo dritto su alcun piano che seguendo una linea tirata dalla sua base alla cima del cono, di cui i lati sono convergenti.

Qualche volta il P.Deran chiama archi diritti le squadre? Cioè gli angoli della doele dei letti….

Qualcuno ha anche chiamato arco dritto il centro primitivo perpendicolare all'asse del cono, perché ci si serve come dell'arco dritto per la divisione dei conci.

Io ho detto fino ad ora che non ci sono archi dritti nelle volte curve per la loro proiezione orizzontale, ma se si fa attenzione che l'angolo che fa un raggio con la sua tangente è ritenuto dritto o molto simile all'angolo dritto, si riconoscerà facilmente che ci sono gli archi dritti delle volte sferiche, sferoidi e anulari,

Fig.233 1° che ogni cerchio maggiore di una sfera A B D è un arco dritto.

2° che nelle sferoidi ce ne sono due; a s b che è perpendicolare all'asse che passa per i poli del primo, perpendicolarmente al piano della base o proiezione dello sferoide, come P b p a fig. 234; il 2° sarà P S p.

3° che l'arco dritto di una volta anulare è quello di cui il diametro tende al centro dell'anello se è circolare come R i fig. 238 il quale è perpendicolare alla tangente T N e al piano delle proiezione A D F E, sia che la volta sia orizzontale come la volta sul (noyau), o quella sia inclinata al piano orizzontale come la vite St.Giles.

Se l'anello ellittico, come la volta sopra un (noyau) ovale il suo arco dritto sarà la sezione verticale, perpendicolare alla tangente nel punto di divisione dell'ellissi che è la proiezione di un congiungimento di letto; sarà la stessa cosa per la vite St. Gilles su un piano ovale, allora la direzione del diametro dell'arco dritto non tende più al centro del (noyau).

USO

Si conoscerà in seguito che l'arco dritto è necessario per trovare i conci e fare i pannelli o le formelle, è solo lui che determina gli angoli misti del doeles e dei congiungimenti che serve a fare gli sviluppi delle superfici curve dei cilindri, perché essendo perpendicolare a tutte le parallele all'asse, di cui il numero infinito forma la superficie dei berceau egli da solo le misure delle larghezze di queste superfici e di conseguenza l'intervalli dei congiungimenti di letto che sono paralleli all'asse del cilindro: è la stessa cosa se si guardano i cilindri piegati sui loro assi di una curva circolare o ellittica come nelle volte sopra il noyau (l.

REGOLE DEL DISEGNO DELL'ASSONOMETRIA

I

IL PIANO O PROIEZIONE ORIZZONTALE

In tutte le volte dove l'arco dritto e l'arco di faccia sono diversi, occorre cominciare con il determinarsi a scelta di uno dei due per farne il centro primitivo.
La simmetria, la bellezza o la solidità essendo i motivi di questa scelta nom sarà difficile sapere quale conviene scegliere. Allorché una faccia è apparente occorre farne il centro primitivo, Al fine che le teste dei conci siano uguali e che i loro congiungimenti siano diretti seguendo le perpendicolari a loro tangenti ai punti di divisione, se il centro è circolare, ellittico o di qualche altra curva; ma se le facce sono nascoste come quando una volta termina in due muri, è più comodo prendere l'arco dritto

per primitivo; perché occorre sottolineare che sé uno è circolare e l'altro ellittico, quello che sarà preso per primitivo regolerà i congiungimenti dell'altro *sauff?salva-taglio sezione spaccato?* A meno ché non si faccia i letti sinistri, perché i congiungimenti di testa del circolare tendono verso l'asse del berceau e i congiungimenti di testa del centro ellittico non tendono al centro dell'ellissi per dove passa l'asse del cilindro di conseguenza i letti cambieranno inclinazione insensibilmente ciò che donerà un letto sinistro che si dovrà evitare nella pratica, a causa della difficoltà di esecuzione.

Nota sulla scelta del centro primitivo nelle volte extradossate

Un architetto è il maestro che sceglie come centro primitivo l'arco di faccia o l'arco diritto quando la volta non è extradossata, ma quando è non gli conviene mai scegliere l'arco di faccia; perché se si tratta di un berceau o di una volta conica sbieca, di cui l'arco di faccia sia circolare, è evidente per il teorema II° del I° libro che lo spessore diventerà più grande a la chiave(di volta?) che alle imposte, di conseguenza i conci diventeranno più pesanti che alle imposte, ciò è contrario alla buona costruzione per'altro qualche autore del taglio delle pietre l'ha rimarcato, conviene dunque allora scegliere l'arco dritto come centro primitivo, facendolo circolare, o se si vuole un po´sormontato.

SECONDA REGOLA

Dividere il centro primitivo in tante parti uguali sé? Si vuole avere delle righe di pietre o conci e regolarmente in numero dispari.

Questa'operazione considerata geometricamente è quasi sempre impossibile perché dipende dalla trisezione dell'angolo che non è stata ancora trovata, ma questa precisione è inutile nelle arti, basta cercare queste divisioni brancolando tanto più che esse sono arbitrarie perché si possono fare senza difformità delle volte di pietre di una larghezza ineguale previsto che ciascuna fila sia esattamente parallela e che la differenza delle larghezze sia poco sensibile.

Noi aggiungiamo che le divisioni devono essere in numero dispari affinché non si trovi il congiungimento nel centro ma una pietra appoggiata ugualmente su i due lati della volta che deve fermare nell'esecuzione, si chiama per questa ragione la chiave, nome che non è attribuito a una sola pietra ma alla fila dei conci che è più in alto: ciò non è che un congiungimento su la metà di un centro (tirante?) molto di conseguenza per la solidità; ma urterebbe la vista e il buon ordine.

Intanto occorre eccettuare le falde-sponde-angoli di volte sferiche costruite sopra un quadrato; si deve tracciare loro un congiungimento nel mezzo nella assonometria soltanto, ma non nell'esecuzione perché questo congiungimento non è che l'angolo di un concio che fa spigolo, di cui le nervature si riuniscono a questa linea di cima; questo perché si divide il numero dei conci di ciascun lato in parti uguali.

Per la stessa ragione di simmetria non conviene dividere il lato di un centro dopo la chiave fino alla nervatura in un numero di conci più grande dell'altro a meno ché le nervature non siano allo stesso livello tra loro, come negl'archi rampanti, dove la quantità di conci, è così grande da ciascun lato che non ci si accorge della fila di più o di meno, questo perché gl'archi rampanti possono essere divisi in un numero pari.

La ragione per la quale occorre cominciare con la divisione del centro primitivo è che occorre avere la proiezione orizzontale dei congiungimenti di letto di ciascuna fila di conci che non si possono tagliare che dopo averne determinato le larghezze dal numero che né deve contenere il contorno del centro, e che allorché le volte sono sbieche queste larghezze di testa diventano disuguali, sia negli archi di faccia, sia negli archi dritti che non sono paralleli tra loro di conseguenza occorre prevedere quale larghezza di una testa obliqua si deve dare all'arco dritto, o quale dell'arco dritto aumenterà l'arco di faccia obliqua.

TERZA REGOLA

Dividere gli archi esteriori e interni del centro primitivo che comprendono lo spessore della volta in parti proporzionali per mezzo di perpendicolari a questi archi nei punti delle loro divisioni, per regolare l'inclinazione dei congiungimenti di testa.
Noi abbiamo inserito nel secondo libro problemi 26, 27,28 la maniera di tirare queste linee che si chiamano congiungimento di testa come 11, 22, 33, 44 fig.237,238,239,240 non solamente per i centri circolari ma così per tutti i tipi di curve delle sezioni coniche e abbiamo fatto vedere che la pratica degli operai non è esatta per altre curve all'infuori del cerchio.

Su ciò ci sono tre cose da rimarcare. La prima che si devono tirare i congiungimenti di testa perpendicolarmente alle tangenti delle curve dei centri nei punti di loro divisione solo negli archi di faccia dove si ha la libertà di inclinarli come si vuole ma non nei centri ellittici degli archi diritti quando sono secondari perché i letti dei conci non sarebbero continuati in uno stesso piano, come abbiamo detto avanti.

La seconda che quando il centro primitivo è circolare i congiungimenti del secondario ellittico devono essere tirati al centro dell'ellissi, piuttosto ché perpendicolarmente alla tangente sulla divisione, perché i piani dei letti devono tutti interrompersi (intersecarsi) nell'asse del berceau cilindrico come si dirà nel quarto libro in modo differente.

La terza che agl'archi di faccia ellittica occorre accontentarsi di fare il congiungimento di testa, perpendicolari agli spigoli (a crociera) perché non si può fare nello stesso tempo?

Perpendicolari a quello dell'estradosso di una ellisse concentrica simile, che per mezzo di una curva la quale non si addice né al congiungimento di testa né al congiungimento di letto, che occorre (affecter) di fare sempre un piano. La ragione è che gl'archi di ellisse (Afymptotiques), cioè concentrici e simili non sono paralleli come quelli dei due cerchi, di conseguenza la perpendicolare alla tangente dell'una non può riunirsi con quella proporzionale dell'arco.

La prima ragione sulla quale è fondata questa divisione proporzionale dell'arco esteriore e interno che comprende lo spessore della volta concerne la solidità, perché le teste dei conci diventano per questa costruzione in forma di cono più larga dal lato esterno rispetto all'interno, la circonferenza dell'uno essendo più grande di quella dell'altro, le parti aliquote sono cosí più grandi in conseguenza la pietra non può passare dall'intervallo dei due conci che è più stretto alla doele che all'estradosso; così essendo pressato dalla sua pesantezza contro i conci collaterali, che si appoggiano gli uni agli altri essa è sostenuta in aria dalla resistenza degli ultimi appoggi, che sono i piedritti i quali devono avere molta forza per controbilanciare lo sforzo che questi conci o specie di coni fanno per divaricarli .

Noi abbiamo ancora due altre ragioni di questa costruzione, la prima concerne la simmetria al fine di conservare sempre una inclinazione uniforme dei congiungimenti di testa sulla curva del centro, perché quando pure le parti dell'arco esteriore ed interno non sarebbero proporzionali, la volta non si sussisterebbe meno (sosterrebbe), visto che quelle della curva interna sono sempre più piccole di quelle dell'arco esterno non risulterà di inconveniente che la deformità è una disuguale spinta dei conci contro i loro collaterali.

La seconda ragione è per una più grande solidità perché i piani che passano attraverso il congiungimento di testa che si chiamano i letti, essendo perpendicolari alla tangente dell'arco nel punto della sua divisione fanno con la doele da una parte all'altra il più grande angolo che possono fare che è l'angolo diritto o poco differente dal diritto perché se si facesse ottuso da una parte si renderebbe l'altro acuto.

Ora è importante che le resistenze degli spigoli, cioè degli angoli delle pietre siano uguali per portare ugualmente il carico, perché è chiaro che la più forte farebbe rompere la più fragile come l'esperienza fa vedere nelle piatta bande dove si è costretti di agire altrimenti come faremo rimarcare nel libro seguente dando i mezzi di rimediare

QUARTA REGOLA

Abbassare delle perpendicolari da ciascuno dei punti di divisione dell'arco esterno e dell'interno sul diametro comune prolungato dove occorre per averne la proiezione su una linea dritta sia (fig.237, 238,239) sia l'arco A B D esteriore e a b d interni divisi in parti proporzionali A 1, 1. 2, 3. 4 e a 1 e c. per mezzo delle linee 1.1, 2.2, 3.3, 4.4, si abbasserà sul diametro comune a d e sul suo prolungamento A D delle perpendicolari di ciascun punto di divisione 1.2.3.4.,le quali per l'arco esteriore saranno 1E, 2F, 3G, 4H, e per l'interno 1e, 2f, 3g, 4h, per avere le proiezioni delle divisioni dell'arco esterno ai punti E F G H e dell'interno ai punti e f g h.

Le perpendicolari di cui parliamo sono ordinariamente in opera delle verticali, cioè in termini d'arte degli a piombo e allorché il diametro del centro non è orizzontale come capita con gli archi rampanti, al posto del diametro si sostituirà una linea orizzontale, fino a quella si prolungheranno queste perpendicolari al di sopra del diametro inclinato.

La ragione di questa operazione è che essa fornisce una maniera comoda di trovare l'inclinazione di ciascuna corda degli archi del centro diviso in conci, ciascuna di queste corde diventa l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, di cui la proiezione dà la lunghezza della gamba orizzontale a e per il primo dell'interno a e 1 fig.239 e e f o il suo uguale 1 k per il secondo triangolo

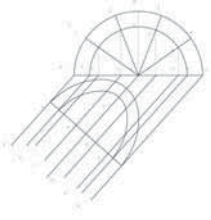


Fig.237

1 K 2 di conseguenza che non resta che trovare l'altezza dell'altro lato del triangolo rettangolo e 1 o K 2 per avere le due estremità dell'arco o della sua corda, a & 1, o 1 & 2 per avere la sua posizione visto di fronte; ciò che la differenza delle perpendicolari sul diametro da facilmente sottraendo l'altezza 2 f, la prima altezza e 1.

E' evidente che queste differenze di altezze dove queste altezze all'imposta a sono i seni dritti dell'inclinazione delle corde di divisioni dei centri e le linee orizzontali trovati per mezzo della proiezione a e, & f sono i loro seni di complemento.

Ora, prima di scavare gli archi in una pietra, si comincia sempre con il trovarne le corde per parecchie ragioni che si vedranno in seguito. Questa pratica è fondamentale di tutte le proiezioni si troverà ripetuta in ciascun trattato del taglio delle pietre nel libro quarto e per questo è bene fare attenzione.

Occorre sottolineare che benché le linee che sono la proiezione degli archi siano verticali nell'esecuzione, non importa nel disegno dell'assonometria in quale situazione si tracciano, ammesso che esse siano sempre perpendicolari a una linea supposta orizzontale.

Quest'avvertimento non è inutile per i principianti che trovano strano che nell'assonometria si piazzi le trinche qualche volta in

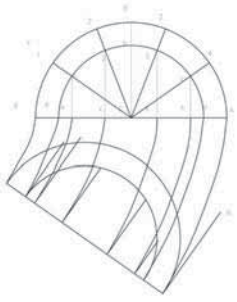


Fig.238

una situazione rovesciata, o per comodità d'adattamento della figura alla quale si accostano più spesso le parti contigue, o per evitare la confusione delle linee che s'incrociano, o per sistemare in mezzo al foglio, o del muro sul quale si fa il tratto.

L'immaginazione deve raddrizzare i piani sdraiati su altri piani con i quali devono fare degl'angoli piatti, acuti od ottusi; ora in qualche situazione che li si suppone, le perpendicolari a loro comune intersezione danno sempre gli stessi punti di proiezione degli archi; come fig. 239 se suppone gli archi B & D, M D e b & d, p e d uguali tra loro e ugualmente divisi nei

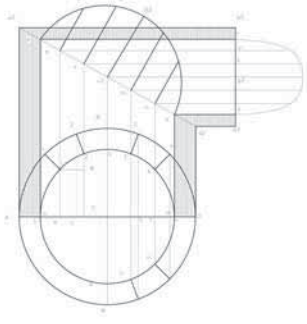


Fig. 239

punti 3.4 o & n, è evidente che le perpendicolari tirate dalla loro intersezione comune C D, daranno gli stessi punti di proiezione g & h per i punti o & n, come per i punti 3 & 4 come nei tratti si troveranno dei centri (trinca) messi indifferentemente in tutti i sensi, seguendo la comodità della figura e del disegno.

QUINTA REGOLA

Condurre attraverso i punti di proiezione delle divisioni di centri, linee diritte o curve come conviene alla direzione dei congiungimenti di letto di ciascuna specie di volta che né esprimono la proiezione.

(FIG.237-238) Sia la linea a d il diametro di un centro sul quale si sono trovati per mezzo della proiezione i punti e, f, g, h, che esprimono le divisioni dei congiungimenti (?) 1, 2, 3, 4, se la volta è cilindrica come nella figura 237, per trovare la direzione dei congiungimenti di letto e tracciarle non si fa altro che condurre delle parallele all'asse, o al fianco della volta a botte attraverso i punti e, f, g, h, come e k, f l, g m, h n, se la volta a botte non è dritta ma avvolgente come una volta sul (noyau?) circolare. Fig.238 al posto di linee diritte si tireranno degli archi di cerchi concentrici ai suoi lati, o degli archi di ellisse, se questa volta gira in ellisse e si avrà la direzione dei (yoins?) di letto come e k p, f l g, g m r, h n s.

Se la volta è sferica come nella figura 233 dal punto C per il centro occorre disegnare tanti cerchi concentrici attraverso i punti di proiezione dei giunti(?) si avrà nello stesso modo (lo stesso) la direzione di questi giunti che è ancora parallela ai

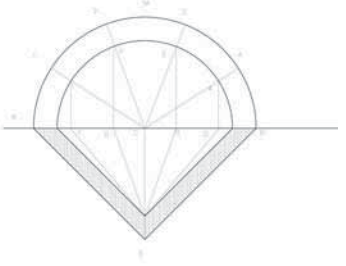


Fig. 240

piedritti della volta.

Infine se la volta è conica come nella fig, 240 avendo trovato la proiezione delle divisioni del centro primitivo A M B ai punti F D N O, si tirerà per questi punti e per la sommità inferiore del cono S le linee s F, s D, s N, s O, che saranno i congiungimenti dei giunti di letto.

Per dove si vede che (daz?) alla proiezione delle divisioni del centro primitivo, si ha così la direzione dei giunti di letto espressi sul piano orizzontale. Occorre solamente escludere da questa regola la volta sferica o sferoidi di cui i giunti di letto sono diretti a dei poli orizzontali poiché le loro proiezioni sono delle ellissi che s'incrociano ai poli come la cima dei due coni uguali girati in senso contrario su un asse comune che si potrebbe inscrivere dentro lo sferoide.

La ragione di quest'operazione è che i conci devono essere coricati seguendo il lato più lungo in orizzontale, oppure si avvicinano tanto che è possibile per dare loro una migliore stabilità, ora quando sono messi in ordine seguendo la direzione di una volta a botte orizzontale, dove sono sempre orizzontali in un senso, essi si appoggiano totalmente su i loro letti, ma nelle volte inclinate si appoggiano su le loro teste qualche volta tanto che su i loro letti.

Secondariamente si prolunga la direzione dei giunti di letto nella lunghezza o nel giro di volta al fine di dar loro la grazia di una simmetria di linee diritte o curve parallele alle imposte, le quali sono una specie di ornamento nelle volte sferiche, e sé si ci si allontana da questa disposizione nell'inclinare i giunti è ancora per farne uno ornamento più singolare per un assetto di archi.

Si potrebbe osservare una simile simmetria nel guardare i giunti montanti, che si chiamano (joints de doele), che li traversano come io l'ho già visto eseguito sul ponte d'Avignone sul Rodano nella parte che appoggia sul piccolo braccio del fiume. Ma risultano due inconvenienti, uno per la costruzione perché non si ha la libertà di impiegare pietre di lunghezza disuguale, l'altro per la solidità perché le parti non sono legate insieme tanto ché nell'esempio che io cito il quarto, la metà e persino i due terzi del ponte potrebbero cadere senza trascinare il resto, ciò che l'architetto potrebbe aver fatto a disegno.

Può ancora succedere che una parte della volta si affacci davanti levando i centri che i vicini, di cui l'apparecchio ha potuto essere eseguito meglio e fare così delle ineguaglianze nella (doele); infine l'uso è di prolungare con un seguito regolare il giunto di letto e non quelli di (doele) che non devono fare alcun seguito allorquando si vuole offendere-colpire della sconnessione? .

Le linee della proiezione del congiungimento del giunto di letto sebbene semplici nell'assonometria sono la rappresentazione di tre linee della volta; sapere (de l'intervale vuide) che resta fra i due conci che si riempie qualche volta di malta e due angoli o spigoli di questi due conci che si toccano nella superficie della (doele) è perciò che si chiamano in termini d'arte il piano degli spigoli dei giunti di letto, dizione impropria che non si può adottare perché non si può dire il piano di una linea ma piuttosto al proiezione di una linea.

Si vedrà nel libro seguente da quale uso derivano le proiezioni dei giunti di letto, noi diremo solamente guadando le volte cilindriche che esse servono a tagliare-interrompere proporzionalmente i diametri dei differenti centri sopra i quali elevando delle perpendicolari uguali a quelle che cadono dalle divisioni del centro primitivo si trovano le altezze e le divisioni dei giunti di ciascun centro come fig. 239 a causa della parallele a p, e e, f f, & c, i diametri a d, & p q, sono divisi proporzionalmente così pure p q, & r s; di conseguenza il diametro a d proiezione dell'arco primitivo a b d, è diviso proporzionalmente nel diametro r s e perché le altezze della volta a botte sono supposte uguali dappertutto facendo y t, z u uguali a e 1, f 2, si avranno le divisioni del terzo centro; cosa che sarà spiegata più a lungo in seguito.

Se dopo aver fatto la proiezione di giunti di letto della (doele) o imbotte si fa altrettanto per la proiezione dell'estradosso; si troveranno i punti delle divisioni dei centri esterni i quali essendo uniti da una linea verso l'interno daranno l'inclinazione dei piani dei letti. Ma per non moltiplicare le linee, non si disegnano queste proiezioni che secondo il bisogno; noi le omettiamo quasi sempre in questo trattato, per evitare la confusione nei tratti dell'assonometria dove causano confusione che non è un piccolo ostacolo alla comprensione dei tratti del taglio delle pietre.

Per fare la proiezione dei giunti di letto delle volte coniche i cui apici sono lontani, o soltanto fuori della portata della superficie, sulla quale la si vuole tracciare, non basta avere la proiezione dei giunti di un centro primitivo, né occorre un secondo; perché queste linee non essendo parallele tra loro, devono tendere a un punto che è il vertice del cono e se il secondo centro non è parallelo o simile al primitivo si potrebbe essere in difficoltà per rappresentare i suoi giunti, di cui non c'è che un solo punto dato dalla proiezione sul diametro del centro primitivo; ecco un modo usato per farlo.

PROBLEMA 1°

Attraverso un punto dato dopo due linee convergenti condurne una terza che tende alla stessa sommità dell'angolo che esse sarebbero se fossero prolungate.

Siano fig. 241-242 le linee A B & C E inclinate fra loro e il

Fig. 241-242

punto D fra le due, o al di fuori; si tirerà a volontà attraverso questo punto la linea A C, fig. 242 o A D C, fig. 241 che taglia le due linee date in A & e in C; gli si condurrà in seguito una parallela B E, a quella distanza che si vorrà e le diagonali A E, B C attraverso i punti dove questa parallela taglia le linee date. Da punto D per H, sezione delle diagonali si tirerà D G & proiettando la grandezza G E, da B in X si tirerà D X che sarà la linea cercata.

DIMOSTRAZIONE

A causa dei triangoli simili A D H, E G H, si ha A D: E G:: AH: EH, & i triangoli simili A C H, E B H danno A H: E H:: A C : B E, dunque così A D: E G o B X:: A C : B E; questo ciò che occorreva fare.

Sesta regola i letti delle volte cilindriche e coniche devono essere, fintanto è possibile delle superfici piane. La ragione è che la superficie piana essendo la più semplice è di conseguenza la più facile da eseguire e la più adatta a adattarsi su una simile di conseguenza l'intervallo dei giunti diventa il più piccolo-minore possibile nell'esecuzione. Im effetti si prova che allorché le superfici sono curve ai letti e ai giunti, sono raramente ben'eseguite nella loro concavità o convessità perché

l'una si adatta bene nell'altra; si è sempre obbligati di ritoccare e di presentarli spesso parecchie volte prima che una e l'altra superficie si adattino-assestare bene insieme; è per questa ragione che piuttosto che fare dei letti sinistri, si preferisca farli in falsa sezione-volta, come nelle rampe di scala oblique e in questo trattato si chiama il corno di vacca dove si tira il giunto dal centro del piccolo ceintre?, il quale essendo eccentrico al grande, non può avere per giunto la stessa linea; poiché il raggio del piccolo non può essere perpendicolare agli archi del grande, i cui raggi partono da un altro punto.

Si potrebbe intanto escludere certe volte irregolari come quelle delle volte a botte ellittiche per un tratto e circolari per l'altro di cui le facce sono apparenti, perché oltre la difformità che né risulterebbe su ciascuna faccia dove i giunti di testa farebbero una falsa sezione, i letti piani potrebbero colpire i doeles dagl'angoli troppo acuti, che sarebbero soggetti a far rompere gli spigoli dei conci tagliandoli, posandoli o solamente caricandoli.

SETTIMA REGOLA

I letti delle volte sferiche o sferoidi sono delle superfici curve la ragione è che si sono formate per mezzo della rivoluzione dei giunti di testa e1, f 2, G 3, intorno al loro asse al quale sono inclinati da dove deriva che sono alternativamente concavi e convessi per adattarsi gli uni dentro gli altri, come dei cornetti-sacchi.

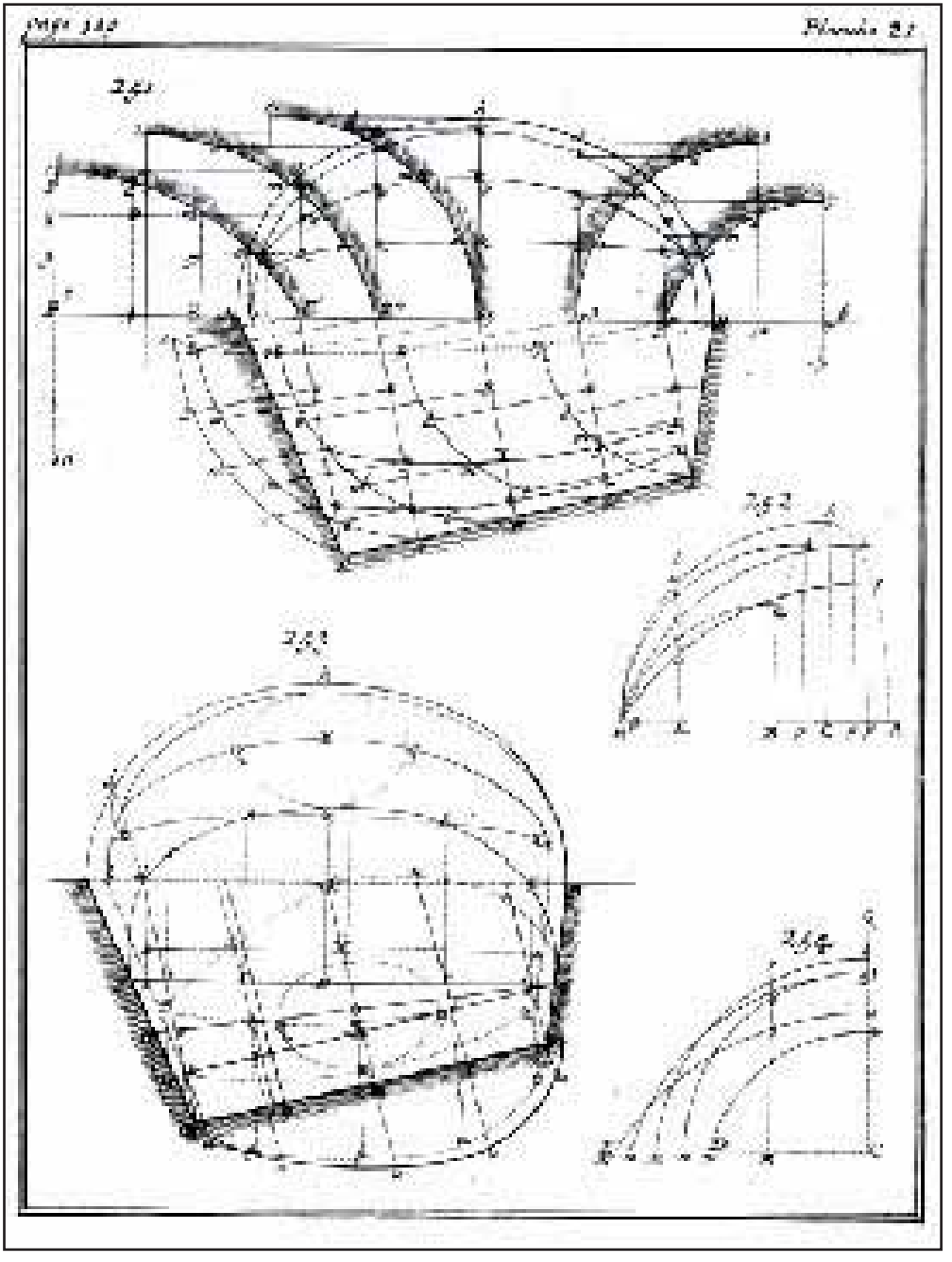
OSSERVAZIONE NOTA

I letti delle volte cilindriche, sferiche e coniche regolari sono delle superfici che hanno sempre due lati paralleli sia che siano piane o curve.
La ragione è che le volte sono ordinariamente d'uno stesso spessore ora come i letti stendendosi da dentro a fuori, sono terminati da una parte per mezzo della (doele) e dall'altro per mezzo dell'estradosso, che sono paralleli almeno orizzontalmente.

E benché la volta non sia estradossata di uno stesso spessore ed è cilindrica e si ispessisca verso i fianchi (della volta) seguendo la curva che M. Parent ha trovato per bilanciare la spinta data dall'aumento di spessore dei conci, di ciò si parlerà nel quarto libro; sarà ancora vero che i letti avranno due lati paralleli fra loro perché questo spessore colpito seguendo la direzione della volta sarà sempre lo stesso a ciascun letto, la differenza non cadendo che sulle superfici dei giunti di doele o di testa e non sui letti dove la potenza resiste al peso, deve sempre essere uguale a uguale distanza dal punto d'appoggio.

ULTIMA REGOLA

Per conoscere sé si possono prendere delle misure su una proiezione, occorre esaminare sé l'oggetto che è proiettato, era parallelo al piano di descrizione. Noi abbiamo dato la ragione di questa regola quando abbiamo dimostrato che la proiezione fatta da linee perpendicolari a un piano accorcia sempre l'oggetto proiettato che non era parallelo a questo piano; perché la sua lunghezza era l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui la proiezione non è che il fianco. E' per questa ragione che per avere le misure dei conci delle rampe di scala oblique occorre farne due proiezioni, una orizzontale che da misure troppo corte e l'altra seguendo la rampa su un piano che gli sia supposto parallelo. Allora si vedrà nel quarto libro che sebbene il modo di tracciare una volta in una rampa di (scala) obliqua riscattando – compensando una volta a botte per mezzo di squadratura, sia la stessa che quella di tracciare una porta obliqua rispetto al piombo, occorre misurare lo sbieco della porta sul piano di livello e quello della rampa sul piano inclinato, chiamato piano seguente la rampa, perché il piano di livello è troppo corto; ciò che fa vedere la necessità di fare un profilo di rampe, o ciò che la stessa cosa la loro proiezione su un piano verticale, per fare in seguito una nuova proiezione su un piano inclinato per mezzo del quale si possano trovare le misure dei conci, di cui i giunti di letto sono paralleli alla rampa.



Sulla supposizione di superfici cilindriche o coniche di base qualsiasi, per giungere alla descrizione e alla formazione di superfici curve terminate da delle linee curve a doppia curvatura.

Il mezzo dell'intradosso piatto, che noi stiamo per proporre,è molto vantaggioso nel metodo del taglio delle pietre, sia per fornire sicurezza e facilità ai conci delle volte delle superfici regolari o sinistre, sia per il controllo dei materiali. Tuttavia, diventa inutile per la formazione delle superfici curve, cilindriche, coniche, sferiche, o sinistre che sono terminate attraverso linee curve a doppia curvatura, questo perché bisogna fare ricorso a supposizioni di superfici cilindriche che tagliano la superficie data seguendo due direzioni, di cui l'incontro si fa alla curva a doppia curvatura che si cerca.

Noi intendiamo attraverso la parola superficie cilindrica, non solo quella ordinaria di un cilindro, che ha per base un cerchio o un'ellisse, ma una curva qualsiasi conosciuta o sconosciuta, geometrica o meccanica, in modo che dia la proiezione di una curva a doppia curvatura su un piano orizzontale o verticale.

Sono le superfici sinistre, dunque, i costoloni che le terminano, o quelle di certe sezioni che si possono fare, che si trovano facilmente attraverso la sola inscrizione dentro un cilindro o dentro un cono, alla superficie della quale questa curva conserva una progressione continua. Tale è quella della vite, sia che essa faccia le sue evoluzioni parallelamente, o piuttosto a uguale distanza dal suo asse, o che essa si restringa a lumaca. Quindi supponendo una vite ordinaria, le cui evoluzioni sono sempre equidistanti dal suo asse, è chiaro che il piano della proiezione perpendicolare al suo asse, è un cerchio, e che si può iscrivere dentro un cilindro circolare retto, dalla base del quale si alza ugualmente e segue una progressione conosciuta.

Di là si segue la pratica di fare il profilo o l'elevazione di questa specie di curva a doppia curvatura, come noi abbiamo spiegato avanti, proponendo per esempio l'elevazione di una scala a vite, di cui il contorno sul cilindro è un'elica tangente all'estremità degli scalini.

Se il contorno della vite non fosse sempre equidistante dal suo asse, la costruzione del profilo sarebbe ancora la stessa, con la differenza, che se la base del cilindro, nella quale può essere inscritta, è ellittica, bisogna scegliere per la linea della base del profilo un'asse, o un diametro conveniente al disegno, che serva a trovare i punti di stazione più lontani o più vicini.
Se la vite si restringesse, salendo, al posto di iscriverla in un cilindro, bisognerebbe iscriverla in un cono, o dentro una sfera, o sferoide, e portare tutte le linee di divisione al polo, al quale noi non ci fermiamo, in quanto questo caso succede raramente in architettura, mentre quello di viti cilindriche è di uso continuo,non solamente per le scale ma anche per gli appoggi rampanti delle torri tonde, circolari o ellittiche.
La maggior parte delle curve a doppia curvatura non forniscono le stesse facilitazioni ad essere descritte, come invece succede per la vite, per due ragioni: una è che il cilindro nella quale si può inscrivere è molto spesso irregolare, cioè non ha per base una porzione di cerchio o di ellisse; in modo che bisogna cominciare a cercare il contorno di questa base attraverso il metodo della proiezione. In secondo luogo, perché avendo questa curva e attraverso, e di conseguenza la superficie del cilindro che si può elevare al di sopra, non si può determinare sul cilindro alcun punto della curva a doppia curvatura, perché non si conosce la distanza dei punti della base del cilindro a quelli della curva che si cerca, come la si conosce nell'esempio della vite; in modo che si è obbligati a considerare questa curva a doppia curvatura attraverso un'altra posizione perpendicolare alla prima; in modo da cercare la proiezione e di elevare sulla curva che le darà per base un secondo cilindro perpendicolare al primo, alla superficie della quale questa curva deve ancora trovarsi.

Ora dal momento che dentro ciascuna delle superfici cilindriche trovate, è evidente che essa sarà dentro la loro comune intersezione, ciò va rimarcato come un principio di pratica tra i più importanti che noi abbiamo da proporre, e di cui si vedrà un'applicazione continua quando parleremo delle volte composte.

Per chiarire questa dottrina e renderla sensibile attraverso un esempio sceglieremo qui una Arriere-Voussure di St. Antoine obliqua e ribassata, che è una superficie sinistra nella quale noi troveremo delle curve di sezioni piane, e delle curve a doppia curvatura molto adatte a dare una giusta idea del modo di fare pianì, profili e elevazioni di tutti i tipi di superfici più difficili da rappresentare, da cui si trae il modo di plasmare tanto la pietra che il legno.

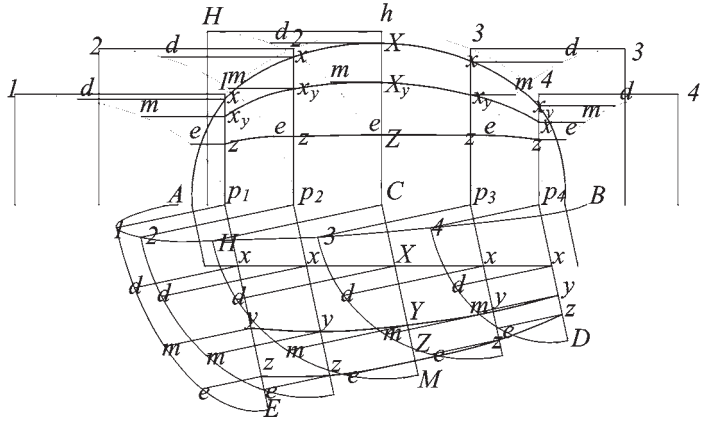


Fig.251. Sezioni di una volta irregolare.

Sia il trapezio (***Fig. 251***) *AEBD* il piano orizzontale di una volta la cui superficie è sinistra come quella che noi diamo per esempio. Bisogna in primo luogo supporre che si conoscono le sezioni piane e parallele che seguono una direzione; poiché se non si conosce niente non si può conoscere niente, poiché il ragionamento non è che una conseguenza tirata fuori da qualche conoscenza anteriore o seguendo le filosofie *procedere a noto da ignoto.*

Supponiamo dunque che si conoscono le curve di tutte le sezioni parallele alla linea di mezzo *CM*, o attraverso una convenienza o attraverso una determinazione arbitraria, come le si conoscono dentro la Arriere-Voussure

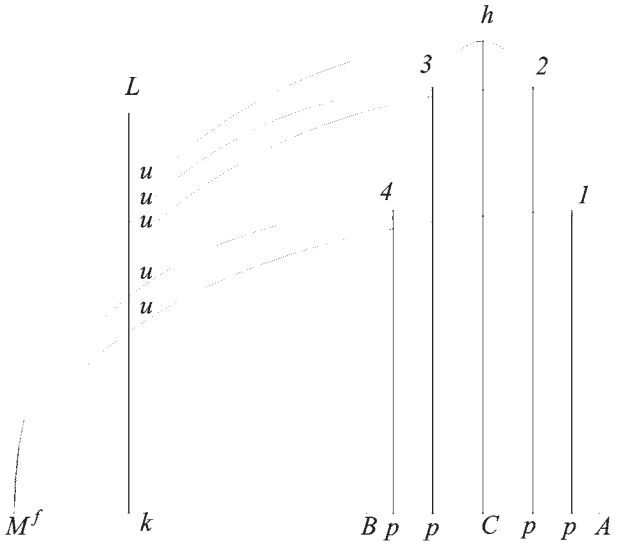
di St. Antoine, visto che sulla loro determinazione si è fatto il tratto. Non importa che questi siano proporzionali al cerchio o all'ellisse o a un'altra curva, noi non abbiamo bisogno di conoscere la natura, purchè sia dato ciò che è sufficiente.

Avendo condotto delle parallele alla linea di mezzo *CM* in tale quantità si giudicherà a proposito, per avere un numero sufficiente di curve che si cerca, si porterà dai punti $p, {}^1p^2, C, p^3, p^4$, ecc., dove queste parallele tagliano la linea *AB* che si prende per base del centro della faccia, tante perpendicolari a questa linea che taglieranno il centro della faccia dato *AhB* ai punti $^1, {}^2, h, {}^3, {}^4$, dove saranno le altezze dei profili cioè delle curve di tutte le sezioni piane che passano per le linee del piano orizzontale $Ep^1, N\,p^2, MC, Np^3$,ecc., parallele a *CM*.

Se si conduce attraverso tutte queste altezze delle rette orizzontali *hH,33,22,11*, che si facciano uguali alle loro corrispondenti che sono tirate dentro il piano orizzontale $MC = hH$, $Np^3 = 33$, $np2 = 22$, ecc., si avrà due punti di ciascuna delle curve delle sezioni fatte attraverso dei piani paralleli fra di loro, e perché noi li dobbiamo supporre conosciuti o dati, come nell'esempio presente, dove queste sono ordinariamente dei quarti d'ellisse, o degli archi di cerchio, quasi tutti più piccoli dei quarti. Ora saranno da descrivere queste sezioni: o, come queste devono apparire nel piano perpendicolare al piano *AhB*, cosa che è impossibile fare sulla carta, a meno che non si applichino dei pezzi di carta volanti, che le riducono al rango delle altre sullo stesso piano, come si vede nelle figura, o tutte da un solo lato, o per evitare confusione tra le linee, parte da un lato, per esempio verso *A*, e parte dall'altro, verso *B*.

Tutte queste curve così sistemate daranno facilmente la posizione di tutti i punti che si vorrà sottolineare, per esempio il loro punto medio in *m*. Poichè si portano attraverso questi punti tanti orizzontali $mxy^{(1)}$ paralleli a *AB*, essi taglieranno in *y*, le verticali $hC, 1p^1, 2\,p^2, 3p^3$,ecc., che sono all'intersezione del piano verticale *AhB*, e dei piani che lo tagliano perpendicolarmente seguendo queste verticali. La curva tracciata a mano attraverso i punti *yy* , sarà l'elevazione di quella che passa per la metà della pietra di Arriere-Voussure, sebbene sia ben lontana da questa rappresentazione.
Sarà lo stesso per quella che si vorrebbe far passare a un terzo o a un quarto, e di traverso da un'imposta all'altra.
E' ancora visibile che questo metodo serve a tracciare delle parallele ai costoloni davanti *AhB*, o dal fondo *EMD*; poiché non c'è che da prendere sugli archi delle sezioni piane delle lunghezze date uguali, come *1d, 2d, 3d, Hd*, ecc., per l' altezza,e $p^1e, p^2e, Ce, p^3e, p^4\,e$, per la profondità, inseguito portare attraverso tutti i punti *d* e *e* delle orizzontali fino all'intersezione delle verticali corrispondenti, che esse taglieranno ai punti *xxx* e quelle portate attraverso i punti *e,e*, in *z,z*, la linea curva tirata attraverso i punti *x,x,x, z,z,z* sarà la proiezione verticale; cioè l'elevazione delle linee parallele ai costoloni che non saranno tuttavia in questa elevazione.
Lo stesso metodo che noi impieghiamo per trovare i punti delle curve proiettate sul piano verticale, servirà per trovare la rappresentazione degli stessi punti sul piano orizzontale; non resta che ripetere tutte queste sezioni piane di seguito sulle loro basi orizzontali $Ep^1, n\,p^2, MC$, ecc. e per i punti dati *d,m,e* di tutte queste curve tirare loro delle perpendicolari *dx, my, ez*, e si avrà sul piano orizzontale *ABDE* delle altre curve *xx*X*xx*, *yy*Y*yy*, *zzz*, che saranno in termini di architettura i *Piani*, cioè le proiezioni orizzontali delle curve che si cercano, le quali rappresentano delle parallele a *AB*, come *x, x, x*, o a *ED*, come *z, z, z*, o che passa attraverso la metà della pietra, come *yyy*.

Fig.252. Profilo laterale della volta, su un piano parallelo a *CM*.



Per abbreviare l'operazione si mettono insieme tutte queste curve su un profilo *MhAB*, ***Fig. 152***$^{(1)}$, che si può fare direttamente seguendo le curve che si vogliono tracciare; per esempio, se si vorrà ce ne serviremo per cercare i punti di una curva formata attraverso una sezione piana *Gg* parallela a *ED*, ***Fig.253*** , bisogna rimettere insieme le origini di tutte le curve delle sezioni piane, che io chiamerò primitive in un solo punto *M*; perché se si porta la lunghezza *MK* i un piano orizzontale in *Mk* sulla base *MA* del profilo, e gli si eleva una perpendicolare *kL*, essa taglierà tutte le curve delle sezioni primitive *M1, M2, M3, Mh* ecc., in dei punti *v, u, u*$^{(2)}$, che daranno le altezze della curva piana o della sezione piana della volta sulla base *Gg*; così non ci rimane che portarle successivamente seguendo il loro ordine in *iu, iu, iu*, per avere i punti *u, u, u*, di questa curva.

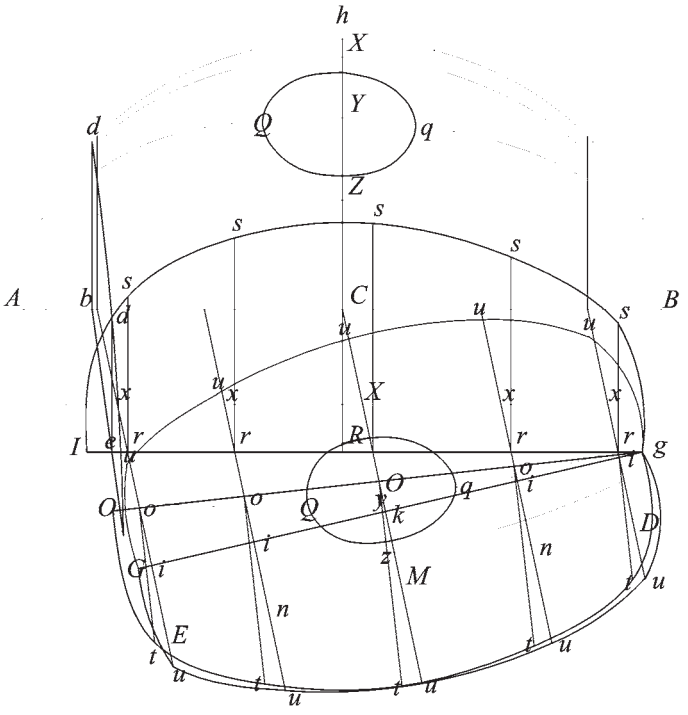
Ma se al contrario si vogliono cercare i punti della curva, che sarebbe una sezione piana parallela a *AB*, come *Ig*, converrebbe mettere insieme l'origine superiore di tutte le sezioni su una stessa linea verticale *ChQ*, ***Fig.254***, per la stessa dell' esempio precedente; in seguito si taglierebbe questo profilo attraverso la perpendicolare *Rr*, la cui distanza *CR* sarà uguale a quella del piano orizzontale *CR*, la quale darà i punti *Sss* per le altezze della curva.

Ma se la sezione era obliqua a l'una e all'altra delle faccie *AB* e *ED*, come in *gO*, questa abbreviazione non ha più ragione d'essere, bisogna portare a parte sulla base del profilo tutte le lunghezze *EO, no, Mo*, e attraverso i punti *o, e*, del profilo, alzare delle perpendicolari che taglieranno le curve corrispondenti nei punti *t, t, t*, che saranno le altezze cercate, che bisogna portare su delle perpendicolari che bisogna portare su *gO* o sui punti per avere i punti *t, t, t*.
Fig.253. Sezioni di una volta irregolare.
Fig.254b. Profilo della volta fatto su un piano perpendicolare ad *Og*.

(1).Riferimento al segmento mx_y della ***figura 251***.

(1).Nel testo è citata la ***figura 152***, in realtà si fà riferimento alla ***figura 252.***
(2).Riferimento alle altezze *u, u, u* della ***figura 252***.

Nello stesso modo in cui noi abbiamo trovato le curve piane, e le curve



a doppia curvatura, che si possono immaginare dentro una superficie

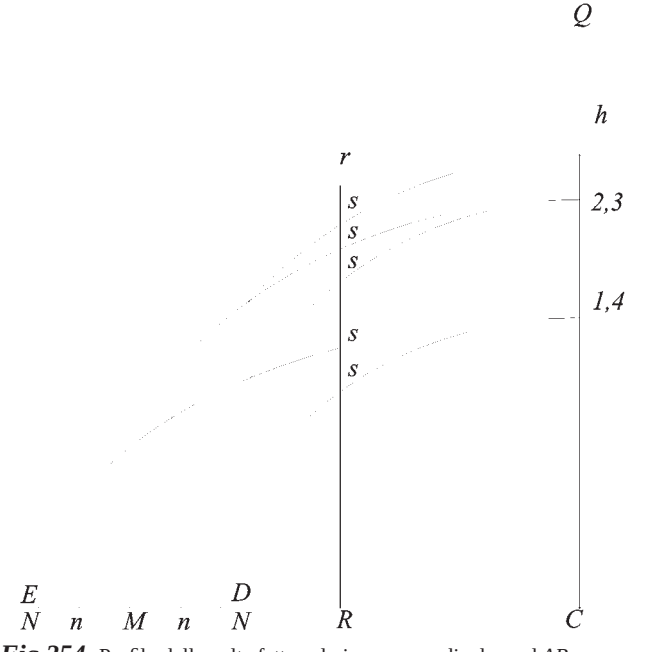
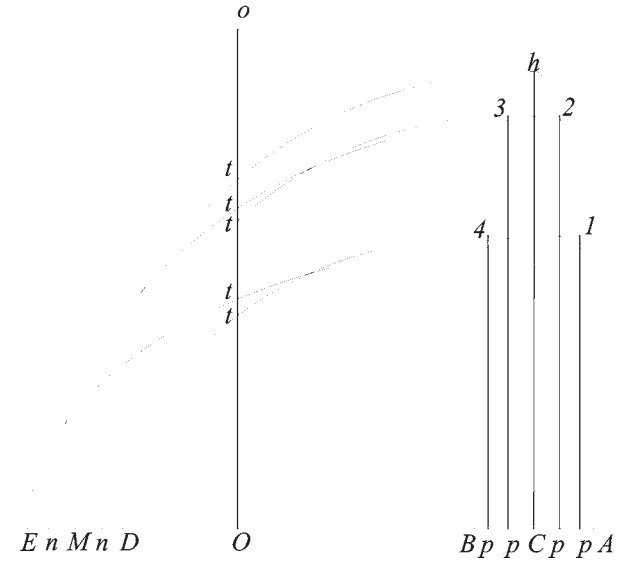


Fig.254. Profilo della volta fatto sul piano perpendicolare ad *AB.*

sinistra attraverso delle sezioni trasversali, sarà facile tracciare questa e



trovare le proiezioni di quelle che noi possiamo immaginare seguire la lunghezza o la direzione di una volta, come quella di una linea parallela all'imposta *AE*, o *BD*; come sarà il costolone della lunghezza di una traversa dell'incastellatura di una falegnameria, di cui l'Arriere-Voussure sarà rivestita.

Perché se si fa a piacere più sezioni piane trasversali come *AhB, ISg*, ecc., parallele tra loro, e avendo preso sulle curve di queste sezioni una parte uguale, come *Ad, Id*, ecc., si abbassa da questi punti delle perpendicolari *db, de*, sui diametri *AB* e *Ig*, esse le taglieranno in dei punti *be*, ecc., attraverso i quali si traccerà a mano una curva che sarà la proiezione del costolone d di una curva parallela a l' imposta *AE* benché questa proiezione non lo sia.

Si segue ancora lo stesso metodo, attraverso il quale si può trovare non solamente delle curve longitudinali e trasversali, che si possono immaginare sulla superficie sinistra da un lato all'altro, ma anche delle proiezioni delle curve a doppia curvatura, che rientrano in se stesse, come si è voluto fare un pannello o un ornamento circolare o ellittico dentro la pietra di una Arriere-Voussure, cosa che è stata eseguita tutti i giorni poiché sono diventate di moda.

Cosa bisogna sottolineare è il fatto che è impossibile descrivere un cerchio o un'ellisse perfetta su una superficie curva irregolare, ma soltanto una figura che si avvicinerà tanto più a un a un cerchio o a una ellisse quanto più la superficie che si descrive sarà meno concava o convessa; noi escluderemo soltanto le superfici sferiche, sferoide, coniche, cilindriche e anulari, dove il centro della figura che si descrive si trova a un polo o dentro un asse.

trova a un polo o dentro un asse. Così poiché si traccia con il compasso una superficie simile a un cerchio sulla superficie dell'Arriere-Voussure che ci serve da esempio, non è che un cerchio apparente, la quale in realtà è una curva a doppia curvatura, di cui si può trovare quanti punti quanti se ne vorrà, attraverso la proiezione sul piano orizzontale *ABDE*, dove essa ci darà una curva in un ovale appuntito, come si vede *Qxqz*, e sul piano verticale *AhB* una curva ristretta verso l'alto come *Qhqz*.

Avendo determinato in precedenza la posizione del centro di questo cerchio sulla sezione primitiva del punto medio *HmC* in m^c per elevazione , e *MmH*, per il piano orizzontale, e le lunghezze uguali ai suoi raggi sulla stessa curva, l'uno verso *d*, l'altro verso *e*, si avranno le proiezioni verticali di questi punti in *X* e in *z* su *hC*, e le proiezioni orizzontali in *Xz* su *CM*.

In seguito si faranno delle sezioni piane, che passano attraverso il punto *Y* del piano orizzontale in diverse direzioni a piacere; si prenderanno su queste curve dei raggi uguali di cui si cercheranno le proiezioni, come abbiamo detto per gli altri punti *d* e *e*, e si avranno così tanti punti quanti se ne vorranno in proiezione orizzontale e verticale, cioè si avranno in termini artistici *Piani* e *Profili*; questo è sufficiente per formare la figura richiesta in pietra o in legno, come diremo nel libro *IV.*

Osservazioni sull'uso

La regola del procedimento che abbiamo appena stabilito, così semplice come essa è nel suo principio, essendo il seguito naturale di ciò che noi abbiamo detto fino ad adesso toccando la proiezione, è l'esattezza di tutta la scienza del taglio della pietra e del legno.

Nel taglio delle pietre merita fare tante sezioni piane quante se ne può fare, per la comodità dello strumento e dell'esecuzione, fino a che non si ha la padronanza, come succede spesso.

Ma nel taglio del legno, per i rivestimenti degli zoccoli di falegnameria per le incrostazioni degli ornamenti di marmo, si può evitare le curve a doppia curvatura; perché gli ornamenti che convengono a queste importanti opere, consistono in bande parallele, o in bordi circolari o ellittici, o in curve di contorno arbitrarie. Così si può guardare l'esempio che noi abbiamo appena dato per tracciare le proiezioni delle curve, che si suppongono dentro una volta, e particolarmente dentro quelle le cui pietre sono sinistre, come il fondamento e il precetto di tutta la scienza dei falegnami e dei marmisti nelle opere più difficili che si presentano per il tratto del taglio, di cui essi hanno bisogno. Io posso avanzare di dire che questo problema solo contiene tutto il libro del taglio del legno del signor Blanchard, che non è che una applicazione in casi diversi; poiché non si tirano le linee di proiezione dalla loro origine fino alla loro base naturale, orizzontale o verticale, ma soltanto attraverso delle porzioni parallele a queste basi, apparentemente per evitare la confusione delle linee, il suo svolgimento non differisce per niente dal nostro, come noi andremo a mostrare con sensibilità.

Data una sezione piana e primitiva qualunque, (***Fig. 251***), per esempio *1mp¹*, di cui la base orizzontale è la linea retta *Pf p¹* [(1)], e la verticale1*pf* [(2)]. Dati dentro questa curva *1mp¹*i punti *d,m,e*, di cui si vogliono avere le proiezioni, si porterà per questo dal punto d l'orizzontale *df*, che taglierà la verticale *1f* [(3)]in *f*, la distanza*1f* è quella che gli operai chiamano la *sinistra della curva* per l'elevazione; in seguito per avere quella del punto *m*, si porterà *mo* fino al piombo che cadrà da *d*, che l'orizzontale *mo* incontrerà in *o*, la linea do sarà la sinistra della curva *dm*, dallo stesso tirante *e7* fino al piombo *m7*, la linea *m7* sarà la sinistra della infine *et* sarà la sinistra della curva *ep*¹, considerata soltanto come contenuta nella precedenti proiezioni in qualità di elevazione, cioè di proiezione verticale, e per l'orizzontale, si tracceranno le linee *fd,om,7e,t p¹*come si vede chiaramente. Ora è evidente che tutte queste linee, essendo parallele alle linee *1Pf*[(1)], e *Pfp1*[(2)] sono uguali a tutte le loro parti *fg, 1f,g9, 9Pf*[(3)], per l'elevazione ,e *Pf9*[(4)], *98, 8t, t p¹*, che non ha bisogno di dimostrazione, poiché esse sono terminate attraverso delle linee parallele; è dunque indifferente prendere *fd* per *Pf9*[(5)], om per *98, 7e* per *8t*, sul piano orizzontale, e *do* per *fg, m7* per *g9*, e *ef*[(6)] per *9Pf*[(7)]; così si può riconoscere una totale uniformità tra il metodo del signor Blanchard e questo.

E' per quello che fa un tratto di taglio di legno o di pietra da evitare la confusione delle linee per non imbrogliarsi; ma si può anche dire in favore delle linee intere che danno i punti che si cercano senza trasposizione, che esse guidano con più sicurezza, perché in una operazione siamo soggetti a prendere una linea per un'altra o a mandarle dove non si può; per esempio, una orizzontale a un profilo o una verticale a un piano orizzontale; è per questa ragione che abbiamo creduto di dover ripetere le sezioni piane primitive a un piano orizzontale, e a l'elevazione, perché l'occhio sia condotto dentro la posizione dei punti di proiezione dentro la loro origine.

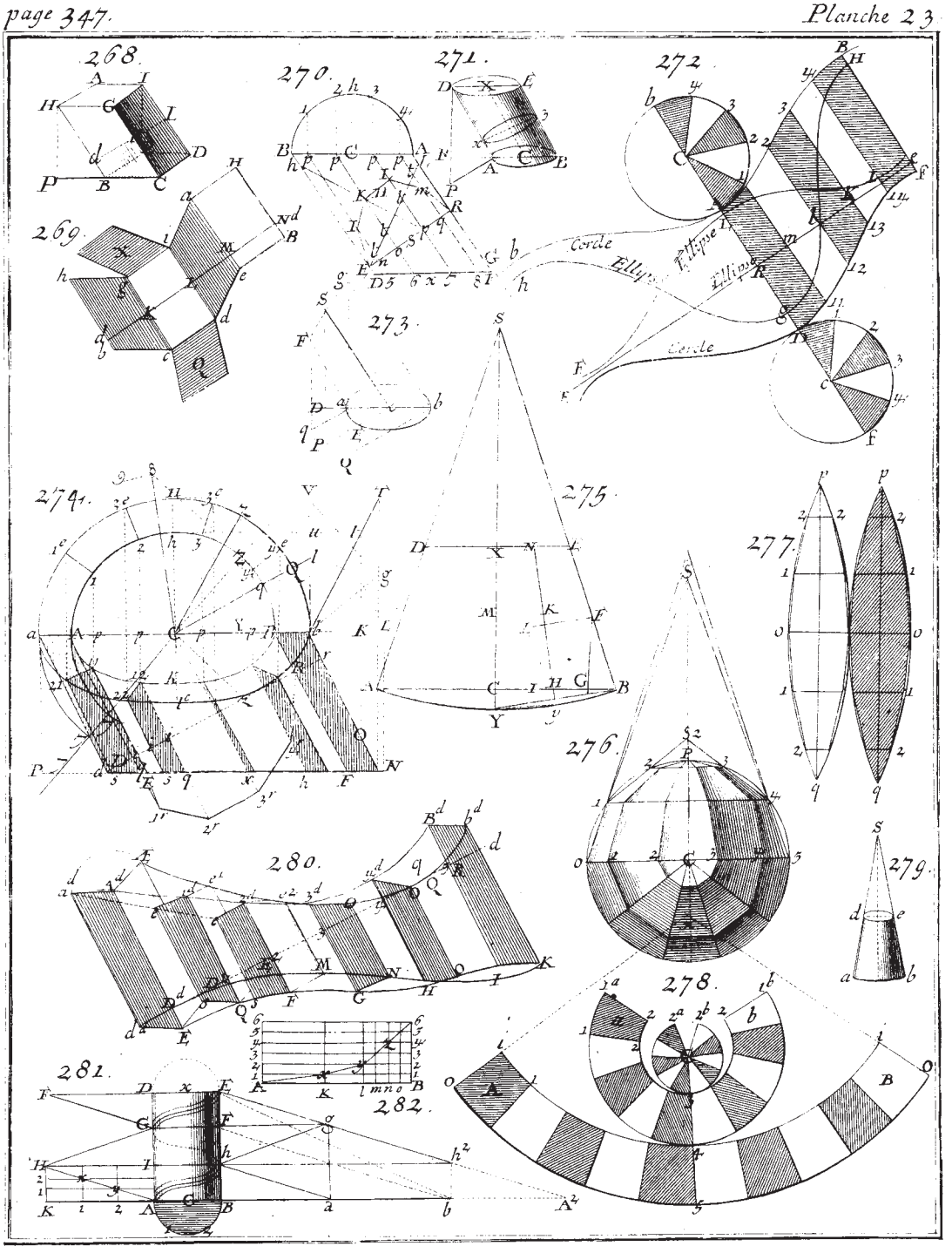
Applicazione all'utilizzo

Quando si ha la base di una superficie cilindrica, sulla quale c'è il costolone curvo che si vuole fermare, si applica il pannello su un paramento, cioè su una superficie piana, che si alza sul legno o sulla pietra che si vuole tagliare, per tracciare esattamente il contorno. In seguito si mette una squadra su questa base seguendo il suo contorno, cosa che fa una porzione di cilindro diritto; quando questa superficie cilindrica è formata si alzano delle perpendicolari alla base attraverso i punti che si ra; in seguito si porta su ciascuna di queste perpendicolari l'altezza che abbiamo trovato dentro l'elevazione, come *p¹z, p²z, Cz, p³z*, ecc., che danno sulla superficie cilindrica dei punti , attraverso i quali si traccia la curva del costolone di legno o di pietra che si taglia; cosa che capiremo meglio attraverso i trattati particolari del libro *IV*.

Per risparmiare il seguito delle operazioni, di tirare delle perpendicolari alla base e di portare le altezze che conviene loro, sia anche per tracciare il contorno a doppia curvatura più regolarmente, si fanno degli sviluppi delle superfici cilindriche, che si tracciano su dei corpi flessibili, come di cartone o di ferro bianco o di lamine di piombo, e si applicano di seguito sulle superfici che si vogliono tagliare, che è uno dei grandi processi dell'arte, quello di cui noi stiamo per parlare.

[(1)]. Riferimento al punto P^f della ***figura 251.***
[(2)]. Riferimento al segmento $1P^f$ della ***figura 251.***
[(3)]. Idem.

[(1)]. Riferimento al punto P^f della ***figura 251***.
[(2,3,4,5,7)]. Idem.
[(6)]. Riferimento al segmento *et* della ***figura 251.***

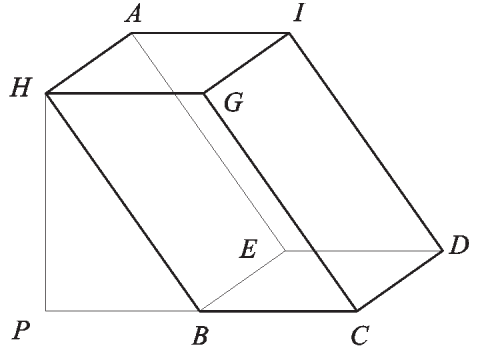

page 347.
Planche 23
268.
269.
270.
271.
272
273.
274.
275.
276.
277.
278.
279.
280.
281.
282.
Corde
Ellipse

SULLO SVILUPPO DEI PRISMI

I Prismi come i Coni possono essere retti o obliqui sulle loro basi.

È evidende che lo sviluppo dei prismi retti è un parallelogramma rettangolo composto da tutte quelle superfici, da cui è inviluppato; poiché le parti prese insieme sono tutte uguali tra loro, e le basi sono parallele, le altezze sono sempre uguali.

Non è la stessa cosa per i prismi scaleni, i cui spigoli non sono perpendicolari al piano della loro base; anche se essi sono compresi entro due piani paralleli, come noi sappiamo; in primo luogo è bene dire che sono paralleli tra loro, sono tutti uguali, ma non formano degli angoli uguali con i lati della loro base; da dove risulta che ogni superficie, da cui il prisma è inviluppato, può essere un parallelogramma diverso, eccetto quelli che hanno per base i lati del poligono della base del prisma, che sono paralleli e uguali tra loro.



Dato (Fig. 268a) il prisma AC, obliquo rispetto alla base BCDE, dell'inclinazione marcata dalla linea PB, distante della perpendicolare HP abbassata sul piano della base prolungata. Preso a caso su uno degli spigoli (Fig. 268b), come per esempio su HB, un punto d, da questo conduco la perpendicolare dK, che incontrerà lo spigolo seguente GC nel

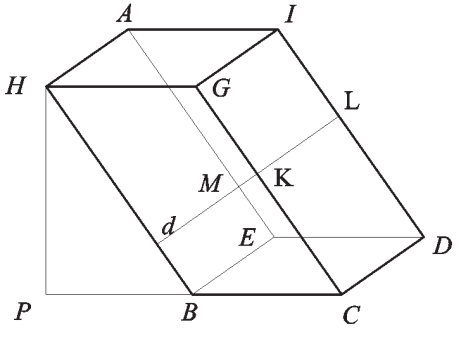


Fig. 268b Questo procedimento è preparatorio per lo sviluppo delle superfici del prisma.

punto K, per il quale si tirerà nello stesso modo una perpendicolare KL, e così via, finchè non abbiamo percorso il contorno, e non siamo ritornati al punto d.
Si farà in seguito a parte (Fig. 269a) una linea dritta dN^d, sulla quale si riporteranno di seguito le lunghezze dK, KL, LM, MN^d uguali a quelle delle distanze perpendicolari agli spigoli del prisma AC, e da tutti i punti $dKLMN^d$, si tireranno delle perpendicolari a dN^d, come hb, gc, id, ae, HB, sulle quali si porterà da una parte e dall'altra della linea dN^d [1] le lunghezze che esprimono le distanze di questa linea agli angoli del prisma; così preso dH della Fig. 268b (si porterà in dh) della Fig. 269a, KG in Kg^2; LI in Li^3, ecc. di uno spigolo; e dall'altro dB in db, KC in Kc^4, LD in Ld^5, ecc. e si avranno i punti hgiaH verso una base, e bcdeB, verso l'altra; per i quali si condurranno delle linee rette da punto a punto , (Fig. 269b) si avrà la figura hgiaHBedcbh[6] per lo sviluppo degli spigoli del prisma, alle quali vanno aggiunte le due basi X e Q , si avrà così la superficie intera, che è qui quella di un parallelepipedo obliquangolo composto da sei superfici, che non sono altro che dei parallelogrammi,

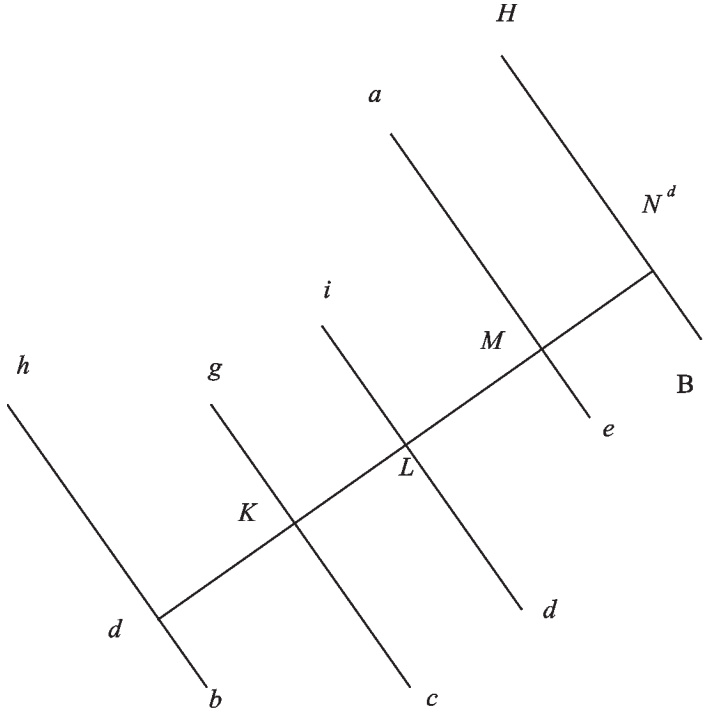
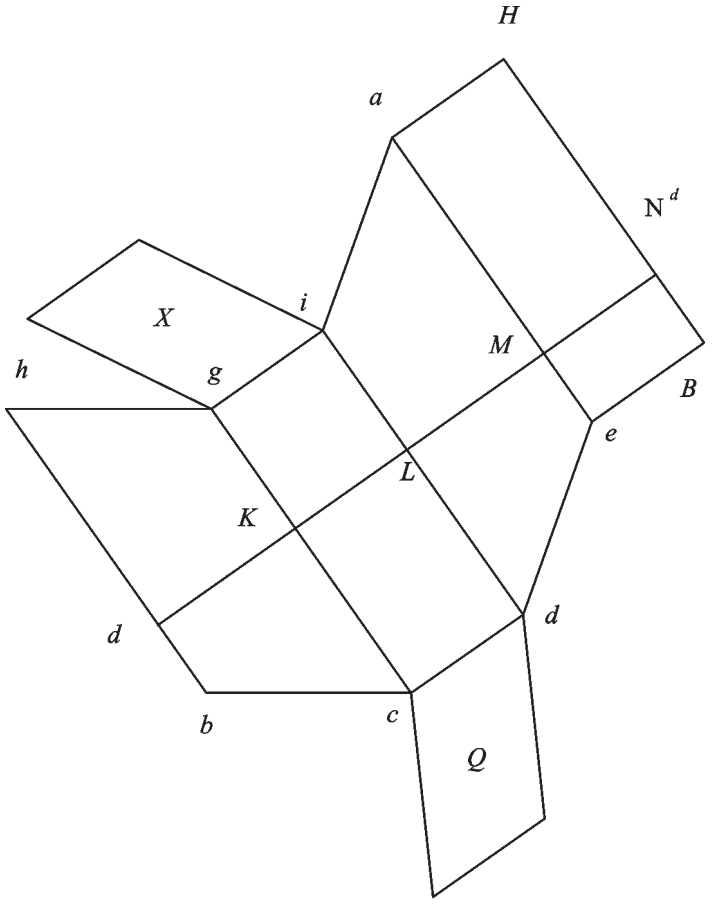


Fig. 269a Lo sviluppo viene fatto prendendo una retta di riferimento e riportando le distanze di ***Fig. 268b.***

[1] Nel testo originario dH^d.
[2] Nel testo originario kg.
[3] Nel testo originario li.
[4] Nel testo originario kc.
[5] Nel testo originario ld.
[6] Nel testo originario hiagFBedcbh.



come il cubo è composto da sei quadrati.

E' chiaro che da qualsiasi numero di superfici sia composto questo prisma, lo sviluppo si farà sempre nello stesso modo; fino ad uno composto da un'infinità di spigoli, che lo renderà allora molto simile ad un cilindro scaleno, che si può mettere al rango dei prismi considerando queste superfici come infinitamente strette.

Corollario I

Da questo si ricava il modo per fare lo sviluppo della superficie del cilindro scaleno.

Sia (Fig. 270a) il parallelogramma BAFD la sezione di un cilindro scaleno per il suo asse, e il diametro della base nella sua maggiore inclinazione, come si vede nella Fig. 271 (quello più piccolo) il diametro BA passante per il punto R della perpendicolare DR abbassata sul piano di questa base.

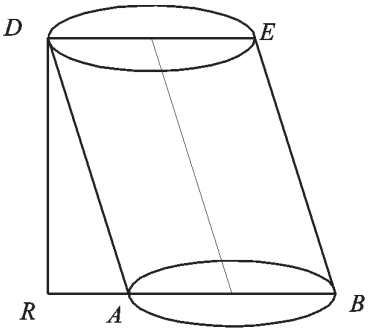


Fig. 271 Si evidenzia l'obliquità del prisma scaleno.

Su questo diametro BA costruiamo il semicerchio BhA, che divideremo in un certo numero di parti uguali o disuguali, non importa, ma uguali

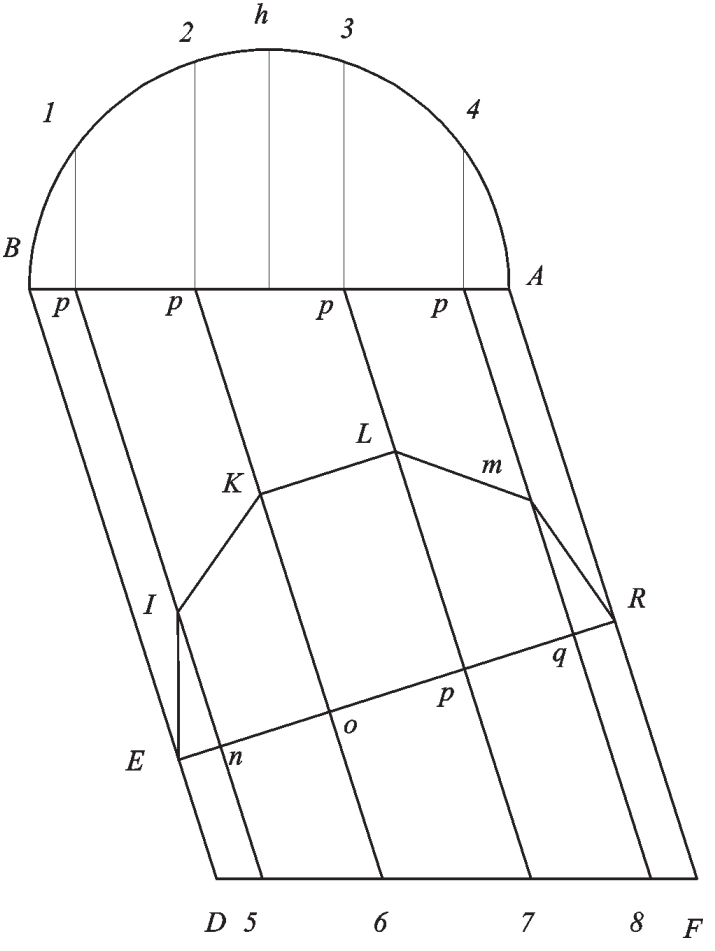


Fig. 270a Lo sviluppo del cilindro scaleno parte dalla figura che si ottiene sezionandolo con un piano passante per il suo asse.

sono più comode, e faremo passare per questi punti di divisione delle rette perpendicolari a questo diametro, come 1p, 2p, 3p, 4p, che si interromperanno ai punti p e p, per i quali si condurranno le parallele al lato BD, come p5, p6, p7, p8 (Fig. 270a).

Quindi per un punto *E* preso a caso su *BD*, si condurrà la perpendicolare *ER* che taglia le parallele a *BD* nei punti *n, o, p, q,* che sono i punti di divisione dell'arco-retto della sezione perpendicolare all'asse che è qui un'ellisse, di cui *ER* è l'asse piccolo, e *BA* quello grande, per mezzo del quale si traccierà questa curva, il cui contorno rettificato, sarà lo sviluppo di quello del cilindro scaleno; ma se non ci accontentiamo dello sviluppo delle corde comprese all'interno delle divisione dell'arco-retto, si troverà importante, sulle parallele all'asse, riportare le altezze *p1*, *p2*, *p3*, *p4*

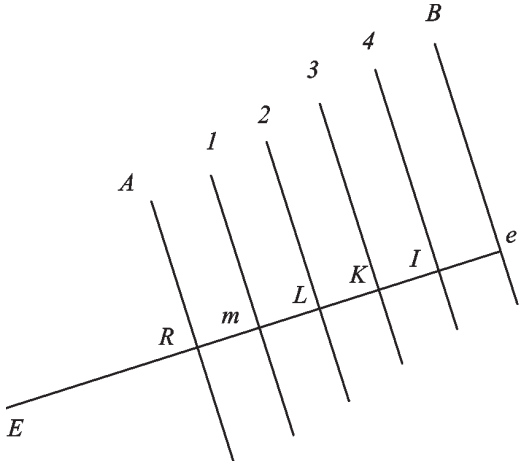


Fig. 272a Il procedimento è lo stesso del prisma scaleno.

(***Fig. 270a***), ognuna sulle parallele corrispondenti, come per esempio *p1* in *nI*, *p2* in *oK*, *p3* in *pL*, *p4* in qm le lunghezze *EI*, *IK*, *KL*, *Lm*, *mR*, si congiuncono insieme su una linea retta, come *Ee* della ***Fig. 272a*** saranno lo sviluppo del contorno del cilindro, che sono tanto più esatte, quanto le parti di divisione della semicirconferenza *BhA* saranno più numerose.

In primo luogo per avere lo sviluppo del contorno della basi (Fig. 272a), avendo portato sulle linea Ee, che si chiama direttrice, le lunghezze delle corde RmLKIE, si condurranno per tutti questi punti delle perpendicolari alla direttrice, sulle quali si riporterà il resto del profilo della Fig. 270a, come RA di quel profilo in RA della Fig. 272a, qp in m1, pp in L2, op in K3, np in I4, EB in eB, e per i punti A1234B, si traccierà a mano una curva (Fig. 272b) che sarà lo sviluppo del contorno della base, tutto ciò si ripeterà dall'altro lato di Ab, e la stessa cosa si farà sotto in Df , anche se le basi sono parallele, si troverà la seconda, in importanza su tutte le parallele ad AD la stessa lunghezza AD in 1 11, 2 12, 3 13, ecc. che si chiama in termini di arte misurare.

Se infine si aggiungono da una parte e dall'altra i due cerchi delle basi b3A, D3f, si avrà lo sviluppo della superficie totale del cilindro(Fig.

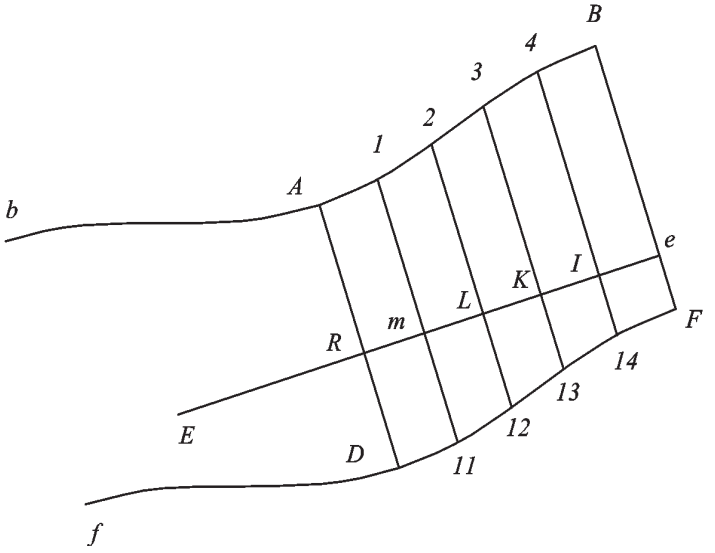


Fig. 272b Non avremo più linee rette come nel prisma, ma curve.

272c).

Lo sviluppo attraverso le corde è il più usato all'interno del trattato della sezione di Pierres, rispetto a quello del contorno, perché si comincia dagli intradossi piani, le cui corde sono le larghezze dell'arco-retto.

Supponiamo qui che il profilo, che serve a fare lo sviluppo sia costruito sul diametro della maggiore inclinazione dell'asse rispetto alla base, per non considerare le obliquità delle volte composte da più inclinazioni delle basi, della scarpata e dello strabiombo; perché noi abbiamo spiegato il modo di ridurle tutte ad una sola, poiché abbiamo dato le regole del profilo.

Quando noi parliamo dell'inclinazione dell'asse rispetto alla base, è evidente che noi parliamo anche dell'inclinazione degli spigoli del cilindro rispetto allo stesso piano della base, per un corollario dell'8.° del II Libro di Euclide, che dice che se una retta è perpendicolare ad un piano, tutte le parallele a questa retta sono anch'esse perpendicolari a quel piano, e se la retta è inclinata rispetto al piano, tutte le sue parallele saranno inclinate rispetto al piano dello stesso angolo; ma come gli spigoli sono tagliati diversamente da un piano perpendicolare all'asse, risulta che la misura delle distanze al di sotto e al di sopra di questo piano sono diverse anch'esse, ma uguali a quelle del profilo costruito sul diametro della maggiore inclinazione, come nella Fig. 270a al di sotto e al di sopra della retta ER.

Corollario

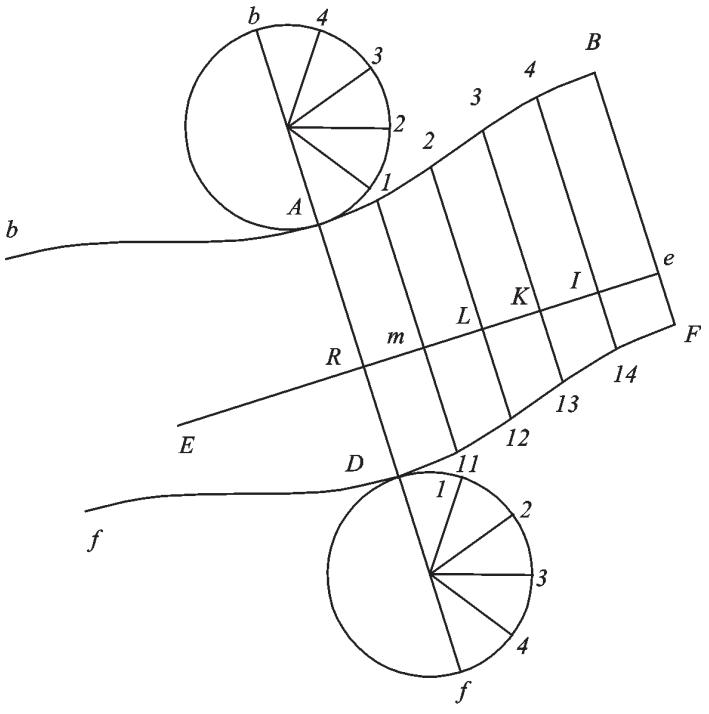


Fig. 272c Lo sviluppo del cilindro è completo.

Da cui si ha che nè al cono nè al cilindro le differenti composizioni dell'inclinazione devono cambiare niente riguardo allo sviluppo delle loro superfici, ma solamente nei termini da cui si comincia, o in quelli con cui si termina; per esempio, se lo sviluppo è stato iniziato sullo spigolo 3, 13 le curvature AbF e A4B non saranno state ugualmente estese da una parte e dall'altra; ma quello che è stato tolto dalla curvatura convessa 34B di uno spigolo, sarà aggiunto dall'altra parte; questo che abbiamo ribadito è per capire la ragione della inuguaglianza che si trova all'interno dello sviluppo degli intradossi, nel trattato delle volte dall'obliquità composta, che si vedrà nel IV Libro.

Corollario II

Il modo per fare lo sviluppo del contorno della basi del cilindro, consiste esattamente nel tracciare sulle loro superfici sviluppate i cerchi e le ellissi che si possono descrivere; non serve altro che avere il diametro di queste sezioni (situate come dovrebbero essere) all'interno del profilo della sezione del cilindro fatta attraverso l'asse, come LE o hG all'interno del parallelogramma BAFD (Fig. 270b); i cui diamentri saranno tagliati dalle parallele all'asse provenienti dalle divisioni del contorno della base 1, 2, 3, 4, come EL ai punti t, t, t, t, e le distanze tn, to, tp, tq, LR, saranno portate sulla perpendicolare alla direttrice (Fig. 272d) ai punti corrispondenti al di sotto e al di sopra di questa direttrice, e formeranno sugli spigoli dei punti attraverso i quali si traccerà a mano una curva FLI, che sarà lo sviluppo dell'ellisse, che ha per diametro EL, e la curva hgH quella che ha per diametro al profilo la retta hG.

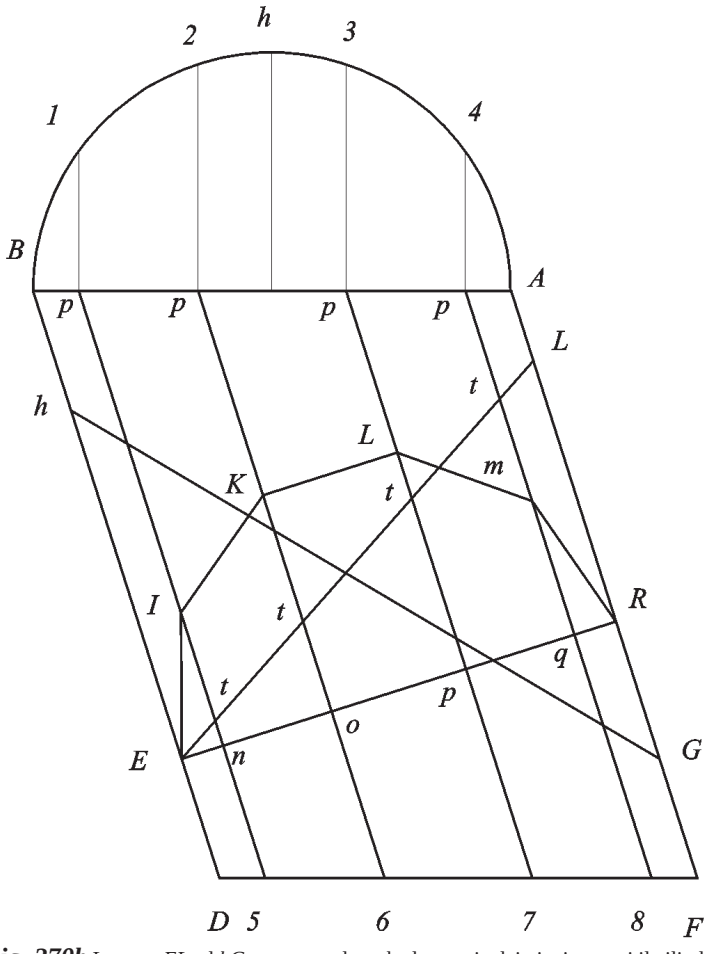


Fig. 270b Le rette *EL* ed *hG* non sono altro che le traccie dei piani secanti il cilindro, i quali formano ellissi o circonferenze.

Corollario III

Stabilita la posizione degli assi dati all'interno della sezione, che è un parallelogramma per l'asse e per il punto P, il quale è la proiezione della sommità dell'asse su una delle sue basi, che conosciuti i punti di inflessione delle curve, che sono gli sviluppi delle circonferenze dei cerchi e delle ellissi che si descrive alla superficie del cilindro attraverso le sezioni obliquie all'asse; poiché pregnante per l'esempio dell'ellisse, il cui diamentro è EL, è evidente che la distanza RL è la più grande di tutte le altre qt, pt, ecc. quindi quando la curva EL si avvicina al punto L, elle comincierà ad avvicinarsi alla linea Ee, e arrivata ad E la tocca, e comincia ad allontanarvisi; succederà la stessa cosa ai punti A e B, h e b, come era già stato detto riguardo agli sviluppi delle sezioni coniche

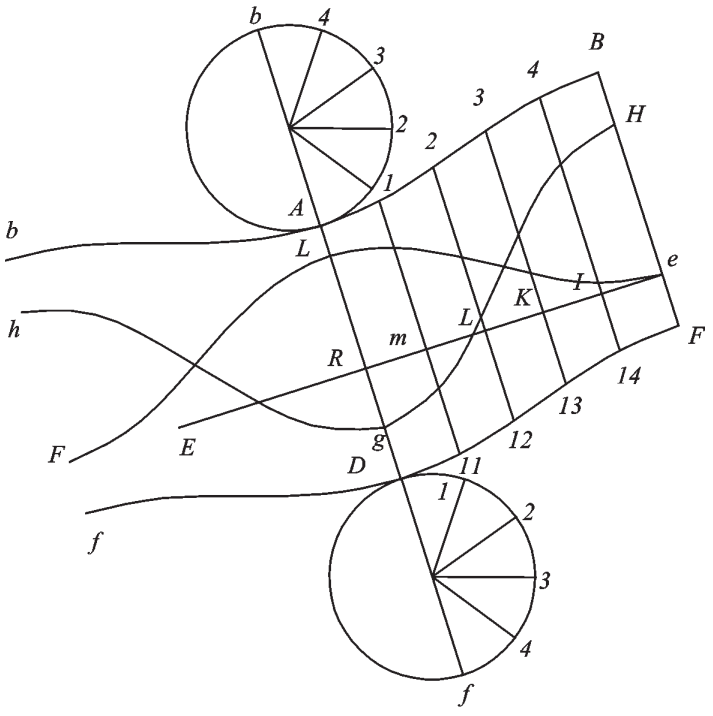


Fig. 272d Con lo stesso procedimento possiamo ottenere anche lo sviluppo dell'ellissi e delle circonferenze.

sulla superficie del cono sviluppato.

Dimostrazione

La ragione per la quale si prende una perpendicolare agli spigoli di un prisma per copiare le superfici, è per abbreviare l'operazione; poiché per fare un'immagine simile e uguale ad un'altra, non ci sono altro che due maniere, o quella della riduzione in triangoli, o di misurare le distanze dai suoi angoli ad una linea mandata per delle perpendicolari, che è propriamente e equivalente a ridurre tutti i triangoli in rettangoli; forte del fatto che l'angolo retto fa per tutto. Abbastanza semplice è mettere in pratica il primo modo per i prismi ordinari, ma non per i prismi composti da una infinità di spigoli, cioè per i cilindri; poiché la larghezza dei parallelogrammi, e di conseguenza dei triangoli che sono nel mezzo, è ridotta a niente; non resta quindi della loro dimensione che la lunghezza, e non si possono considerare queste superfici come avendo una larghezza curva, senza riconoscere che le diagonali di questo parallelogramma misto non saranno più delle linee rette, ma curve proporzionalmente alla curvatura delle loro basi, questo è evidente.

E' inutile spiegare la ragione per cui si prende la perpendicolare all'asse del cilindro per avere lo sviluppo del contorno; poiché è chiaro che tutte le altre sezioni oltre ER aumentano il diametro per la sua inclinazione, aumentando così anche il contorno, le circonferenze dei cerchi e delle ellissi sono anch'esse come i loro diametri; o di tutte le linee che si possono mandare tra due linee parallele, la perpendicolare è la più corta; dunque la circonferenza è anche la minore, la quale è la somma delle infinite perpendicolari mandate agli spigoli, infiniti in numero, del prisma cilindrico.

SULLO SVILUPPO COMPOSTO DI DUE O TRE SPECIE DI SUPERFICI DI UN CORPO TAGLIATO IN PIU' PARTI NEL SUO SPESSORE, COME LO SONO NELLE VOLTE QUELLE DELL'INTRADOSSO E DELLE BASI, E ANCHE DEGLI ESTRADOSSI

Gli architetti e gli autori della sezione di Pierres sono soliti mettere nello stesso disegno della loro epurazione lo sviluppo della superficie interna della volta, che si chiama intradosso, e le sezioni piane che sono gli intervalli del suo spessore tra due conci che si chiamano basi; per vedere a colpo d'occhio la differenza ed il rapporto.

Questo genere di rappresentazione è un assemblaggio dello sviluppo dell'intradosso fatto senza interruzioni, come conviene alle superfici cilindriche e coniche, e di quelle dell'estradosso, che è della stessa natura, ma interrotto a metà, dove è diviso in due parti separate; e infine coperto in parte da quello delle superfici delle basi di qualche filare di conci, i quali sono stesi dentro tutta la loro estensione sullo sviluppo dell'intradosso, il quale deve essere considerato in questo caso come doppio, parte nell'intradosso, e parte nelle basi, e la stessa cosa si vede, anche come tripla se si considera l'estradosso, di cui parleremo poco, perché è usato raramente.

Per rendere questa spiegazione più chiara, noi considereremo una volta a botte che ha una doppia inclinazione, una in direzione della faccia sulla quale giace il suo asse orizzontale, che si chiama base, e l'altra in direzione dell'inclinazione della faccia rispetto ad un piano verticale, che si chiama scarpata.

Sia (Fig. 274a) ABFE il piano orizzontale dell'intradosso di una volta a botte obliqua, di cui Cx è la linea di mezzo, cioè l'asse, che è obliquo rispetto alla linea AB, base della faccia che è stesa nella scarpata su questa base, secondo una inclinazione conosciuta o data, per esempio bT riguardo ad ab, con la quale forma un angolo ottuso abT.

Su AB come diametro interno, e ab esterno, si descriveranno due semicerchi aHb, AhB (Fig. 274b) che comprendono lo spessore della volta a botte, ai quali si condurrà per le sommità H e h due tangenti HT, ht parallele a ab, che taglieranno il profilo della scarpata bT nei punti T e t, e per conoscere quanto questi punti distano perpendicolarmente, si traccierà la verticale Vb perpendicolare a ab, che taglia queste tangenti nei punti V e u, le distanze VT, ut saranno quelle in cui le sommità dell'intradosso e dell'estradosso s'allontanano dall'appiombo degli spigoli della faccia.

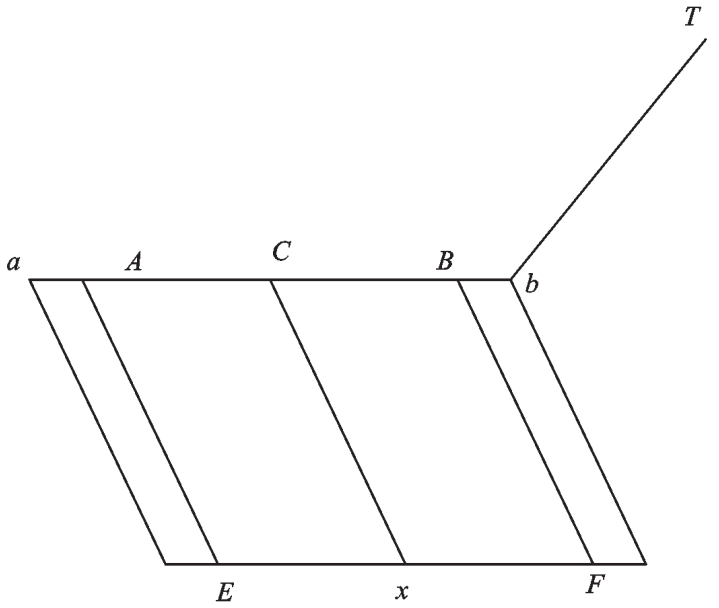
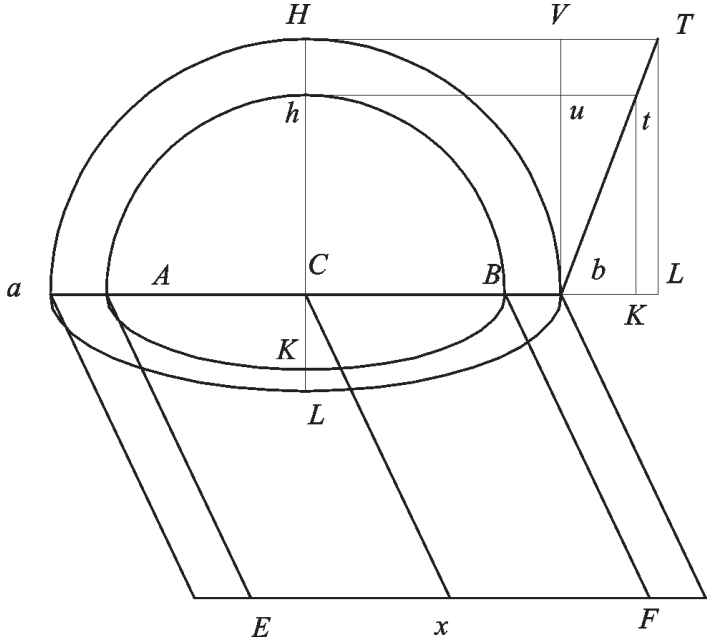


Fig. 274a Piano orizzontale di una volta a botte.

Ora per conoscere quanto le perpendicolari di questi punti s'allontanano dalla base ab, diametro della faccia, si prolungherà verso L (Fig. 274b), e



poi si condurrà per i punti T e t delle parallele a Vb, che la taglieranno nei punti L e K; le lunghezze bL e bK saranno le distanze che cerchiamo; e KL

Fig. 274b Le ellissi sono le proiezioni degli spigoli della faccia all'intradosso e

l'intervallo orizzontale degli spigoli dell'intradosso e dell'estradosso alla metà della cima che si riporterà perpendicolarmente sulla metà di AB in CK e CL per avere i semi-assi uniti ai primi ab, AB, per la metà dei quali si descriveranno (per il problema VII del Libro II) le semi-ellissi AKB, aLb che saranno le proiezioni degli spigoli della faccia all'intradosso e all'estradosso.

Fatta questa proiezione, si dividerà l'arco AhB in un certo numero di parti che si vuole, come per esempio qui in cinque (Fig. 274c), ai punti 1, 2, 3, 4, per i quali si tireranno dal centro C le congiungenti dalla testa 1.1^{e}, 2.2^{e}, 3.3^{e}, 4.4^{e}, e dagli stessi punti le perpendicolari alla base ab che si prolungheranno fino alle semi-ellissi della proiezione AKB, aLb le quali taglieranno nei punti 11,12, ecc. 21, 22, ecc. per i quali si condurranno dal centro C le proiezioni delle congiunzioni della testa 11 12, 21 22, per i quali si condurranno le parallele all'asse Cx, 11q, 21s[7], 12q, 22s, i trapezi 12qs22 e 11qs21 saranno le proiezioni delle basi di cui si cercava la vera estensione per applicarla sullo sviluppo dell'intradosso.

Si tratta di fare questo sviluppo nella stessa maniera che abbiamo detto

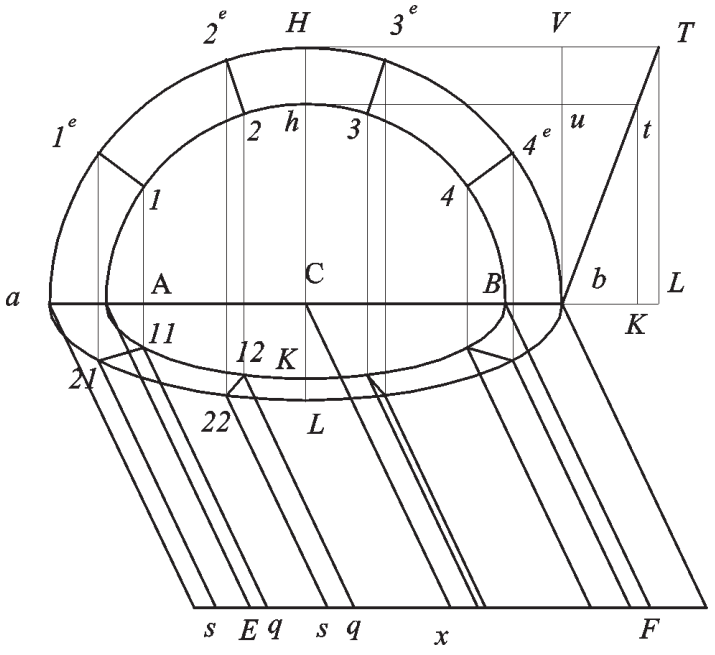


Fig. 274c Proietto dei punti dai semi-cerchi di intradosso ed estradosso sulle semi-ellissi.

[7] Nel testo originario era: 21q.

per la Fig. 270 incominciando a formare l'arco retto DR (Fig. 274d), e stendendo il suo contorno D1^r, 2^r, 3^r, 4^{r}R su una direttrice dd della Fig. 280a e portando sulle divisioni d^{d}D^d, 1, 2, 3, 4Rd le lunghezze delle proiezioni i11, i21; i12, i22 di un lato, e le rette iq, is, ecc. dell'altro, che formerà i quattro angoli dei trapezi che sono le superfici di qualche base, come a^{d}A^{d}d^{d}E, e1^{d}QS, e2^{d}FS, 3^{d}eNG, ecc. i primi due a^{d}E e B^{d}K sono uguali in tutto a quelle delle imposte della Fig. 274d segnate dalle lettere aE, BN.

Se si congiungono le estremità esterne di questi trapezi per una linea curva, si avrà lo sviluppo del contorno dello spigolo dell'intradosso e della faccia (Fig. 280b) che è la linea A ^{d}1^{d}2^{d}4^{d}B ^{d}, e la linea EQFGHI per lo sviluppo del contorno dell'intradosso della faccia posteriore che si suppone non sia parallela alla prima AKB che è in scarpata, ma perpendicolare alla linea dN; poichè questi contorni curvi dello sviluppo sono ineguali, provengono da quelli delle due ellissi ineguali.

Per evitare la confusione di questo sviluppo, di solito si distinguono le superfici con un tratteggio sottile lasciando lo sviluppo dell'intradosso in bianco. La stessa figura darà lo sviluppo dell'estradosso (Fig. 280c) se si congiugono per una linea curva gli angoli esterni delle superfici come a^{d}ee, b^{d}oo, ma non interamente tra i due tratti, poiché del resto a metà l'intervallo eo, è molto più grande di quello della chiave, perché le superfici hanno le loro origini esternamente, parte da un lato della chiave,

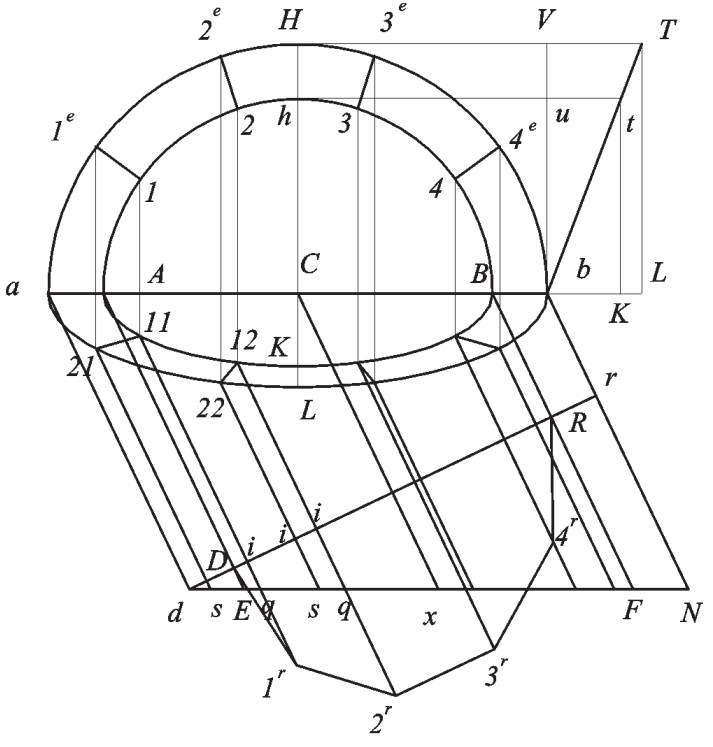


Fig. 274d Il procedimento è uguale a quello utilizzato per lo sviluppo del prisma e del cilindro.

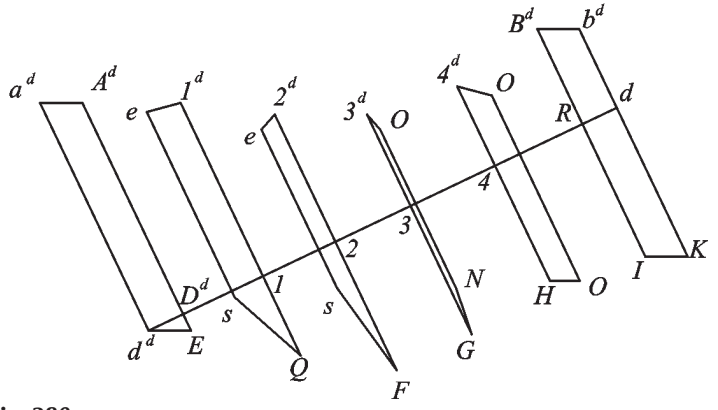


Fig. 280a Il procedimento è lo stesso usato per la costruzione dello sviluppo del cilindro di ***Fig. 272***.

parte dall'altro. Per fare un contorno continuo, è logico disporre tutto di seguito su uno stesso lato, come si fa nella Fig. 280c trasportando il punto a^d in PE, e in e^1, ecc. allora si otterrà una curva d'estradosso che incrocierà quella dell'intradosso PEe^{1}e^{2}oob^d; questo non è un punto usato all'interno del trattato, né di alcuna utilità.

Noi ci fermeremo davanti alla spiegazione di questo spazio di disegno, perché si troveranno più esempi all'interno della costruzione del trattato nel libro IV, per ora è sufficiente avervi dato una buona nozione per stabilire i principi dell'epurazione.

OSSERVAZIONI SULLO SVILUPPO COMPOSTO

Gli autori del trattato dello spaccato di Pierres sono abituati ad accompagnare quasi tutti i trattati sugli sviluppi degli intradossi collegati

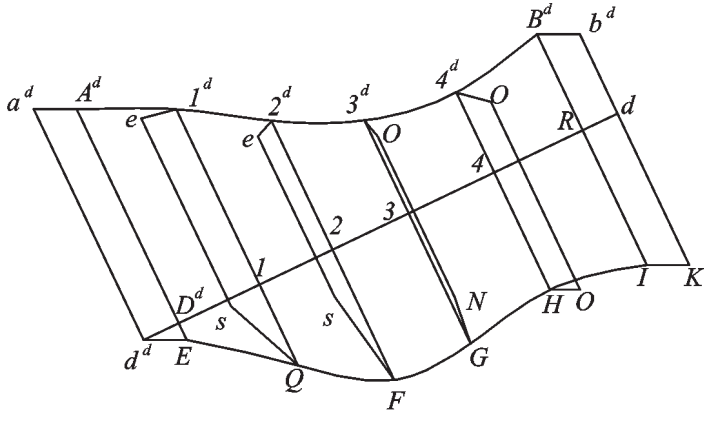


Fig. 280b Le linee curve sono lo sviluppo dello spigolo d'intradosso della faccia anteriore e posteriore.

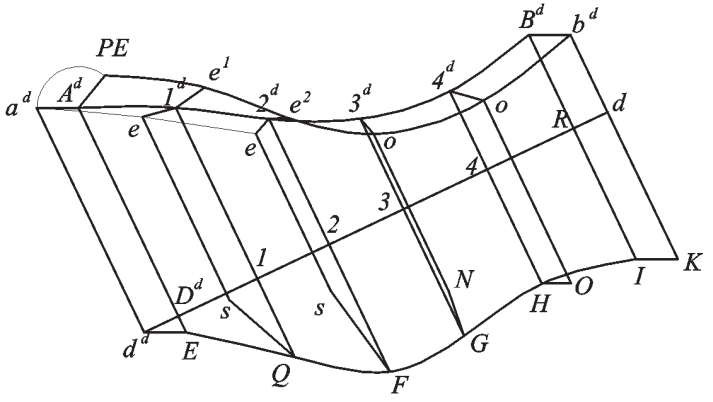


Fig. 280c per ottenere un contorno continuo si ribalta un tratto di curva per avere uno

a quelli delle superfici con l'ordine che noi stiamo per esporvi. Questo genere di disegno non è inutile all'interno dei trattati in piccolo sul foglio per vedere a colpo d'occhio la figura e la grandezza dei pannelli delle basi e dell'intradosso; ma sarà troppo scomodo e poco utile tracciare in grande tutta l'estensione dell'epurazione, in particolare quando le volte sono un po' grandi, si può dire che questa pratica non è necessaria per l'esecuzione. E' sufficiente saper fare i pannelli di ciascuna delle basi in particolare senza sovrapporle, ciò arrecherebbe infallibilmente della confusione, quando ci sono molte superfici più grandi degli intradossi, perché si incrociano le une sulle altre; è per questo che noi non abbiamo imitato questi autori nel nostro IV libro, per non moltiplicare le linee inutili, e dare troppa estensione alle figure delle tavole, dove ce ne sono già troppe che imbarazzano e affaticano l'attenzione del lettore.

Si troverà per altro una differenza considerevole dentro il contorno di questo sviluppo della Fig. 280c rispetto a quello della Fig. 272 ma se facciamo attenzione, questo è solo apparente, perché a causa della doppia obliquità della volta a botte della Fig. 274 il punto di stazione non si trova a metà dello sviluppo, come nella Fig. 272 proveniente dal cilindro obliquo Fig. 270 dove si è considerata una sola abliquità di sbieco; per convincersi, è stata ridotta la doppia obliquità della volta a botte di Fig. 274 in una sola, quello che si può fare come di seguito.

Si condurrà per il punto x estremità dell'asse, una perpendicolare xY su AB (Fig. 274e), sulla quale si riporterà la distanza della scarpata VT da Y in z, se si tira dal centro C la linea Cz, ella darà la direzione della maggiore inclinazione, che ridurrà quella del lato CY, e quelle della scarpata YZ in una sola CZ, questo è chiaro.

Per concepire la ragione, devo dire; 1°. Che l'asse del cilindro scaleno, lo stesso di quello del cono scaleno, di cui noi abbiamo parlato, non è inclinato allo stesso modo in tutti i diametri del cerchio della base; 2°. Che la sezione per l'asse fatta con un piano perpendicolare a quella della base, forma il parallelogramma più obliquo; 3°. Che un'altra sezione perpendicolare a questa forma un parallelogramma rettangolo, e di conseguenza anche le altre sezioni sono dei parallelegrammi più o meno obliqui, a seconda che si avvicinano o si allontanano da questi primi due; inoltre il parallelogramma ABFE non sta all'interno di un piano

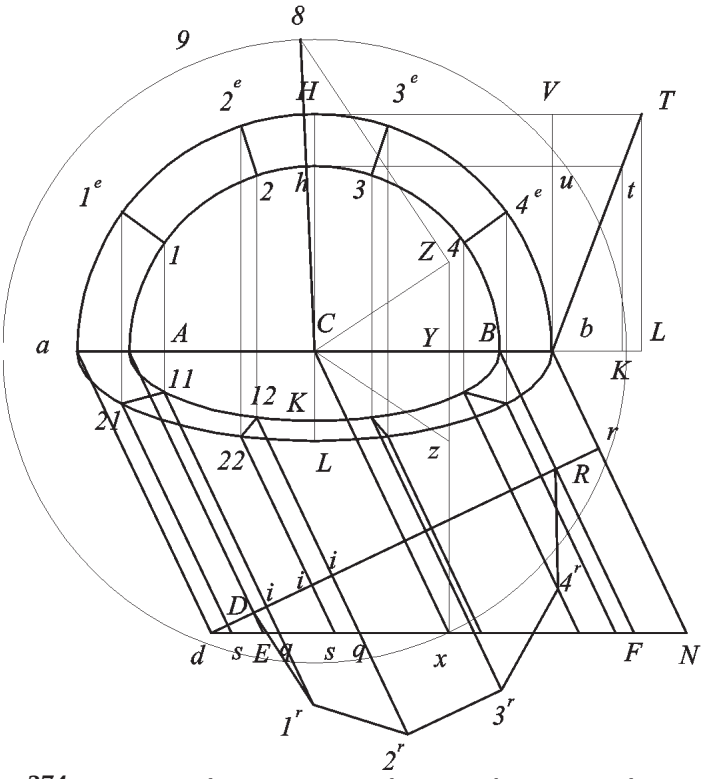


Fig. 274e In questo modo possiamo trovare la sezione che rappresenta la massima inclinazione.

perpendicolare al piano della base adb, ne è il più inclinato di tutte le sezioni passanti per l'asse, questo è quello che passa per Cz, dove c'è il maggior sbieco; questo si può dimostrare come di seguito. Per evitare la confusione di linee all'interno della figura, si trasporterà la lunghezza Yz in YZ, come se, a scarpata o piuttosto a pendenza uguale, la volta a botte è inclinata sul piobo, e tirato CZ (Fig. 274e), da lui si condurrà la perpendicolare Z8; quindi presa la lunghezza Cx dell'asse per raggio dell'arco 98, che taglierà Z8 nel punto 8, si traccierà 8C, che rappresenta la posizione dell'asse riguardo ad un piano che taglia il cilindro per l'asse, e il diametro 7Z, il quale rappresenta, secondo le nostre supposizioni all'interno del cambiamento della figura, quello che passa per Cz. E' stato dimostrato che l'angolo 8CZ che forma l'asse con questo diametro, è più acuto di quello che lo stesso asse considerato in Cx forma con un altro diamentro AB.

I due triangoli CYx[8] e CZ8 sono tutti rettangoli, uno in Y, l'altro in Z: essi hanno tutti e due una ipotenusa uguale (per la costruzione C8=Cx[9]) e il lato Cx[10] più grande di CY; quindi l'altro lato Z8 sarà più piccolo di xY, di conseguenza l'angolo opposto 8CZ, sarà più piccolo di xCY;

questo è quello che abbiamo dimostrato.

Da cui il fatto che il punto di stazione della curva dello sviluppo che rappersenta il cerchio della base AhB, o aHb è il punto Z, come noi abbiamo detto della Fig. 272 le parti di questa curva non sono uguali da una parte e dall'altra della metà, che rappresenta la chiave, come quando c'è una sola inclinazione di un lato senza scarpata, ma queste possono esserlo se le si considera a uguale distanza dal punto di stazione corrispondente al punto z, dove c'è la maggiore inclinazione del cilindro rispetto a questa base.

SULLO SVILUPPO DEI POLIEDRI E DELLA SFERA

Fra i cinque corpi regolari il dodecaedro che è composto da dodici superfici uguali che sono dei pentagoni, è il primo che comincia ad avvicinarsi alla sfera, poi l'icosaedro che è composto da venti triangoli equilateri, è già abbastanza rotondo per essere adatto a rotolare come una palla; ma se facessi aumentare il numero di queste superfici, e conservare l'uguaglianza tra loro; forti del fatto che non è affatto il più grande poliedro regolare che si può comparare alla sfera; ma non è difficile nel fare irregolare che si avvicina infinitamente, poichè se si divide con il pensiero un semi cerchio in un poligolo di un infinità di lati, la rivoluzione che farà sul suo diametro formerà un solido, che sarà composto da un'infinità di coni tronchi formati dalla rivoluzione delle corde di questo semi cerchio, che sono inclinate rispetto al suo diametro, come i lati del cono sono inclinati rispetto al loro asse. E se si dividono le basi di ciascuno di questi coni tronchi in poligoni , si avranno delle piramidi tronche inscritte all'interno di questi coni tronchi; certi che i loro lati saranno sicuramente dei trapezi che vanno a restringersi verso i poli, come si vede nella Fig. 276a e si riducono infine in triangoli ai due poli della sfera, dove le piramidi sono intere, come 2P3.

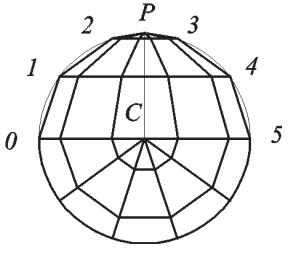


Fig. 276a Consideriamo la sfera come un solido composto da un'infinità di trapezi.

[8] Nel testo originario era: CYz.
[9-10] Nel testo originario era: Cz.

La sistemazione di seguito dei trapezi che formano una superficie del poliedro paragonabile a quella della sfera circoscritta, si può fare in due maniere, o secondo le meridiane, cioè secondo i piani secanti la sfera per i suoi poli, come la Fig. 277 e allora i trapezi di queste superfici diventano tutti ineguali da una parte e dall'altra dell'equatore fino al polo P, dove finisce con un triangolo 2p2, e poiché questa figura si avvicina a quella di un fuso affusolato, questo sviluppo della sfera si chiama in fusi.

L'altra sistemazione dei trapezi, della quale noi facciamo un più grande uso, è secondo le parallele all'equatore in forma di zone, e allora tutti i trapezi uguali allineati di seguito, come nella ***Fig. 278a***, dove si suppone che la circonferenza del parallelo sia divisa in dieci parti; forte che la zona del cerchio *AB* è piegata e il trapezio *A* è collegato al trapezio *B* per il lato *Oi*, *Oi*, si forma una piramide poco differente dal cono tronco, la cui sommità è in *S* (***Fig. 276b***) perché il punto *S* è il riscontro dell'asse *xS* del cono, e delle corde *01*, *54* prolungate, le quali sono i lati del poligono inscritto nel quarto di cerchio *C0P*, *C5P*, la cui rivoluzione ha formato l'emisfero *0P5*; forte che se si prende la lunghezza *S0* per raggio, e che da un centro *x* preso a caso, si fanno due archi di cerchio concentrici *O5O*, *i4i* distanziati dall'intervallo della corda *01* della ***Fig. 276b*** e che l'arco *o5o* sia fatto uguale alla circonferenza del cerchio, che ha per diametro *0C5*, e l'arco *i4i* uguale alla circonferenza del cerchio che ha per diametro *14*, si avrà lo sviluppo della piramide tronca *0145* in dieci trapezi uguali, disposti su una stessa zona della sfera, o piuttosto su una porzione della corona del cerchio, come si vede nella ***Fig. 278a***, la stessa cosa si farà per il cono tronco *1234* inscritto nella sfera dalla rivoluzione della corda *12* intorno all'asse S^2C (***Fig. 276b***) e si avrà la porzione di corona del cerchio 1^a41^b2, *3*, *2* (***Fig. 278a***), la quale piegata intorno,

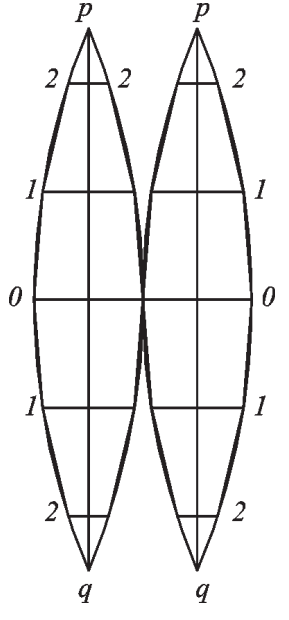


Fig. 277 La sfera può essere sviluppata secondo le meridiane, cioè lo sviluppo in fusi.

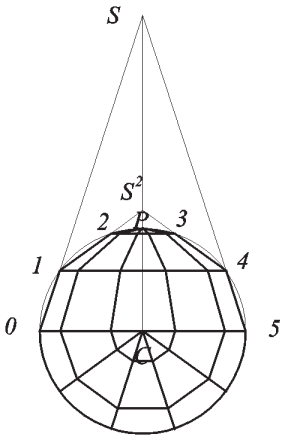


Fig. 276b Il prolungamento dei lati del trapezio ci permette di ricavare il raggio del arco di cerchio su cui stendere le corone circolari per lo sviluppo della sfera.

facendo congiungere i trapezi *a* e *b* formerà la zona del cono tronco *1, 4, 3, 2* inscritta nella sfera. Infine, perché la corda *2P* vada a finire al polo *P*, ella descriverà un cono, la cui sommità sarà in *P*, e il cui sviluppo sarà il settore $2^a 3 2^b$ (***Fig. 278b***), la cui circonferenza si avvicinerà molto a quella del cerchio intero, perché deve essere uguale a quella del cerchio che ha per diametro *23* della ***Fig. 276b*** dalla quale si vede che ciascuna delle corone del cerchio devono contenere lo stesso numero di trapezi, sebbene le loro circonferenze diminuiscono nella misura che si avvicinano al polo, perché diminuisce anche la larghezza.

OSSERVAZIONI SULL'UTILIZZO DI QUESTO SVILUPPO

Si fa uso di tutte queste sistemazioni degli sviluppi dei poliedri inscritti nella sfera, cioè si riducono semplicemente in coni tronchi, poi si suddividono questi coni e si inscrive in ciascuno una piramide tronca, allora si allineano le loro superfici che sono dei trapezi sulle parallele all'equatore della sfera, come nella ***Fig. 278*** in forma di corona del cerchio, o sulle meridiane, come nella ***Fig. 277*** che forma una figura in fusi.

Si può dire che questo principio è quello dello spaccato di tutte le volte sferiche fatte per pannelli.

Ma poichè le corde delle prime divisioni in conci alla nascita delle volte, come *01* danno delle linee poco inclinate rispetto all'asse della sfera, si ha che la sommità del cono ricavata con i loro prolungamenti fino a che incontrano l'asse, è situata molto lontano dalla base; si conclude che il raggio che va a fare lo sviluppo del cono tronco diventa estremamente lungo e scomodo per tracciare un'arco di cerchio; si può evitare questo inconveniente con il problema seguente.

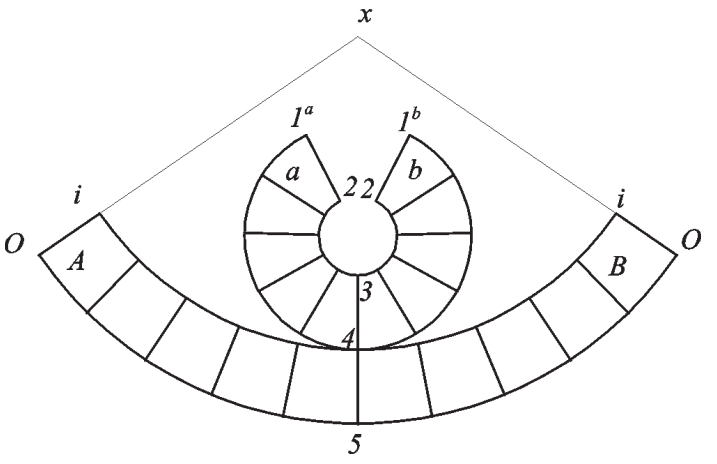


Fig. 278a Sviluppo della prima e seconda corona.

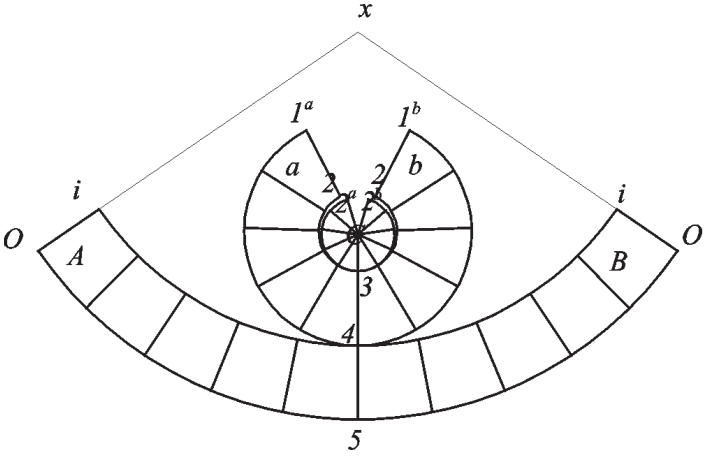


Fig. 278b Sviluppo completo dell'emisfero superiore della sfera.

Problema VIII

Il diametro AB della base di un cono retto tronco (***Fig. 275***), *e l'inclinazione del lato EB su questo diametro sono dati, trovare i punti che si vorrà alla circonferenza della corona del cerchio che esprime lo sviluppo, senza avere il centro, o che è la stessa cosa, senza avere la sommità del cono.*

Sia (***Fig. 275a***) *AB* il diametro della base inferiore del cono tronco, e *DE* quello della base superiore, che è stato dato con l'inclinazione del lato *BE* verso l'asse *SC*, il quale è perpendicolare sulla metà del diametro dato *AB*; e *EB*, *DA* i lati che sono parte di quelli del triangolo con l'asse *ASB*, se si finisce il cono prolungando questi lati, *CX* sarà una parte dell'asse *CS*.

Avendo preso a caso il punto *F* sul lato *EB* (***Fig. 275b***), si condurrà *FG* parallelo a *XC*, o perpendicolare a *CB*, e si dividerà l'angolo *EFG* in due parti uguali con la linea *FL*, alla quale, per il punto *B*, si condurrà la parallela *BY*, che incontrerà *XC* prolungato in *Y*. Dico che il punto *Y* sarà la circonferenza della base della corona del cerchio che darà lo sviluppo del cono tronco.

Lo stesso avendo preso a caso su *CB* il punto *H*, e condotta per il problema I del III libro la linea *HN* (***Fig. 275c***), la quale è stata prolungata concorrente allo stesso punto *S* come la linea *B*; su questa linea *HN* avendo preso un punto a caso *K*, e lo stesso, come qui davanti, *KI* parallelo a *SY*, si dividerà allo stesso modo l'angolo *NKI* in due parti uguali dalla linea *MK*, alla quale per il punto *Y* si condurrà la parallela *Yy*; il punto *y* sarà alla stessa circonferenza come il punto *Y*. Si troverà a ripetere una operazione simile, soltanto del punto che si vuole, in cui si potranno mettere i corrispondenti entro *YA*, senza l'aiuto del centro o della sommità *S*.

Quello che è stato detto per la base *AB* del cono tronco potrà essere applicato alla base superiore *DE* dello stesso cono.

Dimostrazione

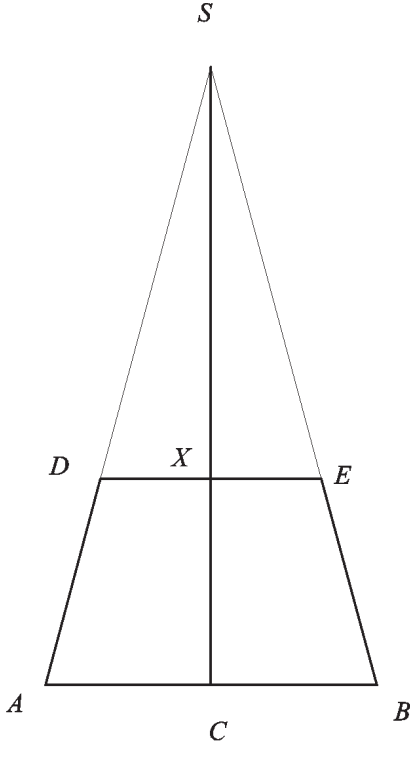
Sono prolungati i lati *BE*, *AD* fino a che si incontrano nel punto *S*, dove ci sarà la sommità del cono.

A causa delle parallele *FG*, *SY* gli angoli *GFB*, *YSB* sono uguali tra loro; e a causa delle altre parallele *LF*, *YB*, gli angoli alterni *LFG*, *FGB* e *XYB* sono anche uguali, lo stesso anche per *LFE* e *YBE*; quindi i triangoli *SYB*, *SYA* sono isosceli, quindi *SY* può essere il raggio dello stesso cerchio, che è quello che avrà per raggio i lati *SB* e *SA*, quindi il punto *Y* appartiene alla circonferenza del cerchio, questo è quello che bisogna dimostrare.

Si dimostrerà nelle stessa maniera che il triangolo *SYy* è isoscele, con conseguenza che il punto *y*, è alla circonferenza dello stesso cerchio, che passerà per *B* e per *y*, e che avrà per raggio la linea *SB* o *SY*; quindi si potrà trovare tanto il punto che si vorrà a questa circonferenza senza l'aiuto del centro, questo è quello che bisogna fare.

UTILIZZO

Questo problema porta a rendere praticabile qualche tratto dello spaccato di Pierres, che il P. Deran e M. de la Rue hanno dato senza rimediare agli inconvenienti della pratica; per esempio per fare lo sviluppo della base di una porta in giro tondo, ed in scarpata, perché questo giro è un cono tronco, la cui sommità è molto lontana; poiché supponiamo che non è che trenta piedi di diametro, e un sesto della scarpata, che è uno dei più



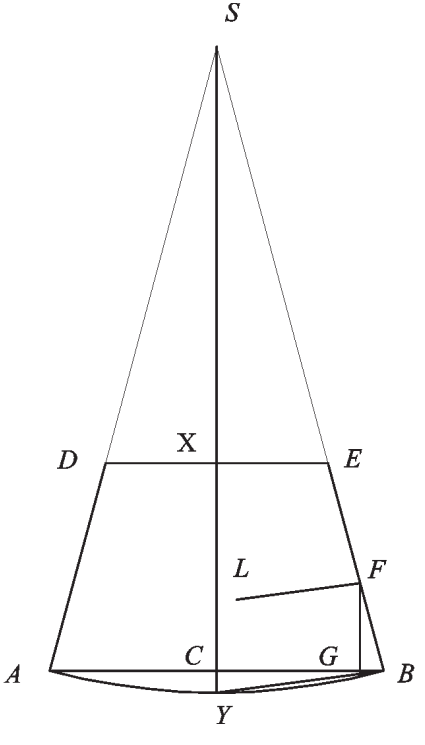


Fig. 275a Questo metodo ci permette di sviluppare la sfera senza avere bisogno del la sommità del cono che spesso si trova lontano dalla figura.

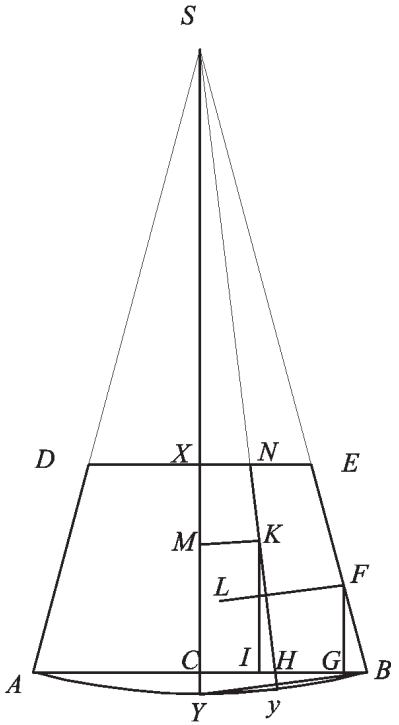


Fig. 275c Ci evita di dover usare fogli di grandi dimensioni.

grandi che si è dato, se questo è a trenta piedi di altezza, questa non sarà rimandata alla sua sommità che di trenta piedi; cioè cinque per ogni lato; così i lati del trapezio con l'asse non si incontrano che all'altezza di 90 piedi, la quale non sarà ancora uguale alla lunghezza del raggio, che è il lato del triangolo con l'asse del cono intero, poiché questa altezza è verticale, e il lato è inclinato all'orizzonte. Ora una lunghezza di 93 piedi circa, necessita di un grande posto comodo per tracciare un arco con una corda o catena, a cui non possiamo dare un contorno esatto, a causa della loro estensione che varia, cioè si allunga, quando si tira più o meno, cioè a causa del fronte su una estensione di superficie così grande, sulla quale c'è sempre qualche inuguaglianza; questa lunghezza è d'altronde troppo considerevole per fare con un asta un compasso a verga, è più facile collegare più estremità, e farla sostenere da più uomini, che si muovono del movimento del raggio, ciascuno più o meno veloce, come conviene alla loro distanza dal centro.

L'altro caso dove questo problema sarà ancora molto necessario, è per la formazione dei pannelli dello sviluppo dell'intradosso, i primi ricadono nei conci delle volte sferiche, in cui le divisioni dal centro delle altezze sono in piccolo numero rispetto ai gradini del suo contorno; cioè dove c'è un gran numero di sedute o filari di conci; ma allora alla metà corrisponde il più corto dei tagli, supponendo l'intradosso piatto, come noi diremo nel IV libro.

Prima di aver trovato tre punti della circonferenza della base del cono tronco, secondo questo problema si può prendere l'angolo formato dalle linee condotte dall'uno all'altro, e per il il problema I del II libro se ne serve per tracciare, con un movimento continuo, il segmento del cerchio, dentro il quale essi sono.

SULLO SVILUPPO DELLE ELLISSI

Noi abbiamo spiegato nel II Libro quello che noi intendiamo per il moto dell'ellisse. Conviene aggiungere qui che si possono distinguere differenti specie, relativamente ai corpi sui quali si può descrivere.

Secondo questo sistema, noi chiameremo ellisse cilindrica retta, quella che si potrà descrivere sulla superficie di un cilindro retto; cilindrica scalena, quella che sarà descritta su un cilindro dalla base ellittica, o inclinata rispetto alla base. Ellisse conica o sferica quella, che sarà descritta su una superficie di una sfera o di un cono; noi comprendiamo queste due ultime sotto con il nome di limace, perché si avvicinano a poco a poco al loro asse.

Noi divideremo ancora le ellissi cilindriche in regolari ed irregolari.

Con il motto di regolare, noi intendiamo la curva che si alza al di sopra della base con un movimento obliquo sempre uguale, senza avvicinarsi nè allontanarsi dall'asse, attorno al quale ella fa delle rivoluzioni uguali, come una vite del torchio.

Con il motto di irregolare, noi intendiamo quella che fa delle rivoluzioni ineguali intorno al suo asse.

Questa inuguaglinza di rivoluzione può ancora essere considerata in due maniere; 1°. In quella che la curva si allontana e si avvicina dal suo asse, come quando appartiene alla superficie di un cilindro dalla base ellittica, o di qualche altra curva che ritorna in se stessa, 2°. In quella che l'intervallo dell'altezza di queste rivoluzioni aumenta o diminuisce.

Lemma

Lo sviluppo di un'ellisse cilindrica regolare sulla superficie di un cilindro retto sviluppato, è una linea retta, quello di una ellisse cilindrica irregolare della seconda specie, e dei limaci, è una linea curva.

La prima parte di questo teorema è chiaro con la definizione; poichè noi supponiamo il movimento dell'ellisse attorno al suo asse di una inclinazione sempre uguale rispetto alla superficie di un cilindro, ella non è più inclinata in un punto al piano della base, nè in un altro.

Per rendere questa verità più sensibile, si deve considerare il cilindro come un prisma di un'infinità di lati, il cui sviluppo forma un parallelogramma rettangolo, se il cilindro è retto, e il cui parallelogramma è composto da tutti i piccoli rettangoli infinitesemente stretti, che inviluppano il prisma, perché le parti prese insieme sono uguali tra loro.

Cioè, per esempio, (***Fig. 281a***) una semi-rivoluzione dell'ellisse *Ah* sul cilindro *AE*, in cui la metà della base è il semi-cerchio *A12B*, avendo rettificato il suo contorno in una linea retta *AK* sul diametro *BA*

prolungato; se si divide questa linea in parti uguali, per esempio, qui in tre, e l'altezza della semi-rivoluzione *Bh*, o *AI*, si divide anche in tre parti uguali, e per ciascuna di queste divisioni si conducono delle parallele ai lati *AK* e *AI*; si formeranno nove rettangoli uguali tra loro, e simili al grande *AH*, che esprime lo sviluppo della metà del cilindro, la cui diagonale è comune a quelle dei piccoli *Ay*, *yx* e *xH*, i quali esprimono ciascuna l'obliquità dell'ellisse che non cambia punto, secondo la definizione. Ora la diagonale *AH* è una linea retta, di conseguenza la somma o l'addizione di tutte le parti dell'ellisse infinitesemente piccole allineate sulla superficie del cilindro sviluppato, forma una linea retta; questo è quello che bisogna dimostrare.

La dimostrazione della seconda parte di questo teorema è naturalmente il seguito della prima; poiché se le rivoluzioni sono date da un movimento ineguale in direzione dell'inclinazione che aumenta o diminuisce gli intervalli di ciascuna rivoluzione, i contorni e le altezze non sono più proporzionali, i piccoli parallelogrammi non sono più simili al grande *A6*, ***Fig. 282*** che si può considerare come uno sviluppo del cilindro, e di conseguenza che questa diagonale non sarà più comune a quelle dei piccoli, infinitamente piccoli, i quali formano si suppone degli angoli ineguali con la base *AB*, dove queste parallele *1x*, *2y*, *3z* formeranno anche degli angoli tra loro, e di conseguenza saranno disposti su una linea curva; questo è quello che per secondo bisogna dimostrare.

Corollario I

Da cui il fatto che intorno allo stesso cilindro, si possono formare un'infinità di ellissi differenti, i cui sviluppi saranno sempre delle linee curve, sia che il cilindro sia retto che scaleno; poiché le rivoluzioni possono diminuire o aumentare in altezza, secondo quella progressione

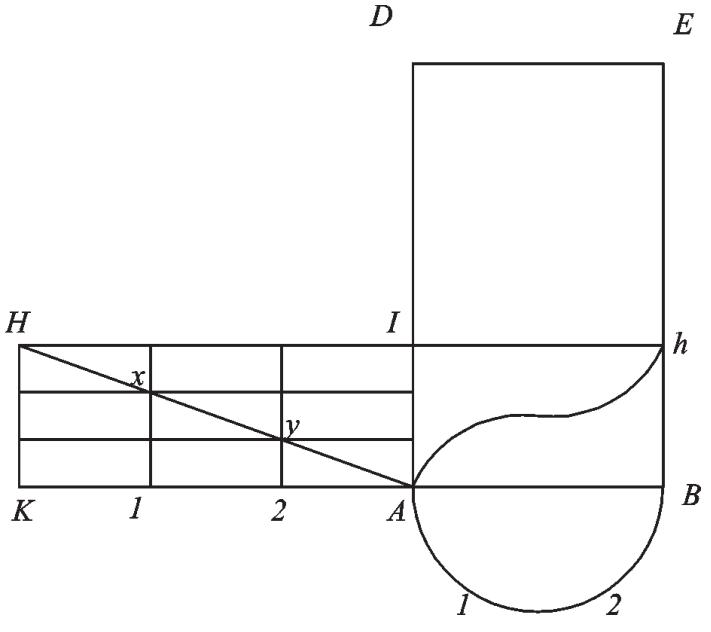


Fig. 281a Il cilindro viene suddiviso in più parti.

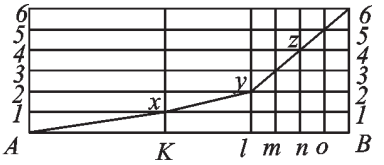


Fig. 282 Se le rivoluzioni sono date da un movimento ineguale, allora anche i contorni e le altezze non sono più proporzionali.

che si giudicherà a proposito, o lasciando le altezze uguali si può aumentare o diminuire la velocità del movimento parallelo alla base; questo è quello rappresentato dalla ***Fig. 282*** attraverso la differenza delle lunghezze dei parallelogrammi *AK*, *Kl*, *lm*, *mn*, ecc.

Corollario II

In secondo luogo, lo sviluppo di un'ellisse cilindrica scalena, sebbene regolare sarà ancora una linea curva, perché lo sviluppo della base di un cilindro scaleno non è una linea retta, come quella del contorno della base del cilindro retto, ma una curva come si vede nella ***Fig. 272*** tale che le divisioni che daranno dei parallelogrammi sullo sviluppo della superficie, sul tirante delle parallele alla base e all'altezza, non daranno delle figure rettilinee, ma dei quadrilateri misti, le cui parallele alla base saranno curve, e le loro diagonali lo stesso, ma un po' meno in quelle partecipanti alla curvatura parallela alla base, e la linea retta del lato parallelo all'asse; questo perché noi domandiamo per lo sviluppo in linea retta, che il cilindro sia retto sulla base. Bisogna aggiungere all'interno dell'esposizione del teorema, che sia che la base sia circolare o ellittica, perché di qualche curva si tratta, è sempre evidente che se l'asse del cilindro è perpendicolare all'asse della base, lo sviluppo della superficie cilindrica sarà sempre un parallelogramma rettangolo, che potrà essere diviso in un infinità di altri simili, come *AH* della ***Fig. 281a*** di conseguenza, la cui diagonale sarà lo sviluppo di un'ellisse.

Corollario III

Da quello che abbiamo detto al corollario precedente, si condurrà naturalmente la dimostrazione della terza parte del teorema, che dice che lo sviluppo dell'ellissi in limaccia sono sempre delle linee curve, sia che elle siano coniche, conoidi, sferiche o sferoidi; poiché tutte queste figure non possono essere sviluppate che nelle prime parti del cono tronco inscritto dentro le loro superfici, e gli sviluppi delle curve qualsiasi traccia sulla superficie del cono sviluppato è necessariamente una linea curve, come noi abbiamo dimostrato nelle ***Fig. 266-267***, è evidente che tutte le specie di limaccie che si potranno descrivere, che sono sviluppate sulla superficie del cono, saranno delle linee curve, perché si divide il contorno del cono sviluppato in parti uguali, e l'altezza lo stesso, si avranno così dei parallelogrammi misti, come abbiamo detto a proposito del cono scaleno, dei trapezi misti, in cui le piccole parti dell'ellisse saranno le diagonali, partecipanti della curvatura del cerchio della base sviluppato sul cono, e della retta che è il lato del cono.

Problema IX

Fare lo sviluppo di un'ellisse qualunque su una superficie cilindrica o conica sviluppata.

In primo luogo, se l'ellisse è cilindrica regolare, questo sviluppo è molto facile, poiché consiste nel trovare le estremità di una linea retta.

Presa (***Fig. 281b***) un'ellisse *AhGE* che fa una rivoluzione e mezzo intorno al cindro retto *DB*, si rettificherà il contorno del cerchio della base, che si riporterà una volta e mezzo sul diametro *AB* prolungato in A^2, o che è la stessa cosa, si prenderà tre volte il contorno del semi cerchio *A12B* da *B* in A^2, e per la sommità del cilindro *E*, si tirerà al punto A^2 la linea retta EA^2, che sarà lo sviluppo chiesto.

È evidente che se noi avessimo chiesto quello di una semi rivoluzione, si avremmo tirato *ha* dal punto *h*, terzo dell'altezza *BE* al punto *a*, che è a distanza da *B*, della lunghezza dell'arco *A12B* sviluppato.

Se si vuole domandare una rivoluzione intera, la linea *Fb* soddisferà la richiesta (***Fig. 281c***); dove si può inserire, 1°. come si deve fare lo sviluppo di quella parte che si vorrà; 2°. che se si inviluppa il cilindro di
un triangolo isoscele come *AHG*, si traccieranno due ellissi che si incrocieranno in *h*.

In secondo luogo, se l'ellisse è cilindrica irregolare o conica; rettificato il contorno della base, al quale esso corrisponde, si dividerà l'altezza di ciascuna rivoluzione in parti proporzionali alla differenza che c'è dall'una all'altra, in incricio e in diminuizione, e si dividerà lo sviluppo del contorno della base nello stesso numero di parti uguali, in cui si divide l'altezza della rivoluzione, che noi abbiamo supposto ineguali, poi si condurrà per ogni divisione delle parallele alla base, che saranno rette, al cilindro retto, e curve al cilindro scaleno, le quali saranno incrociate da delle linee rette, parallele all'asse all'interno del cilindro, e tenderanno alla sommità del cono, la linea curva condotta da una intersezione alla seguente in diagonale sarà lo sviluppo dell'ellisse richiesta.

La stessa cosa si farà per avere lo sviluppo dell'ellisse in limaccia su un cono. Ma se la limaccia come un lexodromo su una sfera, è stata proposta per essere sviluppata, non potrò farlo senza interruzioni; perché la sfera non può essere sviluppata che in due modi, di cui noi abbiamo parlato, o

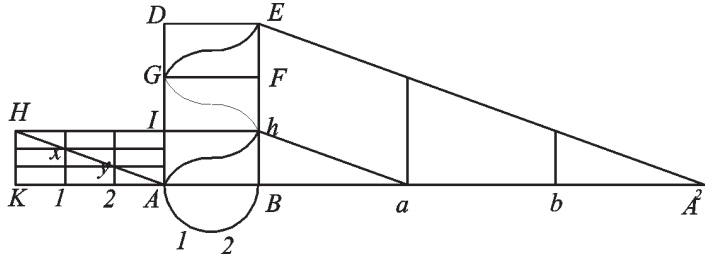


Fig. 281b Sviluppo di un ellisse su una superficie cilindrica.

come nella ***Fig. 277*** in fuso, o come nella ***Fig. 278*** in porzioni di corona

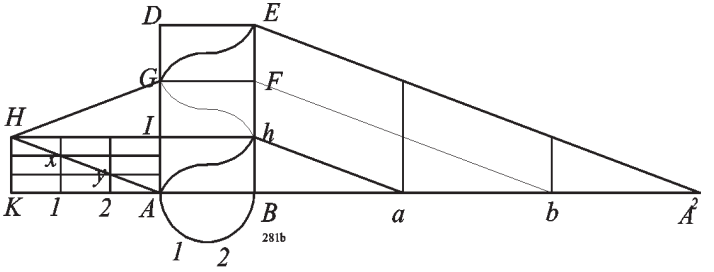


Fig. 281c Sviluppo se si esegue una rivoluzione intera

di cerchio, che lasciano degli intervalli tra loro, ancora più grandi del fuso; quindi non si potrà avere lo sviluppo dell'ellisse in limaccia, che per piccole parti che saranno le diagonali dei trapezi misti formati dalle differenti zone coniche inscritte alla superficie della sfera.

Ecco queste mi sembrano le principali regole per fare il piano, il profilo, l'elevazione e lo sviluppo dei corpi comparabili alle volte comuni; non ci resta che far vedere quale uso si fa per la costruzione, che è quello che mostreremo attraverso due problemi generali.

Problema X

Le elevazioni di due faccie opposte a piani paralleli tra loro, sono date in proiezione su uno stesso piano verticale, e la proiezione orizzontale dei loro intervalli è data, trovare la figura di ogni parte dello sviluppo delle superfici di una volta divisa in più conci, tanto apparenti, che interiori.

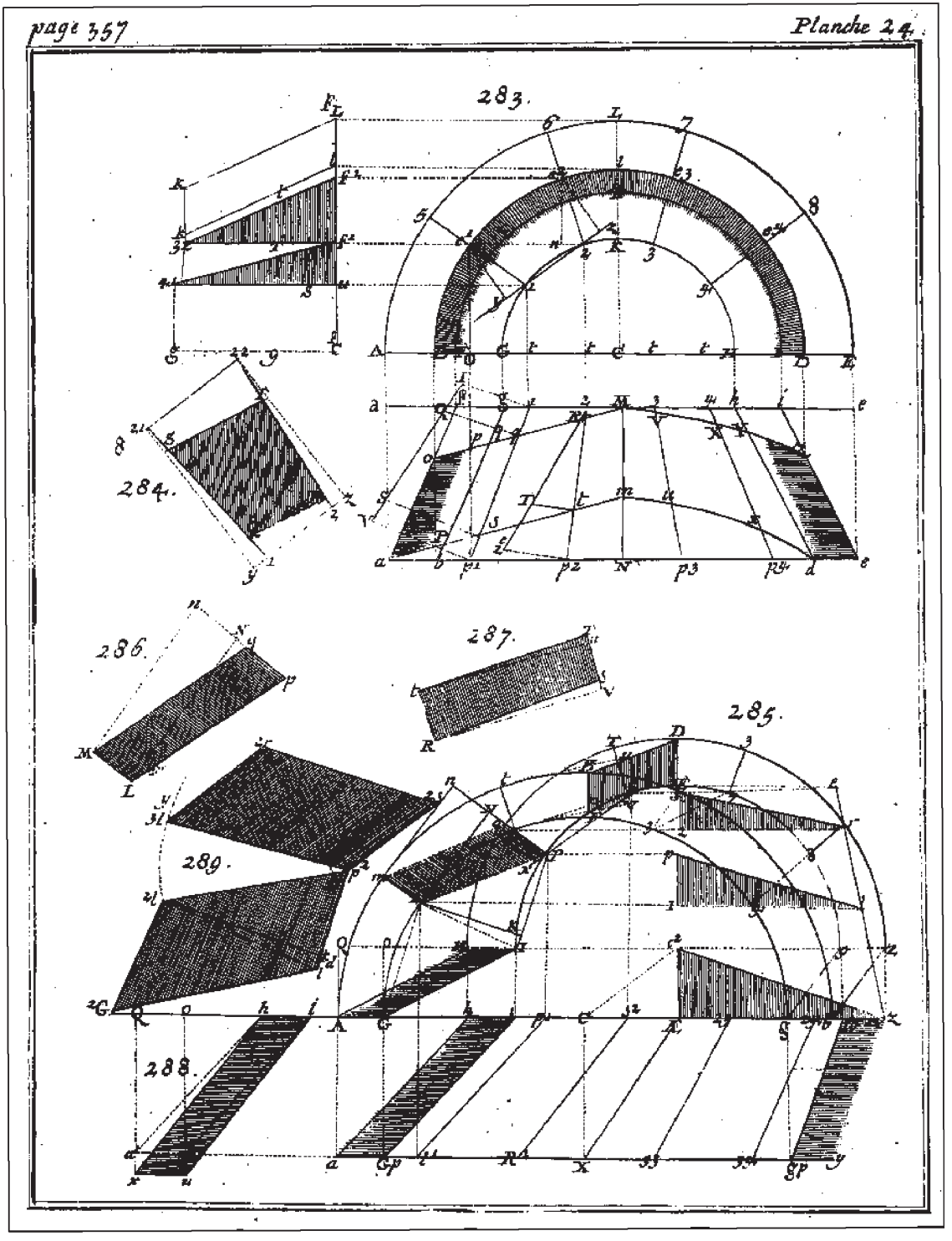
IN TERMINI DI ARTE

Una doppia elevazione della faccia anteriore e posteriore, il piano e il profilo di una volta regolare sono dati, trovare il piano delle superfici, dell'intradosso e del tetto.

Se le faccie opposte dell'entrata e dell'uscita di una volta, sono uguali e perpendicolari a una stessa direzione; è evidente che esse saranno confuse nell'elevazione che sarà ridotta allo stesso centro circolare, ellittico rialzato o abbassato, quelle sono le due faccie di una volta a botte retta, proiettata su uno stesso piano verticale; allora una sola elevazione equivale a due; vale a dire che all'anteriore e al posteriore, se le faccie sono ineguali, o inegualmente situate riguardo al piano orrizzontale, come sono quelli delle discese, di cui una è più alta dell'altra, o inegualmente situate a riguardo del piano verticale, come nelle volte basse, o che partecipano dall'una e dall'altra, come le discese basse, l'elevazione comune alle due faccie sarà espressa da dei contorni differenti che si incrociano, o che non sono paralleli che nelle volte coniche rette, poichè le corde dei loro archi che corrispondono alle stesse divisioni possono essere parallele, sia che il contorno sia parallelo o no; se esse sono tracciate dalla stessa proiezione verticale su uno stesso piano, si conserverà sempre un certo rapporto di distanza tra loro, che servirà a

trovare tutti i lati delle superfici piane che terminano le parti della volta divisa in questi conci.

Per far vedere l'estensione, e per così dire la generalità di questo problema, noi sceglieremo due esempi di volte coniche, l'una retta, l'altra obliqua, le quali saranno ben estese, e serviranno alla costruzione di tutte le volte. In primo luogo a quelle dei cilindri che sono più semplici, e più facili di quelle coniche; in secondo luogo a quelle coniche di cui esporremo tutte le difficoltà, e nella terza parte, alle sferiche, le quali devono essere ridotte, o in porzioni di coni tronchi, o in poliedri, che sono più parti di piramidi tronche, di cui noi diamo qui gli esempi per la riduzione dei coni in piramidi.


page 357
Planche 24.
283.
284.
285.
286.
287.
288.
289.

PROBLEMA X.

Date le alzate di due facciate opposte su piani paralleli tra loro, proiettate su uno stesso piano verticale, e data la proiezione orizzontale dei loro intervalli, trovare la figura di ciascuna delle parti di sviluppo delle superfici di una volta divisa in più conci, sia interni, che esterni.

IN TERMINI DELL'ARTE.

Dati una doppia elevazione di faccia anteriore e posteriore, il piano e il profilo di una volta regolare, trovare i *panneaux de lits*, dell'intradosso e di testa.
Se le facce opposte dell'entrata e dell'uscita di una volta, sono uguali e perpendicolari ad una stessa direzione; è evidente che queste saranno confuse nel prospetto che sarà ridotto ad uno stesso centro circolare ellittico rialzato o ribassato; quali sono le due facce di un volta a botte dritta, proiettate su uno stesso piano verticale; allora uno stesso prospetto è equivalente a due; ossia davanti o dietro, se le facce sono diverse, o diversamente disposte rispetto al piano orizzontale, come sono quelle des *descentes*, di cui una è più alta dell'altra, o diversamente situate rispetto al piano verticale, come nelle volte sbieche, il prospetto comune alle due facce sarà espresso dai contorni diversi che si incroceranno, o che non saranno paralleli che nelle volte coniche dritte, anche se le corde dei loro archi corrispondenti alle stesse divisioni possono essere parallele o meno; se sono tracciati dalla stessa proiezione verticale su uno stesso piano conserveranno sempre un certo rapporto di distanza tra loro, che servirà a trovare tutti i lati delle superfici piane che terminano le parti della volta divisa nei suoi conci.

Per far vedere l'estensione, ed anche per dire la generalità di questo problema, noi sceglieremo due esempi di volta conica, una dritta, l'altra obliqua, le quali essendo ben comprese, serviranno alla costruzione di tutte le volte.
Per prima cosa a quelle cilindriche, che sono più semplici, e più facili delle coniche; in secondo luogo alle coniche, di cui si espongono tutte le difficoltà, ed in terzo luogo, alle sferiche, che devono essere ridotte, o in porzioni di tronchi di cono, o in poliedri, che sono più parti di tronchi di piramidi, di cui noi diamo qui gli esempi tramite le riduzioni di coni e piramidi.

Primi esempi di volte coniche dritte.

Siano [***Fig. 283***] i due centri della faccia presa all'intradosso *BLD* esterno, *GKH* interno, che noi chiamiamo faccia anteriore e posteriore, riuniti dalla stessa proiezione su uno stesso piano con i loro estradossi *ALE* e *FKI*, descritti dallo stesso centro *C*. Avendo diviso i suoi centri nei loro conci, ad esempio in cinque "q" ai punti *1, 2 ,3 ,4,* e tirato i *joins* di testa attraverso questi punti del centro *C, 1*:*5, 2*:*6, 3*:*7, 4*:*8*, si farà la proiezione orizzontale della volta e dei suoi *joins de lit*, seguendo le regole ordinarie, la quale sarà il trapezio "*a f i e*", nel quale i due parallelogrammi "*a f g b*" e "*d h i e*" saranno le superfici orizzontali dei piedritti all'imposta, nelle loro giuste misure; non si farà ugualmente per le altre linee che sono la proiezione dei *joins de lit* esse saranno più corte dei *joins*, poiché questa è orizzontale, e poiché questi *joins* sono inclinati all'orizzonte sullo stesso piano verticale.

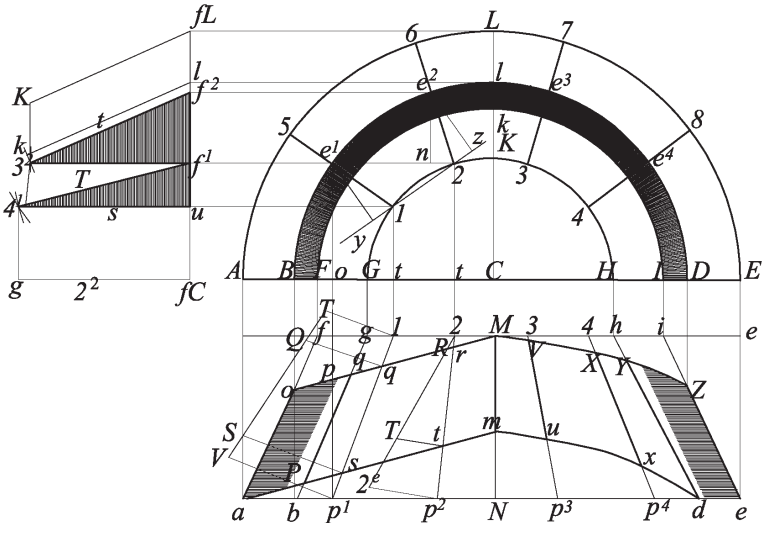


Fig.283 Proiezione verticale e proiezione orizzontale della volta e dei suoi *joins de lit*

Si deve innanzitutto cercare la vera lunghezza dei *joins de lit*, poiché essi sono i lati comuni alle porzioni delle superfici dell'intradosso, e alle superfici dei *lits*. Lo si fa attraverso dei profili particolari che si possono fare in diversi modi, che danno sempre la stessa lunghezza, si può scegliere quello che ci risulta più facile.

In primo luogo, si può riportare sulla proiezione orizzontale di un *joint de lit* dato, come $1p^1$, un piano verticale per tutta l'altezza dello spazio che c'è tra la proiezione sul piano orizzontale e il vero *joint*, così si eleverà una perpendicolare $1T$ sulla linea $1p^1$ nel punto *1*, uguale all'altezza *1t*, della proiezione verticale che è quella della *retombée*; e nel punto p^1 la perpendicolare p^1V uguale a quella della *retombée* oe^1; la linea *VT* sarà il profilo e la vera lunghezza del *joint de lit*, di cui $1p^1$ è la proiezione.

In secondo luogo, si può fare lo stesso profilo sopprimendo l'altezza della *retombée* dal punto più basso, per esempio, *2* del *joint de lit*, la cui proiezione verticale è la linea $2e^2$, e mettendo solamente a una delle estremità p^2 della proiezione orizzontale $2p^2$ l'altezza e^2n sopra al punto *2*, che porteremo da p^2 a 2^e perpendicolarmente alla proiezione orizzontale data p^22.

In terzo luogo, si può fare lo stesso profilo, portando tutte le altezze utilizzando linee parallele alla base *AE* della proiezione verticale, su una linea che sia ad esse perpendicolare come *fL, fC*, in modo che tutte le parallele portate dai punti *2* e *1* della proiezione verticale della faccia posteriore, ed e^1, e^2 della faccia anteriore, intersechino nei punti f^2, f^1, u, che daranno le altezze superiori e inferiori dei *joins de lit*, di cui sarà facile

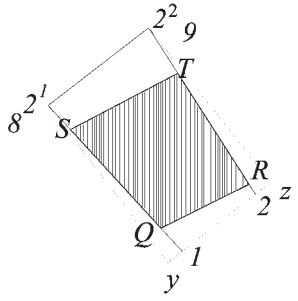
trovare le inclinazioni, portando sulle parallele le proiezioni orizzontali date, per esempio, $1p^1$ su $u4^1$, e $2p^2$ su $f^1 3^2$, le linee inclinate portate dai punti 4^1, f^1, 3^2, f^2, saranno i profili e le vere lunghezze dei *joins de lit*.

Da sottolineare il fatto che se la volta è una porzione di un cono retto troncato, le cui facce anteriori e posteriori sono parallele tra di esse, come in questo esempio, è inutile fare i profili per trovare le lunghezze dei *joins*; poiché in questo caso i *joins* sono tutti uguali a quelli delle imposte, come in *bg* o *hd*; così in questa ultima costruzione del profilo, con il metodo delle parallele alla base *AE*, basterà prendere la lunghezza *gb* da un punto sull'imposta con un compasso, e con centro nei punti f^1 e f^2, facendo degli archi di cerchio, che intersecheranno le parallele *1u* e $2f^1$ prolungate, nei punti 4^1, 3^2, avremo le stesse lunghezze, del metodo precedente; ma se la volta è sbieca, ossia, porzione di un cono scaleno, le si può trovare [come abbiamo detto] solo portando le lunghezze della proiezione orizzontale sulle parallele corrispondenti.

Trovate le lunghezze delle linee inclinate ai piani di proiezione verticale delle facce anteriori e posteriori, la risoluzione del problema consiste nel *fare dei triangoli rettangoli, di cui un cateto è dato dalla proiezione verticale e una volta trovata l'ipotenusa, la si deve adattare all'altro cateto incognito* attraverso una sezione d'arco di cerchio che è chiamato *lieu*, e che ne determina la posizione; lo capiremo meglio con degli esempi.

Ad esempio per formare un *panneau* dell'intradosso piatto, individuato sulla proiezione verticale dal trapezio *1. e^1. e^2. 2.*, dal secondo concio, una volta tracciata la corda *1, 2* la prolungheremo da una parte all'altra verso *y* e verso *z*, e dai punti di divisione della faccia anteriore e^1 ed e^2, riporteremo su questa corda le perpendicolari e^1y e^2z, in seguito si porterà ad una distanza che vorremo la linea *y, z* (vedi ***Fig. 284***) e avendo tracciato due perpendicolari indefinite $y\ 2^1$, $z\ 2^2$ partendo dai punti *y* e *z*, prenderemo la lunghezza di uno dei *joins de lit*, come *bg* o *dh* oppure sul profilo 4^1, f^1, o 3^2, f^2 visto che tutte le linee sono uguali, poiché il cono è retto; in caso non lo fosse, si misura la lunghezza della linea 4^1, f^1, e prendendo il punto *1* come centro, si traccerà l'arco 8^{21}, che taglierà la linea $y\ 2^1$ nel punto 2^1 , e in seguito si misura la lunghezza della linea 2^2, f^2, e con centro nel punto *2* della ***Fig. 284*** si traccerà l'arco di cerchio 9^{22}, che taglierà la perpendicolare $z\ 2^1$ nel punto 2^2; infine dai punti trovati, si tireranno le linee $2^1\ 1$, $2^1\ 2^2$, $2^2\ 2$, e avremo il *panneau* del secondo intradosso rappresentato sul piano orizzontale dal trapezio, $1\ p^1$, $p^2 2$, e sulla proiezione verticale da $1\ e^1$, $e^2\ 2$; si dovrà fare altrettanto per gli altri intradossi, qualora non fossero uguali, come lo sono nel nostro caso. Riguardo ai *panneaux de lit*, visto che sono tutti uguali a quelli dell'imposta *afgb* o *dhie*, è inutile cercarli, nell'esempio seguente vedremo come si trovano, nel caso in cui siano disuguali.

Fig.284 Panneau del secondo intradosso rappresentato sul piano orizzontale dal trapezio, $1\ p^1, p^2 2$



Ci resta da mostrare come si può applicare questo metodo alle volte, le cui facce sono inclinate ai piani verticali, sui quali si deve fare la proiezione verticale , come per esempio, se si trattasse di una volta *sur le coin o dans l'angle*, il cui piano orizzontale sarà *amd, oMz*, o composto da due porzioni rette, come *am* e *oM*, o da due archi di cerchio, come *Mz* e *md*.

Si deve dal Capitolo IV di questo III Libro circoscrivere alla figura irregolare del piano orizzontale un trapezio *afie*, i cui lati opposti *ae* e *fi* siano paralleli tra di loro, e operare come se la volta fosse regolare, seguendo quello che abbiamo appena detto, per trovare i *panneaux* regolari dei *lits* e degli intradossi, e sottrarre dai loro lati quello che la proiezione orizzontale del piano irregolare sottrae dalle parti di quello regolare, seguendo la regola che abbiamo dato.

Avendo dunque fatto il *panneau* dell'intradosso della volta conica regolare 2^1 , 2^2, *2 1*, [***Fig. 284***] per il secondo concio, si tracceranno delle perpendicolari sui punti *s, q, r, t*, dove le proiezioni dei *joins de lit* $1p^1$, $2p^2$ sono intersecate da quelle delle facce *oM, am*, tali perpendicolari qQ, sS, rR, tT, intersecheranno i profili *VT* e $2^e 2$ nei punti *QS* e *RT* che daranno gli eccessi *VS, QT*, $2^e T$, *R2* dei lati del *panneau* dell'intradosso regolare sull'inscritta irregolare; così si porterà la lunghezza *VS* su $S\ 2^1$ della ***Fig. 284***, *q1* su *Q1* della stessa figura, *2R* su *2R*, $T2^e$ su $T2^2$, e dai punti *STQR* trovati, si tireranno le linee rette *ST, QR*, che formeranno il trapezoide *QSTR*, il quale sarà il *panneau* dell'intradosso del secondo concio della volta conica sbieca o ad angolo, a seconda che essa sia indicata sulla proiezione orizzontale della metà *aoMm*, o *PpMm*.

Si farà altrettanto per la volta strombata, che si trova in una torre rotonda, la cui proiezione è individuata dalla sua metà *MYdm*. L'unica differenza che ci sarà, è che invece delle linee rette *ST, QR* che abbiamo tirato sul *panneau* dell'intradosso (***Fig. 284***) per le facce anteriori e posteriori bisognerà tirare delle porzioni di queste curve, che non essendo piane, vale a dire che non possono essere descritte su un piano, saranno individuate attraverso la circoscrizione di un poligono al cerchio della proiezione della torre rotonda e vuota; ma poiché dobbiamo dare questo disegno nel libro seguente, non ci soffermiamo di più su questa difficoltà, qui si tratta solo di dare un metodo generale per tutti i poliedri, senza entrare nel merito dello sviluppo dei corpi rotondi cilindrici, sferici o conici considerati come tali, ma solo come compresi e avvolti da un gran

numero di superfici piane inscritte o circoscritte, alle curve convesse.

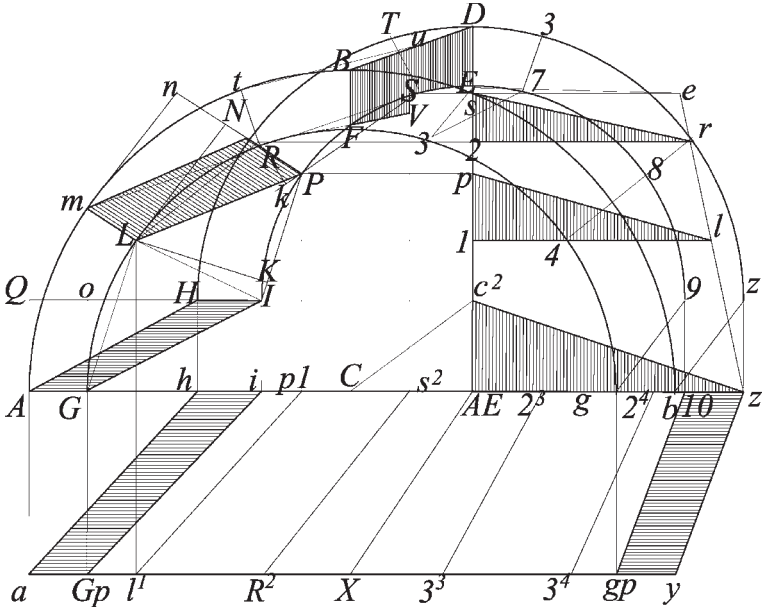
Sulla Stereotomia Liv. III.

Secondo esempio di volte coniche, scalene a doppia obliquità,

Come in termini d'arte.
Descente Biaise Ebrasèe en Canoniere

Sia [***Fig. 285***] il centro della faccia anteriore all'angolo sporgente dell'intradosso *GFg*, e quello della faccia posteriore *IE9*, con i loro estradossi *ABb*, e *HDz* divisi nei loro conci *LR3*[4] e *PS78* e proiettati sulla stessa superficie verticale, questo possiamo supporlo come fatto, e dato, seguendo l'enunciato del problema; ma la costruzione di questa proiezione è la stessa di quella della soluzione del problema, per trovare ciascuna delle superfici dei conci in esame, riportiamo qui per intero la costruzione per rendere la cosa più facile da capire; poiché la costruzione fa le veci della spiegazione.

Fig.285 Proiezione orizzontale della volta e proiezione verticale con i *joins de lit* in vera grandezza e i panneaux *de lit* e di testa



Sia il Trapezio *abzy* il piano orizzontale della volta *AE x* la proiezione del suo asse o linea di mezzo *Cc*[2], *p*[1], *l*[1] la proiezione orizzontale del *joint de lit LP*, *S*[2]*R*[2], quella del *lit RS*; prenderemo solo questa metà di volta per evitare una sovrabbondanza di linee sulla figura.

Si comincerà tracciando dal punto *X* una perpendicolare *XC* su *A AE z*, e avendo portato sulla stessa *A AE* l'altezza *AE c*[2] della discesa o della salita; vale a dire, della differenza di livello della faccia anteriore *A AE*, e di quella posteriore *Hc*[2], dal punto *C*, preso come centro, e ad intervalli *CG*, *CA* o *XCp*, *Xa*, si descriveranno i cerchi concentrici *GFg* e *ABb*, uno per l'intradosso, l'altro per l'estradosso della faccia anteriore. Poi dopo aver portato dal punto *c*[2] la parallela che si chiamerà *H2* ad *Ab*, con centro in *c*[2],

e avendo come raggi le lunghezze *AE i*, *AE h*, si descriveranno i due cerchi concentrici *IE9*, *HDZ*, uno per l'intradosso, l'altro per l'estradosso della faccia posteriore, la quale sarà così proiettata sullo stesso piano verticale di quella anteriore. Quindi avendo diviso questi centri in un numero di conci uguali, per esempio in *5* ai punti *LR34* e *PS78*, si uniranno i punti corrispondenti con delle linee rette, che esprimeranno i *joins de lit* sulla proiezione verticale, ovvero la retta *GI* per il *join de lit* dell'Imposta *LP* per il primo sopra, e *RS* per il secondo.

Allo stesso modo si tireranno anche i *joins* di testa *Lm*, *Rt*, dal loro centro *C*, come anche *Pq* e *ST* dal loro centro *c2*.

Fatta questa preparazione, sarà facile trovare tutti i lati delle superfici, che comprendono ogni concio.

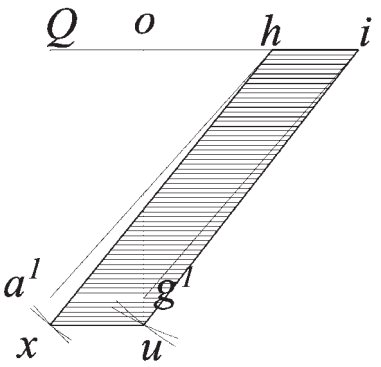
In primo luogo per i *panneaux* di testa, non c'è alcuna difficoltà, si prenderanno sulle proiezione verticale *s*. Per esempio, quelli del secondo concio saranno le porzioni delle corone circolari *mLRt* per la faccia anteriore, e *qPST* per la faccia posteriore.

Secondariamente, per i *panneaux de lit*, per esempio, per il primo all'imposta definito sul piano orizzontale dal parallelogramma *ahiGp*, e sulla proiezione verticale dal parallelogramma *AHIG*, si comincerà cercando la vera lunghezza tramite il profilo, come abbiamo detto per l'esempio precedente, poiché i lati *AH* e *GI* della proiezione verticale o proiezione verticale sono troppo corti, dato che lo sono ancora più di quelli dell'orizzontale *AhiGp*, la quale è ridotta rispetto alla discesa che rappresenta. Per riuscirci, si eleverà una verticale *AE E* sulla base orizzontale *A AE* dove si vorrà. Prendiamo qui la linea di mezzo della faccia posteriore, poi si portino delle parallele indefinite a questa base partendo dai punti di divisione degli intradossi *LP*, *RS*, che taglieranno la verticale nei punti *1*, *p*, *2*, *s*.

Si porteranno sulle linee che provengono dai *joins* inferiori *LR* come le linee *Ll*, *Rr*, le proiezioni dei *joins de lit*; cioè, *iGp* su *AE z*, p^1l^l, su 1*l*, S^2R^2 su *2r*, e dai punti trovati *z*, *l*, *r*, si tirano le inclinate *z* c^2, *lp*, *rs* che saranno le vere lunghezze dei *joins de lit*. Se avessimo un gran numero di questi *joins*, potremmo trovare tutti i punti delle basi intermedie, solamente ponendo *AE z* uguale a *iGp*, e *Ee* uguale ad *AE X*, tirando la linea *ze*, essa intersecherebbe tutte le basi nei punti *l* e *r*, che si troverebbero tra due; ciò è facile da intravedere dalla sola ispezione del piano orizzontale, dove esse sono comprese e chiuse da due linee rette *i AE*, *Gp X*.

Dopo aver trovato, a partire dai profili, le linee inclinate che sono uguali ai *joins de lit*, si tratta ora di adattarli ai triangoli rettangoli, di cui esse devono essere le ipotenuse, per trovare gli angoli che esse fanno con i *joins di testa*.

Si prolungheranno i *joins* di testa del piccolo centro verso quelli del centro grande o all'esterno come *Pq* su *n*, o all'interno come *TS* su *V*, e dai punti *m* e *L*, *t* e *R* delle divisioni della faccia anteriore, si tireranno le perpendicolari *mn*, *LN*, *tu*, *RV* ai *joins* prolungati che formeranno più rettangoli, di cui questa costruzione darà un lato nella sua giusta misura; cioè, quello che giace sul *joint* di testa prolungato, gli altri due lati rimarranno ridotti dalla proiezione; ma poiché abbiamo già trovato



il valore dell'ipotenusa tramite il profilo, si costruiranno solo i triangoli rappresentati sulla proiezione, come vedremo negli esempi.

Per il primo *joint de lit*, che è quello dell'imposta, si trasporterà la linea *iA* o la sua uguale *IQ* con le sue divisioni *H* e *o* dove si vorrà, come in ***Fig.288*** su *ih*, *oQ*, e si tireranno le perpendicolari indefinite *Qx*, *ou* dai punti *o* e *Q*, poi dai punti *h* e *i* presi come centri, e con intervallo c^2z del profilo, si faranno due archi di cerchio che intersecheranno queste perpendicolari nei punti *x* e *u*, dalle quali avendo tirato le linee rette *xh*, *ui* e *xu*, avremo il parallelogramma *xhiu* per il primo l*it* dell'imposta, il quale è non solo più grande di quello della proiezione orizzontale *ahiGp*, ma ancora disuguale negli angoli che sono un po' meno acuti, come appare in questa figura, dove quello della proiezione orizzontale è in ha^1g^1i.

Fig.288 Costruzione del primo *joint de lit* dell'imposta

Il secondo e il terzo *panneau de lit* si troveranno allo stesso modo cambiando i triangoli rettangoli *mnR*, *LNP*, *tuT*, *RVS*, in altri triangoli rettangoli più allungati sulle stesse basi *nR*, *NP*, *uT*, *VS*. Dalla metà delle ipotenuse trovate *pl*, *Sr*, avendo così trasportato dove si vorrà la linea *Pn* con le sue divisioni *Nq*, come in ***Fig.286***, si tracceranno le perpendicolari *nM* e *NL* , e presi i punti *q* e *p* come centri e *pl* come intervallo, preso dal profilo si faranno gli archi di cerchio in *M* e in *L* che intersecheranno le perpendicolari ai punti *M* e *L*, dalle quali si faranno passare delle linee rette che sono i lati del parallelogramma *MqpL*, il quale sarà uguale alla superficie del secondo *lit* individuato sulla proiezione verticale dal parallelogrammo ridotto *mqPL*.

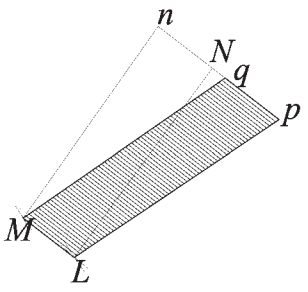


Fig.286 Costruzione del secondo *panneau de lit*

La ***Fig.287*** fa vedere anche il terzo *lit* formato sulla base *VSuT* trasportata per sistemarci sopra un parallelogramma più allungato di quello della proiezione verticale *tTSR*, seguendo le stesse regole di decomposizione della proiezione.

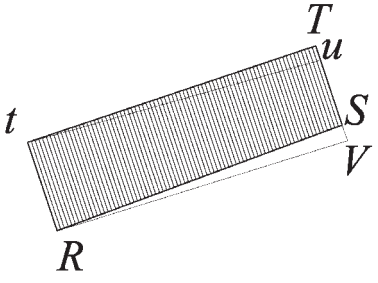


Fig.287 Costruzione del terzo *panneau de lit*

Ora non resta altro che trovare le superfici dei *panneaux* dell'intradosso piatto che devono passare dalle corde degli archi delle divisioni dei centri della faccia anteriore e posteriore; si farà allo stesso modo, col quale abbiamo trovato i l*its* abbassando delle perpendicolari su queste corde prolungate, se occorre, attraverso le divisioni del centro opposto.
Per esempio, per trovare l'intradosso piatto del primo concio individuato sulla proiezione orizzontale dal trapezio *Gp,i, p*[1], *l*[1], e all'elevazione dal trapezio *GIPL*, avendo tirato la corda *IP* dell'arco posteriore *IP*, si abbasserà la perpendicolare *LK* dal punto *L* della divisione dell'arco anteriore su tale corda. Si trasporterà poi dove vorremo la corda *PI* con la divisione *K*, come in $I^d kp$ sopra la ***Fig 288*** e si eleverà sul punto *k* la perpendicolare indefinita k^2l; poi preso *p* come centro, e con intervallo *pl* preso sul profilo, si descriverà dall'altro lato un arco che taglierà la perpendicolare k^2l nel punto ^2l. In seguito, dai punti ^2l e I^d presi come centri, e dall'intervallo della corda LG e dal *joint de lit* c^2z, si farà un'intersezione d'archi che si intersecheranno nel punto ^2G, dal quale dopo aver tirato le linee $^2G^2l$, $^2GI^d$, ricaveremo il trapezoide $^2G^2l$, p^2I^d che costituirà la superficie dell' intradosso piatto del primo concio, la quale deve coprire la porzione concava del cono *GLPI*, e toccare i suoi quattro angoli.

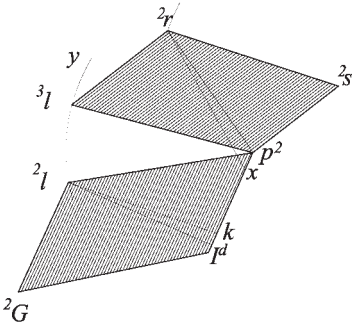


Fig.289 Costruzione della superficie dell'intradosso piatto del primo concio

Per ottenere il secondo intradosso piatto individuata sul piano da p^1, *S2*, *R2*, l^1 e sulla proiezione verticale dal trapezio *LRSP* si prolungherà la corda *SP* verso *x*, e dal punto *R* si abbasserà la perpendicolare *Rx*, poi avendo trasportato a piacere la linea *Sx* con la sua divisione *P*, come nella figura precedente, si traccerà sull'estremità *x* una perpendicolare indefinita $x\ ^2r$, alla quale si adatterà la linea del *joint de lit sr*, preso sul profilo. Presa tale linea come raggio e preso il punto ^2S come centro si descriverà un arco che taglierà x ^{2}r nel punto ^2r, dal quale preso come centro e con intervallo della corda *RL*, si farà un arco di cerchio ^3ly; allo stesso modo dal punto ^2p come centro e con intervallo del *joint de lit* preso sul profilo su *pl*, si descriverà un arco di cerchio che taglierà il precedente ^3ly nel punto ^3l, dal quale dopo aver tirato le linee $^3l\ ^2r$, $^3l\ ^2p$, avremo il trapezoide ^3l, ^2r, ^{2}s, ^2p, che costituirà il *panneau* dell'intradosso piatto, adatto a coprire la porzione concava del cono che comprende il secondo concio, lo stesso per gli altri.

Si deve osservare che per avere le lunghezze dei *joints de lit* dell'altra metà della volta *FE9g*, la cui proiezione orizzontale è *AE 10*, *gp X*, si devono fare dei nuovi profili, poiché le linee 2^3, 3^3;2^4 3^4 *10gp* e *zy*, che supponiamo siano le proiezioni dei *joins de lit*, sono tutte ineguali, e poiché le loro altezze saranno sempre le stesse di quelle dell'altra metà, se i *lits* corrispondenti sono di altezza, ne consegue che saranno più inclinate, e di conseguenza più corte di quelle che corrispondono ad esse nell'altra metà della volta; ciò risulta evidente dalla sola ispezione del piano orizzontale; poiché la linea *zy* si avvicina di più alla perpendicolare *CX*, che *ah* all'altra imposta, essa sarà più corta, e tutte le proiezioni dei *lits* tra le due imposte, saranno disuguali, più corte verso *y*, e più lunghe verso *a*; ciò non accade in ***Fig. 283*** dove esse sono uguali, a distanze uguali dall'asse del cono che è retto.

Si deve tener presente che se i due centri delle facce opposte, non sono

della stessa natura, uno circolare e l'altro ellittico, o l'uno ribassato e l'altro rialzato, non si può trovare un intradosso piatto i cui quattro angoli tocchino i quattro angoli del concio, che sarebbe porzione di questo cono irregolare; ma nel nostro caso facciamo riferimento solo a figure regolari, ciò non toglie che il problema non sia generale, perché allora l'intradosso piatto, invece di essere piana quadrilatera, sarebbe composta da due triangoli che si trovano su piani diversi; illustreremo nel libro seguente come rimediare queste irregolarità.

Dimostrazione

E' visibile dalla costruzione di questo problema che riduciamo tutte le superfici piane, che comprendono il solido chiamato concio in triangoli, per la maggior parte rettangoli, dei quali troviamo un lato sulle proiettate e raccolte su uno stesso piano verticale, dalle metà della perpendicolare che, se occorre, abbassiamo da uno degli angoli di tale superficie, sul lato opposto, prolungato. Abbiamo trovato l'ipotenusa seguendo le regole del profilo utilizzando un altro triangolo rettangolo, la cui proiezione orizzontale ci fa individuare un lato, l'altezza dell'estremità superiore della linea inclinata ci fa individuare l'altro; conoscendo i due cateti di un triangolo rettangolo si ricava facilmente l'ipotenusa, che esprime la discesa; ora la stessa è comune ad un altro triangolo rettangolo del quale da questo problema conosciamo solo un lato, cioè la distanza dei punti di divisione dei *joints* di testa corrispondenti sulla faccia anteriore e su quella posteriore; ma poiché bastano un lato e l'ipotenusa per trovare il terzo lato, il cui angolo retto determina la posizione e l'ipotenusa la lunghezza, l'arco di cerchio di cui essa è raggio è il *lieu* del vertice che l'angolo deve fare con l'ipotenusa: infine conoscendo i lati dei due triangoli rettangoli, e le distanze delle loro ipotenuse parallele, avremo formato le quadrilatere comprese tra le ipotenuse, che sono di solito per i *lits* un parallelogrammo o un trapezio e a volte per gli intradossi piatti un trapezoide, dove si è visto che una stessa ipotenusa ci serve per due triangoli, dei quali uno è rettangolo e l'altro può non esserlo; ma poiché conosciamo tutti i lati di quello che non è rettangolo, è assai facile costruirlo.

Si trovano quindi i *panneaux de lit* utilizzando l'intervallo delle ipotenuse dei due triangoli rettangoli posti su una stessa linea di base e i *panneaux* dell'intradosso in seguito a due o tre triangoli, di cui il primo è sempre rettangolo, per costruzione, come lo sarà il secondo, quando la superficie è divisa in tre triangoli, come può accadere.

Se ci ricordiamo a questo punto dei nostri principi di proiezione, riconosceremmo che tutte le linee che sono parallele all'oggetto proiettato sono nelle loro giuste misure; così le corde degli archi di faccia *GL* e *IP*, *LR PS*, che giacciono su piani paralleli, non sono né diminuite né aumentate, quindi possono essere prese sulla proiezione verticale; da qui segue che per ogni intradosso ci sono sempre due lati da prendere sulla proiezione verticale, che sono le corde degli archi di testa, e due sul profilo, che sono i *joints de lit*; ma dato che questi quattro lati possono formare tra di essi degli angoli differenti, poiché la diagonale del trapezio non è continua, si abbassa una perpendicolare *LK* sul lato *IP* per determinare la posizione rispetto al suo opposto *LG* dalla metà dei due triangoli rettangoli *LKP* e *LKI*, i quali determinano la posizione dei punti *L* e *I* ottenendo la diagonale *LI* dell'intradosso, che è il terzo lato del triangolo *LGI*, che non conoscevamo; troviamo così esattamente l'intradosso piatto; *ciò che dovevamo fare e dimostrare*.

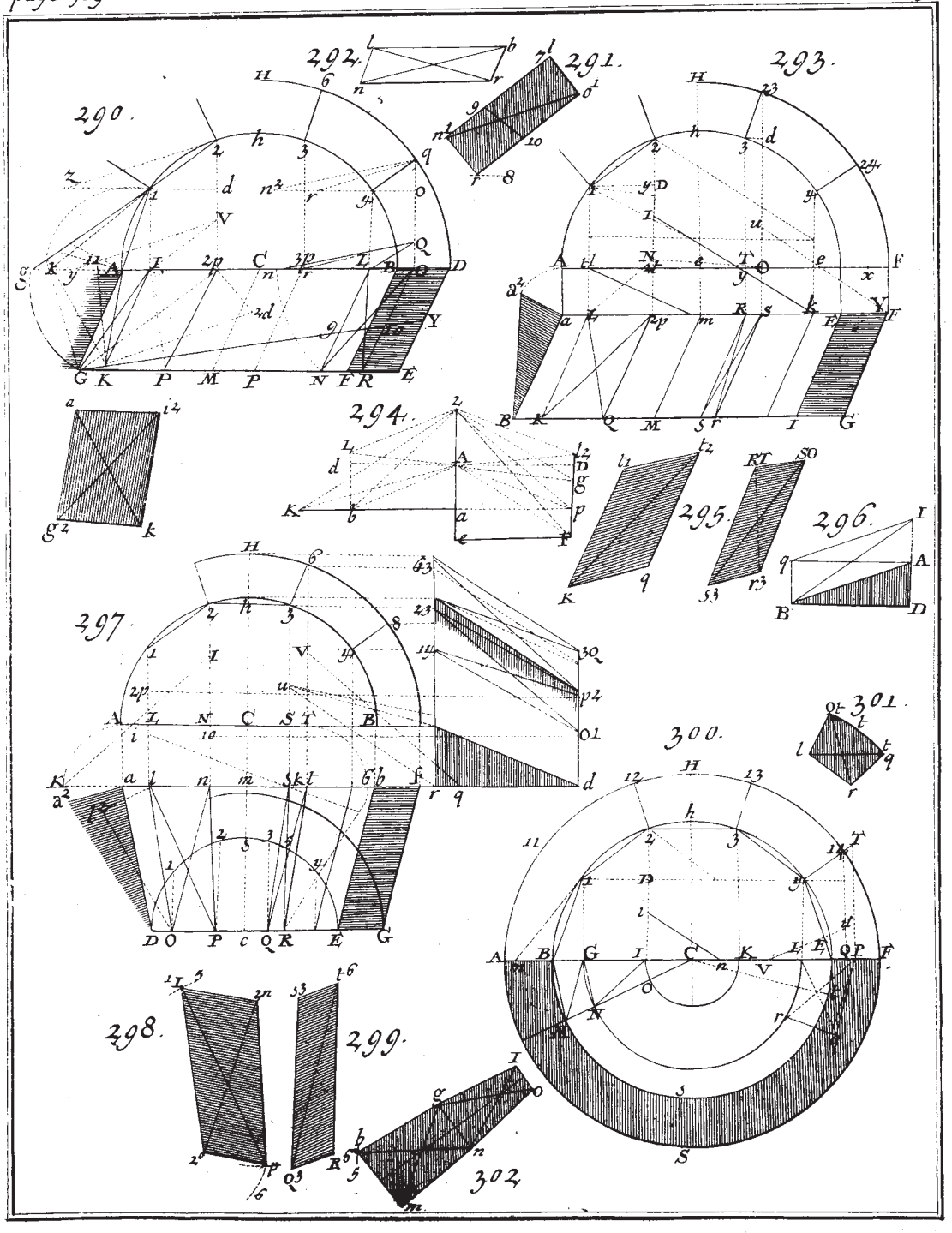
A proposito dei *panneaux* di testa è chiaro che sulla proiezione verticale non sono né alterati né ridotti né allungati.

Non resterà altro che trovare i panneaux dell'estradosso, se ne avessimo bisogno per avere le sei superfici del concio, ma per l'esecuzione non è necessario ridurli a delle superfici piane; poiché attraverso le metà del contorno delle *tetes*, che sono gli archi *Am*, *Hq* dati sulla proiezione verticale e i loro lati *mq*, *AG* anch'essi dati ricavati su *panneaux de lit*, si possono formare gli estradossi convessi del primo spaccato, senza ottenerle da delle superfici piane, che potrebbero essere solo delle tangenti al cono o al cilindro, i cui angoli sarebbero fuori dal concio, ben lontano dal determinarle.

Questo problema può bastare per trovare tutte le superfici piane dei poliedri e delle loro divisioni ottenute dalla metà della proiezione verticale delle due facce proiettate su un unico piano; è un modo ancora più semplice dove si può fare a meno della doppia proiezione delle facce anteriori e posteriori.

page 369

Planche 25.



PRIMO ESEMPIO DI UNA BOTTE PERPENDICOLARE O SBIECA

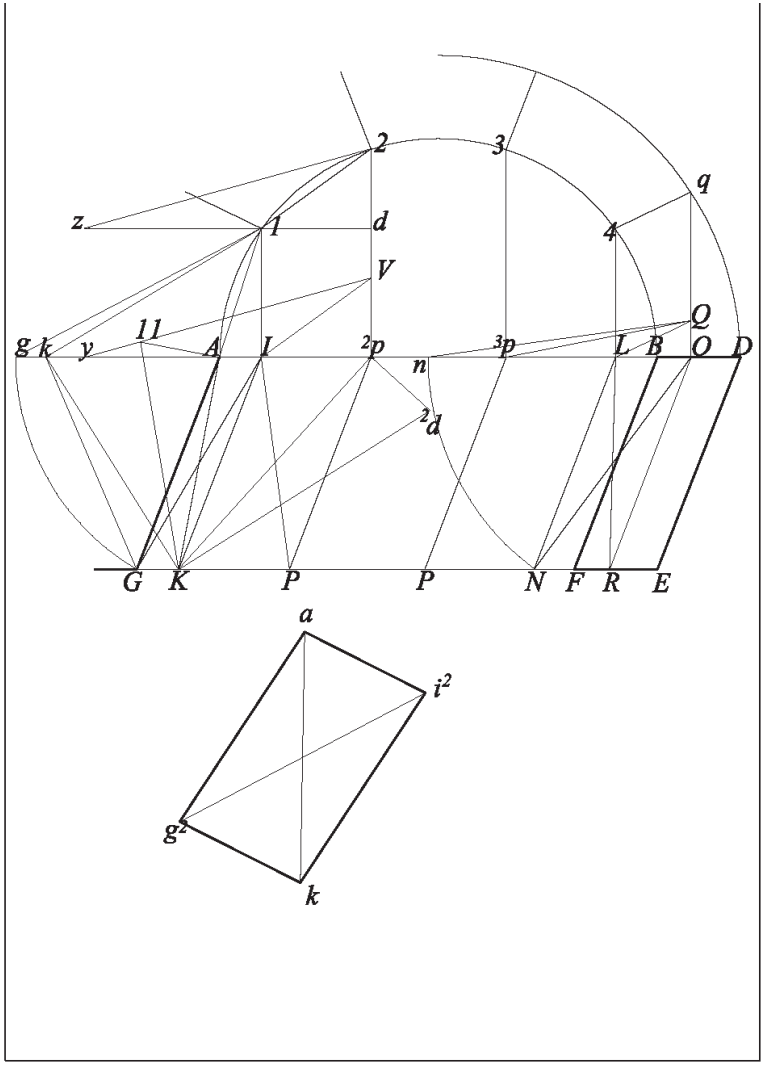


Fig. 290 ***Botte sbieca.***

Sia *ABFG* la proiezione orizzontale di una Botte sbieca, di cui *AhB* è il centro della faccia divisa in più conci nei punti *1,2,3,4* e di cui le proiezioni dei giunti di letto sono le rette *IK ²pP ³pp LN*.
Per trovare il primo intradosso piatto del quale la proiezione orizzontale è il parallelogramma *AIKG*, lo dividiamo in due triangoli con una diagonale *AK* o *IG*, non importa quale, si trasporta poi una di queste diagonali come *IG* in *Ig*, per formare un triangolo rettangolo *1IG*, l'ipotenusa *1g* è la vera lunghezza della diagonale del primo intradosso, dunque la proiezione orizzontale è *GI*. Se al posto di questa diagonale prendo l'altra *AK*, posso trasportare la lunghezza *AK* in *Ik*, la retta *k1* è la lunghezza reale della diagonale dell'intradosso piatto, dunque *AK* è la proiezione; o trasporto *AK* in *Ik* o trasporto *A1*in *A11* ad angolo retto per *AK*, e traccio la retta *11K*, che è quella che si cerca, ma non è molto comodo in questa maniera; perché bisogna fare un angolo retto *11AK*, al posto di questo si utilizza *1Ig*, che è l'inclinazione *1I* per la base *AB*, siamo obbligati a fare questo per avere la proiezione del punto *1*, e del giunto di letto *IK*.

Una delle due diagonali dell'intradosso piatto è stata trovata, e si ha la superficie di questo intradosso, perché si hanno tutti i lati di ciascun triangolo, il quale è stato diviso attraverso le diagonali, poiché la corda *A1* è il lato che è nel piano della faccia, che non è cambiato nella proiezione, e i lati *GA* o *KI* della proiezione non sono stati alterati nelle loro misure; perché il giunto di letto della volta è parallelo a *IK*, e *GA* a quello dell'imposta; quindi si hanno i tre lati di ciascun triangolo che formano le metà dell'intradosso; cosi facciamo a parte la linea i^2g^2 uguale alla linea *1g*, se considero i punti i^2 *e* g^2 come centro di un cerchio che ha raggio di lunghezza *A1* e *AG*, si fa una intersezione d'arco di cerchio in *a* e in *k* da una parte e dall'altra della diagonale i^2g^2, si avranno i punti k^2a^2 per i quali si tracciano le rette ag^2, ai^2, kg^2, ki^2 e si avrà un parallelogramma che sarà la superficie dell'intradosso piatto in tutta la sua dimensione. Si poteva utilizzare la linea *K11* per semplificare l'operazione; perché deve essere uguale alla diagonale *ak*.

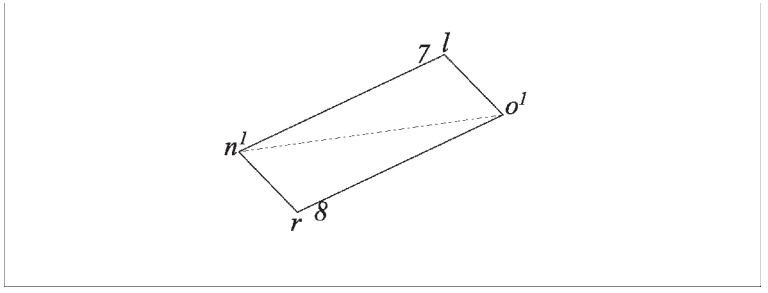
Se al posto del primo intradosso si fosse voluto tracciare il secondo; si avrebbero avute le stesse divisioni per la proiezione *KI* ^2pP con una diagonale *IP* oppure K^2p, dunque si sarebbe trovata la vera lunghezza portando ad angolo retto su uno degli estremi la lunghezza *d2*, che è la differenza delle altezze delle divisioni dei giunti di letto *1* e *2*, e l'ipotenusa K^2d sarà la vera lunghezza della diagonale del secondo intradosso, sul quale si formeranno da una parte, e dall'altra due triangoli con la corda *1 2*, e il giunto di letto *KI*; come nell'esempio precedente. Oppure per evitare di fare un angolo retto si può approfittare con sicurezza di quello *2d1* sulla linea *1d* trasportando la lunghezza della diagonale ^2pK in *dz*, la distanza da *z* a *2* sarà uguale alla lunghezza *z2* invece che a K^2d. Oppure ancora con una maniera più sommaria, per trovare subito la differenza di livello dei due punti *1* e *2*, e approfittare dell'angolo retto che forma 2^2p per il diametro *AB*, non si fa altro che prendere il più piccolo a piombo *1I*, e trasportarlo per il più grande in *2V*, e la lunghezza della diagonale ^2pK in ^2py, la retta *yV* sarà quella che si cerca; giacche è visibile che i triangoli *zd2* e $^2p^2dK$ sono uguali, per la costruzione.

Le dime di letto si costruiscono facilmente con lo stesso metodo. In primo luogo l'imposta si costruisce con la proiezione orizzontale perché è lei stessa orizzontale è il parallelogramma *BDEF*, le altre saranno uguali alla Botte perpendicolare; però la si suppone sbieca, formano assemblati dei lati uguali ,formano tra di loro degli angoli diversi, quelli più vicini alla chiave di volta sono meno obliqui.

Sia proposto di fare le dime del primo letto per proiettarle nel giunto di testa *4q*, e per il piano tramite il parallelogramma *NLOR*, che si dividerà in due triangoli con una diagonale *ON*, la quale rappresenta quella del letto, che è una faccia inclinata verso l'orizzonte; di conseguenza

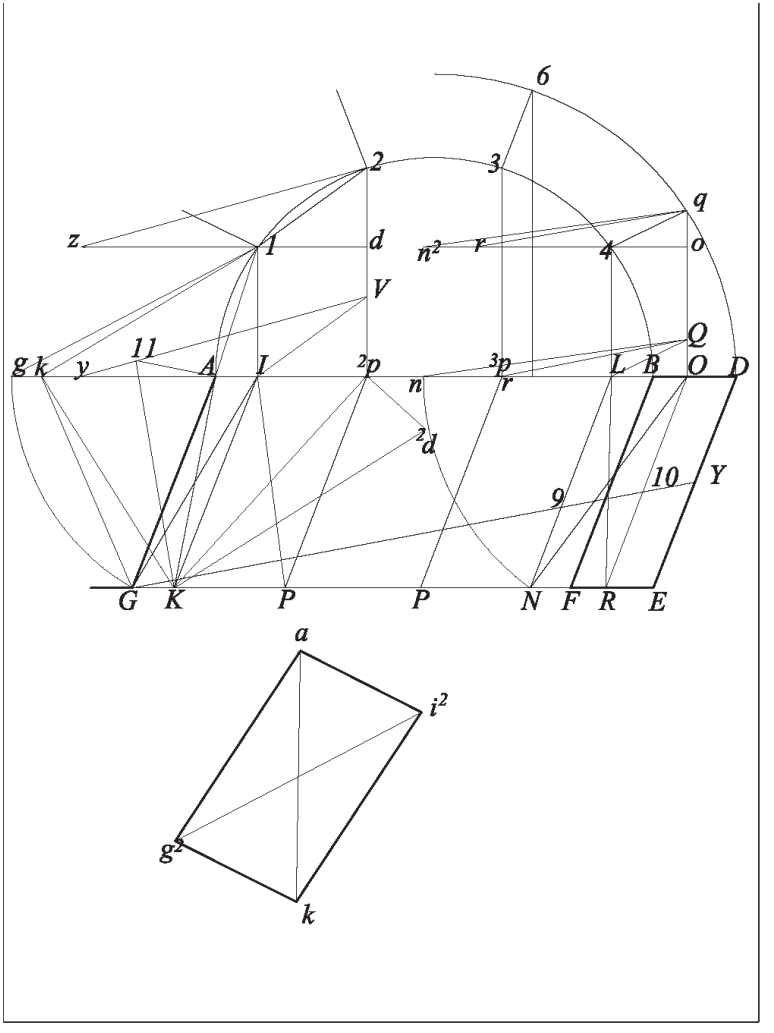
questa diagonale è più lunga della proiezione *ON*. Si troverà la misura, come abbiamo fatto per l'intradosso, e la riporteremo nel più grande perpendicolo *qO*, che serve per la proiezione, il piccolo *4L* di *q* in *Q*, in seguito avendo trasportato la lunghezza *ON* in *On* si traccerà *nQ* che sarà la lunghezza effettiva della diagonale *NO*.

Fig. 291 Superficie del letto sopra la prima fila di conci.



Principalmente si porta questa lunghezza *nQ* in *n¹o¹* da una parte come la ***Fig.291***, e si formano da una parte altri due triangoli con i lati *4q* e *RO*, si avrà il parallelogramma *n¹lo¹r*, che sarà la faccia del primo letto del quale gli angoli sono già meno acuti di quelli dell'imposta; presi i punti *n¹* e *o¹* come centri, e l'intervallo *NL* per raggio, si tracceranno gli archi *l7*, *r8*, e dagli stessi centri , e con l'intervallo *4q* si tracceranno gli archi che taglieranno i precedenti nei punti *l* e *r*, dai quali si tireranno le rette *nr*, *ro*, *nl*, *lo*, si avrà il parallelogramma *n¹lo¹r*, che sarà la superficie del letto di sopra la prima fila di conci, e quella del letto di sotto la seconda.

Fig. 290 Botte sbieca.



Si vede ancora qui che al posto di portare la lunghezza *4L* in *qQ* per avere l'altezza esterna del giunto di letto per quello dell'intradosso si potrà fare *4o* perpendicolare per *qo* e per *o4*, prolungata *n²*, portando la lunghezza *ON* della proiezione di *o* in *n²* , si avrà l'ipotenusa *n²q* uguale a *nQ*.

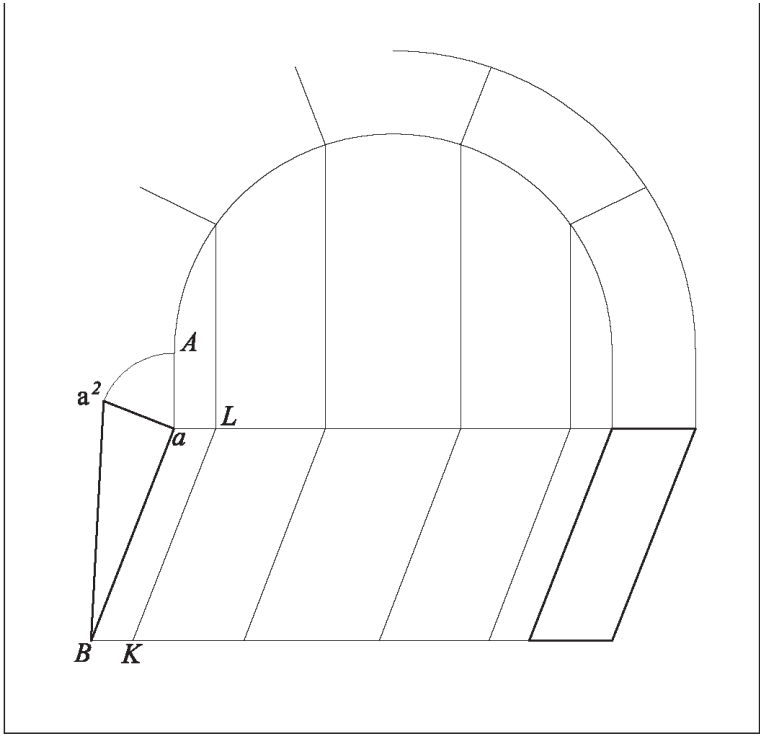
Si vedrà anche che al posto della diagonale *ON* si potrà tracciare l'altra *LR* ; e portare *RL* da *o* in *r* la retta *rQ* sarà la vera lunghezza di questa diagonale; non è importante in quale posto si fanno questi triangoli rettangoli ma i loro lati devono avere delle lunghezze giuste; più o meno la facilità della costruzione si decide dai mezzi, si ha sempre un lato dato per l'elevazione che il giunto di testa *4q* o *3:6* , e l'altra alla proiezione *NL* o *OR*.

Se le facce della Botte non erano parallele tra di loro come *GY* si potranno sempre supporre parallele, e dopo aver fatto le dime si rintracciano le lunghezze *9N* da un lato , e *10 R* dall'altro , e le dime saranno ridotte al trapezio *9 L O 10*, come si è visto nel primo esempio del problema precedente, questo si può applicare a una faccia curva racchiusa in un poligono per la proiezione orizzontale.

SECONDO ESEMPIO DI UNA BOTTE IN DISCESA

Le differenze che esistono dal secondo esempio al primo considerato sono due.
Principalmente la proiezione orizzontale non fornisce la misura dei punti del letto della volta come nella Botte orizzontale; perché questi giunti erano inclinati verso l'orizzonte , uniti nella proiezione , dove erano rappresentati da una linea orizzontale ; ma questa linea fornisce il mezzo per trovare l'inclinazione in questa che è la base di un triangolo rettangolo, che è il profilo della discesa , è l'ipotenusa, che è la retta inclinata che si cercava.

Fig. 293 Botte in discesa, il dislivello è pari a *Aa*.



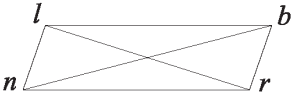
Così ***(Fig.293)*** poiché *Ba* , *KL* e altre proiezioni del letto sono troppo corte si prolungheranno all'estremità *a* la perpendicolare *a*a² sarà uguale all'altezza del dislivello che si è supposto essere qui la linea *aA* , la retta *B*a² sarà la vera lunghezza di tutti i giunti di letto, che si è supposto in questo esempio essere paralleli e uguali.

Se le proiezioni dei giunti di letto non sono paralleli come è nelle volte coniche , è evidente che ciascuno formerà un profilo ; perché sono tutti diversi , il cono è scaleno.

La seconda differenza dell'esempio di una volta a Botte sbieca e in discesa è che nella seconda le lunghezze delle diagonali sono più difficili da trovare , perché la loro altezza non è uguale , non si possono tracciare le ipotenuse dallo stesso vertice per una stessa base , come nell'esempio precedente , di una Botte orizzontale ; ma da due vertici differenti , e per la comodità di esecuzione per due differenti rette di base.

Fig. 292 Intradosso di una Botte orizzontale.

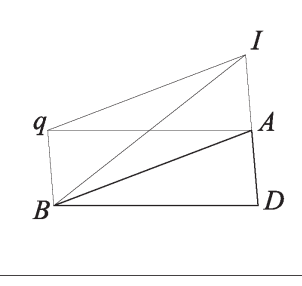
Per immaginare la ragione di questa differenza bisogna fare attenzione



che la superficie dell'intradosso di una Botte orizzontale sia divisa in due triangoli tramite due diagonali ; ciascuna di queste va dalla base in alto come ***(Fig.292)*** da *n* in *b* , e da *r* in *l* l'altezza è uguale a *lb* e a *nr*.

Fig 296 Faccia inclinata verso i giunti di letto.

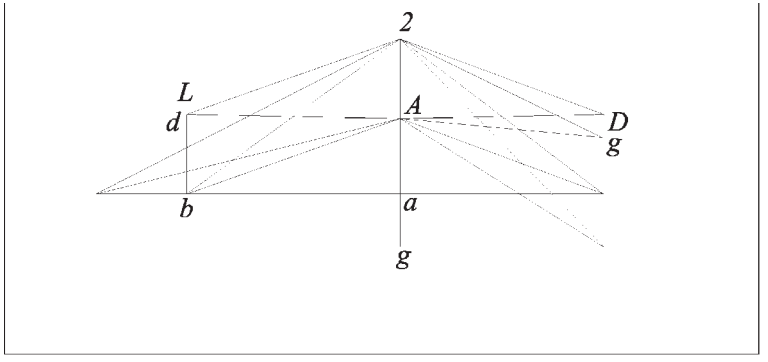
Ma questa faccia è inclinata verso i giunti di letto come nella ***Fig.296***



l'intradosso *IqBA* , si vedrà che le due diagonali *BI Aq* non sono più ugualmente inclinate all'orizzonte , quella che parte dal punto *I* è la più elevata più di quelle formate da tutte le quantità delle altezze del dislivello *AB*, e l'altra che parte dal punto *A* può salire o scendere spesso la differenza che ha nell'altezza verticale *ID* della superficie , e l'altezza del dislivello *AD* deve stare sullo stesso livello come *Aq*.

Fig. 294 Dislivello maggiore o minore della differenza dei giunti *1* e *2*.

Se la linea a piombo dell'imposta disegnata nella fig.293 per la retta



2D è più grande dell'altezza *Aa* del dislivello della Botte , la diagonale *LQ* ***(Fig.293)*** o *AL* ***(Fig.294)*** al posto di abbassarsi dal punto *A* cresce ancora da *L* della quantità *dL* ; dunque la linea a piombo *A2* sarà uguale a *bL* e supera il dislivello *Aa* ; ma se il dislivello *Aa* e più grande della linea a piombo dell'imposta *2A* , si fa *Fg* uguale alla diagonale *LQ* o *Ag* discendente dal punto *A* della differenza *gD* della linea a piombo dell'imposta *2A* e del dislivello *Aa*.

Per rendere un'idea giusta di queste differenze si traccia l'altezza *Aa* o *Ag* del dislivello *a* , quella della linea d'imposta *2A* , *b* , la loro differenza *d* ; è chiaro che la diagonale che parte dalla sommità *2* viene giù dal dislivello sempre per un'unica altezza *a+b* , questo è invariabile; ma quella dell'altra diagonale che parte dal punto *A* sarà variabile la riporto da *a* a *b* alla sua estremità opposta al punto *a* ; poiché quando *a* sarà più grande di *b* questa sarà discendente perché l'altezza totale *a+b= 2b+d* è diminuita di *b+d= a* , che per supposizione , è più grande di *b* ; ma se *a* è più piccolo di *b* questa diagonale sarà ascendente , perché l'altezza totale *a+b* , sarà allora uguale a *2a+d* non sarà diminuita che dell'altezza *a* che è minore di *b* per la seconda supposizione; sarà dunque *a+b* più grande di *a*, supposta.

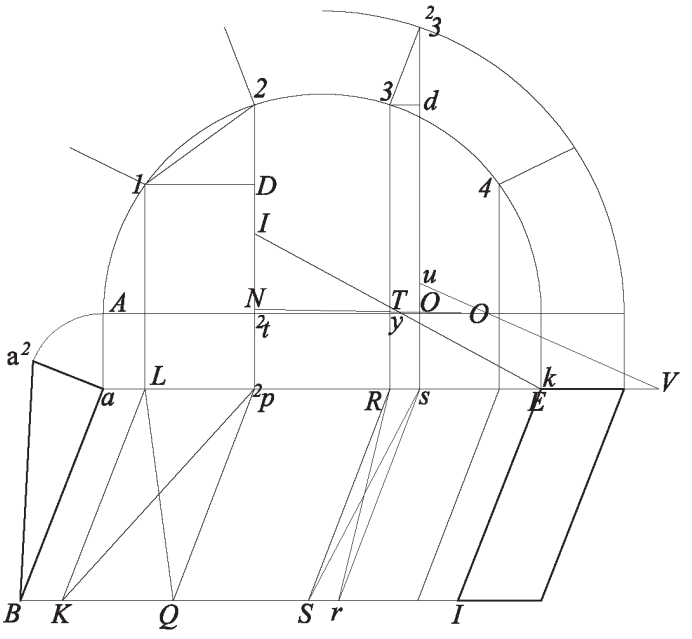


Fig. 293 Botte in discesa.

Sia ***(Fig.293)*** il piano orizzontale *Ba IE* della Botte in discesa , con la proiezione dei giunti di letto fatta , di solito tramite le linee a piombo abbassate delle divisioni dal suo centro *1,2,3,4* . Sia l'altezza del dislivello l'intervallo *Aa* per formare le dime dell'intradosso, per esempio del secondo concio *1 : 2* , dunque la proiezione orizzontale è il parallelogramma *KL ²pQ* , si dividerà in due triangoli con una diagonale *LQ* o *²pK* non importa quale , una è sufficiente ; noi ne mettiamo qui due per far vedere che è indifferente usare l'una o l'altra per trovare la giusta lunghezza.

Si comincerà a cercare il valore della proiezione del giunto di letto *KL* uguale a *Ba* , che è troppo corta , e si troverà in seguito la retta *aa²* , perpendicolare per *aB* e uguale all'altezza *Aa* , la retta *Ba²* sarà già un lato di uno dei triangoli che formeranno le diagonali *LQ* o *K²p* ; in seguito si cercherà il valore dell'altro lato *L²p* si farà lo stesso per *KQ* che è anche esso troppo corto , perché rappresenta la corda *1 2* che è inclinata all'orizzonte , e come questa corda è nella giusta misura all'elevazione , sarà il secondo lato di ciascuno di questi triangoli. Non resta altro che trovare il terzo che è il valore della diagonale, il quale non è un punto inclinato *a²B* , come noi l'abbiamo visto ; quello che viene dal punto *2* più alto che dal punto *1* , è più inclinato della retta *Ba²* , e l'altezza come noi vi abbiamo detto della forma della retta a piombo *2D* e del dislivello *²t²p= Aa* ; bisogna dunque portare l'altezza *2D* in *I²t* per avere questa somma *I²p* , e la lunghezza della diagonale *²pK* , in *²pk* e tracciare la retta *1k* che avrà la giusta misura.

Ma se si vuole avere il valore della diagonale *LQ* , che ha per origine il punto *1* proiettato in *L* , il quale è più basso del punto *2* , si potrà portare

la lunghezza *2D* da *²p* in *N* , per avere la differenza *N²t* della retta a piombo *2D* e del dislivello *²t ²p* , e portare la lunghezza della diagonale *LQ* da *²t* in *O* , la retta *NO* ipotenusa di questo triangolo rettangolo sarà il valore della retta *LQ*.

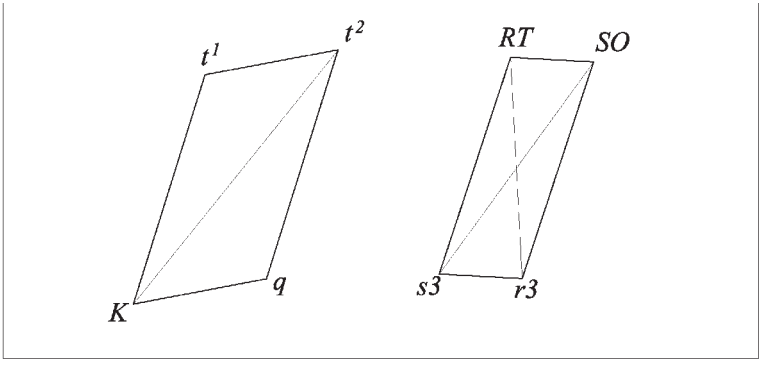
Si può evitare di fare una retta *1D* perpendicolare a *2D* , che dà la differenza *2D* delle altezze dei punti *1* e *2* , non si fa che prendere con il compasso l'altezza *1L* e portarla in *2N* , si avrà tutto in una volta la differenza *N²p= 2D* ; perché l'angolo *L²p* è retto , *1,2= LN* lato dello stesso parallelogramma e *1 D= L²p*, dunque *N²p= 2D*.

Con la stessa costruzione si troverà la dima del letto all'elevazione per il giunto di testa *3²3* , e al piano orizzontale per il parallelogramma *sRSr* , dal quale si tracceranno le diagonali *Rr* , o *Ss* , una delle due è sufficiente per dividerlo in due triangoli , e si avrà il valore con lo stesso metodo che si è spiegato per trovare quello dell'intradosso. Si esaminerà quella che viene dal punto più alto *²3* , che ha dato il punto *s* per la proiezione , da dove si concluderà che la diagonale *Ss* è la più grande ,che deve avere per altezza la forma della linea a piombo *²3d* , e dell'altezza *Os* del dislivello, e perché si porterà *3d* in *Ou* , la retta *su* sarà la lunghezza della diagonale *Ss* ; si porterà *Ss* in *sV* la retta *uV* avrà la giusta misura ; per la diagonale *Rr* , non si fa altro che portare l'altezza *²3d* in *RT* per avere la differenza *yT* con quella del dislivello *Os* , la quale differenza è qui pressochè insensibile la retta *Rr* è uguale alla grandezza della proiezione , c'è da dire , che questa diagonale è orizzontale nella dima di letto ; di conseguenza uguale alla proiezione *Rr.*

Si può qui come nell'articolo precedente trovare la differenza *²3d* tutto in una volta , si porterà la più piccola altezza della retta a piombo *3R* in *²3O* .

Fig. 295 Parallelogrammi che rappresentano le dime di letto.

Le lunghezze delle diagonali , sia della dell'intradosso che del letto , sono



note , si trasporteranno da parte , come in *K²t* ***(Fig.295)*** e dei punti *K* e *t²* come centri e per raggi gli intervalli *1 2* e *B*a² , della ***Fig.293*** , si faranno delle intersezioni di archi da una parte e dall'altra della diagonale *Kt²* che daranno i punti *t¹* e *q* , per i quali si tracceranno le rette *Kt¹* , *t² t¹, qt², qK* si avrà un parallelogramma uguale alla faccia dell'intradosso piatto.

Alla stessa maniera trasportare la lunghezza *Vu* in *sS* ***(Fig.295 a destra)*** si prenderà la lunghezza del giunto di testa *3²3* , e del giunto di letto *B*a , questi intervalli per raggi e punti *sS0* per centri , si faranno delle intersezioni di archi in *RT* e *r3* , che daranno i punti *RT* e *r3* , per i quali si tracceranno le rette *r3 S0, r3 s3, RT S0, RT s3* si avrà un parallelogramma che sarà uguale a quello della superficie della dima di letto.

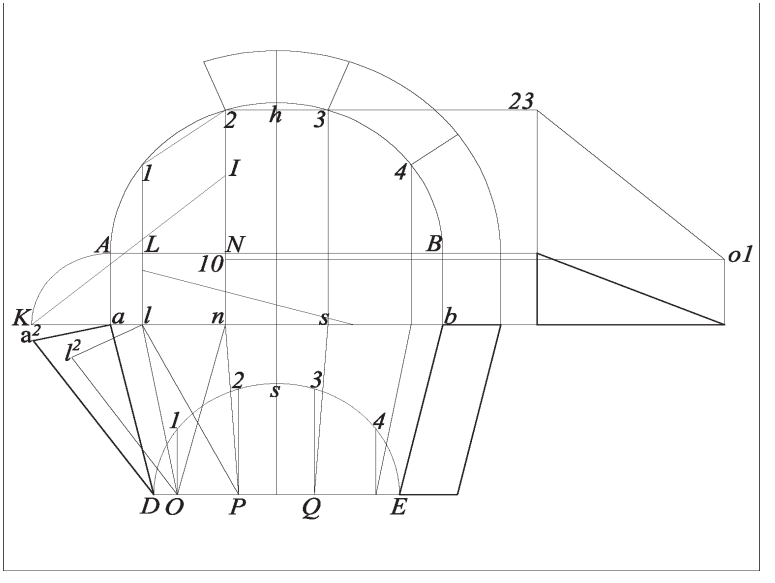
TERZO ESEMPIO DI UNA VOLTA A CANONNIERE IN DISCESA, CHE E' UNA CONICA SCALENA TRONCA

La differenza di questo esempio consiste 1° in quello che le proiezioni dei giunti di letto sono tutti diversi , e più corti dei giunti che sono inclinati all'orizzonte, bisogna trovare il valore di ciascuno in particolare per un profilo simile a quello dell'imposta *Da*a² , in elevazione una perpendicolare da una delle loro estremità uguale all'altezza del dislivello *a*a² ,nell'esempio precedente uno solo era sufficiente per tutti.

Secondariamente in questo le altezze si trovano diversamente ma si utilizza sempre lo stesso principio.

Fig. 297 Volta a cannoniere in discesa il cui dislivello è pari a *Aa.*

Sia dunque la ***(Fig.297)*** il piano orizzontale di una discesa a cannoniere

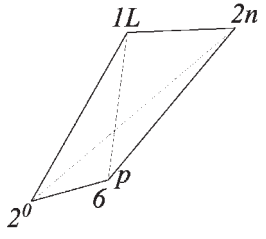


DabE ,con le proiezioni di tutti questi giunti di letto *Ol* , *Pn*, ecc. sia *Aa* l'altezza del dislivello *AhB* il centro della faccia posteriore strombata ; *DsE* quello della faccia anteriore , l'uno e l'altro divisi in un numero uguale di conci nei punti *1,2,3,4* dai quali si abbassano le rette a piombo *1L, 2N,* e *1O 2P*, le quali danno le proiezioni dei giunti di letto *lO* , *nP* , e i trapezi *DalO* , e *OlnP* per proiezione degli intradossi. Si divideranno

in triangoli tramite le diagonali *nO lP* [una sola è sufficiente] e si troverà il valore, poco più come nell'esempio precedente ,riguardo alla loro origine e al loro lato opposto per trovare con la loro metà la loro altezza al di sopra di un piano orizzontale la loro inclinazione e la loro lunghezza ; anche per avere la vera lunghezza della diagonale *nO*, che passa per il punto *n* alla più grande altezza della retta a piombo *2n* , e per il punto *O* , alla più piccola altezza della retta a piombo *10* della faccia anteriore. Si distinguerà il più piccolo dal più grande e la loro differenza sarà l'altezza di una delle estremità di questa diagonale al punto *n*. Non importa prendere questa differenza in alto o in basso ; si prende in basso portando *O1* da *n* in *10* ,si traccerà una orizzontale per questo punto *10* ; ma se si prende dall'alto si porta *O1* dal punto *2* al punto *I* la retta *ab* sarà l'orizzontale tutta tracciata ; finchè si porta la lunghezza della diagonale *nO* da *n* in *K* , e che si traccia la retta *KI* , questa retta avrà il valore della più grande diagonale rappresentata nel profilo dalla linea *23 o1* che è troppo corto per le ragioni di cui noi vi abbiamo dato parlando dei profili dei coni.

Fig. 298 Parallelogramma che rappresenta la dima dell'intradosso.

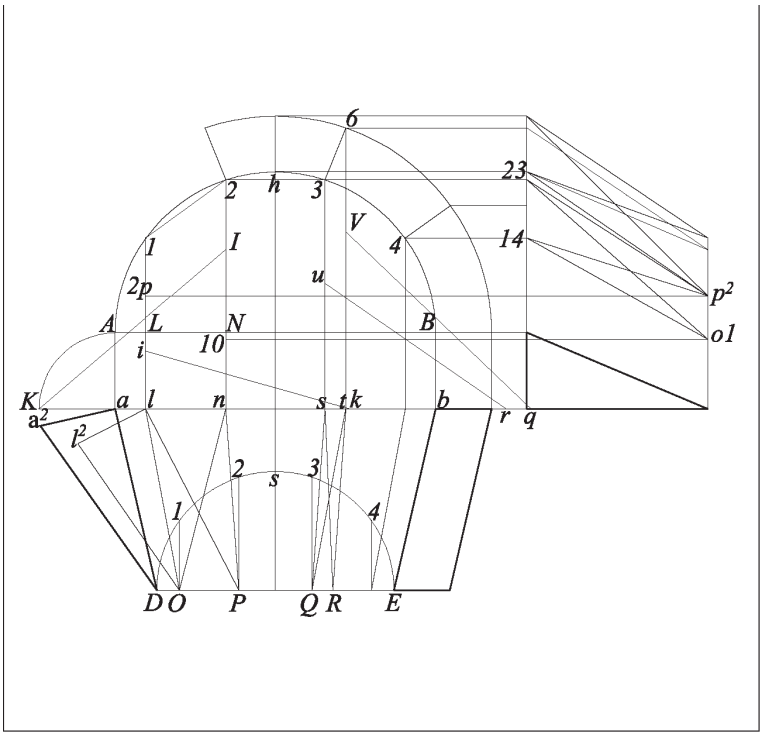
Questa retta *KI* può bastare per trovare la dima dell'intradosso dunque la proiezione è *OlnP* , la si trasporterà come la si vedrà nella ***Fig. 298***



in ²*n 2°* , poi dal punto ²*n* come centro e dall'intervallo della corda *1, 2* della ***Fig. 297*** come raggio , si otterrà un arco di cerchio *l5* , e dal punto *2°* e per raggio *l²O* valore del giunto di letto , di cui la proiezione è *lO* , che si sarà trovata in facendo *l l²* uguale a *lL*, e perpendicolare a *OI* ; si avrà il triangolo *2° 1L 2n* che sarà il valore di quello dell'intradosso *Oln* . Si traccerà nella stessa maniera il valore dell'altro triangolo *O P n* , dal centro *2°* per raggio l'intervallo della corda *1 2* dal centro *DsE* si traccia l'arco *6p²* , e dal punto ²*n* per centro e per raggio il valore di *Pn* che non si è messo in questa figura, si descriverà un altro arco che taglia il precedente in ²*p* , il triangolo *2° ²p ²n* sarà il valore di quello della proiezione *Opn*.

Fig. 297 Volta a cannoniere in discesa.

Al posto di prendere la diagonale *nO* si può prendere l'altra *lP* , l'altezza



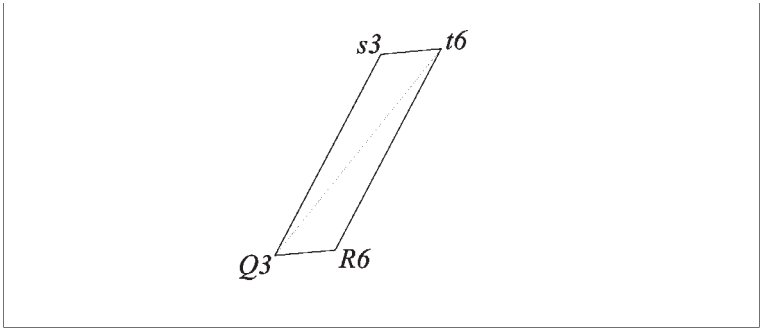
a piombo *2P* dal centro della faccia anteriore, portata a piombo per *1L* dall'altro centro *AhB* ci dà la proiezione del punto dall'estremità opposta di questa diagonale , e si avrà il punto *i* ; in seguito si riporterà la lunghezza *lP* da *l* in *k*, la retta *ik* darà la misura , espressa nel profilo dalla retta *14 p²*, che è troppo corta perché è un profilo di cono. Se si porta questa lunghezza *2P* dal basso in alto da *l* in *2p* , si avrà l'altezza dell'orizzontale *2P p²* che terminerà nel punto *p²* del profilo.

Bisogna sottolineare che le lunghezze delle diagonali trovate sono più grandi di quelle del profilo *14 p²* e *23 o1*; perché non sono parallele al piano verticale di questo profilo, con queste ci si ricollega alla proiezione verticale ; un tale profilo è inutile per le misure; non si fa che per indicare il rapporto delle rette cercate e per far vedere l'inclinazione e la posizione, affinchè si conoscano più facilmente le ragioni della costruzione.

Non è necessario spiegare la maniera di fare le dime di letto , si utilizza lo stesso metodo dell'intradosso si divide la proiezione *QRts* con delle diagonali , dunque si troveranno le lunghezze reali per la metà della loro altezza per l'orizzonte all'estremità alzata, la quale altezza sarà la differenza di quella delle linee di imposta , per esempio , dal giunto di testa *36* , che è *V t*, e si porta da *t* in *q* la lunghezza della proiezione della diagonale *tQ* , si avrà da questo valore la retta *Vq* , la stessa cosa per *ur* da cui si trova la retta *sR* della proiezione.

Fig. 299 Parallelogramma che rappresenta il letto del giunto *36.*

Queste diagonali disegnate da parte come la ***Fig.299*** , con i giunti di testa

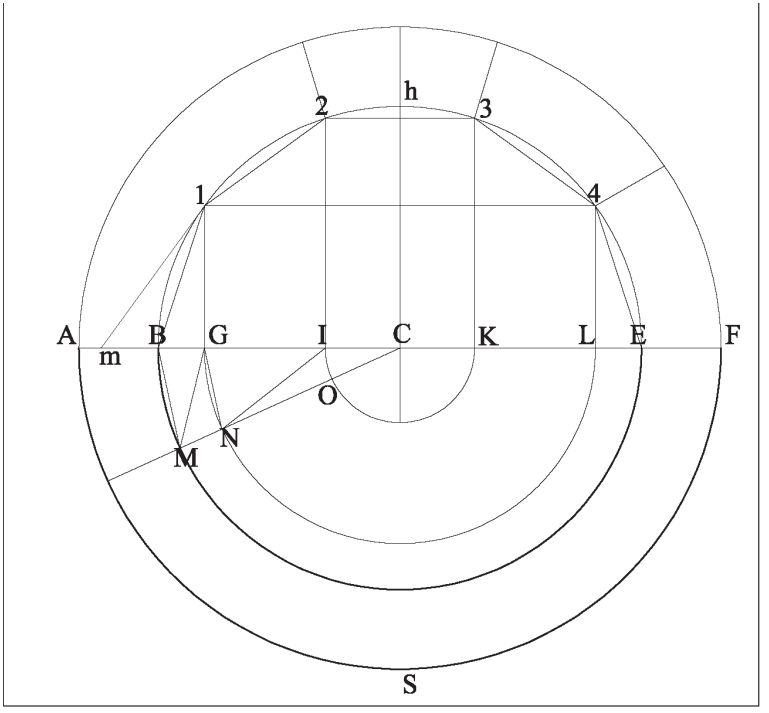


36 e il valore dei giunti di letto *sQ tR* , formeranno un parallelogramma *t6 ,R6 ,Q3 ,s3* , che sarà il letto del giunto *36* , con lo stesso metodo con cui si è trovato quello dell'intradosso nell'esempio precedente della ***Fig.293*** con questa sola differenza , che bisogna fare un profilo per ogni proiezione del giunto di letto *Qs Rt* ; perché queste rette sono la proiezione di rette diverse una sola ipotenusa non può servire per tutti i giunti di letto , come nella ***Fig.293*** , come vi abbiamo già sottolineato, ma che non abbiamo fatto nella ***Fig.297*** per evitare la molteplicità delle linee.

QUARTO ESEMPIO DI UNA VOLTA SFERICA RIDOTTA IN UN POLIEDRO DAGLI INTRADOSSI PIATTI

Fig. 300 Volta sferica ridotta in un poliedro dagli intradossi piatti.

Vi abbiamo fatto vedere , quando si parlava degli Svolgimenti , che la sfera può essere ridotta in porzioni di coni tronchi , e questi coni in piramidi tronche si potrebbe ritornare alla lettura dell'esempio precedente



; poiché si è supposto il semicerchio *BhE* ***(Fig.300)*** diviso in cinque parti nei punti *1,2,3,4* , da cui si tracceranno le corde *B1 , 1 2 , 2 3 , 3 4 , 4E* ci si potrà muovere in questo semicerchio attraverso il raggio *Ch* , le corde *B1 , 1 2* formeranno per la loro rivoluzione due coni tronchi , dunque la proiezione dell'asse del primo è il trapezio B1 *4E* , e il trapezio *1 4 3 2* quello del secondo , e se questi tre coni tronchi iscritti nella sfera sono ridotti in piramidi tronche , si ritorna al caso dell'esempio precedente, con la differenza che questa qui è più facile e più semplice ; affinchè queste piramidi siano perpendicolari per la loro base abbiamo supposto gli assi in situazione verticale ; nell'esempio precedente abbiamo supposto l'asse inclinato all'orizzonte.

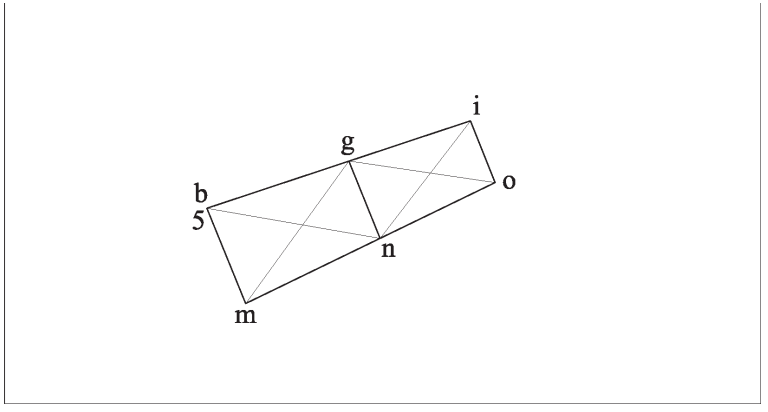
Sia tuttavia per una più ampia spiegazione della ***Fig.300*** il semicerchio *ACFS* la proiezione di una semisfera o di un quarto di sfera, i cerchi concentrici *BME, GNL* e *IOK* sono le proiezioni dei giunti di letto dell'intradosso ridotte in parti di coni tronchi , nei quali si iscriverà un poligono di un numero di lati uguale a quello della quantità che si deve mettere rispetto ad ogni fila di conci uguali o diversi , non importa ; la regolarità di questo poligono non è necessaria ; perché deve essere ridotto al cerchio come ultima operazione.

Sia per esempio , *BGMN* la proiezione di un intradosso di un concio della prima fila , divisa con la diagonale *GM* in due triangoli , si cercherà la

vera lunghezza di questa diagonale, che è più corta della retta inclinata rappresentata. Si porterà come nell'esempio precedente la lunghezza *GM* in *Gm* per l'orizzontale *AF* al piede dell'altezza a piombo *1G* , la retta *m1* sarà la lunghezza reale dunque *MG* è la rappresentazione . Si può dunque formare un trapezio *b g n m* (***Fig.302)*** che sarà uguale a quello dell'intradosso piatto dunque la proiezione è *BGNM* ***(Fig.300)*** perché si hanno tutti i lati di due triangoli diversi i quali sono stati divisi dalla diagonale *GM* ; per i lati uguali *BG* e *MN* sono date nella proiezione dalla loro lunghezza naturale , perché queste corde sono quelle dei cerchi dei giunti di letto che si sono supposti orizzontali; di conseguenza paralleli e uguali a quelli del piano orizzontale della proiezione , dove sono riuniti.

Fig. 302

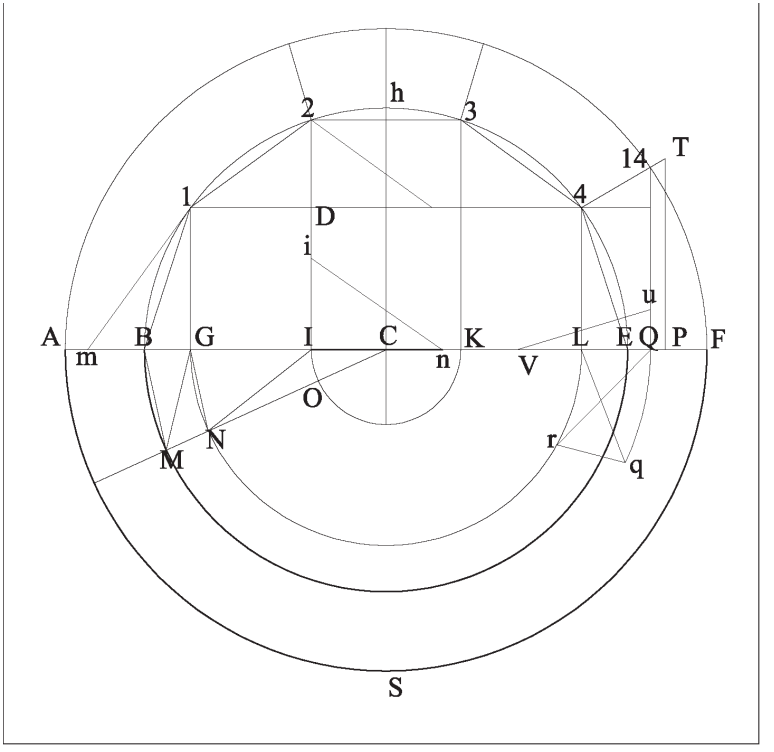
Dopo aver portato la lunghezza della retta *m1* della ***Fig.300*** da parte come in *gm* ***(Fig.302)*** dal punto *g* per centro e dall'intervallo della corda *GN* della ***Fig.300*** si farà un arco di cerchio verso *n* , e dal punto *m* per



centro e dall'intervallo della corda *B1* di elevazione per il raggio si farà un altro arco di cerchio *n1* , che intersecherà il precedente nel punto *n* , per il quale si tracciano le rette *ng* , *nm* si avrà il più piccolo dei due triangoli *gnm* della divisione del trapezio dalla diagonale *MG* . La stessa corda *B1* sarà il raggio di un arco *b5* fatto dal centro *g* e la corda *MB* della ***Fig.300*** sarà il raggio di un altro arco fatto dal punto *m* per centro, il quale arco intersecherà il precedente *b5* nel punto *b* , che sarà il vertice del secondo e più grande triangolo *mbg*.

Fig. 300 Volta sferica ridotta in un poliedro dagli intadossi piatti.

Si troverà la superficie dell'intradosso di un concio della prima fila, dunque la proiezione orizzontale è il trapezio *GION* , si porta *IN* in *In* per l'orizzontale *AF* e l'altezza della linea d'imposta *2D* in *iI*, la retta *in* sarà la lunghezza reale , dunque la diagonale *IN* è la proiezione; il trapezio



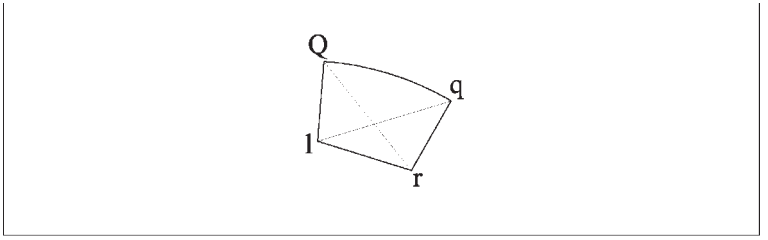
GION diventerà più allungato come si è visto nella ***Fig.302*** in *gion*.

Con lo stesso metodo si troveranno le superfici dei letti che si possono anche ridurre a dei trapezi rettilinei, se si vuole tracciare una tangente *pt* dell'arco *Qq* , che è la proiezione del giunto di letto dell'estradosso di un concio , dunque la proiezione sarà la porzione di corona del cerchio *LQqr* ; ma questa circoscrizione è inutile per l'esecuzione; è sufficiente che la dima di letto sia rettilinea per tre lati *QL* , *Lr* , *rq* , poiché il suo quarto lato *qtQ* è una porzione di cerchio, non esiste alcuna difficoltà per l'uso del taglio delle pietre.

Fatta la proiezione del letto dunque la retta *4 14* di altezza rappresenta esattamente la larghezza e l'inclinazione , si prende con il compasso la lunghezza a piombo *4L* che si porterà per il più grande *14 Q* in *14 u* , e si prenderà la lunghezza *Qr* della diagonale che si sarà tracciata nella proiezione da *Q* in *V* , la retta *Vu* sarà la giusta lunghezza , la quale messa da parte ***(Fig.301)*** servirà da base per formare i due triangoli del trapezio che esprime la superficie del letto , dunque tutti i lati sono dati .

Fig 301

I lati *QL* e *rq* sono uguali al giunto di testa *4 14* , il lato *rl* uguale al lato *Lr* della proiezione orizzontale , e il lato *Qq* uguale pure a quello della proiezione, fatto questo si prende per la corda il suo arco , tramite questo



si circoscrive l'arco , fatto questo si prende dalla tangente, o dall'arco stesso , che è facile da tracciare dal primo colpo , in seguito per il lato *Ql* prolungare la lunghezza del raggio *FC* , e allora al posto di un trapezio rettangolo si avrà un trapezoide misto *l r q Q*.

DIMOSTRAZIONE

La costruzione di questo problema e le spiegazioni che noi vi abbiamo dato portano alla loro dimostrazione.

Principalmente è chiaro che tutte le figure rettilinee possono essere ridotte in triangoli, e che le curvilinee possono essere ridotte in rettilinee per l'iscrizione o la circoscrizione, per la metà di questi si può, o almeno per approssimazione, conoscere i loro eccessi e i loro difetti ; ma serve sempre esattamente per la pratica.

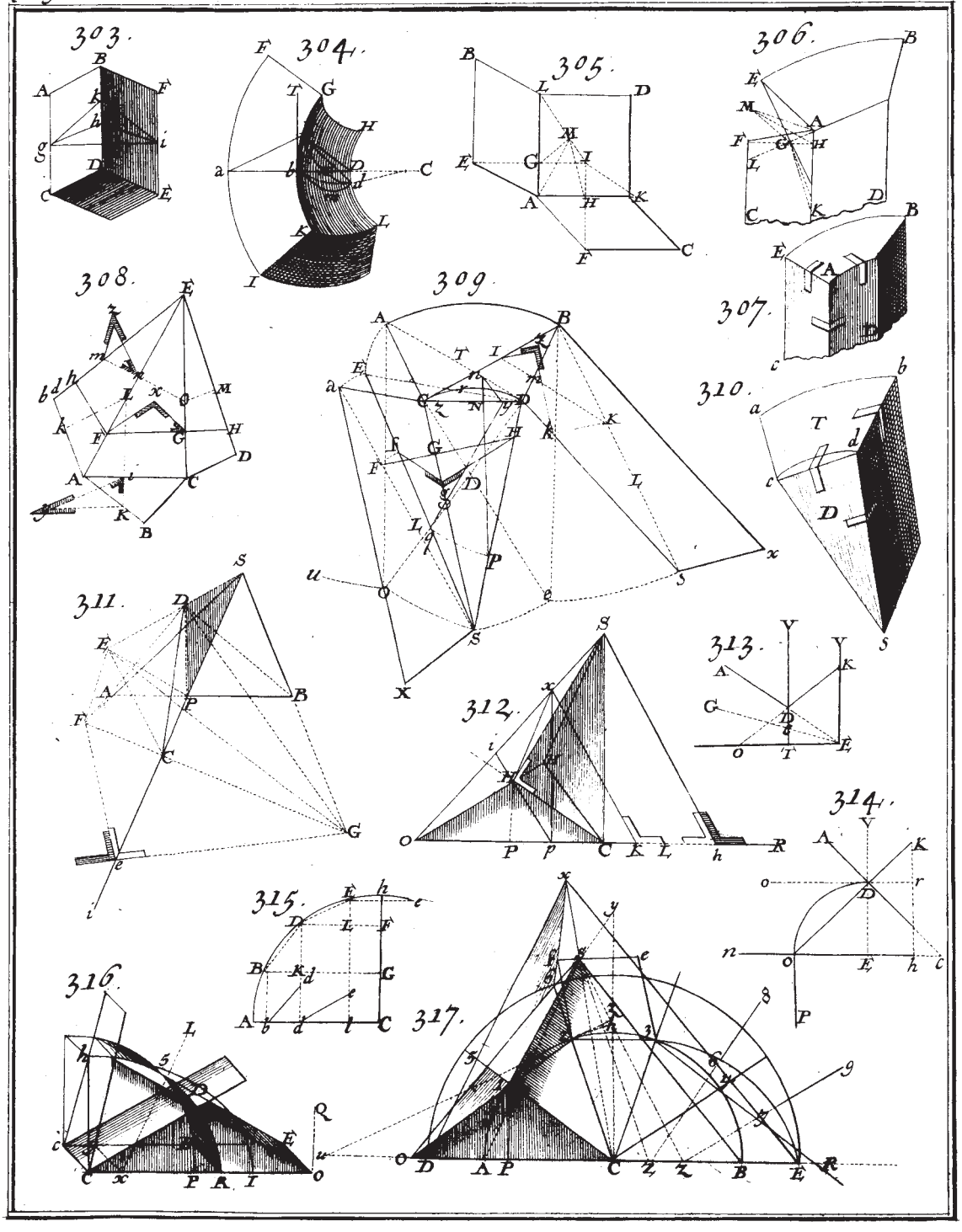
Secondariamente non è meno chiaro che trovare l'altezza delle rette inclinate per un piano orizzontale, per il quale la proiezione le ha raccorciate, non si fa che decomporre questa proiezione; si rimettono i lati e gli angoli del solido nella situazione dove erano prima della proiezione, e è chiaro che si trovano con questo metodo le giuste lunghezze. Si avranno i tre lati di un triangolo è chiaro che saranno gli angoli di un trapezio o dell'altra faccia che si vedrà, dunque egli è diviso; poiché uno degli angoli diventa uno di quelli della figura quadrilinea o del poligono composto per ripetizione, come avviene per i parallelogrammi , o per la congiunzione con quello di un altro triangolo messo di seguito, giacchè tutto è uguale nelle stesse parti ; dunque questo metodo è applicabile a tutte le superfici piane ; ma come le curve possono ancora essere inscritte nei poliedri , come noi vi abbiamo spiegato nella sfera , bisogna che questo metodo sia universale , e che sia ben composto si può applicare, e trovare quindi per il suo centro tutte le superfici dunque i solidi sono inviluppati questo è quello che si è proposto nel problema.

SPECIFICAZIONE PER LA PRATICA

Non solamente questo problema può servire a trovare le dime dei letti e degli intradossi piatti ma ancora quelle dei letti e degli intradossi o teste sinistre, si scrivono le loro proiezioni nei triangoli , come si è visto in *St. Giles e aux Arrieres-Vouffures*; comunque si può sempre far passare una superficie piana per tre punti. Di conseguenza come la divisione degli intradossi danno la figure quadrilinee che saranno divise in due, dalle diagonali , per ridurle in triangoli, si arriverà ancora a trovare l'inclinazione dei piani di questi due triangoli che avranno tra di loro, supponendo che la quadrilinea sia sinistra questa seconda operazione è obbligatoria , lo si può mettere tra i metodi più comodi e più abbreviativi , che noi vi diremo nel quarto libro, il quale si utilizzerà nei disegni tracciati delle volte dei letti o dei paramenti dell'intradosso o della testa sinistra è sufficiente conoscere un metodo generale e fondamentale non resta altro che trovare gli angoli dei piani che terminano e chiudono i solidi.

page 381

Planche 26.



CAPITOLO V

Della Goniografia, o Descrizione degli Angoli.

I Termini d' Arte.

I modi di trovare le Biveaux

E' inutile cercare gli angoli che sono in una figura solida fra le sue superfici, poiché il loro assemblaggio nell'ordine in cui devono essere, forma un solido di una figura determinata, per cui gli angoli non possono variare senza che venga a variare qualche sua superficie; occorre considerare qui che il nostro obiettivo non è di unire le superfici per creare un solido; ma di dividere un solido in parti con superfici uguali a quelle che abbiano trovato nelle Regole precedenti e nei Problemi precedenti, ritagliando di nuovo da una grossa massa tutto l'eccesso di cui si supera quello che si era proposto di fare. Per cui bisogna abbattere, tagliare e scavare successivamente una superficie mediante la sua contigua che deve determinare la posizione che non dia l'inclinazione che deve avere senza conoscere gli angoli dei loro piani, per approfondire più o meno il posto del modello che dobbiamo applicare, che regola gli angoli dei loro lati e per trovare attraverso i loro punti quelli di una terza, quarta e quinta superficie, di cui loro sono i termini.
La seconda ragione che ci obbliga a ricercare gli angoli dei piani, è che non sappiamo i modelli delle facce che compongono la curvatura. Ci si può dispensare da ciò, quando ci troviamo con più angoli quando si arriva allo spigolo. Se ci si attiva di operare con la sintesi si fanno raramente questi estradossi.
Noi crediamo che sia necessario spiegare qui circa gli angoli e i piani; la sesta definizione dell'undicesimo *Libro di Euclide*[1] ci insegna, che l'angolo che incontra più piani che si tagliano e si misurano attraverso linee diritte, perpendicolare alla loro comune sezione, sono uniti allo stesso punto; la ragione ci fa sentire che il mezzo più semplice per conoscere la loro inclinazione; tuttavia questa regola è il fondamento dell'uso che si deve fare degli strumenti propri a copiare e a trasferire gli angoli che si chiamano con l'appellativo di *Beuveaux* , o *Biveaux*, dal latino *Bivium*, una doppia strada, e non sarà inutile fare una proposizione generale, applicabile alle superfici curve dei corpi regolari.
Occorre notare che non si devono confondere gli *Angoli dei Piani* dagli *Angoli Piani*; perché gli angoli di inclinazione dei piani siano nei piani che sono loro perpendicolari, noi intendiamo per la parola *Angolo piano*, quello vicino a uno spazio piano, e per *Angolo dei piani*, quello delle due superfici.

[1] Rif. all'undicesimo *Libro di Euclide.*

P R E M E S S A

L'Angolo d'Inclinazione di due Superfici qualunque, Piani di Curvatura, misurate per le linee oblique alla loro comune sezione, è più acuto di quello che misurano le loro Perpendicolari su queste alla comune sezione, al medesimo punto.

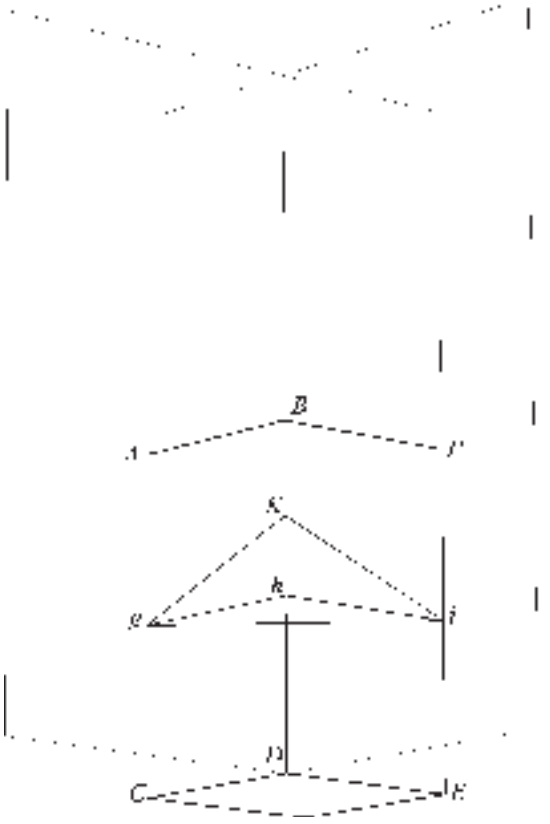


Fig. 303 L'angolo d'inclinazione di due superfici qualunque, misurate per le linee oblique alla loro comune sezione, è più acuto di quello che misurano le loro perpendicolari su queste alla comune sezione.

Date due superfici piane ABCD, BFED, che sono inclinate tra loro di cui la comune sezione è la linea destra BD; se da un punto h preso su questa linea si tirano due perpendicolari, g*h* attraverso il piano, e *ih* attraverso l'altro e che un altro punto K preso sulla stessa linea, si tirino *g* e *i* le linee

K*g* K*i*; io dico che l'angolo *ghi* è più grande dell'angolo *g*K*i*.
D I M O S T R A Z I O N E

A causa degli angoli Destri o perpendicolari in *h*, le linee K*i* e K*g*, che sono dell'ipotenuse dei triangoli rettangoli *ih*K e *gh*K sono più grandi che i lati *gh* e *hi*; dunque se si applica sullo stesso piano i due angoli *g*K*i* e *ghi*, che sono qui tra differenti piani, la sommità *h* cadrà al di sotto della cima K, e se si tira una linea *gi* per base comune di questi due triangoli *ghi*, *g*K*i*; si riscontrerà (per la 21° proposizione del *Primo Libro di Euclide*[2]) che l'angolo *g*K*i* è più acuto che l'angolo *ghi*, come voletesi dimostrare primariamente per le sezioni delle superfici piane.

SECONDARIAMENTE se le superfici sono l'una piana e l'altra curva o tonda due curve regolari della sfera, conica o cilindrica, sarà anche vero che le linee curve che passano da un piano perpendicolare alla comune sezione, cioè a dire, ad una tangente della curva formata con questa sezione, saranno più curve che quelle che partono da questo punto di unione.
Dato per esempio una porzione di Zona della sfera K*b*GH*d*L, che tagliata per il piano IFGK ,come è l'incontro di una superficie concava con il suo letto di posa. E' chiaro che per il punto *b* della comune sezione dello spazio curvo e piano, porta la tangente *b*T, e con se stesso la perpendicolare *ba* e *bd*, per cui l'una *ba* sia nel piano di posa, e l'altro *bd* sia la corda dell'arco *bmd* porzione della sfera, e il piano che passerà attraverso *bmd* e attraverso il centro della sfera, e se l'uno prende l'altro punto comune E nella sezione di posa e della superfice curva, e l'altro tira E*d*, il piano che passerà attraverso E*d* non attraverserà assolutamente dal centro della sfera. Ora attraverso il cerchio, di tutte le linee che sono tirate da un punto lontano dal centro alla circonferenza più corta e quelle che essendo prolungate passano per il centro ugualmente, attraverso la sfera l'arco più corto tra due cerchi paralleli è quello del cerchio maggiore, per cui il piano passa attraverso il piano della sfera, e i poli di questi cerchi, cioè a dire, che cadono perpendicolare all'angolo del loro piano.
PER concepire queste verità sia prolungata le linee destra *ab* in C, poiché è perpendicolare alla tangente *b*T, essa passerà attraverso il centro C della sezione circolare K*b*G e se dal punto *d*,che io suppongo alla superficie della sfera, si tira su la linea *ab*C , la perpendicolare *d*D uguale all'altezza del punto *d* sul piano FGKI della sezione piana della sfera, e del punto D una linea al punto E. E' chiaro (per la riga 15 del III *L. di Euclide*[3]) la linea D*b*, che passa per il centro C sarà più corta che DE, che è nello stesso piano e non passa assolutamente attraverso il centro. Si formeranno dunque due triangoli rettangoli perpendicolari al piano della sezione, vale a dire bdD, EdD, che hanno come lato comune dD, e dato che il lato ED è più grande di *db* l'ipotenusa *d*E sarà anche più grande di *db*; dunque l'angolo *abd* sarà più grande che *a*ED (per l'articolo precedente) ora l'arco *bmd* essendo in un piano perpendicolare al piano FGKI, sezione della sfera, e passante attraverso il suo centro passerà anche attraverso il suo Polo e sarà porzione di un cerchio maggiore, il quale sarà più piccolo che quello del cerchio minore E*nd*, come noi lo dimostreremo al quarto Libro; dunque l'angolo misto *abmd* è più grande dell'angolo mBb*d*End, *come volevasi dimostrare*.

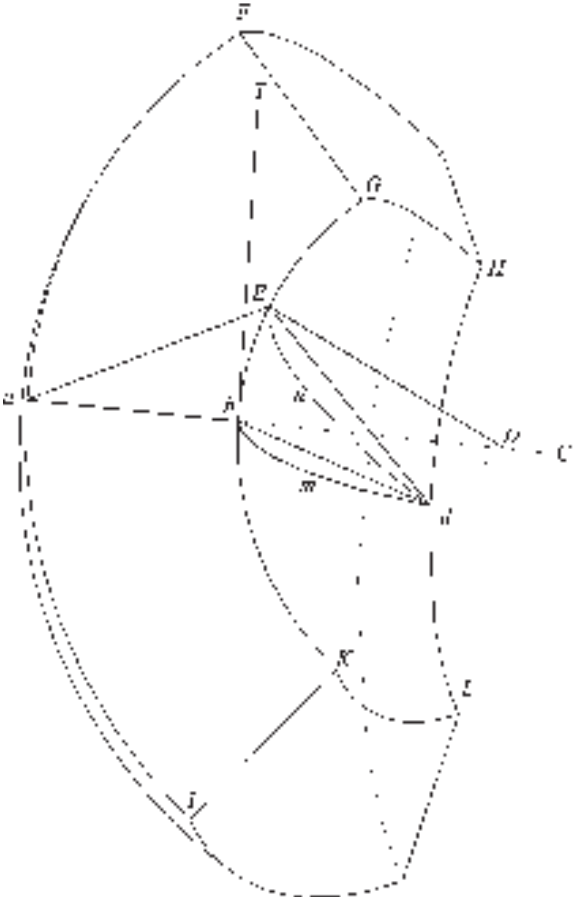


Fig. 304. L'angolo d'inclinazione di due piani di curvatura,misurate per le linee oblique alla loro comune sezione, è più acuto di quello che misurano le loro perpendicolari su queste alla comune sezione.

TALE dimostrazione si potrà applicare alle altre sezioni coniche, dove è dimostrato *de maximis et minimis*, che la perpendicolare al punto di incontro di una tangente è la più corta di tutte quelle che si possono tirare da un punto, per cui una tale linea è un *minimum*.
Da qui si può inserire che non soltanto agli angoli misti, ma anche di curvilinei, formati tra l'unione di due facce curve occorre misurare l'apertura delle branchie delle sagome di un qualunque angolo perpendicolarmente alla tangente comune all'uno e all'altro.

[2] Rif. a *Euclide*, op.cit.
[3] Rif. a *Euclide*, op.cit.

C O R O L L A R I O

DA ciò deriva che l'arte di formare le sagome dell'aperture di angoli qualsiasi, come modello di angoli di spazi che si incontrano, consiste di trovare una sottintesa alle perpendicolari condotte su ogni spazio alla linea perpendicolare o curva della loro intersezione, cosa che è agevole attraverso gli angoli sporgenti, che per mezzo di qualche strumento si prolunghino queste perpendicolari, per mezzo di qualche regola o corda tirata.

LO STRUMENTO proprio a quest'uso è composto da due branchie mobili, che sono unite alla sua estremità attraverso un perno e una cerniera, affinché essi siano per tenerli immobili; si chiama *Sauterelle* o *Fausse Equerre* o *Compas d'Apareilleur,*come si vedrà nella prima Planche del quarto Libro[4]; ma perché si ha bisogno di prendere degli angoli misti o curvilinei, che assieme a questo strumento non si può prendere gli angoli rettilinei e si è obbligati a fare un altro strumento per ogni angolo di questa sfera che si chiama *Beveau* o piuttosto *Biveau.*

SICCOME esistono più difficoltà a formare degli angoli misti o curvilinei che dei rettilinei,che sono determinati per la conoscenza dei loro Sinus o semi, o dei loro fondamenti, occorre sempre cominciare per gli angoli rettilinei delle superfici piane come sono le superfici piane che passano per le corde degli archi di una doele.

P roblema X I I.

Dati tre Angoli Piani che formano un Angolo Solido trovare gli Angoli d' Inclinazione di questi piani.

Quali i termini d'arte per la Coupe des Pierres.

Date tre sagome trovare glia cngoli che formano e i loro assemblaggi.

Si può risolvere questo Problema in maniera meccanica, unendo cioè i tre angoli alle sagome, proposto fino a che sormonti l'angolo solido, prendendo con la falsasquadra o *"recipiangle"* gli angoli dei piani, osservando che bisogna che i rami della falsasquadra siano posati sopra le linee perpendicolari alla intersezione dei piani, se è in linea destra o alla sua tangente in un punto dove si misura l'angolo, questo è perché bisogna servirsi di una squadra per collocare un lato sull'intersezione e usare l'altro a regolare la posizione della branca della falsasquadra su ogni superficie.

[4]Rif. al quarto Libro del presente trattato.

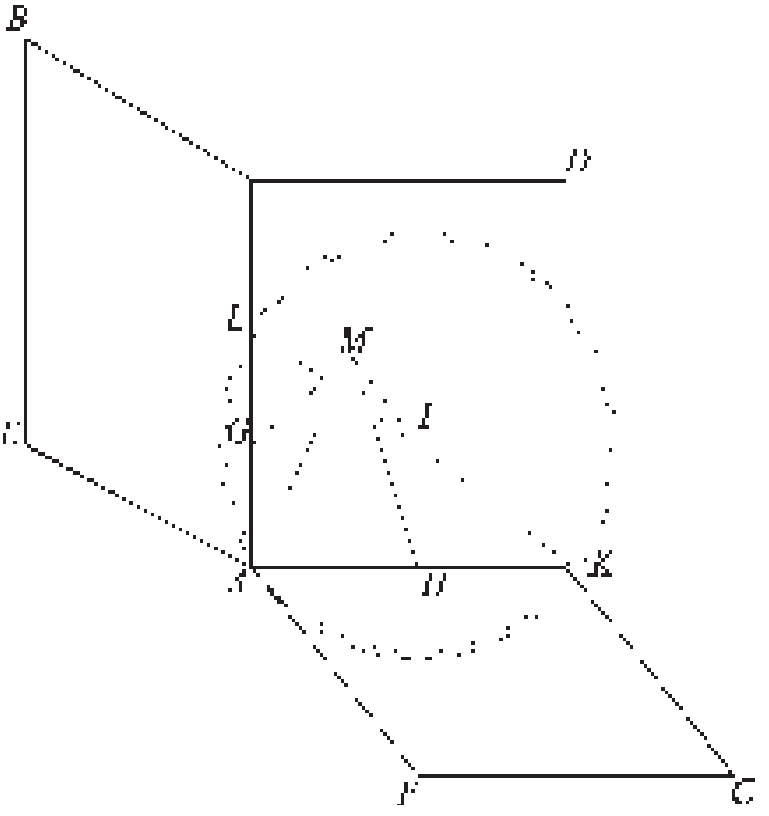


Fig. 305 Dati tre Angolo Piani che formano un Angolo Solido trovare gli Angoli d'Iclinazione di questi piani.

MA queste operazioni non sono buone e valide per tutte le Opere, in quanto lo spirito (anima) non trova la stessa soddisfazione che nella Geometria, né la stessa sicurezza e comodità.

SIANO dunque (***Fig. 305***) i tre piani AB,AC,AD,che occorre unire in modo che faccino un angolo solido in A. Occorre trovare l'angolo di inclinazione del piano AD con il piano AC, e quello dello stesso piano AB.
Si tracci sopra una stessa superficie piana i tre angoli piani che devono formare il solido, in maniera che siano contigui per il lato AL e AK. Due punti E e F presi sugli altri lati a piacere o a distanza uguale dal punto A, si tirerà sul lato AL e AK, prolungare le perpendicolari EG e FH fino al punto di incontro I, come centro, e con apertura HF per raggio, si traccerà un arco in K, che taglierà in questo punto K il lato AH prolungato; io

dico che per il punto I e K nella stessa linea IK , l'angolo HIK sarà uguale a quello dell'inclinazione dei piani AC, AD tra loro.
Ugualmente che se dal punto I come centro, e con apertura GE, si fa un arco di cerchio che taglia AG prolungato in L e da li se si tira la linea IL, l'angolo LIG sarà uguale a quello dell'inclinazione reciproca dei piani AB, AD.

D I M O S T R A Z I O N E

SUPPONIAMO che i piani AC AB si muovono attorno alla linea AK, AL come una cerniera,fino a che le linee AF, AE si uniscano in una sola che sarà in aria una che noi rappresentiamo nella figura con una linea AM, il

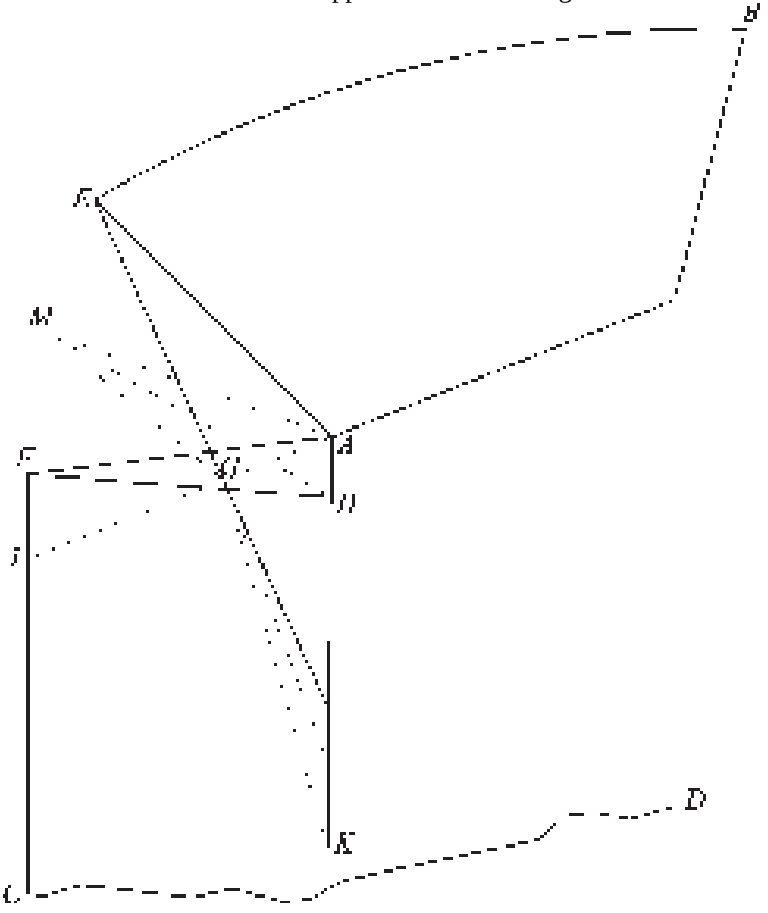


Fig. 306 Applicazione pratica del problema di ***Fig. 305*** ad un mattone per volte a botte.

piano AD resta immobile e le linee MG,MH che saranno perpendicolari alle intersezioni AL AK saranno le stesse avanti a EG e HF; si traccia infine la linea MI.

DOPO che la linea LG (***Fig. 305***) o LG (***Fig. 306***) è perpendicolare alla linea GM che è in aria e GI che è sul piano, ella sarà perpendicolare al piano del triangolo MGI (per la 4° del II d'*Euclide*[5]) e si dimostrerà nella stessa maniera che il piano del Triangolo MIH è perpendicolare al piano AD, da cui deriva (per la 19° del II d'*Euclide*[6]) che la linea MI sarà perpendicolare al piano AD che il triangolo MIH sarà rettangolo in

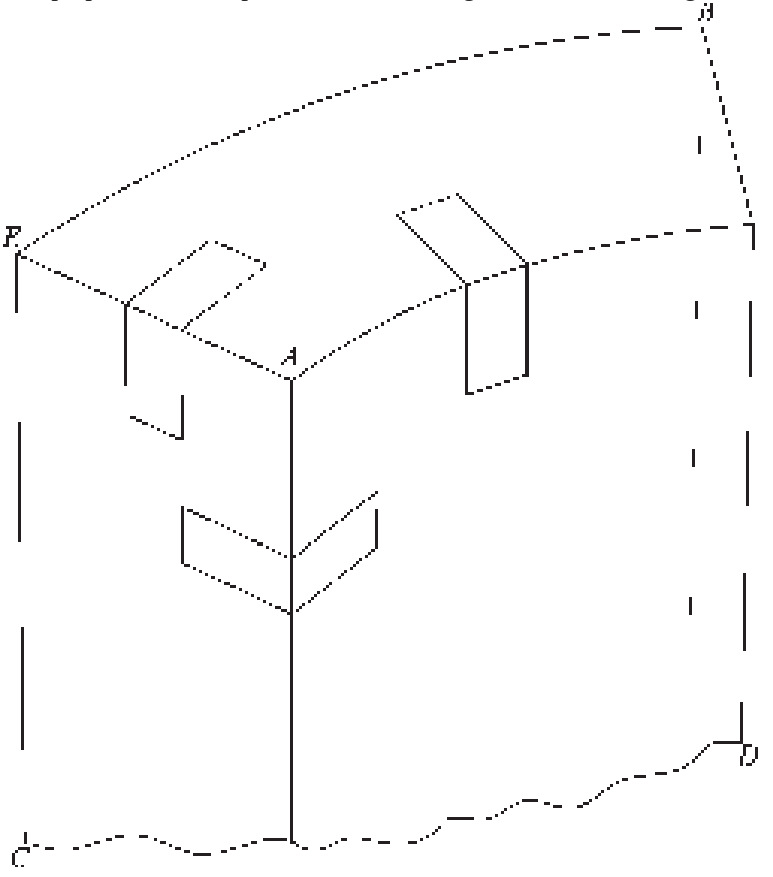


Fig. 307 Applicazione pratica di ***Fig. 305*** ad un mattone per volte a botte rappresentato la prospettiva.

I perno non è nella figura e non può rappresentare esattamente perché la linea IM è in aria fuori dal piano della carta.

[5] Rif. al *Secondo Libro di Euclide.*
[6] Rif. al *Secondo Libro di Euclide.*

Dunque l'angolo MHI è quello dell'inclinazione dei piani AD AC, al quale l'angolo HIK è stato fatto uguale per costruzione; giacchè si è fatto HI perpendicolare su AK per avere un angolo destro in H e HK=HF=IM; dunque i triangoli MIH e IHK sono uguali in tutto poiché essi sono rettangoli l'uno in H, e l'altro in I, perché il lato IH è comune ai due e che HK è uguale a IM; dunque l'angolo MHI è uguale a l'angolo HIK, cioè a dire a quello dell'inclinazione dei piani AD AC, *come volevasi dimostrare.*

SI dimostrerà ugualmente che l'angolo GIL è uguale all'angolo MGI che è quello dell'inclinazione dei piani AB, AD. Le stesse lettere servono a indicare le linee della ***Fig. 306*** sono a vedere l'applicazione di questo problema ad un mattone per volte a botte , ripetuto alla ***Fig. 307*** con ombre per meglio esprimere la figura.

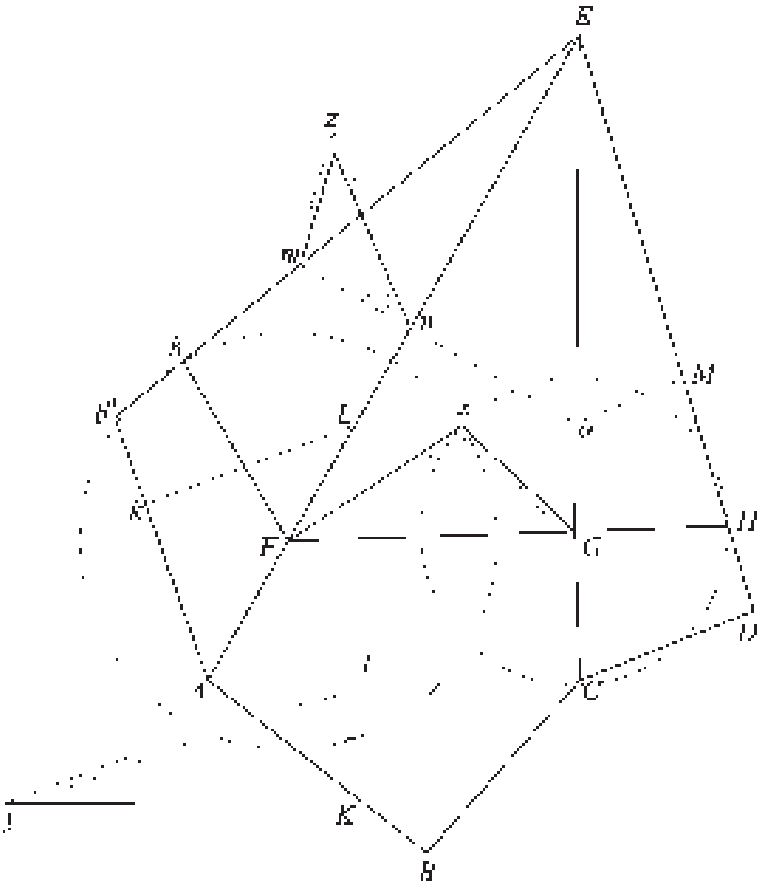
Occorre sottolineare che può accadere che al punto I cada vicino al piano AD, questo non cambia in nulla la dimostrazione come si può vedere dalla ***Fig. 306***.

Seconda maniera di ridurre i piani in triangoli per formare delle piramidi

La maniera precedente di risolvere il Problema è la più semplice perché essa non suppone che degli angoli piani, ancorché nella figura siano definiti dei parallelogrammi. Si deve rimarcare che noi non abbiamo fatto attenzione che ad uno dei loro angoli. Questo non suppone che niente più che le basi , ma si fa un po' differentemente senza l'aiuto di triangoli rettangoli, di cui la somma dell'angolo destro cade vicino ai lati degli angoli affacciati (dati), ma cercando le basi triangolari delle Piramidi. Questo è perché noi rappresentiamo qui quattro triangoli poi le quattro superfici che sono attorno.

DATI i tre triangoli ABC, AEC, EDC, che sono avanti della superfice di una Piramide triangolare, i quali uniti insieme formano un angolo acuto in C. Occorre per trovare gli angoli che questi piani formano fra loro, cominciare a cercare il quarto triangolo, che è la base o una superficie della Piramide, il cui triangolo è formato dai lati di ciascun dei tre altri appoggiati alla sommità di C, tali sono in quanto esempio BA,AE,ED dai quali si formerà un triangolo AEb^d, che rigenera infine AEC per lo stesso piano.

QUESTO prepararsi è stato fatto per uso di sviluppo per poter cercare gli angoli di tali piani quando si vuole. Supponiamo che ci si domandi per primo quello che i piani AEC,CED sono tra loro. Si prenda un punto



G a caso sul lato comune EC, per il quale si tirerà una perpendicolare FH, che toccherà AE in F, e ED in H. Si porterà la distanza EH di E in h

sul lato Eb^d, e dopo aver tirato *h*F, FG,GH, con le quali si farà un triangolo,
che avrà FG per base. Dal punto F come centro e apertura F*h* per raggio si farà un arco verso *x*, e dal punto G come centro e GH per raggio si farà un altro arco verso *x*, che taglierà il precedente al punto *x*, e l'angolo FG*x* sarà quello dei piani AEC,CED.

ORA se si vuole trovare l'angolo dei piani AEC, ACB, si prenderà sul lato comune AC un punto i a caso per il quale si tirerà su AC la perpendicolare KL. Si porterà la distanza AK su AB, e A*k* su Ab^d , e dopo si tirerà *k*L. Si formerà un triangolo con tre linee K*i*, *i*L L*k*, e l'angolo *yi*K, sarà

quello cercato.
Si vede che per trovare il terzo angolo dei piani AEC, e AE*b*[d], occorre tracciare sul lato comune AE una perpendicolare *mo*, fare EM uguale a E*m*, e un triangolo *mnz* con le tre linee *mn*, *no*, *o*M l'angolo *mnz* sarà quello cercato.

Applicazione pratica

Sebbene le sagome triangolari non sono comuni in un *Coupe de Pierre*, questi si trovano all'inizio degli spigoli e alle *doeles des Trompes*. Ma poiché gli angoli troppo acuti si annullano facilmente si smussano per scavare la punta del cono in una sola pietra che riunisca tutti gli angoli delle sagome delle superfici curve triangolari, che si riducono per questo motivo a dei trapezi, ma quello che non si fa nell'opera lo si deve fare nel disegno, perché quando si taglia una delle sagome triangolare, l'operazione è più semplice e più facile che si cerchi per prima un trapezio.

DATO per esempio un mattone per volta (pietra) a forma conica, e che lo si voglia disegnare con delle ombre alla ***Fig. 310***[7] per cui siano dati il lato di Testa T, la superfice piana D, ed i lati L e L, si cerchino gli

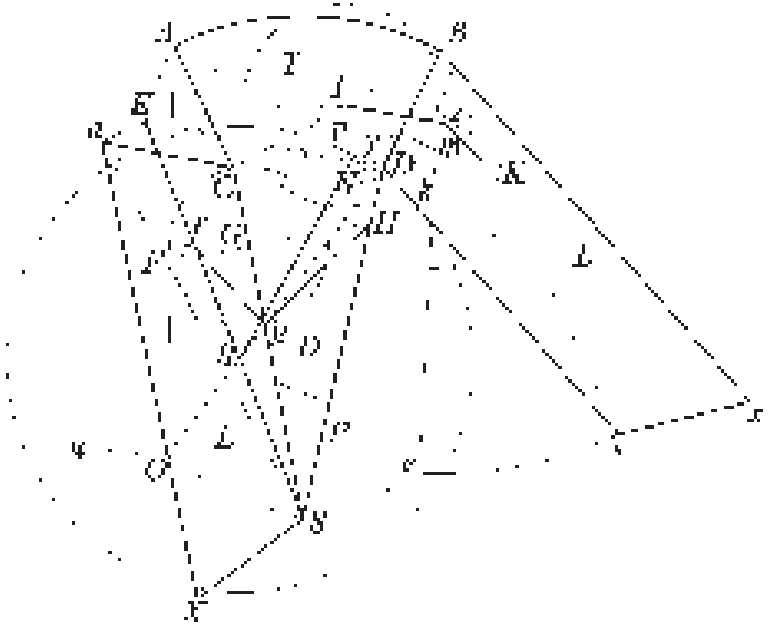


Fig. 309 Applicazione pratica del problema di ***Fig. 308*** ad un mattone per volta conica.

angoli che si formano tra loro al fine di poter prendere delle aperture con la *fausse equerre*, e servirsene per tagliare la pietra che bisogna tagliare

[7] In riferimento al testo e alla ***Fig. 309*** le lettere che erano minuscole nel disegno sono state riportate maiuscole.

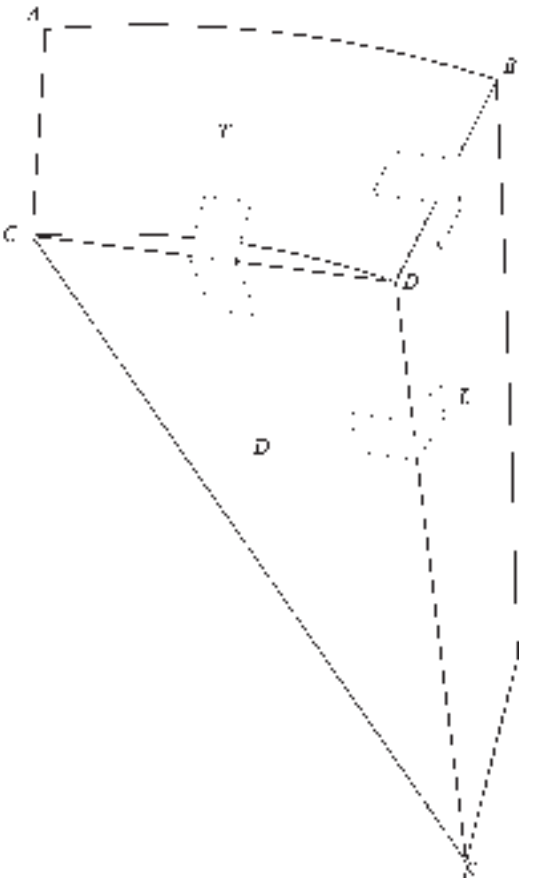


Fig. 310 Applicazione pratica del problema di ***Fig. 308*** ad un mattone per volta conica disegnato in prospettiva.

o eliminare per applicare i tagli ottenuti.

SI inizierà a ridurre in triangoli tutte le figure delle sagome del tronco di cono, che sono diverse, quelle di fronte è triangolare, quella di lato un trapezio rettilineo, e quello della testa un trapezoide misto.
Prima di sistemare le sagome in modo che questi non trovino i le sagome
dell'aperture di angoli qualsiasi aventi un lato comune, si dividerà in triangoli per la diagonale come quello della testa ABDC attraverso le linee AD, BC, quello del lato CSX, BD*sx*,per le linee S, B*s*.

SUPPONIAMO ora che si cerchi le sagome dell'aperture di angoli qualsiasi , si prenderà sul lato comune CS un punto G a caso, per il quale punto si tirerà la perpendicolare FH, e dal punto S, come centro e apertura S*a* per raggio, si farà un arco *a*E, e dal punto D, come centro e apertura DA per raggio, si descriverà un altro arco AE, che toccherà il precedente al punto E, da dove si tirerà al punto S la linea ES.

SUCCESSIVAMENTE dallo stesso punto S come centro, e apertura SF per raggio, si traccerà un arco F*f*, che taglierà la linea ES al punto *f*, dal quale come centro e apertura FG, si traccerà un arco verso *g*, e dal punto H per il centro della lunghezza HG per il raggio, se ne scriverà un altro che taglierà il precedente al punto *g*, le linee *gf* e *g*H formeranno l'angolo della sagoma dell'apertura di un angolo qualsiasi cercato *fg*H.
SUPPONIAMO che si chieda poi la sagoma dell'apertura di un angolo qualsiasi dell'area CDS e della testata CABD, avendo tirato per il punto N sul lato comune CD, una perpendicolare P*n*, si opererà come vogliamo fare.
Dal punto D per il centro DS attraverso il raggio si traccerà un arco SO, per il punto P ed un altro P*q*, e dopo dal punto A come centro, e diagonale *a*S per il raggio e si scriverà un arco *u*O, che incontrerà il precedente punto O, da dove si tirerà il punto D la linea OD, che incontrerà al punto *q* l'arco P*q*. Se dal punto q per il centro e apertura PN per raggio, si fa un arco verso *y*,e dal punto *n* per centro e apertura N*n* se ne farà un altro che interseca il precedente nel punto *y*, le linee *ny* e *qy* tracciate al punto *y* daranno l'apertura dell'angolo dei piani di testa e della superficie piana che passa per la corda dell'arco di una doele.

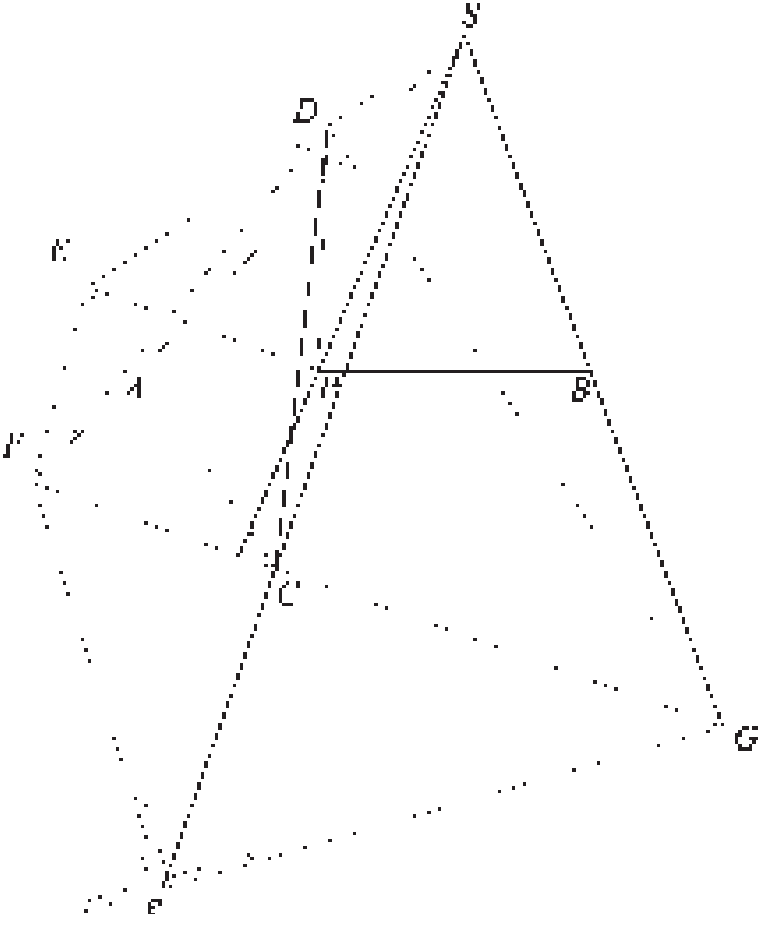
INFINE, se si domanda la sagoma dell'apertura di un angolo qualsiasi di testa e di coda, avendo assemblate le due superfici ACDB e *xs*DB sulle giunture di testa BD in uno stesso piano, si traccerà per un punto m preso a piacere su questo lato comune, la perpendicolare *i*K, e dal punto B per il centro, la diagonale B*s* per il raggio e si farà un arco *se*, e dal punto C per il centro, e l'intervallo CS per il raggio si disegnerà un altro che incontrerà il precedente al punto *e*, da cui si tirerà una linea *e*B, e dopo dal punto B per il centro e l'intervallo BK dove la linea IK taglia la diagonale B*s* e si farà un arco K*k*, che avrà su B*e* il punto K da cui per il centro ed il raggio *m*K si traccerà un arco verso *z*, e dal punto i verso il centro dell'intervallo I*m* se ne traccerà un altro, che incontrerà in *z*, e si tracceranno le linee I*z*, *kz*, e l'angolo *izk* , sarà la sagoma dell'apertura di un angolo qualuinque di testa, *come volevasi dimostrare*.

Problema XIII

Due angoli retti ASB, DSP *perpendicolari tra loro, che hanno la loro sommità* S *comune e un lato dell'uno* SP *nel piano dell'altro* ASB *trovare l'angolo dei due piani che possono passare per i loro lati* AS,OS *e* BS,DS.

SIA (Fig.311) dato un triangolo ASB, nel piano del quale c'è la linea PS, sezione di un altro triangolo PSD che gli è perpendicolare, e che è

rappresentato in prospettiva, e per cui è in aria su PS avendo fatto



PE perpendicolare a PS e uguale a PD, e tirata la linea SE, si farà EC perpendicolare a ES che taglierà SP prolungato in C, e da C si traccerà FG perpendicolare a SC che incontrerà SA prolungato in F e SB in G. Su portera l'allungamento CE a C*e* per SC prolungata, si tireranno le linee F*e* G*e*. L'angolo F*e*G è quello che si cerca.

Fig. 311 Due angoli retti perpendicolari tra loro, che hanno la loro sommità comune e un lato dell'uno nel piano dell'altro trovare l'angolo dei due piani che possono passare per i loro lati.

DIMOSTRAZIONE

Per la costruzione, i triangoli FC*e*, GC*e* che sono nei piani FSG sono uguali ai due FCD e GCD, che sono in aria in un piano perpendicolare al piano CDS (per la 4° del II di *Euclide*[8]) a causa di GC, che anche perpendicolare a CS,CD o CE, e pare che la linea CE è perpendicolare a ES, non c'è differenza , poiché è rappresentato in aria, CD a DS, essa è la comune sezione del piano. Ora dato che SC è perpendicolare a FG e SD
a DC (per la 4° del II d'*Euclide* e la II del II[9]) e per conseguenza lo è a tutti quelli che sono nello stesso piano passante al punto D e per conseguenza a DF eDG, (per la definizione 6° del II d'*Euclide*[10]), dunque l'angolo FDG è quello dei piani dove sono uguali F e G che , è quello che *volevamo dimostrare.*

COROLLARIO

Da là si ricava il modo di trovare l'angolo di un piano inclinato con una verticale per cui alla proiezione su un lato dell'angolo orizzontale e la più grande altezza dell'inclinato, dove l'angolo della sua inclinazione con la verticale è il lato dell'orizzontale; poiché questo caso non è che la metà del precedente. Io voglio dire così che in luogo di cercare l'angolo dei piani FDS, GDS, e si cerchi quello del piano inclinato GDS, con la verticale PDS, al quale caso è visibile che l'angolo cercato è l'angolo G*e*C.

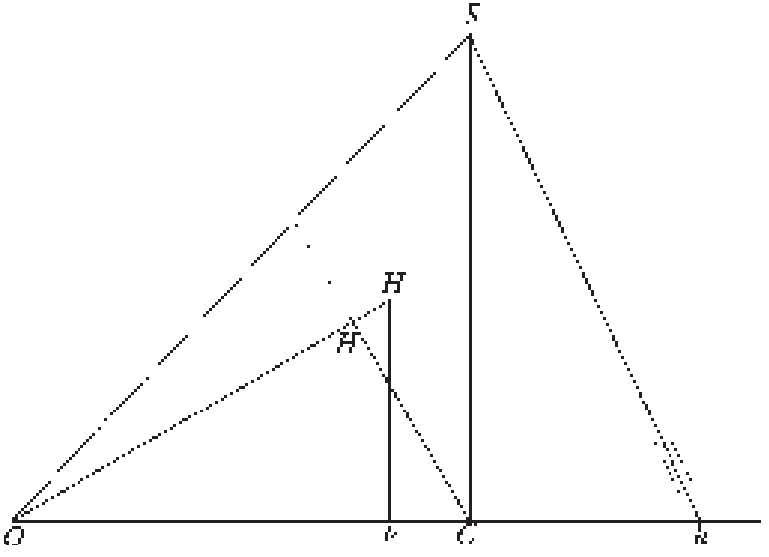


Fig. 312 Due angoli retti perpendicolari tra loro, che hanno la loro sommità comune e un lato dell'uno nel piano dell'altro trovare l'angolo dei due piani che possono passare

DATO, per esempio, la linea OS per sezione di un piano inclinato e la linea O*h* come sezione del piano con una verticale OH*p* per cui la base O*p* e nello stesso piano OS si domanda l'angolo di questo piano inclinato. Dal punto H preso a volontà nella linea di intersezione OH si traccia perpendicolare HC, da incontrarsi l'orizzontale O*p*, prolungato in C, attraverso il quale si tirerà su OC la perpendicolare CS, che taglierà OS al punto S. Si porterà la lunghezza CH in Ch, su OC prolungati, e si tirerà S*h*; l'angolo S*h*C è quello che cercavamo, come è evidente; da qui che viene dimostrando la precedente figura, e prendendo il punto O di questa figura per il punto S della precedente, e il punto S di questa figura come il punto G dell'altra.

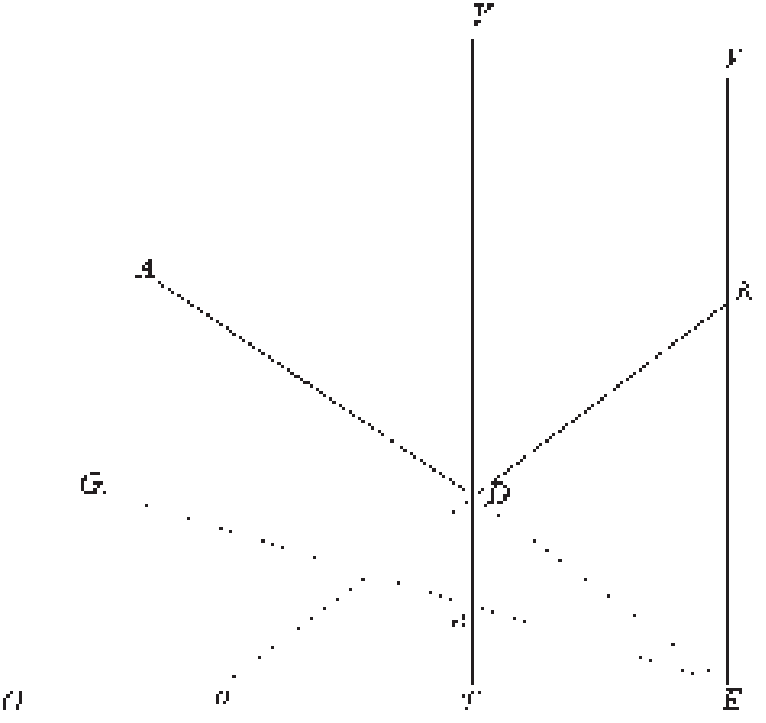


Fig. 313 Un angolo retto è uguale alla somma degli angoli che i suoi lati prolungati formano con una linea orizzontale o verticale.

Della posizione degli angoli dei piani rispetto

[8] Rif ad *Euclide*, Op. cit.
[9] Rif ad *Euclide*, Op. cit.
[10] Rif ad *Euclide*, Op. cit.

all'orizzonte .

PREMESSA

Un angolo retto, in una posizione qualsiasi è uguale alla somma degli angoli che i suoi lati prolungati formano con una linea orizzontale, o una verticale.

DATE (***Fig. 313***) due linee AD,DK, che si incontrano in D, o G*e*, *e*V, e se si tira per E l'orizzonte EO[11] e una verticale VE, io dico che l'angolo ADK è uguale alla somma degli angoli AEK, formato dal lato AD prolungato, e l'angolo DKE.
La dimostrazione si presenta guardando solo la figura, dove vediamo che l'angolo ADK è esterno riguardando il triangolo DKE;dunque è uguale ai due interni opposti. Ugualmente G*e*T riguardando il triangolo *e*ET.
Per la stessa ragione l'angolo ADK è uguale al suo supplemento di due destre di angoli che i suoi lati prolungati formano con l'orizzontale EO, l'angolo ADK è uguale al suo opposto *o*DE, che è il supplemento di due destre di angoli all'orizzonte E*o*D *o*ED.

COROLLARIO

Da ciò sia che l'angolo che fa un punto di incastro AD con una superfice
piana che passa per la corda dell'arco di una doele *o*D è il supplemento a due destre di angoli, che la superfice curva e le unioni prolungate al di là della loro sommità sono con una linea perpendicolare VT, e che lo stesso angolo AD*o* della superficie curva e della punta di testa è uguale alla somma dei due angoli DE*o* D*o*E, che i suoi lati prolungati sono con una linea orizzontale.
Bisogna ancora dire che l'angolo di una superficie piana che passa per la corda dell'arco di una doele con l'orizzonte crea facilmente l'angolo di tale superfice curva avrà un appiombo o perpendicolo; si avrà un angolo perpendicolare *hop*, e un altro ottuso D*op* uguale al suo alterno *o*DV dell'appiombo o perpendicolo, avrà la superficie curva della perpendicolare con la figura perché la verticale EV è parallela a *op*. E al contrario se si ha l'angolo oDE perpendicolare alla superfice curva, si avrà l'angolo *o*D*r*=D*on* della superficie curva con l'orizzonte.

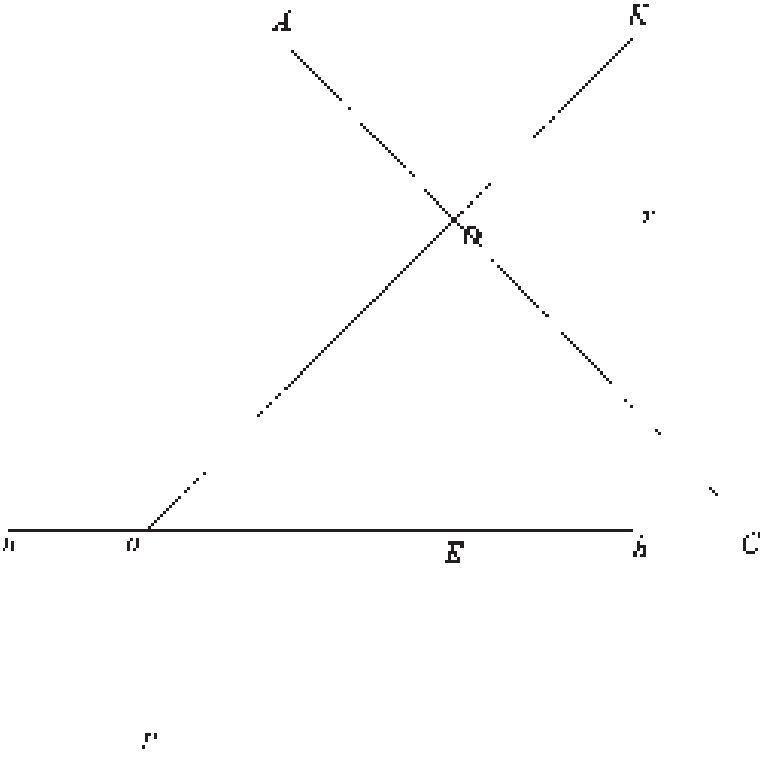


Fig. 314 Un angolo retto di una superfice piana con l'orizzonte crea un angolo a perpendicolo.

Nota dell'uso

Gli angoli delle superfici curve con le verticali o con le linee di livello

[11] In riferimento al testo, nella Fig. 313 è stata inserita la lettera O originariamente mancante.

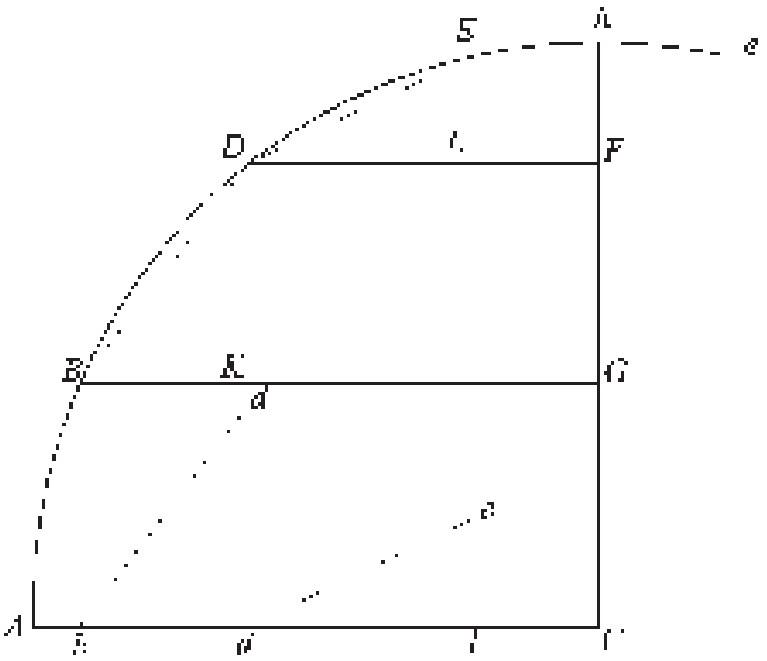


Fig. 315 Un angolo retto di una superficie piana con le verticali o linee di livello.

particolarmente queste ultime, facilitano molto le operazioni dei tratti perché un solo piano orizzontale AC è equivalente ai diversi BG,DF,E*e*, che sono loro necessariamente paralleli.
Non è così uguale nei piani verticali che possono essere cambiati differentemente gli uni a Mezzogiorni e gli altri al Levante. Così il piano orizzontale di cui la linea AC è il profilo, serve per regolare l'inclinazione

delle giunture di testa e delle superfici curve come le sue parallele BG,DF.
Rapportare le loro parti con delle verticali come LF in *l*C, KG in *d*C. Questo serve a trasportare gli angoli delle superfici curve di differenti conci (pietre) con l'orizzonte come EDF,DBG e facendo ed parallelo a ED e *d*B parallelo a DB. Ma a causa che i piani verticali *h*C, E*l* e c. possono avere direzioni variabili, noi ne facciamo a meno dell'uso degli orizzontali, come verrà per le pratiche seguenti.
Applicazioni delle preposizioni precedenti alla Costruzione delle Volte,per trovare le sagome dell'aperture di angoli qualsiasi di Superfici dei Conci supposti Piani come di una superficie pian che passa per la corda dell'arco di una doele con i suoi letti di posa, o della stessa superfice curva con le sue Teste (Cime).
Il modo più semplice di trovare gli angoli dei piani inclinati tra loro è di considerarli come taglianti un piano orizzontale o un piano verticale vero o supposto perché nelle opere di architettura non c'è punto di regola di condotta più sicuro che quello del perpendicolo, che dà la posizione verticale a quella del livello che da la posizione orizzontale.
In primo luogo se una volta è conica come un *Trompe droite*, per cui l'asse è di livello e visibile che il suo piano BSA può essere preso per uno orizzontale nel quale c'è un punto S, che è la cima del cono, o della totalità delle superfici del *Trompe*; tanto le superfici curve, letti di posa, devono passare.

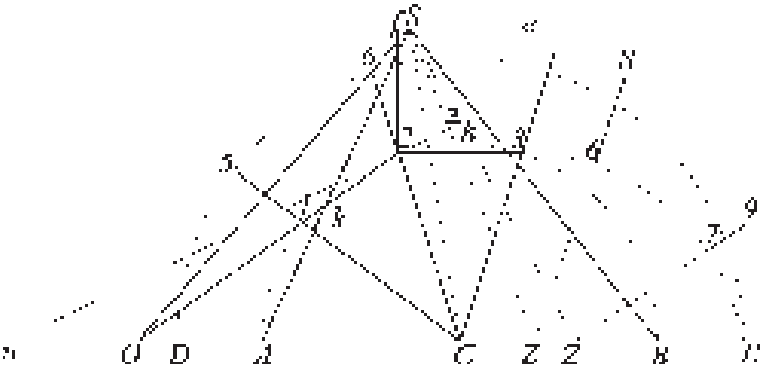


Fig. 317 Applicazione pratica delle preposizioni precedenti alla Costruzione di una Volta conica come un Trompe droite per trovare la comune sezione.

In secondo luogo se la base B*h*A è circolare, tutti i piani dei lati che passano per la giunzione di testa 51, 62, si incontrano anche al punto C, ugualmente come al punto S; nell'asse che è orizzontale CS.
In terzo luogo se la corda della doele perpendicolare 21 è prolungata fino a che incontri l'orizzontale BA in O, il lato piatto che passerà per questa corda per il punto S taglierà il piano orizzontale seguendo la linea SO.

Da qui si deduce che la corda 21 essendo un po' inclinata sull'orizzontale BA darà un punto O fuori dal piano del disegno che sarà incomodo. Tale sarà per esempio 2*k* e più ancora 2*h* se il concio sia stretto, vicino alla chiave, si può per comodità, in mezzo alla sezione orizzontale, cercare quella che si forma con un piano verticale C*h* senza nulla cambiare al fondo della costruzione; dopochè a metà dell'angolo 2*u*C si avrà solo il suo complemento 2*z*C.
Infine se la corda della superfice curva diventa orizzontale come quella della chiave 23, perché essa deve passare come tutte le altre tra la sommità S, è chiaro che tirando per questo punto S una linea *fe* parallela a BA, si avrà la sezione di questa superfice curva con l'orizzonte.
Io dico che l'asse sarà la sezione comune di tutti i lati posti all'orizzonte, e l'arco a tutto sesto è circolare, ma se è ellittico i punti di testa 86 97

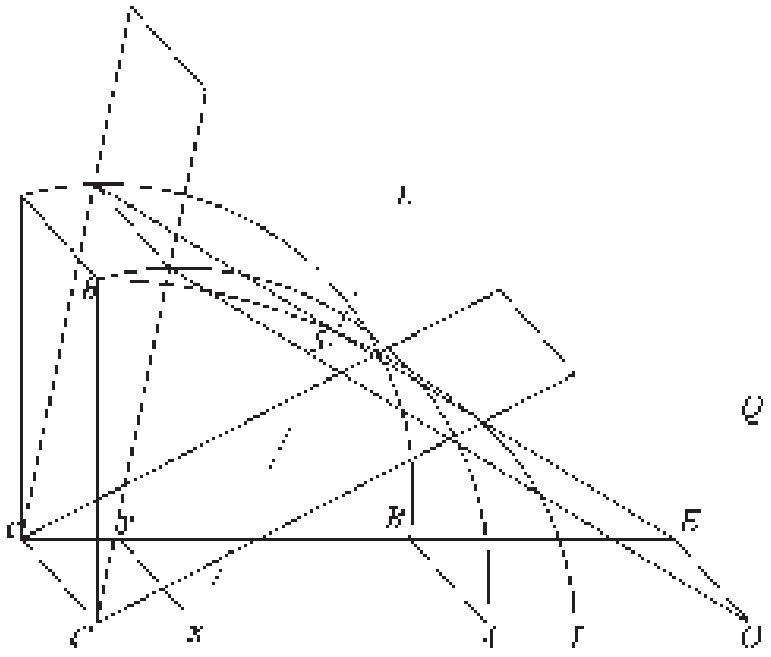


Fig. 316 Applicazione pratica delle preposizioni precedenti alla costruzione di una volta a botte inclinata a piombo, o superficie piana di una data pendenza.

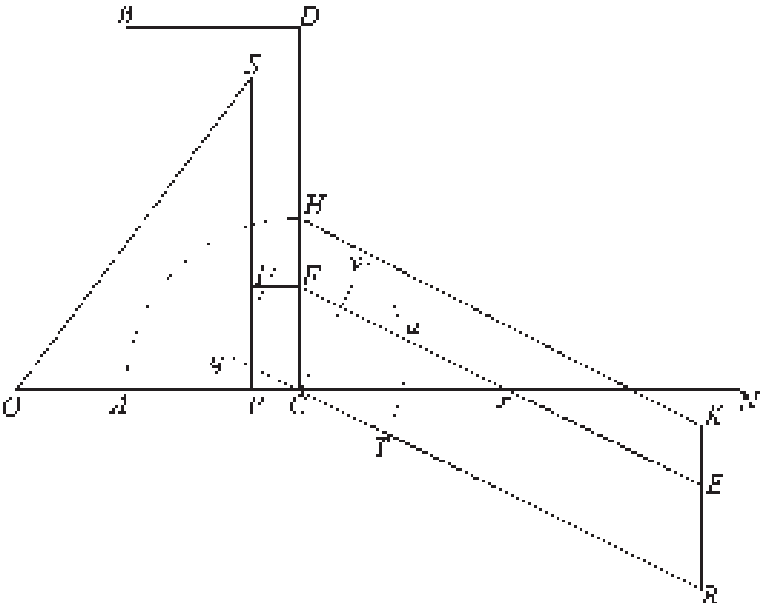


Fig. 318 Applicazione delle preposizioni precedenti alla Costruzione di una volta a botte per trovare la sezione di una superfice piana di una volta a botte in discesa con l'orizzonte.

perpendicolari a questa curva 67E, e le loro sezioni non saranno mai rigate. Questo perché i punti di testa uniti e prolungati incontreranno l'orizzontale BA ai punti zz, come i lati di posa passeranno per il punto S, le sezioni dei lati con l'orizzonte saranno le linee *z*,S,*z*1.

Ora se si cerca la sezione delle superfici piane che passano per le corde degli archi di una doele di una volta a botte, si vede che se questa volta a botte è perpendicolare, si tracceranno delle perpendicolari portate alla linea di faccia come la linea OQ su OC; Ma se la volta a botte è smussata la sezione di ogni superfice curva con l'orizzonte sarà parallela al piedritto o spalla, tale è OE a riguardo del piedritto AB.

Quanto alla sezione dei lati con l'orizzonte si farà come per i coni, se il centro è circolare, essi si riuniranno all'asse C*c*, se il centro è Ellittico questi saranno dei paralleli all'asse come *xy*, provenienti dalla unione L5, prolungata in *x* per l'arco Ellittico, *h*5I.

Al riguardo delle superfici curve che passano per le corde degli archi di una doele dette chiavi, è visibile che esse non possono tagliare l'orizzonte che esse sono con lui parallele.

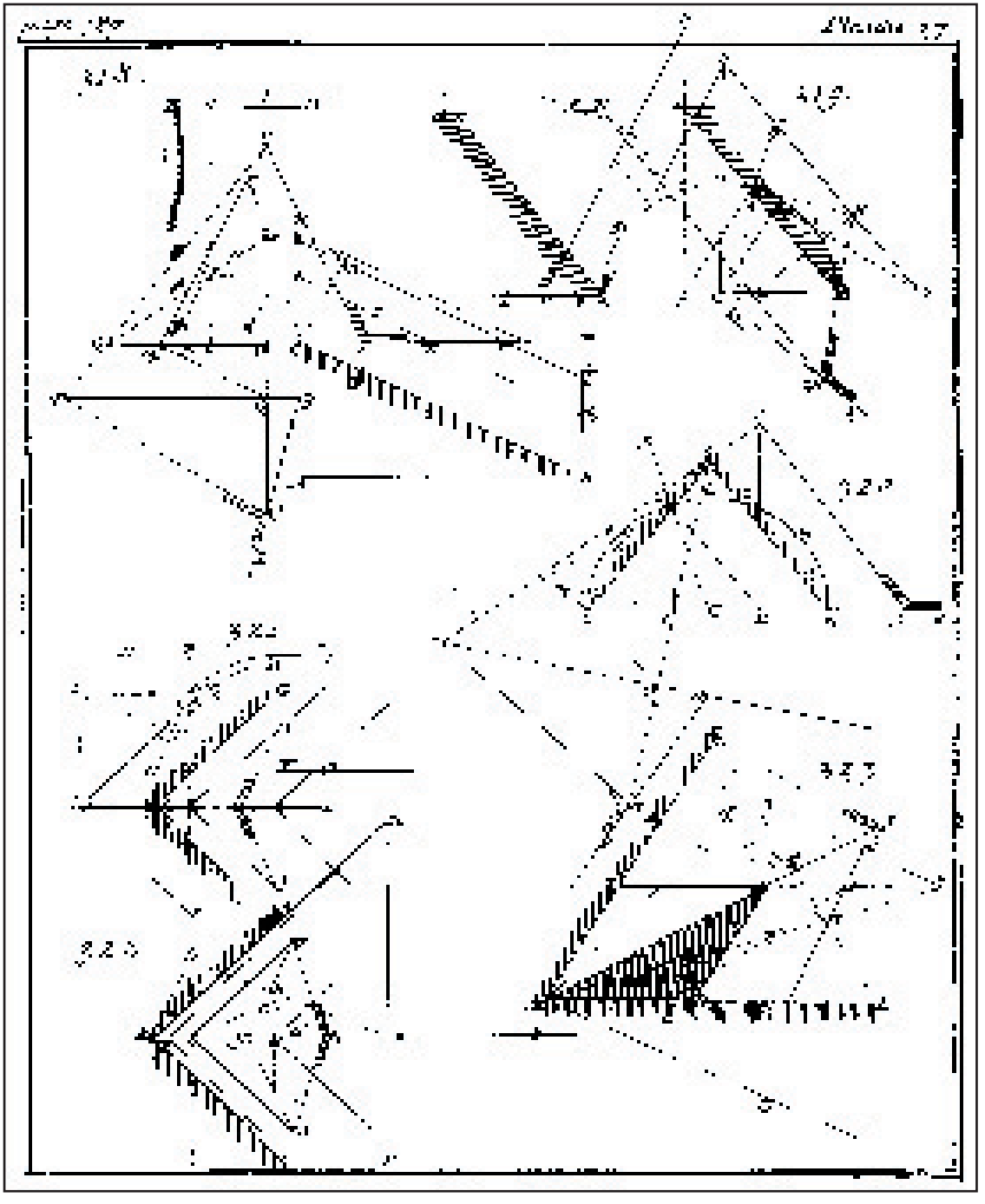
Ci resta ora di trovare la sezione delle superfici curve che passano per le corde degli archi di una doele, delle volte a botte in discesa con l'orizzonte e questo si può fare in due maniere.

In primo luogo attraverso il profilo. Sia per esempio, il piano orizzontale della discesa o solamente la metà ACDB, il suo profilo CHKR sul quale il punto F segua l'altezza della unione I della superficie piana che passa per la corda dell'arco della *doele 12* Avendo tirato FE che incontrerà l'orizzontale OC prolungato in *x*, si porterà la distanza C*x* sulla proiezione orizzontale di questa unione PI, di P in S e si porterà per il punto O la linea OS che è la sezione di questa superficie piana che passa per la corda dell'arco di una doele.

In secondo luogo si può fare una supposizione che la volta a botte, in luogo di essere inclinata sia invece orizzontale e che guardandole la faccia HC è inclinata a piombo. Cioè visto l'esterno.

Allora non si agirà che cambiare il centro, per esempio, da circolare, per cui il raggio è CH in un ellittico ribassato H*vu*T di cui il mezzo asse è *q*H ed il grande asse il doppio di CH. Questo sarà molto chiaro quando parleremo della sezione dei cilindri ma che tratteremo nel quarto Libro dove parleremo delle Discese.

Ecco la pratica valida per tutti i casi .



Problema XIV

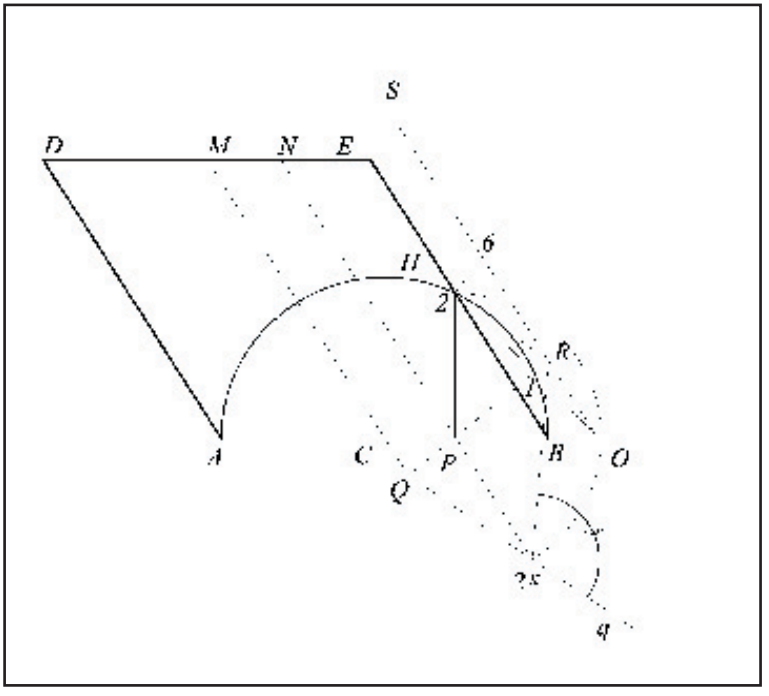
TROVARE I CALANDRINI DI TUTTE LE FORZE DELLE VOLTE SENZA FORMARE LA CENTINA DELL'ARCO-DRITTO.

Fig.Fig.319 In primo luogo quelli del "Letto" e d'intradosso.
La proiezione orizzontale della giunzione dal Letto e l'elevazione della facciata.

PRIMO CASO PER LA VOLTA IN VOLTA A BOTTE DI LIVELLO.

Sia il parallelogramma ABED,il piano orizzontale di una volta a botte obliqua,di cui la centina di facciata è il semicerchio AHB e la linea PN la proiezione della giunta del letto passando attraverso il punto 2 di questa centina;si cerca l'angolo dei piani d'intradosso piatti, cui passa attraverso la corda 12 e per la giunta di testa 26.

Si prolungherà la corda 21, fino al punto di fare incontrare l'orizzontale AD al punto O in cui si porterà OS parallelo a PN, che è la stessa cosa per l'asse CM, in seguito per il punto P, proiezione del punto 2, si eleverà sopra PN la perpendicolare PR, che taglierà OS in R, e si prolungherà verso Q fino a tagliare l'asse MC prolungato in Q . Si prolungherà anche NP per portare l'altezza della ricaduta P2 in $P2^x$. Si prenderà dal punto R la linea $R2^x$, e dal punto Q la linea $Q2^xq$, l'angolo $R2^xq$ sarà quello del calandrino che si cerca.



SECONDO CASO PER LE VOLTE IN DISCESA.

Fig.318 Abbiamo detto che possiamo considerarle come di livello, supponendo la linea *qR* orizzontale, invece della linea *ON* . Allo stesso tempo si possono considerare come inclinate.

Sia il parallelogramma *ACDB* la metà del piano orizzontale di una discesa dritta, cui *CHKR* è il profilo, *A12H* la metà dell'elevazione, *Pl* la proiezione orizzontale del giunto del letto,che passa per il giunto di testa *26* e *fL* , la proiezione verticale e il suo profilo che taglia l'orizzontale *ON* al punto x. Si porterà la distanza *Cx* sulla proiezione del giunto del letto di *P* in *S*,poi avendo prolungato la corda dell'arco di testa *21* fino a quella che incontra al punto *0* l'orizzontale *CA* prolungata. Si tirerà dal punto *S* l'indefinita *SOY*, che formerà la sezione del piano d'intradosso piatto *21* prolungata, e dal piano dell'orizzonte che passa dall'inizio dalla centina di faccia in *AC*. In seguito porteremo l'altezza della ricaduta *P2* in *P2g*, da cui tireremo al punto *S* la linea *gS* alla quale faremo la perpendicolare *gQ* che taglierà *SP* prolungata in *Q*. Sulla stessa *SP* prolungata e attraverso questo punto *Q* faremo una perpendicolare *Yy* che taglierà *SO* in *Y* e l'asse *DC* in *y*. Porteremo la lunghezza *Qg* di *Q* in *G* per dove tireremo le linee *YG* e *yGI* è quello del calandrino che cerchiamo.

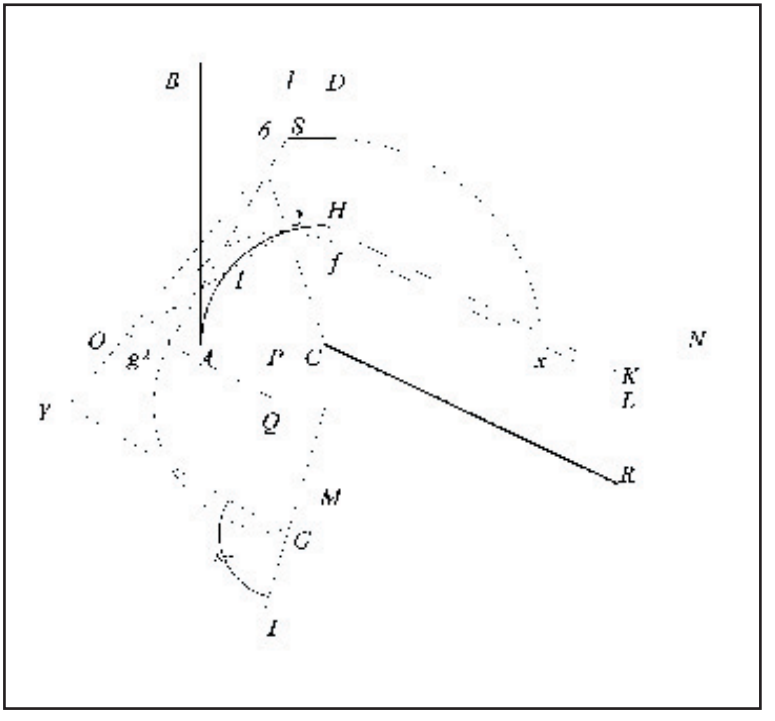
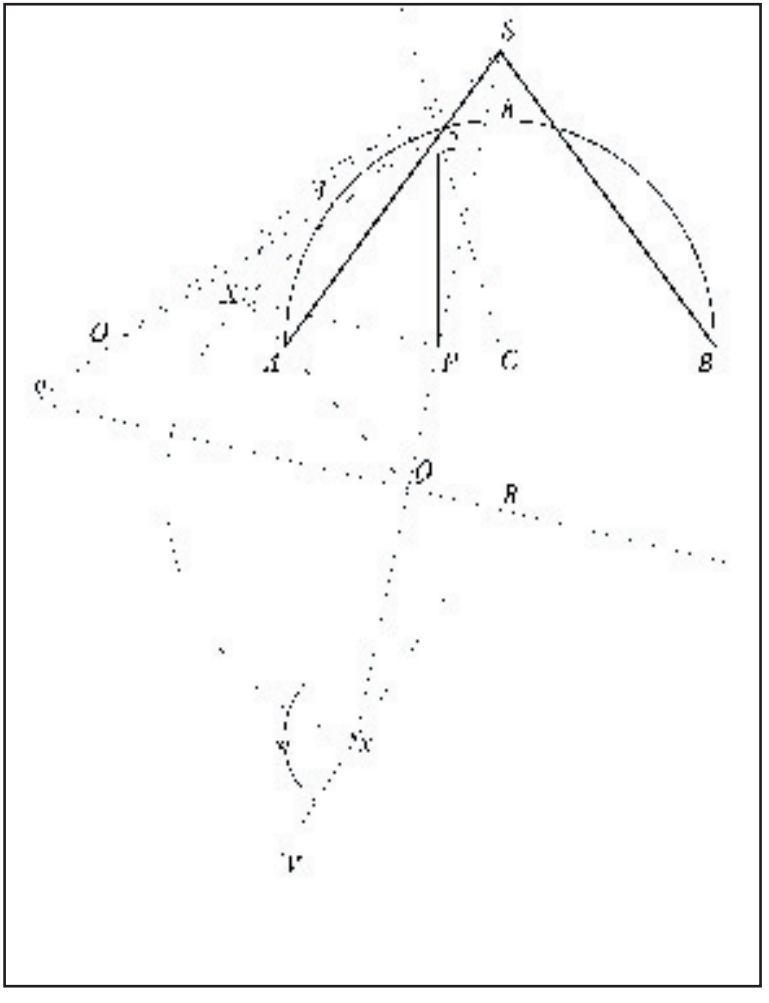


Fig.318 L'angolo del calandrino cercato è 105°

PER LE VOLTE CONICHE.

La costruzione sarà esattamente la stessa della precedente.

Fig320 Sia il triangolo *ASB*, il piano orizzontale di una "Trompe" di cui la centina di faccia è l'arco *AhB* , e la linea *PS* la proiezione orizzontale del giunto di letto passante per il punto *2* e l'asse *CS*. Prolungheremo la corda *21* dal *2°*cuneo fino a che non incontra l'orizzontale *BA* prolungata in *O* e si tirerà *OS* che sarà la sezione dell'intradosso piatto prolungato con il piano orizzontale che passerà per *AB* e la sommità *S* della "Trompe" che si suppone dentro la stessa. Alzeremo di seguito al punto P proiezione del punto *2* la perpendicolare *PX* uguale a *P2*, sulla linea *PS*; e avendo tagliato *XS* si farà al punto *X* la perpendicolare *XQ* sopra *XS* che taglierà *SP* prolungata in *Q* e per questo punto *Q* avendo fatto sulla stessa *SQ* la perpendicolare *oR* che taglierà *SO* in o, e l'asse *SC* , si porterà *QX* in *Qx* e dai punti *o* e *R*, tireremo *ox* e R*xV*, l'angolo *oxV* sarà quello del calandrino che cerchiamo, che è quello del piano dell'intradosso piatto passante per *21*del secondo cuneo, con quello del secondo letto passante per il giunto di testa *25* dell'alzata.



Se questa volta conica fosse in discesa rispetto al suo asse si troverà come alle volte in discesa un altro punto *S*,per la metà del profilo, che non sarà allora la sommità del cono.

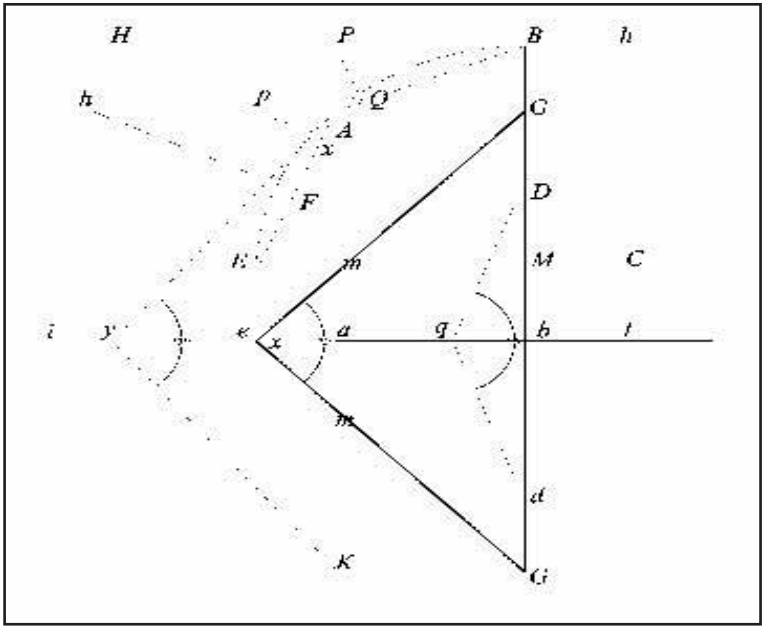
APPLICAZIONE ALLE VOLTE SFERICHE O SFEROIDI.

A seguito di quello che abbiamo detto parlando dello sviluppo, si possono ridurre le sfere e gli sferoidi in più zone di coni tronchi inscritti dentro quella sfera, ne consegue che si possono trovare i calandrini di queste parti coniche alla stessa maniera che per i coni interi riducendoli attraverso gli intradossi piatti in piramidi tronche; di conseguenza questo metodo è più conveniente delle volte sferiche e sferoidi che alle "Trompe" e alla altre volte coniche.

IN TERZO LUOGO PER GLI ANGOLI SPORGENTI E RIENTRANZE FATTE PER L'INCONTRO DI DUE VOLTE A BOTTE.

Primo caso di intradossi piatti uguali o non uguali che hanno la loro nascita di livello tra di loro, e che si tagliano in spigolo cadente nell'angolo rientrante con gli archi di un chiostro.

"FIG.321". Sia l'arco *EABh* la centina dello spigolo di volta e la linea



EC la proiezione orizzontale. Sia *AB* la corda dello spigolo dei secondi cunei, di cui *mM* o il suo uguale *ab* è la proiezione e le linee *aD* e da quelle della sezione del piano orizzontale,che si presuppone passare attraverso il punto *A* come il profilo *AG*, i quali sono l'angolo orizzontale *DAD* parallelo a quello dei muri di pié-dritto della volta in basso a destra; è chiaro che questo angolo può essere preso come base di una Piramide simile a quella degli esempi precedenti dal momento che è formata attraverso i piani d'intradosso e di "letto";di conseguenza ci si possono trovare gli angoli alla stessa maniera e poiché l'applicazione è così facile che si può trovare da noi stessi, per variare un po', vado a dare un'altra costruzione che è tuttavia la stessa rovesciata.

Per il punto *B* somma dello spigolo, tireremo l'orizzontale *PBO* parallela a *EC*, sulla quale attraverso il punto *A* si condurrà la perpendicolare *AP*, che taglierà *HO* in *P* da dove tireremo sulla corda *AB* la perpendicolare *PQ*, di cui porteremo la lunghezza dal punto *b* della proiezione *ab* della corda *AB* in *q*, per tirare da questo punto in *D* e d le linee *qD*, *qd*, che comprenderanno l'angolo *Dqd* del calandrino che cerchiamo

Se si trattava dei primi cunei, di cui la corda dello spigolo è la linea *EA* avremo condotto attraverso il punto *A* la linea *hG*, attraverso il punto *E* la perpendicolare *Ep*, e per il punto *p* la linea *Px* perpendicolare su *EA*, la quale differisce poco in lunghezza dalla linea *pA*; che ci fa vedere che l'angolo *mxm* differisce poco dalla nascita dell'angolo *mem*.

Si può prendere su *hG* tutt'altro punto che *p* se si vede, per esempio *h*, allora bisognerà abbassare la perpendicolare *hi* su *ae* prolungata, e condotta attraverso il punto i dei paralleli *iA*, *iK* alle linee *aD*, *ad*,che taglieranno la perpendicolare *mm* prolungata ai punti *A*, e *K*; si porterà *hF*, che è la perpendicolare sulla corda *EA* da *a* a *y*, l'angolo *KyA* sarà quello che cerchiamo.

NOTA: gli angoli dei calandrini cercati sono 101°, 92°, 138°.

Per far vedere che questa costruzione ritorna alla stessa fine di quelli precedenti attraverso il metodo generale, del quale non è che una modifica, io non ho messo la figura al di sotto, ripetendo le proiezioni dello stesso profilo *EABh*; sapendo, *nN=ab*, l'angolo *Vnu=Dad*. Eleveremo al punto *N* la perpendicolare *NS* uguale all'altezza *BG* della ricaduta del profilo; condurremo *nS*, e *ST* perpendicolare ad *nS*, che taglierà *nx* al punto *T*, attraverso cui condurremo la perpendicolare *uV*, che taglierà le sezioni dell'intradosso con l'orizzontale ai punti *u*, *V*. Porteremo la lunghezza *TS* in *TY* o *Ty* dal punto *Y* o *y*, tireremo le linee *Yu*,*YV* o *yu*, *yV*, l'angolo *YV* o *uyV* è quello del calandrino che si cerca per il precedente problema.

In quarto luogo per gli angoli sporgenti o rientranze formate attraverso gl'intradossi piatti le cui nascite non sono di livello, ma una di livello

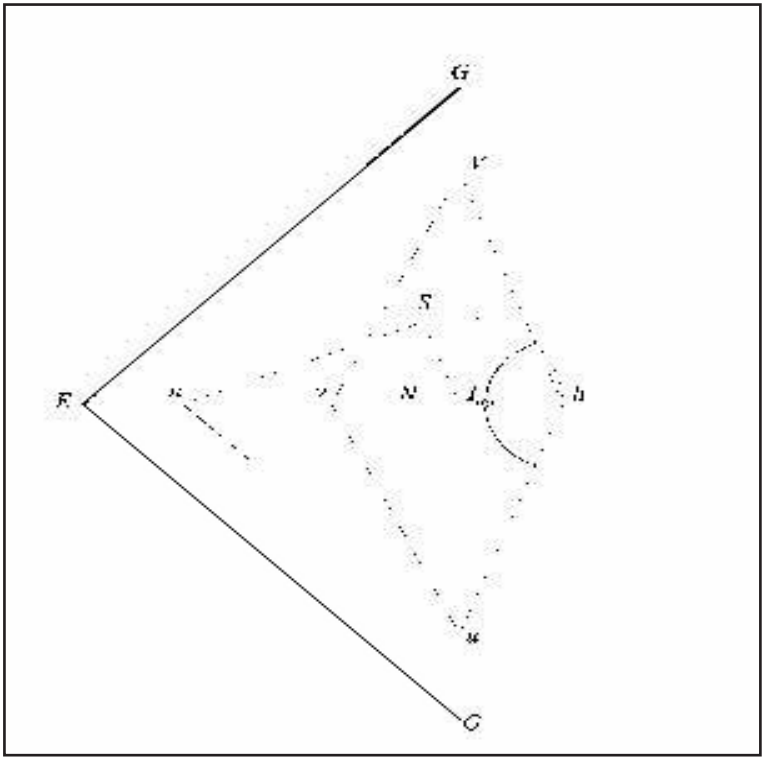


Fig.322 L'angolo del calandrino cercato è 139°, il quale differisce poco dal valore precedente

e l'altra rampante, tale è uno spigolo di volta di discesa che ne incrocia un altro di livello. Da qui per risolvere questo caso bisogna cercare la sezione dell'intradosso rampante con il piano orizzontale dell'altro

Fig.323 Sia [fig.323] il parallelogramma *ACDB* la proiezione orizzontale di due porzioni d'intradosso piatto *ACD*, *ADB*, che si tagliano sovente una linea *AD*, mentre la nascita dell'una *AC* è di livello, e la nascita *AB* dell'altra in discesa che segue un angolo dato *BAG*.

Eleveremo sulla proiezione dello spigolo *AD* la perpendicolare *DH* uguale all'altezza della ricaduta, che si suppone conosciuta attraverso il profilo di questo spigolo, e tireremo *AH* che ripresenterà l'inclinazione dello spigolo. Su *CD* prolungata si porterà la stessa altezza *DH* in *DN*; dallo stesso punto *D* condurremo una perpendicolare su *AB* prolungata, che la taglierà in *F*, e il profilo di discesa *AG* in *G*. Si porterà *FG* su *FA* in *FG*; di seguito attraverso i punti trovati *g* e *N*, si tirerà la dritta *gN* che taglierà *DG* al punto *z*,la linea condotta dal punto *A* attraverso *z*, sarà la sezione dell'intradosso in discesa rispetto all'orizzontale che passa per il punto *A* e *C*: non si tratta , ora, che di costruire il problema ordinariamente.

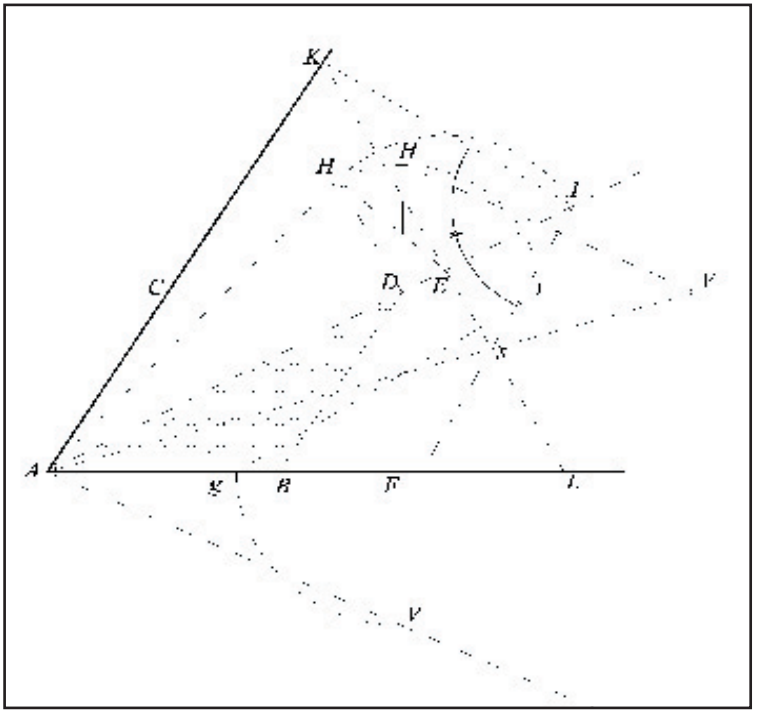


Fig.323 L'angolo del calandrino cercato è 94°

Si può ancora trovare questa sezione in un altro modo portando l'altezza della ricaduta *DH* perpendicolarmente su *CD* in *Dh*, e facendo l'angolo *Dhy* uguale al complementare di quello della discendente *BAG*, o è la stessa cosa tirando *hy* parallela a *AG* sino a che incontra *CD* prolungata in *y*; la linea *Ay* sarà la stessa sezione dell'intradosso in discesa con l'orizzontale che passa per la nascita di quella di livello, così si potrà impostare il problema come i precedenti.

Si farà *HE* perpendicolare su *AH* che taglierà *AD* prolungata in *E* attraverso cui tireremo la perpendicolare *KL*, che taglierà la sezione dell'orizzontale *AC*, *Az*, prolungata in *K* e in *x*.
Si porterà la lunghezza *EH* in *EI* su *AD* prolungata e tireremo le linee *KI* e *Ix*, l'angolo *KIx* è quello del calandrino che cerchiamo.

DIMOSTRAZIONE

Tutte queste costruzioni si riportano così facilmente al problema precedente che non è necessario dimostrarle. Quest'ultima richiede solamente qualche spiegazione. Se si suppone la linea *AG* in un piano verticale su *AF*, è chiaro che il punto *g* cadrà sul punto *F*. Se si suppone anche *DH* o la sua linea uguale *DN* elevata verticalmente sull'orizzontale *ADF*, il punto *N* cadrà sul punto *D* al di sotto dell'orizzontale. E' dunque visibile che se da questo punto *N* si tira una linea al punto *g* posto ad angolo dritto con la linea orizzontale *DF*, e la distanza del punto F uguale a *FG*, avremo sul piano orizzontale l'espressione di due triangoli simili *DNz* al di sotto dell'orizzontale e *Fgz* al di sotto, che li divide in *z*. Dunque la linea *Az* è la linea sezione dell'orizzonte; se la facciamo muovere su *FD* come su una cerniera fino a che siamo in posizione verticale la linea *Ng* esprimerà la tipologia del piano *ADB*, la quale piomba sull'orizzontale che passa attraverso il punto *AC* al punto *z*, che è quello che bisogna trovare.

La dimostrazione del secondo procedimento è ancora più semplice: poiché sebbene hi è parallela a *AG* [per la costruzione] i triangoli rettangoli *AFG*, *yhD* sono simili, e a causa dei paralleli *AF*, *Dy* ed ugualmente tenuto conto del piano inclinato *ADB*, qualunque cosa girate in senso contrario avrà *FG:DH=AF:Dy*, vale a dire che l'abbassamento sotto l'orizzonte è all'altezza al di sotto, come l'inizio della discendente al di sotto è l'inizio della salita al di sotto, che esprime la prima linea tirata da un punto *A* dell'orizzonte all'altro *y* che bisognava trovare.

N.B. Questa dimostrazione deve essere posta davanti al problema *XIII*.

DIMOSTRAZIONE

Sembra che ci sia qualche differenza nelle controversie che noi abbiamo proposto alle figure *308*. e *309*. ma se stiamo bene attenti vedremo che essa non è che apparenza; così la dimostrazione dell'una serve anche all'altra.

Fig.308 Se immaginiamo il triangolo *ACE* restando fermi gli altri due *ABC*, *ECD* si muova intorno ai loro lati *AC* e *CE* come su delle cerniere fino a che i punti *B* e *D* si riuniscono, ne consegue che le linee *CB* e

CD si confondono in una, e si formerà da questi tre triangoli o piani un angolo solido in *C* e una Piramide triangolare chiusa da un quarto triangolo, uguale a quello che abbiamo segnato in AEb^d, che ha i suoi tre lati uguali a ciascuno degli altri triangoli, con i quali forma la piramide. Ora è chiaro che attraverso il movimento del piano *CDE* sul lato *CE* la linea retta *FM* si piega in *G* senza cambiare la situazione di *CE*, fino a che il piano *ACB* incontra quello dove essa è, mentre invece loro si riuniscono sul lato *CD*, allora il punto *H* cadrà sul lato Eb^1, dove i punti *B* e *D* si riuniscono in *bd*, e il punto *H* in *h*; è per questo che abbiamo reso la lunghezza *Eh* uguale a *EH*; così supponendo un piano che taglia la piramide perpendicolarmente al lato CE attraverso il punto G, esso taglierà il triangolo EAb^d attraverso la linea *hf*, che sottende l'angolo dei piani *AEC*, *DEC* rappresentati attraverso la linea *Fx* sono uguali; dunque l'angolo *FGx* è meglio trovarlo con questa costruzione, come si voleva dimostrare.

Se si esamina la costruzione che dà i calandrini di un cuneo di "Trompe" alla figura *309*. si riconoscerà quella che essa in fondo è perfettamente la stessa che la precedente, con qualche piccolo cambiamento giacché si hanno tre triangoli dati in sviluppo su un piano;sapere *CS* porzione di un pannello di testa, le quali tre superfici devono nell'esecuzione formare un angolo solido in *C*; conseguentemente bisogna piegarli in modo che l'intervallo *ACa*, che lascia lo sviluppo, sia soppresso incontrando il punto *A* e il punto *a*, le due linee *CA*, *Ca* si fondono insieme così che uno non può fare altro che muovere i triangoli *DCA* e SCa sui lati Cd e CS, rimanendo il pannello d'intradosso *SCD* immobile, e per questo dai punti *D* e *S* per contro, si fanno muovere le linee *DA* e *Sa*, le quali si incontrano in *E*, prendendo la situazione dei lati di un quarto triangolo *SED*, che chiude la piramide formata attraverso le tre superfici date, ma in circostanze diverse cambia la situazione di questo triangolo in considerazione delle superfici date. Per i calandrini d'intradosso e del letto, si mette nella situazione *SED*; per questi di testa e d'intradosso alla situazione *DOA*; e per i calandrini di testa e di letto alla situazione *C* e *B*, dove bisogna sottolineare che ha sempre un lato comune con una di queste superfici di cui si cerca l'angolo che essa fa con la sua contigua.

Attenzione per l'uso

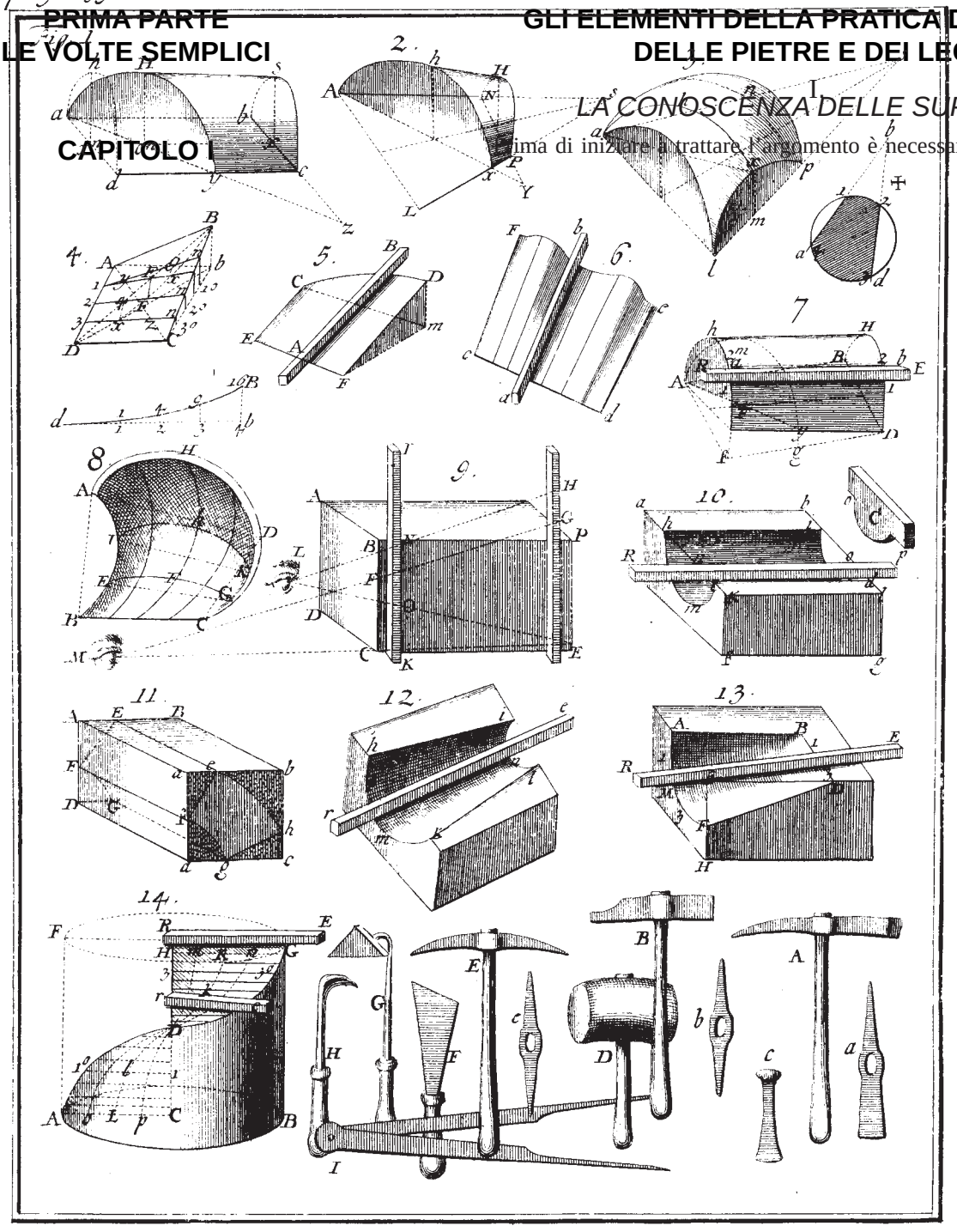
Si sa che non c'è modo più generale e più semplice per trovare gli angoli piani delle figure rettilinee, che dividerle in triangoli che sono i primi elementi delle superfici e poiché non se ne può rinchiudere lo spazio in meno di tre linee. Per una simile ragione non c'è un modo più generale per conoscere gli angoli solidi che sono gli angoli piani dentro le superfici che si incontrano, che di ridurre i corpi in Piramidi triangolari. I tetraedri regolari o irregolari sono le loro ultime riduzioni o se si vuole, i loro primi elementi; allorché se ne può formare uno spazio con meno di quattro superfici triangolari. E che tutta la Piramide di base poligono di un numero di lati al di sotto del triangolo né potrà contenere tanti di triangoli come quanti la base ne conterrà di triangoli; così possiamo dire che questo problema è generale per trovare gli angoli dei piani di tutti i corpi immaginabili, comprese la superfici piane, come vedremo per le applicazioni che noi faremo ai travi delle volte nel quarto libro.

A riguardo degli angoli solidi formati da delle superfici curve, che sono dentro di esse dagli angoli curvilinei o misti, che non si possono misurare immediatamente, una solamente attraverso le corde dei loro archi, è chiaro che lo stesso metodo deve ancora avere luogo, allorché si possono far passare delle superfici piane per queste corde ed inscrivere o circoscrivere piramidi di superfici piane triangolari a delle piramidi triangolari di superficie curve o miste. E' lo stesso ma è necessita finché non si pervenga alla conoscenza delle linee curve che attraverso delle linee rette, non perveniamo anche alla formazione delle superfici curve se non attraverso la mediazione dei piani.

FINE DEL PRIMO TOMO



page 39 Pl. 28.



PRIMA PARTE
LE VOLTE SEMPLICI

GLI ELEMENTI DELLA PRATICA DEL TAGLIO DELLE PIETRE E DEI LEGNI

CAPITOLO I

I
LA CONOSCENZA DELLE SUPERFICI

Prima di iniziare a trattare l'argomento è necessario dare qui un idea

netta e distinta delle forti differenze delle diverse specie di superfici che formano un opera di architettura, affinché da qui in avanti si possa avere una piena conoscenza di quello che si propone di fare, per trovare più facilmente i modi necessari all'esecuzione.
Le superfici sono piane oppure curve, queste hanno una divisione semplice e generale
La superficie piana è quella alla quale una linea retta, come un regolo, può essere inserita in tutti i modi, se all'interno non è possibile inserire una linea retta, non si tratta di superficie piane.
Le superfici curve al contrario di quelle con linee rette è quella alla quale una linea diritta non può essere applicata in nessun modo, o soltanto in alcune posizioni. Così come ci sono diversissime tipi di curve esistono diverse specie di superfici curve.
Alcune regolari, altre irregolari. Si può dividere la prima specie in due classi; una di corpi regolari che chiameremo primitivi, tali sono le sfere, i coni , e i cilindri.
Le altre che sono quelli meno regolari come gli sferoidi, i conoidi e i cilindroidi, le cui basi non sono circolari, gli anelloidi, e che si possono chiamare superfici regolarmente irregolari.
Le superfici irregolari sono di numero infinito; ma quelle delle opere di architettura oggigiorno sono molto regolari, senza che esse siano spiacevoli alla vista, esse però non possono divenire oggetto d'arte, il cui fine è di piacere tanto da essere utilizzati per soddisfare i bisogni della vita. Dopo aver considerato le superfici in generale, andremo ad esaminare le parti riguardanti le tavole in modo da supporre le sezioni in differenti modi

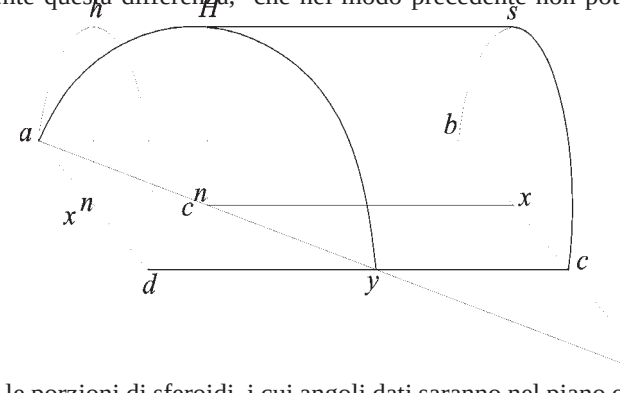
II
LA POSIZIONE DEI VERTICI DEGLI ANGOLI DELLE SUPERFICI CURVE REGOLARI

Quando una sfera, un cono, o un cilindro sono tagliati da tre piani inclinati tra di loro che si tagliano all'interno di un corpo, la porzione di superficie che includeranno sarà un triangolo, altrimenti una figura di tre bordi, i cui vertici di 3 di tre angoli che formeranno saranno dentro lo stesso piano ciò significa che potranno essere applicati ad una superficie piana e che toccheranno minimo in tre punti
La ragione è in evidenza per la seconda proprietà del II th. Di Euclide per la quale si può sempre far passare un piano per tre punti dati
Se **(*Fig. 1*)** dei tre piani che tagliano il corpo dato ce ne sono due *aHy, bsc* e *Abx, NHp* la cui intersezione cade al di fuori della superficie in x, e in y, allora si formerà un quadrilatero , ciò sta a dire che, una figura di quattro bordi i cui vertici sono *abcy, Anpx*, gli angoli compresi dai vertici, ***"Fig. 1"*** la superficie data risulta essere tagliata da tre piani di cui due paralleli. il terzo piano, quello non parallelo, avendo l'intersezione con uno dei du e paralleli all'esterno della figura definisce all'interno di essa un quadrilatero *abcy*

potranno essere o non essere dentro un piano, questo lo si può comprendere dai disegni successivi
In primo luogo una porzione di superficie di quattro bordi può essere il segmento formato dalla sezione di quattro piani ma anche di tre. Ma bisogna per l'uno o per l'altro di questi numeri di piani sarà sempre vero, per i segmenti cilindrici, che i vertici dei suoi quattro angoli saranno ***"Fig. 2"*** *Hh* rappresenta in questa figura l'unica sezione rettilinea, quindi quella passante per l'asse di tale figura

dentro un piano, quando due di questi bordi saranno dritti; perché non ci sono sezioni rettilinee nel cilindro se non quella passante per l'asse o parallela all'asse e dentro il cono quella per il piano passante per i suoi ***"Fig. 3"*** se la porzione di superficie è tagliata da quattro piani in circostanze differenti e se si conoscono le posizioni delle linee di intersezione si potrà sapere se i vertici dei quattro angoli sono dentro lo stesso piano

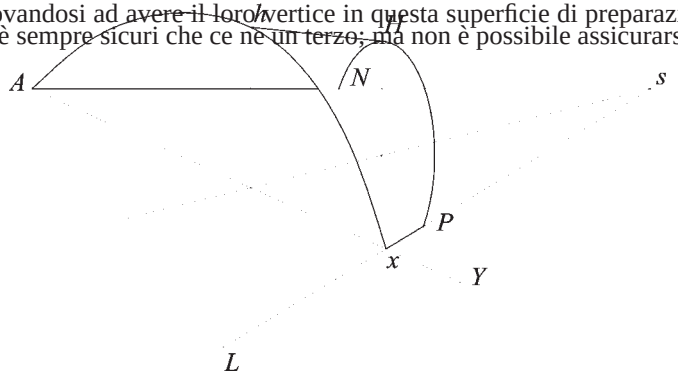
vertici, le cui sezioni rettilinee vanno da una parte all'altra dell'asse; o nella porzione cilindrica *ac* , i bordi diritti sono paralleli tra loro; quindi (per la 7a del II di Euclide) sono dentro lo stesso piano. E nella porzione conica *AP* **(*Fig.2*)** questi tagli conducono al vertice s; quindi (per la 2a di cui sopra) sono dentro il medesimo piano.In secondo **(*Fig.* +)** luogo se una superficie sferica non e sezionata da tre piani, di cui due ab, db si incrociano esternamente alla sfera in b, la porzione di superficie che comprenderanno sarà un quadrilatero, i cui quattro angoli saranno nel terzo piano abd che taglia i due precedenti. Ma **(*Fig. 3*)** se la porzione di superficie quadrilatera di sfera, di cono o di cilindro è tagliata da quattro piani in circostanze differenti e che se ne conosce la posizione delle linee di intersezione nei corpi tagliati, si potrà sapere se i vertici dei quattro angoli sono dentro lo stesso piano come conseguenza; supponendo queste intersezioni tagliate da un quinto piano aslIn primo luogo per la sfera, si traccerà un cerchio per tre dei punti dati, o per servirmi del linguaggio degli operai, si farà la "linea dei tre punti perduti"; se il cerchio non passerà per la quarta i quattro angoli non saranno nel piano, perché tutte le sezioni piane della sfera sono dei cerchi.In secondo luogo per la porzione del cilindro, avente uniti i quattro punti dati da una retta, se non si troveranno due parallele i vertici dei quattro angoli non sono nello stesso piano.In terzo luogo per la porzione conica, se due linee che passano per i punti dati, non passano per il vertice del cono, i quattro vertici degli angoli non sono dentro lo stesso pianoSi può applicare queste osservazioni a corpi della seconda specie, che avevamo chiamato regolarmente irregolari, come sono I° gli sferoidi formati dalla rivoluzione di un ellisse su uno dei suoi assi. II° ai cilindri e ai coni a base ellittica, avente questa differenza, che nel modo precedente non potrà servire



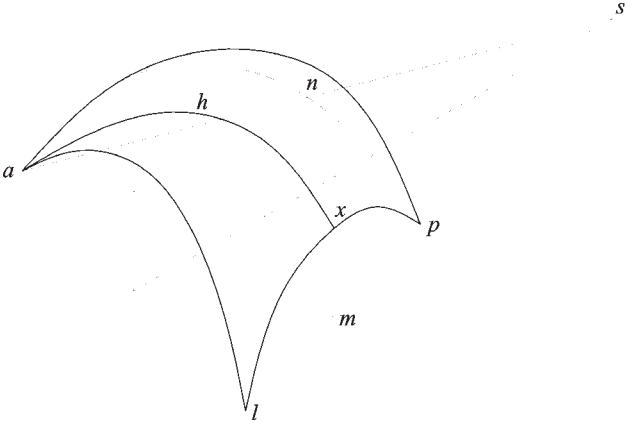
per le porzioni di sferoidi, i cui angoli dati saranno nel piano ortogonali all'asse di rivoluzione; per gli altri segmenti obliqui, non si può pervenire che per mezzo di un ellisse, che deve essere quello della sezione obliqua data nello sferoide convesso, da l'inclinazione di un piano tagliante, se inclinata all'asse di rivoluzione, o per ellisse assimilabile alla generatrice, se il piano tagliante e parallelo all'asse di rivoluzione.

USO DELLE OSSERVAZIONI PRECEDENTI
Per formare una superficie curva bisogna iniziare nel collocare e determinare le estremità su una superficie piana ponendole alla loro giusta distanza. In seguito per mezzo dei modelli delle curve convenienti, chiamati cerchi, si creano la pietra o il legno al di sotto di questa superficie, così quanto necessita; a tal fine importa sapere se i quattro angoli della porzione della superficie curva che si vanno a formare, se

trovandosi ad avere il loro vertice in questa superficie di preparazione, si è sempre sicuri che ce ne un terzo; ma non è possibile assicurarsi del



quarto per i mezzi a noi dati.
O detto nel primo libro che non si possono conoscere le linee curve che per mezzo delle linee diritte alle quali essi si comparano, si misurano da quanto esse si avvicinano e si intersecano a ciascun punto, cioè a dire, per mezzo delle ascisse e delle ordinate. Sto parlando della stessa cosa per la superficie curva riguardo quella piana, che serve a preparazione per misurare la profondità.Ne consegue che il metodo che si suppone, chiamato per DOES PLAETES, da dei grandi vantaggi per la formazione ***"Fig. +"*** da questa figura si può vedere come una superficie sferiche sezionata da due piani che si incrociano esternamente crea una porzione quadrilatera all'interno della



superficie

delle volute delle volte; poiché se la porzione di superficie è cilindrica o conica, si avrà già su questo piano le lunghezze e la posizione delle sezioni diritte, e quelle delle corde degli archi delle basi opposte, e se la porzione di superficie è sferica, o sferoidale, tagliata da dei piani (come si conviene ordinariamente alla costruzione di volte) passanti per il loro centro, o parallela al suo asse si avrà su questo piano le quattro corde degli archi dei suoi bordi.Questo aiuta a concludere quale può essere la figura del DOELES PLATES delle volute di ciascuna specie di volte. In primo luogo le volte a botte, formati da cilindri, non possono essere che dei parallelogrammi o dei trapezi, aventi due bordi parallele; poiché le sezioni di un cilindro per un piano che no è parallelo al suo lato o allo stesso modo al suo asse, non può essere una linea retta, ma una linea curva.Secondariamente i disegni delle tavole delle volute delle volte coniche possono essere dei triangoli o dei trapezi o trapeizoidi, ma mai dei parallelogrammi; perché la sezione eseguita parallelamente alla parte per un piano passante il cono è una parabola.In terzo luogo le doeles piatte delle volute delle volte sferiche o sferoidali non possono essere che dei triangoli o dei trapezi isosceli, vale a dire, i cui angoli inclinati nella parte inclinata fra loro e con i lati paralleli, sono uguali; perché faremo vedere in seguito che i vertici dei quattro angoli di una porzione di sfera non sono in un piano, tranne che quando inserite in una porzione di cono dritto, salvo il caso della sezione souscontraire.Se i quattro angoli di una superficie curva, tagliata per tre o quattro piani, non sono su un piano , se ne possono sempre corrispondere tre in un piano, e tre in un altro; perché i vertici degli angoli opposti seguenti *la diagonale* saranno comuni ai due piani; ma tratteremo di queste irregolarità

III
LE SUPERFICI CURVE REGOLARMENTE IRREGOLARI

In termini dell'arte
DES PARAMENTS GAUCHES

Si chiamano gauche in architettura, una superficie che non ha la regolarità che la figura sembrerebbe esigere, per analogia alla malagrazia che si trova in ciò che viene fatto con la mano sinistra; allo stesso modo una superficie che dovrebbe essere piana, come quella di una pietra o di un legno mal squadrato, i cui lati opposti convergono guardandoli di profilo, è detta gauche.Si ricava così il nome di quella specie di superficie date dalla differenza delle esposizioni delle loro parti che si paragonano ad uno sguardo loche, in latino limus, che sembra girato allo stesso tempo verso diversi oggetti, così è quella dei limons delle scale che girano, la cui figura è ben espressa da questo nome, che userò anche per altre superfici simili.Chiameremo superficie curva regolarmente gauche quella a cui si può assegnare la generazione del momento che una linea retta o curva che ne percorre altre alle estremità le quali non sono simili o messe similarmente, tali superfici hanno raramente i loro quattro angoli in un piano ma le supponiamo tagliate da altre quattro.
"Fig. 4" la diagonale curva *db* è una parabola, in quanto la superficie non e piana ma gauche

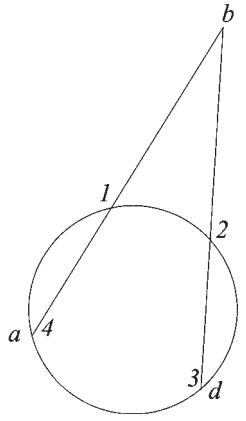
Da questa definizione si concorre che una porzione di superficie di sfera, di cono o di cilindro, non abbia i quattro angoli in un piano, non sarebbe per questo una superficie gauche, ma quella che passa dalle quattro linee rette tirate da un angolo all'altro, non sarebbe regolarmente piana, ma gauche della prima specie, che io chiamo planolime, vale a dire, che sembra un piano senza esserlo.Per aiutare l'immaginazione a rappresentare la creazione di una superficie, bisogna pensare alle tracce di un bastone sulla neve, o un fil di ferro caldo nella cera morbida.

PRIMA SPECIE DI SUPERFICIE GAUCHE

Se **(*Fig. 4*)** una linea retta *AB* è appoggiata verso l'estremità su due altre rette *AD, BC*, che non sono parallele ne sullo stesso piano, e la si sposta su queste linee, la traccia della generatrice *AB* formerà da questo movimento una superficie gauche dove le diagonali destre tirate da un angolo opposto all'altro non si incontrano mai e saranno tutte fuori dalla superficie

COROLLARIO DI PRATICA
Dove in seguito per conoscere una superficie che appare piana è gauche, come una porta dove il legno si è sbilencato e tormentato e rinsecchito, ***"Fig. 6"*** il solido *ab* non e perfettamente a contatto con la superficie Fcde in quanto quest'ultima risulta essere gauche definita dall'autore planolime

e non c'è che da tendere un filo da un angolo opposto all'atro in diagonale; se si allarga sul mezzo è lampante che è gauche; la stessa cosa se condotta per mezzo di un regolo su un paramento di legno o di pietra
Non è strettamente necessario conoscere le superficie di curvatura delle diagonali di una superfici gauche formata come appena detto; ma è una



curiosità che mi ha fatto piacere quando io l'ho scoperta.Se le quattro linee o bordi destri delle superfici gauche sono uguali si trova che la diagonale curva *BD* è una parabola e *AC* è un'altra differentemente situata.
Per dimostrarlo non c'è che da supporre una superficie piana passante per i tre angoli *ADC*, come *AbCD*, che si allungherà dall'angolo *B* dell'intervallo *Bb*, più o meno grande sapendo che la superficie sarà più o meno gauche.Poi avendo divisole linee *AD*, *BC* e *bC* in quattro parti uguali e tirate le rette *1n, 2n, 3n* da questa divisione; si tireranno anche le rette n 1°, n 2°, n 3°parallele a *Bb*. Allora si riconoscerà che la linea AB, trasportata in 1n, taglierà la diagonale *DB* al punto 9, che sarà ai ¾ della linea 1n e al di sopra della linea 11, che davanti al piano *ADCb*, di quantità 9x, che è anche i ¾ dell'altezza di n 1°. Dalla stessa linea *AB*, trasportata in 2n taglierà la diagonale *DB* nel mezzo di E, n 2° come del resto. Se si suppone dunque la più grande altezza gauche *Bb* uguale a 16 parti, n 1° ne conterrà 12 che è i ¾ di 16 e 9x conterrà i ¾ di 12 che fa 9, lo stesso *EF* mezzo di n 2° = 8 sarà di quattro parti, e 4x =1/4 e 3n sarà il quarto dell'altezza di n 3° = 4; di conseguenza = 1, si avrà dunque queste di seguito 16, 9, 4, 1, 0, che è quella dei quadrati delle ordinate, dunque questa curva è una porzione di parabola, che ha la sommità in D, come è rappresentato in alto nella ***Fig. 4*** in d, 1, 4, 2, 9,16.
Inizialmente se si vuole conoscere l'altra diagonale curva su *AC* si troverà che anche quella è una parabolica, ma invertita di senso e in sommità nel mezzo di *F*; quando la sua distanza o elevazione in y sul piano *AbCD*
"Fig. 5" *qusto tipo di superfice gauche e definita dall'autore mixtilime, perchè la generazione è data da due linee rette e una curva*

sarà del quarto di 12 = 3; in *F* la metà di 8 = 4, è in z di ¾ di 4 = 3 così la più grande altezza in *F* dove si avvicina il piano verso *A* e verso *C*. Per averne un numero maggiore di punti si può duplicare *B, b*, e dividerlo in 32 parti, e supporre *AD* e *BC* divise in 8, si avrà di seguito 0, 3 ½ , 6, 7 ½, 8, 7 ½, 6, 3 ½ , o duplicando 0, 7, 12, 15, 16 come le restanti 16 parti, come a dire, fanno le ascisse e sono 0, 1, 4, 9, 16, dunque in seguito dei quadrati di ordinate 1, 2, 3, 4 ma dove di questo non è qui di alcun uso e non ci soffermiamo.

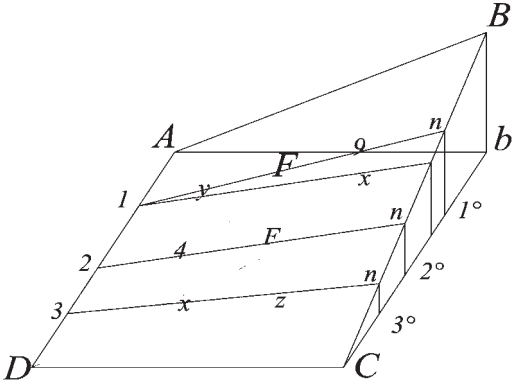
"Fig. 7" questo tipo di superficie gauche è data dal movimento di una line retta che si muove su due curve diversamente poste

COROLLARIO
Il seguito di questa generazione che sebbene questa superficie sia realmente curva la si può formare esattamente con un regolo *AB* mosso
"Fig. 14" per poter disegnare questa figura è necessario leggere le indicazioni contenute nel capitolo successivo

da un movimento uniforme se i due bordi *AD*, *BC*, cambiando continuamente di inclinazione a riguardo della prima posizione come le pale di un mulino a vento su le volant & les antes, quello che fa si che le coterefts, non sono sullo stesso piano formando la superficie gauche, delle pale del mulino a vento.
Chiamo questa prima specie di superficie gauche planolime, dal latino plana e lima, che rassomiglia ad un piano ma che è gauche, e curvo sebbene termina con delle linee rette, formato come i piani, dal movimento di una linea retta.
La seconda specie di superfici gauche è formata dal movimento misto di una linea retta *AB*, dove una parte verso A si mette su una linea retta EF, e l'altra su una curva *CD* tale che si vorrà, di arco o di cerchio o di ellisse, o tutt'altra curva di una luce o di diverse curvature come le onde *Fbe* ***(Fig. 6)*** la traccia di questa linea forma una traccia concava o convessa che va appianandosi man mano dalla curva *CD* alla linea retta F dove essa **(*Fig. 5*)** perde la sua concavità o convessità: tali sono le doeles di queste arrieres voussures che qui chiameremo réglées & bombées, le conchiglie delle scale a vista come la ***Figura 14.*** Io chiamo queste superfici di nome mixtilime; perché la sua generazione si fa da due linee rette *CH* e *HG* e una curva *ADG.*

"Fig. 8" *questa figura viene paragonata dall'autore ad una vela gonfiata dal vento*

COROLLARIO
Da questo segue, come qui davanti, che possiamo formare questa superficie con il movimento di una riga *AB* ***(Fig. 5)*** o *ab* ***(Fig. 6)*** o *RE* ***(Fig. 14)*** .La terza specie di superfici incurvate ***(Fig. 7)*** è formata dal movimento di una linea retta *AB*, che si muove su due curve *AhF*, *BHD*, o diverse, o diversamente poste, dove le corde *AF, BD* degli archi simili non siano parallele tra loro; in maniera tale che i quattro angoli *ABDF* non siano nello stesso piano *ABDf*; ma uno di essi come *F* se ne allontani dell'intervallo *Ff*, più o meno, seguendo l'ineguaglianza della posizione delle Curve, tali sono gli intradossi delle volte de la Vis S.Giles quadrata ad ogni Rampa, che sono simili ad un cilindro ritorto. Chiamerò questa specie Doliolime.

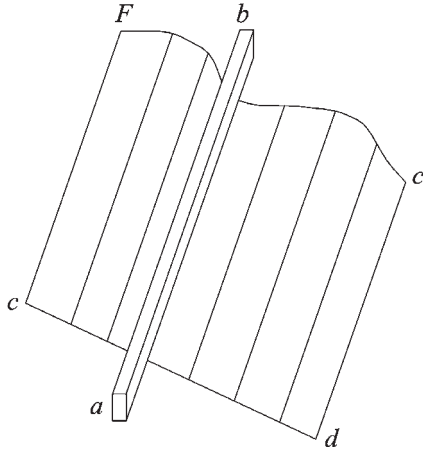


COROLLARIO
Segue anche da questa generazione, che questa superficie si può formare col movimento di una riga ab ***(Fig. 7)*** spostata su due archi di linee curve *AhF*, *BHD*.Bisogna sottolineare che non comprendo in questa specie le superfici incurvate dei Limons tournans poiché, anche se fossero realmente formate dal movimento di una linea retta su due curve, che fanno delle eliche, non devono essere considerate che come una parte

di una superficie Mixtilime, come la si vede nella ***Figura 14***. In *D K G D*.

La quarta specie di superfici curve incurvate è formata dal movimento di una linea curva la cui curvatura non è costante, ma variabile, che si muove su altre due curve costanti, come sarebbe, per esempio, una costola di balena piegata ad arco che fosse appoggiata su due archi di linee curve simili o differenti, di cui allenteremmo la corda man mano che la si muove, per darle la libertà di aprirsi sempre più; e infine di raddrizzarla completamente. Così prendendo gli archi *AEB*, *DGC* ***(Fig. 8)*** come appoggio dell'arco *AHD*, se lasciando impercettibilmente la corda, lo trasportiamo in *IhK*, dove si è già un po' raddrizzata; in seguito in *EFG*, dove lo è maggiormente, infine in *BC* dove si è totalmente raddrizzata, si sarebbe formata una superficie simile a quella che il vento forma nelle vele quando le gonfia. In effetti se si capovolge la ***Figura 8***. si potrà considerare la linea retta *BC* come il pennone, [col termine marinaresco] i punti *A* e *D* come quelli di Scotta, tra i quali sta la curvatura più grande *AHD*, e i lati *BEA*, *CGD*, come i gratili.

In Architettura si fanno delle superfici simili per gli intradossi dei conci

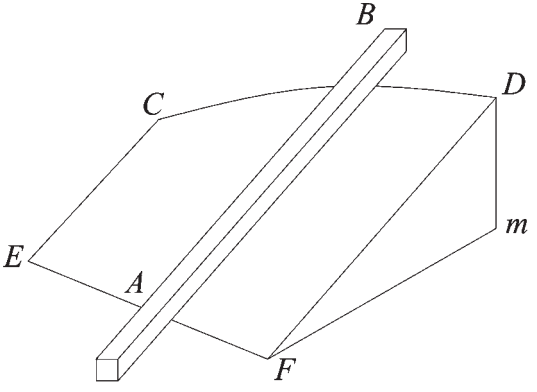


del *Dietro Curvatura di S.Antonio*. Parlo dei conci, non del dietro curvatura intera; perché nasce su tre linee rette, che sono, due sui piedritti, e una sull'architrave o Chiusura. Chiamo questa superficie Sphericolime; perché ha qualche rapporto con una sfera anche se in maniera molto imperfetta. È semplice concludere a proposito della formazione di questa superficie, che non può essere fatta, come le tre precedenti, per mezzo di una Riga; ma solo grazie all'aiuto di questi modelli di Curve, delineate su assi sottili che chiamiamo sagome.Queste quattro specie di superfici comprendono tutte quelle possibili e usuali in Architettura, anche le viti e le Ecrues, che sono delle porzioni di mixtilimes; poiché facendo muovere una linea retta applicata ad angolo Retto, Acuto, od Ottuso, ad un asse, lungo quest'asse, da un lato all'altro, su di un'Elica, si formerà una superficie di vite, e se al posto dell'elica, che non si avvicina all'asse, sostituiamo un'elica in limace, sarà la superficie che gli Operai chiamano Colimaçon, che si avvicina e raggiunge infine il suo asse.

IV
SUI DIFFERENTI MODI DI PERVENIRE ALLA FORMAZIONE DELLE PARTI DEI CORPI, DI CUI LE SUPERFICI E GLI ANGOLI SONO DATI.

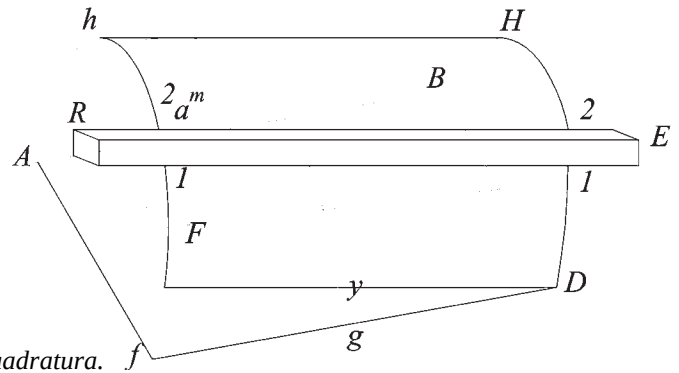
Per quanto si conoscano perfettamente la figura del solido che ci si propone di fare, e le superfici curve che occorre formare, non possiamo tagliarle immediatamente in una pietra di qualunque forma; non ci si arriva che tramite la mediazione di superfici piane.Abbiamo immaginato per l'esecuzione del Taglio delle pietre, due metodi diversi, che suppongono più o meno delle superfici piane, e che conducono a questo con maggiori o minori dispositivi.

Uno di questi metodi si chiama per Squadratura, e l'altro per pannelli, ne daremo un terzo che non ha nome, perché nuovo; lo chiameremo Semi-squadratura.

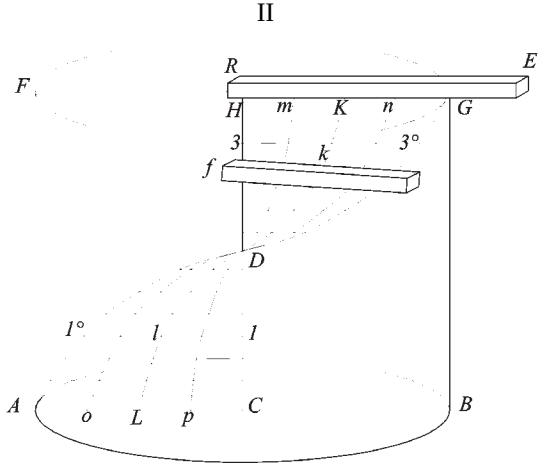


I

Il metodo per *Squadratura* è così chiamato, perché prima di formare una figura di solido obliquo, si comincia col formarne una di cubo, o di parallelepipedo con la squadra, capace di contenerla. In seguito, si traccia su ognuna delle superfici piane supposte in situazione Verticale o Orizzontale, la proiezione delle superfici del corpo che ci proponiamo di formare, e si taglia dal parallelepipedo tutto quello che eccede i contorni di ogni proiezione, eliminando la pietra superflua, e poiché le superfici di questo corpo sono o in quadrato o in quadrato lungo prima di essere tagliate, il metodo che ne suppone di tali, viene chiamato *per*



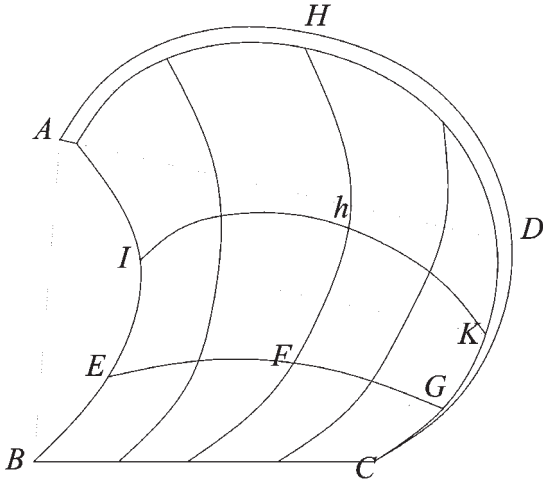
squadratura.
Lo si chiama anche *per spoliazione*, come se si spogliasse la figura proposta del vestito che la tiene inviluppata; ed è cosi che si dice *spogliare delle fave*, per il pulirle della loro buccia, che mostra come il P.DECHALLES non ha compreso il senso di questa parola, quando l'ha tradotta con *per* sussurationem da furtarello, quando invece avrebbe dovuto tradurla *per* spoliationem.



La seconda metodo chiamato *per Pannelli*, è più immediato come esecuzione, in quanto non suppone che una superficie piana, che può anche sussistere, finita l'opera, se si comincia con una di quelle dei letti o delle teste. Consiste nel formare dei modelli di superficie del corpo o dei conci che si vogliono fare, per applicarli sulla pietra, e tracciarne così i contorni esattamente. Questi modelli si applicano su materiali inflessibili come delle assi, quando si tratta della formazione di una superficie piana, e qualche volta su materiali flessibili, come Cartone, latta, o lamine di piombo, quando si tratta di una superficie curva, della quale si cerca il contorno attraverso la via dello sviluppo che è la meno comune nell'esecuzione.Per mettere questi modelli nella posizione in cui devono stare tra loro, ci si serve di strumenti adatti per determinare le inclinazioni delle superfici, come i biveaux e false squadre.

"Fig. 11" questa figura è esemplicativa dello spreco di pietra che si ha con questo tipo di procedura, infatti prima di arrivare alla forma che interessa *ghfe* bisogna eliminare molta pietra dalla forma di base

NOTA
Benché questo metodo si chiami specificatamente *per Pannelli*, non bisogna credere che si possa assolutamente fare a meno di modelli nella precedente per squadratura; poiché occorre, per tracciare un contorno



curvo, impiegare un pannello, o qualcosa di equivalente, come un biveau a braccio curvo, o una sagoma; poiché le piccole porzioni di superfici dei conci non permettono di tracciarvi degli archi di circonferenza con una randa, poiché occorrerebbe aggiungervi una superficie continua prolungata per mettervi un centro, se si tratta di un arco circolare di pochi gradi, o due fuochi per una piccola porzione di Ellissi; oppure impiegare le tecniche che abbiamo dato nel secondo Libro, per poter fare a meno del centro o dei fuochi; oppure infine è molto più semplice e più sicuro fare un modello su un disegno in cui la linea curva sia interamente tracciata, piuttosto che ricorrere a operazioni molto complesse, che occorrerebbe ripetere spesso per piccole parti.
Il terzo metodo che ho chiamato per Semi-squadratura mescola i due

precedenti, non avendogli dato il fu Sig. de la Hire, che ne è l'inventore, un nome particolare, ho creduto dovergliene dare uno per distinguerlo dagli altri. Ne rimando la spiegazione agli esempi che ne darò; in questa sede basta saperlo come compreso tra quello per Pannello e quello per Squadratura, nel fatto che vi si adoperino delle superfici supposte Orizzontali o Verticali, come nella squadratura, e dei Pannelli di intradosso, come nel metodo dei Pannelli.

SUI VANTAGGI E SVANTAGGI DI CIASCUN METODO

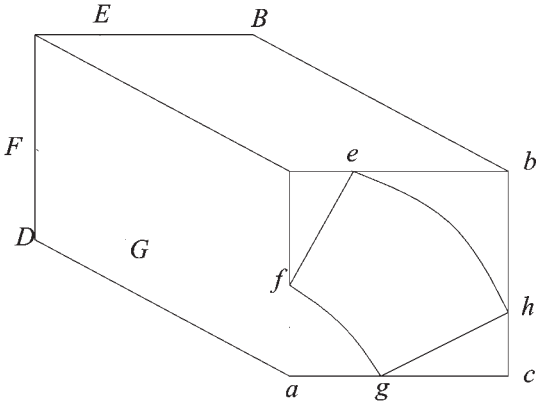
Il vantaggio del metodo per squadratura consiste 1° nel fatto di risparmiarsi la fatica di fare un grande numero di pannelli per la costruzione di una volta, quando i suoi centri non sono circolari; poiché occorre cambiarne ad ogni concio.
2°nel fatto che non è necessario conoscere le linee curve, che si formano dall'intersezione delle superfici curve; le si crea per una specie di caso, eliminando successivamente la pietra di un intradosso con una riga trascinata su un Arco retto.
I suoi Svantaggi sono 1° che consuma molta pietra in pura perdita; poiché occorre cercare delle superfici inclinate tra delle verticali e delle orizzontali ; se la loro inclinazione è, per esempio di 45 gradi in un cubo, è chiaro che essendo inutile tutto quello che resta al di là della diagonale di una delle sue facce, occorre ritagliare un prisma triangolare uguale a quello che deve restare, in maniera tale che in questo caso la perdita della pietra è evidentemente della metà; ma non è ancora tutto, se su questa superficie inclinata occorre levarne altre due ad angolo Retto od ottuso, come sono i giunti di Testa con gli intradossi; occorre ancora levare della pietra una seconda volta e ritagliarne altri due prismi triangolari, e infine se la volta è estradossata occorre ancora eliminare un quarto prisma triangolare.
La ***Fig.11*** lo mostrerà chiaramente; poiché vi abbiamo segnato tutto quello che deve essere tolto. Così nel prisma di cui *dabc* è una base, occorre per prima cosa levare un Prisma triangolare che avrà per base il triangolo misto *fdg*, in secondo luogo un altro che abbia per base il triangolo rettilineo *afe*, terzo un altro opposto al primo, che abbia per base il triangolo misto *ebh*, e infine un quarto rettilineo, di cui la base è il triangolo *gch*.
La seconda Svantaggio è che occorre non solo fare inutilmente delle superfici di un Parallelepipedo che bisogna ritagliare, ma spesso delle seconde superfici, anch'esse inutili, e che non bisogna supporre che per trovare le terze, che devono sussistere quando l'opera è finita, che si sarebbero tuttavia dovute fare immediatamente se si fosse potuto; se ne vedranno degli esempi in seguito.
Il terzo Svantaggio è che se gli angoli sono leggermente alterati dall'esecuzione, e la squadratura non risulti esatta nei richiami che questi angoli fanno da una superficie ad un'altra, sia per l'errore delle Squadre o dei biveaux, o della mano dell'Operaio che se ne serve, ne possono risultare degli errori rilevanti, e dei profili col contorno irregolare e mal formato.

"FIG. 9" questa figura mostra la prima fase di squadratura di un concio così come proveniva dalla cava

I VANTAGGI DEL METODO PER PANNELLI

Dall'esposizione dei vantaggi e svantaggi del metodo per squadratura, è agevole dedurre quelli del metodo di segnare le pietre per mezzo dei Pannelli.
Primo, è chiaro che essendo l'operazione più immediata, essa deve essere più corta.
Secondo, che essendoci meno supposizione di superfici piane da far precedere, c'è più facilità nell'utilizzo di pietre di minor volume.
Terzo, che essendoci meno da eliminare, si ha una maggiore economia nel consumo di pietra.
4° che essendo l'operazione fondata sull'estensione delle superfici, di cui si sono potuti tracciare esattamente i contorni del disegno con le righe, ci si arriva con molta più sicurezza, e in conseguenza deve essere più esatta.
Infine è il metodo più competente e il principale oggetto di studio del Taglio della Pietra, di cui gli Autori che ne hanno trattato, hanno proposto il maggior numero di casi, come risulta da quello che dice il P.Deran.
Il solo Svantaggio che ci si trova, è un più grande insieme di strumenti, se si possono chiamare i pannelli con questo nome.Il terzo metodo *per Semi-squadratura*, mescola i vantaggi degli altri due; ne rinviamo la spiegazione al primo esempio del tratto delle volte a botte.Malgrado l'imperfezione del metodo per squadratura, gli scalpellini nla preferiscono di solito a quella dei Pannelli per diversi motivi; il primo, perché si preoccupano meno di risparmiare la pietra, il cui spreco non grava sul loro conto, che di risparmiarsi fatica; la seconda, perché hanno bisogno di meno strumenti, cioè di Pannelli, e meno preoccupazione che i tagliatori di pietre non scambino alle volte gli uni per gli altri, o li mettano in posizione errata, cosa che arriva spesso, se non si ha cura di sorvegliare. Il terzo, è che contando sempre su qualche finitura, essi sono poco interessati ad una operazione perfetta, perché si illudono di salvare le apparenze con questi mezzi.Non adotteremo in quest'opera nessuno di questi metodi in particolare, ma faremo uso degli uni e degli altri secondo l'occorrenza, e quando ciascuno di essi converrà allo stesso modo alla facilità dell'operazione, ne daremo l'applicazione nel

Trattato, per mettere il Lettore in grado di scegliere quello che meglio gli converrà, come si vedrà in quello delle botti. Occorre innanzitutto vedere gli elementi della pratica per tracciare le superfici semplici, considerate senza alcuna divisione.
i



PROBLEMA I

DA TRE PUNTI DATI IN UN SOLIDO, FAR PASSARE UNA SUPERFICIE PIANA.

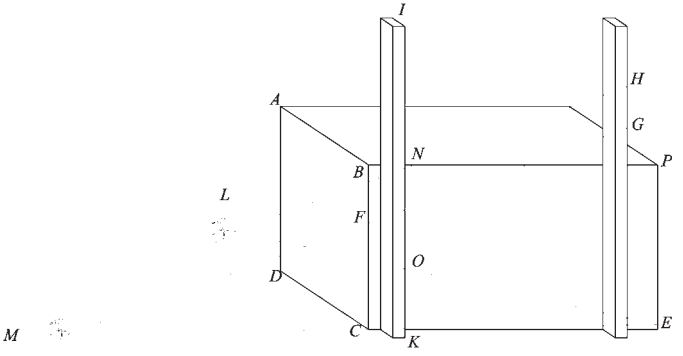
In termine dell'arte SPIANARE UN PARAMENTO.

Sia un pezzo di pietra *AE* ***(Fig. 9)*** come arriva dalla cava, da dove lo si porta grezzo, ma di solito a forma, seppur imperfettamente, di parallelepipedo, sul quale occorre fare un *Paramento diritto* , cioè una superficie piana alla quale la riga possa essere applicato in ogni senso, senza che alcun vuoto resti tra i due.
Si comincerà col tracciare una linea con una riga dove si riterrà adatto per creare delle cesellature verso uno dei suoi angoli, e avendola ben tirata con la riga, se ne applicherà una immobile, come in *HE*, sia che la si faccia tenere ferma da qualcuno in questa posizione, sia che ci si appoggi una pietra o altro, se si è soli. In seguito, si poserà un altro riga *IK* verso la faccia opposta *AC*, all'altro spigolo vicino al bordo che si giudicherà adatto, e lo si piazzerà rispetto alla prima riga di modo che il bordo della seconda copra esattamente quello della prima, senza che le due righe si incrocino rivolti verso direzioni diverse dalla parte dei loro lati esterni; di modo che i raggi visivi *LN, LO*, che terminano contro il primo riga in H ed E, rasentano la seconda in *N* e in *O*, come, essendo l'occhio posto in M e rivolto verso *E* e *G*, il bordo della prima riga *HE* rasenta la seconda *IK* in *B* e *C*; quindi si traccia una linea retta lungo la riga *IK* sul lato *BC*, a partire delle estremità della quale si tireranno con la riga altre due linee *BP* e *CE*, sul letto sovrastante *AP* e su quello sottostante *DE*, lungo il bordo della pietra, e in seguito si eliminerà con gli utensili adatti tutto quello che eccede queste linee, sia cominciando a crearvi delle cesellature, quando la pietra può rompersi con lo scalpello, come tutte le pietre tenere; sia facendovi un *plumée* o solco, al posto della cesellatura con la punta del martello, come si è obbligati a fare con certe pietre dure, granulate di grossa grana, come il Granito d'Egitto, come sono quelle della costa del Nord della Bretagna, che lo scalpello non scalfisce.
Quando le quattro linee del contorno della superficie sono determinate e tirate, si elimina la pietra che le eccede, esaminando di volta in volta con una riga messa dove si vuole, se si applica ai lati opposti senza che si possa intravedere della luce tra la riga e la pietra, poiché questa luce indica delle cavità o dei rilievi; è la prima cosa che imparano i Tagliatori di pietra, ed è così che viene verificata la correttezza e la precisione del loro lavoro. Ed è questo lo scopo del nostro disegno, in cui non ci proponiamo di correggere degli Operai nelle operazioni manuali, che sono un effetto dell'abitudine, ma di formare dei conoscitori che possano giudicare il proprio lavoro, correggerlo quando hanno sbagliato, e dirigere quelli che commettono errori.

DIMOSTRAZIONE

La pratica di questo Problema è dimostrata nella 2° proposizione del II Libro di Euclide, che dice che tre linee rette che si incrociano sono necessariamente in un piano, e di conseguenza tutte quelle che sono tirate in questo triangolo; dunque i raggi visivi *LH, LE* col lato della riga *GE*, formano un triangolo, nel quale [per costruzione] sta la linea *NO* della riga *IK*, come i raggi visivi *MG, ME*, col lato *EH* e la linea *FK* della riga *IK*; dunque le linee *BP* e *CE*, che uniscono le due righe, e tutte quelle che si possono tirare dal un lato all'altro, sono nello stesso piano; in conseguenza la superficie così formata sarà esattamente piana, o in termini dell'Architettura, un Paramento diritto, *che era quello che bisognava fare.*
Quando non c'è bisogno di fare degli spigoli paralleli tra di lorosi può formare una superficie piana con tre punti dati, facendo un solco o una cesellatura con la riga posata leggermente, da uno dei punti dati all'altro,

come per fare un triangolo, ed eliminando in seguito la pietra, che si trova ad eccedere la profondità di questi tre canali o plumées, che si può conoscere facendo scorrere di traverso la riga su questi canaletti, come altrettanti appoggi che deve livellare.
Benché non si tratti qui di insegnare agli Operai l'utilizzo degli utensili,



di cui supponiamo essi abbiano fatto pratica, abbiamo creduto essere conveniente riportarne qui i tratti essenziali, per riportarne i nomi più comuni, e il loro utilizzo, è una conoscenza necessaria per le persone di Gabinetto, che hanno passione per le Arti.

TESTU[1], martello che ha da un lato una punta e dall'altro una mazza per abbozzare una pietra eliminando delle parti con la mazza, con la quale si picchia sui bordi per far saltare una scheggia, e finire di levare il resto con la punta, che fa una gobba. Il *Disegno* di questo utensile è al di sotto in *a.*
LAYE[1] o *martello bretelé*, che ha da un lato una lama unita e dall'altro una lama dentata, che fa dei solchi; il suo *disegno* è in *b.*
Scalpello per cesellare, ce ne sono di differenti dimensioni; quando lo scalpello è largo con un manico per essere spinto con la mano, come gli utensili di Falegnameria, è chiamato *ferro quadrato*: ci si serve di uno scalpello per le pietre tenere e dure con grana legata; ma quando la grana è sabbiosa, come nelle pietre delle cave della costa del Nord della Bretagna, di cui ho parlato, gli Operai se ne servono poco, e fanno tutto con la punta.
Mazza[1] per spingere lo scalpello.
Martello a due punte[1] per la pietra dura; quando è un po' più lungo è chiamato *piccone*; il suo disegno è in *e.*
Raspa bretelé[1] per la pietra tenera.
Uncino[1].
Rippe.[1]
Compasso a falsa squadra.[1]
Quando le quattro linee del contorno della superficie sono determinate e tirate, si elimina la pietra che le eccede, esaminando di volta in volta con una riga messa dove si vuole, se si applica ai lati opposti senza che si possa intravedere della luce tra la riga e la pietra, poiché questa luce indica delle cavità o dei rilievi; è la prima cosa che imparano i Tagliatori di pietra, ed è così che viene verificata la correttezza e la precisione del loro lavoro. Ed è questo lo scopo del nostro disegno, in cui non ci proponiamo di correggere degli Operai nelle operazioni manuali, che sono un effetto dell'abitudine, ma di formare dei conoscitori che possano giudicare il proprio lavoro, correggerlo quando hanno sbagliato, e dirigere quelli che commettono errori.

1
guardare le figure sulla planche 28. Gli utensili sono contrassegnati con delle lettere che corrispondono al loro disegno

La pratica di questo Problema è dimostrata nella 2° proposizione del II Libro di Euclide, che dice che tre linee rette che si incrociano sono necessariamente in un piano, e di conseguenza tutte quelle che sono tirate in questo triangolo; dunque i raggi visivi *LH*, *LE* col lato della riga

NOTA SULL'USO

Il modo di formare regolarmente una superficie piana è il fondamento di tutta la Pratica, non solo del taglio delle pietre e dei legni, ma anche di tutte le Arti che sono di qualche utilizzo in Architettura, come la Carpenteria, Falegnameria, Arte del fabbro e altre; perché occorre quasi in tutte le opere fare dellesuperfici piane. Quando si tratta di piccole parti che si possono tenere in mano, gli operai ne esaminano la correttezza chiudendo un occhio e guardando con l'altro la superficie piana di profilo, di modo che il raggio visivo lo percepisca come una linea retta; poiché se uno dei corpi sembrasse incrociare l'altro opposto, è una prova che il paramento è *incurvato*; e quindi eliminano della materia su uno degli angoli o sui due opposti, se conviene, per cancellare questa parte che sembra incrociare il lato destro che si guarda di profilo.Nelle grandi opere che non possono essere guardate allo stesso modo a causa della loro posizione, si appoggia una riga da un angolo della superficie al suo opposto, o se la riga non è abbastanza grande, occorre tendere dei fili o corde dagli uni agli altri seguendo le diagonali, per vedere se si toccano sul bordo, dove si incrociano. è così che si possono esaminare, come ho detto altrove, se una porta o una tavola si sia inarcata seccandosi, o per altre cause; poiché per piccolo che sia l'intervallo che resti tra queste due diagonali, è una prova che la superficie è incurvata e non piana. Vediamo ora come si arriva alla formazione delle superfici curve.

PROBLEMA II

Fare una superficie Curva Concava o Convessa, che sia una parte di un corpo regolare primitivo, Cilindrico, Conico o Sferico.

IN TERMINI DELL'ARTE.
Scavare un intradosso, o formare un estradosso di Volte regolari delle tre prime specie.

PRINCIPI DI APPLICAZIONE

Possiamo dividere le volte 1° in piane 2°in curve in ogni senso. 3°in miste, che sono diritte in un senso e curve nell'altro.
Le piane sono le architravi, i soffitti orizzontali, e infine le Trompes piatte, di cui i soffitti sono inclinati all'orizzonte.
Le curve in ogni senso sono le sfere, gli sferoidi, gli anelli, chiamati volte sul noyau, e le viti.
Le miste sono i cilindri o botti, e le coniche, che sono diritte seguendo la loro direzione, e curve seguendo la loro larghezza.Questa divisione fa vedere subito quali sono gli strumenti di cui ci si può servire per formarle. 1°che le piane non si possono fare che con la riga. 2°Quelle che sono tutte curve non possono essere fatte che con la *sagoma* di un contorno opposto a quello della loro superficie, cioè, Concavo per gli Estradossi, e Convesso per il vuoto dell'intradosso. 3° infine che le miste possano essere fatte per mezzo di uno di questi due strumenti, *la riga* o *la sagoma*.Occorre ancora suddividere le miste, in quelle di cui la curvatura è uguale, come nelle botti cilindriche, e ineguali, come nelle coniche. Le prime possono essere fatte indifferentemente con la riga o con la sagoma; ma le altre non possono essere comodamente fatte che con la riga; poiché occorrerebbe continuamente cambiare sagoma.

SUI SEGMENTI CILINDRICI

Per quanto si possa scegliere per formare una superficie cilindrica lo strumento curvo della sagoma, o quello diritto della riga, e che uno dei due basti, è tuttavia vero che per ben operare si ha bisogno sia dell'uno che dell'altro. Se ci si limita all'uso della sagoma, per la preparazione del taglio della pietra o del legno basta innalzare un paramento, per tracciarvi i lati paralleli *hi* della porzione ***(Fig. 10)*** cilindrica, i quali devono servire d'appoggio alla sagoma *C*, sia che si tratti di cavità o di rilievi, di intradosso o di estradossi. Essendo questi due lati tracciati sul paramento, non resta che eliminare la pietra o il legno, fino a che la sagoma *C*, appoggiata sempre perpendicolarmente a questo paramento, si muova lungo queste linee rette, e si aggiusti perfettamente della cavità *hme*; o sopra la convessità, se al posto della cavità si tratta di un pezzo convesso, di modo che non resti alcun vuoto tra uno e l'altro.

Se non si vuole usare che la riga *RE*, al posto di un solo paramento *ad*, che risponde all'intradosso, occorre farne due opposti *af, bg* paralleli tra loro che sono le basi, nel linguaggio dell'arte le teste della pietra; perché per determinare la posizione di questa riga *RE*, occorre fissargli due appoggi, come ne sono serviti due alla sagoma per determinare la posizione dell'arco; dunque questi non possono essere riuniti sopra una stessa superficie piana, ma devono essere separati dall'intervallo delle basi del cilindro; poiché la sagoma o modello curvo deve muoversi in linea retta, e il modello diritto deve muoversi secondo una linea curva, circolare o Ellittica, secondo la natura delle basi o segmenti del cilindro da fare.
Da cui segue che si può procedere in due modi per l'esecuzione.
Primo, se si vuole utilizzare solo la riga, occorre cominciare innalzando due paramenti paralleli tra loro e opposti, per mettervi i segmenti delle basi date; cioè, per formare le due teste della pietra, e tracciare questi due segmenti uguali, di modo che le loro corde siano parallele; ed è per questo motivo che dopo aver tracciato il primo con un pannello o con un compasso, se il centro si trova sulla testa si applicherà una riga sulla corda, e un'altra riga alla testa opposta, che si sistemerà, in maniera tale che guardate di profilo, l'una non sembri incrociare l'altra; in questa situazione si traccia la linea che deve servire da corda del secondo arco, sulla quale si applica il pannello dello stesso segmento di cerchio o di Ellissi per tracciarlo, se le teste sono parallele, o un altro segmento dato sul Disegno, se non lo sono; poi dopo aver tracciato queste due teste, si eliminerà la pietra con la riga tra i due archi delle basi, facendola scorrere su questi archi parallelamente a delle distanze proporzionali alle estremità di questi archi, come si vede alla ***Fig.10*** la riga *RE*; e dunque la cavità cilindrica sarà ben formata.

Secondo, se non si vuole usare che la sagoma C, si comincerà ad elevare un paramento *ablK* (per mezzo del Problema numero uno) sul quale si tracceranno due linee rette *hi, ed,* parallele tra loro, e distanti dell'intervallo della corda *he*, dalla sagoma della cavità che si vuole formare, poi senza farsi dei problemi per formare dei paramenti per tracciarvi le teste, si eliminerà la pietra seguendo il contorno della sagoma C, che sarà tenuta ben perpendicolare alla prima superficie piana, e che

"Fig. 10" riguarda la squadratura di segmenti cilindrici

verrà fatta scorrere in questa posizione lungo le linee rette *hi, ed,* che devono guidarne il movimento, di modo che non ci sia alcune luce tra la pietra e la sagoma ; ma poiché potrebbe accadere che la sagoma si infilasse troppo nella cavità, senza che ce ne si accorga, se il segmento fosse molto simile alla grandezza del semicerchio, occorre creare due

parti convenienti *o p* , che siano le continuazioni della corda di una parte e dell'altra, sulle quali essa possa appoggiarsi; così si sarà sicuri che non si conficchi né troppo né troppo poco.Si nota che nella prima pratica occorrono due paramenti di preparazione prima di cominciare a scavare, e che in questa non ne occorre che uno, ma è anche meno sicura; poiché vi si possono produrre delle ondulazioni che la riga non farebbe; ed è anche vero che la riga può farne nel senso della larghezza, e non seguire esattamente il contorno della Curva data; così per operare il più perfettamente possibile, occorre servirsi dell'uno e dell'altro strumento, cioè della riga e della sagoma.

DEI SEGMENTI CONICI.

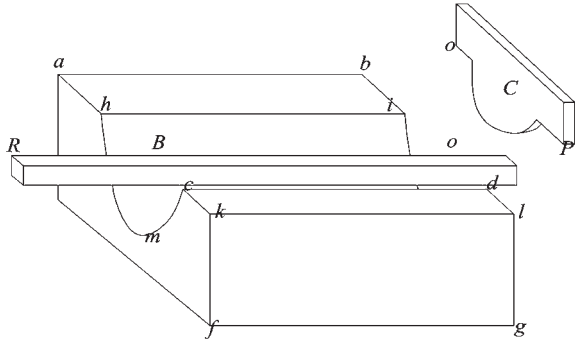
Abbiamo dato qui sopra la scelta di due strumenti per formare delle superfici cilindriche, non è lo stesso per le coniche, non ci si può assolutamente servire della riga; poiché bisognerebbe moltiplicare troppo le sagome, che cambiano contorno ad ogni punto di lunghezza, dato che le sezioni coniche simili aumentano verso la base, e diminuiscono verso la punta.

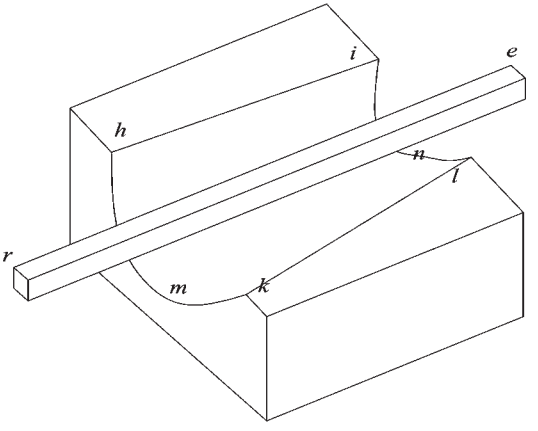
"Fig. 12" questa figura riguarda la squadratura di segmenti conici

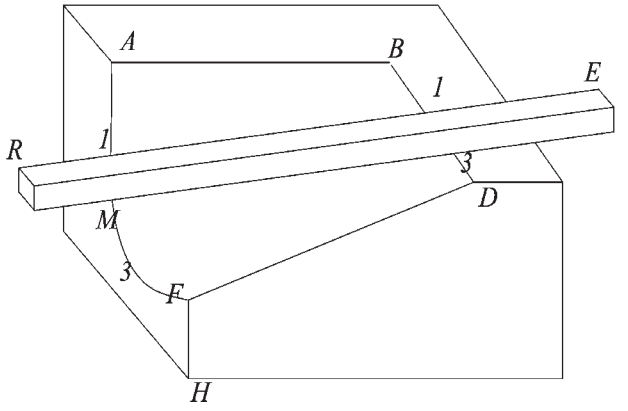
Da cui segue che la preparazione alla scavatura di un intradosso, o alla formazione di una superficie convessa di estradosso deve essere fatta con le due superfici piane delle teste, sulle quali si metteranno gli archi e le loro corde nello stesso modo che abbiamo detto per le cilindriche, con questa differenza, che non essendo gli archi opposti, uguali, per quanto simili, il movimento della riga che guida la scavatura non deve essere parallelo a lui stesso, ma più grande verso la base che verso la sommità del cono, nel rapporto dei contorni degli archi delle due teste, e poiché non è agevole compiere bene questo movimento a vista, bisogna dividere questi contorni *hmK, inl* ***(Fig. 12)*** in uno stesso numero di parti uguali tra loro, che saranno simili a quelle della testa opposta, e mettere la riga *re* sulle corrispondenti, per esempio, dalla seconda divisione di una testa, alla seconda divisione dell'altra, così delle altre, del terzo e del quarto; in questa situazione la riga non deve lasciare alcun vuoto al di sotto, cosa che si constata vedendo se vi passa la luce. Per poco che questa direzione sia cambiata, la riga non può esservi applicato senza lasciare del vuoto.
La ragione è molto chiara, poiché la riga deve tendere alla sommità del cono, di cui questo segmento è una parte troncata, senza il quale la sezione non sarà verticale, cioè attraverso la sommità; ora, abbiamo dimostrato nel primo Libro che non c'è che quella di rettilinea.
Quello che abbiamo detto per la formazione delle superfici concave si applica naturalmente alle convesse della stessa specie e grandezza; ma l'uso nella volte è raro, sono raramente estradossate.
Abbiamo supposto in questi esempi di segmenti conici e cilindrici, che le basi o teste opposte devono essere parallele tra loro, per la facilità dell'introduzione alla pratica; ma niente impedisce che non facciano con la superficie piana, che passa dalle loro corde, un angolo a piacere; l'operazione sarà sempre corretta, ma produrrà delle superfici concave o convesse differenti dal cilindro, per esempio, non si potrebbe applicare perpendicolarmente una sagoma che avesse per contorno l'arco di una di queste basi, per via che l'obliquità cambia la sezione del cilindro, che diventa più grande senza essere più profondo.

SULLE SUPERFICI SFERICHE

Poiché le sfere sono superfici curve in tutti i sensi, è evidente che non si può formarli che con uno strumento curvo, cioè una sagoma, che deve anche muoversi su un appoggio curvo, che è il cerchio di base del segmento che vogliamo formare; ora, poiché il cerchio è una figura piana, bisogna cominciare elevando un paramento sulla pietra o sul legno per tracciarvelo, e per mostrare che la posizione della sagoma su questo piano non è indifferente, stabiliremo le proposizioni seguenti.


a
b
h
i
o
C
R
B
o
P
c
d
k
l
m
f
g

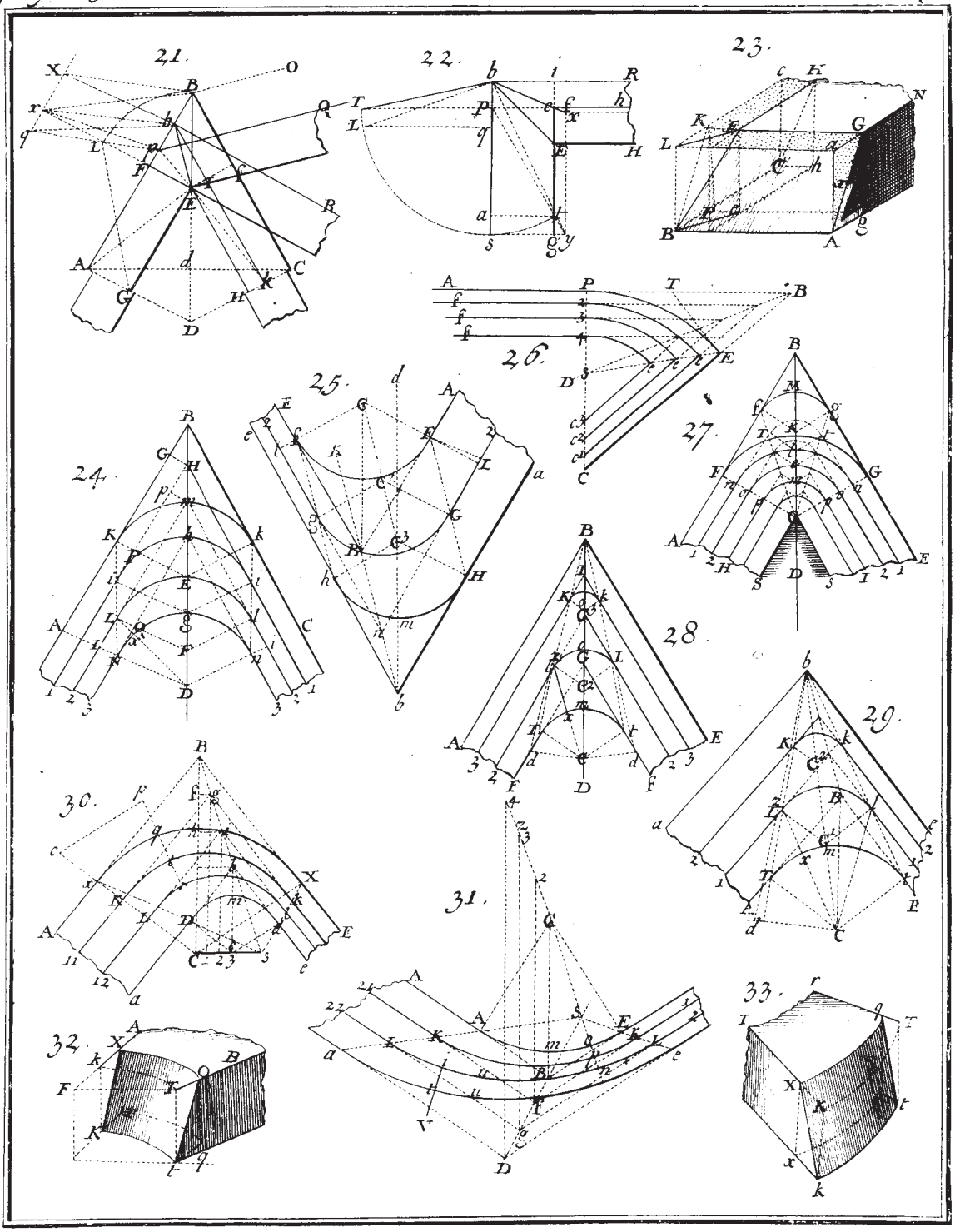

i
e
h
n
l
r
m
k



"Fig. 13" riguardo questa figura, essa non viene mai accennata in questo capitolo pur essendo rappresentata sulla planche 28

page 63

Pl 30



CAPITOLO II

Degli strumenti e approfondimenti degli angoli in pendenza.

Coloro che hanno scritto del taglio delle pietre, hanno parlato soltanto di quelle delle volte, prevenuti apparentemente sul fatto che non c'erano difficoltà nel taglio di quelle che sono destinate a essere poste orizzontalmente; tuttavia ci sono casi dove si ha bisogno dell'aiuto della geometria.
Ho visto per esperienza in una città marittima, dove il muratore si trovò molto imbarazzato per arrotondare un angolo in pendenza, che doveva collegare due diverse inclinazioni; dopo avere inutilmente tentato i mezzi per farlo, egli venne a chiedermi le tracce che non trovava affatto nei libri; ero giovane e poco esercitato nella sua arte, ma con i soli principi di geometria ho presto trovato le tracce che verranno spiegate qui di seguito.
Ho anche visto i tagliatori di pietra sbagliarsi così spesso nella disposizione degli angoli rettilinei in pendenza, che m'è sembrato il caso di cominciare le nostre spiegazioni con quelli, tanto di più che essendo molto semplici, è molto appropriato all'introduzione alla pratica.

PROBLEMA. V.

Fare lo spigolo di un angolo sporgente o rientrante, le cui facce sono in pendenze uguali o disuguali, con catene o bugnati sporgenti, di cui i lati si concludono ad un piano verticale.

Fig.21. Questa traccia può essere effettuata in diversi modi, con *biveau*[1] o senza obliquamente. Avendo preso con la falsa squadra l'apertura dell'angolo tra i due muri *ABC*, si porterà a squadra su uno dei sui lati *AB*, l'estensione *AG* della pendenza di una fila orizzontale, ad esempio, *2* pollici se la pendenza è un sesto su *12* di altezza, per tirare *GE* parallelo a *AB*, e si arretrerà lo stesso angolo seguente la propria diagonale *BD*, per tracciare l'angolo di vertice tra i due muri *GEH*, se le pendenze sono uguali ad ogni faccia; ma come succede a volte nei collegamenti dei vecchi con i nuovi lavori, che queste pendenze non sono uguali, sceglieremo per questo esempio quello del collegamento del *12° Hk* o *EI*, con il *6°AG* o *FE*, che ci darà un incontro di spigolo *bE*, che non si allinea più con la diagonale *ED*, così che l'angolatura diventa obliqua.

Fig.22. Essendo il piano orizzontale dell'angolo tracciato, si farà i profili delle pendenze delle facce, per ciascuna, poiché le suppongono disuguali, per avere le *biveaux* della loro inclinazione, e tutta la preparazione sarà fatta.

"biveau" squdra abraccia mobili per misurare gli angoli o tracciare le linee per i tagli delle pietre

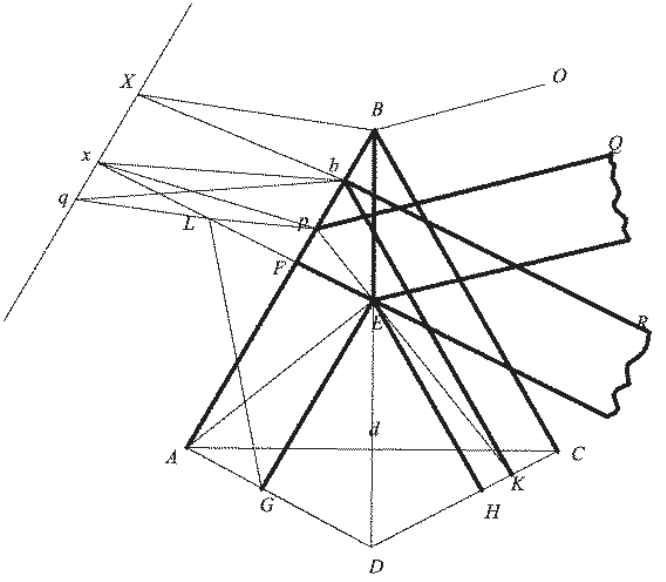


fig.21Fare lo spigolo di un'angolo le cui faccie hanno ugual pendenza

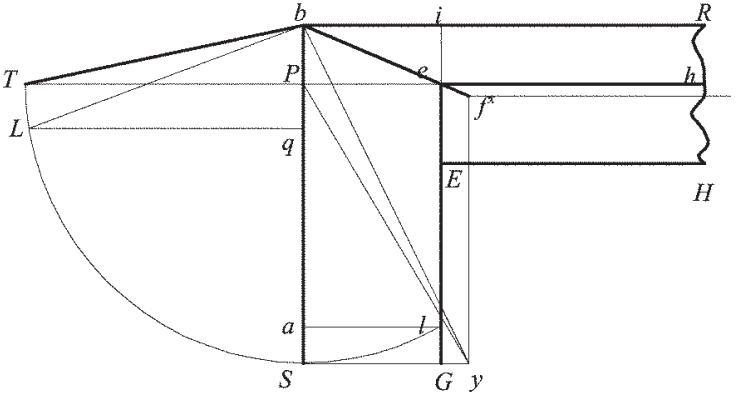


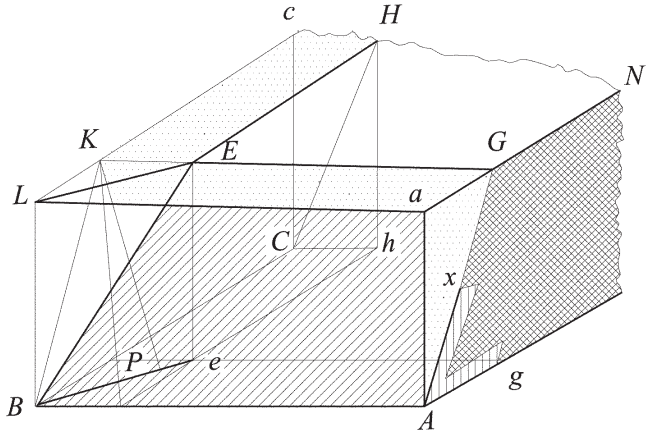
Fig.22Fare lo spigolo di un'angolo le cui faccie hanno pendenza

Per tagliare la pietra si comincerà per fare i due letti di sopra e di sotto paralleli tra loro dell'intervallo dell'altezza della fila orizzontale. In seguito

"sauterelle" falsa squadra composta da due righelli mobili in basso assemblati mediante un'estremità servono per tracciare o misurare un'angolo

avendo preso con la falsa squadra, con un compasso dei tagliatori di pietra, o con una *sauterelle*[2](falsa squadra composta da due righelli mobili in basso assemblati mediante un'estremità servono per tracciare o misurare un angolo) l'angolo di spigolo *ABC*, si traccerà sul letto di sotto, poi su ciascuno dei suoi lati, prolungate fino alla fine della pietra, ci si girerà perpendicolarmente, per formare i giunti ascendenti con due superfici piane, perpendicolari ai letti di sopra e di sotto, che si troveranno così perpendicolari a quelle delle facce quando saranno fatte.

Fig.23 I giunti, cioè, le superfici alle quali la pietra seguente deve applicarsi essendo fatte (con il problema I.) come *AN*, ci si applicherà



il***fig.23***

biveaux dato, che conviene ad ogni faccia, ad esempio, *GAE* nella **fig. 21** ponendo uno dei suoi bracci sul bordo *Ag* del letto di sotto **fig. 23** l'altro braccio *Ax* prolungato darà sulla faccia inclinata *AG* della pendenza, ed il punto *G* arretrato nella faccia superiore, dal quale si condurrà *GE* parallelo alla linea *AB* (secondo il Prob. I.) traguardando due righe poste sui letti di sopra e di sotto, l'una in *AB* stabile, l'altra nel punto *G*, intorno al quale verrà mossa fino a quando copre esattamente quella che è in *AB*, ben inteso che occorre che questi controlli siano prolungati oltre lunghezze della pietra, senza coprirle, perché osservandone una si potrebbe coprire l'altra.

Si opererà ugualmente sull'altro lato dell'angolo *Bh* o *BH*, servendosi di *biveaux* più chiuso o più aperto del primo, secondo la differenza che ci sarà della seconda pendenza rispetto alla prima, cosa che darà un'inclinazione di facce *BE* molto obliquo, espresso alla proiezione della **fig. 21** con la diagonale *bE*, che non divide l'angolo *AbK* in due parti uguali , come la diagonale *BE* delle pendenze uguali, cosa che fa un tipo di deformità inevitabile, che si scorge osservando l'angolo per parte anteriore, verso il mezzo sull'allineamento della "capitale"; ma nelle fortificazioni, in cui si devono coordinare le spesa ed evitare le demolizioni, si deve avere poco riguardo a questa piccola imperfezione; occorre a volte sacrificare il piacevole all'utile.

Si può anche fare la stessa cosa senza servirsi delle squadre , facendo una perpendicolare *Aa* di quadrato sui bordi *BA* e *gA*, dopo avere misurato l'altezza della pietra col filo a piombo *Aa*; quindi si prenderà al piano **fig. 21** l'indietreggiamento *FE* della pendenza, che darà sul fianco *aN* il punto *G*, da cui si tirerà *GA* che sarà la pendenza, e con lo stesso punto *G* una linea *GE* o *GK*, parallelo a *AB*, come abbiamo appena detto, per avere il bordo di letto di sopra, per la quale si farà passare parallela una superficie piana, che sarà il rivestimento in pendenza richiesta, togliendo tutto il prisma triangolare *AGa*, *LBK*, la cui faccia trapezoidale *BAGE* deve esistere, ed il triangolo restante *BEK* deve ancora essere tolto dalla la faccia laterale *BH*. Si vede che quest'operazione con perpendicolari è più semplice di quella dove dipende dai pannelli per tagliare le pietre, per ciò vale la pena di fare lo sviluppo delle superfici della piramide troncata, di cui quest'angolo fa parte, e che è esatta in questa sorta di lavori semplici.

Non si tratta altro che di determinare la larghezza della catena sporgente o di un bugnato, che si fa di solito in pietra con tagli di questi angoli, per le fortificazioni quando sono ad angoli sporgenti o per accompagnamento di decorazione negli angoli che rientrano, cosa che è molto facile con la proiezione orizzontale della cima dell'angolo **fig. 21** poiché se si determina al vertice la larghezza della catena o pilastro *EG=AF*, con le perpendicolari mandate dai punti *G* ed *E* su *AB*, la diagonale *EB* darà la lunghezza *AB* della base di questa catena in *AB*, che sarà più grande di *GE*, negli angoli sporgenti, e più piccola negli angoli rientranti.

Si può senza fare il piano della catena, trovare la larghezza con il calcolo; poiché si conosce di solito nelle parti di fortificazione la lunghezza della diagonale, che si chiama "capitale", e quella della "demi-gorge". Allora in un batter d'ali si può trovare di quanto la catena si allarga con la pendenza salendo di un angolo rientrante, o diminuendo di un angolo sporgente; dicendo, come la "demi-gorge" Ad sta alla capitale *dB*; così la pendenza data *AG* o *FE* sta alla differenza *FB* della base *AB*, e del vertice *GE* della catena di pietra tagliate, il cui lato *AG* deve essere in un piano verticale.

O se si misura la diagonale *EB*, non c'è che da fare il quadrato, si sottrae il quadrato di *FE*, la radice del resto sarà *FB*, differenza delle due larghezze della cima e del fondo; così aggiungendo questa differenza a quella del vertice della catena, si avrà quella che gli occorre dare alla base, ed all'opposto tagliandola in un angolo che rientra.

È visibile che lo spigolo di un angolo che rientra si fa nello stesso modo, supponendo la pietra invertita sottosopra, e togliendo al contrario tutta la pietra che si lascia agli angoli sporgenti.

La dimostrazione di questa pratica è fondata sulla relazione dei triangoli simili *AdB*, *EFB* retti in *d* e *F*, e che hanno un angolo comune in *B*; così conoscendo due lati, del primo si giunge alla conoscenza di quelli che sono loro omologhi nell'altra.

In secondo luogo sui rapporti dei profili o sezioni triangolari, presentate da piani perpendicolari a quello della base *ABC*, e che passano per varie

direzioni, una dalla diagonale *EB*, l'altra dal perpendicolare *EF* su *AB*, i quali triangoli hanno per altezza comune la distanza dei due piani ABC, del letto di sotto, e *GEH* del letto di sopra; di conseguenza questi triangoli fanno tra loro come le loro basi *EF* ed *EB*, che sono gli avanzi che determinano l'inclinazione delle pendenze.

Di qui segue che se l'angolo d'angolo *ABC* è di *60°*, la sua metà *ABd* sarà di *30°*, la pendenza del bordo delle facce, o il suo indietreggiamento *BE*, saranno doppia di quello di una faccia con il suo letto di sotto, espresso da *FE*; perché il seno *FE* di *30* gradi è soltanto la metà del seno totale *BE*.

Osservazioni sugli errori degli operai.

Sebbene il taglio di un angolo in pendenza sia così semplice che non suppone alcune tracce, si osservano tuttavia che suppergiù quasi tutti i tagliatori di pietre, che non vi sono abituati, vi fanno molti errori.

Il più comune è, che dopo avere fatto il rivestimento di una faccia in pendenza con i *biveaux* , posta la squadra sul bordo del letto, vogliono tracciare il l'intersezione di incontro tra i due muri con la stessa, posta in un altro modo, stendendo un braccio sul bordo del letto e di pendenza, e l'altro sulla faccia in pendenza, che hanno appena tagliato, sulla quale tracciano questo bordo, ed abbattono la pietra secondo questa traccia, con l'intersezione o la traccia del bordo del letto del lato di incontro tra i due muri, che è data dall'apertura dell'angolo dello spigolo in orizzontale.

In questa pratica ci sono due errori che sono più o meno grandi, a seconda che l'angolo orizzontale, che è propriamente quello dello spigolo acuto, retto o ottuso.

Quando l'angolo è retto, questa pratica è difettosa soltanto quando la pendenza è più o meno inclinata; poiché se lo fosse molto poco l'errore non sarebbe sensibile e potrebbe essere trascurata, ma se la pendenza è grande, dà una pendenza falsa al bordo di congiunzione delle due facce, e di conseguenza una pendenza falsa alla seconda faccia, che la rende troppo coricata.

Se l'angolo orizzontale dell'angolazione è acuto, la seconda faccia rientrante diventerà troppo inclinata, cioè, l'angolo della sua pendenza sarà più aperto di quello della prima, al quale tuttavia deve essere uguale, secondo l'ipotesi.

Infine se l'angolo d'angolo è ottuso, succederà al contrario che la seconda faccia sarà troppo stesa; quest'osservazione non meriterebbe una dimostrazione altrove che in una proposta elementare di pratica; ma per illuminare i primi passi che si faranno nell'arte del taglio pietre, mi sembra che non occorra trascurare nulla.

Spiegazione dimostrativa.

In primo luogo, abbiamo detto nel terzo libro, che i *biveaux* erano gli strumenti per misurare gli angoli, i piani e le superfici tra esse, la cui apertura si deve prendere perpendicolarmente alla linea della loro comune sezione; ma è chiaro che, nella situazione di cui abbiamo appena parlato, nessuno dei suoi bracci è perpendicolare alla comune intersezione della seconda faccia in pendenza con quella del letto di sotto; poiché quando anche l'angolo orizzontale dello spigolo sia retto, avrebbe soltanto uno dei suoi bracci perpendicolari a questo comune intersezione, che è il bordo del letto e della faccia, essendo l'altro braccio steso sulla pendenza della prima faccia, come a dire, il primo rivestimento che è stato fatto non sarà più perpendicolare allo stesso bordo di letto e della seconda faccia; dunque (con l'ultimo lemma del terzo libro) non si può determinare né segnare giustamente l'angolo dei piani, e di conseguenza il bordo di unione delle due facce in pendenza, che dipende necessariamente dalla pendenza giusta delle due facce; dunque questa pratica è ridicola in qualsiasi altro caso che quello di un angolo perpendicolare e senza pendenza, da dove i tagliatori di pietra hanno appreso.

È tuttavia vero che quando l'angolo di spigolo è retto e la pendenza inferiore a un 6°, l'errore non è molto sensibile; ma lo è ancora abbastanza perché lo si possa distinguere dal vero profilo; come mostreremo.

Sia **fig. 22** l'angolo di spigolo *abR* retto, a due pendenze uguali o disuguali, non importa, segnata con le linee di proiezione del vertice *ge*, eh, avendo prolungato he indefinitamente verso T, si farà su ab per base l'angolo della pendenza della faccia *bR* in *abT*, che taglierà la perpendicolare *PT*, altezza della base, al punto *T*, dal punto *P* per centro, e *PT* per raggio, si descriverà un arco di cerchio, che taglierà *ba* in *S*, ed *eg* in *t*, con i punti *P* e *t* si condurrà *Py* indefinito, e per *S* una parallela a *bR*, che taglierà *Py* al punto *y*; dico che la linea della pendenza della faccia *bR*, stesa sulla pendenza della faccia *be*, non taglierà affatto il bordo al letto superiore della base *eg*, allontanata da *ab* della pendenza, per esempio del *6°*, che si è proposto con la posizione della proiezione *eg*, ma all'interno, in un'altra linea come *xy* alla stessa altezza, soltanto quella che si è fissata alla base, in modo che l'angolo della pendenza coricata, avendo steso così maggiormente la pendenza, e cambiato la pendenza della faccia sul letto, che è allora più acuta.

Per dimostrarlo non c'è che da far muovere il triangolo della pendenza *TbP* attorno al suo lato *bP*. È chiaro che essendo l'angolo *TPb* retto, il punto *T*, in questa rivoluzione descriveranno un arco di cerchio nell'aria, che è rappresentata qui dall'arco *TSt*, che incontrerà i piani verticali su ba della prima faccia a squadra sul letto, ed *eg* del bordo della faccia in pendenza, l'uno in *S*, l'altro in *t*, al sotto del punto *S*, della quantità a *S*, come a dire, al sotto dell'altezza della base che si suppone uguaglia a *PS*; quindi perché la linea *Pt* raggiunga quest'altezza deve essere prolungata fino alla linea *Sy*, che incontra al punto *y*, e con la stessa ragione la proiezione del bordo di unione delle facce sarà prolungata all'interno della prima faccia in *x*.

Di qui segue che tale posizione della squadra cambia le pendenze che ci si erano state proposte, e li rende più acuti; poiché sulla stessa altezza di base *PT*, le larghezze delle sue basi orizzontali e *P*, ei aumentano di una quantità *gy, fx*; così per la grande pendenza che trasporta *gy* in *Pq*, si avrà l'angolo della pendenza *qbL*, invece di quello che ci si era proposti *qbT*, che fa *qL* uguale all'altezza fissa *PT* dalla base; ciò dimostra ovviamente che non si devono mai stendere le squadre sulle pendenze, come fa la maggior parte degli operai, se vi non si presta attenzione.

Fig.21. Secondariamente per vedere ciò che succede quando l'angolo di spigolo è acuto, occorre osservare che essendo la diagonale *EB* del piano orizzontale, più lunga del perpendicolare *FE*, che esprime la pendenza sul lato *AB*, ed anche più del lato *FB*; poiché è l'ipotenusa di un triangolo retto *EFB*; se si prende *Fb = FE* e *Fx* uguale all'altezza della fila orizzontale, l'angolo *Fbx* esprimerà la vera pendenza, il quale essendo esterno in relazione al triangolo *bBx*, è quindi più grande che *FBx*, che è ancora più grande, per lo stesso motivo, che è quello dell'incrocio allo spigolo sulla diagonale *BE*, che è, come lo abbiamo appena detto, più grande di *FE*.

Attualmente se si trasporta questi differenti angoli su un profilo, come alla *figura 21*, ad uno stesso vertice come *B*, si vedrà che l'angolo della pendenza *FBX* eccede quello dell'incrocio delle facce *FBx*, della quantità *xBX*; quindi diminuirebbe in uguale misura la pendenza dell'intersezione, ed avanzerebbe il suo vertice *x* in *X*, in modo che la faccia della pendenza in cambiamento sia molto meno inclinata di quanto deve essere, secondo ciò che ci si era proposti.

3°. Se al contrario l'angolo orizzontale dello spigolo è ottuso **Fig.21** e **22**, come *ABO* o *ApQ*, essendo il lato *FE* più grande *Fp*, l'angolo *Fbx* della pendenza di faccia, trasportata all'interno sul vertice dell'angolo p, darà un punto *q* all'interno di *x*, che fa vedere che l'angolo dei ***biveaux*** è più acuto dell'angolo Fpx di un angolo xpq; di conseguenza darà una sezione di faccia più coricata di quella che era servita a formare questa, cosa che è assurda.

Non è difficile dimostrare che il lato *FB*, nell'angolo acuto, è più grande di *FE*, che *FE* è uguale a *Fb* nell'angolo retto, e che è più grande di *Fp* nell'angolo ottuso; perché nel quadrilatero *EFBf* essendo gli angoli, in *F* e f retti, gli altri due in *B* ed *E* saranno uguali alla somma di due retti, e l'angolo *B* essendo acuto, la metà dell'angolo *FBE* sarà più piccola della metà dell'angolo *FEf* ottuso; ma al più grande angolo è opposto il più grande lato; dunque *FB* è più grande di quanto sia *FE*, questi lati sono uguali con angolo retto; dunque *Fb = FE* è più grande con angolo ottuso, e *Fp* più piccolo di *FE*.

È così ovvio come l'angolo di intersezione delle facce con la diagonale è sempre più acuto che quello della pendenza; perché la sua base è sempre più grande di quella della pendenza, l'altezza dalla base resta la stessa. La ragione è che la base di quest'angolo in *EB*, nell'angolo acuto, o *Eb* nel retto, ed *EP* nell'ottuso è sempre l'ipotenusa di un triangolo retto, il cui indietreggiamento della pendenza *EF* è un lato.

Da qui segue ciò che abbiamo detto sopra
I°. Avendo il *biveau* dell'angolo che sono l'intersezione del letto con quella di due facce, non ci potrebbero servire solamente per tracciare le pietre angolari, chiamate " *Ecoinçons*", e non le attigue del seguito alla destra o alla sinistra; perché sarebbe troppo sottile, cioè, troppo chiuso negli angoli acuti, e troppo grasso, cioè, troppo aperto negli angoli ottusi.
II°. Che occorre considerare quattro tipi di angoli in uno spigolo di pendenze, uguali ad ogni faccia, e cinque, quando non sono uguali; sapere,
1°. l'angolo orizzontale del letto che ho chiamato angolo di spigolo *ABC* o abR **Fig.21** e **22**. Quest'ultimo è sempre considerato come un angolo lineare e non di piani.
2°. L'angolo di pendenza *abT* **Fig.22.** che è l'angolo del piano della faccia inclinata con il letto orizzontale; quest'ultimo è in una sezione perpendicolare all'altra, che sono questi due piani alla loro comune intersezione come la abbiamo detta al terzo libro.
3°. L'angolo dell'intersezione di letto e di spigolo *ABE*. Quest'ultimo è sempre diverso dall'angolo della pendenza, come lo abbiamo appena dimostrato.
4°. L'angolo di inclinazione dell'incrocio con il letto, misurato sulla diagonale dell'angolo orizzontale dello spigolo; quest'ultimo è sempre più sottile dell'angolo della pendenza, e non è perpendicolare sul piano orizzontale, solo quando le pendenze delle facce siano uguali tra loro. Poiché quando ce n'è una più inclinata dell'altra della faccia tra i due muri, l'intersezione d'angolo non è più in un piano verticale ma inclinato, cosa che la fa sempre apparire obliqua senza rimedio.
5°. Quando le facce sono in pendenze disuguali, è chiaro che ne occorre osservare le varie pendenze, ed avere una misurazione per ciascuna.
6°. Si potrebbe contare un sesto angolo *ABK* **Fig. 23**, formato dall'intersezione di un piano verticale *BLC*, supposto di un lato, con origine nella faccia inclinata, con quello della faccia in pendenza *GABK*, quest'ultimo avrebbe la propria utilità per tracciare l'angolo in pendenza, in una pietra ad angolo retto col suo letto. Abbiamo dato il modo di trovarlo all'inizio di questa dimostrazione.
La distinzione di quest'angoli è necessaria soltanto per conoscere la differenza tra loro. Basta avere le aperture di due, sui quali occorre regolarsi per le tracce , sapere quello di spigolo, sul quale
conviene formare un pannello; perché si applicherà sui letti, e quello della pendenza che basta prendere con il ***biveau***, perché deve applicarsi in ugual modo semplicemente, sulle facce ed i letti, come sui giunti ascendenti.
Tutto ciò che abbiamo detto sopra degli angoli sporgenti deve applicarsi a quelli rientranti, con questa differenza, che occorre prendere la parte superiore per l'inferiore, e togliere in uno la materia di pietra o di legno che si lascia nell'altro.

PROBLEMA. VI.

Collegare due pendenze uguali o disuguali con un arrotondamento in un angolo dato.

Si può arrotondare un angolo in due modi, o con arrotondamento cilindrico, che sia uguale superiormente come inferiormente; o con un arrotondamento conico, che diminuisce, o aumenta alzandosi sulla base.

Arrotondamenti cilindrici.

Le pareti che formano un angolo sporgente, o un angolo che rientra possono avere pendenze diverse; sebbene secondo l'impiego ordinario siano anche inclinate all'orizzonte; come un *6°*, o un *12°*, ecc.. . Succede a volte che uno sia più pendente dell'altro, sia perché non sono stati costruiti in stessi tempi, sia perché ci sia stato qualche motivo di solidità o di riguardo, come differenze d'altezza e di carico.

Primo caso, dove le pendenze sono uguali.

Sia ***Fig. 24*** l'angolo dato *ABC* acuto o ottuso, sporgente o che rientra, che si vuole arrotondare ugualmente superiormente ed inferiormente. Avendo determinato il raggio *EK* dell'arrotondamento della base in arco di cerchio, si dividerà l'angolo dato *ABC* in due parti uguali da una diagonale *BE*; in seguito si traccerà il piano di ogni base secondo la pendenza che darà la loro varia altezza, se non sono uguali, con parallele ai lati *AB, BC*, come *1H, 2m, 3h, ecc.*. Si alzeranno su *AB* e *BC* le perpendicolari KE e kE uguali al raggio del cerchio, di cui l'arco deve formare l'arrotondamento, di modo che esse determinino il punto E della diagonale *BD*. Con questi punti *K* e *k* si condurranno due paralleli a questa diagonale *KN* e *kn*, che taglieranno le proiezioni dei letti di ogni base ai punti *i, L* e *N*, dai quali si condurranno paralleli alle linee *KE* e *kE*, come *LF*, *lF*, *ND*, *nD*, i punti *EgFD* saranno i centri degli archi d'arrotondamento dei letti di ogni piano, dai quali si descriveranno gli archi *Kmk*, *ii*, *Ll*, *Nn*, e così via, fino a che si giunge all'altezza della parete.
Se si volesse conoscere l'indietreggiamento dei centri di ogni base con il calcolo, non ci sarebbe che da fare l'analogia seguente: Come il seno dell'angolo *ABD*, metà di *ABC*, sta alla distanza perpendicolare da una base all'altra sul suo piano orizzontale, così il seno totale sta alla diagonale o distanza dei centri di ogni base.

Dimostrazione

Poiché l'arrotondamento dell'angolo deve essere di una porzione di cerchio uguale superiormente ed inferiormente, secondo l'ipotenusa; e che quest'arrotondamento deve essere insensibilmente ricongiunto alle superfici piane delle pendenze, si tratta di fare un settore di cilindro scaleno, che sia toccato da due piani inclinati all'orizzonte, ma un piano può toccare un cilindro soltanto secondo il suo lato retto, che è principalmente parallelo al suo asse. Dunque i due contatti dei piani delle pendenze devono essere due linee rette parallele tra esse, ed all'asse del cilindro come *KN, kn*; ma visto che le linee *AK, 3N, Ck, 3n* sono parallele tra esse, esse sono nello stesso piano delle linee *KN, kn*, e tangente alle basi superiori ed inferiori del cilindro; poiché sono (con la costruzione) perpendicolari ai raggi *KE, ND* e *kE, nD*; dunque questi piani di pendenza sono tangenti al cilindro, secondo le linee *KN, kn*; questo è ciò che occorreva fare.
È chiaro che tutti i centri degli archi di cerchio delle tangenti del solido, tagliato parallelamente alla sua base *AKmkC*, devono stare sulla diagonale; poiché si suppongono le pendenze uguali. Non è meno visibili quanto i loro centri sono tra loro a distanze uguali di quelle dei vertici degli angoli, formano su questa diagonale con le linee parallele, che esprimono i giunti di letto di ogni base, di cui sono la proiezione; poiché se dal vertice *H* si tira su *AB* la perpendicolare *HG*, si vedrà che a causa di questi paralleli si avranno molti triangoli retti simili, che daranno *BG* sta a *GK* come *BH* sta a *HE* come *GH* sta a *KE* che è uguale a *LF* uguale a *ND*, quindi *GH* sta a *ND* come *BH* sta a *BE* come *Hi* sta a *Hg*; cioè, ci sarà sempre relazione tra il raggio e la pendenza, e tra la pendenza di ogni base e la sua diagonale. Così supponendo le basi uguali, gli indietreggiamenti dei centri, saranno uguali alla diagonale *BH*; allora si avrà *Eg=gF=FD=Ki=iL=LN* , e se non sono uguali si avrà *KP* uguale *GH* che sta a *Ki* come *LQ* sta a *LN*.

Corollario.

Poiché la distanza dei centri degli archi d'arrotondamento tra loro, o, che è la stessa cosa, quella della circonferenza da una base all'altra, presa sulla diagonale, è uguale a quella della pendenza di una base sull'altra, misurato l'angolo di angolazione sulla diagonale, egli segue che se l'angolo delle pendenze è di *60* gradi, il loro intervallo sarà il doppio della pendenza, perché la pendenza *GH* sarà il seno di *30* gradi, o dell'angolo *GBH*; quindi *BH=2GH*, ciò che è necessario osservare; come anche, essendo la diagonale *BH* sempre più grande della pendenza *GH*, la base delle pendenze d'arrotondamento presa alla diagonale, sarà sempre più grande quella della pendenza delle facce, comunque l'angolo delle facce in pendenza sarebbe molto ottuso; perché *BH* è sempre l'ipotenusa

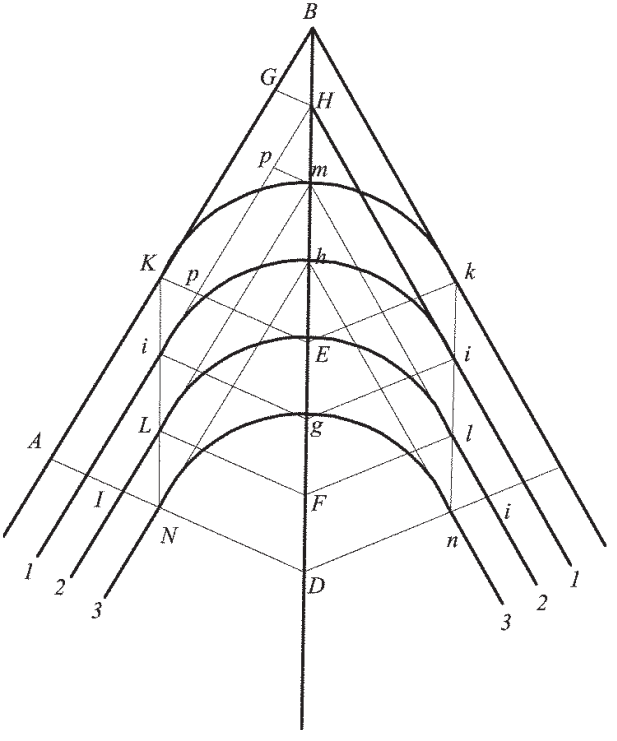


fig. 24 arrotondamento cilindrico con pendenze uguali in relazione a *GH*.

Osservazione sugli errori degli operai.
Mi hanno fatto osservare in due posti marittimi, uno al castello di San Malo, alla punta del Galere, l'altro ad una Bastione del Forte San Loüis a Santo Domingo in America, degli angoli acuti di fortificazioni con

arrotondamenti cilindrici, come caratteristiche del taglio delle pietre molto difficili, da cui gli operai non potevano venire a termine, che è stata causa di demolizioni più di una volta, e di tracciare le pietre parte a parte sul mucchio, perché dando la stessa pendenza all'arrotondamento e alle facce, prendeva una tale configurazione, che non si poteva collegarlo. Sorpreso che una cosa, che sembra semplice, avesse tanta difficoltà, ci ragionai un momento per cercare la soluzione, e appresi anzitutto che la pendenza dell'arrotondamento cambiava continuamente, dalla traccia perpendicolare *IN*, sulla nascita *N* ad ogni faccia fino alla sua diagonale *gE*, cosa che faceva un rivestimento sinistro, sebbene parte di un corpo cilindrico regolare; ma che sembra sinistro, perché i suoi quattro angoli non sono in uno stesso piano; poiché se si manda al letto di sotto della base *2E2*, le linee *DI*, *DL*, *DE*, che se ne tagliano i raggi della base seguente, o del letto di sopra della stessa fila di pietre, è chiaro che è *IN* è più piccolo di *Lx*, e *Lx* più piccolo *Eg*. Ma è costante che le superfici dei giunti ascendenti di ogni fila devono essere in piani verticali, le cui linee *DI*, *DL*, *DE*, *ecc...*, sono la proiezione; quindi il giunto che passa in *x*, deve cadere al letto di sotto in *L*; di qui risulta una nuova difficoltà, che non può essere scorta dagli installatori che non sanno affatto geometria; è che il giunto ascendente, di cui *Lx* è la proiezione orizzontale, o per parlare come loro, il piano, non devono essere una linea diritta, ma una parte d'ellisse, poiché è la sezione obliqua di un cilindro scalene *KmkngN*; per la verità essendo questa curvatura molto poco sensibile, si può osservarla come una linea diritta; tuttavia abbastanza per fare scorgere nel lavoro completato qualche necessità di aggiustamento, se le basi sono molto alte. È visibile che questa curvatura diminuisce di misura se il giunto si avvicina alla diagonale *DB*; poiché il giunto che sarà nello stesso piano, visto che potrebbe essere *Eg* della seconda base, è perfettamente perpendicolare; perché è in un piano che taglia il cilindro con il suo asse *DE*.
Non si crederebbe che ci siano così tante cose da considerare nell'esecuzione di un lavoro, che parrebbe molto semplice al primo approccio.

Secondo caso d'arrotondamenti cilindrici, quando le pendenze delle facce non sono uguali.

Fig.25. La differenza di questo caso con il precedente consiste soltanto nel fatto che nella proiezione orizzontale delle basi, che è più chiusa da un lato che dall'altro, perché Ee ha meno pendenze di *Aa*, la linea *Bb*, che passa per il vertice dell'angolo superiore *EBA*, ed eba inferiore, non si confonde con la diagonale di ogni angolo *BC* e bC^3, di seguito l'asse del cilindro che deve essere parallelo all'intersezione *Bb* delle facce in pendenza *Eb* ed *Ab*, forma con le tre linee precedenti un parallelogramma $bBCC^3$, inclinato all'orizzonte.

Per trovare i centri dell'arrotondamento dei letti di ogni base, si porterà sull'asse CC^3 le lunghezze *FG* in CC^2, e *GH* in C^2C^3 cioè, le parti della linea *FH*, che è quella del contatto delle facce in pendenza, e del cilindro scaleno dell'arrotondamento, comprese tra le sezioni paralleli e orizzontali del letto di ogni fila orizzontale, come abbiamo fatto nel caso precedente, al quale si è rinviato il lettore per la dimostrazione, e le osservazioni che la seguono; è del resto chiaro che l'asse del cilindro, nel quale stanno i centri di tutti gli archi di ogni base arrotondata, deve passare dalle diagonali *BC* e bC^3 dei loro angoli *EBA*, ed eba, che sono

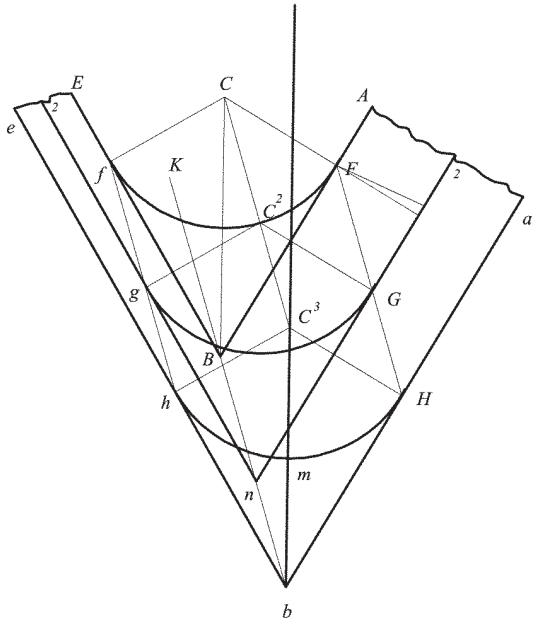


fig.25, arrotondamento cilindrico con pendenze diverse

uguali; poiché (secondo il *4°* del *4°* libro di Eucl.) il centro di un arco situato in un angolo è nella sua diagonale, e perché le diagonali bC^3 e *BC* sono parallele

ed uguali, con l'ipotesi, l'asse CC^3 sarà così parallelo ed uguale all'intersezione delle facce in pendenza *Bb*, ed alle linee di contatto di queste facce con il cilindro in *FH* e *fh*.

Osservazione su quest'arrotondamento.

Sembra che quando le pendenze non sono uguali, non occorre fare un arrotondamento cilindrico, ma piuttosto uno conico; perché la pendenza dell'angolo, che si getta tutto da un lato, deve essere più sensibile alla vista, e salvare meno la deformità, che un arrotondamento conico, che si spartisce un po' su ogni lato.

SECONDA PARTE, DEL PROBLEMA PER GLI ARROTONDAMENTI CONICI.

Gli arrotondamenti conici sono più naturali negli angoli in pendenza che i cilindrici, ed il più naturale, quando le pendenze sono uguali, è quello di un settore di cono retto, o perfetto o troncato.

Del cono retto.

Quest'arrotondamento non ha alcuna difficoltà. Avendo diviso secondo l'abitudine l'angolo dato *ABE* **fig.27** con la diagonale *AD*, ed avendo determinato il centro dell'arrotondamento su questa diagonale in *C*, e mandate *CF* e *CG* perpendicolari ai lati *AB*, *BE*; si porteranno su queste linee le pendenze di ogni fila orizzontale *Fn*, *no*, *op*, *p*c, e si farà per

questi punti *n, o, p*, altrettanti cerchi concentrici a *C*, che daranno le

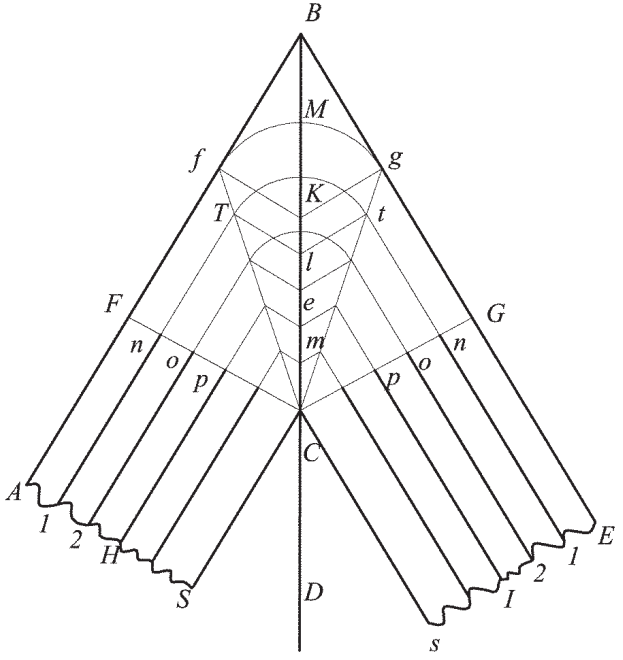


fig.27 Arrotondamento concavo con pendenze uguali

linee *FC, GC*, dove sono i contatti del cono con le superfici piane delle pendenze, alle quali l'arrotondamento deve collegarsi impercettibilmente.

Del cono Scaleno.

Primo caso.

Dell'arrotondamento di una sola faccia d'angolo.

Abbiamo supposto nel caso precedente, che si voleva arrotondare l'angolo *ABE* interamente, cioè a distanze uguali dal suo vertice *B*, ma è in circostanze dove si vuole arrotondare soltanto una parte dell'angolo, soltanto per diminuire il lungo spigolo di un angolo troppo acuto, e fare in modo che l'angolo misto della faccia arrotondata si congiunga a quella che non lo è, facendolo retto quanto sia
possibile, cioè, che il lato *CB* ed i suoi paralleli siano perpendicolari alla tangente *TE* dell'arco *PE* dell'arrotondamento dato, e di tutti i suoi simili.
Sia **fig. 26** l'angolo dato *ABC* che si vuole smussare. Si comincerà facendo il piano orizzontale di ogni base con paralleli a *AB* e *CB*, distanti tra esse dell'intervallo o dell'indietreggiamento della pendenza, che conviene all'altezza di ciascuna, come c^2e, c^3e, c^4e, per la faccia che non deve essere arrotondata, e *f2, f3, f4* per l'altra.
Quindi avendo preso a volontà un punto *P*, su *AB*, per la nascita dell'arrotondamento, vi si alzerà una perpendicolare *PC*, che taglierà tutti i paralleli dell'altra pendenza *BC*, in punti *C*, c^2, c^3, c^4, che si prenderanno per i centri d'arrotondamento di ogni base, e le loro distanze alle linee corrispondenti all'altra faccia, per la lunghezza dei raggi.
Così un punto *C* per centro, e per raggio *CP*, si descriverà l'arco *EP*, che si concluderà alla linea *CB* in *E*. Dal punto c^2 e dell'intervallo $c^2 2$ l'arco *2e*, dal punto c^3 e dell'intervallo $c^3 3$, per raggio l'arco *3e, ecc*. e si avrà

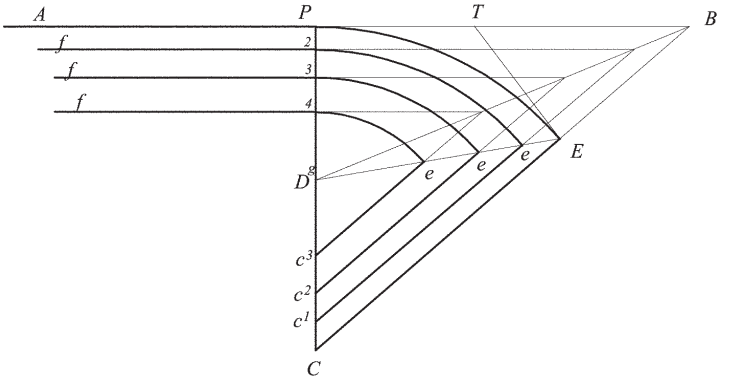


fig.26 arrotondamento di una sola faccia

così le proiezioni orizzontali dei bordi di ogni letto, che si concluderanno in una retta *Ee*, diversa dalla diagonale *BD* dell'angolo dato, che sarà la proiezione dell'intersezione dello spigolo delle facce incurvata e retta in pendenza.

OSSERVAZIONE

Questa specie di arrotondamento, che è spesso molto necessaria, riesce molto bene in esecuzione, come ho provata nelle catene di pietra da taglio degli angoli di molti riduzioni che ho fatto fare in posti di armi rientranti, dove ho arrotondato una parte della catena ed ho lasciato l'altra dritta, voglio dire piana, e di corrispondere con la catena piana dell'angolo tagliato, e facilitare la posizione e
l'allineamento di quella della spalla; ma occorre avere grande cura di tracciare su ogni pannello dei letti di sotto l'arco del letto di sopra, che non gli è parallelo, e controllare che i tagliatori di pietra osservano la manovra che dà il loro allontanamento dall'angolo, che aumenta la pendenza in base alla misura di cui si avvicina all'intersezione di riunione delle due facce; perché gli installatori ed i tagliatori di pietra si immaginano che la pendenza debba sempre essere uguale, ed osservano questa differenza di parallelismo come un difetto: Al primo che feci fare, l'installatore che si immaginava che non intendessi bene il suo lavoro che, esegui il suo lavoro senza affatto dirmi questa presunta correzione, e che vedeva che ad ogni base occorreva fare grandi aggiustamenti, che aumentavano di misura ogni volta che si alzava, replicando sulla difficoltà di questo lavoro, che metteva al di sopra di tutto ciò che aveva visto nei suoi viaggi; fui obbligato a fare un linea dritta di pendenza per l'intersezione di riunione delle facce, per condurlo, e fargli sentire la differenza della pendenza delle facce piane, e la variazione della pendenza della parte che

era arrotondata. In seguito di ciò il lavoro si continuò senza aggiustamenti di dodici angoli simili.

Sebbene in quest'angolo supponiamo le pendenze uguali, la sua costruzione potrebbe anche servire, se le pendenze delle facce non fossero uguali.

La dimostrazione della regolarità di quest'arrotondamento è sensibile alla sola ispezione della figura; poiché tutti i raggi *CE*, sono paralleli tra loro su una faccia, con la costruzione, e che sono tutti sulla stessa linea *PC* perpendicolare all'altra faccia, è ovvio che tutti i settori di cerchio *PEC*, *2ec*^{2}, *ecc*. sono simili; quindi gli angoli misti, che fanno sulla linea *Ee*, che è la proiezione dell'intersezione di riunione delle due facce diritta ed incurvata, sono uguali tra loro, ed infinitamente poco diverse dal retto; poiché il raggio è sempre perpendicolare alla tangente del suo arco, è questo quello che occorreva in primo luogo fare.

In secondo luogo, perché la linea *PC* è perpendicolare al lato *AB*, il punto *P* sarà quello del contatto dell'arco *PE*, e della tangente *AP*; di conseguenza la nascita dell'arrotondamento è al punto dove deve essere, perché la giunzione delle superfici piane *Pf*, e curva *Pe*, sia impercettibile alla vista, con le ragioni che abbiamo dato nel secondo libro.

È visibile con questa costruzione che si fa una parte di cono scaleno, il cui vertice è in *S*, all'intersezione delle linee *PS* ed *ES*, che si devono considerare come la proiezione dei due piani perpendicolari alla porzione di base *PES*, parte del settore *PEC*; di modo che la linea *SC* rappresenti in proiezione l'asse di questo cono, che è di conseguenza scaleno; poiché non è perpendicolare alla sua base.

SECONDO CASO.

D'arrotondamento conico Scaleno di un angolo le cui pendenze delle due facce sono uguali.

Con l'esempio dell'arrotondamento conico del cono retto, si è visto che si può arrotondare un angolo sporgente con la linea di base, senza arrotondare l'ultima superiore, e nell'angolo che rientra arrotondare l'ultima superiore senza arrotondare la linea di base. Facciamo vedere qui all'opposto, che con un arrotondamento conico di un cono scaleno si può arrotondare l'ultima linea superiore, senza arrotondare la linea di base dell'angolo sporgente; ed al contrario in un angolo che rientra, arrotondare la linea di base senza arrotondare l'ultima linea superiore, sia che le pendenze delle facce siano uguali o disuguali.

Sia **fig. 28** l'angolo *ABE*, vertice di un angolo rientrante, o base di uno sporgente, che non si vuole affatto arrotondare, o soltanto arrotondarla di un arco di cerchio di un più piccolo raggio opposto a *FGf*; avendo diviso l'angolo dato *ABE* in due anche dalla diagonale *BD*, e di un centro *C*, preso a volontà, o determinato dalla lunghezza di un raggio dato *CT* dell'arco di cerchio d'arrotondamento, si iscriverà quest'arco tra i punti di contatti *T* e *t*, dei quali si tireranno al punto *B* le linee *TB*, *t B*, che saranno quelle del contatto delle facce in pendenza, al settore di cono *TmtB*, che taglieranno la proiezione dei giunti di letto di ogni base ai punti *l*, *k*, *L*, *K*, con i quali conducendo dei paralleli *lc*^{2}, *kc*^{3} ai raggi dati

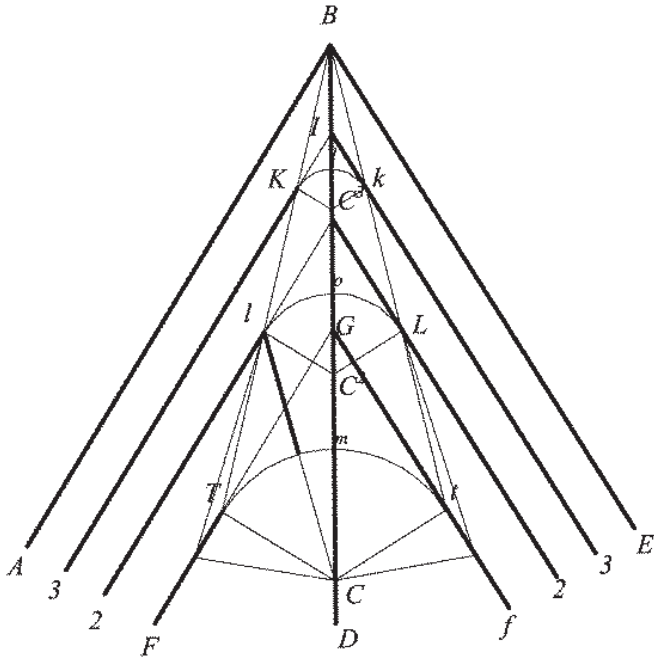


fig.28 arrotondamento conico del cono retto

della base *TC*, *tC*, si avrà sulla diagonale *Cb* i punti *c*^{2} e *c*^{3} che saranno i centri dell'arrotondamento dei letti di ogni base, i cui raggi saranno le linee *lc*^{2}, *kc*^{3}, che si concluderanno alle sezioni delle linee di contatto *TB* e *tB*, con i giunti dei letti *3K*, *2l*, paralleli a *AB*, e *3k*, *2L* paralleli a *BE*.

Applicazione di questa caratteristica alla formazione dei "Glacis" delle fortificazioni.

È recentemente una specie di regola nelle fortificazioni, di cancellare gli angoli dello *Glacis*[3], tanto sporgenti che rientranti, con arrotondamenti che alzano ed abbassano a proprio gusto le intersezioni tra i muri; ciò che non si fa regolarmente secondo i metodi ordinari; ecco la mia.

Sia **fig. 28** l'angolo dato *ABE*, che rientra in una palizzata di un cammino coperto, ed il suo parallelo FGf alla coda del Glacis . Avendo prolungato la diagonale *BG*, prendo a volontà, secondo l'idoneità dell'apertura dell'angolo dato le lunghezze uguali *GT*, *Gt*, da ambo le parti del punto *G*, quindi ritorno a squadra su *GT*, la perpendicolare *TC* che incontra la diagonale *GC* mi da il punto *C* come centro dell'arrotondamento Tmt alla coda dello *Glacis* , dal quale si tirano le linee diritte al vertice *B*, quanto io giudico necessario, per darmi pali d'allineamento e d'altezza, con il mezzo di questi bastoni uguali, che si chiamano basi, che chiameremo "jalons", ed in alcune province "spie luminose", così le linee di contatto *BT* e *Bt* sono il termine delle parti piane di *Glacis* , e la faccia conica dell'arrotondamento, dove si fa una giunzione impercettibile di queste due specie di superfici; è visibile che per l'angolo sporgente l'operazione deve essere la stessa, con questa sola differenza che la zona fatta in *G*

sarebbe stata fatta verso *B*.
Questo non è qui il luogo dove esaminare se gli arrotondamenti convengono a tutti gli angoli sporgenti dello *Glacis* ; dirò velocemente che la loro utilità è facile da provare negli sporgenti, che sono straripate, o per servirmi di un termine di marina "superate" con altre più avanzate nella campagna, poiché sono gli sporgenti davanti ai posti di armi che rientrano; perché aprono un libero passaggio ai fuochi delle braccia collaterali; ma coloro che arrotondano gli angoli sporgenti più avanzati sono copiatori poco giudiziosi, che non sanno fare discernimenti dell'esigenza delle varie circostanze.

Terzo caso dove le pendenze non sono uguali.

Avendo fatto la proiezione orizzontale delle basi di pendenze disuguali, **Fig. 29** si dividerà in due anche l'angolo dato *ABE*, per mettere nella sua diagonale *BC* il centro *C* dell'arrotondamento, che deve essere un settore di cono scaleno tangente a due superfici piane *Ab, EB;* si tracceranno da questo punto *C* due perpendicolari *CT, Ct*, uguali al raggio dell'arco di cerchio, che deve fare il più grande arrotondamento, che darà i punti di contatto *T* e *t*, delle linee *AT* ed *et* ; si tracceranno da questi punti al vertice del cono le linee *Tb* e *tb*, che saranno i contatti dei piani delle facce in pendenza e del cono. Infine dal punto *C* centro della sua faccia, si tirerà una linea *Cb*, che sarà il suo asse, nel quale tutti i suoi centri dell'arrotondamento dei suoi letti di ogni base devono trovarsi, come nell'esempio precedente, con la sezione delle linee LC^1, KC^2 paralleli a *TC*; la sola differenza di questo caso a quello precedente è che a causa della disuguaglianza delle pendenze, il bordo dell'angolo dei piani inclinate *bB*, non si confonde con l'asse del cono; perché la proiezione orizzontale di quest'asse è inclinata rispetto alla diagonale *CB* dell'angolo dato *ABE*.

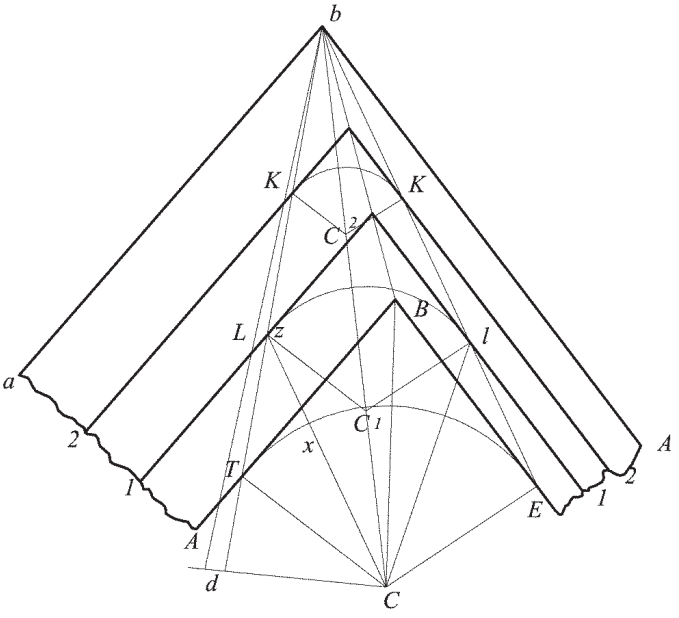


fig.29 arrotondamento conico con pendenze disuguali

Spiegazione dimostrativa.

Per formarsi un'idea netta di questa costruzione, supponendo che l'angolo sia sporgente, si può osservarla come una parte di piramide, la cui base della sua superficie è l'angolo abc, nella quale una parte di piramide tronca si iscrive in una parte di cono, girata in senso contrario, o invertito in relazione alla piramide, e concepire che questi due solidi sono divisi per sezioni parallele e orizzontali.
Ma poiché secondo la geometria dell'infinito si può considerare piramide ed il cono come un seguito infinito di sezioni di figure simili e paralleli alla loro base; è chiaro che se si fa delle sezioni simili e parallele a questa base, cioè, contenute da superfici simili, di cui i lati siano in stessa rapporto tra loro che le loro distanze al vertice, o alla base, queste sezioni raccolte formeranno lo stesso solido; poiché le parti prese insieme sono uguali alla totalità.
Non è necessario dimostrare che tutti i settori di cerchio *CTmt*, C^1lL, C^2Kk sono simile; poiché, con la costruzione, tutti i loro raggi sono paralleli tra loro, e per di più essendo compreso tra le linee rette *BT, B*t e *BC*, sono tra loro nei rapporti delle loro distanze al vertice del cono *b*; poiché *bk* sta a kc^1com *Bl* sta a lc^1; dunque tutti quest'archi sono simile,
proporzionali, e tangenti alle linee dei giunti di letto, ed è ciò che occorreva fare.
Corollario.
Segue inoltre che quando gli arrotondamenti conici non sono parti di un cono intero, ma soltanto di un cono tronco, si può variare nel modo di arrotondare, negli angoli con pendenze disuguali, secondo le varie circostanze dei punti dati, per l'inizio o la fine dell'arrotondamento, sopra o sotto, e la dimensione dei raggi degli archi di cerchio del letto superiore o inferiore del cono tronco. Ad esempio:
Fig.30. Essendo il raggio *D* ed l'arco *Dmp* dato, con un punto *X*, dove si vuole che l'arrotondamento inizi o finisca, occorre trovare le due linee di contatto di facce in pendenza con l'arrotondamento conico, ed il punto *X*, dove finisce altro lato.
Avendo fatto la proiezione orizzontale dei giunti di letto di ogni base con linee diritte parallele, come abbiamo sempre fatto, alle loro basi *AB* e *BE*, e tracciate le diagonali *BC*, b_3 degli angoli *ABE* ed *abe*, si prolungherà la linea *Bb* d'intersezione delle due pendenze indefinitamente verso *S*; in seguito con il punto dato *X*, e dall'estremità d dell'arco d'arrotondamento dato, si traccerà una linea *Xd*, che si prolungherà fino alla riunione di *BS* in *S*, da qui con l'altra estremità *D* dell'arco dato si condurrà una linea *SDx*, che sarà quella del contatto della pendenza, e dell'arrotondamento conico, così come è *Xd* dall'altro lato. Infine dal punto *S* mediante il punto *c*, centro dell'arco dato, si traccerà una linea *SD* fino all'intersezione della linea *BDC*, diagonale dell'angolo *ABE*, questa linea *SC* sarà l'asse del cono scaleno, nel quale staranno tutti i centri delle basi tra lo spazio delle due diagonali *BC* e b_3 degli angoli delle basi superiori e inferiori *ABE* ed abe.
Per trovare i centri di ogni fila orizzontale compresa tra queste basi, non c'è che da condurre con i loro angoli *g* ed i delle linee *gf*, ed ih paralleli a *CS*, e portare le lunghezze *fg*, bi su questa linea, che sono una parte dell'asse del cono, per avere i punti *1* e *2*, i quali saranno i centri degli

archi *Kk*, e *Ll*, dell'arrotondamento dei letti della prima e seconda fila orizzontale.

Corollario II

Successivamente si può aumentare o diminuire l'arrotondamento in una ragione data.

Fig.31 Si voglia, ad esempio, che l'arco ae stia all'arco dato *AmE*, come due sta a cinque. Si dividerà una delle tangenti *AB* o *BE* in due parti, e se ne porterà cinque di *D* in *a* o in *e*, e con i punti *a* ed *e*, e mediante le estremità dell'arco dato *A* ed *E* si tracceranno le linee *aAS*, *eES*, fino ad incontrare *DB* prolungata in *S*, come nell'esempio precedente. Il punto *S* sarà il vertice del settore di cono scaleno, che fa l'arrotondamento, per il quale, e con il centro dato *C*, si traccerà la linea *SC4*, fino ad incontrare la diagonale *D4* dell'angolo *aDe*. Questa linea *S4* sarà l'asse del cono, nel quale staranno tutti i centri delle basi, tra i punti *C* e *4*, compresi tra le due diagonali *BC* e *D4*, degli angoli *ABE* ed *aDe*.

Per avere questi centri si traccerà con i punti *f* e *g*, d'intersezione dei giunti dei letti, delle basi delle due facce in pendenza, dei paralleli alla diagonale *BC* o *D4*, che daranno i punti *2* e *3*, che saranno i centri della base corrispondenti.

Questa caratteristica è quello che ho immaginato e fatto eseguire a San Malo per arrotondare l'angolo che rientra sul lato destro della roccaforte

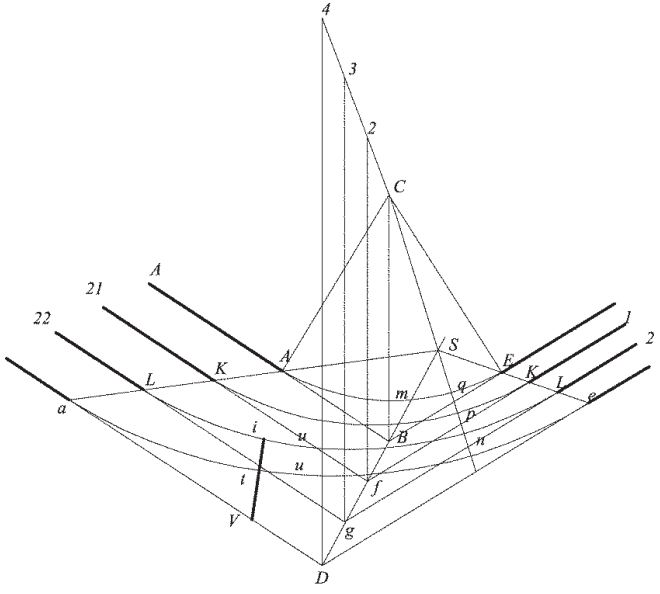


fig.31 diminuzione dell'arrotondamento dato

San Michel, secondo l'intenzione dell'ingegnere Direttore (il sig. Garengeau) che voleva prudentemente evadere con un arrotondamento la scossa delle inondazioni del mare che sarebbero schizzate con violenza in un angolo rettilineo, dove con questo metodo sarebbero soltanto passate girando. Quest'arrotondamento non è meno ben riuscita per collegare le pendenze disuguali di lato che è un *6*°, e della cortina che è un *12*°; poiché a meno che non si sia informati non ci se ne accorge, tanto l'arte ha il potere di nascondere deformità,in quanto la routine di un buon installatore, e quella del sig. D *** l'ingegnere, la mia vecchia di 16 anni falliscono dopo un tentativo.

Finora abbiamo provveduto alla posizione dei centri degli archi dei cerchi dei giunti di letto, ed alla lunghezza dei loro raggi, per formare i cerchi necessari da tracciare con diverse porzioni, come conviene alla lunghezza di ogni pietra; ci rimane da dare i mezzi per formare i giunti di testa, tanto per trovare le misure degli angoli misti, che le loro superfici formano con il rivestimento esterno, che per determinare i loro giunti ascendenti.

In primo luogo a riguardo dell'angolo misto, che l'intersezione dei letti inferiori e superiori devono fare alla curva del rivestimento con la linea retta del ricongiungimento del giunto, in modo da formare il ***biveau*** sulla proiezione orizzontale; poiché tutte le basi sono poste orizzontalmente; ma la direzione delle linee dei giunti di testa, non può essere presa secondo la nostra regola del terzo libro, perpendicolarmente agli archi di cerchio, cioè, alla loro tangente al punto della divisione, quando le pendenze non sono uguali; perché il piano del giunto, che passa per la direzione orizzontale, che sarà tale al riguardo di uno dei letti, non può esserlo al riguardo dell'altro; poiché gli archi delle intersezioni dei letti superiori e inferiori non sono concentrici; ma poiché tutti i giunti di testa devono essere piani verticali, potranno essere perpendicolari agli archi dell'arrotondamento, soltanto nel solo caso in cui le pendenze delle facce sono uguali, e l'arrotondamento conico di una parte di cono retto, come nel primo, **figura 27**, dove le linee *CF,CT,Ct* sono giunti perpendicolari agli archi.

Ovunque altrove dove l'arrotondamento è parte di un cono scaleno, non si possono tracciarle dai centri di ogni arco, senza inclinare il giunto di testa, eccetto il caso dove la proiezione si confonde con quella del più piccolo lato del cono.

Poiché la direzione dei giunti non può essere tracciata dal centro di ogni arco, sembra naturale che la si tracci dalla metà dei due, che comprendono i letti superiori e inferiori della stessa base; quindi **fig.31** anziché tracciare il giunto it del centro *4* dell'arco *ae*, o dal centro *3* dell'arco *lL*, al quale questo giunto si conclude, occorre tracciarlo dal punto *z*, in mezzo tra i due, e la direzione del taglio sarà giusta sulla metà della pietra, ed approssimativamente anche falsa, al letto superiore e inferiore; l'angolo *uiV* sarà l'inclinazione di testa del letto superiore.

Successivamente in relazione al giunto ascendente, non è ancora visibile, che può essere una linea diritta soltanto nell'arrotondamento che è parte di un cono retto, o nel giunto del mezzo dell'arrotondamento conico di cono scaleno invertito, tra due pendenze uguali, come in mo su *CB*, **Fig.28**; perché ci sono soltanto questi due casi dove un piano verticale possa passare per l'asse e per il vertice del cono.

In tutti gli altri casi in cui le pendenze delle facce non sono uguali, l'asse del cono diventa inclinato all'orizzonte; ma sebbene inclinato lo troviamo ancora in un caso, che abbiamo escluso sopra, nel quale la proiezione di tutti i raggi si confonde con quella dell'asse; di conseguenza passano tutti dal vertice *S*, come ai giunti *op*, *pn*, **Fig.31** o si trovano nel piano

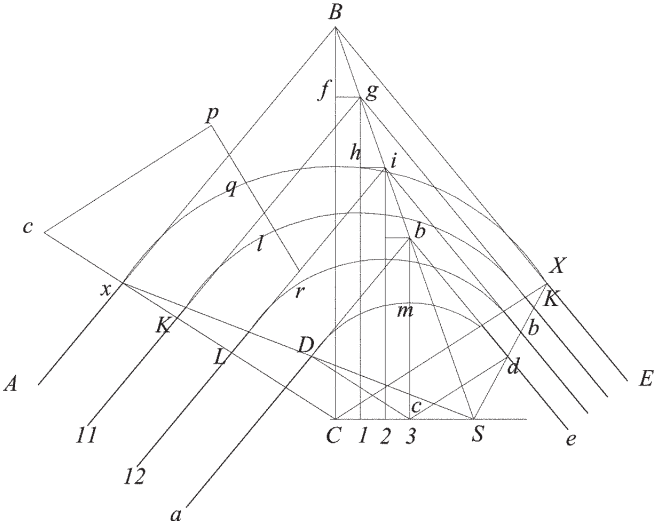
"glacis" pendenza dolce che parte dalla cima di un camino coperto con il soulo

verticale che passa per la proiezione dell'asse *4S*, ed allora i giunti op, pn, sono linee diritte, poiché il loro piano passa per il vertice del cono. Rimarrebbe da determinare la curva dei giunti ascendenti degli arrotondamenti scaleni, se nella pratica fossero sensibilmente incurvati; ma poiché la parte è poco considerabile, che si approssima molto alla linea retta, basta che si nasconda che non è retta e lì avere qualche riguardo. Tuttavia poiché tendiamo alla perfezione, fin quanto sia possibile, faremo osservare che questi giunti sono sempre archi di qualche sezione conica, che sarebbe facile riconoscere con la proiezione; poiché se si tira il giunto ascendente, la cui proiezione è *lx*, **fig. 28** o *Lx*, **fig. 29** dal punto *C* centro della base del cono, e che dal punto *B*, suo vertice in proiezione, si traccia una tangente a questa base, che toccherà in *d*, la linea *Bd* rappresenterà il lato del cono; quindi avremo da esaminare la direzione di *lx* nei confronti di questo lato; se essa gli è parallelo, il giunto ascendente sarà una porzione di parabole; se *lx* essendo prolungato incontra il lato prolungata al di là di *B*, questo farà un'iperbole, e se la stessa linea incontra il lato *Bd* prolungato al di là di *d*, questo farà un ellisse; perché la proiezione non cambia affatto la natura del triangolo con l'asse del cono, né le sezioni, non fa altro che accorciarle, come abbiamo detto al secondo libro.
Se quest'archi fossero abbastanza considerevolmente incurvati perché sia necessario cercare la curvatura, troveremmo abbastanza dati per descriverli, secondo i problemi del libro secondo; poiché la direzione del giunto sarà sempre un asse della curva, e l'intervallo *lx* quello dell'ascissa dell'arco che si cerca. Il punto *z*, che taglia il lato *db* sopra *l* sarà il vertice della curva; perché è nella sezione comune di un triangolo con l'asse *CdB*, e di un piano che gli è perpendicolare; si più di una base, e l'obliquità dell'asse del cono scaleno, che è l'altezza verticale dell'angolo dello spigolo, la cui intersezione *bB* delle facce in pendenza è l'ipotenusa, ed il punto *B* la proiezione perpendicolare. Si possono dunque descrivere queste curve, o con viste di proiezione, come la abbiamo insegnata nei problemi del *Cap. II* del secondo libro. o con altri viste secondo i problemi 35.36.37 l'arco che avrà xl per ascissa sarà quello che si cerca.

Applicazione della tracce sulla pietra.

Quando si è trovato con il diagramma tutte le linee, e tutti gli angoli necessari all'esecuzione per tracciare la pietra, occorre ancora un po' di attenzione ed un'industriarsi per fare uso, e sapere conoscendo se è più vantaggiosi tagliarle con il mezzo dei pannelli o con il metodo delle squadre. Nell'arrotondamento di cui si tratta, preferiamo quest'ultimo mescolato se si vuole al primo.
Fig.30. Sia per esempio una pietra da tracciare, che debba occupare lo spazio *xqtK* del diagramma della **Fig.30** che supponiamo parte di un arrotondamento concavo in un angolo rientrante.

Si comincerà, normalmente, per fare una superficie piana, secondo il problema I. la quale servirà per uno dei letti superiori o inferiori, come si vorrà, il quale dopo averlo fatto si rovescerà la pietra per farlo uno parallelo. In seguito avendo levato un pannello quadrilatero *OKtp* per il letto inferiore, lo si applicherà sulla pietra per tracciare il contorno, ed togliendo le parti della pietra, che eccedono nelle linee *tp* e *KO*, si faranno i due giunti di testa al quadrato sui letti superiori e inferiori; di



conseguenza si formerà una superficie tronca *AFTB*, **fig. 32.** in seguito avendo portato su queste basi dei giunti le lunghezze *tq* da un lato, e *Kx* dell'altro; con i punti *q* e *x* si alzeranno due perpendicolari *qQ*, *xX* su

queste basi per mezzo d'una squadra, che daranno al letto superiore i punti, *Q* e *X*; in seguito si prenderà il cerchio dell'arco xq della **Fig.30** o se si vuole un altro pannello di letto *oxqp*, diverso dal primo, ponendo i punti *x* e *q* del pannello su i punti *X* e *Q* trovati, come abbiamo detto al bordo del letto superiore della pietra, e si traccerà l'arco *XQ* secondo il contorno del pannello e del cerchio. Infine si tireranno sui punti di testa delle linee diritte *tQ* e *KX*, al letto superiore, e se ne abbatterà tutta la pietra che eccede queste quattro tracce; sapendo i due archi opposti *Kt* al letto inferiore, *XQ* a quello superiore, ed i due giunti ascendenti, che supponiamo qui retti, sebbene in verità non lo siano, ma delle parti di archi iperbolici, per verità così poco concavi, che si possono considerarli come retti, essendo la loro curvatura quasi impercettibile nell'esecuzione,

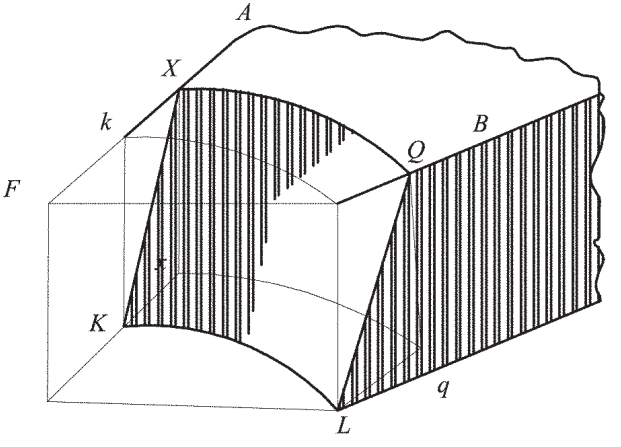


fig.32 concio smussato

o tutto più risolvibile con un piccolo aggiustamento. Del resto se la

curvatura era sensibile, abbiamo dato i mezzi per poter affrontare il problema. Non conviene qui confondere una proposta elementare in tante difficoltà. Infine essendo il solido prismatico *kKXQtT* tolto, la pietra sarà completata, il rivestimento che deve restare in sulla superficie sarà *kXQt* concavo, se l'angolo è rientrante; all'opposto se l'angolo fosse sporgente il suo arrotondamento sarebbe la stessa superficie invertita, allora si conserverebbe tutta la pietra, che si vuole togliere in
quest'esempio, prolungando i giunti *q*, *t* e *xK*, verso *C*, e non verso *O*.
La **Fig. 33**. che rappresenta una pietra convessa può fare vedere di colpo, che il modo di tracciarla è lo stesso in un senso opposto.
Uso degli arrotondamenti degli angli ed osservazioni sulle mancanze che vi si trovano spesso.
Quando gli angoli sporgenti delle fortificazioni sono troppo acuti, come 60 gradi o meno, è necessari arrotondarli per dare loro più solidità; Si

deve soltanto prendere coscienza di non lasciare un posto abbastanza grande alla diagonale, perché un uomo possa nascondersi alla vista delle parti che fiancheggiano collaterali, a causa degli inconvenienti che ne possono seguire.

Si può anche avere altri motivi per arrotondare gli angoli sporgenti, di qualunque opera siano, o per la posizione dei luoghi. A volte serve

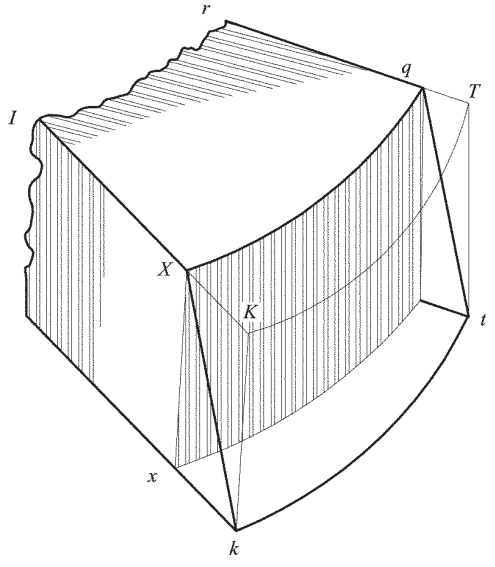
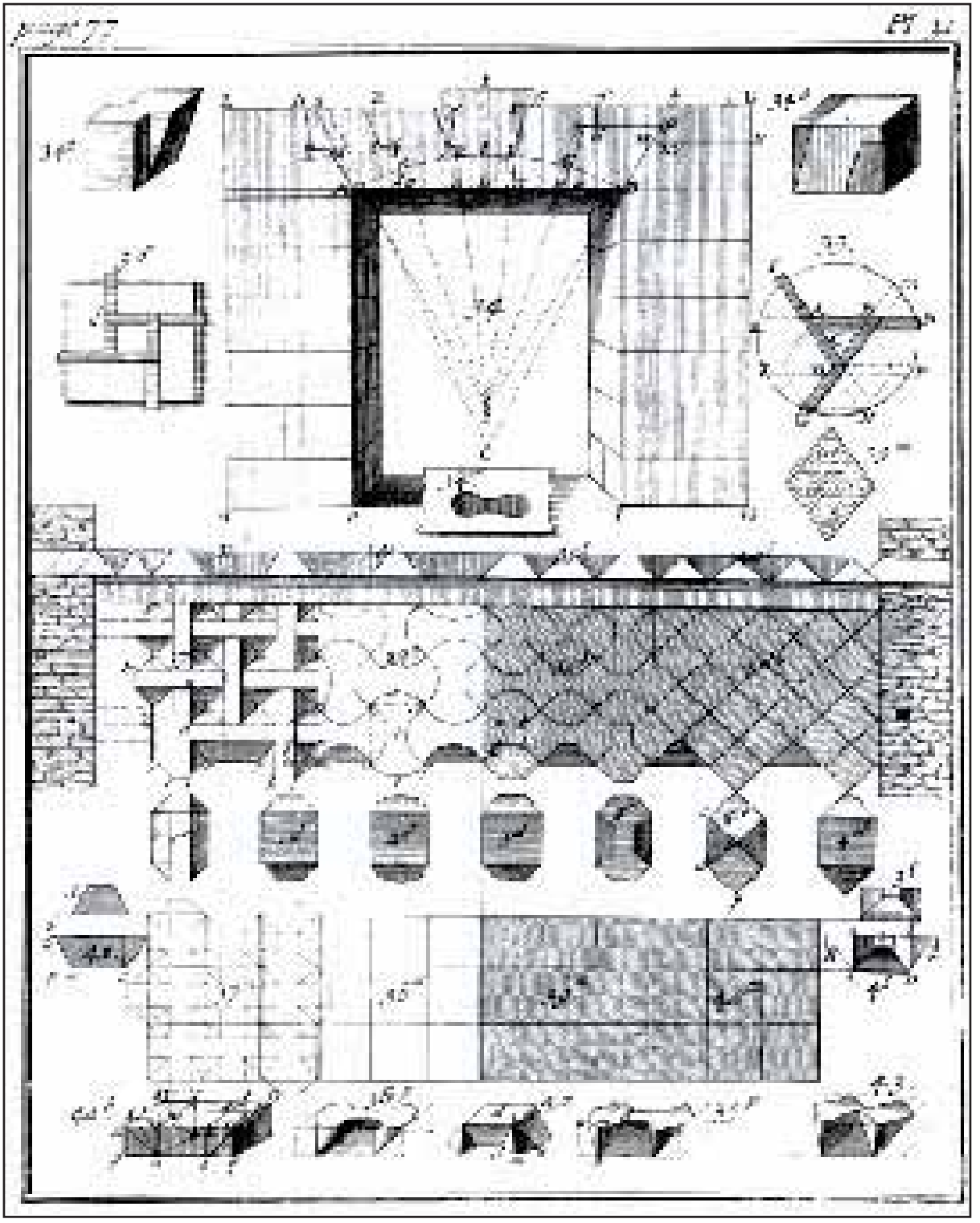


fig.33 pietra convessa

anche solo arrotondare la base senza toccare il vertice del rivestimento; come,
I°. quando un cammino gira al piede di un terrazzo, di cui non si vuole smussare l'angolo al vertice per ragione di simmetria, o di pulizia, o per lasciare un posto di *Guérite*[4] più avanzata per la scoperta dei luoghi vicini allora l'arrotondamento deve farsi con una porzione di cono scaleno, come alla **Fig.27**. *CfMgC*, che smussa la punta del fondo *fBg*, senza considerare quella in alto *SCs*.
2°. Se nel luogo di un cammino passasse a quest'angolo un fiume o il mare, come nelle forti strutture sulle rocce della Conchée e del piccolo Bay, nella strada di San Malo, allora è necessario fare l'arrotondamento con porzione di cono retto, come *CFKGC*, della stessa fig. per motivi di maggiore solidità, per facilitare il passaggio delle acque, o evitare la scossa ed i ritorni, che si chiama in termine marittimo Remoux.
Questo cambiamento non impedisce tuttavia che si conservi l'angolo rettilineo del vertice di rivestimento, se si giudica necessario; cominciando l'arrotondamento soltanto dalla perpendicolare tracciata della proiezione di quest'angolo alla base della pendenza.
Questi motivi d'arrotondamenti possono essere comuni nei lavori di fortificazioni e d'architettura civile.
Nei primi se ne trova anche per arrotondare all'opposto la cima senza la base dell'angolo, poiché quando il rivestimento può essere in parte visto dalla base al vertice, o perché si deve conservare la base; allora occorre che l'arrotondamento sia fatta con porzione di cono invertito come ai **Fig.28** e **29**.
3°. Infine se si tratta soltanto di smussare un'intersezione troppo acuta dalla cima a fondo, deve essere cilindrico, come ai **Fig.24** e **25**.
E' ancora, a proposito, di fare attenzione agli effetti dell'arrotondamento sulle pendenze che alterano.
1. Il conico retto non aumenta né diminuisce la pendenza delle facce, né nell'angolo che rientra né nell'angolo che sporge
2. il conico scaleno in situazione naturale, la base in fondo e il vertice a quello dello spigolo, diminuisce sempre la pendenza, che farebbe intersezione d'incontro delle facce, se l'angolo non fosse arrotondato nell'angolo sporgente, ed al contrario lo aumenta in quelle che rientrano.
3. Il conico scaleno invertito aumenta la pendenza nell'angolo sporgente, e lo diminuisce in quello rientrante, più o meno secondo della dimensione del raggio della base del cono.
4. Il cilindrico aumenta la pendenza al ritorno delle facce, ma non quello dell'intersezione dello spigolo, al quale è uguale nel suo ambiente.
Di qui segue che questi arrotondamenti hanno vantaggi secondo le loro situazioni; poiché rendendo le pendenze più o meno stese, possono togliere o agevolare l'accesso dei vertici degli angoli dei rivestimenti, e causare così o impedire la diserzione; un'esperienza difficile ci insegna che i soldati si lasciano calare negli angoli che rientrano, quando i rivestimenti hanno soltanto 15 a 18 piedi di altezza, non oserebbero se gli angoli fossero arrotondati in cono scaleno invertito.
Senza ricorrere a questo motivo, se ne hanno di frequenti per arrotondare gli angoli che rientrano nei lavori che sono sul bordo del mare, affinché l'acqua o le onde, che si verrebbero a infrangere, non vi schizzi con violenza, ma sfugga da parte girando lumgo il contorno del rivestimento, come ho effettuato al lato della roccaforte di San. Malo, di cui io hanno

"guerite" posto dove una sentinella si mette al coperto

parlato.
In relazione agli arrotondamenti conici retti, si fa a tutti gli angoli che rientrano delle controscarpe; e perché le pendenze sono di solito uguali da una parte e dall'altra, non si incontra di grandi difficoltà in quest'arrotondamento; ma quando le pendenze dei lati delle controscarpe non sono uguali, risale il difetto di saperli collegare bene della gente, e sono costrette a risolvere il nodo della difficoltà con un risultato, come ho visto nelle controscarpe dell'angolo della punta della galera del castello di San Malo.
Questo difetto è raro a causa della penuria del caso; ma si presenta a volte un'altra difficoltà che imbarazza la gente senza teoria; quando in un canale si abbassa il livello d'acqua all'angolo fiancheggiato, e si vuole che l'arrotondamento tra piano e controscarpe al cammino coperto, che può essere di livello, non si senta l'irregolarità, i semplici esperti tracciano un arco di cerchio nel fondo del canale, come se fosse di livello, ed arrivano in seguito al vertice, come possono, in ellisse contro la loro intenzione; è tuttavia molto facile finire con un arco di cerchio, non c'è che da tracciare a raso terra del canale la parte d'ellisse che conviene per la porzione di cono invertito considerato, che forma l'arrotondamento.
Il secondo difetto della gente di routine, di cui sembra che il numero non sia piccolo con la quantità di quelle che si osservano nei posti, è che per tracciare l'arrotondamento, prolungano le facce delle roccaforti e mezzaluna fino alla controscarpe, e che cominciano il loro arrotondamento ai punti che
danno quest'allineamenti, prendono il centro degli archi d'arrotondamento all'angolo fiancheggiato della roccaforte o della mezzaluna. Quando quest'angoli sono retti questa è la soluzione migliore del mondo, ma siccome lo sono abbastanza di rado, quest'arrotondamento fa sempre un rigonfiamento con le porzioni rette delle controscarpe, ai quali si riunivano; più l'angolo è acuto o ottuso, più quest'irregolarità è sensibile, e poiché si vede che questa giunzione di retta e di curva colpisce la vista, alcuni ne correggono il rigonfiamento a vista d'occhio come puossono, altri ve lo lasciano, credendo che la cosa debba essere così. Abbiamo dato nel libro II i mezzi per rimediarvi, non soltanto per le giunzioni degli archi di cerchio con le linee rette, ma anche per quelle degli archi ellittici con linee rette, con il metodo delle tangenti, come occorre fare quando l'arrotondamento è ellittico nel caso della pendenza del fondo canale di cui abbiamo appena parlato, cosa che arriva spesso nei posti costruiti in alto.
Il caso del collegamento delle due pendenze disuguali è presente tutti i giorni negli attraversamenti dei cammini coperti, di cui si arrotonda un poco gli angoli; perché la parte del passaggio ha poche pendenze, e quello del parapetto esterno è più coricato; ma perché quest'angoli si fanno sull'erba, perché si tagliano dopo averli posti, i prati non creano problemi, alcuni colpi di accetta sono sufficienti per accontentare la vista; non sarebbe lo stesso se si fanno con pietre tagliate a dimensione.



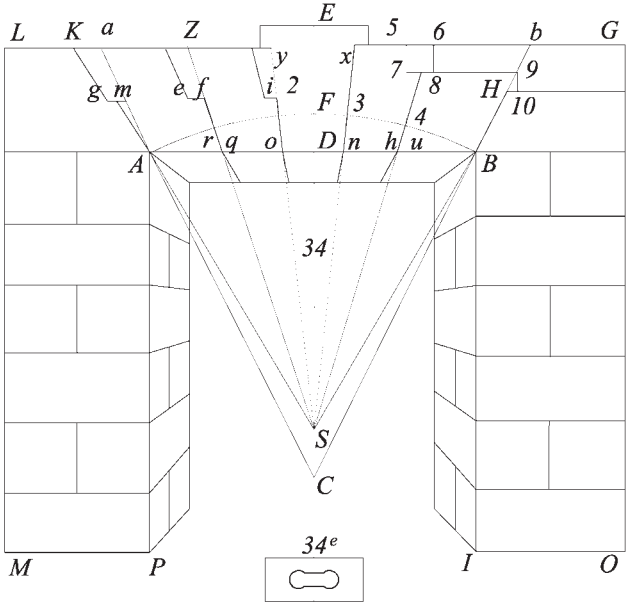
Capitolo IV

SULLE VOLTE PIANE, ORRIZZONTALI O INCLINATE

Si possono realizzare in diversi modi le volte le cui superfici sono piane. 1° Quelle orizzontali che s'appoggiano su due lati opposti, che sono chiamate piattabande. 2° Altre sempre orizzontali, ma che si appoggiano su quattro lati, chiamate volte piane. 3° Infine altre che sono inclinate sull'orizzonte, che si appoggiano su due lati contigui, che sono chiamate "trompes" piane.
Occorre notare che le pietre che compongono le volte di questi tre tipi sono chiamate cuneo, a differenza di quelle delle volte concave, che sono chiamate conci.

Problema VII

Si può tracciare il disegno di queste volte in diversi modi, che raggiungono tutte lo stesso scopo, nei quali vi é più disposizione di gusto che di geometria, e si può dire che la soluzione di questo problema é molto arbitraria per la determinazione dell'inclinazione dei giunti dei letti; perché considerando la costruzione delle piattabande nel rigore della Meccanica, provveduto che i cunei siano piramidali, e ben puntellati essi devono sostenersi; perché la parte superiore é più grande che l'apertura inferiore, fra gli appoggi di questi tronconi di piramide invertita.



Siano i piedritti *AM, BO*, scostati della distanza *AB*, che é chiamata, in termini architettonici, la Portata della piattabanda, che verrà divisa in due parti uguali dal punto *D*, dal quale si traccerà la perpendicolare *EDC*, sulla quale si prenderà *DC* uguale ad *AB*, ed eseguendo l'uso ordinario, si farà su *AB* il triangolo equilatero *ABS*. Dal punto *C* o *S*, se si vuole, si traccerà un arco di cerchio *AFB*, che verrà suddiviso in tante parti uguali, quanti cunei si vogliono realizzare, come qui in cinque ai punti *1,2,3,4*, sempre in numero dispari, per non avere giunti nel mezzo. Per i punti *C* o *S*, come centro si tracceranno i raggi C_1 C_2 C_3 ecc. fino all'estradosso *LG*, che sarà una parallela ad *AB*, dove terminerà l'altezza della Piattabanda.

La direzione di questa darà l'inclinazione dei giunti dei letti sui quali i cunei si appoggiano mutuamente, come *nx0, oy, qz, AG* e il disegno sarà fatto.

Io abbasso il centro della sezione un po' più che la sommità del triangolo equilatero, al quale gli Architetti si assoggettano; perché la sezione A*a* o B*b* del dormiente ne é meno obliquo, e quello dei cunei dà delle parti più uguali, e gli angoli q e t meno acuti vicino al dormiente *AL*, o *BN*; in effetti gli spigoli del giunto del letto di questo primo cuneo sono di solito così acuti, che essi si rompono al carico anche se la pietra non é fragile. Gli Architetti per ovviare a questo inconveniente hanno immaginato di fare una porzione di giunto a piombo come *Ir*, che fa un gomito nel giunto *zIr*, e una piega in quella contigua, cioè un angolo aggettante nell'uno e rientrante nell'altro cuneo.

Ma occorre notare che questo ritorno di squadra sul fondo piatto *AB*, é tolto per tutta la lunghezza della sezione inclinata, che costituisce il supporto dei cunei, e di conseguenza una diminuzione sulla forza della piattabanda, che non si può più calcolare da *q* in *z*, ma da *I* in *z*; perché la parte verticale *Ir* é inutile per l'appoggio.

Quindi occorre concludere che quando le spalle dei piedritti sono buoni, conviene prendere il centro ancora più basso di quello che ho proposto, perché gli angoli dei primi cunei diventeranno più forti, le inclinazioni dei letti meno differenti, e i cunei più uniformi alla vista; poiché i loro estradossi aumentano sull'eguaglianza delle divisioni della metà dell'arco *FB* nel rapporto delle tangenti.

Alcuni Architetti per la simmetria e l'uniformità si contentano di regolarizzare l'inclinazione del taglio dei dormienti all'angolo di 60°, per la metà del triangolo equilatero; dopodiché non usano più il centro *S*; ma essi dividono l'intradosso *AB* e l'estradosso *ab* in uno stesso numero di parti uguali, e tracciano i giunti dei letti dall'una all'altra parte le divisioni corrispondenti nx, oy, qz; tutto ciò si può senza inconvenienti.

Occorre soltanto notare che Mr. de la Hire, e quelli che l'anno seguito hanno regolarizzato il calcolo della spinta delle piattabande sul sistema dell'inclinazione dei letti dei dormienti al triangolo equilatero, che si é detto in precedenza, per farvi attenzione nella ricerca dello spessore dei piedritti.
Resta ancora qualcosa da dire su come dare solidità a questo genere di volta, dove le pietre sono in una situazione di forza più che in tutti

gli altri casi.

Perciò gli Architetti hanno pensato a diversi espedienti. Alcuni sono degli aggetti o dentelli, come si vede in *gm, ef, i2*[1] nel mezzo dei giunti; ma c'è una difformità che non é sopportabile se non quando sono nascosti da una modanatura, come quando la piattabanda é tagliata come architrave, e che l'aggetto é nascosto dal taglio a faglia di una faccia. Preferisco a questo artificio l'uniformità dei giunti uniti che si assoggettano più similmente al carico della piattabanda.

Vorrei, ciò nonostante, per impedire alle piattabande di muoversi lungo il letto delle loro giaciture, fare delle piccole cavità emisferiche; proporrei di collocare una pallina di piombo del diametro di un pollice a metà dentro ciascun cuneo e metterne due nel mezzo di ciascun letto, cosa che a farsi è molto semplice; quindi non si fa altro che praticare due cavità uguali e ben egualmente inserite; sebbene questa invenzione sia nuova, mi sembra che questo principio in effetti funzioni.

Altri Architetti del luogo per aggettare nel mezzo i cunei, procedono sopra l'intradosso, che fa scorrere gli uni e gli altri per dei ganci, chiamati graffe, da cui si elevano fino alla chiave, come si vede in H_7x; questo artificio è più sicuro del precedente, ma non è appropriato per porte rustiche e non andrebbe bene sopra un Architrave.

Infine i più timidi rafforzano le piattabande con delle barre di ferro che da cui ricavano i cunei per davanti e per dietro, o per sopra; quest'ultimo è il più sgradevole alla vista e il peggiore, perché farlo non è di una rigidità inflessibile, piega sotto carico, come lo si vede in parecchie parti; fa credere che farlo sia l'antidoto contro i cedimenti di certi tipi di volte, tuttavia allorché i sostegni siano buoni e le pietre dei cunei siano fatte di buona consistenza, si vada a caricare la piattabanda del peso che sta sopra, con un'arcata immaginaria, si può evitare il dispendio mettendo in pratica l'espediente che ho proposto.

Alcuni Architetti del luogo per fare i giunti apparentemente inclinati, come dovrebbero essere, li hanno fatti a piombo, come lo si vede dietro la facciata del Louvre, è quello che chiamano a taglio finto; ma poiché quella disposizione di pietre fa pensare che non sia naturale, essa non è bella secondo me; non sorprende affatto gli spettatori e non permette che si ammiri l'ingegno dell'Architetto per le conoscenze; si congettura che i cunei siano sostenuti con delle barre di ferro o con dei buoni tagli praticati dentro quelli finti che non sono altro che una cesura apparente, come si vede nella fig. *34ª*.

[1] Nel testo originale per un errore di stampa è riportata la sigla *t2* non corrispondente con la numerazione sulla figura originale.

NOTE SULL'ESECUZIONE

Quantunque il dettaglio della costruzione non sia il nostro soggetto, credo di dover avvertire di qualche precisione che si è apportata all'apparato e alla posa delle piattabande: non devono essere fatte orizzontali sopra il loro puntellamento, ma un po' bombate; perché togliendo loro il supporto esse si abbassano ogni giorno un po' verso la metà; non si può dire in modo esaustivo come debbano essere, affinché il carico si disponga sul piano; ciò dipende: 1° dalla lunghezza della portata, 2° dal numero di conci, 3°dalla quantità delle pietre e dalla abilità degli operai che la tagliano, 4° e in ultimo dall'attenzione nel disporre e ferrare le giunture.

Se ne vede una di ventisei piedi e sei pollici di portata alla Chiesa dei Gesuiti di Nimes, dove i cunei non hanno che due piedi di taglio alla chiave e un piede di spessore; M. Gautier dice di aver disposto da sei a sette pollici di bombatura nel posarle e che non si abbassavano che di tre pollici, dopo essere state puntellate, tanto che al presente si fa ancora una bombatura di quattro pollici.

I capi scalpellino credono che egli fece le piattabande un po' bombate, prevedendo che potessero essere bombate più in basso quando sono esattamente sul piano; è un errore che l'ottica condanna per così piccole lunghezze che si possono disporre secondo la loro portata; quella di cui stiamo parlando potrebbe essere la più grande opera che è stata realizzata, non potrebbe esserlo ancora senza le giuste precauzioni e una qualità di pietra di forte consistenza.

A proposito di pietra forte dirò che se ne trovano di talune fatte a incastro e alcune a coda di rondine, come fatte a nuovo; testimoni oculari mi hanno detto di avere visto in Linguadoca piattabande che si sostengono con molto poco supporto e che, avendone approfondito la costruzione, hanno trovato cunei disposti con incastri a coda di rondine alloggiati dentro cavità, come nelle vicinanze lo si può vedere abbastanza sovente nelle insenature dei parapetti dei ponti. *Fig. 34ª*.

USO DELLE PIATTABANDE

Le piattabande sono in uso dentro tutte le porte delle Città di Guerra, al di sopra dell'arcata della parte rinforzata per praticarvi il sostegno necessario ad alloggiare il cavallo del ponte levatoio, allorché è alzato; ma è come se il rinforzo non avesse una grande profondità; i cunei sono disposti con le curvature dell'arcata della parte rinforzata nella quale sono appoggiati; tuttavia si vedono porte in cui il centro *C* nella direzione del taglio dei cunei è più vicino alla piattabanda che la sommità di un triangolo equilatero nella portata, come se avessimo temuto la spinta e l'avvallamento della piattabanda, sebbene in questa circostanza si dovesse piazzare il centro molto più lontano; poiché la spinta è di una forza infinita nel mezzo di un rivestimento.

Questa cattiva costruzione può derivare apparentemente dall'allargamento che si è potuto rilevare in alcune piattabande di porte di Fortificazioni a mezzo rivestimento, in cui non si è assicurata ai piedritti la larghezza conveniente per la loro spinta; un altro aspetto di ignoranza della Teoria. Ne ho visti in effetti al forte di L**[2], dove malgrado l'arcata della parte

rinforzata al di sopra della piattabanda e una barra di ferro inserita dentro la costruzione, non dietro il taglio, la piattabanda si è avvallata e ha fatto distaccare l'arcata in pieno centro dalla parte superiore; ciò fatto di una spinta sufficiente, potrebbe essere per contro dosare la leggiadria di un fronzolo di colonnina.

Noi alla fine di questa Opera daremo delle regole sicure per non cadere dentro questo inconveniente. Gli Architetti fanno anche piattabande dello stesso stile , a faglia al di sopra delle arcate, decorate di un qualche Ordine nel davanti, per continuare senza rottura gli Architravi da una colonna o da un pilastro all'altro; noi diremo il nostro sentimento per questa disposizione all'interno di una dissertazione sugli Ordini di Architettura alla fine di quest'opera.

Sebbene il principale uso delle piattabande sia di supplire alla grandezza delle pietre, che sono da impiegare per fare le chiusure dell'architrave delle porte e di architravi di un solo pezzo, come li facevano gli Antichi, si impiega anche lo stesso disegno e apparato per realizzare le volte piatte intere nei punti dove non c'è abbastanza altezza, per praticarvi delle concavità, dove si dovrà fissare la base troppo vicina a terra; è così che lo si vedrà nelle cappelle sotterranee della nuova Cattedrale di Cadice in Spagna, che è stata resa per queste medio grandi qualità; le più grandi sono all'incirca di ventiquattro piedi e i cunei che ho visto posare hanno tre piedi di coda, di una pietra pesante, sebbene porose e contornate di buchi come la pietra pomice.

Noi ne diremo qualcosa qui dell'applicazione del tratto sulla pietra, è troppo semplice perché si definisca;non si tratta che di prendere l'apertura degli angoli con la squadra e applicarla sulle superfici, finché si vede levare un pannello in ciascun concio in particolare sopra l'assonometria, se ne tracci il contorno su un paramento rivestito e se ne levi la pietra che eccede al ritorno di squadra nei limiti della faccia; ci si accontenta di rappresentarne una a uncino nella *fig. 34*[b] che pare tratta da una pietra squadrata, dove ciò che deve essere elevato è distinto per dei punti e per dei tratteggi.

Si è anche rappresentato alla *fig. 34*[a] un concio in finto taglio disegnato in prospettiva, affinché si possano far vedere meglio le differenze di superficie.

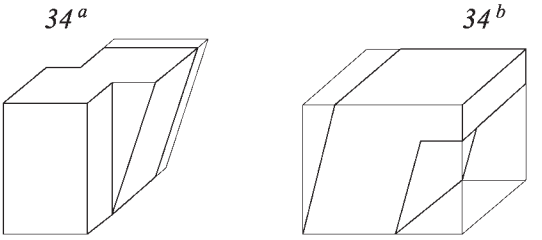


***Fig. 34*[a]*,34*[b]** Confronto fra un concio in finto taglio e un concio squadrato a uncino.

[2] Il testo originale mantiene l'anonimato del luogo in questione.

SULLE VOLTE PIATTE

Questo nome è tanto nuovo quanto l'invenzione di queste volte, le quali non sono piattabande, nel senso che appoggiano per quattro lati e che i conci sono fatti tutti diversamente.

L'Epoca di questa invenzione che noi riteniamo di M. Abeille, famoso Architetto, che ha fatto parte della Corporazione degli Ingegneri, è dell'anno 1699 secondo la data dell'approvazione dell'Accademia delle Scienze. Ecco le mie supposizioni sulla sua origine.

Serio, alla fine del suo primo Libro sulla geometria, che ha composto a Fontainebleau nel 1545, ha indicato una maniera di fare dei solai con delle putrelle troppo corte per essere appoggiate da una parte all'altra sulle mura di sostegno, per mezzo di una certa disposizione, che consiste nel farle incrociare alternativamente, cosicché si rinforzino appoggiando reciprocamente le punte dell'una sulla metà dell'altra, del quale arrangiamento si avvale il primo elemento in *fig. 36*.

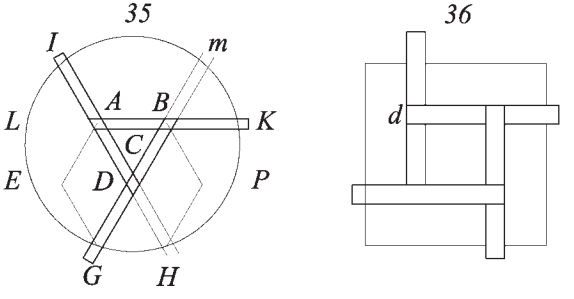


Fig. 35,36 Modo di posizionare le putrelle a incrocio alternato affinchè formino un sistema rinforzato impiegabile in solai di luce superiore.

Quando dico il primo elemento, non intendo quello di tutti gli arrangiamenti possibili, che è il triangolare che si vede alla *fig. 35*, la quale è certamente la più semplice, non essendo composta che di tre pezzi, *AK*, *ID*, *BG*, che si appoggiano reciprocamente l'estremità dell'uno sulla metà dell'altro; ma come questa disposizione formerà angoli troppo aguzzi se la imitiamo in pietra, non ne ricaverem0o alcun vantaggio per la costruzione di volte piatte.

Wallis nelle sue Opere di Matematica in Latino, nel 3° volume in folio verso la fine del I ha cambiato in modi diversi l'arrangiamento delle

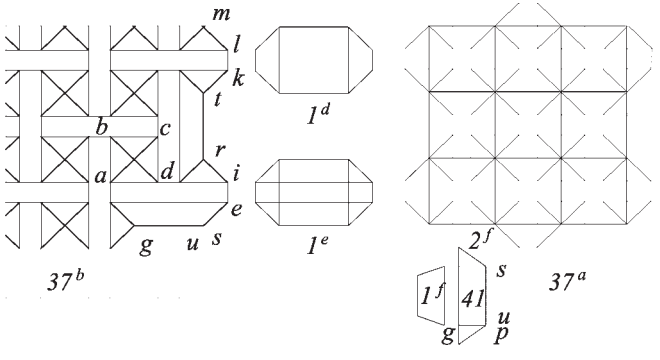
putrelle per produrre lo stesso effetto; tra quelli che sono riportati egli cita alcuni esempi eseguiti in Inghilterra.

Non si può dubitare che le nostre volte piatte non siano mai state imitate dalla struttura; poiché se si considera ciascun parallelogrammo della *fig.37*[b] come un pezzo di legno, accadrà che andrà a sopperire alle incisioni degli incastri della *fig. 36* per le scarpe nei fianchi e per i tagli fuori piombo sulle punte; le une e le altre conservano sempre questa figura d'assetto, che gli Architetti chiamano appoggio spezzato.

Ma ciò che rende l'invenzione di queste volte più ingegnosa della struttura è che per la metà di queste scarpe e dei suoi fuori piombo prolungati si riempie il vuoto che resta tra le putrelle dentro il paramento inferiore, dove si forma un fondo piatto continuo e di una forma differente della struttura; poiché è tutto composto da quarti perfetti arrangiati al di sotto in scacchiera (*fig. 37*[a]), cosa che si chiama in Architettura in delibasi, è quello che rende l'artificio degno di ammirazione.

Non è affatto da meno nella superficie superiore; essa non può essere continua, perché i tagli delle scarpe restano in parte ricoperti: è per forza che si formano dei vuoti a piramide quadrata *abcd* invertita, dove la sommità *S* è alla base dell'intersezione di quattro punti; ma questa imperfezione da l'occasione di fare una suddivisione di lastricato gradevole e varia; perché vi si può mettere piastrelle di colore differente di quello delle prime pietre e, se non si occupa l'alzato della volta, ci si può accontentare di riempire il fondo di queste piramidi di un po' di malta oppure di gesso per tappare il passaggio dell'aria e risparmiare così un peso inutile alla solidità della volta.
Fig. 37*[a]*,37*[b]*,41 Realizzazione di una volta piatta ad appoggio spezzato.

Questa interruzione di continuità ha dato occasione a P. Sebastien,



Carmelitano dell'Accademia delle Scienze, di cercare di riempire i vuoti piramidali con dei cunei misti, dove i letti sono delle superfici curve, cosa che causa qualche difficoltà nell'esecuzione, per cui servono bravi operai e una grande attenzione, per fare talune superfici concave e convesse che s'aggiustano bene le une nelle altre.
Ho trovati altri due modi di riempirle nel farne superfici di punti e di letti piani, e un terzo di farle miste, parti piane, parti coniche tangenti a quelle piane come dirò a seguito dei disegni di M. Abeille e di P. Sebastien.

Problema VIII

Fare una volta piatta di conci uguali tra di loro, i cui giunti dell'intradosso siano a scacchiera, e quelli dell'estradosso in diversi compartimenti.

Il primo metodo, dove l'estradosso è in una casella discontinua. Troviamo questo primo disegno dell'invenzione di M. Abeille, nella raccolta sulle Macchine dell'Accademia delle Scienze (Tomo I pag.159), in una maniera a cui non credo di dovermi conformare, per ciò che concerne lo spessore della volta, ne dirò poi le ragioni.
L'autore vuole che il quadrato del paramento dell'intradosso dei conci sia fatto di una certa grandezza,che lo spessore di questi conci sia i tre quarti della lunghezza del lato di questo quadrato, e che la sezione dei pannelli dei giunti sia un terzo di questo spessore.

Da qui segue l'assurdità, che più che i quadrati saranno grandi più che la volta avrà spessore, supponendo per esempio il lato del quadrato di 12 pollici, lo spessore della volta sarà di 9, e la sezione di 3, e se al posto dei 12 pollici il quadrato fosse di 24, lo spessore della volta sarebbe di 18, e la sezione di 6; però il numero dei giunti diminuirà nella volta; e di conseguenza lo spessore e la sezione, cioè l'appoggio dei conci, invece di aumentare dovrà piuttosto diminuire; questo ragionamento è semplice, in effetti se il quadrato avesse tre piedi di lato, ci sarebbe ragione di fare una volta di 27 pollici di spessore?

Credo dunque che lo spessore della volta in una questione di giudizio indipendentemente dalla grandezza dei quadrati dell'intradosso, dove non si deve fare attenzione altro che alla larghezza totale, al numero dei conci, e alla qualità della pietra che si impiega, che dovrà determinare un più grande spessore che non sia giudicato necessario, supposto questo,ciò è faticoso.

Avendo diviso il soffitto in un certo numero di quadrati, per altrettanti conci, si traccerà l'immagine dell'intradosso a scacchiera, sulla quale si aggiungerà quella dell'estradosso, come lo si vede sottolineato nella figura *37*[a] cosa che si può fare solo dopo aver regolato lo spessore della volta e della sezione, cioè, l'inclinazione dei corsi dei conci, che forma il loro appoggio, e al posto degli incastri della struttura del solaio di Serlio di cui abbiamo parlato.

Questa inclinazione dovrà essere regolata con un angolo di 45 gradi, affinché la parte orizzontale dell'appoggio sia uguale all'altezza dello spessore del concio; tuttavia a causa di questa inclinazione che dà un costolone un po' debole, si può aumentare il numero dei gradi dell'apertura; ma si aumenterà anche la spinta; perché la parte orizzontale della sezione, nella quale insiste tutto l'appoggio, diminuisce nei confronti dello spessore. Seguendo la regola, essendo questa parte un terzo dello spessore, l'angolo acuto sarà di 71 gradi 34', che ha per tangente il triplo del seno totale, cosa che dà un angolo molto aperto, e di conseguenza molta spinta senza necessità; comunque, visto che le figure della raccolta non s'accordano con questa parte del discorso, si può supporre che ci sia qualche errore nell'uno o nell'altro.

Comunque sia, avendo determinato l'imposta della sezione, la si porterà da una parte e dall'altra dei lati dei quadrati dell'intradosso, e si tracceranno le linee parallele, che si intersecheranno e formeranno la figura che si vede sotto, al numero *37[b]* composta dai rettangoli *tb, ea,* che avranno in lunghezza il quadrato dell'intradosso, più due volte l'imposta in faglia, al di là di ciascuno dei lati opposti del quadrato; e in larghezza quella del lato del quadrato, meno due larghezze della imposta. Dentro a questi rettangoli ci saranno dei quadrati vuoti *abcd*, che avranno per lati il doppio della imposta, attraversati in modo alternato dai rettangoli dell'estradosso a due a due, come lo si vede nella figura, che è in ciò perfettamente conforme alla struttura di Serlio, dalla figura *36*.

APPLICAZIONE DEL DISEGNO SULLA PIETRA

Tutti i conci sono perfettamente uguali, eccetto quelli che hanno parti che entrano nei muri, dove non hanno bisogno di taglio; ci è sufficiente tracciarne uno per servire da modello per tutti gli altri.

Avendo fatto due paramenti opposti, e valutata una pietra di lunghezza e spessore conveniente, si aggiungerà due volte l'imposta *pu* (*fig. 41*) della sezione *gu*, alla larghezza *us* di un lato di un quadrato dell'intradosso, tracciata nella figura *37[a]* per formare un rettangolo go che tracceremo all'estradosso, nel quale si condurranno le linee *ke, VT, il, Ff,* a distanza dal punto *g* e *Q* uguale all'imposta *pu*; poi avendo riportato sul paramento opposto dell'intradosso i punti *u* e *s* con dei ritorni a squadra, ci si faranno le linee *ut, rs* parallele a *VT, Ff,* e la pietra sarà tracciata.

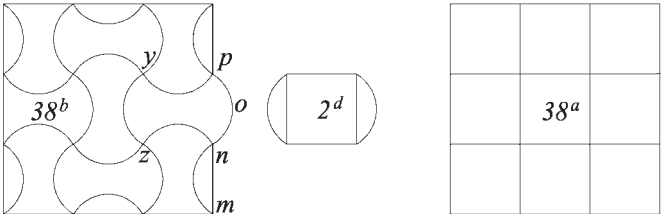
Non si tratta altro che di sbozzare come prismi triangolari, che formeranno le sezioni a scarpa, e a strapiombo; conoscendo *gputTG*, e il suo medesimo *Qsqo* per formare le due sezioni a strapiombo, poi *gkuseQ* ed il suo medesimo opposto *Gltroi* per le sezioni a scarpa, e il concio sarà fatto come lo si vede dal di sopra nella figura *Ie*, dal di sotto nella figura *Id*, dal davanti nella figura *Ii* e di lato nella figura *41*.

Non resta altro per la costruzione della volta che sistemare i conci su una struttura di puntellamento orizzontale, nello stesso ordine che si vede in figura *37[b]* che si appoggiano gli uni sugli altri. Resterà un vuoto dentro quattro lati *abcds* a piramide rovesciata, la cui sommità, cioè la punta, è nel fondo dell'incavo *s*, e nella connessione del solaio alla sommità comune di quattro angoli retti.

SECONDO METODO DI VOLTA PIATTA SENZA IL VUOTO ALL'ESTRADOSSO COL METODO DEI CONCI MISTI

Se si inscrive la parte sporgente del poligono della testa del concio *iKlm (fig.37[b])* in un arco di cerchio convesso, come in *nop (fig.38[b])* e la rientrante *mqrs* in un arco concavo della stessa grandezza della precedente, e se si opera nello stesso modo sui lati opposti, si avrà una figura curvilinea, il quadrilatero *ntzxypon* che assomiglia dal davanti ad un trincetto del calzolaio, che sarà il contorno dell'estradosso di un concio, il cui intradosso resterà tuttavia quadrato, come lo si vede dal di sotto nella figura *2.[d]* e impostato a scacchiera, come nel metodo precedente.

Fig. 38[a],38[b] Realizzazione di una volta piatta a conci misti.



Tracciato così il concio, si sbozzerà col metodo delle figure solide curvilinee miste, al posto dei prismi che abbiamo eseguito col metodo precedente, seguendo ciò che si è insegnato nel capitolo primo per la formazione di superfici incurvate miste. Così formeremo due superfici cave a scarpa per i letti di posa inferiori, e due convesse a strapiombo per i letti di posa superiori, come si vede nella figura *38*, in prospettiva.

Sebbene l'esecuzione di queste superfici incurvate sia possibile, è tuttavia vero che nella pratica è più difficile costruirle rispetto a quelle piane, e che è raro che queste s'accordino esattamente affinché la convessa s'adatti perfettamente nella concava; è ciò che mi ha dato l'occasione d'immaginare tre altri metodi per riempire i vuoti della volta di M.Abeille, più facili di quello di P.Sebastien, in questo caso i lati dei conci sono delle parti di superfici curve regolari, il cui taglio è più semplice di quelle incurvate, o delle parti di superfici piane.

TERZO METODO, IN CUI I LETTI DI POSA DEI CONCI SONO DELLE SUPERFICI IN PARTE CURVE, IN PARTE PIANE

Se al posto d'inscrivere l'intera testa del concio *iKlm* della figura *37[b]* si traccia soltanto un quarto di cerchio dal punto u per centro, e per raggio la metà del vuoto *um* nella testa sporgente a strapiombo, e nello stesso modo dal punto *V* per centro nel letto di posa rientrante concavo *mq*, si avrà la base di un cono scaleno, la cui sommità sarà in m, le linee *um* nel convesso *lm*, e *Vq* nel concavo mq rappresenteranno in proiezione gli assi; con questo metodo le teste dei letti di posa *kl, qr* che restano piani a strapiombo e a scarpa, saranno di più facile esecuzione, e il contorno dei giunti dell'estradosso sarà un compartimento misto, altrettanto comodo a meno del precedente, dove le curve non faranno alcuna gobba; perché la linea che passa per i centri opposti, passa anche per il punto dove si toccano gli archi girati in senso contrario, e le parti curve dei letti di posa essendo delle superfici coniche regolari si potranno eseguire più facilmente.

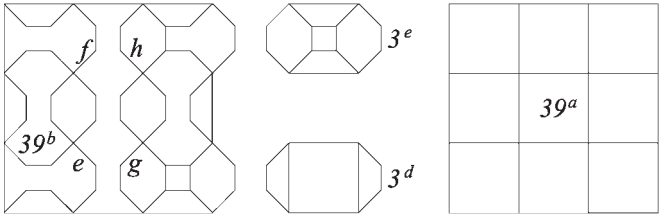
QUARTO METODO IN SUPERFICI PIANE, IN CUI IL COMPARTIMENTO DELL'ESTRADOSSO È COMPOSTO DA ESAGONI E DA DECAGONI IRREGOLARI.

Se si aggiunge alle teste dei conci di M.Abeille un triangolo, come *dsa* al concio *ea* da ciascun lato delle due teste, che siano un quarto del vuoto *abcd*, si otterrà una piramide triangolare *amds* (*fig.42*) che è rappresentata

ad angolo retto al concio rovesciato *d*, e rovesciata al concio visto dal di sopra *39ᵇ* la quale riempie il quarto vuoto, è evidente che i quattro riempiranno il tutto e questi quattro triangoli aggiungendo ciascuno due lati al quarto del rettangolo *ae*, ne risulterà una figura di 12 lati, così come la si vede sotto la figura *39* in *3ᵉ* ; con questo metodo i letti di posa sono tutte delle superfici piane.

Fig. 39ª,39ᵇ Realizzazione di una volta piatta a conci esagonali e dodecagonali.

Sebbene il compartimento fatto da questi decagoni irregolari incrociati con esagoni, non siano sgradevoli alla vista, come si vede nella figura *39ᵇ*, si può ancora variarlo e cambiarlo in quel che chiamiamo in termine



da vetreria pezzo di confine, si tratta solo di inciderci qualche falso giunto, come si vede in *ef, gh*, da cui risulta un incrocio di quadrati e di esagoni oblunghi.

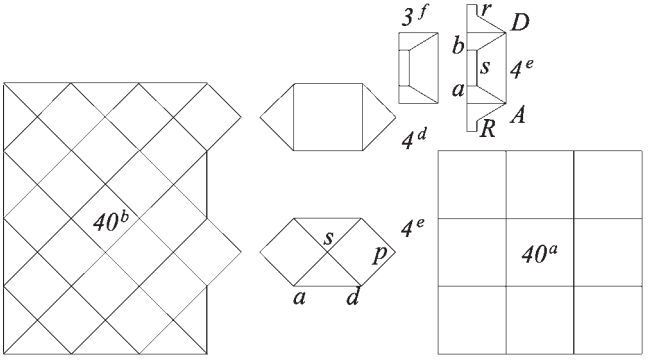
QUINTO METODO, DI CUI L'ESTRADOSSO È UN COMPARTIMENTO DI QUADRATI REGOLARI DIAGONALMENTE OPPOSTI ALL'ALTRO DELL'INTRADOSSO.

Se dopo aver tracciato i quadrati dell'intradosso, come si è fatto nei disegni precedenti, si prende i loro lati per le diagonali di altri quadrati, si otterrà come immagine dell'estradosso la figura *40ᵇ* alla luce di quella dell'intradosso 40ª ciò che darà per ciascun concio visto dal di sopra nella figura *4ᵉ* e dal di sotto nella figura *4ᵈ* in proiezione; le parti triangolari rientranti *asd* saranno scavate in piramidi quadrangolari, di cui un lato della base sarà il lato del quadrato dell'intradosso *ad*, e l'altro lo spessore
della volta *aA* (*fig.4f*) che è il profilo del concio visto nella sua lunghezza, come *3.ᶠ* lo è per la larghezza tagliata nella metà.

O bisogna osservare che la punta sporgente *p* della *fig. 4ᵉ* essendo troppo acuta per essere conservata intera, sia tagliandola, sia a carico, conviene rinforzarla, come si vede nel profilo *4ᶠ* in *R, r*; ma poiché questo taglio indebolisce il concio alla sua metà, bisogna fare attenzione quando si regola lo spessore.

Fig. 40ª,40ᵇ Realizzazione di una volta piatta con elementi quadrangolari.

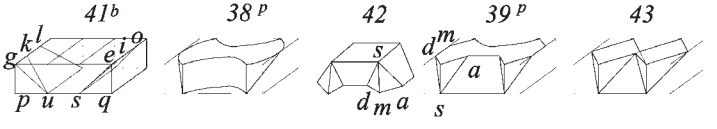
L'applicazione del disegno di tutte queste volte sulla pietra non ha alcuna difficoltà; si tratta solo di alzare un paramento per tracciarci



l'estradosso,
che è sempre più grande dell'intradosso, e inscriverci il quadrato del paramento di questo intradosso, com'è nella immagine; poi, avendo rigirato la pietra, e avendola valutata per farle un secondo paramento parallelo, si farà uno dei giunti a squadra, o soltanto due segni per riportare di sotto con delle righe a squadra i quattro angoli del quadrato dell'intradosso, la quale essendo stata tracciata, si sbozzerà la pietra che eccede sui lati dell'intradosso e dell'estradosso, seguendo la natura della superficie piana o incurvata dei suoi letti di posa, di cui gli uni sono stesi a scarpa nelle rientranze, e gli altri a strapiombo nelle sporgenze, come si potrà vedere buttando gli occhi sulle figure che sono in basso alla tavola, dove quella che è segnata in prospettiva *41.ᵇ* rappresenta un quarto di pietra, tracciato da un concio rettilineo rettangolare visto dal di sopra; la seguente *38ᵖ* rappresenta anche questa in prospettiva un concio della seconda specie mista, visto dal di sopra, le figure vicino al numero *42* rappresenta un concio tracciato per la seconda specie a estradosso in dodecagono, visto dal di sotto in *d*, e dal di sopra in *39ᵖ*. Infine la figura *43* rappresenta nella stessa maniera in prospettiva un concio all'estradosso, diviso in due quadrati, visto dal di sopra.

Fig. 38ᵖ,39ᵖ,41,42,43 Tipi di conci impiegati nella realizzazione delle volte piatte.

Sebbene tutte queste figure rendano una buona idea della costruzione, possiamo comprendere ancora meglio il loro effetto tagliandole che dai



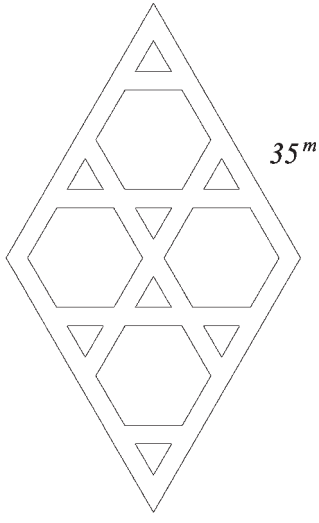
disegni.

Abbiamo detto che la sistemazione triangolare delle putrelle, che si sostengono reciprocamente, come nella figura *35* era poco adatto a servire da modello per i conci di una volta piatta; poiché gli angoli poi sono disuguali, l'uno acuto *IDB*, l'altro ottuso *IDG*, da cui risultano delle figure dissimili, e se si facessero uguali, si formerebbero sei angoli nel

punto *D*, facendo due acuti di 60 gradi, e due ottusi per gli esagoni, la cui disposizione potrà essere tuttavia eseguita nella pietra con lo stesso sistema dei conci di M.Abeille, facendo delle scarpate da una parte e dall'altra della lunghezza, le quali dalla parte degli angoli ottusi serviranno da taglio a dei conci esagonali di un solo pezzo, che potremo scaricare di una parte del loro peso praticandoci un rinforzo della modanatura, e ornandolo nella metà di un rosone, seguendo il gusto dell'antico, ciò che farà un buon solaio, come si vede l'idea nella figura *35ᵐ*.

Fig. 35ᵐ Proposta di rosone decorativo di gusto antico per un intradosso piatto.

Potrei proporre un'infinità di variazioni di intradosso piatte, così come



di estradossi; perché sebbene le abbia fatte tutte quadrate a scacchiera, niente m'impedirà di farle ad ottagoni regolari con dei piccoli quadrati dentro quattro conci; poiché la forza della volta non consiste nel vuoto del quadrato *abcd* (*fig.37ᵇ*) che è solo un carico inutile, è chiaro che possiamo smussando gli angoli intorno al centro del concio, che avrà all'estradosso la figura di un altro quadrato circoscritto a questo primo.

Da qui è semplice concludere che le volte piatte, sia in sistemazione a quadrato,che a triangolo, possono essere variate in più modi senza alterarne la loro solidità; poiché tutti i vuoti che restano tra le putrelle della struttura sono riempite solo con un fardello, nello spazio del quale l'architetto può esercitare il suo genio. Egli potrà dare all'intradosso la sistemazione a bastoni spezzati dell'estradosso, e coprire i vuoti solo con una soletta o una pietra molto sottile.

OSSERVAZIONE SULL'USO

Poiché le sezioni dei conci delle volte piatte sono ruotate di quattro lati in modo alternato, è chiaro che queste volte spingono anche di quattro lati, a differenza delle piattabande, che spingono solo su due lati; da qui segue che queste fanno minor sforzo delle piattabande per scaricare sui loro piedritti, e di conseguenza richiedono la metà in meno di spessore del muro, che è un vantaggio.

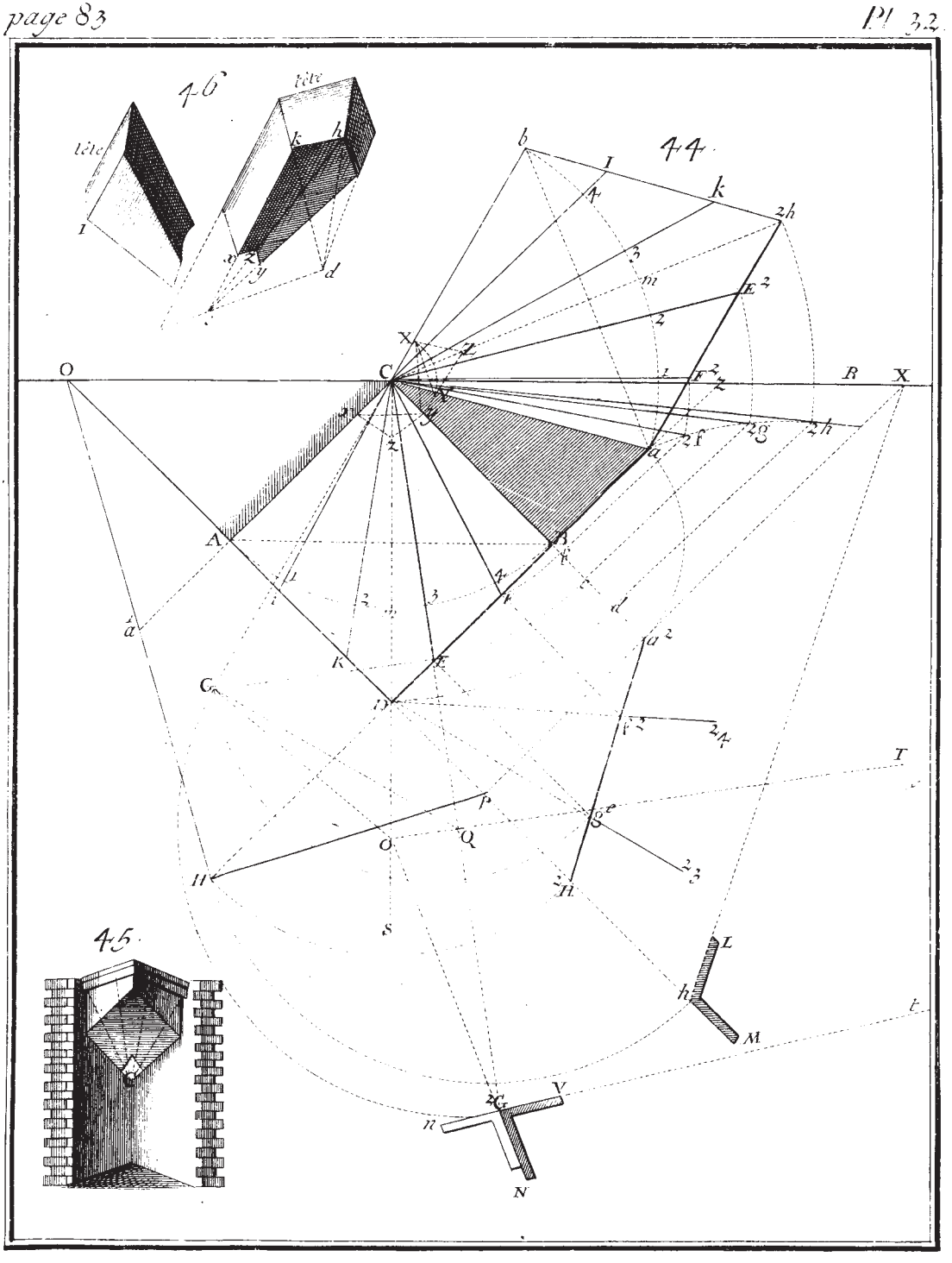
Tuttavia bisogna considerare che il peso che i conci della parte centrale devono sostenere è molto considerevole; poiché in un quadrato di 36 conci i quattro al centro sono caricati di un peso uguale a quaranta volte la propria pesantezza, seguendo il calcolo di Wallis, per la struttura; così anche se la pietra è fragile o filamentosa, cioè soggetta ad avere dei fili o dei vincoli naturali, c'è molto da rischiare; perché se manca anche un solo concio, tutta la volta cadrà, cosa che non può succedere ad una volta a piattabanda, dove i conci sono vincolati, e dove questi si appoggiano sui loro letti di posa e non sulle loro teste, come nelle volte piatte dove queste sono indebolite dai loro corpi.

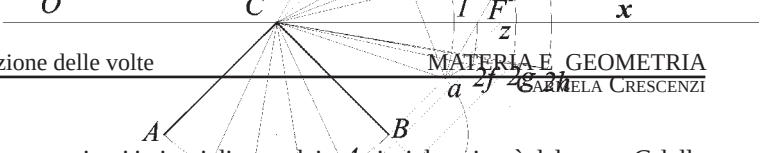
Da ciò sembra che si debba concludere che questa invenzione è più ingegnosa che utile; almeno su una estensione un po' considerevole. La credo solamente adatta a voltare qualche stanza che si vuol mettere al riparo dai danni del fuoco; perché non essendo concava, non richiede più altezza di piano di un pavimento o di un soffitto di gesso che non possiamo fare senza aggiunta di legno. Possiamo anche diminuirne la campata rinforzando la sua origine con un concio seguendo l'uso consueto, che è una decorazione molto di moda nei piani un po' riscaldati.

Riguardo alle precauzioni necessarie nella costruzione, è prudente non disporre i conci su un puntellamento orizzontale, ma un po' bombato verso il centro, affinché mentre si decentra il solaio non si inarchi a un livello inferiore, essendo inevitabile il cedimento; qualche precauzione che si prende nell'apparato.

E' ancora visibile che possiamo diminuire considerevolmente la spinta di queste volte, facendo ai conci degli appoggi a viscere; perché se si potesse non farli in piani inclinati, come nella struttura, non ci sarebbe alcuna spinta, ma soltanto il carico sui piedritti.

La dimostrazione della solidità di queste volte dipende dall'esame della sistemazione meccanica delle sue parti, dove si vede una fila di leve, i cui appoggi si inviano il carico dall'uno all'altro fino ai piedritti, come nella figura *35* e nella figura *36* dove si può prendere visione che il vuoto che resta in questa struttura è riempito dall'allargamento a scarpa di ciascun lato dei conci per farli entrare nelle viscere che si fanno nel legno, e per ospitare il pezzo d'incrocio. Così riunendo il peso di ciascuno dei conci col suo centro di gravità, e col suo appoggio sul seguente, li ridurremo a tante leve che si spingono reciprocamente le une sulle altre, come nella struttura, e per gradi si perverrà alla conoscenza del peso, di cui ciascuno di questi è caricato, con tanta più facilità che il carico caschi sempre al centro della leva. Ne avrei fatto qui il calcolo se non fosse stato fatto da Wellis, e se qui ci occupassimo di MECCANICA.


page 83
Pl 32
46
tête
tête
44
45



Problema IX

RAPPRESENTARE UNA VOLTA PIATTA INCLINATA SULL'ORIZZONTE, CHE POGGIA SUI DUE LATI INFERIORI CONTIGUI.

IN TERMINI DELL'ARTE

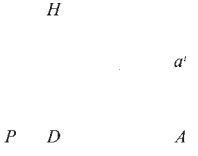
FARE UNA "TROMPE" PIATTA

Si troverà strano che in un inizio di pratica io entri nei "Traits" difficili, ma l'ordine delle cose lo richiede; poiché qui si tratta di volte che non sono composte che da superfici piane, e che noi abbiamo fatto precedere da dei principi che ne hanno già risolto tutte le difficoltà.
Sia (***Fig. 44 a***) il quadrato *ABCD* la proiezione orizzontale di una superficie piana inclinata sull'orizzonte in un angolo rientrante di due muri, come la si vede nella figura 45 nel piccolo profilo (prospettiva), su cui essa dovrà appoggiarsi.
Si comincerà col tracciare l'angolo[1] della sua inclinazione da un profilo, di cui prendiamo qui la base per comodità del "trait" sul lato *CB*, su cui avendo elevato una perpendicolare *Ba* uguale all'altezza dell'inclinazione di uno dei lati della "Trompe", si traccerà la linea *Ca*, che sarà l'intersezione della sua superficie col piedritto del muro. E poiché i quattro lati sono supposti uguali, questo profilo servirà per tutti; cioè, che la linea *Ca* esprimerà la vera lunghezza dei quattro lati *CA, CB, AD, BD*, che sono ridotti nella proiezione.

FORMAZIONE DELLA FIGURA DI INTRADOSSO
Essendo i quattro lati dell'intradosso dati dal profilo, non resta che trovare gli angoli che formano tra di loro, di cui gli opposti sono uguali, e quelli che sono di seguito sono loro supplementari a due angoli retti. Dal punto *C* come centro, e con raggio *Ca* si descriverà un arco di cerchio *ab*, nel quale si inscriverà *AB*, la diagonale del piano orizzontale in *ab*; poi dai punti *a* e *b* come centro, e per *Ca*, si farà un'intersezione di archi in ^2h dalla quale si tracceranno le linee a^2h, b^2h, e *bC*, il rombo, Cb^2a sarà vera figura in vera grandezza della superficie di intradosso, di cui *ABCD* è la proiezione.

PANNELLO DI TESTA, O ELEVAZIONE DELLE FACCE AGGETTANTI.
Avendo prolungato indeterminatamente i lati *AD, CB* verso ^2H e a^2, si porterà l'altezza *Ba* in Ba^2, e due volte la stessa da *D* in ^2H; poi si tracceranno a^2, ^2H, che sarà l'altezza dello spigolo di intersezione dell'intradosso con una delle facce.

[1] L'altezza scelta dal Frezier é pari al lato del quadrato da Lui assegnato alla proiezione ortogonale ABCD dell'intradosso, questo fa si che il punto P, piede della retta HP, coincida col punto di intersezione della retta a^2X con la retta AD.



Ora per tracciarci i giunti di testa dei conci, si descriverà dal punto *C* della "trompe" un arco *AB*, che si dividerà nel numero dispari[2] che si vuole corrispondente ad altrettanti conci, qui indicati dai punti *1,2,3,4* da cui si tracceranno le linee *Ci, CK, CE, CF*, che saranno le proiezioni dei giunti dei letti; dai punti E,F, intersezione con la proiezione della faccia *BD*, si tracceranno delle perpendicolari Eg^e Ff^2, che taglieranno l'elevazione a^2 ^2H nei punti g^e,f^2, da questi e dal punto *D*, si tracceranno i giunti di testa f^2 ^{2}4,g^e ^{2}3,e si avrà l'altezza di una delle facce alla quale l'altra è uguale, avendo ipotizzato che la "trompe" non sia sbieca né irregolare.

PANNELI DI INTRADOSSO.
Gli intervalli dei giunti di testa, trovati come noi abbiamo detto, saranno portati sull'intradosso in vera grandezza da una parte e dall'altra dell'angolo aggettante, come $^2Hg^e$ in $^2hE^2$, e in ^2hk; $^2Hf^2$ in $^2hF^2$ e ^2hI; poi si tracceranno dal punto *C* le linee *CI, CK, CE*^{2}, *CF*^{2}, e si avranno i pannelli dell'intradosso.
Noi abbiamo descritto nella figura il modo di trovare tutte le lunghezze dei giunti di letto separatamente, seguendo la regola generale dei profili delle "Trompes", dove si nota che benché tutte queste linee siano in effetti appartenenti ad una superficie piana, e terminino in una linea retta a^2h, l'insieme dei loro profili in proiezione termina in una linea curva $a^2f^2g^2h$ che fa vedere la differenza prodotta dagli arrangiamenti dei profili.
Noi abbiamo detto che i giunti di testa devono essere tracciati dal punto *D*, dove è ubicato l'angolo aggettante , come da un centro; ma niente impedisce che si possa prendere più vicino o più lontano dal centro *C*, a seconda che si voglia dare più o meno inclinazione alla sezione dei letti. E' sufficiente che il loro centro sia sulla linea di centro CD, che deve essere la comune intersezione di tutti i piani di letto. La maggiore o minore inclinazione dell'intradosso può determinare dei cambiamenti in questa disposizione.
Noi abbiamo già quattro differenti rappresentazioni della "Trompe":
1° Quella del suo piano o proiezione orizzontale.
2° Il suo profilo.
3° La vera grandezza del suo intradosso.
4° L'altezza (il prospetto) di una delle sue facce.
Non ci resta che trovare gli angoli formati dalle superfici piane dell'intradosso e dei letti o dell'intradosso con la testa. Cioè i "biveaux" di letto e di intradosso o di intradosso e di testa.

Fig. 44a Individuazione in vera grandezza a proiezione del pannello di "Intradosso" della "TROMPE"

GLI ANGOLI DEI PIANI PER FORMARE I "BIVEAUX".
Innanzitutto troviamo l'*angolo che la superficie di intradosso forma con quella della testa* (***Fig. 44b***). Avendo tracciato dal punto *C* la linea

[2] ***Fig. 44*** L'arco AB sembrerebbe diviso in conci di uguale misura, questo porterebbe a un disegno diverso dei giunti di letto in facciata da quello presentato nella Fig.45

OCX perpendicolare alla diagonale *CD*, si prolungherà la linea *BD* in *H* con distanza uguale a *D* ^{2}*H*, *CA* in a^{1}, alla distanza uguale a Ba^{2} e *DA* fino ad incontrare *CO* in *O*; poi avendo tracciato Ha^{1} gli si traccerà una perpendicolare *HP* che intersecherà *AD* in *P*, da dove si traccerà anche alla stessa *PA* una perpendicolare *PX*, che intersecherà *OC* prolungata in *X*; in seguito su *OP* si traccerà la lunghezza *PH* in *Ph* , da dove si traccerà una linea al punto *X*, che farà con la precedente l'angolo ottuso *MhL*, che sarà quello che si cerca dell'*intradosso con la testa* , preso con la squadra sullo spigolo della loro intersezione, questo angolo è lo stesso per ciascun concio di questa "trompe".

Di seguito cerchiamo *l'angolo dell'intradosso con i letti* (***Fig. 44c***), ad esempio, per il "biveaux" del letto con l'intradosso del giunto di cui la proiezione è *CE* e l'altezza di testa $g^{e(2)}$ $^{2}3$, si traccerà su *CE*, dal punto *E* la perpendicolare *EG*, uguale all'altezza Eg^{e} di questo giunto sul piano orizzontale, e si traccerà *GC*, a cui si farà la perpendicolare *GQ*, che intersecherà *CE* prolungata in *Q*. Sullo stesso prolungamento si trasporterà la lunghezza *QG* in *Q* ^{2}*G*; dal punto *Q* si traccerà *QT* perpendicolare a *CQ*, che sarà inclinata rispetto all'orizzonte *OR*, che essa intersecherà, prolungandola, fuori da questa tavola; e dal punto ^{2}*G* si traccerà un'altra linea ^{2}*Gt*, che, per il problema I° pag.286 del III libro, concorrerà nello stesso punto. L'angolo $N^{2}GV$ sarà quello del "biveaux" cercato, questo sarà acuto sul lato dell'imposta, e ottuso dal lato della chiave, come $n^{2}GN$, che servirà per il letto nel giunto di questa chiave, e l'altro acuto per il letto della parte inferiore del concio seguente, che avrà anche un angolo ottuso al suo letto inferiore.

Avendo trovato i "biveaux" si ha tutto ciò che serve per tracciare i conci, per esempio, il secondo *CEF*.
1° Si ha per pannello (sagoma) dell'intradosso il triangolo CE^{2} F^{2}.
2° Il pannello di testa in $^{2}3$ g^{e} f ^{2} $^{2}4$ che si terminerà a piacere nei punti $^{2}3$ e $^{2}4$.
3° Il "biveaux" o angolo di inclinazione dell'intradosso sulla faccia è trovato in *MhL*.
4° Lo spigolo o angolo dei piani dell'intradosso del suo letto inferiore è trovato in $V^{2}GN$; occorre ancora quello del letto superiore che non abbiamo cercato; ma è agevole trovarlo allo stesso modo del precedente.

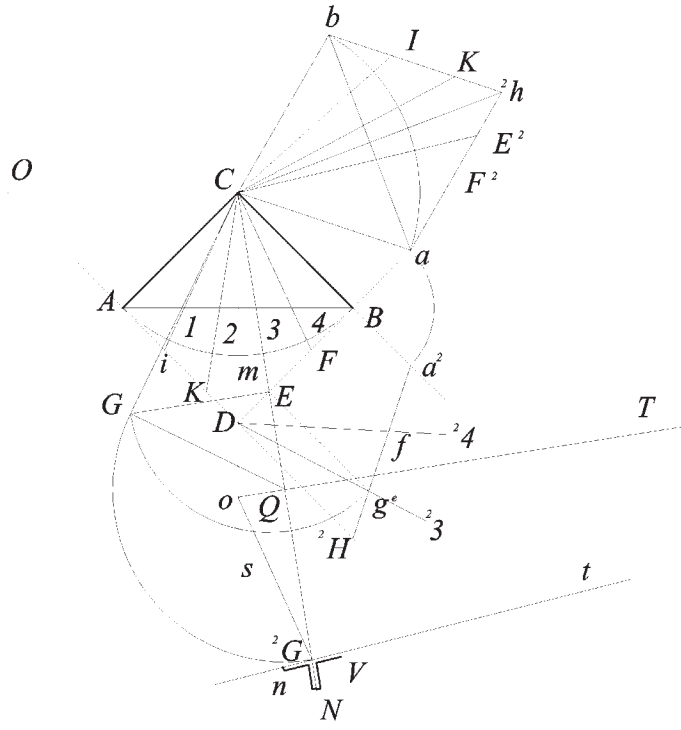


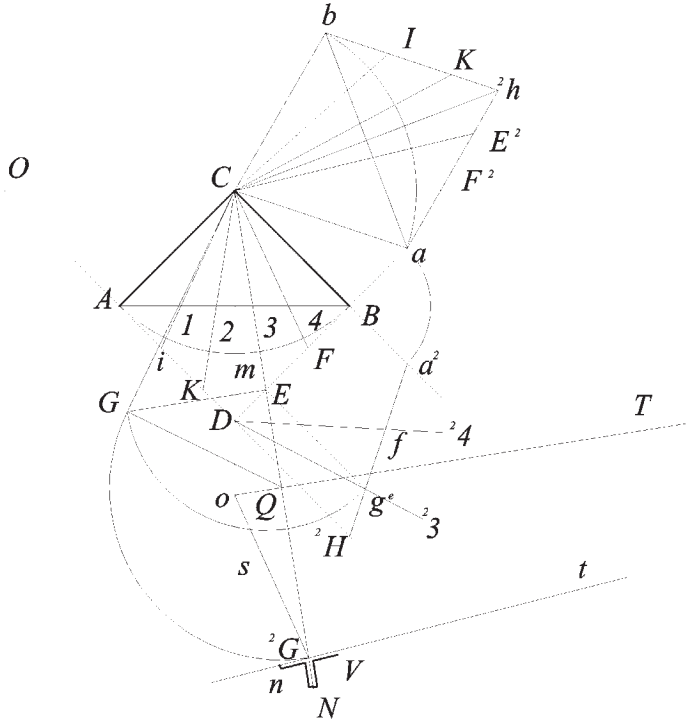
Fig. 44b Determinazione dell'angolo che la superficie di intradosso forma con quella della testa.

Per

applicare il "Trait" sulla pietra si comincerà col fare un paramento, sul quale si applicherà il pannello $CF^{2}E^{2}$, in seguito se ne farà un secondo sullo spigolo $F^{2}E^{2}$, non con la squadra, ma con il "biveau" *LhM*, posto tuttavia ad angolo retto su questo spigolo.
Questo secondo paramento servirà a collocare il pannello di testa $^{2}3$ g^{e} f ^{2} $^{2}4$.
Infine con il "biveau" del letto e dell'intradosso messo in opera sempre con la squadra sulle linee CE^{2}, CF^{2}, si asporterà la pietra che eccede, e si formeranno i letti, di cui il superiore farà con l'intradosso uno spigolo acuto, l'altro ottuso, che formano una figura di angolo molto simile a quella disegnata a sinistra del numero 46. La figura di destra che presenta due facce rappresenta il concio di chiave in prospettiva.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA
Per capire la spiegazione di questa volta in "Trompe" piatta occorre considerare che noi abbiamo esteso la superficie del quadrato *ABCD* in un rombo *Cb2 h a*, che questo quadrato rappresenta raccorciato nella proiezione data seguendo il lato inclinato, ma poiché la diagonale *AB* deve essere di livello essa è parallela all'orizzonte, ed uguale a quella del rombo che il quadrato orizzontale rappresenta, è la sola linea che deve essergli parallela. L'allungamento del rombo dà anche quelle di tutte le linee che vi sono similmente poste che la sua proiezione, come

sono i giunti dei letti *CE, CF*, etc.. che terminano ai lati di questo rombo a distanze proporzionali a quelle della proiezione.



A riguardo delle facce verticali di cui le linee *AD* e *BD* sono le proiezioni è chiaro che occorre fare l'alzato per conoscerle poiché tutti i giunti di testa, che sono in questo piano sono confusi dalla proiezione della stessa linea *DB* orizzontale, che rappresenta l'inclinata *2Ha2*, di cui l'inclinazione è data dall'altezza trovata *D ²H* del suo angolo, per mezzo dell'altezza data *Ba²* in *Ba* sul piedritto *BCa* dall'angolo della sua inclinazione.

Noi abbiamo così trovato gli angoli dei piani seguendo i nostri principi generali di goniografia; innanzitutto, la sezione dell'intradosso con l'orizzonte dalla linea *OR*, poiché è chiaro che prolungando i lati del rombo inclinato ugualmente sulle loro proiezioni *DA DB* essi taglieranno il piano orizzontale, di cui *DACB* è parte in *O* ed in *z*, di cui la linea che passerà per *OCz* sarà la comune sezione del piano inclinato dell'intradosso, e dell'orizzonte della proiezione. In oltre, poiché noi vogliamo che tutti i piani dei letti si taglino nel mezzo della proiezione seguendo la diagonale orizzontale *CD*, questa linea sarà la comune sezione di tutti i letti con l'orizzonte. Ancora, poiché le facce sono verticali la loro comune sezione con l'orizzonte sarà data dalle linee delle loro proiezioni *AD*,*DB*; noi conosceremo dunque le sezioni dei tre piani , che formano un angolo solido e l'altezza della perpendicolare *DH*; di cui dal problema 13 del III° libro noi troveremo gli angoli di questi tre piani tra essi, che

Fig. 44c Determinazione dell'angolo del letto di base formato con il letto sull'orizzonte.

noi abbiamo fatto , come è agevole vederli dalla costruzione, e cosa occorre fare per trovarli.

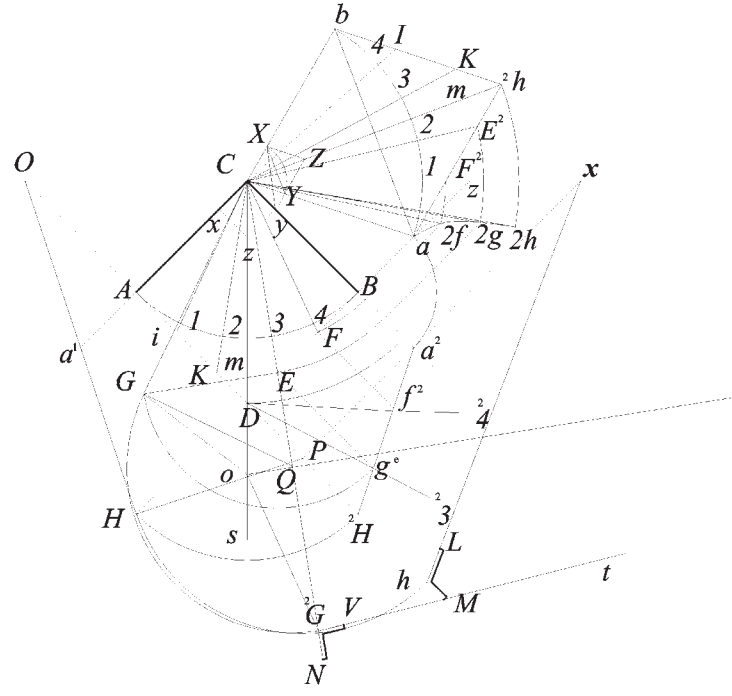


Fig. 44d. Costruzione complessiva per la rappresentazione di una volta piatta inclinata sull'orizzonte.

ANNOTAZIONE

Poiché gli angoli dei conci che convergono nel punto *C* diventerebbero talmente acuti da non poterli tagliare senza romperne la punta , è indispensabile realizzare con una sola pietra tutto l'angolo *xCy*, o in parti triangolari ,come *CXY*, o mista o a "pans", o in parallelogramma, ciò dà l'occasione per una nuova apparecchiatura per le teste inferiori dei conci, che si devono appoggiare su questa pietra in "trompillon" (***Fig. 44 d).***

Il modo più semplice sarà quello di realizzare questo "trompillon" isoscele, ritagliando dai lati *Ca* e *Cb* una grandezza a volontà uguale *CX, CY* e *CA* e facendo la testa a squadro sullo spigolo identificato dalla corda *XY* dell'intradosso, e di tagliare anche le teste inferiori dei conci.

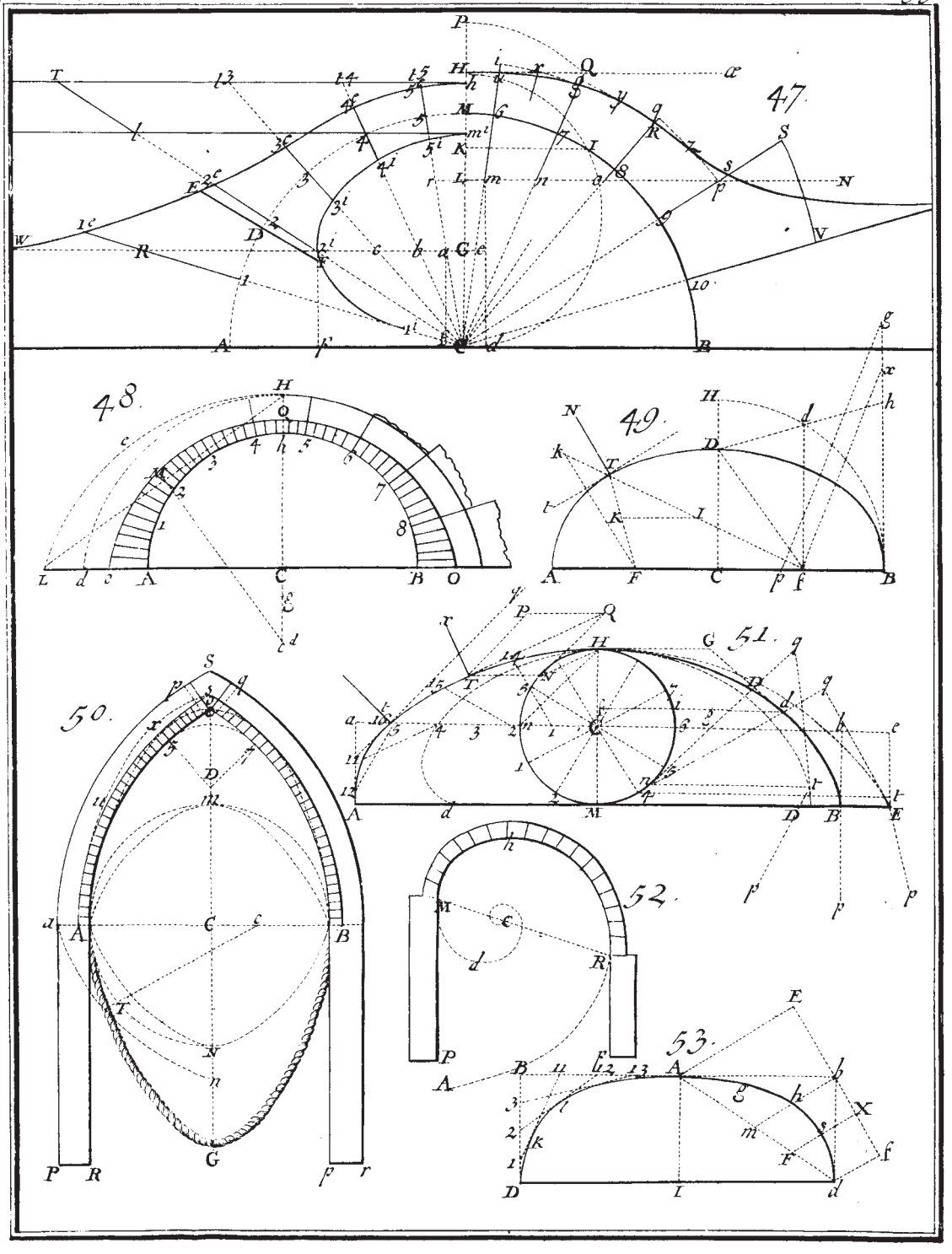
Tuttavia come è d'uso tra gli architetti , per ragioni di bellezza, realizzare il "trompillon" nella stessa configurazione della " trompe", di cui ne è parte, ci si servirà degli stessi "biveaux" di testa e di intradosso per il " trompillon" che sono serviti per i conci già descritti.

C'è ancora una osservazione da fare sul taglio della testa, e si può farla in due modi, scavare 1° a piombo quando si è fatto il "trompillon" simile alla figura totale della "trompe", in questo caso questo taglio diviene inutile per l'appoggio dei conci che non si sosterranno che sui letti, 2° si può fare con il taglio a squadro sull'intradosso, ed allora essa porta una parte del carico dei conci che sono appoggiati sulle loro teste

inferiori in modo che in questa costruzione essi facciano meno spinta sui loro piedritti per scaricarli. Nell'una o nell'altra costruzione si vede che il letto (intradosso) inferiore della chiave deve essere diviso in due parti da un angolo rientrante *xzy* (Fig46) che deve ricevere l'aggetto del "trompillon".

page 105

Pl. 33.



CURVE DI EQUILIBRIO DI ESRADOSSI E INTRADOSSI DEI CONCI LISCI

Se si suppone che una volta debba essere fatta di conci estremamente lisci e scivolosi, è dimostrato che devono essere di lunghezze di code disuguali, e che la curva del centro alla doele non può essere simile a quella dell'intradosso, così facendo al centro dell'intradosso circolare, l'estradosso diviene una Curva ondulata, che si apre infinitamente, e se si prende il centro circolare nel mezzo dello spessore della volta, quello dell'estradosso sarà quasi lo stesso come nel caso precedente; ma il centro della doele farà una curva di quella specie che qualche geometra chiama Lenciscate, che rientra in se stessa e si incrocia a forma di nodo di nastro; daremo poi la costruzione di queste curve.*Prima disposizione in cui l'intradosso è circolare, di cui noi prendiamo una metà per esempio.*

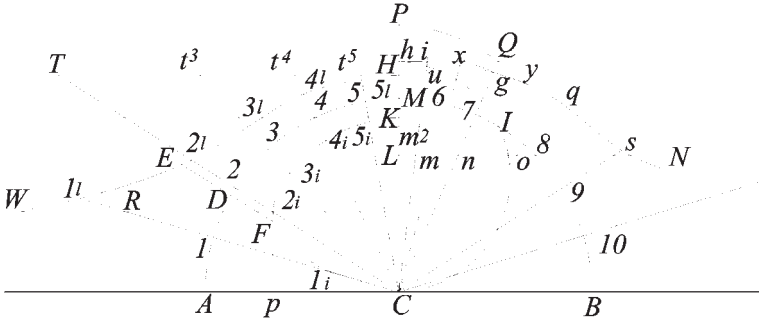


Fig.47 Costruzione per ottenere i conci dell'arco

Sia (***Fig.47***) il semicerchio *BM*, diviso in parti di conci *10, 9, 8, 7, 6*, uguali tra loro, più la metà *6M* per la chiave *6, 5*. Data anche la lunghezza *HM* per lo spessore della chiave, bisogna trovare quella degli altri conci *6i, 7g, 8r, 9s*, la quale aumenta talmente la loro pesantezza, che scivolosi come li si suppone, rimangano in equilibrio. Sia *HC*, come diametro, si farà un semi cerchio *HIC*, che taglierà il centro di doele *BIM* al punto *I*, per il quale si porterà *IK* perpendicolare a *HC*. In seguito si porterà la metà della lunghezza della chiave *HM* sul diametro *AB* di *C* in *d*, da dove si porterà dm parallelo a *CH*, che incontrerà il raggio *C6* in *m*, dove si porterà *LN* parallelo al diametro *AB*, il quale taglierà i raggi tirati dalle divisioni dei conci *6, 7, 8, 9* ai punti *m, n, o, p*, di cui ne faremo uso, per es. per trovare lo spessore *Gr*, si porterà la lunghezza *o p* di *K* in *P*, poi su *PC* come diametro, si descriverà un arco di cerchio *PQ* che incontrerà la tangente *Ha* al punto *Q*; il raggio *CQ* trasportato in *CR*, darà la lunghezza *8R* che si cerca.

Ciò vale anche per tutti gli altri conci. Se si fosse cercata la lunghezza 7*g* invece della parte op della linea *LN* si sarebbe preso no, che corrisponde al concio *7 8*, e si sarebbe fatta la stessa operazione che avrebbe dato un raggio *Cg*, di conseguenza il suo eccesso sulla doele *7g*.

Supponendo che invece di fare delle sporgenze da un concio all'altro, come *ui*, si portasse una linea *HxyzY* dai centri, si avrebbe una curva di estradosso, che sarebbe quella dei conci, che si supporrebbero stretti dalle loro teste, di modo che le sporgenze diverrebbero quasi impercettibili, sebbene sempre reali; perché ci fa supporre per la dimostrazione.

Seconda disposizione, dove si prende il centro circolare al centro dello spessore della volta.

Sia per una metà il semicerchio *A D M*, il centro dato per il centro dello spessore della volta, il quale spessore è dato alla chiave in *hm*. Avendo diviso questo centro ugualmente nei suoi conci ai punti *1, 2, 3, 4, 5, 6*, e c. e tirato i raggi *C1,C2, C3*, e c. si porterà il quarto della lunghezza Km^1 della chiave in C*f* su *A B*, per tirare dal punto *f* una parallela a *Ch*, che taglierà il raggio *C5* in *a*, da dove si porterà *RG* parallelo a *AB*, che taglierà i raggi in *a, b, c,* 2^i, *R*; si prenderanno successivamente le lunghezze *a e* doppie di *aG, ab, bc, c2, 2R*, per portarli sui raggi corrispondenti sopra e sotto l'arco dato *ADM*, avere a e in 5^e e 5^i; *a b* in 4^e e 4^i, *bc* in 3^e e 3^i, $c2^i$ in 2^ee 2^i; infine 2^iR in I^e, I^i e per i punti trovati I^e $2^e3^e4^e$, ecc. si traccerà a mano o con un righello pieghevole la curva di estradosso *W E h*, lo stesso che con gli altri punti I^i 2^i 3^i, ecc. quella d'intradosso *CF* m^i la cui parte *CF* diviene inutile e anche contraria alla costruzione; perché rientra all'interno dell'arco che si deve coprire con la volta; in modo che supponendo il punto *F*, il più lontano dalla linea del centro *Ch*, questo deve essere quello della giunzione del piedritto *Fp*, se è verticale, cioè a piombo, cone lo sono ordinariamente; così con questa costruzione il centro *ADM* si cambia all'intradosso in un ribassato $F4^i$ m^i, la cui imposta che era stata data in *A* è risalita in *F*.

DIMOSTRAZIONE

E' dimostrato in quasi tutti i trattati di Meccanica, e particolarmente nella Proposizione 22 di quello di M. de la HIRE, che le perpendicolari alle direzioni delle tre potenze in equilibrio, che tirano o spingono uno stesso punto, formano un triangolo, i cui lati esprimono il rapporto di queste tre potenze; o in ogni concio ce ne sono tre da considerare intorno al suo centro di gravità; sapere lo spazio della pressione dei due conci collaterali, che agiscono perpendicolarmente all'inclinazione della giuntura in letto cioè al *taglio* della pietra per sostenerlo quasi come in una folla due uomini sostengono un ferro tra loro due, e la terza potenza è il pensatore del concio, che si sforza per sfuggire dai due a cedere. Ecco ciò che è supposto.

E' chiaro che nelle costruzioni delle nostre curve abbiamo iniziato a formare dei triangoli, i cui lati sono perpendicolari a quelle tre potenze, tali sono i triangoli *Cae, Cab, Cbc, Cmn, Cno* ecc. perché le parti orizzontali *a* e *ab bc, mn, no*, ecc. sono perpendicolari alle direzioni verticali dei pensatori e le parti dei raggi *Ca, Cb,Cc, Cm, Cn, Co* sono perpendicolari alle direzioni delle pressioni; dunque questi triangoli esprimono i rapporti di ciascuna delle potenze.

Siccome non abbiamo bisogno per trovare le lunghezze dei conci, che di conoscere l'espressione della loro pesantezza, ne segue che, avendo determinato una linea, che esprime una lunghezza di coda data in *rm* o in *ae*, si avrà il seguito delle espressioni delle altre lunghezze in *mn, no, op*, o per il secondo caso in *ab, bc*, ecc. di conseguenza le lunghezze sono ben trovate.

COROLLARIO I

Siccome tutte queste parti orizzontali sono disuguali essendo proporzionali alle tangenti *T, t3, t4, t5, th*, corrispondenti a delle parti uguali del cerchio, ne segue che le curve di doele e di estradosso non sono simili; poiché si aggiunge all'esterno dei raggi del centro circolare, o si divide all'interno delle parti disuguali.

COROLLARIO II
Se, al contrario, si fanno le parti di un centro disuguali, proveniente dalle divisioni uguali di una orizzontale *LN* o *GR*, allora l'estradosso e l'intradosso diverranno paralleli, e lo spessore della volta sarà uguale, sebbene i conci siano in equilibrio, ciò che non può essere applicato al centro circolare, ma soltanto a quello della curva della Chainette allentata, come è dimostrato da più Matematici, e più nettamente da M.COUPLET, nelle Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'anno 1729.

COROLLARIO III
Ne segue anche da questa costruzione, che sebbene la curva data dal centro non sia circolare ma Ellittica, rialzata o ribassata, e anche cosi poco convessa che degenera in linea retta come alle piattebande, a condizione che le direzioni del taglio partono sempre dallo stesso centro *C*, sarà sempre vero che le curve o le rette di estradosso intradosso metteranno l'equilibrio tra i conci che esse comprendono; perché le direzioni delle potenze restanti sempre le stesse, sarà anche sempre vero *che i pesantori dei conci saranno in ragione delle differenze delle tangenti degli angoli che fanno i letti*, cominciando al centro della chiave, come è dimostrato nella Meccanica di M. de la HIRE, alla Proposizione 125.

COROLLARIO IV
Da ciò ne segue, come l'ha dimostrato M.COUPLET, nella Memoria citata, che la superficie rettilinea della piattabanda *Thm l* è uguale alla sua corrispondente centrata $2^e\ h\ m^i\ 2^{\ i}$, ciò che fornisce un mezzo facile di fare lo squadrato di questa superficie mista, e di conseguenza quello della solidità della volta.

COROLLARIO V
In più non c'è nessuna specie di volta che le piattebande che possono avere un estradosso in linea retta, e di conseguenza nel 5° dei conci infinitamente lisci, una volta a livello non potrebbe sussistere sebbene l'esperienza ci assicura del contrario nelle pietre di superfici accidentate, e anche che questa pratica è molto utilizzata.

COROLLARIO VI
Insomma se i conci fossero infinitamente lisci, occorrerebbe che i piedritti e i canestrelli fossero infinitamente lunghi; perché la curva di estradosso *hEW* incontra l'imposta prolungata *BA* a una distanza infinita, con ciò occorrerebbe una forza infinita per resistere alla spinta dei conci sospesi, nella supposizione che essi siano infinitamente scivolosi, senza alcun attrito, seguendo l'ipotesi necessaria per stabilire un ragionamento geometrico.
Siccome non c'è niente di simile nella natura, in particolare nel genere delle pietre tagliate per le volte, i cui letti dritti sono molto accidentati, questa speculazione diviene inutile per l'esecuzione; tuttavia non lo è per le conseguenze che se ne devono tirare.
In primo luogo, l'uso ordinario dei conci di uguale spessore è molto difettoso; perché non c'è nessuna conformità ai principi della Teoria, con i quali deve esserci almeno qualche rapporto; poiché gli attriti non sono sufficienti per resistere alla spinta e allo *scivolamento* dei conci, e non fanno altro che diminuire lo sforzo.
In secondo luogo, avendo riguardo per gli attriti dei lit dei conci, si deve diminuire di spessore, che converrebbe se fossero infinitamente lisci, seguendo un rapporto di tangenti prese su *Th*, le cui lunghezze diminuirebbero nella ragione della resistenza degli attriti, che nessuno sappia ha ancora potuto assegnare, essendo questa determinazione troppo mischiata di cause Fisiche, in ciò che le pietre sono più o meno dure o tenere, granulate o liscie, pesanti o leggere, e più o meno uniformemente applanies e drizzate nei loro letti, secondo la destrezza dell'operaio.
Del resto i conci più o meno grossi comprendono un arco dal centro di un più grande o più piccolo numero di gradi, ciò che aumenta o diminuisce il numero dei letti; di conseguenza gli attriti.
Quindi si può concludere che è molto difficile poter ben determinare una curva di estradosso; tutto ciò che se ne può dire sicuramente è che essa non deve essere la stessa di quella della doele, contro l'uso ordinario della maggiorparte degli Architetti, e la supposizione di tutti i libri del taglio delle pietre, alla quale mi sono tuttavia conformato, per non ostacolare le *Linee*; e io non ho proprio provato a sostituire questo uso la cui sola esperienza ha fatto sentire il difetto.
Sarebbe inutile annotare questo difetto se non si apportasse qualche correzione; ed io ho creduto di doverne proporre una tirata in parte dall'esperienza ed in parte dalla Teoria.
In primo luogo posso far notare che gli antichi Architetti, guidati dalla sola esperienza e le regole del buon senso, si sono incontrati perfettamente con quelle della Teoria, che tuttavia sono state scoperte dai nostri tems; perché se si pensa ai profili che ci ha dato Palladio delle volte del Pantheon e della Galluce, che sono tra le più grandi che ci restano dell'Antichità, si vedrà che il loro spessore preso a 30° al di sopra della loro base è quasi triplo di quello della chiave, ciò lo si può paragonare con la (***Fig.47***) dove la linea *EF* passando dal punto *D*, a 30° al disopra della base A, dal quarto di cerchio *ADM* è anche il triplo dello spessore hm^i.
Gli Architetti moderni hanno fatto lo stesso; se si crede anche ai profili incisi da MAROT, del Dome du Val de Grace a Parigi, si noterà lo stesso ispessimento della volta a 30° al di sopra della base.
Penso tuttavia che un ispessimento così grande non sia necessario, e che si può diminuirlo senza timore di un settimo; eccome la ragione:
L'espessimento *EF* viene dalla supposizione che i conci siano dei corpi infinitamente lisci, ma ne deriva che molte delle nostre pietre, sottili che siano tagliate propriamente dai loro letti, non siano tali; poiché vediamo per esperienza, che esse non scivolano più o comunque pochissimo, su un piano la cui inclinazione è minore di 30° e al di sotto, quando la lunghezza del taglio del letti è più grande della corda dell' estradosso; o per parlare più positivamente, quando il centro di gravità del concio non cade all'esterno del piano inclinato del letti, sul quale è posto; o in questo caso il lato del lit inclinato è alla sua proiezione orizzontale, come 2 è alla radice di 3, o quasi come *7* è a *6*; dunque basta che i fianchi della volta 30° al disotto della base, siano verso l'altezza della chiave dove è il minimo spessore, come *I 8* sta a *7*.
Quindi credo che si possa dedurre una buonissima *Regola di pratica per gli estradossi*, che è di portare tre volte di seguito lo spessore della chiave all'imposta come *hm* in *AL* (***Fig.48***) o *h* Q in *AO*; poi avendo tirato la corda *LH*, si eleverà sul suo centro M una perpendicolare Mc^d, che taglierà l'appiombo dal centro *HC* prolungato in c^4, dove sarà il centro dell'arco dell'estradosso *LeH*, il quale arco sarà sempre minore del quarto di cerchio, e non sarà equidistante dalla doele.

Si potrebbe trovare, più precisamente, la curva dell'estradosso in un

sistema opposto a quello che abbiamo appena stabilito, considerando i conci come dei corpi, che non scivolano affatto sui loro lit, ma che fanno sforzo per allontanarsi e capovolgersi è così che M.COUPLET li ha considerati in una Memoria; inserita in quelle dell'Accademia

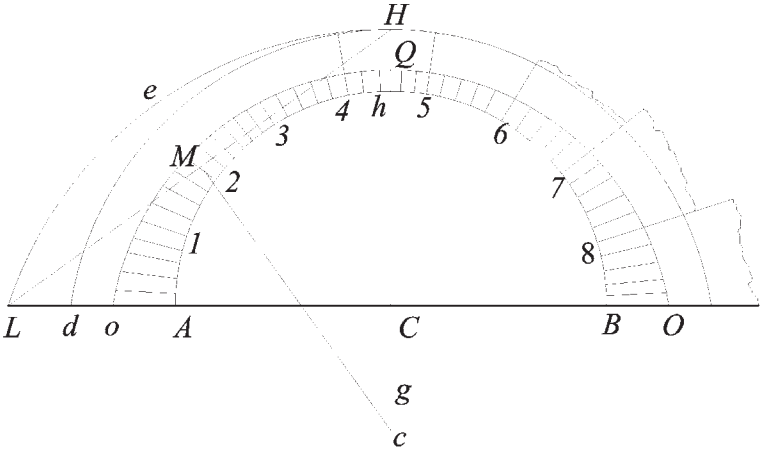


Fig.48 dell'anno 1730, dove si vede come sarà utile dare un estratto per i centri del mezzo cerchio interno e di 120°.

Egli pensa, tramite un lungo calcolo Algebrico, che una volta di 28 piedi di diametro di spessore dappertutto uguale, il cui intradosso e estradosso fanno degli archi di cui cerchi concentrici, non può avere meno di un piede cinque pollici dieci linee e un quarto di spessore, che sono vicini ai 18 pollici e che quella di uno stesso raggio di 14 piedi, che sarebbe di un arco di 120°, potrebbe essere quasi 5 volte meno spesso, non avendo che tre pollici tre linee e tre quarti di spessore.

Se invece di considerare la lunghezza di 28 piedi come diametro di un mezzo cerchio, la si considera come la corda di un arco di 120°, si avrebbero per suo spessore 3 pollici e quasi dieci linee cioè soltanto circa sei linee in più.

Ne segue, evidentemente, che se l'arco fosse di un minor numero di gradi e tuttavia sempre dello stesso raggio, lo spessore diminuirebbe ancora poiché la carica diminuisce.

Tuttavia come in questa ipotesi lo sforzo della pesantezza della volta si fa sugli spigoli dei conci, che possono schiacciarsi con il carico più o meno facilmente, seguendo la consistenza della pietra, la quale può essere più o meno dura; il croit, per evitare eventuali incidenti, che bisogna almeno raddoppiare o anche triplicare lo spessore trovato dalla formula algebrica, affinché i punti o piuttosto le linee dei sostegni si trovino al quarto o al centro dei lit dei conci e non sugli spigoli.

Da ciò ne ricavo una costruzione, che mi sembrerebbe molto più conveniente alla pratica; essa differisce poco dalla precedente, sebbene proviene da una ipotesi apposta e con questo vantaggio, che in quella abbiamo dato alla chiave uno spessore arbitrario senza conoscere la necessità, e in questa noi conosciamo il minimo spessore, che la prudenza di un Architetto deve avanzare; eccola:

Supponendo ancora il diametro della volta in pieno centro di 28 piedi, si porterà sul raggio *ch* prolungato una lunghezza di 8 pollici di *h* in *Q*, se la pietra è dura, o meglio un piede se la pietra è tenera, e la sesta parte di questo raggio di *c* in *g*; da qui come centro e dell'intervallo *gQ* per raggio si descriverà un arco di cerchio *Qo*, che sarà quello dell'estradosso della volta, ciò che darà pressappoco l'ispessimento che esige la formula raddoppiata e triplicata, come lo si giudicherà a proposito, determinando lo spessore della chiave, al fine di dare ai sostegni la giusta resistenza al carico.

In effetti poiché la formula da per un arco di 120°, e di 18 piedi di raggio 3 pollici 3 linee 3/+, il cui doppio è 6 pollici 7 linee ½ prendendo 8 pollici della chiave, si a ancora 1 pollice 4 linee ½ di rinforzo alla chiave, e l'altezza di 30°, si avrà circa 1 piede 3 pollici di spessore, sebbene la formula chieda 6 pollici 7 linee ½; di conseguenza la forza è più che raddoppiata ai lati. Insomma se lo spessore della formula raddoppia all'imposta di una volta di uguale spessore di 28 piedi di diametro non dà che circa 3 piedi , e anche un po' meno, quella di nostra costruzione sarà più che sufficiente per una volta di spessore disuguale, che diminuisce continuamente dall'imposta alla chiave, di modo che sia scaricata di più dei ¾ di pesantore che avrebbe se fosse di uguale spessore dovunque.

Essendo cosi supposto e tracciato l'estradosso del minimo spessore, sarà facile tracciarne un altro di spessore più grande, se c'è necessità di fortificare la volta, come in *hH* invece di *hQ*; sebbene bisognerebbe far passare dal punto *H* un arco di cerchio *Hd* concentrico a *Qo*, che aggiunga ovunque un uguale spessore.

Del resto non bisogna guardare questa pratica come una regola geometrica assolutamente conforme alle leggi della Meccanica e della Statica, ma come una buona guida per comportarsi nell'esecuzione non rischiare niente per quanto riguarda la solidità.

Abbiamo sempre supposto i centri circolari più facili; ma se fossero rialzati o ribassati, occorrerebbe aver riguardo alla maggiore o minore spinta, su cui daremo qualche regola alla fine di questa Opera.

Si potrebbe fare un'obiezione contro la massima che ho appena stabilito, di diminuire lo spessore delle volte, dall'imposta fino alla chiave è che, sebbene i conci non siano dei corpi lisci, non sono nemmeno dei corpi aderenti, come nella seconda ipotesi, essi tendono a scivolare sui loro lit, tanto più che si avvicinano alla situazione verticale; o diminuendo la lunghezza del taglio che fa la lunghezza dei letti, si diminuiscono due cose che contribuiscono a sostenerli, l'una è l'attrito, che è più considerevole sia in una grande che in una piccola superficie, l'altra è la linea di imposta che è più grande, che la giuntura di testa del taglio è più lunga; o questa linea di imposta che è una linea orizzontale, esprime la forza che sostiene il concio contro la verticale che esprime la sua pesantezza, di conseguenza più si diminuisce la linea di imposta, meno si è sicuri del supporto della chiave.

Per rispondere a questa obiezione si può in primo luogo opporre la fig.47 dove le regole della Meccanica e della Statica, ci fanno vedere che la cima della volta deve essere la parte più sottile.

In secondo luogo, sebbene sia vero che l'attrito sia più considerevole in una grande che in una piccola superficie, che essa aumenta e diminuisce per il pesantore dei conci è anche vero che lo sforzo per vincerlo aumenta o diminuisce, seguendo il maggiore o minore spessore.

Infine è visibile che il taglio di una giuntura di testa di inclinazione costante darà sempre delle linee di imposta e delle altezze di linee di imposta proporzionali, sebbene prolungate o accorciate; di conseguenza diminuendo lo spessore di un concio, si diminuisce tanto lo sforzo del peso che lo spinge in basso, quanto la potenza del concio contiguo che lo sostiene nell'aria; l'una di queste potenze è espressa dall'altezza della linea di imposta, e la seconda dall'ipotenusa della linea di imposta.

Mi si chiederà forse qui qualche regola, ricavata dall'esperienza, toccante lo spessore delle volte alla chiave, sulla quale si possa ragionevolmente contare, senza ricorrere al calcolo Algebrico, di cui tutti non sono capaci, e al quale le cause Fisiche, non tengono, senza qualche correzione, come in quest'esempio di pietre più o meno dure.

A cui io risponderei che bisogna in primo luogo fare attenzione agli usi delle volte; ce ne sono di quelle che sopportano grossi fardelli disugualmente sparsi sulla loro superficie, come fanno gli archi dei ponti, sui quali possano pesanti macchine, ne deriva che ne portano poco, come le volte sulle quali si poggia qualche pezzo di Armatura, ne deriva che esse non portano niente, come per es. molte volte di chiese, la cui Armatura è sui muri.

1° Per quanto riguarda le volte della prima specie si nota in qualche ponte Antico, che il loro spessore alla chiave è un decennio del diametro dell'arco e più abitualmente un dodicesimo, e il meno che si possa da loro seguendo il pensiero di un buon Architetto, LEON BATTISTA ALBERTI è il quindicesimo.

2° Quando le volte non sostengono niente basta dar loro meno della metà di spessore, che io riduco alla 24 esima parte del diametro, cioè, un mezzo pollice per piede; la mia ragione è che la volta della navata della Chiesa di S. Pietro di Roma, che è delle più grandi che io sappia, e che non è senza carico, poiché porta una parte dell'armatura della copertura, è pressappoco in questa proporzione; perché seguendo le misure di M.TARADE, essa ha 82 piedi di diametro, e soltanto 3 piedi 6 pollici di spessore in mattoni, ciò ritorna a 1/23 e 3/7;su questo principio una volta di 28 piedi di diametro avrebbe 14 pollici alla chiave, ciò che sembrerebbe molto conforme alla costruzione ordinaria, a condizione che i Fianchi siano spessi almeno del doppio a 30° di altezza al di sopra della base, o appoggiata da qualche lunettes.

Se si discende nelle volte più piccole, come quelle di un piede o due di diametro, si troverà un paragone sorprendente degli spessori che propongo, con quelli della Tavola di M.GAUTIER; poiché per un archetto di un piede, egli da 25 volte di spessore in più in pietra dura, e 36 volte in pietra morbida, cioè un piede 6 linee in pietra dura e un piede 6 pollici in pietra morbida; ma bisogna fare attenzione che esso provveda alla carica delle macchine, ed io soltanto alla pesantezza della volta considerata nelle sue parti; infatti si finirà di essere sorpresi che un mezzo pollice di spessore posso bastare a un archetto di 1 piede, quando avremo solo delle volte Gotiche in terzo punto di 24 e di 25 piedi di raggio sussistenti con uno spessore di 5 e 6 pollici, il quale dovrebbe essere del doppio seguendo la nostra regola, prendendo il raggio dei Gotici per diametro o larghezza della volta, come lo è in effetti; è vero anche che ciò lo si trova negli archi di 60°; perché dubito che essi fossero sostituiti a 90°, se avessero avuto un solo centro.

LA CHAINETTE

Se è dimostrato che essendo il centro di un arco circolare, non si può mettere l'equilibrio tra i suoi conci, che facendoli di lunghezza disuguale, lo è anche per l'inverso, cioè che quando si vogliono fare dei conci di uguale spessore, non li si può sistemare su una Curva circolare; ma su un'altra specie, che è quella che forma il peso di una catena, o corda caricata a distanze uguali di pesi uguali, sospesa dai due limiti, e più o meno allentata, come la si vuole per la distanza della linea d'imposta, fino al centro della chiave.

Sta dunque all'Architetto prendere la sua decisione nella costruzione di una volta, sull'uguaglianza o disuguaglianza del suo spessore, e vedere se non è sottomesso alla grazia dal contorno circolare o Ellittico. Se l'Architetto vuole che la sua volta sia ugualmente spessa, egli non ha niente di meglio da fare che tracciare su un muro a piombo, una linea che a livello o rampante di lunghezza uguale alla larghezza della volta, e abbassare al centro un appiombo uguale alla sua altezza. Se in seguito egli appende una corda alle basi, e la lascia fino a ché il suo centro perviene all'estremità della verticale, che esprime l'altezza rovesciata, questa corda gli segnerà il contorno che deve seguire e tracciare sullo stesso muro, questa curva sarà il centro cercato, che bisognerà solo capovolgerlo per metterlo nella sua situazione naturale, come si vede *AGB* o *ANB*, (***Fig.50***) girata al di sopra in *AgB* e *AmB*.

Tuttavia questa curva che conviene cosi bene all'equilibrio dei conci uguali, non conviene molto alla bellezza del contorno dell' estradosso ; perché essa fa una sporgenza col piedritto alla sua base in *Ae B*; che diviene sempre più scioccante alla vista, che il centro sia ribassato, come lo si vede in *Ram*: In questo caso se si vuole farne uso, bisogna prendere la sua base, non sul quadro del piedritto in *A*, ma un po' all'interno, come in a, per inscrivervi un arco di cerchio di un centro preso sulla linea *AB*, come *AT* dal centro *C* per la metà di chainette *ATN*, di modo che

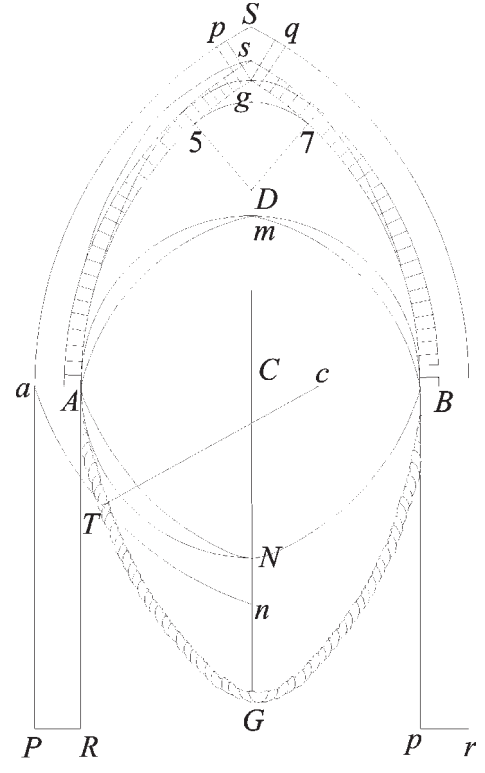


Fig.50 Attraverso una corda posta alla base otteniamo il centro della curva.

la tocchi in un punto *T* per controllare la sporgenza, facendo quest'arco più o meno grande, come lo si giudicherà a proposito, voglio dire di

un più grande o più piccolo raggio, perché per il numero di gradi è determinato dall'attaccamento all' estradosso; ma questa correzione non fa che trasportare la sporgenza da *a* in *T*, e renderla il meno sensibile che si possa, essa non la toglie completamente; il cerchio e la chainette sono due curve troppo divise perché l'occhio non se ne accorga, un poco la giunzione, quando l'altezza che è qui la profondità della volta non è più grande che la sua mezza larghezza.
Il centro usato che si avvicina di più a questa curva è il Gotico, come lo si vede alla (***Fig.50***) dove Aus è quasi confuso con la chainette *Axg*, che si distacca verso la chiave, dove si fa l'angolo Gotico.
Si possono vedere le proprietà della chainette per le volte nelle "Memorie dell'Accademia delle Scienze" dell'anno 1729 dove M.COUPLET le ha chiaramente dimostrate.
Nel sistema dei conci disuguali si potrebbero fare i Centri delle volte di più tipi di curve, il cui contorno sarebbe piacevole alla vista, tali sono , per esempio, l'Ovale di Caffini e la Cicloide per i ribassi o rialzi, e la Spirale per gli archi Rampanti, e molti altri.

L'OVALE DI CAFFINI
Il contorno della Caffinoide somiglia molto all'Ellissi delle sezioni coniche, essa è solo un po' più aperta tra i suoi assi, come lo si può vederealla (***Fig.49)*** dove i suoi focolai non si avvicinano molto dalle estremità del grande asse.
Abbiamo notato parlandodell'Ellissi che la somma delle linee *fT* e *FT*, ricavate dai focolai a un punto della circonferenza fosse uguale alla lunghezza del grande asse *AB*; nella Caffinoide, il prodotto o rettangolo fatto da queste due linee è uguale al rettangolo fatto dalle linee *Af* e *fB*, o, la stessa cosa, da *BF*e*AF*.
Sia *AB* il grande asse, e *CD* la metà del piccolo. Dal punto C come centro, e *CB* come raggio, si descriverà un quarto di cerchio *BH*, nel quale si tirerà una ordinata *fd*, tale che essa sia uguale a *Df;* portando *CH* in *Bh*, e tirante dal punto *h* per *D*, la linea *Dh*, che taglierà il quarto di cerchio *HdB*

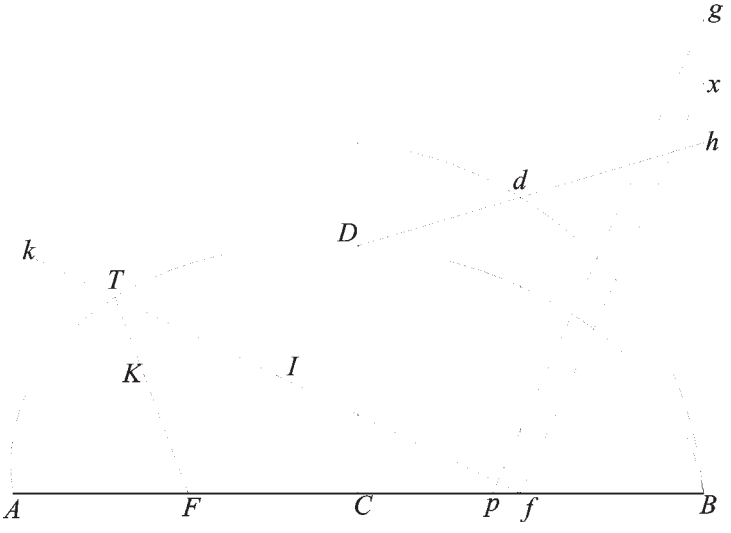


Fig.49 Attraverso l'unione di archi di cerchio otteniamo la circonferenza dell'ovale

in *d*, da dove si porterà *df* parallelo a *CH*, che taglierà il diametro *AB* in *f*, questo punto *f* sarà uno dei focolai; poi portando l'intervallo *C*f dall'altro lato in *Cf* dall'altro lato in *CF*, si avrà l'altro l'altro focolaio *F*.
Ora per trovare altrettanti punti che ci vorrebbero alla circonferenza, come in *T*, si cercherà un quarto proporzionale a tre linee date, come B*f* : *BF* : : *Bf* : *Bx*, la cui prima *Bp* è presa a caso, mettendo il punto p tra *C* ed *F*. Si può cosi facilmente tirare dal punto *B* una linea *Bg*, che faccia con *AB* un angolo qualsiasi, poi si farà *Bg* uguale a *BF*; allora dopo aver ricavato la linea *pg* gli si fara la parallela *fx*, che taglierà *B*g in *x*; la linea *Bx* farà il quarto proporzionale chiesto per la lunghezza *fT*.
Cosi dal punto *F* come centro e *Bp* per raggio, si farà un arco di cerchio in *T*, e dal punto *f* per centro, e *Bx* per raggio, se ne descriverà un altro che taglierà il precedente al punto *T*, il quale sarà alla circonferenza dell'ovale.
La ragione di questa costruzione è che si tratta di trovare lati disuguali di rettangoli uguali; o per il fatto che i rettangoli uguali hanno i loro lati in ragione reciproca, dalla 14 [e] del 6[e] libro d'EUCL si è fatto *Bp* : *Bg* : : *Bf* : *Bx*, ciò da *FT* : *BF* : :*Bf* : *fT*; dunque *FT* x *fT*= *BF* x *Bf* o *AF*, *ciò che bisognerebbe fare.*
Ora per dedurre le giunture di testa da questa specie di centro, per es. per quello che passerà per un punto di divisione di concio come *T*; si cercherà un terzo proporzionale alle linee *FT* e *Tf*, portando la lunghezza *Tf* in *TI*, e portando *IK* parallelo a *AB*, che taglierà *Ft* in *K*; si porterà la lunghezza *TK* su *fT* prolungata in *k*, da dove si tirerà *k*F alla quale si porterà dal punto *T* la parallela *TN* che sarà la giuntura di testa chiesta.

La ragione è che se dal punto *T* si porta *tT* perpendicolare a *k*F, essa sarà tangente dell'ovale al punto *T*, di conseguenza *TN*, che è parallela a *k*F gli sarà perpendicolare, ciò che M.VARIGNON ha dimostrato nelle "Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'anno 1703.

LA CICLOIDE
La seconda specie di Curva che si potrebbe utilizzare sarebbe la Roulette o *Cicloide*, il cui contorno è piacevole alla vista.

Sia (***Fig.51***) un centro ribassato da fare, la cui lunghezza del diametro

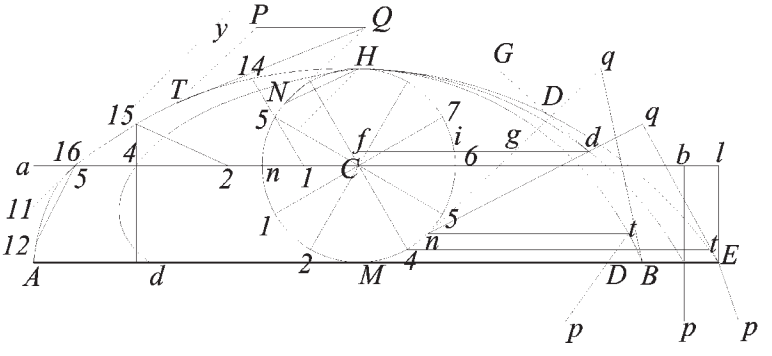


Fig.51 Costruzione di una Cicloide

orizzontale è *AB*, e la sua altezza sotto chiave *MH*, dal punto *C*, centro di *MH* per centro si descriverà un cerchio *MNHG*, di cui si dividerà la circonferenza in altrettante parti uguali che si vorrebbero avere di punti

al contorno del centro, per esempio, qui *12* ai punti *12M4567* dai quali e dal centro *C* si tireranno altrettanti raggi o diametri. In seguito si porterà dal punto *C* una linea *ab* parallela e uguale a *AB*, che si dividerà in altrettante parti uguali tra di loro, divisa la circonferenza del cerchio, e da tutti questi punti si porteranno delle linee parallele e uguali ai raggi del cerchio corrispondenti alle stesse divisioni, cosi dal punto *5* di questa linea *ab*, si tirerà la linea *5,12* parallela e uguale a C_5; dal punto *4* la linea 4^{11} parallela e uguale a *CI*, dal punto *3* la linea *3, 16* uguale a C*n* o *C6* sulla stessa linea, e cosi di seguito *2, 15* parallelo e uguale a *C5*, ecc.
Dai punti trovati *A, 12,11, 16, 15, 14*, si traccerà a mano o con una riga pieghevole una linea curva che farà la Cicloide richiesta.
Se la linea *AB* è stata fatta uguale alla circonferenza del Cerchio *MNHG*, la Cicloide sarà quella che si chiama primo Genere, che conviene a un'arcata, i cui piedritti sono a piombo; se la linea *ME* metà della base è più grande della metà del contorno del cerchio, essa può solo convenire a dei piedritti in strapiombo, e al contrario se essa fosse più piccola della mezza circonferenza, come *MD* o *Md*, a dei piedritti in talud; perché questi ultimi rientrano in se stessi; li si potrebbe cosi impegnare in una volta, la cui base è ornata di una cornice che ha una sporgenza molto elevata per nascondere una parte di questa base.
Ci resta da definire la maniera di condurre una tangente a questa curva da un punto dato, per trovare il taglio o l'inclinazione delle giunture di testa dei conci, che deve essere perpendicolare a questa linea, come l'abbiamo già detto al libro 3 Libro.
Sia (***Fig.51***) il punto *d*, dato per una giuntura, da dove bisogna portare una tangente per farlo perpendicolare a questa linea, si porteranno dal punto *d* e *H* le linee *d f* e *HG* parallele a *AB*, di cui la prima taglierà il cerchio generatore in *i*, si prenderà su *d f* la lunghezza *d g* uguale a *i f*, e *GH* uguale a *f g*, la linea tirata da *G* da *d* sarà la tangente che si richiede, ciò che è stato dimostrato da M. de la HIRE, nel suo trattato degli Epicloides, e nelle memorie dell'Accademia del 1706.

LA SPIRALE
La terza specie di curva che può servire alla formazione dei centri, nei casi in cui le basi non siano a livello è la Spirale d'ARCHIMEDE o di VARIGNON, di cui abbiamo già parlato al 2 Libro, particolarmente la seconda che può essere variata seguendo le occorrenze e i punti dati in molti più modi rispetto alle sezioni coniche, per mezzo delle curve generatrici diverse, e di tale specie si giudicherà a proposito. La sola ragione che potrà impedirne l'utilizzo, sarà forse la difficoltà di tracciarle e farle passare da dei punti e delle linee di sommità date; tuttavia se si vuol fare attenzione ai mezzi che abbiamo dato per far passare la prima rivoluzione da dove si vuole, e portare delle tangenti da tutti i tipi di punti dati, si vedrà che non è poi più difficile trovare archi rampanti di porzioni di spirali che di farli di porzione di sezioni coniche. Suppongo anche che ci si senta un po' imbarazzati; c'è un mezzo semplice e usato, di cui ho parlato nello stesso libro, di abbassarlo o elevarlo per mezzo della Graticule, fatta di parallelogrammi più o meno oblunghi, rettangoli o obliquangoli.
Si vedrà alla (***Fig.52***) l'effetto di una porzione *RhM* di spirale circolare *ARhMdC* applicata a un arco rampante dove si è sottolineata la continuazione di questa curva, che è inutile al soggetto in questione.
Io penso che quando la linea di sommità non è parallela a quella di Rampa, che concorre con essa in basso, dalla parte dell'imposta inferiore, che il grande asse dell'Ellissi è inclinato di circa 45° in orizzontale, si forma una specie di sporgenza al di sopra di questa imposta, che non si trova affatto nel contorno della spirale di VARIGNON.

La ragione di questa apparenza di sporgenza viene dal fatto che a questa distanza degli assi il cambiamento di curvatura dell'Ellissi è più sensibile, quando gli assi sono considerevolmente disuguali; perché la parte della circonferenza verso il piccolo asse si appiattisce cioè si raddrizza considerevolmente, e sono persuaso che quelli che paragoneranno l'effetto dell'una e dell'altra di queste curve in più casi, preferiranno la grazia del contorno della spirale circolare o ellittica applicato a un arco rampante, a quelle delle porzioni di Cerchi raccolti, o dell'Ellissi stessa, quando i piedritti sono a piombo, e le linee di rampa e di sommità non sono parallele.

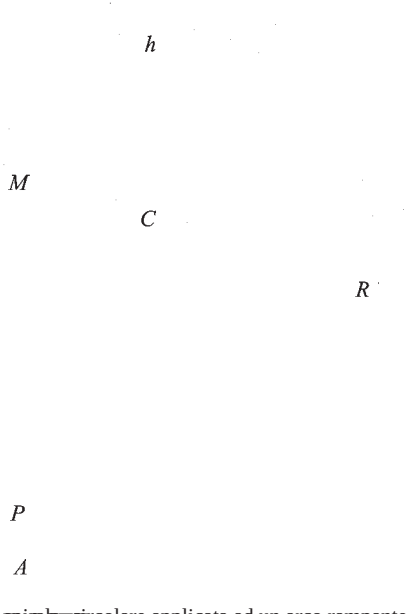


Fig.52 Porzione di spirale circolare applicata ad un arco rampante

LE CURVE COMPOSTE
Oltre alle Curve semplici che servono a formare i centri degli archi, ce ne sono altre che sono composte di due o più porzioni di Curve.
In primo luogo la maggior parte delle volte ribassate, rialzate e rampanti sono fatte dagli operai ignoranti di porzioni di cerchi, ne abbiamo spiegato l'arte al 2 Libro è inutile ripeterlo qui.
2° I centri delle volte che chiamiamo in *terzo punto* o *Gotiche* sono anche composti di due archi di cerchi, i cui centri *A* e *B* (***Fig.50***) sono a distanza uguale tra di loro e con il vertice S, come i tre angoli di un triangolo equilatero, dal quale viene il nome *terzo punto* dato alle volte Gotiche; perché le costruzioni che ci restano dell'Architettura dei Goti sono per la maggior parte coperte dalle volte e se gli archi di ogni pennacchio non sono esattamente di 60° , si avvicinano molto.
Questa costruzione non è piacevole alla vista, a causa dell'angolo che formano alla chiave le doele di ogni pennacchio; ma essa ha questi vantaggi:
1° Che da la facilità di eseguire le volte con piccolissimi conci, senza

metodo; perché fossero a squadra senza taglio, e si chiamerebbero *Pendenti;*
2° Sono molto economici
3° Renderebbero le volte leggere, e tuttavia di lunga durata, come lo provano la maggior parte delle nostre vecchie Chiese.
4° Questa leggerezza diminuirebbe ancora la spesa dei pilastri e dei piedritti che sarebbero contenuti facilmente da qualche arco cosi leggero, ma sufficiente per resistere alla spinta delle volte.
I nostri centri circolari o Ellittici non hanno lo stesso vantaggio, perché il taglio dei conci vicino la chiave è cosi inclinato che essa si avvicina molto ad una linea a piombo; di modo che per aumentare la lunghezza della coda all'estradosso su quella della doele, non ci si può dispensare dall'allungare questa Coupe, e di fare il concio un po' spesso; invece che ai centri in terzo punto i tagli della chiave stessa sono sempre inclinati a una linea a piombo di un angolo di 30°, di modo che su 6 pollici di spessore di concio, la coda all'estradosso è allungata di 3 pollici, cioè di metà, tutto ciò è considerevole. Gli Architetti di quei tempi facevano delle grandi e buone opere con molto meno spese di quanto non facciamo oggi, con la sola disposizione dei centri delle loro volte, ma erano deformi.
Per far conciliare la leggerezza delle volte con la regolarità della doele, si potrebbe cancellare l'angolo rientrante che la chiave fa in S, per mezzo di un arco di cerchio, che vi si può inscrivere, prendendo per punti *5,7* a distanza dal punto *S* a piacere; se si tira *5B* o *7 A*, il punto *D* dove queste linee tagliano l'appiombo *SC*, darà il centro d quest'arco, che toccherà i lati dal centro in terzo punto, ne cancellerà l'angolo rientrante, e lo renderà molto simile alla curva della chainette, di cui conserverà qualche proprietà, senza avere il difetto della sua sporgenza all'imposta. M a dopo tutto, un semi- Ellisse vale di più di questa composizione.
3° C'è un altro tipo di centro composto da due porzioni di Parabole, che qualche buon Architetto ha messo in uso, e preferito alle composizioni di archi di cerchi o Ellissi; Maitre BLANCHARD, che non s'imbarazza dei nomi, lo chiama *Ellissi o Ovale.*
Ecco il Tratto:
Sia (***Fig.53***) la larghezza della volta *Dd* e la sua altezza *IA*, si condurrà dal punto *A* una linea *Bb* parallela e uguale a *Dd* e si tireranno le perpendicolari *BD, bd.* Si dividerà in seguito *Bd* in tante parti uguali

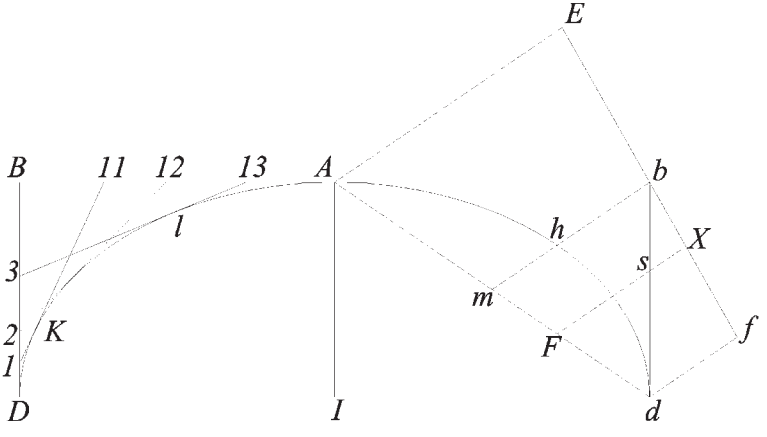


Fig.53 Costruzione per ottenere un parabola

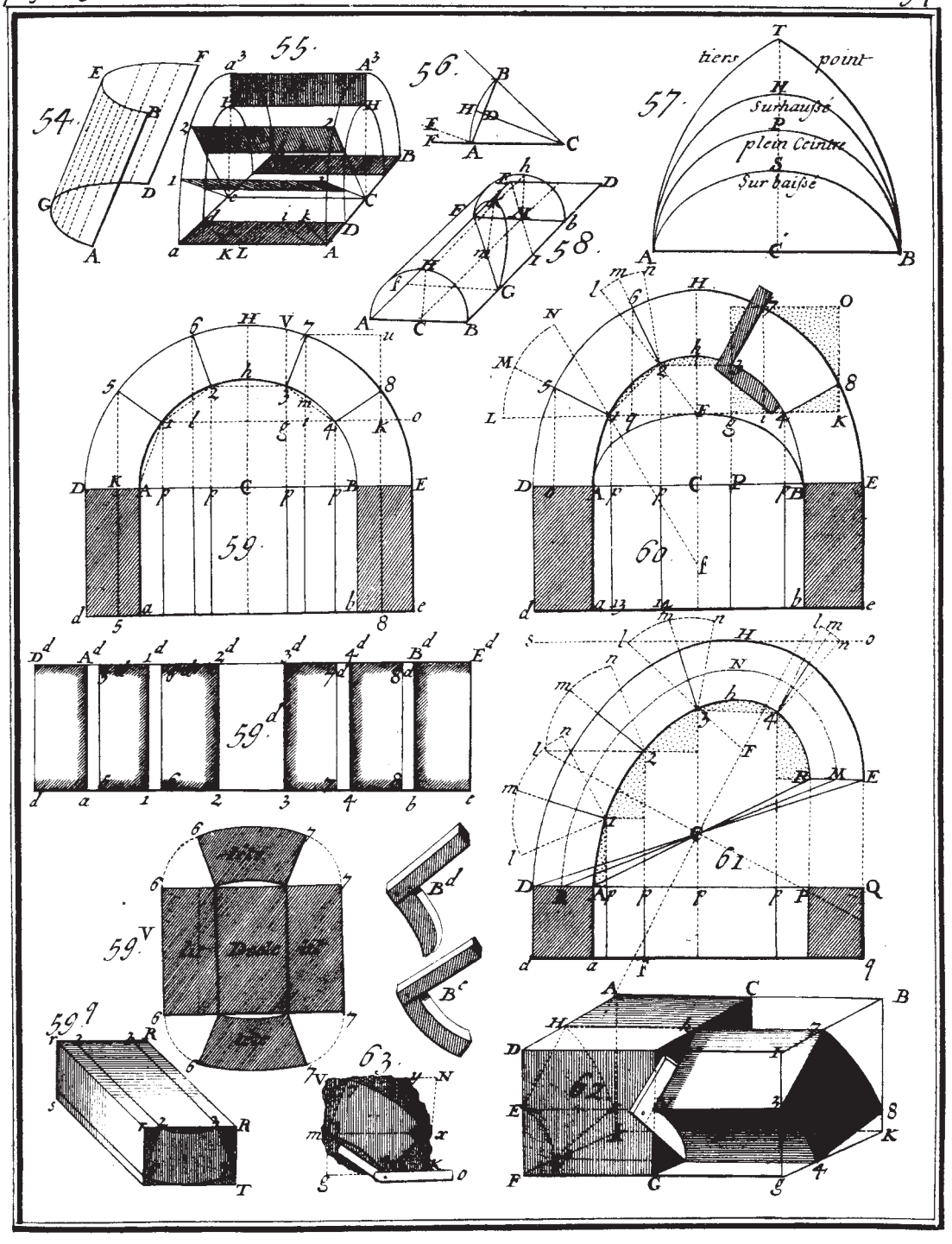
quanti i punti che si vorranno avere della Curva, e *Ba* in uno stesso numero di parti cosi uguali tra di loro, per es., qui in *4*, supponendo *BD* diviso anche in quattro, e dai punti corrispondenti di queste divisioni, a cominciare verso *D* e *B*, si porteranno delle linee dritte *I II, 2 12, 3 13,* che si incroceranno ai punti *k* e *l*, e formeranno una porzione di poligono *DiklI3A*, nel quale si traccerà a mano una curva, che tocca i suoi lati, tale che la si veda solo in *Aghsd*, la quale Curva è una parabola, che gli Architetti formarono senza conoscerla prima che M. de la HIRE l'avesse esaminata e riconosciuta, come lo ha spiegato nelle Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'anno 1702.
Se si vogliono trovare le linee e i punti necessari per descrivere questa parabola, bisogna portare la corda *Ad*, dividerla ugualmente in due in *m*, tirare *mb* che sarà un diametro (art.47 del Libro I pag.19) al quale avendo tirato dal punto *b* la perpendicolare *Ef*, si porteranno dai punti *A* e *d* le parallele *AE*, df a mb, che taglieranno *Ef* ai punti *E* e *f*. Se si porta la lunghezza *df* su o *dA* in *dF*, si avrà il punto *F*, che sarà il foyer della parabola (l. I. art. 31) e se da questo punto si porta *FX* parallela a *dmb*, si avrà l'asse, ((l. I. art. 20) poi seguendo *EX* ugualmente in *S*, si avrà il vertice S, di questa parabola; con questi fattori sarà facile descriverla dal problema X del 2° Libro pag. 148.

NOTE SU QUESTA SPECIE DI CENTRO
Sebbene le due porzioni di parabola, il suo centro è composto, siano riunite al punto *A*, in cui ciascuna di esse tocca la stessa linea *Bb*; è tuttavia vero dire che vi si deve scorgere un po' di sporgenza, in particolare se l'altezza della chiave *AI* è grande rispetto alla larghezza *Dd*; lo stesso lo si trova nella giunzione dei due archi di cerchio, i cui raggi sono di lunghezza ben diversa, come l'abbiamo fatto notare al 2°libro e ancora di più perché l'uniformità del cerchio è più propria a questi tipi di transizione. Sembra anche che al vertice *S* di ogni parabola si faccia una rientranza un po' troppo sensibile, come l'ha notato M. de la HIRE, che la trova conveniente quando l'imposta della volta è ornata di una cornice, che nasconde una parte della base dal centro; ma gli Architetti vi suppliscono ordinariamente con una porzione di superficie retta verticale, che lasciano al di sopra della cornice, perché la sua sporgenza non copra una parte troppo grande della base della volta. Allora per far bene ed evitare questo rimedio, bisogna fare le cornici degli interni leggerissime, seguendo il consiglio di VITRUVIO, di cui parleremo alla fine di questa opera. Ecco pressappoco quello che si può dire di più importante toccando le variazioni degli archi a riguardo dei loro centri.
La seconda speciedi variazione degli archi, cheviene dal cambiamento di direzione dei loro lati sulle facce, e dove si considera la loro situazione ariguardo dell' orizzonte forse divisa in sei casi diversi.
1°Quando l'arco ha il suo asse a livello e perpendicolare alle sue facce,cioè,quando il mezzo cilindro è retto, l'arco si chiama anche in termini d'Arte, *Arco retto e di livello.*
2° Quando il centro della faccia di un arco orizzontale è in un piano verticale, ma obliquo alla direzione dei lati, o, essendo la stessa cosa, a quella dell'asse; allora l'arco è chiamato *Biais*
3° Quando a questa obliquità di faccia rispetto all'asse; cioè, alla direzione dell'arco, sopravviene una seconda obliquità della faccia rispetto all'orizzonte, al quale è inclinata in angolo ottuso, come al talud o in angolo acuto, come allo strapiombo, si aggiunge al nome di obliquo quello della doppia obliquità dicendo *Biais e in Talud* o *Biais e in Strapiombo.*

4° Quando l'asse dell'arco è inclinato all'orizzonte, e la sua faccia è in piano verticale, perpendicolare alla direzione orizzontale, allora la doppia obliquità a riguardo dell'orizzonte e della faccia, si esprime in termini d'Arte con il nome di *Discesa retta*, dove bisogna notare, che la direzione orizzontale è espressa dalla proiezione dell'asse o dei lati del *piano* Iconografico.
5° Se la faccia della discesa, restando in verticale è girata obliquamente in direzione orizzontale dell'arco, si forma una tripla obliquità che si chiama *Discesa Biaife.*
6° Se a queste tre obliquità cioè I° dall'asse all'orizzonte, 2° dall'asse verso la faccia, 3° dalla faccia verso la direzione orizzontale dell'asse, ne sopravviene una quarta, che è quella della faccia verso l'orizzonte in angolo ottuso di talud, o in angolo acuto di strapiombo, si esprimono queste quattro obliquità con il nome di *Discesa Biaife* oe in *Talud* o in *Strapiombo.*
Non parliamo qui di archi, il cui asse è in situazione verticale, non si comprende sotto il nome di volta, ma di *Torre Rotonda* o *Incavata*, e le obliquità della loro faccia superiore possono variare quando qualche arco orizzontale o inclinato vi sbocca.
Parleremo di questi incontri nella seconda parte del 4° libro.

page 119.

Pl. 34.



Capitolo 5

Le volte cilindriche
In termini d'arte
Le volte a botte

La *Volta* più usata è senza dubbio la *Volta a Botte*; la costruzione di ciò che si definisce *Retto*, la cui faccia sia perpendicolare alla direzione considerata, è la prima di tutte le conoscenze che i costruttori devono acquisire.

Anche i tagliatori di pietra meno abili sanno eseguire la costruzione di una Volta a Botte retta almeno in pieno centro; ma la loro scienza non va molto oltre; essi, infatti, iniziano a fare degli errori nell'eseguire i rialzi e i ribassi dell'arco. In primo luogo tracciano il contorno con porzioni di cerchi mal assemblati, che formano delle sporgenze alle loro congiunzioni; secondariamente tracciano male le giunture di testa, anche quando determinano il centro in una maniera corretta, utilizzando il *Tratto del Giardiniere*; si può dire che essi hanno bisogno di essere guidati sin dai primi passi nell'Arte di cui fanno professione.

Entreremo nella materia con principi generali.

Formazione generale della Volta ad Botte

Sotto il nome di *Volta a Botte* sono comprese tutte le specie di volte che sono costituite da metà di cilindro propriamente detto, la cui base sia circolare, ellittica o anche di un'altra curva, come la parabola, l'iperbole, &c. Seguendo questa definizione possiamo definire la formazione di una Volta a Botte con la traccia di una linea *AB* [***Fig. 54***] mossa parallelamente a se stessa intorno ad una curva qualsiasi *AGD* o *BEF*; tuttavia siccome la Volta a Botte non è solo una superficie ma un corpo di un certo spessore, che ne comprende due, uno concavo e l'altro convesso, noi definiremo la formazione di tale Volta con la traccia del movimento del quadrilatero *AadD*, contenuto in un piano rettilineo, che si muove intorno ad una curva AA^3B di modo che ognuno dei suoi lati retti, che percorre la circonferenza della curva, sia sempre parallelo a se stesso e che il piano che contiene il quadrilatero sia sempre perpendicolare alla tangente della curva nel punto in cui la taglia.

Quando il piano generatore è un parallelogramma rettangolo, come lo si suppone *AadD* [***Fig. 55***] che si rappresenta con lati obliqui a causa della prospettiva, e che è perpendicolare al piano della curva AA^3B, la Volta a Botte formata dal suo movimento intorno a questa curva è definita *Retta*, di alcune figure come Curva, Cerchio, Ellissi, Parabola, Iperbole o altro.

Quando il piano generatore rettangolo percorre un semi cerchio seguendo le stesse circostanze descritte sopra, la Volta a Botte si definisce *Retta e in pieno centro*; allora il quadrilatero è sempre alla stessa distanza dal centro C e dall'asse del cilindro *Cc*; tale è la figura che descriverebbe il movimento del coperchio di un cassone sui suoi cardini.

Questa figura di arco, essendo la più semplice e la più naturale, è vista come la migliore; gli archi che si allontanano di più dal diametro delle loro basi si chiamano *Rialzati*, come se fossero troppo sopraelevati, tale è quello della ***Fig. 60*** *AhB*; quelli che se avvicinano di più si chiamano *Ribassati*, come se fossero troppo schiacciati, tale è *ASB* di ***Fig. 57***;

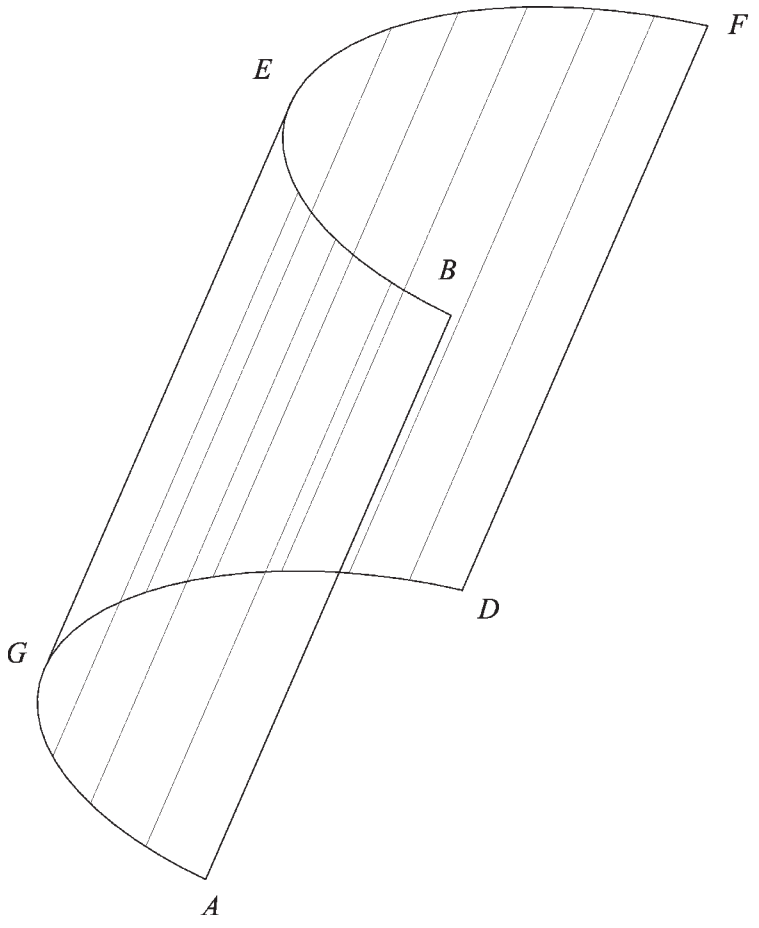


Fig. 54 La superficie della Volta a Botte è generata dallo spostamento di una retta *AB* lungo l'arco *BEF*.

Si vede quindi che il termine *Retto* non significa ne un'erezione verticale dei suoi lati, che si esprime col termine *in piedi* come lo sono le torri rotonde, ne la rettitudine dei suoi lati o basi che è comune agli archi *Sbiechi*, ne la proiezione orizzontale del suo asse; questo perché un arco può essere *Retto* sulle sue basi, sebbene esse siano inclinate all'orizzonte come il loro asse, ma ciò esprime la *Direzione* perpendicolare dei lati o dell'asse su una base. Infatti in geometria si dice che una linea è retta su un piano, o che un piano è retto su un altro, quando gli è perpendicolare. In effetti, poiché il parallelogramma *AadD*, che si suppone rettangolo, è parte del parallelogramma *AacC*, che ruota sul suo lato *Cc*, è evidente che anche quando si trova elevato all'altezza *2.2* o A^3a^3 esso sarà sempre perpendicolare alla base; questa trasposizione non cambia gli angoli o i raggi del cerchio *AC*, *2C*, A^3C, *BC*.

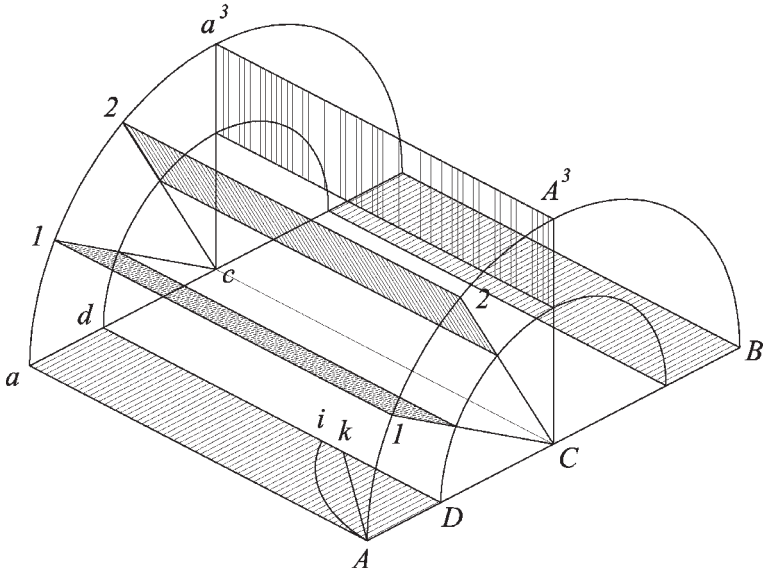


Fig. 55 La Volta a Botte Retta è generata dalla rotazione di una superficie rettangolare *ADda* attorno ad un'asse *Cc*.

Corollario I

Sebbene le superfici siano una concava e l'altra convessa, esse sono formate dal movimento delle linee rette; di conseguenza esse possono essere imitate dal movimento di una regola come è stato detto prima.

Corollario II

Poiché seguendo le regole della costruzione, data nel libro precedente, le giunture di testa devono essere perpendicolari alle tangenti delle curve, la loro direzione deve tendere al centro degli archi in pieno centro e il loro piano di letto al suo asse.

Corollario III

Poiché la Volta a Botte Retta è formata dalla trasposizione dello stesso parallelogramma, le superfici di letto sono tutte uguali a quelle dei primi letti all'imposta, se la volta è estradossata cioè se conserva lo stesso spessore alla chiave e all'imposta; è anche possibile infatti dare meno spessore alla chiave; noi, comunque, supporremo la Volta a Botte sempre ugualmente spessa, secondo l'uso più ordinario.

Corollario IV

Gli archi esterni o interni nella Corona del cerchio, che è la base o la faccia della Volta ad Arco, danno la misura dell'inclinazione dei piani dei letti con l'orizzonte, poiché la loro direzione tende al centro di tale base.

Corollario V

Le corde degli archi, comprese tra due raggi, formano sempre con le giunture di testa degli angoli ottusi, che sono in rapporto costante con gli angoli che queste stesse giunture formano con il piano orizzontale se prolungate fino al centro dell'arco; poiché i primi sono sempre uguali alla metà dell'angolo del centro aggiunto a un angolo retto.

Per dimostrarlo si veda la ***Fig. 56***: dal punto *C* si porterà una perpendicolare *DC* alla corda *AB* e dal punto *A* si porterà una parallela *EA* a *DC* che formerà l'angolo retto *EAB* e *FAE* uguale all'interno dello stesso lato *ACD*; dunque l'angolo *FAB* della giuntura di testa e della corda di una *doële* è ottuso e uguale ad un angolo retto più la metà

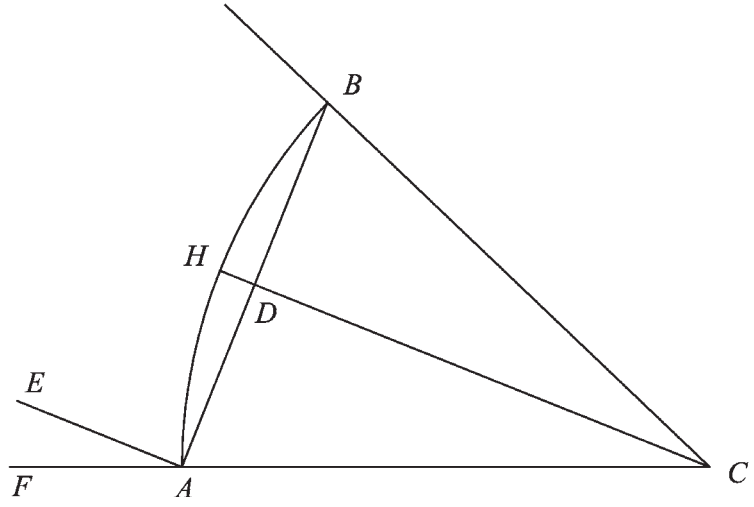


Fig. 56 La figura mostra il rapporto di proporzione che intercorre tra gli angoli e le corde di un arco di circonferenza.

dell'angolo dal centro.

Corollario VI

Se si conosce l'angolo dal centro, cioè determinato dall'incontro dei piani dei letti prolungati fino all'asse dell'arco, si avrà quello di questi letti con l'intradosso e, al contrario, se si ha questo , dalla deduzione dell'angolo retto si avrà la metà di questo dal centro; e raddoppiando questo dal centro.

Corollario VII

Poiché gli angoli dei piani si misurano con perpendicolari alla loro comune sezione, quelli dei letti e dell'intradosso si determinano tramite la supposizione di un arco retto, quando la direzione dei suoi lati è obliqua sulle sue facce, ciò stabilisce la necessità di fare un arco Retto in tutti i tipi di volte cilindriche; anche se la base non fosse circolare ma ellittica, o d'altra curva, la si potrebbe sempre supporre inscritta o circoscritta al cerchio, al centro del quale si misurano gli angoli d'inclinazione dei letti prolungati, sia che questo centro appartenga al diametro, o che sia

all'interno o all'esterno, come nelle coppe ellittiche che sono dirette sulla tangente e non sull'asse dell'arco, contro ciò che i cattivi operai sono abituati a fare.

Si possono definire altre superfici formate dall'incontro di differenti volte; consideriamo il triangolo *ADk* che giace sul parallelogramma rettangolo generatore *aADd* [***Fig. 55***], il movimento della linea *Ak*, trasportata intorno al centro *c*, formerà una porzione di cono troncato. E se al posto di questo triangolo si considera un settore di cerchio*DAi*, l'arco *Ai* formerebbe una zona di sfera o di sferoide; se il settore fosse ellittico si avrebbe una zona di elissoide e, allo stesso modo, se la curva *Ai* fosse porzione di una parabola si otterrebbe una zona di paraboloide; ciò serve a precisare cosa si ottiene quando alle Volte a Botte si accostano direttamente degli altri solidi, che hanno un'asse comune con il cilindro e tutti i pannelli di letto sono uguali tra di loro e sono o dei trapezi rettilinei o dei trapezi misti; è interessante osservare ciò per la costruzione. Parleremo dello loro irregolarità in seguito.

Essendo la generazione degli archi ben diffusa, non sarà difficile costruirli con più porzioni riunite, che si chiamano *Conci*. Quando il piano generatore è perpendicolare a quello della curva, che serve da base al cilindro, non sorgono problemi ma, siccome è spesso obliquo, ne risultano più variazioni e qualche difficoltà; è meglio esaminarli prima di passare oltre.

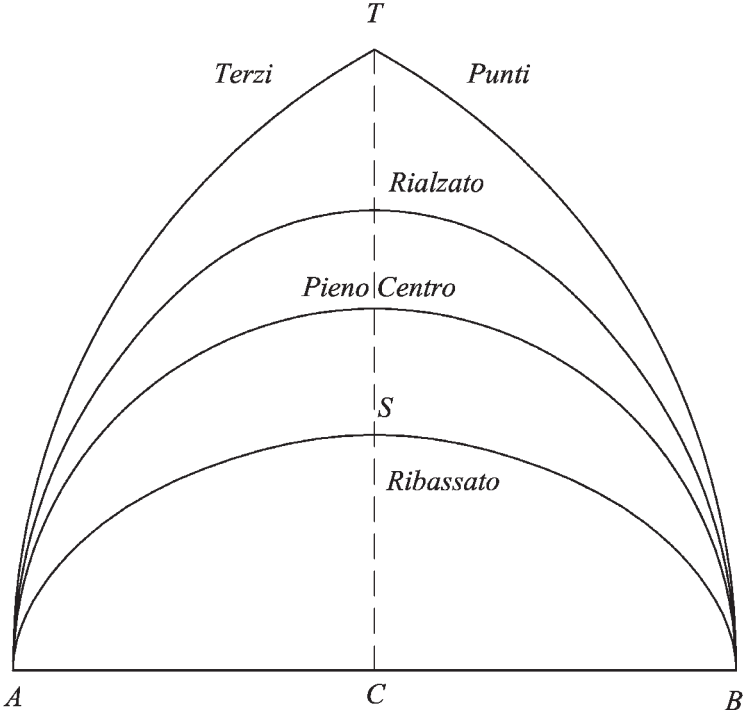


Fig. 57 La figura mostra i quattro tipi di Volta a Botte maggiormente utilizzati: a Sesto Ribassato, in Pieno Centro, a Sesto Rialzato e per Terzi Punti.

Variazioni delle Volte a Botte

Gli Archi possono variare in molti modi ma ognuno può ridursi a due variazioni primarie.

In primo luogo può variare il contorno dei loro centri, che può essere di diverse curve.

Secondariamente può variare la direzione dei loro lati rispetto alle loro facce o terminazioni.

La prima specie di variazione può ancora essere suddivisa in due, perché i centri possono essere formati da una curva semplice o da una composta di porzioni di curve.

Le curve semplici usate si riducono a due, che sono il *Cerchio* e l'*Ellissi*, di cui ne abbiamo sufficientemente parlato nel secondo Libro non tralasciando nulla di ciò che può interessare la loro descrizione, seguendo le diverse circostanze descritte e seguendo la loro divisione tramite delle perpendicolari ai loro archi; tutto questo da una descrizione di ciò che si può costruire attraverso il Centro; ci resta da dire qualche cosa sulle altre curve che si possono sostituire a quelle sopra descritte e delle quali gli Architetti possono sovente fare uso.

Osservazioni generali sugli effetti prodotti dalle variazioni delle Volte nel Disegno in scala.

INNANZITUTTO, è evidente che quando le volte sono rette e con estradossi circolari, e le loro facce divise in conci uguali, tutte le superfici dello stesso tipo sono uguali tra loro. Cioè, 1°. Le teste, in quanto sono, supponendo delle porzioni, uguali a una stessa Corona di cerchio, 2°. Gli intradossi dei conci, sia quelli piatti che quelli incavati, che formano rispettivamente dei parallelogrammi rettangoli uguali e dei segmenti di cilindro pure uguali. 3°. Anche i piani di letto sono parallelogrammi rettangoli uguali fra loro, supponendo la volta a estradosso di uguale spessore; ma se non lo fosse, tali parallelogrammi rettangoli diverrebbero ineguali allargandosi man mano che i letti si avvicinano a quello delle imposte.

2°. Se la volta, supponendo ancora che sia retta, fosse a sesto ellittico, le superfici delle teste, benché risultanti da divisioni uguali dei giunti al contorno dell'intradosso, non possono essere uguali tra loro, ma lo sono unicamente quelle opposte alla stessa altezza sulle imposte; infatti le corone di ellissi di cui fanno parte sono divise in modo ineguale da perpendicolari alla tangente si dall'esterno che dall'interno; occorre dunque un pannello per ogni superficie di testa.

3°. Nelle volte sbieche a discesa con o senza scarpa, le superfici rettilinee piane dell'intradosso o dei letti sono inevitabilmente ineguali anche se quelle delle teste sono uguali tra loro; infatti questi intradossi dei conci non formano più dei rettangoli ma dei trapezi o dei romboidi; bisogna quindi tracciarle una per una.

Le differenze dei contorni delle centinature dovute alle variazioni delle volte, sono chiaramente comprese nel maggiore o minore allungamento

delle ellissi; dato che le volte sono dei semicilindri, quando le loro superfici sono piane, non ne possono risultare che sezioni cilindriche finché la centinatura primitiva sarà unicamente circolare o ellittica, rialzata o ribassata; così la sezione sbieca, ad esempio, in qualunque modo lo si rappresenti in disegno tecnico, sia in rilievo, sia in sezione, sia in *piano*, cioè in proiezione orizzontale, può formare unicamente dei cerchi o delle ellissi. Se l'*Arco Retto* è circolare tutte le sezioni sbieche daranno delle ellissi e mai dei cerchi: ma se l'Arco Retto è ribassato o rialzato può accadere che alcune sezioni sbieche diano un cerchio in altezza, in spaccato o sul piano orizzontale; cosa che abbiamo chiarito nel primo Libro parlando dei cilindri scaleni tagliati da una sezione sottocontraria.

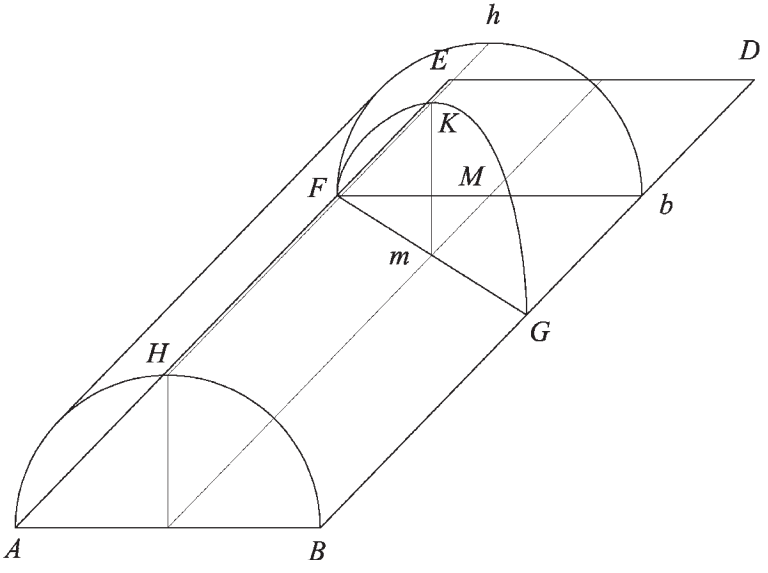


Fig. 58 In una Volta a Botte Sbieca a faccia circolare, ogni sezione formante con la faccia un angolo pari a quello con cui è ruotata la faccia è pure circolare.

Ne consegue anche che se l'arco a faccia sbieca è un cerchio, non solo i suoi paralleli formeranno dei cerchi, ma anche quelli che formeranno un angolo uguale allo sbieco della faccia, girati in senso contrario, come *FGk = ABH* sullo stesso lato *BD*; così [***Fig. 58***], supponendo che il parallelogrammo *ABDE* sia il piano orizzontale di una volta la cui faccia *ABH* è sbieca e circolare, non solo le centinature che gli sono parallele *Fbh* sono uguali ad esso, ma anche *FGk* e le sue parallele sono pure circolari, il che mostra che, benché l'Arco Retto sia indispensabile per la formazione di una volta sbieca, si potrebbe, parlando in assoluto, farne a meno per scavare un intradosso se si avessero le posizioni parallele e sottocontrarie degli archi compresi in ogni concio; ma poiché la posizione ad angolo retto è la più sicura e la più comoda per ben porre un cerchio, tale circostanza è la più opportuna per ottenere la maggior esattezza possibile; infatti un angolo ottuso o acuto più o meno aperto causerebbe un notevole cambiamento alla curvatura anche se le altezze sotto la chiave *CH*, *Mh*, *mk* sono sempre uguali.

Se per qualche causa straordinaria, che tuttavia a volte si presenta, la curvatura della volta a botte fosse di una sezione conica diversa dal cerchio o dall'ellisse come ad esempio quella composta da due porzioni di parabola, di cui abbiamo parlato in precedenza e che BLANCHARD ricorda nel suo taglio dei Legni, oppure da un arco di iperbole, come la curvatura di quella volta tronca denominata *Tromba eretta su una linea retta*, lo sbieco di una faccia o di un letto darebbe ancora una sezione curva dello stesso tipo della prima, vale a dire che le facce ottenute da sezioni sbieche o i letti obliqui darebbero ancora nei loro contorni degli archi di parabola o di iperbole che si differenzierebbero dalla centinatura primitiva solo perché sarebbero un po' più allungati o più accorciati, secondo la maggiore o minore obliquità, come abbiamo dimostrato nel Teor. III del primo Libro, pag. 29.

PROBLEMA X

Fare una volta retta, circolare o ellittica o rampante

La volta Retta non può avere variante se non che la propria curvatura, che può essere ribassata o rialzata, a tutto sesto o Rampante.

Se la Volta a Botte è a tutto sesto, i suoi conci sono talmente uniformi che, quando le loro teste sono uguali, con la divisione arbitraria della loro centinatura, chi sa costruire uno di tali conci li sa costruire tutti; si tratta infatti di ripetere sempre la stessa operazione per ogni concio. C'è fra loro una qualche differenza solo quando la centinatura è ellittica; in questo caso i conci della prima fila non vanno bene né per la seconda né per le altre; per non fermarci a cose troppo facili, cominceremo col dare le indicazioni per la costruzione di una volta retta ellittica, che comprende anche quella della volta circolare, che è la più semplice da eseguire; e dato che vi si può arrivare con i tre metodi di cui abbiamo parlato al Cap.II, ne faremo il disegno in scala e l'applicazione del tratto nei tre diversi modi.

I°. *Mediante Squadratura*

Sia [***Fig. 59 e 60***] la faccia di una volta a botte a estradosso *DHE*, il cui spessore di volta è una porzione di corona di cerchio o di ellisse *AhBDHE*, con centro in *C* e fuochi in *f* e *F*, se è rialzata, cioè verticale secondo l'asse maggiore.

AVENDO tracciato questa corona con due curve concentriche e simili, col Prob. 7 del 2° Libro, e della grandezza di cui si vuole fare la volta a botte, a grandezza naturale, o su un muro o su un pavimento, si dividerà la centinatura interna *AhB* in quanti conci si desidera e secondo la grandezza delle pietre che si devono usare. In tutti i nostri esempi divideremo solo in cinque parti per non moltiplicare le linee nelle figure e per evitare la solita confusione.

Dal centro C, se la centinatura è circolare [***Fig.59***], si tirerà la direzione dei giunti di testa *1.5*, *2.6*, *3.7*, *4.8* e se la faccia è ellittica [***Fig.60***] dai fuochi *F* e *f* si tireranno per ogni divisione *1*, 2, 3, 4 nell'intradosso delle

linee che si incroceranno, come *F1L*, *f1N*, *F2l*, *f2n*, si dividerà quindi l'angolo ottenuto in due parti uguali, ad esempio, dal punto *1* come centro si farà l'arco *LN* del raggio che si desidera, la linea tirata dal suo centro M al punto 1 sarà la direzione del giunto di testa *1.5*; ugualmente si troverà quella del secondo e del terzo concio in *2.6*, la metà della faccia basterà per il tracciato del disegno in scala se il sesto non è rampante come nella ***Fig. 61***.

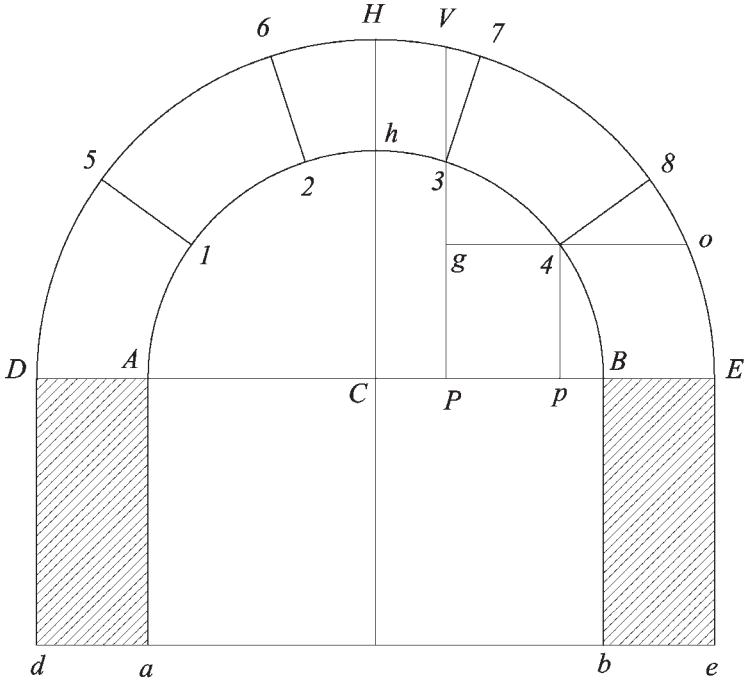


Fig. 59 In Figura sono mostrati i rapporti geometrici in una Volta a Botte in Pieno Centro.

Se l'arco è rampante [***Fig.61***] ed è una porzione di Ellisse come conviene ad una buona costruzione, se ne cercheranno l'asse e i fuochi con i Probl. 2. e 20. del 2° Lib. e se ne servirà per tracciare lo spaccato dei giunti di testa come alla ***Fig. 60***.

Se fosse rampante, composto da due o più archi di cerchio di raggi diversi, come si è mostrato ai Probl. 22. e 23., è evidente che questi stessi giunti dovrebbero essere tirati ognuno dal centro che appartiene ad ogni arco.

Una volta tracciati i giunti di testa, si abbasseranno delle perpendicolari sul diametro della centinatura, da ogni punto di divisione dei conci, cioè degli appiombi, come alla ***Fig. 60*** le linee *3P*, *4p*, ecc. e in seguito si tireranno delle parallele al diametro, come *4g*, fino a incontrare l'appiombo *3P* in *g*. Queste daranno l'aggetto delle linee di imposta e la differenza delle altezze dai punti *4* e *3*; si procederà in questo modo per ogni concio e il disegno prospettico sarà compiuto.

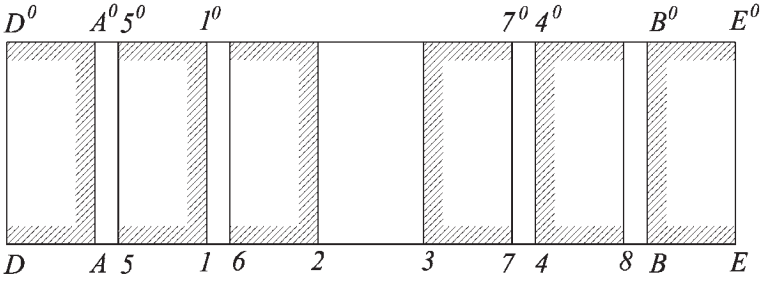


Fig. 59d Aree determinate dai giunti dei conci che compongono la Volta a Botte.

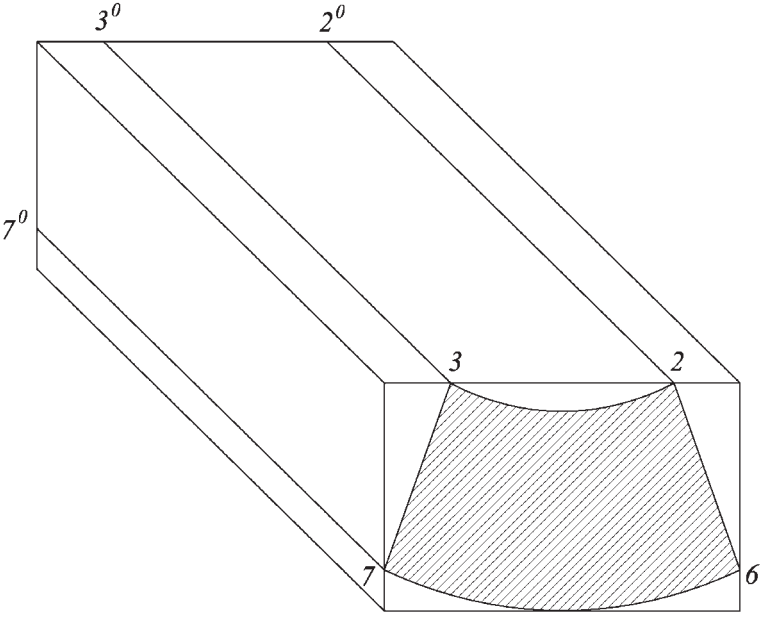


Fig. 59q Assonometria del concio *3487* di ***Fig. 59***.

ORA si tratta *di applicare il tratto sulla pietra* che si vuole tagliare mediante *squadratura* di una pietra grezza, fatta all'incirca come un parallelepipedo, come si ottiene normalmente dalle cave. Dopo averla esaminata e la sua altezza è uguale a *KO* e la larghezza a *gK* [***Fig. 62***]

[1] Nella Fig. 62 sono state variate alcune lettere, rispetto al disegno originale, in modo da renderla coerente con la Fig. 60 alla quale il testo fa diretto riferimento.

[1], si faranno due facciaviste a squadra, una secondo la sua altezza di appiombo, l'altra secondo la sua larghezza di livello, ad esempio *gVV°g°* e *gKK°g°*.

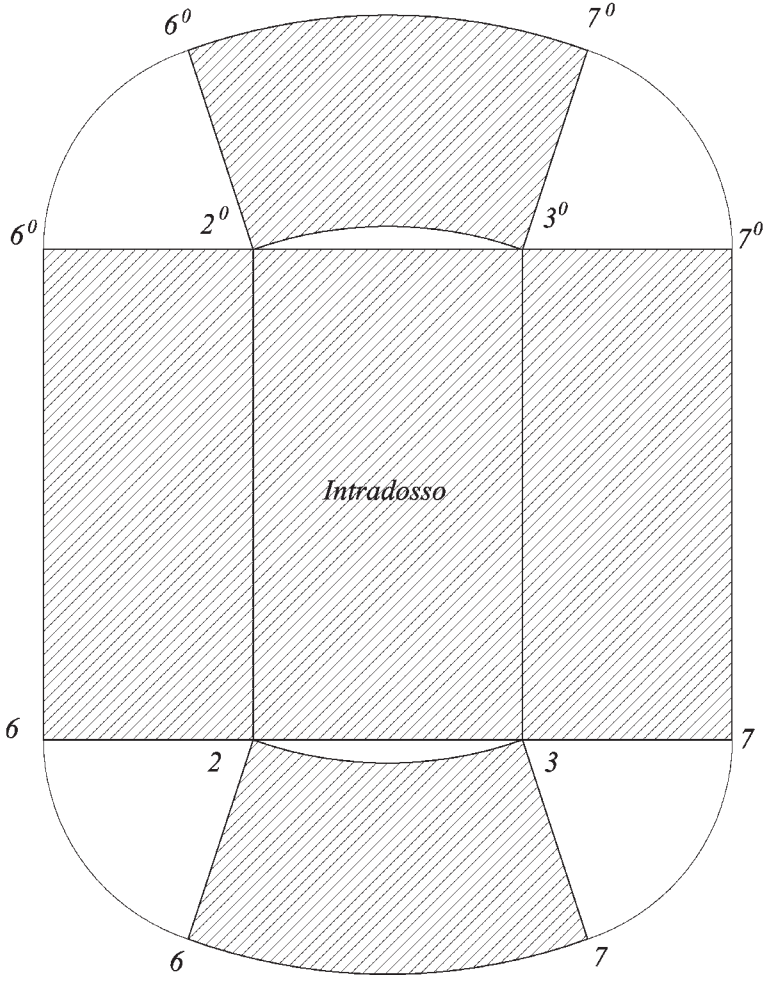


Fig. 59v In figura sono mostrate tutte le superfici formanti il concio *2376* di ***Fig. 59*** ad esclusione della superficie dell'estradosso.

Per meglio chiarire il rapporto di un quadrone di un muro appiombo con un concio, rappresentiamo in questa figura una parte di ciascuno di questi due tipi; così sarebbe un concio che dovesse entrare in parte in un muro, e lo si suppone trasparente per mostrarvi gli spigoli che il davanti deve nascondere.

Fatte queste due facciavista, se ne faranno altre due a squadra come le prime, che serviranno da testa alla pietra: tali sono *gKOV* e *g°K°O°V* su cui si porteranno lungo gli spigoli *gK* e *g°K°*, la linea di imposta *g4* della ***Fig. 60*** e sugli spigoli *gV* e *g°V°* l'altezza della linea di imposta *g3*, si tirerà sul letto *gKK°g°* la linea *44°* e sulla facciavista *gVV°g°* la linea *33°*, queste due linee segneranno gli spigoli dei letti con l'intradosso del concio di pietra.

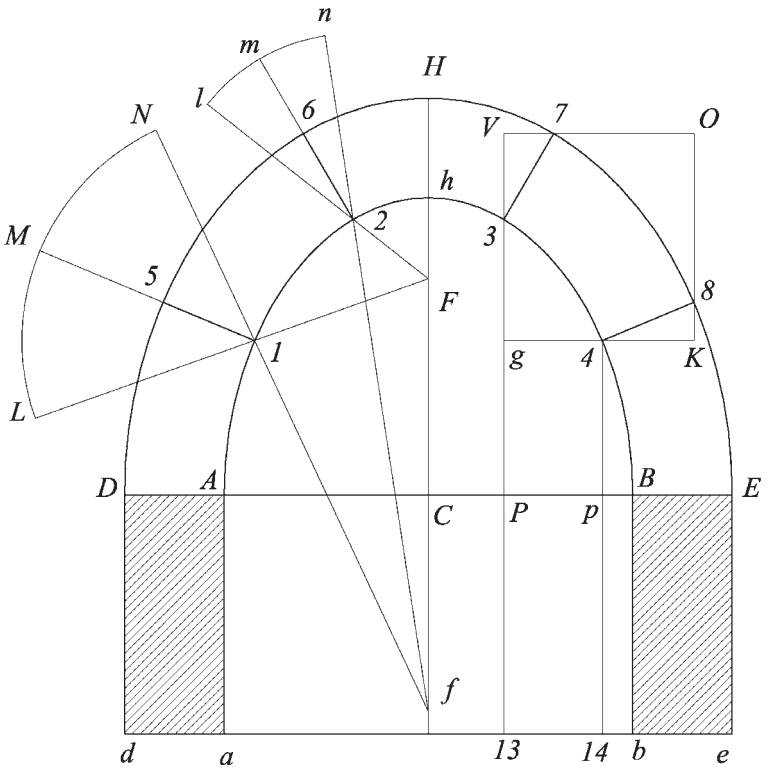


Fig. 60 Rapporti geometrici in una Volta a Botte a Sesto Rialzato.

Si formerà poi un pannello sul disegno finito della testa *7.3.4.8* della ***Fig. 60*** con del legno o del carbone contornato sul tratto e lo si applicherà sulla testa *gKOV*, ponendo gli angoli *3* e *4* sui punti *3* e *4* della ***Fig. 62*** per tracciarvi lo stesso contorno ad ogni testa opposta. Si abbatterà quindi tutta la pietra che sarà al di fuori di questo tracciato, con la riga; cioè:

I.° il prisma misto *g433°g°4°* di cui la parte *433°4°* dell'intradosso è una porzione di cilindro, che si scaverà come è stato detto nel primo capitolo di questo libro, con la riga e una sagoma, per formare appunto l'intradosso del concio.

2.° Il prisma rettilineo triangolare *3V77°V°3°*, per formare il letto superiore *377°3°*.

3.° Il prisma pure triangolare *4K88°K°4°* per formare il letto inferiore *844°8°*.

4.° Il prisma misto *8°77°O°8°*, per formare, se occorre, l'estradosso del concio.

Al posto di un pannello di testa *3487* ci si può accontentare di una squadra, se la Volta a Botte è a tutto sesto, ma se è ribassata o rialzata come nella ***Fig. 60***, bisogna farne due, uno per il letto superiore sull'angolo misto *347* e l'altro per la letto inferiore sull'angolo *348* in quanto questi angoli dei letti con l'intradosso del concio sono diseguali.

E' di rado necessario formare la superficie convessa dell'estradosso, ma se la volta è a estradosso, lo si può fare con la riga nello stesso modo che si fa per l'intradosso, come indicato al Problema II. Se invece di un pannello per tracciare l'arco *78*, ci si volesse servire di una squadra, ne occorrerebbe una concava come mostrato in B^e di ***Fig. 62*** in modo che servendosi di questo strumento ne occorrerebbero quattro diversi per ogni concio di centinatura ellittica, cioè due per l'intradosso, una al letto superiore, una a quello inferiore e altrettanti per l'estradosso, il che si dimostrerebbe assai scomodo e mostrerebbe che le squadre sono utili solo in caso di volte circolari in cui una sola squadra convessa basta per tutti gli intradossi dei conci e una convessa per l'estradosso.

Quando si fa una volta a tutto sesto solo con una squadra per l'intradosso, si può tracciare l'arco di estradosso senza l'aiuto di un pannello o di una sagoma, aprendo il compasso alla lunghezza di un giunto di testa come *51* [**Fig. 59**] e trasportando una delle sue punte sull'arco *A1* e tenendo l'altra diretta perpendicolarmente a tale arco, di modo che la linea che si tira da questi due punti passi per il centro C, questa seconda punta traccerà l'arco di estradosso. Si fa la stessa cosa con un campione, cioè un pezzo di legno tagliato di lunghezza uguale al giunto *DA* o *15*.

Bisogna, però, fare attenzione a non seguire questo metodo nelle volte a sesti ribassati o rialzati, innanzitutto perché risulterebbe difficile mantenere queste punte o questi campioni perpendicolari all'arco le cui sezioni non tendono al centro C ma a diversi punti del diametro AB.

IN SECONDO LUOGO perché i sesti di corona ellittica non sono equidistanti dall'intradosso e dall'estradosso, i contorni si avvicinano verso l'asse minore *DE* e si allontanano di più verso il maggiore, in modo che *Hh* deve essere più lungo di *DA*; cosa che gli operai tuttavia non osservano ed anzi credono che non si debba osservare, benché si sia dimostrato al Teor. 1. e 4. del I° Libro che sia necessario per operare correttamente.

Si è potuto notare che dei due primi paramenti che sono stati formati, uno appiombo e l'altro orizzontale, non resta nient'altro, quando la pietra è finita, che le linee *33°*, *44°*, *77°*, che formano gli spigoli di contatto tra i letti e l'intradosso dei conci.

E' pure evidente che seguendo questo metodo mediante squadratura, la perdita di pietra è considerevole, dato che il quadrilatero a trapezio misto della testa del concio *3487* è inscritto in un rettangolo *gKOV* in cui si ottengono quattro triangoli inutili, due rettilinei *3V7*, *4K8*, e due misti *3g4* e *78O*, che costituiscono le basi di altrettanti prismi della lunghezza del concio; così accade spesso che si perda più della metà del materiale, a seconda della maggiore o minore apertura degli angoli, e che le linee di imposta abbiano una minore o maggiore altezza, infatti i prismi di uguale altezza sono fra loro proporzionati come le loro basi, il che induce a preferire il metodo in cui ci si serve di pannelli, di cui ora parleremo.

Seconda maniera di fare una volta a botte retta. Mediante Pannelli

Il modo di tracciare le pietre tramite pannelli viene considerato come il più difficile e il più professionale; per questo i Maestri Muratori accettano solo questo metodo nei saggi che esigono da chi richiede di essere ammesso nella corporazione del mestiere; questo è quanto afferma il Padre DERAN, alla cui autorità io mi riferisco in quanto non conosco l'uso di Parigi, che può essere cambiato dopo il 1643, anno in cui scriveva questo Padre; il nostro parere l'abbiamo dato sopra.

Sia una Volta a Botte a tutto sesto, come in ***Fig. 59***, o rialzata come in

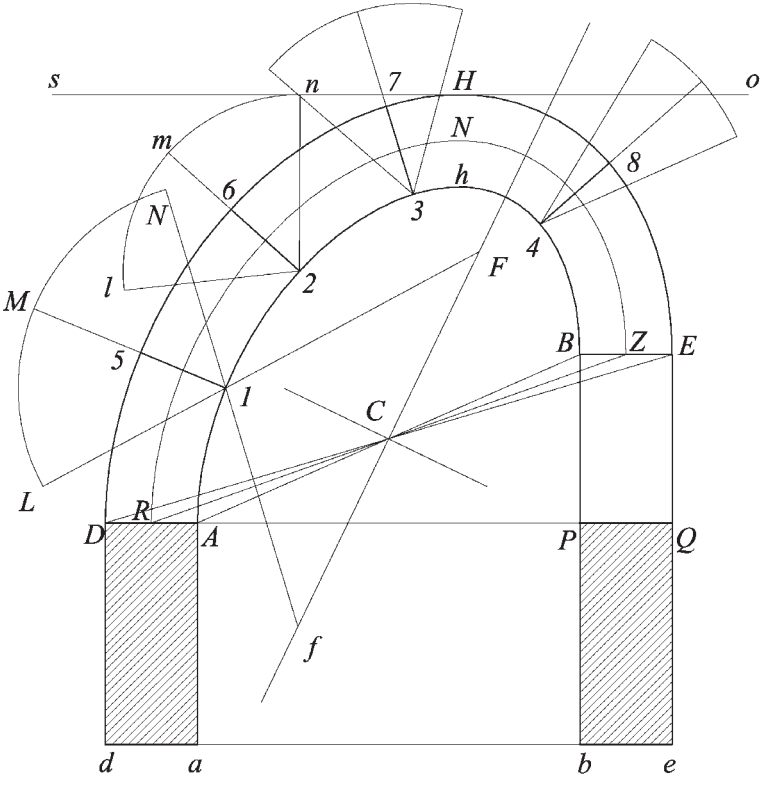


Fig. 61 La figura mostra i rapporti geometrici in una Volta a Botte Rampante.

Fig. 60 o rampante come in ***Fig. 61***. Essendo la curvatura divisa nei suoi conci e la direzione determinata come nel metodo visto precedentemente, si tireranno le corde degli archi *A1*, *12*, *13* ecc, e data la lunghezza del piedritto sarà tracciato tutto il disegno in scala.

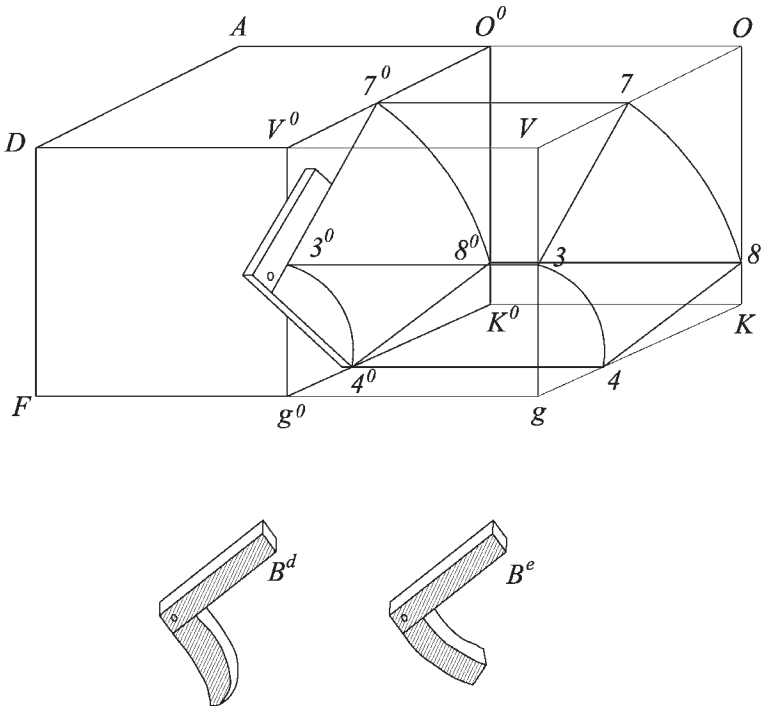


Fig. 62 Sopra è illustrata la parte di materiale che deve essere asportata da una pietra, così come la si ottiene dalla cava, per ottenere un concio tipo che costituisce parte della corona, o di ellisse *AhBEHD* [***Fig. 60***] o di cerchio [***Fig. 59***] o di arco rampante [***Fig. 61***] tagliata dai giunti di testa *51, 62, 73,* e *84*; così basta tagliare del cartone o un'asse seguendo il contorno misto *DA15*, e questo pannello basterà per tutti i conci della faccia se la centinatura è circolare; infatti anche se si facessero dei conci di larghezza ineguale, la direzione dei giunti determinerà sempre lo stesso angolo con la curva dell'intradosso.

Se la centinatura è ellittica, come nelle ***Fig. 60*** e ***Fig. 61***, occorre un pannello per ogni testa di concio. *In secondo luogo* sono necessari anche i pannelli per l'intradosso; infatti sono tutti dei parallelogrammi rettangoli, la cui corda *A1*, o *12*, ecc. è uno dei lati, e l'altro è la larghezza presunta del concio *AA°* [2], presa sul piano orizzontale (vedi ***Fig. 59d***), oppure una parte di questa lunghezza, come conviene alla pietra che si vuole usare,o alla distribuzione della lunghezza totale *AA°* o *BB°*, per l'esattezza dell'esecuzione, come quando si vuole osservare una sorta di uguaglianza di collegamento di un concio sull'altro; il modello che sarà fatto su questi due lati sarà il *Pannello dell'intradosso piano*, che bisogna tracciare sulla pietra prima di scavarne la concavità.

In terzo luogo, anche i *Pannelli di letto* sono dati sul disegno in scala; infatti sono ancora dei parallelogrammi rettangoli, come *AAA°D°* e *BEE°B°* [***Fig. 59*** e ***59d***] [3] di cui un lato è il giunto di testa, e l'altro la lunghezza del concio determinato per l'intradosso.

La ***Fig. 59v*** mostra lo sviluppo del concio e l'assetto delle sue superfici, tale che piegandole tutte sui lati comuni si formerà il concio, a esclusione dell'estradosso, di cui non si fanno pannelli per due ragioni: la prima è che non si potrebbe fare una superficie piana che lo ricopra, dato che una tangente non arriverebbe ai lati delle altre superfici di testa e di letto, fra le quali lascerebbero un vuoto. La seconda è che il pannello, quand'anche fosse curvo come una tegola e toccasse i quattro angoli dell'estradosso, sarebbe inutile, perché, dato che i lati dei pannelli di testa e di letto verso l'estradosso sono tracciati, resta solo da abbattere la pietra in eccedenza come si fa nella squadratura.

Non resta dunque altro da fare se non i *Calandri*, che servono a dare ad ogni superficie del concio l'inclinazione che deve avere rispetto a quella contigua. Ora questo calandro per le teste e l'intradosso dei conci è una squadra, dato che la Volta a Botte è retta sulla superficie; e quando le due teste opposte sono tracciate, il calandro non serve a situare i letti in rapporto all'estradosso, in quanto che la loro inclinazione è determinata dai lati dei giunti di testa; in tal modo si può ancora fare a meno dei pannelli di letto; infatti basta abbattere con la riga la pietra che si trova fra i due giunti di testa e il giunto del letto lungo l'intradosso e fare una superficie piana di cui tre lati sono dati.

In tal modo nella costruzione della Volta a Botte Retta, qualunque sia la curva del suo sesto, si può far a meno di pannelli di letto e di calandro; non è così quando c'è una smussatura, come vedremo più avanti.

Gli autori del Libro del Taglio delle pietre, per vedere il rapporto e la figura delle dimensioni degli intradossi e dei letti, hanno acquisito la tecnica, come si è visto, di fare uno sviluppo degli intradossi e dei letti, che pongono sulla stessa superficie, di modo che i pannelli di letto dovrebbero coprire una parte di quelli degli intradossi, come si vede in ***Fig. 59d***, sotto il disegno del pieno centro, questa estensione dei pannelli così disposti non serve a nulla, li si può ripostare ciascuno separatamente, particolarmente in questo caso, in cui uno solo serve per tutti quelli della stessa specie; quando sono diseguali, come nelle volte sbieche, servono da guida allo scalpellino nell'eseguzione del lavoro; li si può fare allora su un pezzo di carta, ma è del tutto inutile farli sul disegno in grande nell'ordine di disposizione mostrato in figura.

NOTA

Occorre anche notare che gli Autori del libro del Taglio delle pietre, al posto delle corde degli archi di testa prendono quelle della loro metà per avvicinarsi maggiormente alla rettificazione di questi archi nei loro sviluppi, ma è una pessima pratica; l'allargare il pannello più della lunghezza dell'intradosso piano del concio, può essere fatto solo con materiale flessibile, come cartone o latta, e va applicato unicamente in una superficie cava, che bisogna già supporre fatta e che invece è da

[2] Sono state cambiate le lettere sia nel testo che in Fig. 59d per renderle coerenti con la Fig. 62. In riferimento a quest'ultima la larghezza nominata nel testo AA° è riferibile al segmento gg°.

[3] Nel testo sono state cambiate le lettere di riferimento in quanto variate nelle figure rielaborate ed è stato aggiunto il riferimento alla Fig. 59d.

fare, di modo che un simile pannello può servire unicamente a finire una porzione cilindrica già fatta opportunamente, ma da accorciare o da allungare, cosa del tutto inutile nel Tratto in questione.

Non abbiamo compreso tra le Volte a Botte Rette le volte a *Terzi punti* raffigurata in ***Fig. 57***, in quanto non sono più in uso da quando si è abbandonata l'Architettura Gotica e da quando le Volte a Botte non sono altro che un composto di due porzioni di Volte a Botte a tutto sesto, ognuna di solito di 60 gradi, in modo da costituire la terza parte di una Volta a Botte semplice a semicerchio completo, da cui il nome di *terzo punto*; anche perché in questa costruzione i tre punti del vertice all'angolo della chiave e i due delle basi alle imposte sono equidistanti, come i vertici degli angoli di un triangolo equilatero; se ne vedono tuttavia con archi inclinati di un numero di gradi superiore a 60. Ad ogni modo è chiaro che la costruzione di simile volta non differisce da quella del normale a tutto sesto se non nella posizione dei sesti, che non sono al centro del diametro, e nella formazione dell'angolo della chiave.

NOTA

Benché attualmente le Volte Gotiche non siano più in uso, alcuni Ingegneri le hanno usate per coprire dei Magazzini per esplosivi al fine di dar loro maggiore resistenza ai colpi delle bombe; è vero che, se la loro caduta fosse verticale, queste volte, presentando una superficie più obliqua, schiverebbero molto il colpo; ma dato che le bombe cadono in linea parabolica, spesso con un raggio di notevole ampiezza, possono colpire l'estradosso perpendicolarmente alla sua tangente e fare più forza verso la chiave che nelle volte a tutto sesto, come ha confermato l'esperienza in alcuni assedi in cui queste ultime hanno resistito meglio di quelle gotiche; particolarmente a Landau, dove i magazzini con volte a tutto sesto hanno resistito ad una grande quantità di bombe cadute.

Applicazione del Tratto sulla pietra.

Per arrivare all'*Applicazione del tratto sulla Pietra*, si comincia col fare una facciavista destinata a servire da intradosso piano del concio, e dopo averla tracciata con il pannello applicato sopra si fanno ai due capi altre due facciavista a squadra sui lati che sono comuni alle due teste, e su ognuna di queste facciavista si applica il pannello di testa che verrà tracciato seguendo il suo contorno, poi si abbatte con la riga tutta la pietra in eccedenza rispetto alle linee dei due giunti di testa opposti e i giunti di intradosso e di letto.

Si può così fare a meno del pannello di letto. Si potrebbe qui fare a meno anche di pannelli di intradosso se quelli di testa fossero sistemati bene parallelamente fra loro e perpendicolarmente rispetto alla linea del centro degli intradossi, oppure si potrebbe tracciare solo col compasso e la squadra l'intradosso piatto del concio; ma è sempre più sicuro nella pratica servirsi di pannelli perché per poco che si vari nelle misure si trovano differenze sensibili quando si vanno a posare i conci. Non si è mai abbastanza attenti alla precisione, in quanto gli operai sono spesso soggetti a compiere errori anche senza esporli a farne a causa di strumenti che non li guidano con sufficiente sicurezza.

D'altra parte la ragione che può dispensare dal fare dei pannelli di letto nell'esecuzione delle Volte a Botte Rette non è la stessa che permette di non servirsi dei pannelli per l'intradosso in quanto i letti vengono fatti solo dopo che gli intradossi sono stati tracciate; così il loro contorno è determinato e gli spigoli vengono eseguiti su tre lati.

Dopo che il concio è stato tagliato seguendo le superfici piane di intradosso piatto, di testa e di letto, per scavare l'intradosso concavo bisogna abbattere il segmento di cerchio *12, 2h3* [***Fig. 60***] racchiuso dalla corda, facendo una cesellatura seguendo il tratto curvo e posando la riga seguendo le cesellature dei due capi parallelamente al giunto di letto, si formerà così l'intradosso concavo; tuttavia per maggiore perfezione ci si serve ancora spesso di una *sagoma* che viene posata ben in squadra sui giunti di letto e sul piano dell'intradosso piatto; in questo modo si vede meglio cosa manca alla concavità per renderla ben regolare, facendola girare nello stesso modo. La ***Fig. 59q*** rappresenta il tracciato sulla pietra prima del taglio.

Terzo modo di fare una volta a botte retta. *Con semisquadratura*

Come abbiamo detto questo termine non è usuale nei libri perché il metodo è nuovo; ecco in cosa differisce dalla squadratura ordinaria. 1°. Perché con la squadratura occorrono almeno due paramenti di squadra, l'uno per porvi le altezze delle linee di imposta, l'altro per porvi le loro sporgenze, cosa non necessaria con questo metodo. 2°. Perché con la squadratura si può fare a meno di pannelli grazie a calandri e sagome; qui è opportuno usarne alcuni, ma meno che nel metodo chiamato semplicemente a pannelli; un esempio lo chiarirà.

Sia [***Fig. 63***] una testa di pietra grezza *mVyxK*, di figura irregolare, di cui si vuol fare il concio della ***Fig. 60***, indicato *3784*; si tirerà dal punto *4* l'orizzontale *4K* e si prenderà con un calandro l'angolo *K43* che si porterà su un paramento posto sulla testa della pietra, che deve avere la larghezza *43* dell'intradosso piatto e si farà una cesellatura seguendo l'angolo *K4m* tracciato per mezzo del calandro, che fa un'apertura di compasso da scalpellino, o un calandrino posto sull'angolo *K43* del disegno della ***Fig. 60***; poi si farà un secondo paramento ad angolo retto alla testa sulla linea *34*, sul quale si applicherà il pannello di intradosso, o se si vuole con angoli retti sugli angoli *3* e *4* si farà un parallelogrammo rettangolo come quello di *Pp43* della ***Fig. 60***, e con i calandri degli angoli in spaccato *348* e *437*, se sono ineguali, come nelle volte ellittiche, si abbatterà la pietra per formare i letti dopo aver fatto a squadra la testa opposta alla prima.

Il VANTAGGIO di questo metodo non è considerevole nell'esempio di una Volta a Botte Retta, la cui uniformità non presenta difficoltà per il taglio delle pietre; ma si vedranno in seguito negli esempi delle altre volte quanto sia comodo e quanto serva nel trattamento della pietra e quanto permetta una più rapida esecuzione rispetto al metodo della squadratura.

INNANZITUTTO, per quanto riguarda il trattamento della pietra, è

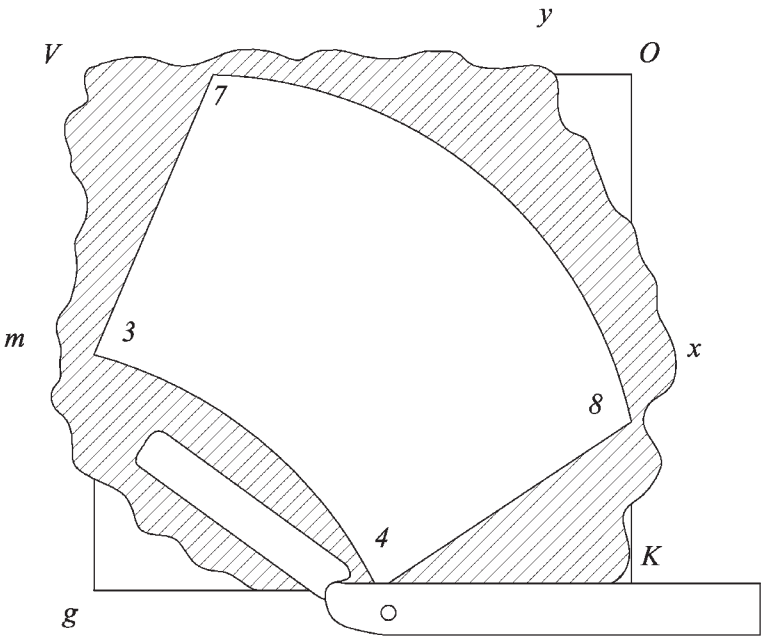


Fig. 63 Sopra è tabulata la sezione di un concio tipo, fra quelli della Volta a botte inscritte all'interno della pietra iniziale, dalla quale viene ricavato, mettendo in evidenza il materiale da asportare.

chiaro che quando la pietra è *trattata* male, cioè non è una figura che si avvicina al parallelepipedo, c'è già molta perdita per poter mettere due paramenti a squadra e se si fosse dovuto squadrare la pietra di cui diamo come esempio di testa, si sarebbe dovuto abbattere in pura perdita quasi la metà del materiale, per la linea *3x*, che avrebbe tagliato tutta la parte irregolare *3m4Kx*, per formare l'angolo dell'intradosso con l'orizzonte, che è sempre un angolo ottuso *34K* approfittando di questa parte irregolare e se ci si vuole servire dell'altezza del linea di imposta *3g*, la si può prendere su uno dei bracci della squadra mettendo l'altra sulla linea retta *4K* orizzontale, cosa che non si può fare col metodo dei pannelli.

IN SECONDO LUOGO, per quanto riguarda la velocità di esecuzione, è chiaro che si risparmia il tempo che occorrerebbe impiegare per squadrare tutta la parte *g4*, dal letto al paramento orizzontale e tutta quella *g3* del paramento verticale in squadra col primo, cosa che in certi casi ha il pregio di costituire una superficie maggiore di quella dell'intradosso del concio, dato che due lati 4*g*, 3*g* sono maggiori di un *43*.

IN TERZO LUOGO, quanto alla esattezza dell'operazione, è indubbio che una corda di estradosso, che è data, di posizione immediata, è sempre situata in maniera più esatta di quella che suppone un angolo retto e la lunghezza di due lati; infatti, per poco che ci sia di allargamento o restringimento di apertura, l'ipotenusa che si cerca sarà allungata o accorciata, e se uno dei lati differisce anche poco dalla linea di imposta o dalla sua altezza, l'inclinazione dell'intradosso sarà alterata; ora, non è più difficile formare un angolo ottuso con un calandro che un angolo retto con una squadra; bisogna che l'operaio abbia la stessa attenzione nelle due operazioni di tenere i bracci dello strumento perpendicolari allo spigolo dei due paramenti.

Questo metodo ha un altro vantaggio, cioè che invece di servirsi dell'angolo dell'orizzonte con l'intradosso, ci si può servire dell'angolo dell'appiombo con l'intradosso a seconda del bisogno o per trattare meglio la pietra; infatti nell'esempio del quarto concio della ***Fig. 59*** è chiaro che il triangolo misto *3V7*, fatto dalla verticale *V3* e il giunto *37* è più piccolo del triangolo *O48* fatto dall'orizzontale *O4* e dal giunto *48*; si può così scegliere quale sia meglio abbattere secondo l'irregolarità della prima testa che si mette in opera. Si vedrà in seguito che noi ci serviamo di entrambe le operazioni.

Queste pratiche non hanno bisogno di dimostrazione, in quanto sono state spiegate le ragioni nel terzo Libro.

Osservazioni sulle volte a botte rampanti

Benché gli archi delle volte a botte rampanti abbiano lo stesso tipo di sesto di quelle ribassate o rialzate, le cui imposte sono a livello tra loro, dal momento che entrambi sono ellittici, ci sono tuttavia alcune differenze che meritano un'attenzione particolare.

La prima è che se si fa una volta a estradosso o una cornice alla faccia non lo si può fare come con altre facce ellittiche di due archi di ellissi concentriche e simili allo spigolo dell'intradosso e dell'estradosso; questo perchè ognuna delle imposte è formata da un letto o da modanature di livello disposti in mode che la linea di rampa AB dell'intradosso [Fig. 61] non ha la stessa inclinazione di quella dell'estradosso DE, benché entrambe passino per lo stesso centro C; così, supponendo una linea di sommità *so* orizzontale, è chiaro che queste due ellissi non avranno uguali diametri coniugati similmente posti; è allora opportuno prendere il sesto al centro della larghezza della cornice, come in *RNZ*, e portare sopra e sotto la semilarghezza, traendola col compasso fisso, da un lato sul tratto centrale, e la punta dell'altro diretta secondo lo spaccato, cioè perpendicolarmente all'arco tracciato al centro.

La seconda osservazione da fare è sulla posizione degli assi dell'ellisse, che non passa dalle imposte e dalla chiave negli archi rampanti come in quelli ribassati o rialzati, le cui imposte sono a livello fra loro.

Le linee che passano per questi punti sono di solito diametri coniugati, o altri diametri, che fanno tra loro angoli ineguali da una parte e dall'altra della loro intersezione, cioè un acuto verso parte dell'imposta superiore e un ottuso verso l'inferiore.

Ne consegue che il contorno della semiellisse o di un altro arco più o meno grande, secondo l'inclinazione dei piedritti, quando non sono appiombo, essendo diviso dal centro della chiave in due parti ineguali, non può essere diviso in conci uguali, come i sesti di volte normali, il che comporta inevitabili irregolarità.

Se per caso si può dividere ogni lato in parti uguali fra loro, è chiaro che non saranno in numero uguale, ci saranno più conci nella parte inferiore che nella superiore. Se si vuole che il numero sia uguale da entrambi i lati della chiave, è evidente che quelli della parte inferiore saranno più grandi di quelli della superiore come si vede nella ***Fig. 64*** della tavola 35.

Resta da vedere se convenga farli uguali tra loro in ogni parte, come si fa nella stessa figura, o se devono essere tutti diseguali seguendo una certa progressione.

Se li si fa uguali in ogni parte è chiaro che la differenza dall'uno all'altro diventa urtante alla sommità per l'eccessiva prossimità di due controchiavi che ne presenta da vicino il confronto.

Se si distribuisce la differenza con continuità dall'imposta inferiore alla superiore, si potrà considerare l'arco rampante come una porzione di spirale, prendere un centro e descriverla all'interno, e si avrà una diminuzione continua. Ma ne consegue che il pulvino dell'imposta superiore diventerà il più piccolo di tutti i conci.

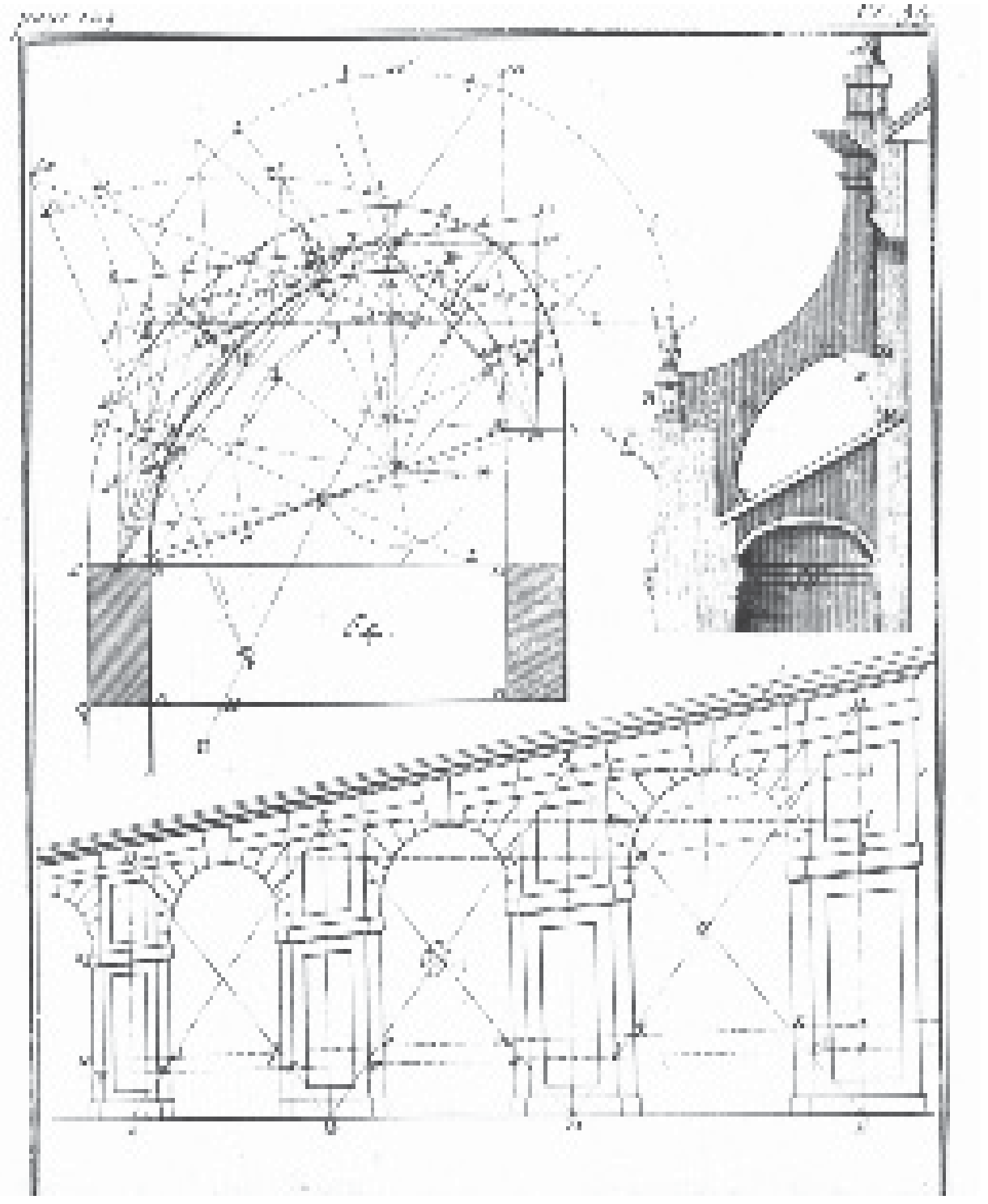
Se si vuol fare la diminuzione da ogni imposta alla chiave, si possono trovare vari modi per riuscirci.

Uno è quello di dividere le tangenti medie nello spessore come *r*S, SO, O*m* in uno stesso numero di parti uguali a partire dai punti di contatto *r*, T, *m*, o in tante parti quanti conci si vogliono avere, come qui in 7, per averne in ognuno tre e mezzo, a causa della metà della chiave; poi tirando le linee rette da ognuno dei punti *r*T*m* alle divisioni delle tangenti opposte, le intersezioni di queste linee daranno dei punti x^1 x^2 3^3, ecc. che si cercano. Così le linee $T1^s$, $r1^t$ daranno con la loro intersezione il punto x^1; le linee $T2^s$, $r2^s$ daranno il punto x^2 da cui deve passare il secondo giunto di testa, così per il resto.

Occorre tuttavia notare che poiché la diminuzione non comincia all'imposta ma all'asse minore IC, occorre supplirvi innalzando un poco la prima divisione.

Questa operazione si fonda su una proprietà delle tangenti, dimostrata nei trattati sulle sezioni coniche, cioè che sono in ugual ragione nelle parti comprese tra le loro intersezioni e i loro punti di contatto da una parte e dall'altra, così ST, TO, Sr, Om.

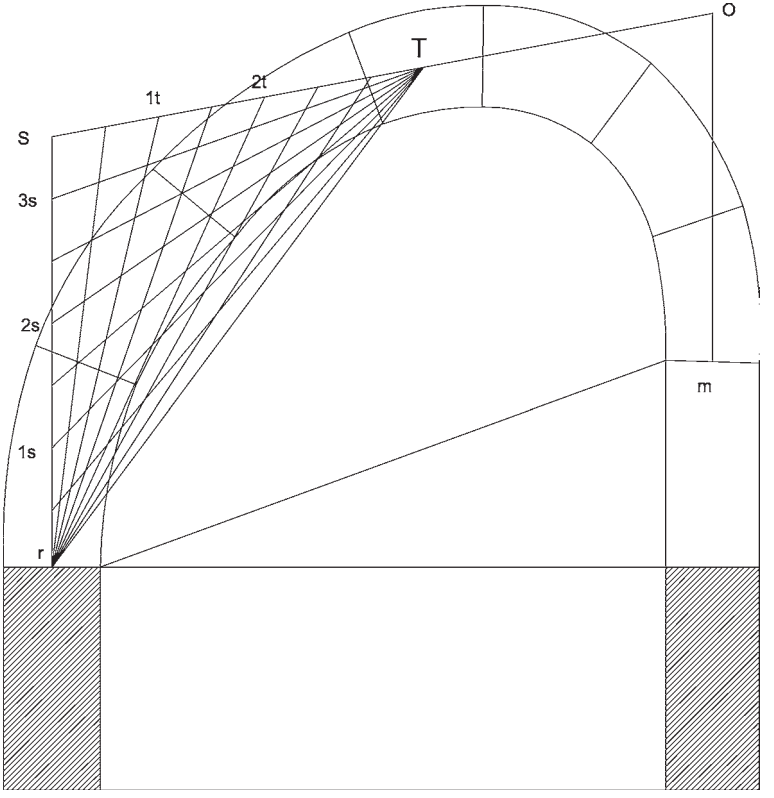
Si può fare una divisione ineguale a partire dalle imposte fino alla chiave tramite archi di cerchio uguali, cosa che sembra più conveniente della precedente perché non richiede correzione.



OSSERVAZIONE SULLE VOLTE RAMPANTI

35

LIV. IV PAG 118
PLANCHE 35



Resta da stabilire se conviene di farle uguali tra di loro in ciascuna parte, come si fa per la stessa figura, o se queste devono essere tutte ineguali seguendo una certa progressione.

Se le facciamo uguali in ciascuna parte, è visibile che la differenza da l'una all'altra diviene in scontro all'insieme , da una troppo grande vicinanza di due controchiavi , che si presenta da vicino alla comparazione .

Se si distribuisce la differenza da un fuga continuata di poi l'imposta inferiore verso la superiore , si potrà considerare l'arco rampante come una porzione di spirale , prendere un centro e descriverlo all'interno e si avrà una diminuzione continuata ma ci risulta che il reggi spinta dell'imposta superiore diventerà il più piccolo di tutti i conci di volta.

Se si vuole fare la diminuzione dopo ciascuna imposta alla chiave si puo' trovare differenti maniere per giungerci.

Una maniera è di dividere le tangenti medie nello spessore , come r S, SO, Om in uno stesso numero di parti uguali. Dopo, i punti di tangenza r, T, m, o in altrettante parti quanto si voglia avere pieducci di volta come qui in 7 per averne dentro ciascuno 3 e mezzo a causa della metà della chiave; poi tirando le linee dritte da ciascuno dei punti r T m alla divisione delle tangenti opposte , le intersezioni di queste linee doneranno dei punti x^1 x^2 3^3 ecc. che andiamo cercando.
Cosi' le linee Ti^s r i^t daranno per la loro intersezione il punto x^1 ; le linee T2, r2^s daranno il punto x^2 da dove si deve passare il secondo giunto di testa , cosi' per il resto.

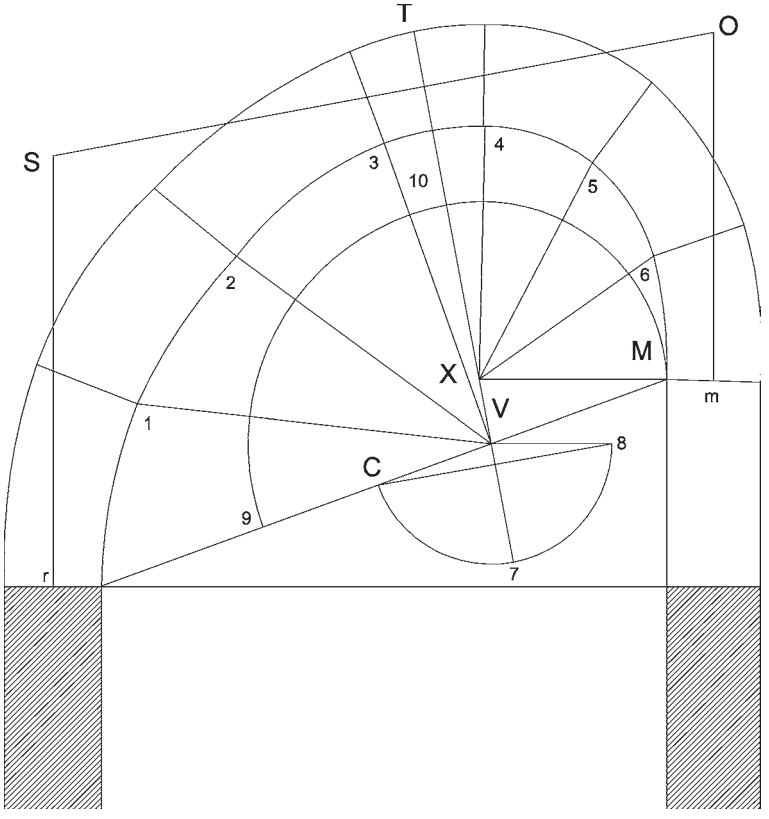
Nota:
Il testo non fornisce una chiara e precisa descrizione del processo di costruzione della volta. Risultano piu' chiari quelli delle pagine seguenti.

Bisogna nel frattempo rimarcare che la diminuzione non comincia nell'imposta ma nel piccola asse IC cosi' bisogna correggere elevando di un po' la prima divisione.

Questa operazione è fondata su una proprietà delle tangenti dimostrata nel trattato delle sezione coniche(1) ; sapere che queste sono nella stessa ragione delle parti comprese tra le loro intersezioni ed i loro punti di attaccamento da un lato all'altro cosi' ST:TO::Sr:Om.

Si puo' fare una divisione ineguale dopo le imposte alla chiave per mezzo degli archi dei cerchi uguali , la quale soluzione appare piu' conveniente della precedente ; perchè non si debbono fare punte correzioni.
(1)Rimanda alla sezione delle coniche . vedere specifiche proprietà

.
Avendo tirato una perpendicolare indefinita TV7 alla linee di sommità So, per il punto di attaccamento T che taglierà la linea di rampa RM al punto v; da questo punto per centro e d'un raggio preso a piacere come VC si descriverà un arco C78 che sezionerà TV prolungato in 7; si fara' l'arco 7,8=C7 e si tirerà la linea 8V alla quale si condurrà per il punto M la parallela Mx che sezionerà' TV al punto x.



n seguito al punto V per centro e al raggio preso a piacere si descriverà un arco 9 10 , che taglierò RM al punto 9 e TV al punto 10; poi dal punto x per centro e da un raggio anche questo preso a piacere, si descriverà un altro arco 10 M.

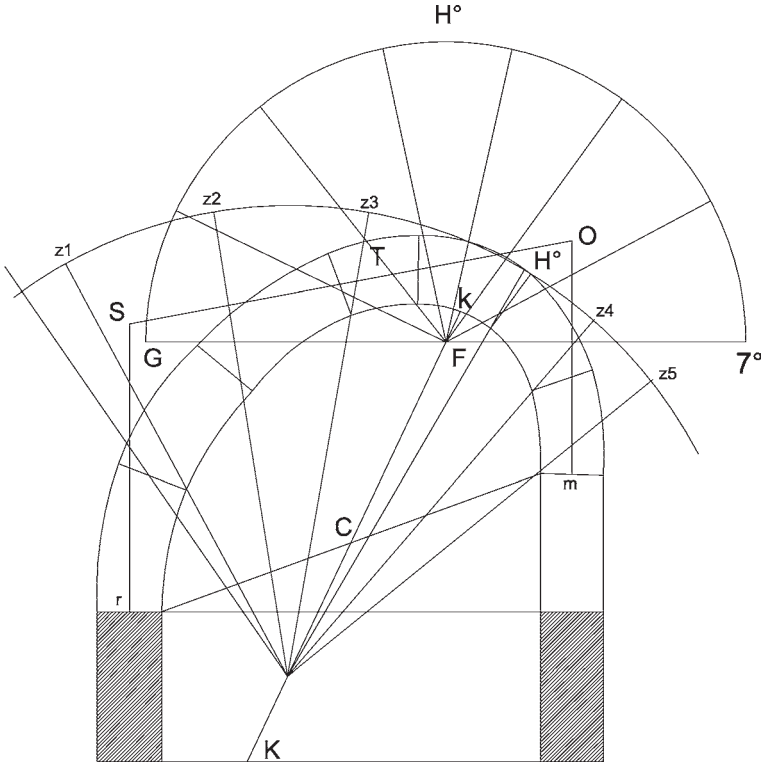
Si dividerà uno e l'altro in parti uguali per altrettanti conci di volta che si vorrà da ciascun lato della chiave e una metà in piu' per la chiave come ai punti 1 , 2, 3, 4, 5, 6, per i quali si tireranno delle linee che rincontreranno l'arco rampante in dei punti che ne marcheranno le divisioni che abbiamo punteggiato e tirato dai centri v e x se si è giudicato approposito o tutto da un solo centro V.

Si potrà ancora fare una divisione di parti ineguali seguendo una certa progressione per il mezzo degli archi dei cerchi uguali fra di loro supponendo che il grande asse e i fuoco dell'arco rampante ellittico siano dati.

Avendo tirato attraverso da uno dei fuochi per esempio F , l'orizzontale g7^o , da questo medesimo punto F per il centro ed un raggio preso a piacere si descriverà un mezzo cerchio g H^0 7 , che si dividerà in altrettante parti uguali quante vogliamo di conci , come qui ai punti 1 2 3 4 5 6 7 a seguito del fuoco opposto f per centro e per raggio il grande asse Kk si descriverà un arco di cerchio dxz^1Y che taglierà i raggi tirati dal centro F alla divisione di un mezzo centro in dei punti z1 z2z 3z4 e c dai quali se si tirano le linee al secondo fuoco f queste linee taglieranno l'arco rampante ai punti i1 2^r 3^r ecc. che si cercano .In seguito per trovare il sezione dei giunti di testa passando per questi punti trovati si condurranno delle linee ai punti z1 z2 z3 ecc e per i punti trovati r1 r2 r3 gli si condurranno delle parallele iq ec. che saranno le sezioni cercate per i giunti di testa sebbene questa maniera sia differente da quelle che abbiamo descritto precedentemente alla pagina 108.Questa non è meno geometrica di quella che io potrei dimostrare se fosse necessario.

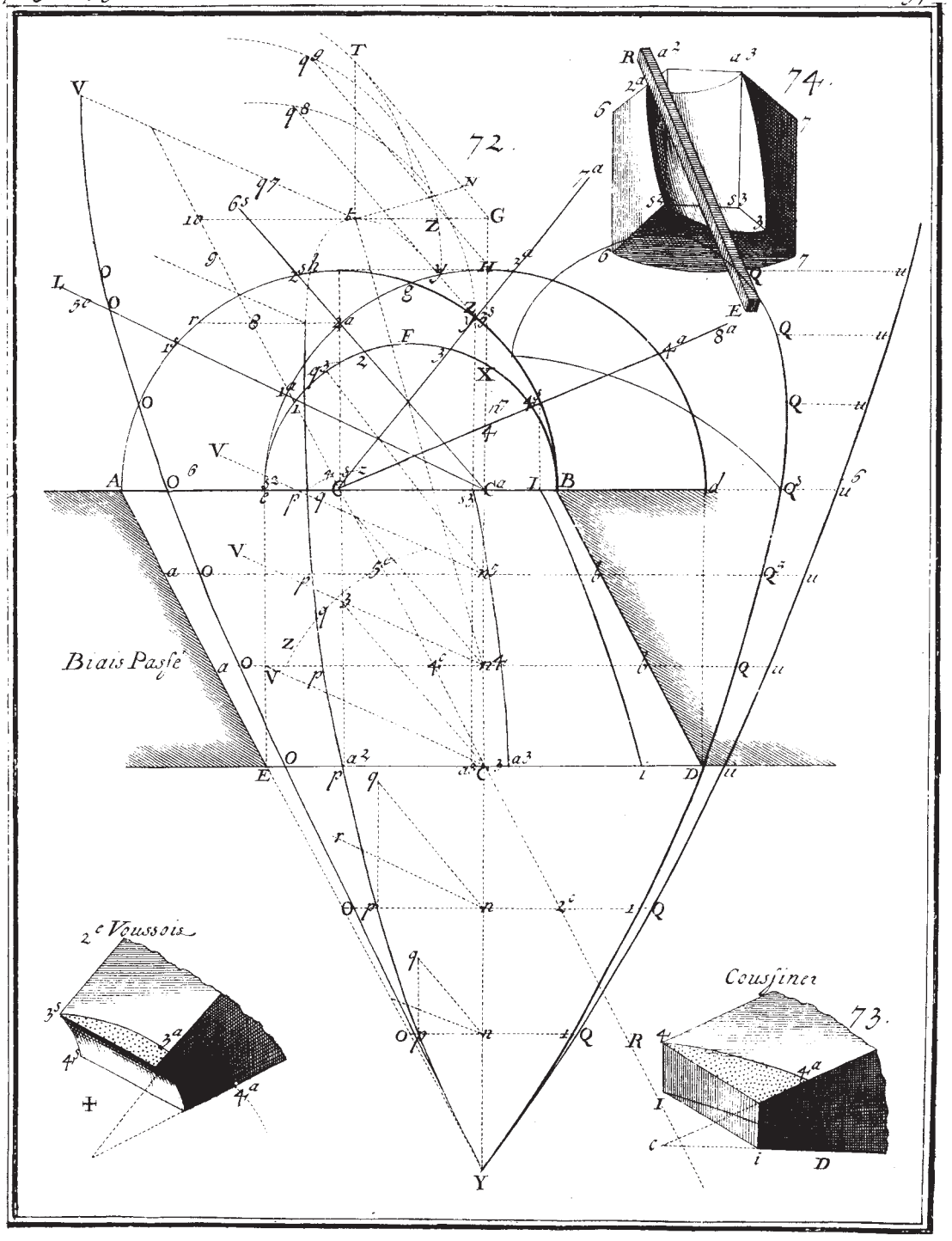
Allorquando si hanno molteplici archi rampanti da fare di seguito , come succede ordinariamente sotto le terrazze rampanti , o sotto le grandi scalinate , bisogna ingrandirle o diminuirle con una stessa proporzione al fine che il rapporto delle aperture sia sempre il medesimo a riguardo dell'altezza dei piedritti. Il percorso non è difficile a chiunque abbia dei principi di geometria sebbene come si vede dalla stampa incisa sulla facciata del castello di Chateau nuovo di St.Germain en Laye dove queste proporzioni non sono affatto osservate sia che questo avvenga per l'errore del disegnatore o dell'architetto; io ho creduto di fare bene a darle qui seguendo la stessa idea d'architettura.

Nota: questo metodo per la costruzione della volta risultà il piu' affidabile ed è sicuramente quello descritto in modo migliore.


H°
z1
z2
z3
T
H°
O
S
k
z4
G
F
7°
z5
m
C
r
K

page 143

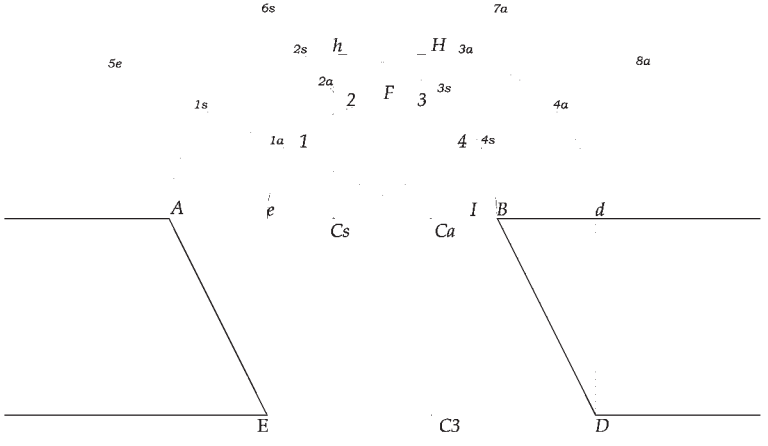
Pl. 37.



Una pergola obliqua le cui basi non sono allineate con l'asse
detto in termini d'arte
Passaggio Obliquo

Ciò che i tecnici chiamano Passaggio Obliquo, o più rudemente a seconda degli autori, Doppio corno di vacca, non è altro che una pergola obliqua di figura ordinaria i cui giunti delle basi non sono paralleli in quanto le teste dei conci sono diverse e invertite da davanti a dietro.
Si deve comunque considerare questa volta come una porzione di cilindro scaleno, tagliato obliquamente dai piani delle basi, i cui giunti della sagoma sono di conseguenza degli archi ellittici, e non delle linee dritte come le traccia di P.Deran, e coloro che l'hanno seguito come Dechalles e M. de la Rue; ciò è incontestabil e si vuole sul centro gotico egB che non bisogna tuttavia considerare come l'arco dritto, cosi come dice M. de la Rue che si è sbagliato in questa espressione; poiché tutto ciò di cui si necessita è che questo arco non sia dritto poiché è parallelo alle facce che si suppongono oblique.

Dopo aver diviso il semicerchio nei punti 1,2,3,4, si traccerà da questi punti e dai centri di facce opposte C^s e C^a le linee C^a1^s, C^a2^s, C^s3^a, C^s4^a che determineranno le proiezioni verticali dei giunti della base e della testa prolungandoli verso i punti 5^e,6^s;7^a,8^a, mentre la pianta della figura sarà tracciata per effettuare la squadratura del cerchio seguendo la maniera ordinaria degli Autori citati (Fig.72a).



Non c'è bisogno che il tratto sia molto marcato se si vuole operare esattamente perché invece di fare le rette dai giunti delle basi e della sagoma in linea dritta bisogna cercare la curva di un arco ellittico come spiegheremo in seguito.

Si traccerà dal centro C^a fino al centro di faccia eHd una perpendicolare GY su AB prolungata indefinitamente da una parte all'altra la quale incontrerà i lati della pergola prolungati AE & DB in X e Y, la linea XY sarà uno dei diametri dell'ellisse che si cerca e il suo centro C^3 ne sarà il centro.

In seguito, avendo preso sulla parte C^aC^3 cosi tanti punti n quanti se ne vorranno avere per l'arco del giunto della base dal momento che nel nostro esempio ne abbiamo presi solo due n^4 e n^5 si condurrà da questi punti altrettante parallele ou,ou alle facce AB&ED e delle altre parallele alla base alla quale si riferiscono, per esempio, per la base C^a2^s tracceremo le linee indefinite n^5q,n^4C^s,C^3q, le cui lunghezze ai punti q saranno determinate dall'intersezione di un arco di cerchio come zq^3,q^9z, tracciato dai centri 5^c,4^c,C^3 presi sull'asse della pergola C^s,C^3 all'intersezione delle linee o,u e per raggio il semidiametro AC^s.(Fig.72b)

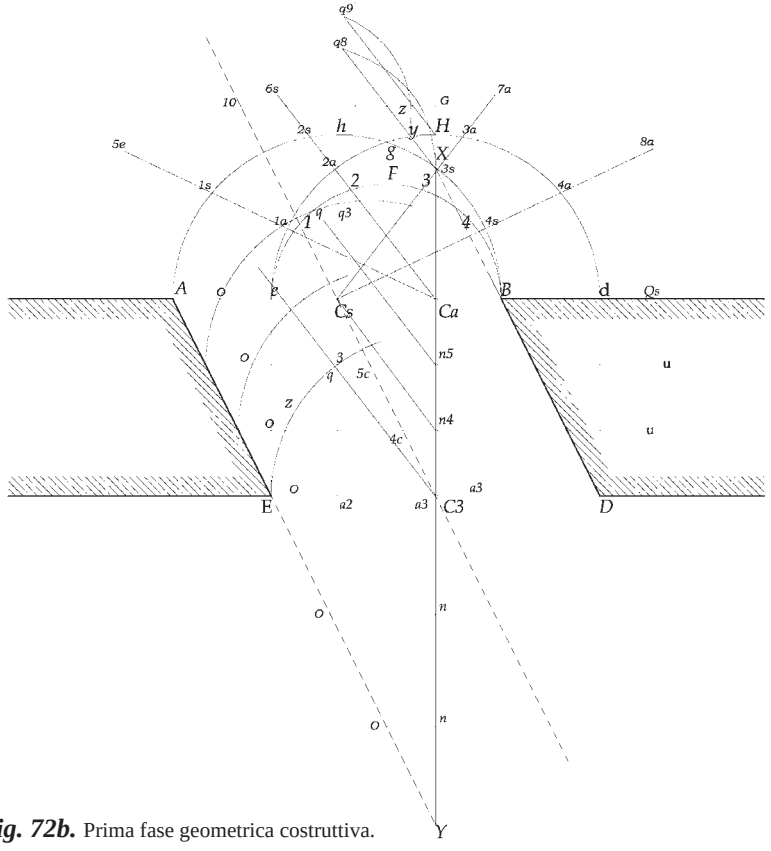


Fig. 72b. Prima fase geometrica costruttiva.

I punti q,q,q,z,&z essendo stati trovati come abbiamo appena detto renderanno più semplice l'ottenimento della proiezione orizzontale della linea p,p,p,p,a^2 abbassando delle perpendicolari dai punti 2^sqqq^{3}che rincontreranno le parallele ou,ou ai punti p,p,p,p^3,y & y,ma questa proiezione non è necessaria; perché raddrizza il giunto e dunque c'è bisogno dell'arco in tutta la sua curvatura senza alterazione.

Ciò perché si porteranno le lunghezze C^a2^s in C^aQ^s, n^5q in n^5Q & C^3q in C^sD, & attraverso i punti Q^sQ^5Q&D si traccerà a mano o con una guida curvilinea l'arco Q^sQ^5QD che sarà il cerchio del giunto della base della sagoma al di sopra del secondo volteggio elevando la piccola linea 2^s2^a che è anche quella della base della chiave.

Si traccerà alla stessa maniera la curvatura del giunto della prima base 1^a1^s, conducendo dai punti $n^5n^4C^3$ delle linee parallele alla base C^a1^s, come n^5V,n^4V,C^3V di cui si determineranno i punti VV dall'intersezione degli archi fatti con centro nei punti 5^c,4^c,C^3 & dell'intervallo C^sA, per raggio, come si è già fatto per l'altro giunto; se si portano le lunghezze C^a1^s,n^5V,n^4V, & C^3V su C^au, n^5u,n^4u,C^3u, si hanno i punti u^6,u,u,3 dei quali si traccerà la porzione d'arco che si cerca che sarà molto meno curva della precedente essendo parte di una ellisse più allungata (Fig. 72c).

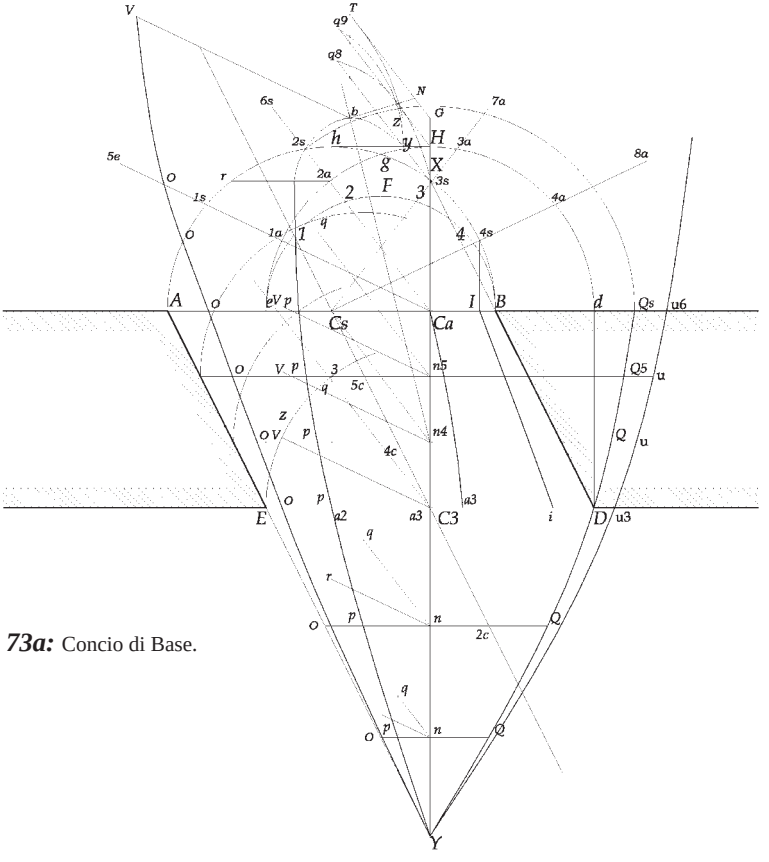


Fig. 73a: Concio di Base.

Fig. 72c: Seconda fase geometrica costruttiva.

Fig. 73b: Concio intermedio.

Applicazione del trattato alla pietra

Avendo innalzato un paramento che serva da base orizzontale vera o presunta, seguendo la maniera ordinaria degli autori citati se ne traccerà uno perpendicolare che servirà ad esempio da faccia anteriore & un terzo divisore che sia parallelo a questo per la faccia posteriore come se si volesse fare una volta di pergola dritta; pur avendo tracciato una

linea sulla base al di sotto del quadrato sulle due rette delle facce e della base, si porterà alle sue estremità sulle due facce l'arco di testa preso sulla pianta a metà della sua proiezione in pianta la quale per il primo volteggio è l'arco e1ª, in seguito su una delle due facce l'altro arco A1ˢ che sta dentro il primo col suo giunto di testa 1ª1ˢ prolungato in L.

Ciascuna testa tracciata nella maniera predetta sagomerà la faccia della pietra adiacente seguendo il tratto della base superiore che essendo già costituita fungerà da traccia per un pannello sagomato sulla curva u⁶u³ che si userà per tracciare lo spigolo del giunto, invece per la base di sotto si traccerà una riga dritta da una testa all'altra, in seguito si modellerà la pietra dall'arco davanti a quello di dietro con il regolo, che si avrà preoccupazione di tenere sempre parallelo alla retta della base inferiore, come si vede nella Fig.73a, in cui scivola una parte sull'arco della faccia più grande & una parte sull'arco della base inferiore nel momento in cui sarà al di sotto dell'altezza della ricaduta più piccola senza che la sagoma ne sia modificata.

Come se non ci fossero dei giunti dritti nel secondo volteggio, sui quali ci possiamo regolare per posizionare il regolo, negli altri volteggi superiori & nella chiave di volta bisognerà tirare dalla pianta delle linee parallele ad AB, che taglieranno gli spigoli delle teste dal davanti al dietro alla stessa altezza r2ª, o toccheranno la chiave come hH; poi avendo portato gli archi di testa appartenenti a queste linee, come 1ˢr sulla testa posteriore o di dietro, si traccerà dalla sagoma con il regolo una retta dritta all'angolo della testa anteriore 2ª, che servirà da guida per modellare la sagoma, tenendo il regolo parallelo a questa linea r2ª & facendolo scorrere in questa posizione sugli spigoli delle teste e delle basi.

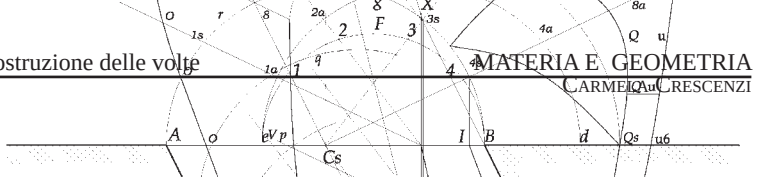


Fig. 74: Chiave di volta 2ª.

Si procederà nella stessa maniera per la chiave in y, tracciando una retta RE come nella Fig.74 dove l'abbiamo rappresentata costruita nel verso opposto, si vede che bisogna cominciare a farla come una chiave di pergola dritta la cui sagoma piatta determinerà il parallelogrammo rettangolo Cˢa²a³s³ formato da perpendicolari ad AB tirate dai punti delle proiezioni abbozzate su questo diametro dai punti 2ª3ˢ, pur avendo in seguito formato la chiave di una sagoma dritta s²,a²,a³,s³,6,7,7,6, si porterà sugli spigoli della base e delle teste opposte la lunghezza 2ˢ2ª presa all'elevazione e dai punti 2ª s²3ˢa³ si traccerà la linea curva QˢD trovata per lo spigolo della seconda base della sagoma, come abbiamo già detto, a meta di un pannello elevato sulla pianta, la pietra essendo modellata col regolo appoggiato sugli spigoli, & scivolante parallelamente alla linea di fuoco RE descriverà la sagoma con tutta la regolarità possibile.

Punti sulla falsità del vecchio trattato

Con ciò che abbiamo appena detto, sul fatto che tutti gli autori dicono che la pietra non possa formare una superficie di volta regolare, ma solamente un cilindro molto irregolare; siccome ogni volteggio viene fatto a modo suo con delle rette di sagoma dritta, era una porzione di cono scaleno che essendo assemblato in maniera da fare delle rette cadenti tra le due teste a modello della corteccia di un melone è vero che le rette delle basi vicino alle imposte sono molto poco curve ma divengono molto sensibilmente a misura avvicinandosi alla chiave.

Punti sull'imperfezione e l'inutilità del trattato

Fig. 73a: Costruzione finale.

PRIMARIAMENTE è ben visibile che lo sbieco sia considerevole, si perde molta pietra nella costruzione del passaggio obliquo, come mostrano le Fig. 73a,73b & 74 in cui ciò è ben visibile grazie ai tagli che bisogna effettuare

2°. Si perde molto tempo a formare queste superfici che in seguito devono essere tolte.

SECONDARIAMETE, io non vedo alcuna necessita di fare questa volta attraverso delle basi oblique che rendono i capi dei volteggi ineguali da una parte all'altra della chiave e dei giunti e basi curve, una volta sbieca con capi uguali e basi dritte così come abbiamo appena detto nel caso precedente della pergola obliqua, non sarebbe più bella e regolare?
Si può dire che passaggio obliquo nella sua origine è figlio dell'ignoranza, che ha fatto ricorso al cattivo artificio per fare una pergola obliqua alla stessa maniera di una pergola dritta, ma io ne faccio così poco caso che non ne farò praticamente menzione se tutti gli autori della curvatura delle pietre non ne avessero parlato come un trattato utile in cui hanno fatto vedere un po' di scienza in cui non c'è affatto amore per la precisione; tuttavia l'ultimo citato lo esige rigidamente come se rifiutasse i pannelli delle volte sferiche per la differenza di un giunto dritto a una curva che non è più sensibile a quella della passaggio obliquo di cui parlo.

Spiegazione dimostrativa

È stato dimostrato, come abbiamo già ripetuto tante volte, che la sezione di un cilindro qualunque tagliato da un piano che incrocia il suo asse è una ellisse o un cerchio; dal momento che le basi del passaggio obliquo incrociano l'asse, se lo si prolunga, è già ben evidente che i loro giunti curvilinei creino delle porzioni di archi ellittici.

2°. Non è meno chiaro che il piano orizzontale A,B,D,E, che taglia il cilindro dal suo asse, lo tagli in due parti uguali; di conseguenza (per il 18ᶜ e 11ᵉ Libro d'Eucl.) che i piani delle basi 1ˢCª,2ˢCª taglieranno l'orizzontale seguendo una perpendicolare CªCˢ; dal momento che le linee 1ˢCª,&2ˢCª sono le intersezioni di queste basi con un piano verticale al quale esse stesse sono perpendicolari.

3°. L'intersezione comune di queste basi prolungate con il piano orizzontale è un diametro della sezione, poiché si deve restare con il cilindro al di sotto del piano orizzontale superiore, se sarà continuo, e questo diametro è terminato con i lati orizzontali della pergola AE&DB prolungato; dunque la linea XY è un diametro dell'ellisse.

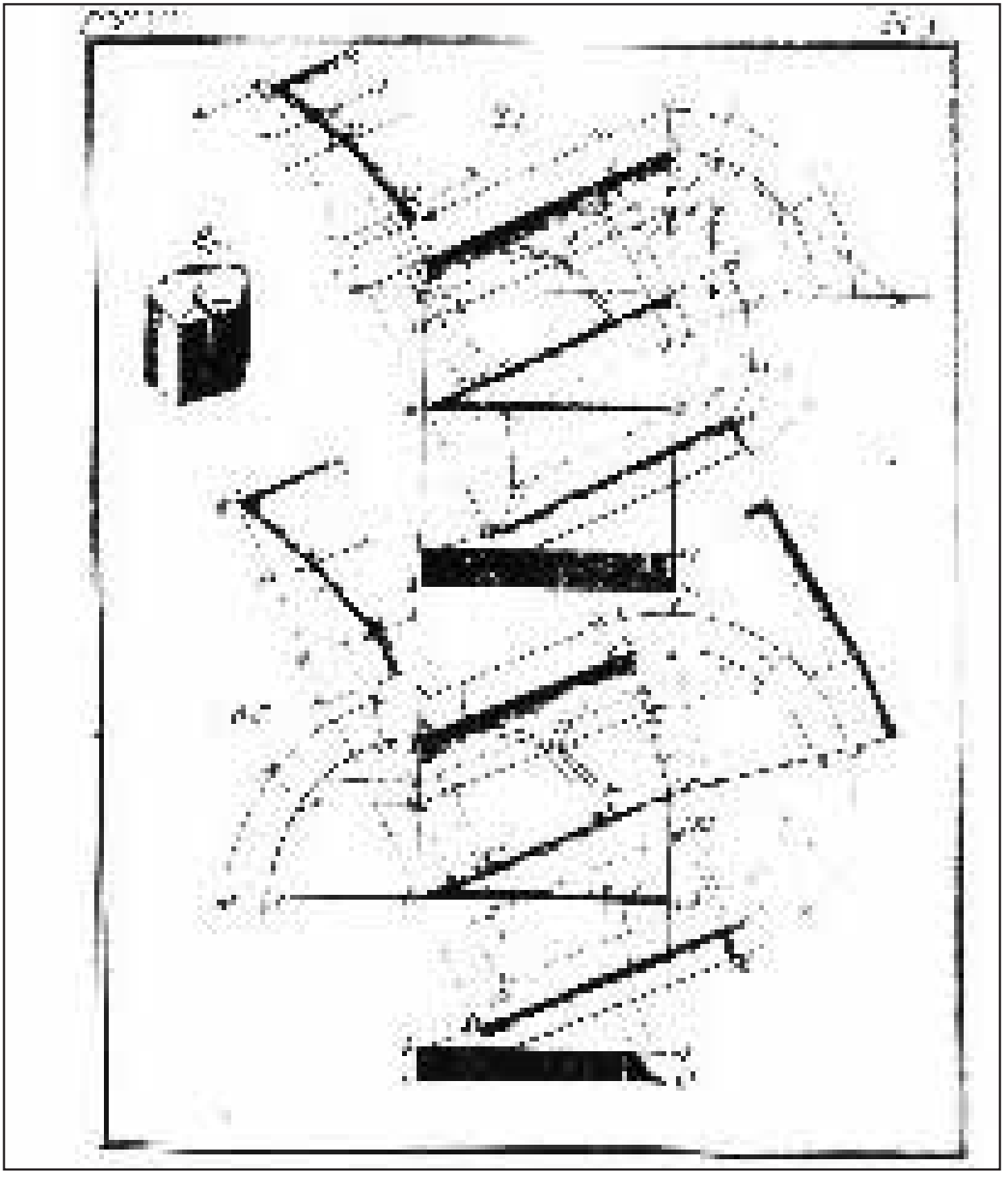
4° Infine è chiaro che tutte le sezioni ab,ab parallele ad AB, perpendicolari al piano A,B,D,E, saranno dei cerchi o delle ellissi simili & uguali al centro AhB, & che tutte le linee nq parallele a 2ˢCª&nV parallele a 1³Cª sono (dalla 8. alla 11.ᵉ d'Eucl.) sugli stessi piani delle basi, di conseguenza le loro intersezioni con i cerchi ab,ab,&c. saranno di contorno all'ellisse

che è la sezione della base; oppure queste ellissi taglieranno i cerchi al di là del punto X, dimostrando che il diametro XY non passa per l'asse. Infine queste linee, allontanandosi dal punto X arriveranno a un punto in cui non taglieranno più i semicerchi delle sezioni ab; ma una delle due non farà altro che toccare in T, come la linea TG.

5° Infine, dal momento che tutte le linee NQ sono perpendicolari alla comune intersezione delle basi GY, se si portano le loro lunghezze su delle linee nu,nu che sono allo stesso modo perpendicolari, si rappresenterà esattamente sul piano orizzontale che io considero quello della direzione della pianta, la semi ellisse XQDY, che si forma nell'aria nella sagoma attraverso l'intersezione della seconda base, anziché dell'altra, & di conseguenza gli archi $Q^{s}Du^{6}u^{3}$, che sarebbero delle parti corrispondenti alla proiezione della volta ABD, sarebbero gli archi dei giunti delle basi, cioè ciò che si doveva trovare.

Carmela Crescenzi

a/2002



Carmela Crescenzi

PROBLEMA XXXVIV

Avvertimento

Occorre avvisare il lettore, che qui si analizzano le “descentes” (discese) che terminano con facce piane, di cui chiamiamo quella inferiore faccia di salita, e faccia di discesa, senza affrontare nessun caso in cui interseca altre volte simili, o di specie differenti, in quanto non seguiamo l’esempio di altri autori che hanno fatto in questo modo, per non complicare due cose distinte, che non hanno necessariamente nessi comuni; il nostro intento è, innanzitutto, non complicare il trattato. In secondo luogo per seguire l’ordine, ci siamo proposti di trattare le volte semplici, prima di affrontare la composizione dell’intersezione di due o più volte, cosa che ci promettiamo di trattare nella seconda parte di questo libro, che costituisce il terzo tomo.

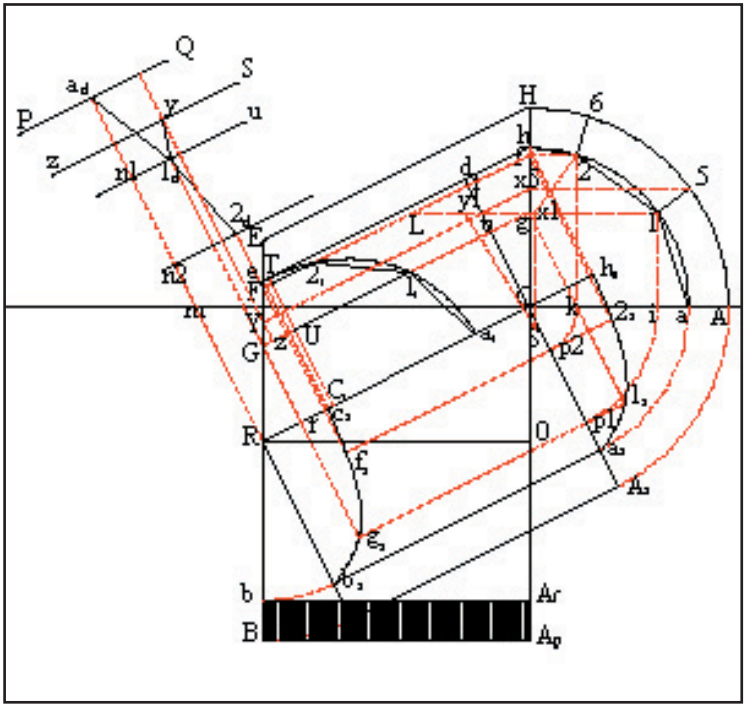


Fig. 84. Discesa retta alla partenza e all’arrivo

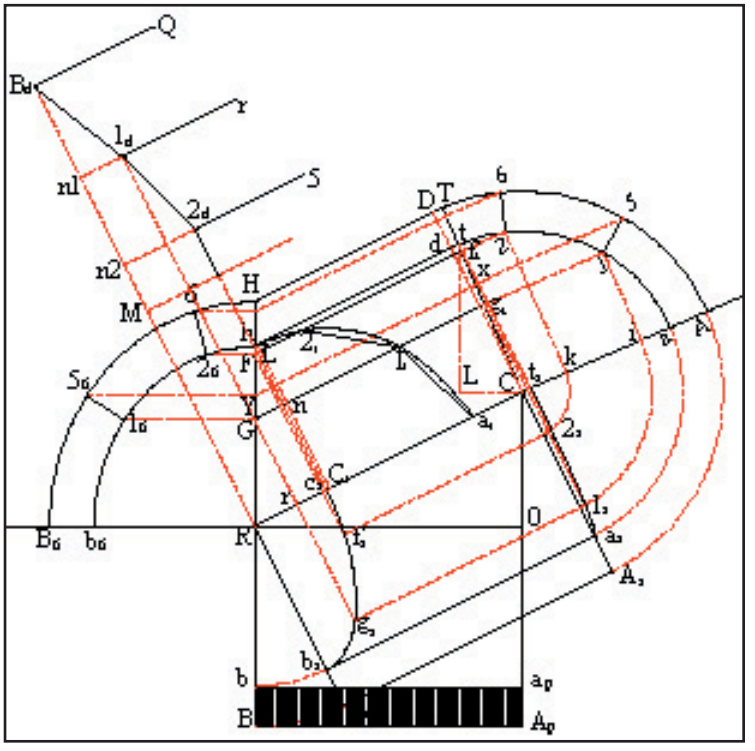


Fig 86. Discesa retta a scarpa sul davanti e a piombo sul di dietro

Prima specie di botte inclinata sull’orizzonte.
In termini dell’arte.
Le discese rette.

Sono chiamate discese rette tutte le botti inclinate sull’orizzonte, di cui la direzione della faccia è perpendicolare a quella della botte, considerata secondo la direzione orizzontale del suo asse, cioè secondo la sua proiezione orizzontale. Da ciò si ha che si possono avere due tipi di discese rette, una la cui faccia è a piombo, l’altra la cui faccia è a scarpa o a strapiombo.

Primo caso.
Discese rette alla partenza e all’arrivo.

Fig. 84
Sia dato il parallelogramma ROApB metà del piano orizzontale di una discesa retta, la quale è sufficiente poiché l’altra metà è perfettamente simile.

Carmela Crescenzi

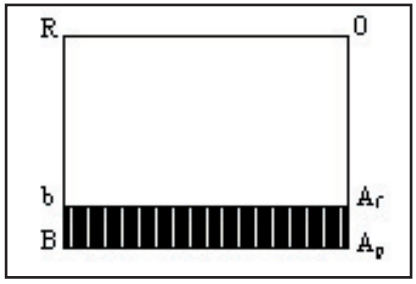


Fig 84. Metà del piano orizzontale di una discesa retta

Sia OC l'altezza da cui la botte si alza da un'estremità al di sopra dell'orizzonte RO, e RC la linea di rampa. Dal punto C come centro e con raggio Rb, pari alla metà della larghezza della botte nell'intradosso, se la si vuole fare a tutto sesto, si descriverà il quarto di cerchio h1a per metà del sesto primitivo, che terminerà in h su OC prolungato e in a su CA parallela a RO, e gli si farà il sesto concentrico d'estradosso, se lo si vuole, H5A. Si dividerà questa metà di sesto in sei conci, per esempio, qui diviso per cinque, in due e mezzo nei punti 1,2,h, da cui, dal centro C, si tracceranno i giunti di testa 1 5, 2 6.

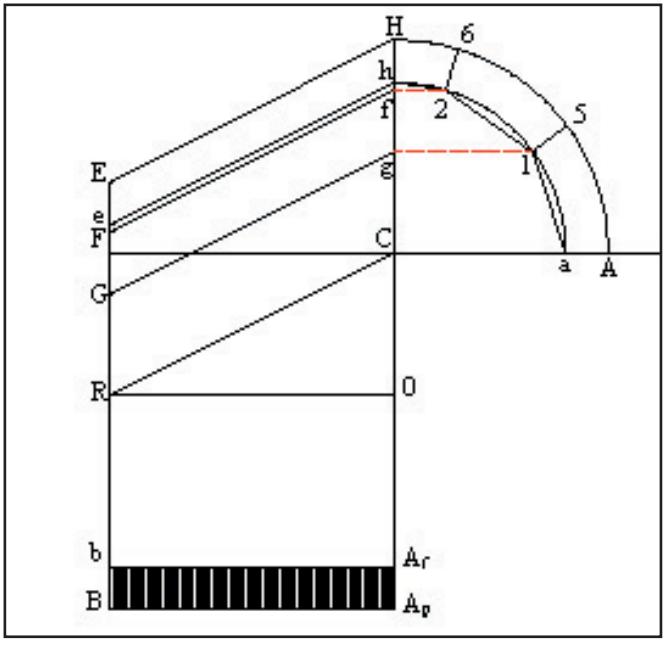


Fig 84. Linea di rampa, quarto di cerchio d'intradosso e d'estradosso diviso in due conci e mezzo, e profilo della volta

Dagli stessi punti 1 e 2 si tracceranno delle parallele a OR, come 2f, 1g, che taglieranno la verticale CH nei punti f e g, da questi e dai punti h e H si tracceranno delle parallele alla linea di rampa RC, come HE, he, fF, gG, che taglieranno la verticale RE nei punti E, e, F, G, e il profilo della volta sarà fatto.

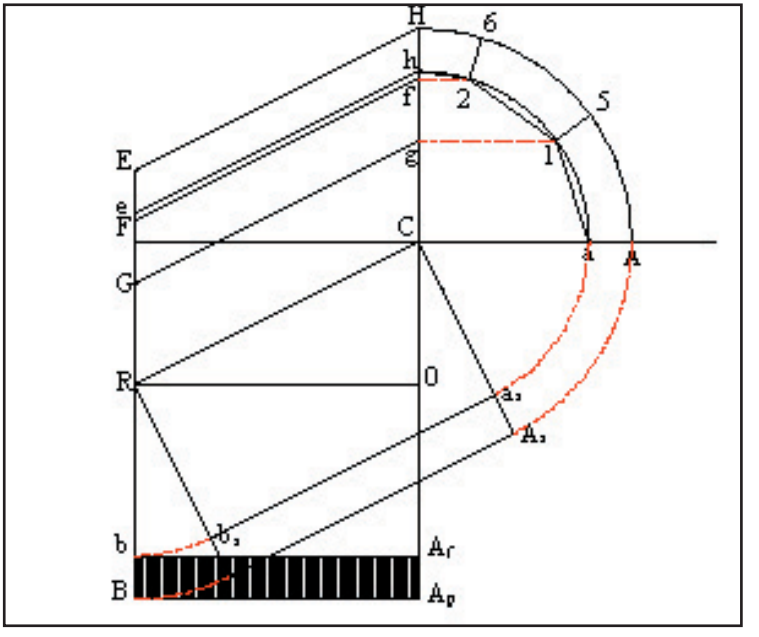


Fig 84. Piano orizzontale trasportato sulla linea di rampa RC

Ora occorre trasportare il piano orizzontale ROApB seguendo la rampa RC, che non cambia affatto la figura, ma soltanto un po' la lunghezza, per cui si prende RC invece di RO.Dai punti R e C avendo tracciato due perpendicolari alla rampa RC, si prenderanno su queste linee le larghezze del piano orizzontale Rb, RB, e si tracceranno le linee b as, Bs As, che formeranno il piano che segue la rampa, secondo il quale noi dobbiamo operare, come fosse orizzontale, per trovare le lunghezze dei conci e le distanze delle proiezioni dei giunti di letto, che danno il modo di tagliare i conci per squadratura o per pannelli, ciò che ridurrà questa discesa retta ad un'altra specie, di cui l'enunciato è quello

Botte orizzontale retta sulla sua direzione,
in strapiombo alla partenza e a scarpa all'arrivo.

Per i punti 1 e 2 avendovi tracciato delle perpendicolari su CA, che taglieranno in k e i, si porterà la lunghezza Ck in C p2 e Ci in C

p1, e per i punti p1 p2 si tracceranno le parallele a RC, prolungati indefinitivamente da una parte all'altra, che saranno le proiezioni dei giunti di letto sul piano della rampa.
In seguito dai punti f e g dello strapiombo CH, si tracceranno delle perpendicolari a RC, che intersecheranno le proiezioni dei giunti di letto corrispondenti, prolungati nei punti 2s 1s, e la linea di rampa, che è il centro della chiave in hs, la curva tracciata per questi punti hs 2s 1s as sarà la proiezione dello spigolo d'intradosso, con l'arco di faccia che sporge con lo strapiombo al di là della sua base C as. Si traccerà allo stesso modo la curva di spigolo dell'estradosso e della faccia, se se ne ha bisogno, ma si può farne a meno come diremo di seguito. Allo stesso modo si troverà sul piano di rampa l'arretramento dello spigolo d'intradosso con la faccia di salita in fondo alla descente, che noi al contrario della prima consideriamo a scarpa. Non si tratta che di tracciare dei punti eFG delle perpendicolari su RC, prolungandoli fino a raggiungere la proiezione dei giunti di letto, corrispondenti a quelli di profilo; così quella si traccerà da F, che proviene dal punto 2 del sesto di faccia, taglierà la proiezione, che va dello stesso punto al punto fs, e quello che si traccerà da G, che provenendo dal punto 1, darà su P1 gs il punto gs, la curva cs fs gs bs sarà la proiezione dell'arretramento della scarpa.

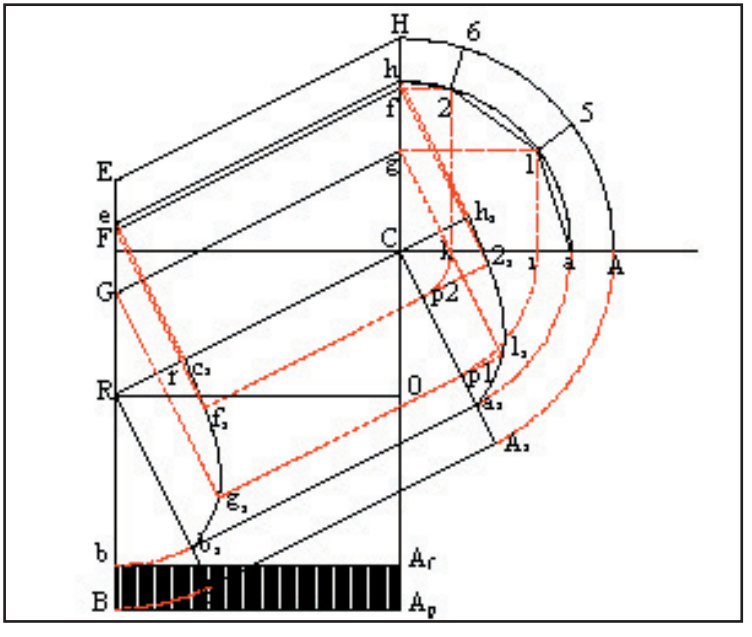


Fig 84. Proiezione dei giunti di letto sul piano di rampa e proiezione dello spigolo d'intradosso a strapiombo e a scarpa

Occorre ora formare l'arco-retto della descente ribassato, se il sesto di faccia è a tutto sesto nel riporto delle linee Ch a Cd che è la stessa che quella della rampa ha la sua proiezione orizzontale; poiché a causa delle parallele RC, eh l'angolo OCR è uguale a C h e, gli angoli in d e in O sono retti; dunque Ch : Cd :: CR : RO :: Cg : Cu :: Cf : Ct; così prendendo una perpendicolare a RC dove si vuole, come in eCr, si hanno tutte le altezze dei giunti, non si ha che portare sulla base e sulle parallele, le larghezze orizzontali, che sono costanti e uguali nell'arco di faccia e nell'arco-retto. Si porteranno la lunghezza Cas in Crar, Cp1 in U1r, Cp2 in T2r; il quarto d'ellisse tracciato dai punti e2r1r ar sarà l'arco-retto che si cerca.

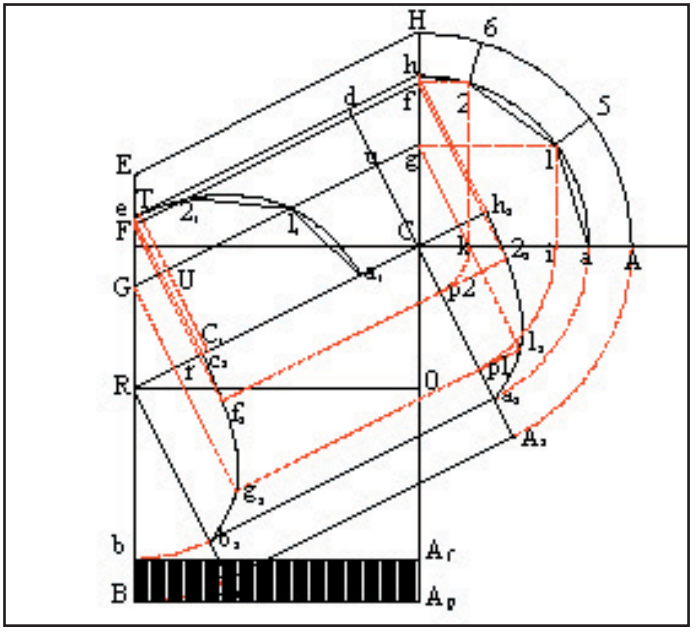


Fig 84. Proiezione dell'arco-retto ribassato

Non resta ora che realizzare lo sviluppo dell'intradosso per avere i pannelli d'intradosso piatto. Dai punti F, G, R, si tracceranno delle perpendicolari a RC verso ad su Rad, si porteranno di seguito le corde dell'arco-retto ar 1r, 1r 2r, ecc. noi ne abbiamo messo qui la metà a cominciare dal punto m preso a piacere, ciò che ha dato i punti n1, n2, ad, da cui si tracceranno delle perpendicolari a R ad, che saranno tagliati dalle parallele, che passano dai punti F e G nei punti 1d 2d. I due angoli P ad 1d, ad 1d n 1 formeranno la testa del primo pannello d'intradosso del concio di faccia sul davanti, e i loro supplementari Q ad 1d, ad, 1d u formeranno la testa del primo pannello d'intrdosso piatto della faccia sul dietro, che è considerata come in scarpa con un angolo

Carmela Crescenzi

uguale allo strapiombo del primo. Tracciati i pannelli d'intradosso, si realizzeranno quelli del letto per mezzo dell'estradosso H5A, o prendendo a piacere una lunghezza di giunto 2 6 o 1 5 più o meno, per esempio, per chi traccerà per il punto 5 una perpendicolare a CH, che taglierà in x5 da cui si traccerà x5 Y parallela a EH, e che riprodurrà poi il punto Y con un giro di squadra in Yy; dopo avendo preso con il compasso la lunghezza del giunto di testa 1 5, si poserà uno di questi punti nel punto 1d, e si farà dall'altro un arco, che taglierà la linea Yy nei punti y, da cui se si traccia y s, parallelo alla rampa RC, si avranno le teste dei due pannelli di letto per le faccie di salita e di discesa, rappresentati per la prima con S y 1d u, e il suo complementare z y 1d n1 per la discesa.

Per risparmiare la pena di fare i pannelli di letto si può utilizzare il biveau d'intradosso piatto di testa, che si troverà seguendo il nostro metodo generale, dunque ecco l'applicazione nella figura precedente per il secondo concio.

Dal punto 1, base di questo concio si traccerà l'orizzontale 1L, che taglierà il giunto di letto del profilo superiore fF al punto L; dal punto 2 vertice di questo concio si traccerà 2 x1 perpendicolare alla corda 2 1, che taglierà 1 L nei punti x1, da dove si traccerà la perpendicolare x1 S, si farà uguale a x1 L, in seguito avendo portato la lunghezza x1 2 in x1 y1. Si traccerà dal punto S la linea S y1, che formerà con x1 L l'angolo S y1 L, che è quello dell'angolo che si cerca, e il tracciato

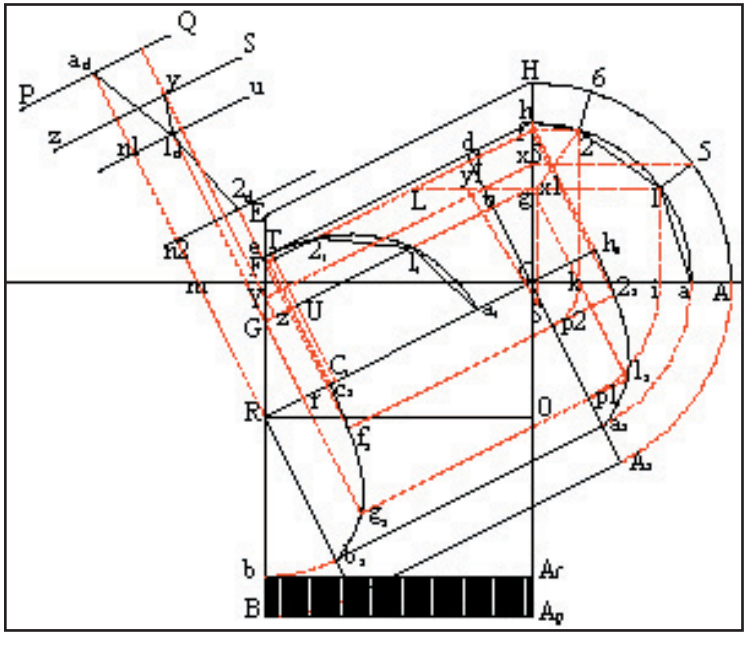


Fig 84. Sviluppo dei pannelli d'intradosso piatto e delle teste

Applicazione del tracciato sulla pietra

Avendo eretto un paramento destinato a servire da intradosso piatto vi applicheremo un pannello ad essa conveniente, per tracciare esattamente il contorno. Dopodichè con il biveau della faccia e del letto preso sull'arco retto all'ordinario, come ar, 1r, 5r come primo concio e 1r, 2r, 6 come secondo concio, abbatteremo la pietra in una superficie piana per posarci il pannello dell'arco in prospetto. Oppure senza servirci del pannello di letto dopo aver tracciato la faccia piana, abbatteremo la pietra seguendo il biveau della faccia e della testa che faremo come abbiamo già detto a botte in pendenza o in strapiombo, per tracciare la testa seguendo il suo pannello e grazie a delle linee di giunto di testa e di giunto di letto possiamo formare la superficie piana che determina il letto nel problema 1° come lo abbiamo già ripetuto tante volte, ciò è espresso nella fig.85.

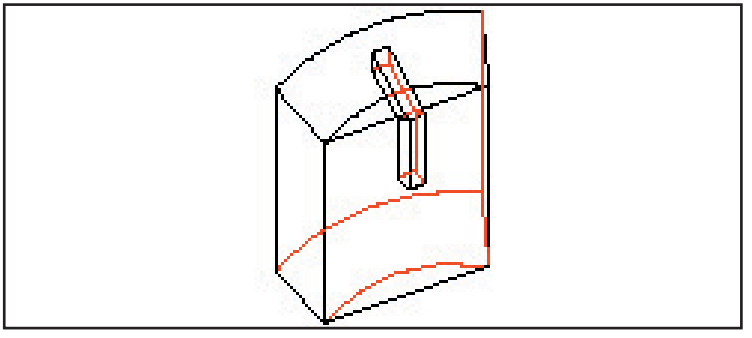


Fig 85. Concio della volta

Bisogna notare che grazie al solo profilo giunto all'arco in prospetto con i suoi strapiombi e l'arco-retto, si possono trovare tutti i pannelli senza l'aiuto di nessun piano e né di quello orizzontale, che non può dare in questo caso nessuna misura né del piano di rampa, il quale non da neppure lui nuove misure che non troviamo nel profilo.

1°. Le lunghezze dei giunti di letto sono date di profilo. 2° Il loro inetrvallo dalla faccia all'estradosso sono date nell'arco in prospetto dalla lunghezza dei giunti di testa. 3° La loro obliquità cioè quella dei loro lati paralleli è data dalle perpendicolari su RC come Yz dalla lunghezza Gz, che è la differenza della testa in un rettangolo, come sarebbe se la botte fosse retta. Pertanto le lunghezze dei giunti di letto, il loro intervallo sino alla faccia sull'arco retto e le loro differenze che avanzano dalle perpendicolari, come Rr nell'obliquità Rgr essendo

dati, possiamo formare i pannelli di faccia della pietra. Infine i pannelli di testa sono dati nell'arco in prospetto; dunque possiamo evitare qualsiasi piano utilizzando il profilo ma per rendere più preciso il disegno, è conveniente fare un piano orizzontale; perchè questo serve da riferimento per impedire che ci si sbagli. L'uso principale del piano di rampa R Bs As C supposto orizzontale, anche se non lo è, serve per tagliare i conci delle botti in discesa, per squadratura, come è facile vedere; visto che questo piano di rampa è lo stesso rispetto alla volta, che il piano orizzontale rispetto a volte a botte di livello, le cui fecce

Secondo caso delle discese rette
Discesa retta a scarpa sul davanti e a piombo di dietro

Fig. 86
Sia il parallelogramma ROApB la metà del piano orizzontale di una volta a botte in discesa, si cui RC è la linea di rampa, e OC l'altezza sull'orizzonte.

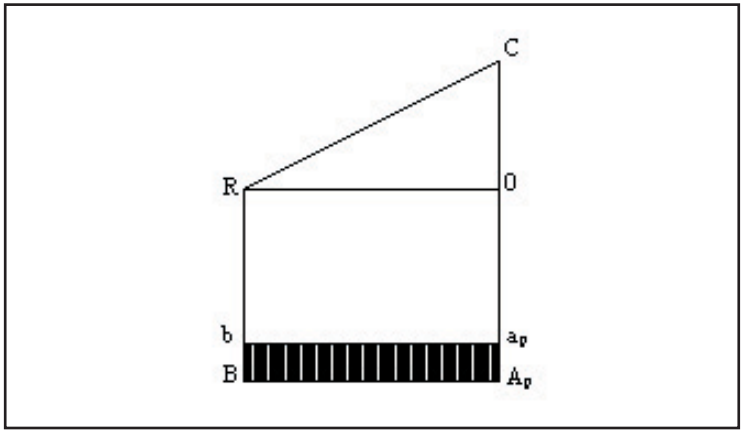


Fig 86. Linea di rampa, metà del piano orizzontale e altezza sull'orizzonte di una volta a botte in discesa

Sia CT il profilo della faccia inclinata, seguendo l'angolo della pendenza dato LCT; faremo CA perpendicolare su CT, e dal punto C come centro, descriveremo per metà del sesto della faccia in discesa un quarto di cerchio, se lo si vuole a tutto sesto o un quarto di ellisse se lo si vuole rialzato o ribassato; lo supporremo in questo caso circolare A12t rispetto alla pietra, A5T come estradosso, e diviso nei suoi conci nei punti 1, 2, cioè in due parti e mezzo per cinque conci nel semicerchio.

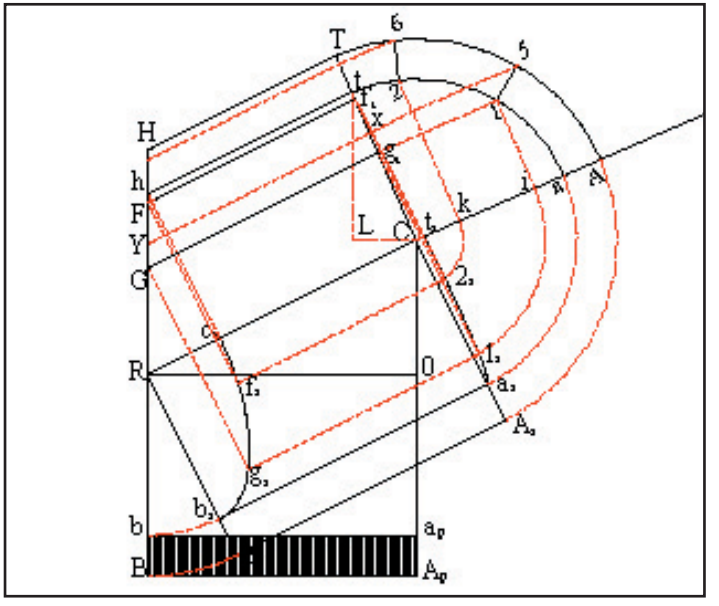


Fig 86. Proiezione del quarto di cerchio. Rappresenta la faccia in discesa della volta a botte

Per i punti 1 e 2 tracceremo le perpendicolari a CT, che la taglieranno nei punti ft gt, dai punti T, t, ft, gt, tracceremo delle parallele alla linea di rampa RC, le quali taglieranno la verticale BH nei punti H,h, F & G, dai quali tracceremo delle parallele all'orizzontale OR come G 16,

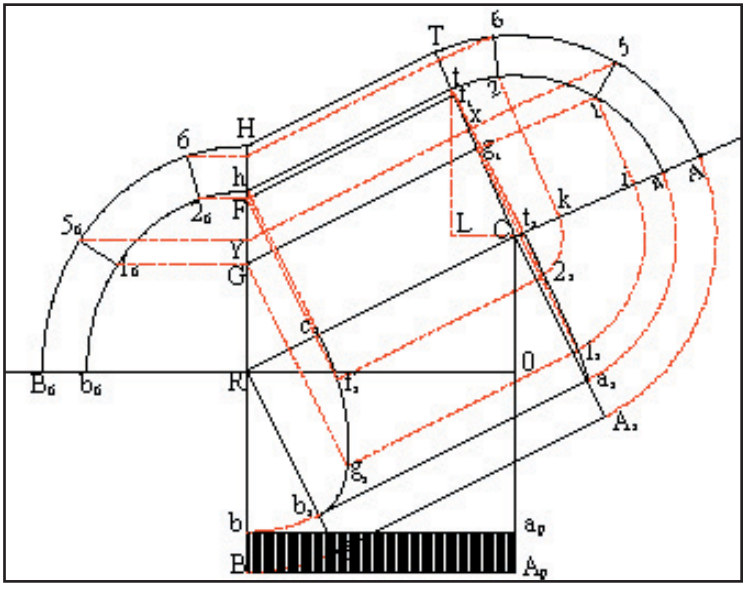


Fig 86. Proiezione del quarto d'ellisse rialzato. Rappresenta la metà della curvatura nel prospetto di salita

faremo uguali a quelle dell'arco in prospetto ft 2, gt 1, C a, le loro estremità daranno i punti b6, 16, 26, h, per i quali tracceremo il quarto d'ellisse rialzato, che è la metà della curvatura in prospetto di salita e della quale l'altra metà è uguale.
Rimane ora da determinare il sesto dell'arco-retto, che deve essere ribassato rispetto al sesto in prospetto nel rapporto dei raggi CT rispetto a CD, la cui differenza non è molto grande in questo esempio.
Avendo tracciato una perpendicolare alla linea RC, dove noi vorremmo, come h Cr, porteremo la lunghezza del raggio dell'arco in prospetto Ca in Cr ar, poi la sua parallela gt 1 in n 1r sul giunto di letto G gt, e ft 2 su L 2r, e per i punti h 2r 1r ar tracceremo il semiellisse ribassato, che sarà il contorno dell'arco-retto.

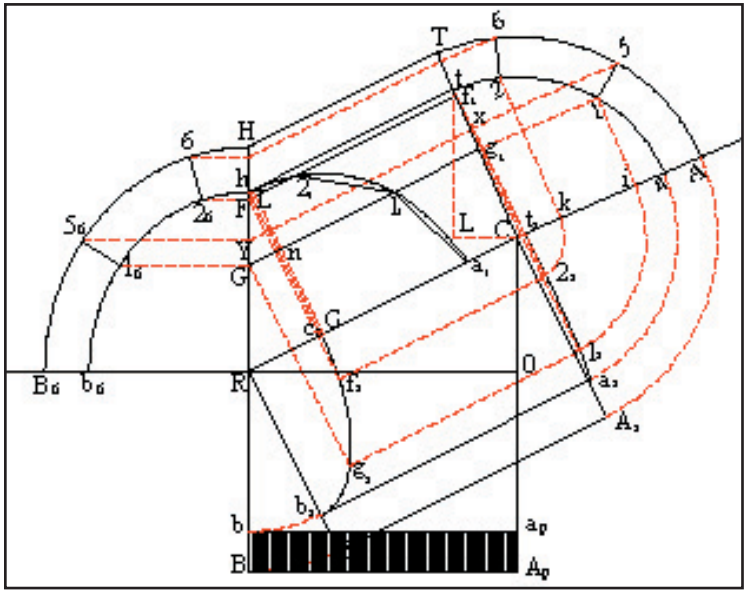


Fig 86. Proiezione dell'arco-retto ribassato

Si ha dunque tre curve differenti, quella della faccia in discesa circolare, quello dell'arco retto ribassato e quello di prospetto di salita rialzato, le quali con il profilo centro della volta TR, bastano per trovare tutti i pannelli necessari per tagliare le pietre, come noi abbiamo detto per la descente precedente, e non sarà necessario fare alcuna proiezione, né sul piano orizzontale, che non può dare alcuna misura, né sul piano di rampa, che non da alcuna notizia dul punto; poiché le lunghezze dei giunti di letto sono nella loro giusta misura sul profilo.
Tuttavia siccome questo piano si presenta alla vista come una proiezione del pendio della faccia posteriore, e a strapiombo nella faccia anteriore , che è tuttavia in pendenza rispetto al piano orizzontale RAp, si farà bene a farlo alla stessa maniera come noi abbiamo detto nell'esempio riore , che è tuttavia in pendenza rispetto al piano orizzontale RAp, si farà bene a farlo alla stessa maniera come noi abbiamo detto precedente con gli sviluppi dei pannelli dell'intradosso, quello che la figura mostra sensibilmente, senza che sia necessario aggiungerci una nuova spiegazione, che non sarebbe che ripetere il primo caso della discesa retta; qui bisogna solamente sottolineare, che sebbene il raggio CA dell'arco della faccia in pendenza sembri inclinato all'orizzonte in questa situazione, non lo sarà perfettamente quando verrà messo in opera; poiché dovrà essere perpendicolare al piano di proiezione dell'asse TCR, che lo è per costruzione; al raggio CT, se si fa muovere il quarto di cerchio TA sul suo raggio CT, il punto A cadrà su C, che allora sarà la proiezione di tutta la linea CA, la quale sarà anche perpendicolare alla linea di rampa RC; poiché se una linea è perpendicolare ad un piano, lo si farà a tutte quelle che si può tracciare da questo piano, che passeranno per il punto C; dunque il raggio CA che qui è inclinato sull'orizzonte, diviene orizzontale in opera e perpendicolare alla direzione orizzontale della volta RO, che costituisce la natura delle discese rette.

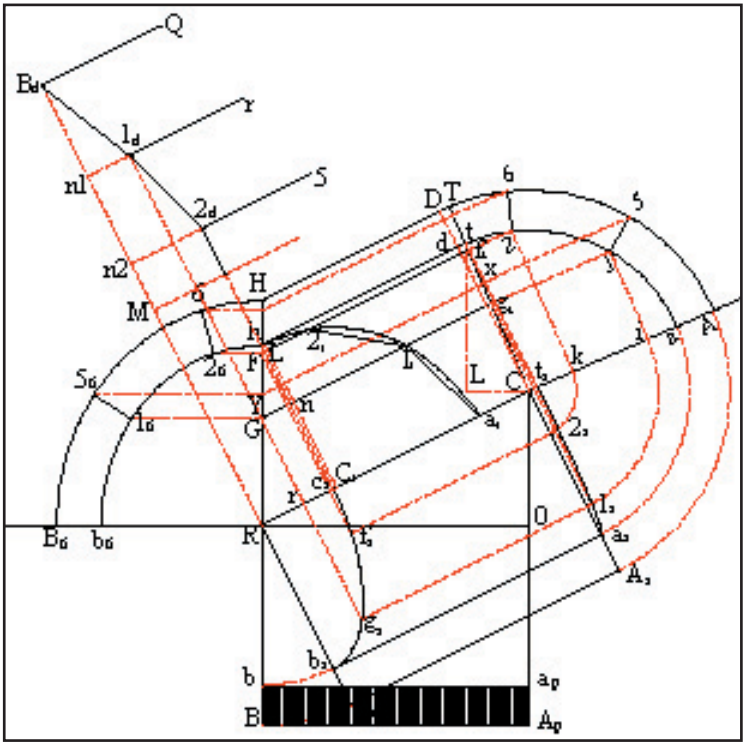


Fig 86. Sviluppo dei pannelli d'intradosso

Esemplificazione dimostrativa dei due casi precedenti

In primo luogo noi non facciamo alcun uso dalle proiezione orizzontale delle descentes, per la ragione che noi abbiamo trattato questo spazio di rappresentazioni, che avrebbe scorciato tutti gli oggetti che non erano paralleli al piano di descrizione, e come la rampa RC è più lunga che la nuova RO, ne consegue che tutti i giunti di letto che si potrà tracciare nel piano orizzontale sarebbero troppo corti rispetto al rapporto RO a RC. Per sopperire alle misure che si trovano ordinariamente nella proiezione orizzontale, si ricorre alla proiezione verticale, fatta su un piano verticale all'asse, o parallela alla direzione della volta; così tutti i giunti del letto della rappresentazione sono paralleli a quelli della realtà nella volta, sono tracciati nella loro giusta misura e le loro sporgenze o i loro indietreggiamenti gli uni sugli altri, rispetto alla linea di rampa RC, sono disegnati attraverso le perpendicolari Yz e Gr sulla linea RC, dando luogo a dei triangoli rettangoli Ygz, Grr, che sono gli

eccessi o i difetti di cui le superfici piane dei letti e degli intradossi piatti superano i parallelogrammi rettangoli, che saranno le figure convenienti a una botte retta nuova; è per questo che si traccia le perpendicolari a RC dai punti FYG, che abbiamo prolungato indefinitivamente verso Bd e verso ad per avere gli indietreggiamenti o le sporgenze delle teste dei pannelli; e poiché nei triangoli di cui abbiamo parlato, ci sono due lati accorciati dalla proiezione verticale, che sono la rappresentazione delle linee inclinate al piano verticale; si è andati a cercare la lunghezza di uno di questi lati, come Gr su ar 1r dell'arco retto, che è parallelo a questo lato, sebbene nella figura non lo sia perchè non lo deve esprimere che su un piano che non sia accorciato. E' perchè l'arco-retto, e ar 1r, e l'arco della faccia H5A non sono nella loro situazione naturale riguardo al profilo; bisogna immaginarli muovere girando sui loro raggi, che sono nel piano di profilo CH & Cr e, finchè non diventeranno perpendicolari al piano RH.

Riguardo l'uso che noi facciamo del piano di rampa come del piano orizzontale, abbiamo già fatto un ragionamento, e spiegato le diverse posizioni di un cilindro obliquo sulla base, basta rimarcare che noi abbiamo trovato le curve ellittiche o solamente le loro metà; poiché queste specie di botti non varino nei loro lati, che sono le proiezioni inclinate delle teste della volta, per questo vedere hs 2s 1s, 1s as per la parte in discesa, che si considera a strapiombo, sebbene nella sua vera situazione è verticale, e per Cr fs gs bs per la salita, che è considerata a scarpa rispetto al piano di rampa RC.

Gli archi di cerchio A as, a as, 1 p1, k p2 fanno vedere i rapporti delle proiezioni dei punti 1 & 2, sul raggio CA, con la testa sul piano inclinato C As.

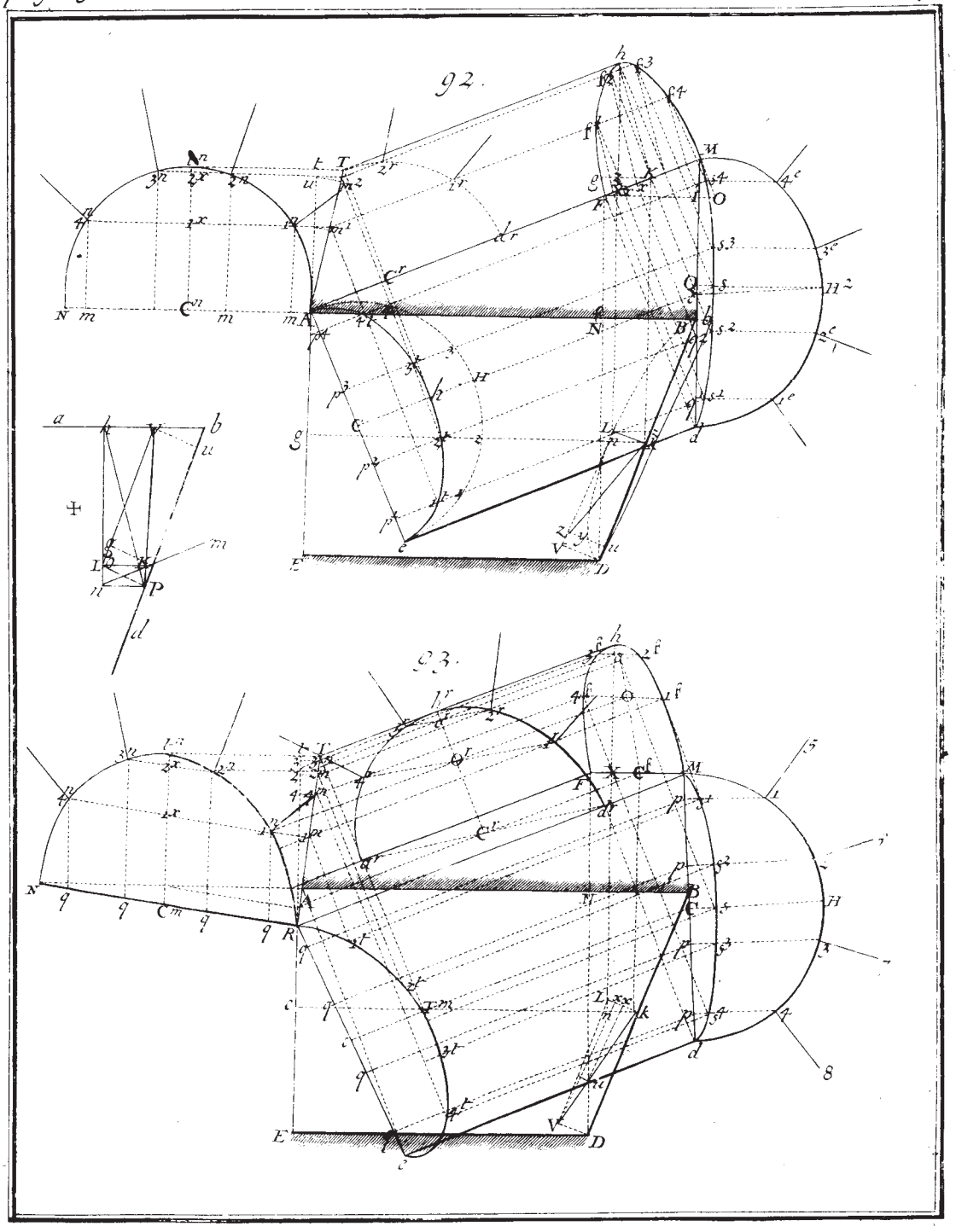
Uso del tratto per squadratura

Fig. 84

Si può come abbiamo già rimarcato, fare a meno di un certo piano o di certe proiezioni; ma oltre a quello che fanno presagire l'esecuzione dei pannelli d'intradosso nel loro sito naturale, è che questo tipo di proiezione inclinata può servire a tagliare la pietra per squadratura; se non ci si vuol servire dei pannelli si prenderà le lunghezze dei conci sul piano R As, le obliquità delle teste dagli angoli di rampa R C H, e i pannelli di testa, come per esempio, per il secondo concio 5 1 q 2 6, o il pannello o con i due angolo insieme 5 1 2, degli angoli in equilibrio, come q 2 6, tenendo le due direzioni parallele al piano di faccia.

page 191

Pl. 41.



SECONDO CASO DI DISCESE OBLIQUE, QUANDO LE FACCE SONO INCLINATE.

La differenza che la nuova obliquità dell'inclinazione delle facce causa tra questa volta e la discesa semplicemente obliqua consiste 1°. nel fatto che la proiezione della faccia della montata sul piano di rampa aumenta l'imbraca in pendio e che quella della faccia della discesa diminuisce l'avanzamento dello strapiombo. 2°. nel fatto che la proiezione verticale che diminuisce al profilo del pendio della faccia necessita di una preparazione per poterne ricavare le misure. Per il resto, è suscettibile degli stessi effetti che produce il cambiamento del centro primitivo.

Prina disposizione: ove si prende l'arco-retto come centro primitivo.

IN TERMINI DELL'ARTE.

DISCESA OBLIQUA INCLINATA, RAMPANTE DAVANTI E A DESTRA ED IN PENDIO DIETRO.

Sia (***Fig.92a***) il trapezio *ABED* il piano onzzontale della discesa, *AM* l'inclinazione della rampa e *BM* l'altezza maggiore.
Si formerà come alla linea della discesa obliqua, pagina 173, il piano della rampa *AMde*, il centro primitivo *AHe* con le proiezioni delle divisioni dei conci *1, 2, 3, 4* in p^1 q^1, p^2 q^2 prolungati e l'arco-retto C^rTd^r con le proiezioni verticali delle sue divisioni, come alla ***Fig. 89***, che taglieranno il profilo della faccia della montata *AT* ai punti m^1 m^2 *T*, per mezzo dei quali si traccerà la proiezione inclinata *Ahe*, come a tutte le montate precedenti.

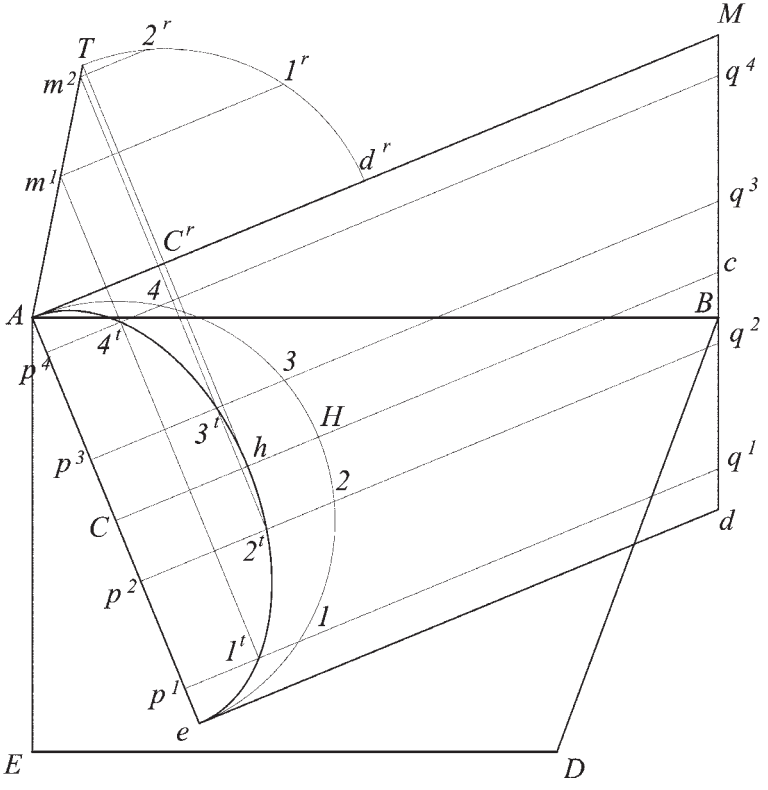


Fig. 92a : Costruzione del piano della volta in discesa obliqua, e di una delle sue

Fin qui la costruzione è stata la stessa della ***Fig. 89*** a parte il fatto che è stata presa l'inclinata *AT* al posto della verticale *Au* del profilo della faccia della montata.

Al momento, è necessario fare il profilo della faccia della discesa e cercare il valore del suo semidiametro inclinato *hK*, cosa che non risulta così agevole; è necessaria una preparazione.

Si farà in una ***Fig. +*** a parte, l'angolo acuto dell'obliquo orizzontale *abd* e per un punto P, preso a caso, una perpendicolare *PL*, al lato *bd*, sulla quale si costruirà al punto *P* l'angolo del pendio dato *LPV*; si tirerà quindi *Pn* parallela a *ba* e per il punto *L* una perpendicolare *hL* alla stessa *ab* che taglierà *Pn* al punto *n***.** Si farà *nh* uguale a *PV*[1] e si tirerà *hP***;** infine si farà al punto *n* su *Pn* l'angolo *Pnm***,** il cui lato *nm* taglierà *Ph* al punto *K*.

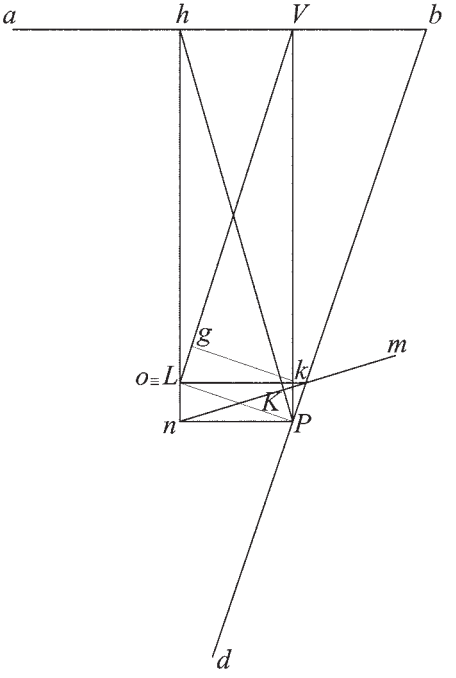


Fig. + : Figura supplementare utile per trovare il semidiametro dell'arco di faccia inclinata.

Si dividerà quindi, nella ***Fig. 92b***, *FM* in due parti uguali in *K* e si porterà la lunghezza *Kn* della preparazione di *K* in *X*, ove passerà *Xh*

[1] Nel testo originale è scritto "*LV*".

perpendicolare ad *AB*, la quale taglierà *Th* al punto *h* che si cerca, la linea *hK* sarà il profilo del diametro della discesa che è ancora ridotto dalla proiezione; questo perché bisogna ancora cercare il valore mediante la già vista preparazione a parte nella ***Fig. +***, che porta *Ko* parallela a *nP* e dopo aver portato *no* in *Lg*, si tirerà *gk* parallela a *LP*, che taglierà *VP* in *k*, la lunghezza *Vk* sarà il diametro del centro della faccia coniugato al diametro *Md*; non si tratta più di trovare gli angoli della loro coniugazione per descrivere la semi-ellisse di faccia di discesa inclinata.

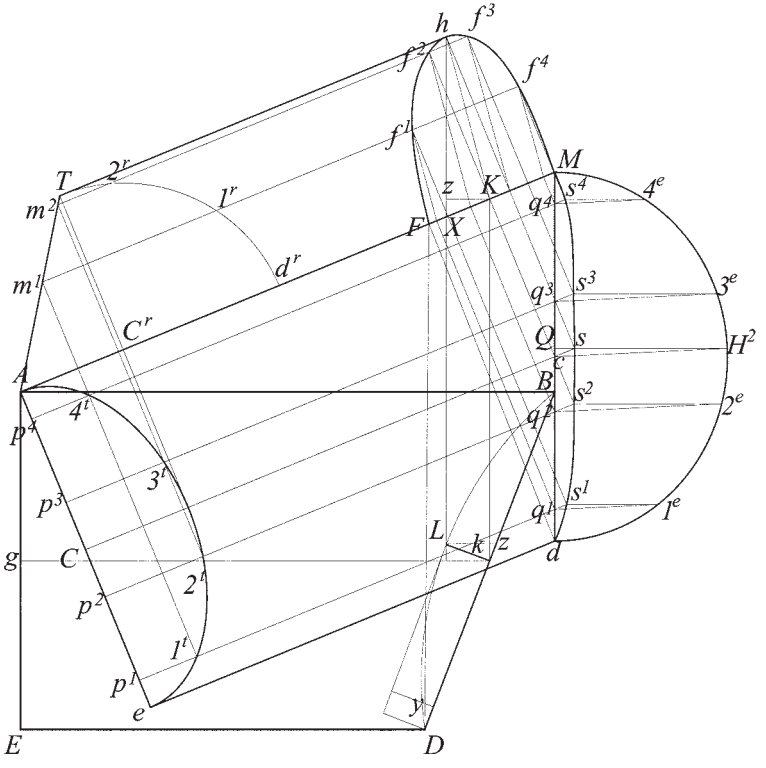


Fig. 92b. Rappresentazione del profilo della discesa inclinata e della pianta della volta con la faccia inclinato con le sue rispettive suddivisioni in conci (visuale sia in pianta che in alzato).

Il punto *A* del profilo si tirerà una perpendicolare alla rampa *AM* che si prolungherà fino all'incontro di *Cs* in *s*, ove si tirerà la linea *QsH²* perpendicolare a *Md*; poi, dal punto *c*, centro di *Md* come centro e come raggio *ky*, si traccerà un arco che taglierà *QH²* ai punto *H²*, l'angolo *dcH²* sarà quello che si cerca, per mezzo del quale e dei diametri dati si descriverà (attraverso il Probl. 8 del 2°. Lib.) la semi-ellisse *MH²d*, che sarà il centro della faccia della discesa inclinata.

Per avere al contorno di questo centro le divisioni dei conci, provenienti da quelli del centro primitivo dell'arco-retto, bisogna tirare per i punti q^1 q^2 delle parallele a cH^2, che taglieranno l'arco di faccia ai punti l^e, 2^e, 3^e, 4^e che si cercano, o tracciare una semi-ellisse *Msd* con i diametri coniugati *Md* e due volte *cs*, creando tra loro l'angolo *dcs* ; tuttavia, poiché le semi-ellissi molto ristrette sono soggette a delle imperfezioni nella esecuzione, è meglio cercare ogni avanzamento mediante il profilo. Infatti, se l'angolo dell'inclinazione è uguale nel protilo a quello della rampa, questa semi-ellisse diventa infinitamente stretta tanto che si confonde con il diametro *Md*.

Quindi se questo stesso angolo è piu aperto, al posto degli avanzamenti a strapiombo, la semi-ellisse di proiezione sulla rampa passerà all'interno del diametro *Md* diventando così proiezione dell'inclinazione.

Per tutti i punti *q* ove le proiezioni delle giunture di base tagliano il diametro di faccia della discesa *Md*, si tracceranno le perpendicolari alla rampa *AM* che la taglieranno ai punti *X*, *x x x*, per i quali si tracceranno delle parallele a ***Kh,*** che taglieranno i profili delle giunture di base provenienti dai punti dell'arco-retto 1^r 2^r ai punti f^1, f^2, f^3, f^4 che si cercano, per i quali tirando le perpendicolari alla rampa fino alle proiezioni delle giunture corrispondenti, si ricaveranno punti s^1, s^2, s^3, s^4, per i quali si traccerà la semi-ellisse di strapiombo *Msd*.

Se non si hanno le divisioni del centro della faccia della discesa, che sono state trovate per mezzo delle ordinate, come abbiamo appena detto, si possono trovare tracciando per tutti i punti di avanzamento 1^s, 2^s, 3^s, 4^s delle perpendicolari al diametro *Md*, che daranno gli stessi punti l^e, 2^e, 3^e, 4^e; infine, tirando dal centro *c* le giunture di testa per tutti questi punti, si otterranno i pannelli di faccia della discesa.

I pannelli di base e di intradosso si formeranno, come per tutte le altre discese, mediante le lunghezze delle proiezioni delle giunture dì base e di testa.

Le sagome di un'apertura di un angolo di base e di intradosso, che stanno ad indicare l'angolo tra due superfici che si incontrano, verranno presi anche sull'arco-retto.

L'innalzamento della faccia della montata Nt^nA, ***Fig. 92c***, si effettuerà mediante le divisioni della linea di profilo di faccia inclinato *AT*, prendendo $C^nt^n = ATm1^n = Am^1$, $M2^n = Am^2$, ecc.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA.
Vi sono due cose in più da trovare nella riproduzione di questa specie di volta rispetto alle discese semplicemente oblique, come erano le precedenti.

In primo luogo, l'inclinazione della faccia inclinata, che il profilo non offre esattamente, poiché la fornisce seguendo la direzione della volta, essa deve essere misurata, come abbiamo detto al 3°. Libro, pag. 369, perpendicolarmente alla comune intersezione della faccia e del piano verticale che passa per il diametro rampante *Md*, cosa che rende il pendio *LkV* più acuto dell'angolo *gKh* del profilo; l'altezza. *zh* è comune e i suoi angoli sono tra loro come *nk* sta a *Lk* (mediante la costruzione di ***Fig. +***), cioè come la base *nk* del pendio, seguendo la direzione della volta, é alla base *Lk* dello stesso pendio, preso su una linea orizzontale, perpendicolarmente al diametro *BD* nella sua proiezione.

E' chiaro inoltre che il triangolo *Lnk* che ha i suoi tre lati perpendicolari ai

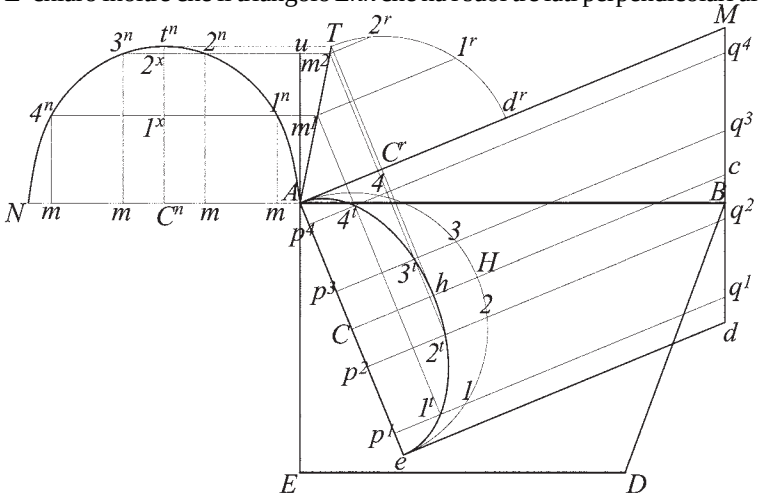


Fig. 92c : Innalzamento della faccia della montata, effettuato mediante le divisioni del profilo di faccia inclinato, rivoltamento in vera grandezza.

tre lati del triangolo dell' obliquo *NBD*, e simile ad esso; di conseguenza, per avere la posizione della base *Lk*, se si crea l'angolo del pendio fuori dalla posizione ove è. stato messo, si deve solo aggiungere all'angolo retto *VLk* l'angolo *NDB*, oppure creare subito questo angolo uguale a *EDB*.

Rimane da dimostrare che anche l'angolo dei diametri coniugati dell'arco della faccia della discesa rampante è stato trovato bene.

E' evidente che, mediante la costruzione e le regole della proiezione inclinata, il punto *s* rappresenta il punto *h* del profilo; poiché *hs* è stata fatta perpendicolare a *Cs*, centro del piano di rampa. E' visibile inoltre, per la stessa regola di proiezione, che il punto *Q* sul diametro *Md* rappresenta i punti *s* e H^2 e che la sua rappresentazione può essere in tutti i punti della linea QH^2; come al punto *s*, per il quale essa passa; ma un diametro qualunque deve passare per il centro della sezione che è in *c*; dunque esso deve passare in cH^2; di conseguenza, l'angolo dcH^2 o il suo supplemento McH^2 è quello della coniugazione del semi-diametro cH^2 rispetto al diametro *Md*, quello che bisognava trovare in secondo luogo.

OSSERVAZIONE SULLA RAPPRESENTAZIONE DELLE DISCESE OBLIQUE, DI FACCIA RAMPANTE.

Vi è una osservazione da fare in questa rappresentazione che è sfùggita al P. Deran[2], non parlo di M. de la Rue, in quanto questi ha taciuto sul fatto che l'angolo dell'obliquo *ABD* o *EDB* non deve essere preso sul piano orizzontale senza una correzione che merita attenzione.

Si traccerà per il punto *F* dell'imposta inferiore del profilo, una linea *FO* parallela ad *AB* e per il punto *M* una linea *MO* parallela a *hk* che incontrerà *FO* al punto *O*; la linea *iO*, che supera l'appiombo del punto *M*, sarà la lunghezza che è necessario aggiungere al di fuori del piedritto *AB* sul suo allineamento, portandola da *B* a *b* , l'angolo *AbD* sarà quello dell'obliquo riformato al livello dell'imposta inferiore; se la base *AB* non può essere allungata, sarà necessario portare questa lunghezza *iO* verso l'interno, per diminuire l'obliquità del valore necessario per collegare mediante il pendio l'altezza dell'imposta superiore *M* dell'arco rampante.

La ragione è notevole e visibile in ***Fig. 92d*** se si fa attenzione al fatto che: l'inclinazione deve spostare il punto *M* all'interno del punto *B*, sul quale era a strapiombo; oppure come la soglia della baye (?) della discesa deve essere al livello tra i piedritti della volta. Ne consegue necessariarncnte che uno dei piedritti risulta più alto dell'altro dell'altezza *iM* a strapiombo, della distanza *MO* misurata in discesa; di conseguenza, sarà più avanzato in *O* che in *M*; poiché l'inclinazione nasconde il piedritto all'interno.

SECONDA DISPOSIZIONE DELLA DISCESA OBLIQUA INCLINATA, OVE IL CENTRO PRIMITIVO VIENE PRESO ALL'ARCO DI FACCIA SU UN DIAMETRO ORIZZONTALE.

IN TERMINI DELL'ARTE.

DISCESA OBLIQUA E INCLINATA, DI CUI L'ARCO DI FACCIA È DI LIVELLO MEDIANTE LE SUE IMPOSTE.

Questa rappresentazione è talmente simile a quella della seconda disposizione della discesa obliqua senza inclinazione che si può asserire che si tratta di un avanzamento di poco maggiore o minore dello strapiombo e dello spostamento all'indietro del pendio sul piano di rampa; poichè l'inclinazione della faccia di discesa diminuisce l'avanzamento dello strapiombo, e l'inclinazione della faccia di montata aumenta lo spostamento già prodotto dalla faccia di montata sul piano prima di essere inclinato.

E' necessario osservare, come si vede nella ***Fig. 93a***, che se l'inclinazione della faccia di discesa, preso in profilo AC^f, crea un angolo retto con la direzione della rampa *RM* o AC^f può accadere che, sebbene il piano di faccia della discesa sia obliquo rispetto a tale direzione, l'avanzamento considerato come strapiombo sul piano di rampa, sparisca e la proiezione

[2] Riferimento all'opera citata, in cui l'autore osserva ed indica un sistema alternativo, un miglioramento del sistema ideato da Deran, con cui poter facilmente prendere l'angolo obliquo in questione senza commettere errori.

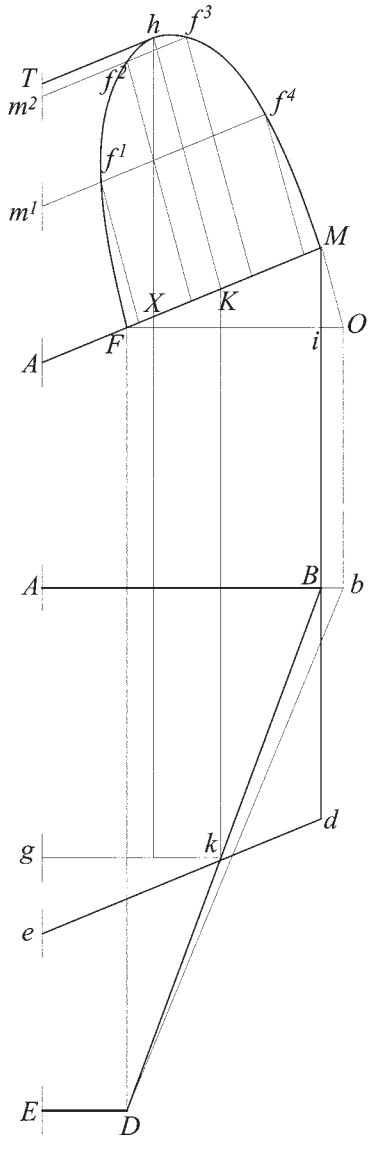


Fig. 92d : Particolare ingrandito dell'accorgimento geometrico di Frezier, su come deve essere preso l'angolo acuto dell'inclinazione di una delle facce della volta; *iO* è la lunghezza necessaria da aggiungere.

della faccia di discesa su questo piano si confonda allora con la linea retta *Md*; quindi non vi è niente di più in questa descrizione di quella di cui noi parliamo, poichè l'inclinazione delle facce scarpate di cui è necessario trovare la proiezione sul piano di rampa come si è fatto nella precedente, in questa è l'inverso.

Sul centro *k* delta proiezione orizzontale della faccia *BD*, avendo fatto la perpendicolare *kL*, si farà l'angolo *LkV* uguale a quello dell'inclinazione

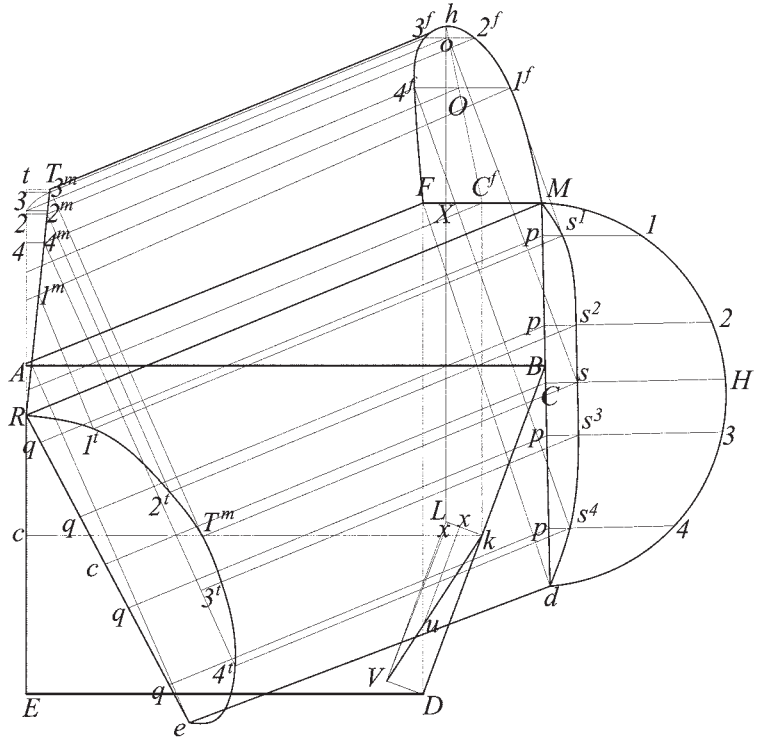


Fig. 92e : Continuazione della costruzione precedente, per la determinazione della rampa; *MO* ne cadrà dopo l'avanzamento della proiezione della faccia oltre ab punto di rampa sparisca cóincidendo con la linea retta *Md*.

tagl, poi si porterà su *kV* la lunghezza del semi-diametro *CH* del centro primitivo, *MHd*, che tornerà il punto *V*, per il quale si traccerà *VL* perpendicolare a *Lk* che darà il punto *L*, per il quale si traccerà *Lh* perpendicolare a *AB* prolungata indefinitamente, finchè incontra la linea *MF* al punto *X*. Si porterà al di sopra di questo punto sulla stessa linea prolungata l'altezza *LV* in *Xh***.**

Si traccerà quindi per *k* la linea kC^f, che taglierà la proiezione verticale del diametro orizzontale del centro primitivo in C^f; per il quale e per il punto *h* si tirerà C^fh, che sarà il profilo del semi-diametro *CH*.

Per il punto *h* si tirerà *hT* parallela alla rampa flno a che essa incontra profilo *AT* dell'inclinazione della faccia di montata, il trapezio $ATHC^f$ rappresenterà il piano della sezione della discesa a strapiombo mediante la chiave, sul quale si troveranno tutte le altezze delle giunture di base come segue.

Si tireranno per i punti *pp* delle parallele a *dF*, che taglieranno *FM* nei punti *f* e *f*, per i quali si tracceranno delle parallele a C^fh**.** Quindi, avendo portato le altezze delle linee d'imposta p^1, p^2 in *ku kV*, si tracceranno per i punti *u* e *V* delle parallele che taglieranno *LK* nei punti *x* e *x*, per i quali si tracceranno delle parallele a *Lh*, che taglieranno C^fh ai punti *O* e *o*. Infine, tirando per questi punti delle parallele a C^fh si otterranno in profilo i punti di divisione dell'arco di faccia 1^f, 2^f, 3^f, 4^f, che determinano gli avanzamenti di questi punti sul piano dì rampa; quindi, per questi

stessi punti si tracciano delle parallele a *hT*, esse taglieranno il pendio di montata *AT* ai punti 1^m, 2^m, 3^m, 4^m che determineranno gli spostamenti delle divisioni delta. faccia di montata rispetto al piano di rampa.

Si disporranno questi avanzamenti e spostamenti all'indietro su questo piano di rampa *RMde* al loro posto, per evitare la confusione delle proiezioni delle giunture di base nel profilo, tirando delle parallele a *Fd* per tutti i punti 1^f, 2^f, 3^f, 4^f, fino ad incontrare le perpendicolari p^1, p^2, al diametro del centro primitivo *MHd*, che esse incontreranno ai punti s^1, s^2, s^3, s^4, per i quali si traccerà la semi-ellisse *Msd.*

Per questi ultimi punti s^1 s^2 s^3 s^4 si tracceranno delle parallele alla rampa *RM* che incontreranno le perpendicolari a questa rampa provenienti dai punti 1^m, 2^m, ecc. nei punti 1^t, 2^t [3], ecc. che forniranno il contorno delta semi-ellisse RT^me; che determina lo spostamento all'indietro dell'inclinazione della montata.

L'arco-retto di questa rappresentazione si formerà precisamente nello stesso modo indicato alla pagina 181 per le discese oblique senza inclinazione della seconda disposizione.

L'arco di faccia di montata si traccerà nello stesso modo con la sola differenza che le linee di livello tirate dal profilo *Rt* di questa faccia, prenderanno origine sui punti *t, 3, 2, 4, 1,* trovati su *Rt* e mediante gli archi di cerchio tracciati dal punto *R* come centro e come raggi le lunghezze

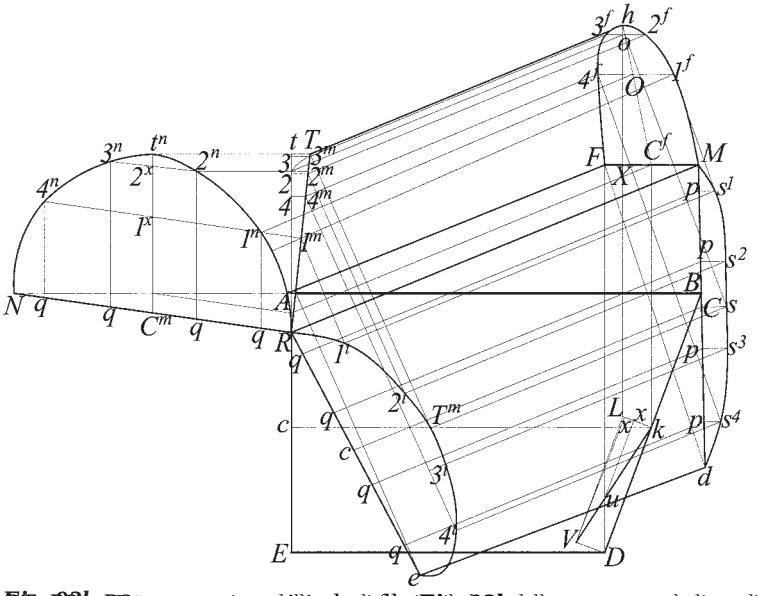


Fig. 93b. 2ª rappresentazione dell'arco di faccia di montata della montata con le linee di livello trovate mediante piccoli archi di cerchio riportati su *Rt* con le diverse lunghezze dal profilo *RT*.

Fig. 93b. R3, R2, ecc. come si vede nella ***Fig. 93b.***

Non aggiungiamo niente qui per quanto riguarda la formazione degli angoli, lo sviluppo, la formazione dei pannelli e l'applicazione della rappresentazione sulla pietra; in quanto il modo è lo stesso utilizzato per tutte le altre discese.

Questa grande conformità ci dispensa anche da una ampia spiegazione, sarà sufficiente rendere ragione di quello che vi è di particolare per quanto riguarda il pendio.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA.
Nella disposizione precedente avevamo molte cose da trovare per la formazione dell'arco di faccia della discesa, il semi-diametro coniugato a quello che passa per le imposte e l'angolo che esso forma con lo stesso e l'inclinazione del pendio; qui, ove viene dato l'arco di faccia della discesa, basta cercare l'avanzamento maggiore o minore che offre il suo contorno, al di là o al di qua del suo diametro di livello nella sua proiezione, inclinata sul piano di rampa; e poiché l'inclinazione del pendio si misura sempre mediante una perpendicolare al diametro del livello della faccia di discesa, si è creato un profilo del pendio perpendicolarmente a questo diametro, come alla disposizione precedente, per trovare mediante ciò, le altezze delle divisioni dei conci che erano stati dati nella disposizione precedente mediante l'arco-retto assunto come centro primitivo, considerando che questa rappresentazione è l'inverso della precedente.

Abbiamo previsto in tutte le rappresentazioni delle discese solo una faccia obliqua che è quella della discesa; in quanto se la faccia della montata fosse anch'essa obliqua, si ricadrebbe nella stessa rappresentazione, ove non vi sarebbe che un po' più o un po' meno obliquità in senso contrario, di modo che se le oblique fossero uguali, i pannelli di una delle facce servirebbero per l'altra, senza fare altro che capovolgerli per avere un'inclinazione della montata, cosa che la discesa offre a strapiombo riguardo all'asse della volta.

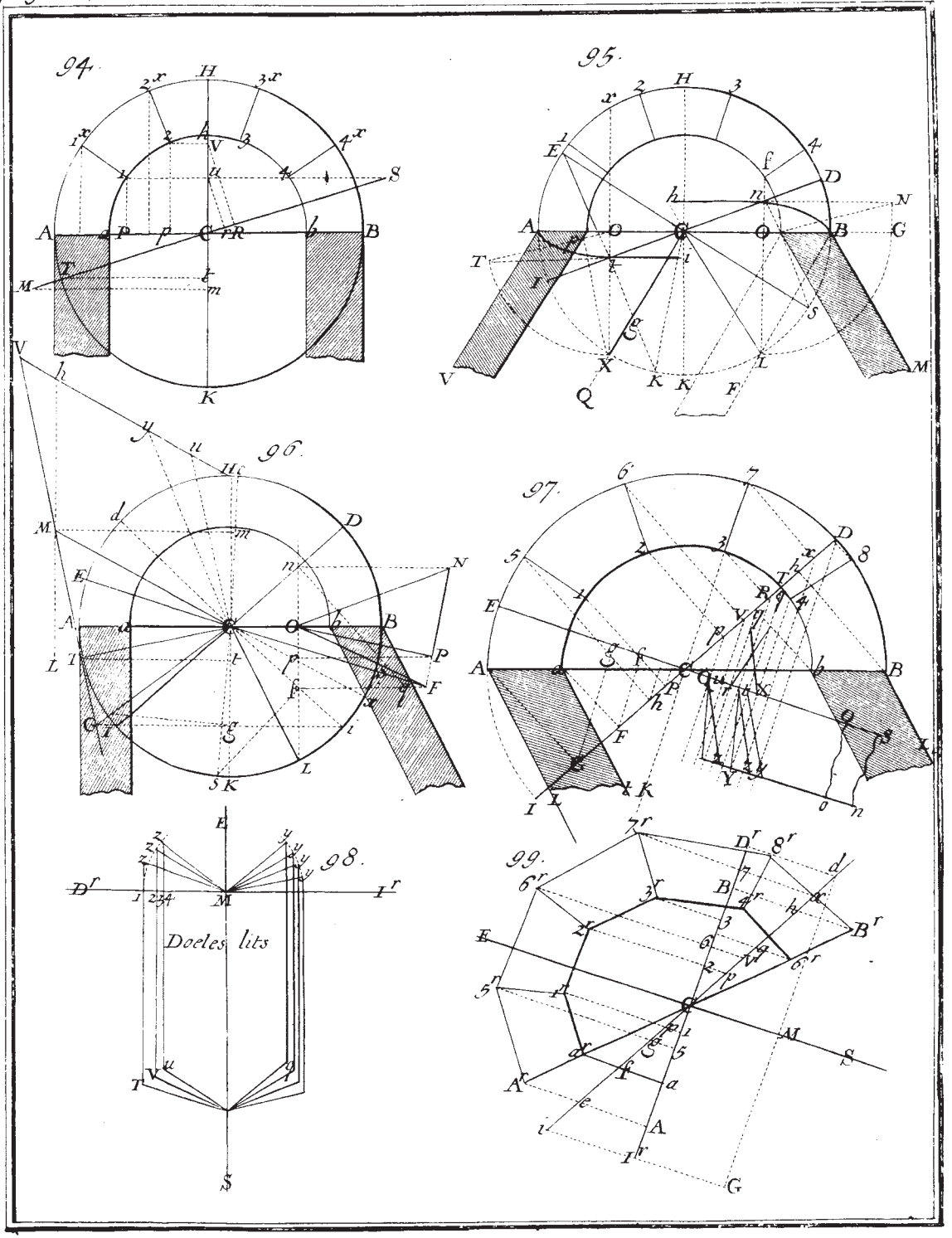
OSSERVAZIONE.
E' in particolare nelle rappresentazioni delle discese oblique e inclinate che si ha l'occasione di fare uso dei Problemi del secondo Libro, per la descrizione delle ellissi attraverso i rispettivi diametri coniugati; poiché tre sezioni della stessa volta, l'arco-retto, l'arco di faccia della discesa e quello della montata, oltre alle relative descrizioni in tutta la loro estensione, devono ancora essere rappresentate mediante proiezioni orizzontali, verticali e inclinate, cosa che può produrre nove semi-ellissi diverse, o almeno necessariamente cinque, ivi compreso un semi-cerchio, se ne troviamo uno.

Ci si possono risparmiare quasi tutte queste descrizioni, con il metodo di Desargues [4], di cui parleremo; ma, a mio avviso, non si potrebbero rappresentare in troppi modi i centri delle volte; perché niente chiarisce di più lo spirito nell'apparato e niente lo conduce con più sicurezza.

[3] Nel testo originale è scritto "1^1, 2^2, *ecc.*".
[4] Riferimento all'opera citata dall'autore riguardo al metodo ideato da Desargues per la rappresentazione delle ellissi generate dalle discese oblique ed inclinate.

page 207

Pl. 42.



Metodo generale.

PER OGNI SORTA DI VOLTA A BOTTE RETTE OD OBLIQUE, TRACCIATE DA DEFARGUES.

Abraham Bosse, abile incisore, curioso più delle pratiche derivate dalla geometria che d'istruirsi con la conoscenza dei loro principi, come egli stesso sembra riconoscere, ha pubblicato nel 1643 un libro sul taglio delle pietre, intitolato, Pratique du Trait à preuves de M.Defargues, che ha scritto con uno stile molto prolisso, con dei termini nuovi, tra cui alcuni sono così impropri che gli artisti, e anche qualche autore, lo hanno visto come uno sproloquio inintelligibile; è così che ne parla M. de la Rue, nella prefazione: Sembra, egli dice, che Defargues, di cui l'incisore Bosse ha messo le opere in luce, abbia avuto voglia di derubare agli altri la scienza del taglio delle pietre, dagli stessi principi che egli stesso dà; egli ha introdotto tante novità nei suoi termini , e singolarità nelle sue trattazioni, e a questo aggiunge che Jacques Curabelle ha rilevato esattamente tutti gli errori. Non ho visto questa critica, e di conseguenza non posso giudicare la sua esattezza; avanzerò tuttavia, senza temerlo, che il metodo di Defargues non è completamente da rigettare. Convengo che ci siano delle difficoltà, ma che esse altro non provengano che da una spiegazione sbagliata del principio sul quale è fondata, e anche un po' per la novità dei termini, sto per aggiungere ciò che manca al libro di Bosse, che non poteva spiegare ciò che egli stesso non capiva; poiché il suo maestro non gli diceva tutto, e che egli si affidava a lui per la sua precisione, come dice nella sua introduzione.

Spiegazione e sommario, del metodo di Defargues.

È accertato, come ho fatto vedere in tutto questo capitolo, che le differenze delle volte a botte non sono altro che cambiamenti di posizione, o sezioni di un corpo cilindrico, che non altera la natura del cilindro, né quella della sezione. Defargues, avendo avvertito questa verità ha ridotto tutte le trattazioni della formazione delle volte a botte, rette, sbieche, strombate, in pendenza, ad un unico problema, che è quello di ricercare l'angolo che forma l'asse del cilindro con un diametro della base, il quale sta nella sezione di un piano passante per l'asse, perpendicolarmente a quello della base, cioè, a cercare l'angolo della più grande inclinazione dell'asse della volta a botte con il piano della superficie, nel quale c'è una linea che egli chiama Sousessieu, nome che provoca una falsa idea della cosa, che sarebbe stato più espressivo chiamare il diametro della maggiore inclinazione. Non so se egli abbia voluto creare mistero, o se ha citato questo nome per l'assonanza con uno simile, come quello di soutangente; ne dà altri altrettanto impropri alle perpendicolari a queste due linee; quella che è in asse è chiamata traversessieu, e quella sotto l'asse contressieu. La prima dovrebbe chiamarsi il diametro dell'arco retto, e l'altra il diametro perpendicolare all'asse obliquo.
Tutto il segreto della trattazione di Defargues consiste quindi in 1° Trovare l'angolo che l'asse, o essieu, della volta a botte forma con il diametro della sua superficie, che nei confronti di questo è più inclinato di tutte le altre che si possono tracciare su questa superficie, o parlando nel suo linguaggio, l'angolo dell'essieu e della sousessieu, per ottenere l'inclinazione più grande della volta a botte alla sua superficie.
2° Fare la proiezione delle suddivisioni dell'arco di prospetto, diviso in conci sul diametro di maggiore inclinazione (sousessieu) in qualunque disposizione sia, orizzontale, a piombo o in pendenza, da delle perpendicolari a questo diametro, che queste divideranno in parti più strette.
3° Condurre per ciascuna delle suddivisioni di questo diametro altre linee perpendicolari all'asse, per avere le altezze delle cadenti all'arco retto sull'essieu e la proiezione di questo arco su uno dei suoi assi, e per mezzo di questo pervenire alla sua formazione.
4° Riportare negli intervalli di queste ultime linee perpendicolari all'asse, le lunghezze dei giunti di testa o delle corde delle doeles [1] prese sull'arco di prospetto, dalla linea corrispondente o issue di un giunto, a quella che corrisponde a quella di seguito, per avere l'angolo del joint de lit [2] con la testa della doele piatta, infine portare i giunti dell'arco di prospetto tra le linee provenienti dai giunti di doele e di estradosso, per avere gli angoli che formano i joins de lit della doele con i giunti di testa dell'arco di prospetto.
Ecco in due parole tutto il mistero di questo metodo messo in luce, e i principi della sua pratica rivelati e sbrogliati, come lo si vedrà più chiaramente nell'esempio qui subito dopo.

1°LA VOLTA A BOTTE RETTA.

Il metodo di Defargues consiste nel cercare l'angolo della maggiore inclinazione di una volta a botte, non ha niente di particolare che non abbia il metodo ordinario quando la volta a botte è retta; perché tutti i diametri del prospetto possono essere presi in particolare per sousessieu, e tutte le perpendicolari a ciascuno di questi diametri per essieu, e dato che la linea che egli chiama traversessieu, è il diametro dell'arco retto, gli è perpendicolare, ne consegue che la traversessieu si confonde allora con l'essieu, e la linea che egli chiama contressieu, che non serve a gran chè nel metodo, essendo perpendicolare alla sousessieu, si confonde in sezione con l'essieu.
Si deve sottolineare che a parte il caso della volta a botte retta, mai la traversessieu si confonde con l'essieu nelle oblique, non essendo nel piano della superficie, cioè, della base del cilindro, se non in certe circostanze l'essieu e la contressieu.
La dimostrazione di ciò che propongo è chiara dalla 4ª del II° libro di Euclide, che dice, che se una linea è perpendicolare ad altre due che si intersecano, questa lo è a tutte quelle che appartengono allo stesso piano, e s'incontrano nello stesso punto; a questo punto la volta a botte, essendo retta, il suo asse è perpendicolare alla linea orizzontale, e alla ortogonale alla superficie; quindi è perpendicolare a tutti i suoi diametri; di conseguenza tutti possono rappresentare la sousessieu nei confronti di una linea che è loro perpendicolare, passa per il centro, o per meglio dire, in questo caso non c'è nessuna sousessieu.

[1] Doele: così si chiama il paramento interno di una volta o di un concio incavato. La superficie piana che passa per la corda dell'arco di una doele si chiama doele plate, è una fase di preparazione per la definizione di una doele concava.
[2] Joints de lit: linea di divisione dei conci, divisioni longitudinali della doele, per indicare la superficie inclinata di una pietra inserita in una volta si dice invece lit en joins.

Corollario.

Da qui ne consegue che non interessa che questa faccia sia circolare o ellittica; perché la più o meno lunghezza dei lati di un angolo non cambia niente alla sua apertura; così l'angolo che l'essieu forma con un diametro non sarà alterato, se capita che sia di diversa lunghezza dal diametro, così come per le facce ellittiche quando sono disuguali; cosa che va sottolineata in proposito è che nei casi di obliquità delle volte a botte, sulle loro superfici non è necessario fare attenzione alla curva dei loro archi sul prospetto.

2°

Sulle volte a botte la cui direzione orizzontale sia retta, cioè, perpendicolare al diametro delle imposte di prospetto, o alla proiezione orizzontale, ma il piano di prospetto è obliquo al suo asse.
1° A scarpa, 2° Sporgente, 3° In pendenza, 4° In salita, 5° In pendenza retta e a scarpa, o sporgente, 6° In salita retta e a scarpa, o sporgente.
Quando l'asse o essieu di una volta a botte è perpendicolare al diametro orizzontale del prospetto, benché sia inclinato al semi diametro della metà che passa per la chiave di volta, il metodo di Defargues, considerandolo bene, non è molto diverso da quello di altri autori del taglio di pietre; perché a quel punto la maggiore inclinazione è nell'angolo che questo semi diametro forma con l'asse della volta a botte, il quale si trova in sezione, che si usa fare seguendo le loro regole, ma che non posizioniamo sempre nel solito posto; così in tutti questi casi in cui la linea intermedia CH rappresenta, o può rappresentare, la proiezione verticale del piano verticale passante per l'asse, questa sarà presa come sousessieu, e la proiezione dell'essieu nei suoi confronti si troverà di profilo.
Sia (Fig.94) l'arco AHB la superficie di una volta a botte orizzontale, la quale deve essere a scarpa. Dopo aver prolungato la linea intermedia HC verso K, si farà il profilo di questa scarpa al di sotto del diametro delle imposte AB, come in KCT, o soltanto il complementare a scarpa, che è la sua inclinazione con un piano verticale, qui rappresentata da AB, conoscendo l'angolo ACT, la linea TCS rappresenterà la posizione dell'asse nei confronti del diametro HK, che è la sousessieu. È visibile che si sarebbe trovato la stessa posizione prendendo la sezione sopra ad AB; ma qui si considera solo il semi diametro CT, che sta sotto AC, e ne diremo il perché in seguito.
2° Se, alla stessa pendenza, il prospetto fosse in sporgenza, al posto di questo angolo bisognerebbe prendere il suo supplementare a due rette TCH o KCS.
3° Se la volta a botte è in pendenza retta, al posto di fare l'angolo in sezione sotto al diametro orizzontale AB, lo si farà al di sopra, come SCB.
4° Se al posto della pendenza si considera la stessa inclinazione in salita, si farà la sua sezione sotto come in ACM.
5° Supponendo sempre l'essieu perpendicolare al diametro AB, ma inclinato all'orizzonte in pendenza, e che più del caso precedente sia inclinato a scarpa; dopo aver fatto gli angoli della scarpa e della pendenza di conseguenza, come si è appena detto, l'uno sopra, l'altro sotto l'orizzontale AB, si prenderà sul lato della scarpa CT un punto T a piacere, per il quale condurremo la perpendicolare TM, la linea MC rappresenterà l'asse, e l'angolo MCH quello dell'essieu con la sousessieu HK, cioè quello della maggiore inclinazione.

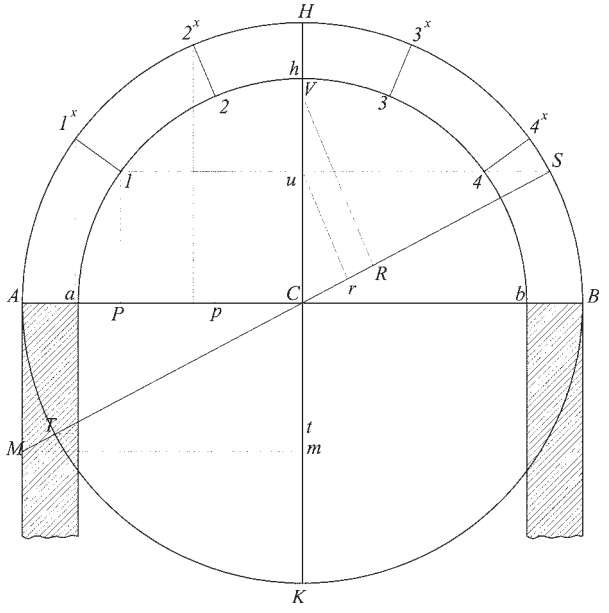


Fig.94 volta a botte orizzontale, a scarpa.

6° Se nelle stesse circostanze si considera la pendenza dell'essieu, come una salita rispetto al prospetto (Fig. 96), si farà l'angolo della pendenza in ACG, e tracciando dal punto T sulla scarpa CT la perpendicolare TG, la linea GC rappresenterà la posizione dell'asse o essieu, rispetto alla sousessieu HK, che non cambia, e l'angolo GCK sarà quello della maggior inclinazione dell'asse del cilindro sulla base.
Potremmo ancora aggiungere qui i casi delle sporgenti a questi ultimi due, in cui abbiamo supposto delle inclinazioni a scarpa, arrivando a otto casi, quando si ha le volte a botte con direzione perpendicolare al diametro orizzontale in prospetto.
In effetti ci sono otto combinazioni di obliquità: due inclinazioni opposte di prospetto rispetto ad un asse orizzontale, l'una nell'altra a scarpa e sporgenti, due dell'asse rispetto ad una faccia verticale, in salita ed in discesa, due di prospetto a scarpa rispetto ad un asse inclinato, e due di prospetto sporgenti, rispetto ad un asse nella stessa posizione, che fanno otto casi, in cui la sousessieu è sempre in mezzo al prospetto in HK, e il cui angolo con l'essieu si trova nella sezione ordinaria.

Spiegazione dimostrativa.

Principalmente, per la volta a botte retta a scarpa, se si suppone la linea KC della sezione KCT, nel piano orizzontale, e se si ruota questo angolo intorno al suo lato KC, affinché questo sia in una posizione in sporgenza, è evidente, dalla costruzione, che il lato TC rappresenterà esattamente l'inclinazione della superficie, come si può rappresentarlo facendo ruotare il semicerchio AHB intorno al suo diametro orizzontale AB, finché questo non si sia disteso sulla linea TC, che in questa supposizione è in elevazione; a questo punto poiché l'angolo HCS è uguale a TCK, se si suppone anche la linea CS nel piano orizzontale passante per AB, ruotando poi l'angola HCS perpendicolarmente a questo piano AB, questa linea CS sarà allora rappresentata dalla linea Cu, come TC lo è da tC, e la

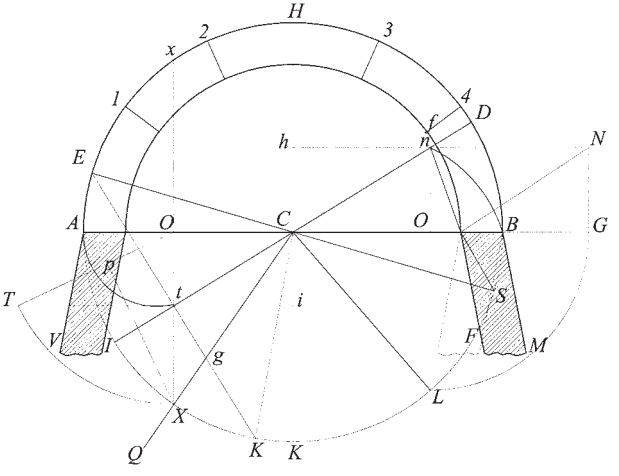
linea Cu tracciata da CK, che sembra innalzato in una posizione verticale sarà inclinata a sporgere, come TC rispetto a CK lo è a scarpa.
In secondo luogo, se al posto di supporre la stessa CH distesa a scarpa o a sporgenza, la si suppone a piombo, è visibile che l'angolo HCS rimane lo stesso, la linea SC rappresenterà un'inclinazione in salita; in modo che supponendo questa linea MS ruotare sul suo centro C, finché questa non sarà perpendicolare al diametro AB, il punto M cadrà su m, e il punto S su u, ed allora l'intera linea MS sarà rappresentata dall'altezza mu, che è la differenza orizzontale tra i punti M e S, e le perpendicolari Mm, Su, saranno i seni retti dell'angolo Scu, o MCm, che esprime la maggior inclinazione dell'asse sulla base del cilindro, cioè, dell'essieu sul piano della superficie AHB.
In terzo luogo, se la volta a botte è in pendenza e a scarpa, come la si è supposta in alto a sinistra della Fig.96, sarà facile riconoscere che la scarpa diminuisce l'inclinazione dell'essieu con la superficie in pendenza; di conseguenza ciò rende l'angolo di sezione meno ottuso, e al contrario più acuto con la superficie in salita; è per questo che nella costruzione l'angolo della scarpa ACT si aggiunge a quello della pendenza MCA, e che al contrario è ritagliato da quello in salita GCA, che darà l'angolo della pendenza MCH più grande di GCK, o, che è la stessa cosa, iCK = al suo opposto al vertice HCd più acuto di HCM della stessa quantità dell'angolo dCM uguale a quello della scarpa ACT.
Per convincersene, si tracci HV parallela a MC, e le linee VT e uC siano supposte a piombo e perpendicolari a TC, che prendiamo per orizzontali. Siano in più gli angoli VMh e uCH uguali a quelli della scarpa, è visibile che la linea hM rappresenta la scarpa della superficie in pendenza rispetto all'ortogonale VM, e uC la scarpa della superficie in salita rispetto ad un'ortogonale HC, o una orizzontale CB; a quel punto si riconoscerà che l'angolo della scarpa VMh diminuisce l'inclinazione dell'asse CM sulla superficie MV, e che aumenta quella del solito asse rispetto alla superficie Cu. Cioè, rende il loro angolo Mcu più acuto, e il suo supplementare uCx, che è l'angolo di salita, più ottuso.
Qui dobbiamo sottolineare che la line intermadia HC ha sempre una posizione ortogonale apparentemente negli alzati in cui AB è orizzontale; perché essendo la proiezione del piano verticale perpendicolare ad AB, questa si confonde con tutte le linee che si possono tracciare in questo piano, come è quella della scarpa; così siamo obbligati a supporre un'altra linea verticale Cu, per esprimere l'angolo della scarpa uCH, e di conseguenza a supporre un'altra orizzontale CT, che è a questo perpendicolare, alla quale tracciando la perpendicolare TM o TV, ne abbiamo una parallela a Cu, che è di conseguenza verticale davanti alla superficie superiore, come Cu lo è per quella inferiore; in questo caso, se senza cambiare la base orizzontale TC si volesse esprimere una salita della superficie a scarpa, bisognerebbe suddividere ancora l'angolo uCy, e la linea HC che rappresenterebbe una ortogonale sull'orizzonte AB, rappresenterebbe una sporgenza sull'orizzonte TC, ed è abbastanza chiaro che non è necessario fermarsi prima.

3°

LA VOLTA A BOTTE SEMPLICEMENTE SBIECA.

In tutti i casi precedenti abbiamo trovato che la suosessieu, o diametro della maggior inclinazione, era a metà della superficie; qui la ritroveremo sulla linea orizzontale AB in una sola posizione, affinché la volta a botte sia orizzontale, e la sua direzione obliqua sul diametro AB; allora come nel primo caso della volta a botte retta, il metodo di Defargues non ha niente di particolare; perché la proiezione dell'arco di prospetto si fa solitamente sul diametro orizzontale AB, e l'angolo dell'asse con la superficie è dato dal piano orizzontale.
Sia, per esempio, la metà della Fig. 95, la superficie AHB, il cui diametro AB orizzontale è sbieco sulla direzione del piedritto della volta a botte MB, o della sua parallela per la metà LC che è l'asse, è chiaro che sia l'una che l'altra di queste linee, essendo sul piano orizzontale, sono poste l'una nei confronti dell'altra senza alcun cambiamento causato dalla proiezione; così AB è senza contraddizioni il diametro della maggior inclinazione, e HK perpendicolare al piano orizzontale, sul quale è rappresentato in proiezione solo dal punto C, sarà la traversessieu, che è il diametro retto sull'asse obliquo, e HC quello della maggior inclinazione; ma questo caso è unico, perché se c'è una scarpa o una pendenza, l'obliquità non si troverà più né sull'uno e né sull'altro di questi diametri.

Fig.95 volta a botte semplicemente sbieca.



LE VOLTE A BOTTE A DOPPIA INCLINAZIONE.

1° Sbieca e a scarpa o a sporgenza.
2° Sbieca e in pendenza o in salita.

È piuttosto in queste trattazioni e nelle seguenti che il metodo di Defargues è intrinsecamente diverso da quello ordinario degli autori del taglio delle

pietre; ma ben lontano di trovarlo ridicolo come per loro, gli darò la precedenza su tutti gli altri, visto che si presenta più distintamente all'idea degli avanzamenti e delle rientranze delle superfici dei panneaux [3], le cui sagome sono difficile da trovare e a riconoscere nella loro posizione; è la sola ragione che mi impedisce di seguire questo metodo.
Sia (Fig.95) ABFV il piano orizzontale di una volta a botte sbieca, la cui superficie AHC deve essere inclinata a scarpa seguendo un angolo dato TOX, dopo aver preso a piacere sulla linea intermedia CQ, che rappresenta l'asse, un punto X, tracceremo da questo punto una perpendicolare XO sul diametro AB, che intersecherà in O, da cui tracceremo la linea OT uguale a OX, facendo l'angolo XOT uguale a quello della scarpa, o AOT uguale al suo complementare.
Dal punto X tracceremo su OT una perpendicolare Xp, che intersecherà OT in p, riporteremo Op in Ot su OX, dal punto t e dal centro C tracceremo il diametro DI, che sarà quello della maggior inclinazione, chiamato da Defargues la sousessieu.
Quest'autore la cerca in un'altra maniera, fa OT uguale a OX, e dal punto T conduce ad OX la perpendicolare Tt, che la incontra in t, dal quale e dal centro C egli traccia la sousessieu, cosa che torna uguale come è facile dimostrare; perché a causa dei triangoli simili Tot, XpO rettangoli, l'uno in t e l'altro in p, che hanno l'angolo TOX in comune, e TO=OX, per costruzione; quindi pO=tO, ciò che dovevamo dimostrare.
Se al posto della sbieca e a scarpa si avesse una sbieca e a sporgenza, si prenderebbe il supplementare dell'angolo ECI, che è ECD.
Se al posto della sbieca e a scarpa si avesse avuto una sbieca in pendenza, la costruzione sarebbe stata la stessa che per la sbieca e a sporgenza, si sarebbe messo l'angolo della pendenza sopra ad AB, che invece abbiamo messo sotto per quella a scarpa; e al contrario, se si avesse avuto una sbieca in salita si avrebbe operato come per la scarpa.

Spiegazione dimostrativa.

Poiché il diametro della maggior inclinazione è la sezione della base di un cilindro per un piano passante per il suo asse perpendicolarmente a questa base, questo deve passare per la linea CX, che è l'asse orizzontale, e la linea Xp perpendicolare alla scarpa OT, che è stata tracciata sul piano orizzontale; perché non è possibile rappresentare una linea in elevazione su questo piano.
Adesso per concepire più facilmente la ragione di questa costruzione, bisogna supporre che il semi cilindro della volta a botte sia messo in una

[3] Panneaux: sono le sagome di una delle superfici di un concio, tagliate in legno o cartone, che saranno applicate sulla pietra per tracciare i contorni.

posizione diversa; invece di supporre l'asse sull'orizzonte, ci supporremo la base o superficie della volta a botte, e l'asse inclinato alzato sopra; a questo punto la linea di sezione OT sarà esattamente la stessa dell'ordinata OX con la sua suddivisione in t, che era in p, e poiché pX le è perpendicolare, questa linea pX sarà rappresentata in proiezione orizzontale solo dal punto t, il quale considerato elevato di un intervallo di altezza pX sul piano della base, rappresenterà il punto X dell'asse CX e tC rappresenterà questa porzione d'asse; di conseguenza la sola linea tC potrà essere considerata come la proiezione di un triangolo uguale a tCE; visto che si deve immaginare su t una verticale uguale a PX=Tt=tE per costruzione, che è l'altezza di un punto E della circonferenza della base sul piano orizzontale, e nel nostro cambiamento di posizione, quella del punto K dell'asse sulla superficie a scarpa, stesa sul piano orizzontale, dato che CE=CX rappresenta questa porzione d'asse senza la sua estensione, la quale ha anche la sua proiezione in tC, che è parte di un semi diametro CI; quindi l'angolo ECI o quello uguale a lui ICK, sarà quello dell'asse con il diametro dell'intersezione dei piani della superficie a scarpa, e quello che gli è perpendicolare passante per l'asse, poiché passa per CK e per Et o pX, cioè che questo angolo è quello della maggior inclinazione dell'asse sulla base del cilindro, e seguendo il linguaggio di Defargues, quello dell'essieu con la sousessieu, ciò che si doveva dimostrare.
Si sarebbe potuto spiegare questa costruzione senza immaginare un cambiamento di posizione del cilindro, ma con un po' più di difficoltà; perché bisogna concepire che il triangolo rettangolo CtK o il suo eguale Cet, ruoti intorno al suo lato Ct, e che con questa rivoluzione il punto K sia arrivato in g e si trovi nel piano verticale passante per l'asse CX, e allora il triangolo tCg sarà la proiezione della parte del piano inclinato all'orizzonte, ma perpendicolare alla base passante per l'asse, compresa tra quest'asse CX e il diametro EC rappresentato da tC; a questo punto per la supposizione della rivoluzione intorno a Ct, tg rappresenta tK, o tE=tT=pX, Cg rappresenta CK o CE, e tC è comune al triangolo della proiezione orizzontale tCg e al suo equivalente tCE; ma a causa di Xp che è perpendicolare a TO, per costruzione, e a tC, come abbiamo appena dimostrato, la linea tg sarà la rappresentazione di una linea perpendicolare alle due tO, tC; di conseguenza al piano della base, nella quale c'è il punto dell'asse g, rappresentante E o K o X, ed essendo il punto C di quest'asse immutabile, ne consegue che tCg rappresenta l'angolo della maggior inclinazione, il cui equivalente è dato in tCE, ciò che si doveva dimostrare.

VOLTA A BOTTE SBIECA IN PENDENZA.

Abbiamo appena dato la costruzione delle doppie inclinazioni della sbieca a scarpa, o sbieca a sporgenza. Se si hanno tutte le inclinazioni uguali nella sbieca in pendenza, troveremo con lo stesso metodo la stessa sousessieu e la stessa essieu che abbiamo trovato nella figura precedente per la sbieca a scarpa.
Sia (Fig.95) l'angolo BCL, l'inclinazione della direzione orizzontale della volta a botte sul piano della superficie, che noi supporremo principalmente verticale sul diametro AB, dopo aver tracciato da un punto L, presa a piacere la perpendicolare indefinita LO su questo stesso diametro, faremo nel punto O in cui questa lo interseca, l'angolo GON uguale a quello della pendenza; poi avendo fatto OG uguale a OL, eleveremo su AB prolungata nel punto G la perpendicolare GN, che intersecherà la sezione della pendenza NO nel punto N; in seguito riporteremo l'altezza GN in On su Lf, per averci il punto n, da cui e dal centro C, tracceremo il diametro ID, che sarà la sousessieu.
Per trovare l'essieu faremo come nel caso precedente nS perpendicolare

su DI e uguale a Nn, che darà il punto S, per il quale e per il centro C tracceremo la linea SE che sarà l'essieu, e l'angolo DCS o il suo opposto al vertice ICE, quello della maggior inclinazione dell'asse sulla base del cilindro.
La dimostrazione è evidentemente la stessa del caso precedente; poiché non ci sono altre differenze di costruzione se non quella di posizionare qui al di sopra dell'orizzontale ciò che si era posizionato al di sotto di questa; perché è evidente che se si ha una volta a botte orizzontale a sporgenza, e s'inclina il suo asse in pendenza, la superficie che era a sporgenza diventerà a piombo, come abbiamo spiegato prima.
Ciò che diciamo per la sbieca in pendenza si applica anche molto naturalmente alla volta a botte sbieca in salita, facendo il contrario, cioè ponendo l'angolo della salita sotto l'orizzontale, come abbiamo fatto per la sbieca a scarpa. In effetti se si inclina in salita l'asse di una volta a botte sbieca e a scarpa, potremo senza alcun cambiamento di questa inclinazione, mettere a piombo la superficie che era a scarpa.

5°

LE VOLTE A BOTTE A TRIPLA INCLINAZIONE.

1° Sbieca in pendenza e a scarpa o a sporgenza.
2° sbieca in salita e a scarpa o a sporgenza.

Sia (Fig.96) la superficie AHB quella di una pendenza, la cui inclinazione con la sbieca orizzontale è l'angolo LCB, dopo aver tracciato come prima un punto l, preso a piacere sulla proiezione LC dell'asse in pendenza, una perpendicolare Ln al suo diametro orizzontale AB, si farà sotto questo diametro in un punto O l'angolo della scarpa LOP, od il suo complementare POB, e al di sopra della stessa linea, il profilo dell'angolo di pendenza BON; poi, dopo aver fatto OP=OL, tracceremo su OP la perpendicolare PN, che intersecherà il profilo della pendenza in N, per il quale conducendo Nn parallela ad AB, che intersecherà Ln nel punto n, tracceremo da n e dal centro C la linea DI, che sarà la sousessieu o diametro della maggior inclinazione.
In seguito per trovare la posizione dell'essieu nei suoi confronti, si farà nel punto n la perpendicolare nq uguale a Nn, e dalla sua estremità e dal centro C tracceremo la linea Esq, che rappresenterà l'essieu.
Se al posto della pendenza si ha una salita sbieca e a scarpa, supponendo la stessa inclinazione LCB e la stessa scarpa BOP, faremo l'angolo sulla sezione della salita BOF sotto l'orizzontale AB, come la scarpa; poi avendo fatto OP uguale ad OL, condurremo nel punto P la linea PF perpendicolare ad OP, che intersecherà il profilo della salita FO nel punto F, per cui tracceremo Ff perpendicolare a Ln, che intersecherà nel punto f, la linea id condotta per questo punto f e per il centro C, sarà la sousessieu, o diametro di maggior inclinazione.

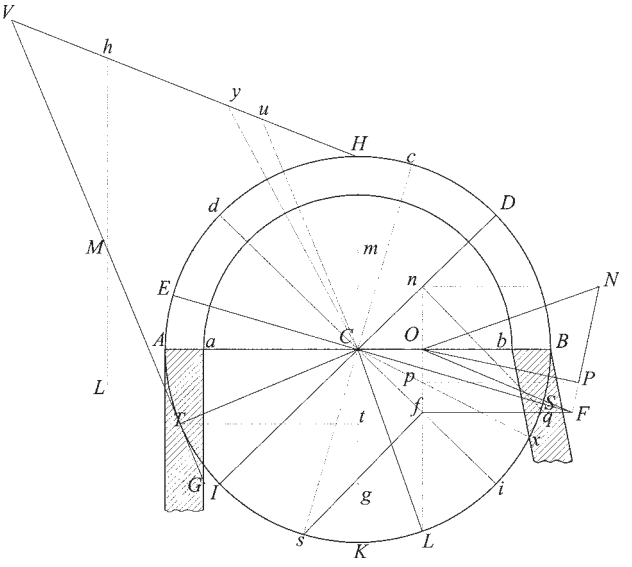


Fig.96 volta a botte a tripla inclinazione a scarpa o a sporgenza.

La posizione dell'essieu nei suoi confronti si troverà ordinariamente, facendo nel punto f una perpendicolare fs a di, tracciando dai punti s e C la linea se; è chiaro che quando anche la salita sarà uguale alla pendenza, gli angoli d'inclinazione non saranno uguali per questa, per le ragioni che abbiamo dato nel 2° articolo, poiché la scarpa della pendenza diminuisce l'angolo dell'inclinazione dell'asse con la superficie, e al contrario aumenta nella superficie in salita e a scarpa, sia che sia sbieca o che non lo sia.
Non è necessario aggiungere una dimostrazione a quelle precedenti; perché questa aggiunta d'inclinazione non è altro che una composizione di quelle che abbiamo spiegato nello specifico, e di cui abbiamo spiegato la precisione della costruzione.

Applicazione e uso degli angoli di maggior inclinazione e dei loro lati.

Dopo aver fatto la suddivisione del sesto in prospetto nei suoi conci ordinariamente, si farà la proiezione delle sue divisioni, non sul diametro della superficie, come si usa fare nella maniera usuale, ma sopra la sousessieu, la quale non si confonde con questo diametro che quando la volta a botte è retta , si può ancora metterla in tutt'altra posizione, poiché tutti i diametri possono essere presi per sousessieu; perché sono tutti perpendicolari all'asse, anche se si può prendere un diametro in posizione orizzontale, ortogonale o inclinato, questo farà sempre lo stesso angolo con il suo asse.
È per questo che, 1°, nella volta a botte retta (Fig.94) prenderemo, se si vuole, AB come sousessieu, e la sua perpendicolare CH come essieu, questa in realtà non deve essere sulla stessa superficie, perché gli è perpendicolare, ma ce la trasportiamo per tracciarci l'épure [4] separatamente dall'alzato della superficie, è sufficiente avere l'apertura dell'angolo delle linee d'essieu e di sousessieu, e la proiezione delle suddivisioni della superficie sulla susessieu.
È quindi chiaro che due linee a squadra sono sufficienti per fare l'épure di una volta a botte retta, come (Fig.94) AB e HK, e che si può fare

la proiezione delle suddivisioni 1, 2, 3, 4 sulla linea AB, o sulla linea CH; perché se l'una è presa per sousessieu, l'altra sarà presa per essieu. Fatta questa proiezione, ce ne serviremo per fare i panneaux, seguendo il metodo ordinario; poiché nel caso della volta a botte retta, questa non differisce in alcun modo.

2°, Nella volta a botte retta, ma a scarpa, a sporgenza, salita o pendenza, in cui la sousessieu si trova su una linea a piombo KH, e in cui l'essieu non è a questa perpendicolare, ma inclinata come MS, le proiezioni delle suddivisioni si devono fare con delle orizzontali 1u, 2V su HC; poi dai punti u, V, in cui queste linee incontrano la sousessieu, tireremo giù delle perpendicolari ur, VR sull'esieu MS, le quali sono le altezze delle cadenti dell'arco retto; perché queste sono delle sezioni dei piani passanti per le suddivisioni 1 e 2 perpendicolarmente all'asse; e invece che come nella maniera ordinaria in cui queste sono tutte in un piano intersecante la volta a botte perpendicolarmente all'asse, in questa sono nella posizione del parallelogramma per l'asse.

Questa seconda istruzione di pratica si deve intendere non soltanto per i casi che ho nominato, ma anche per gli altri a doppia e tripla inclinazione; è sufficiente aver trovato la sousessieu posizionata sull'arco di prospetto, e poi l'angolo che questa linea fa con l'asse della volta a botte.

Visto che spesso accade che la sousessieu DI sia spesso inclinata al diametro orizzontale AB, le proiezioni delle suddivisioni dell'arco di prospetto si fanno da una parte e dall'altra di questa linea, come si vede nella Fig. 97, in cui la parte dell'arco A6D è al di sopra di ID, e la parte DB al di sotto; così tracceremo da una parte le perpendicolari aF, 1P, 2p, 3R, e dall'altra parte bq, 4q, cosa che forma confusione tra le lettere della loro origine, errore per cui questo metodo fornisce spesso occasione di sbagliarsi.

È visibile che si deve usare per l'estradosso A6D così come per la doele a2T, e per D8B così come per T4b.

Per la seconda operazione tracceremo da tutte le suddivisioni che la proiezione inclinata ha formato sulla sousessieu DI, delle perpendicolari sull'essieu ES, come PQ, uV, Rr, Gg, Ff, che daranno le altezze delle cadenti dell'arco retto, non su un piano orizzontale, ma sul piano di una sezione per l'asse perpendicolare a quello che passa per l'essieu e la sousessieu.

In più queste daranno gli angoli delle teste dei panneaux di lit e di doele, prolungandoli al di là dell'essieu ES.

Principalmente, per i panneaux delle doeles, queste esprimono gli avanzamenti e gli arretramenti di una suddivisione di concio alla seguente; così, poiché i punti Q e r provenienti dalle divisioni 2 e 3 segnano l'intervallo, di cui uno di questi giunti, 2, avanza più dell'altro, 3, sul

[4] Epure: disegno di una volta tracciato su un muro o su una tavola, della stessa grandezza dell'opera da eseguire per poter prendere le misure necessarie alla costruzione dei conci.

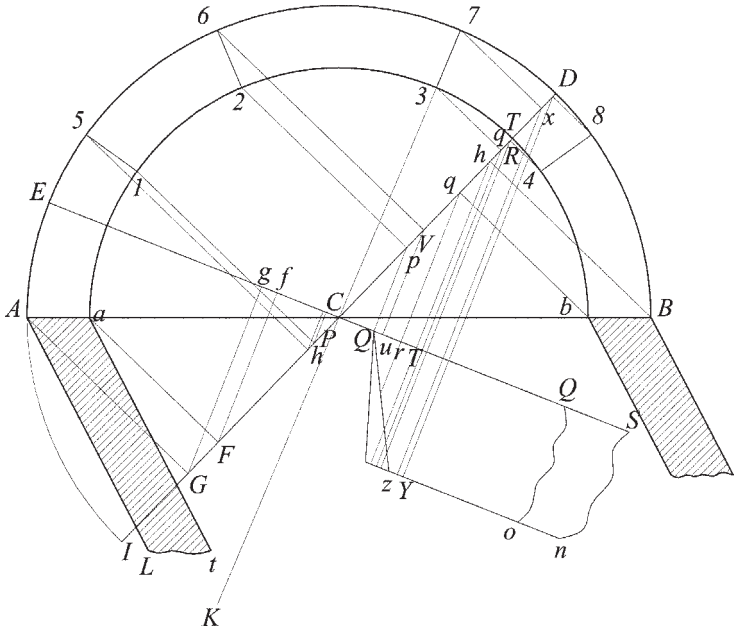


Fig.97 volta a botte a tripla inclinazionesbieca in salita e a scarpa

piano passante per l'asse, e per il diametro di maggior inclinazione; è chiaro che l'angolo che forma il joint de lit, che è sempre parallelo all'asse, con la corda 23 della doele piatta, sarà sempre uguale a quello che si formerà tra lo stesso asse e la corda, posizionata tra gli avanzamenti Q e r; è per questo che prenderemo con il compasso la corda 23, e posizionando una delle sue punte in Q, venendo dal punto 2, faremo con l'altra punta un arco, che intersecherà la linea Rr prolungata (la quale proviene dal punto 3) in un punto z, per il quale conducendo una linea zn parallela a QS si avrà per panneau della doele la figura SQzn.

In secondo luogo, per i panneaux di lit si useranno gli stessi, posizionando tra le parallele pQ e Vu, provenienti dalle suddivisioni 2 e 6 della doele 2, e dell'estradosso 6, la lunghezza 26 del giunto di testa dell'arco di prospetto; così troveremo il punto Y dall'intersezione di un arco fatto dal centro Q, e con l'intervallo 2, 6 per raggio con la linea VY che intersecherà in Y, per cui se si conduce una parallela Yo all'asse ES, si avrà il trapezio oQYo per il panneau di lit [5] della seconda suddivisione, che è il lit superiore del secondo concio, e quello inferiore del terzo.

Per non sovraccaricare l'épure con troppe figure, e per separare quelle di diversa specie, come i lits e le doeles, che si troveranno mescolati, e causeranno confusione, si possono sistemare insieme in una figura a parte, come si vede in Fig. 98, dove si è messo i lits da una parte e le doeles dall'altra.

[5] Lit: superficie sulla quale si posa una pietra,sia che sostenga un'altra pietra sia che venga sostenuta. Quella sulla quale si appoggia una pietra si chiama lit de dessous, quella sulla quale un'altra pietra si appoggia si chiama lit de dessus, quando le facce sono inclinate in orizzontale come nei conci si chiama lit en joins.

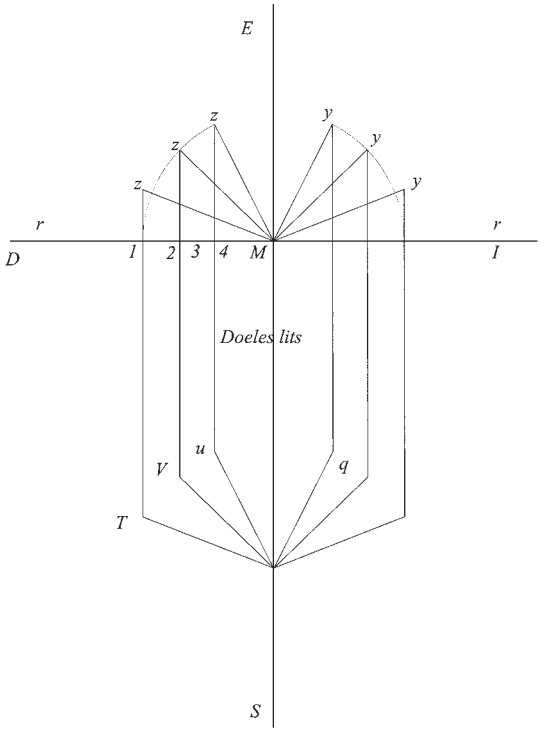


Fig.98 costruzione per evidenziare le doeles e i lits.

Dopo aver tracciato due linee DI e ES, che si incrociano perpendicolarmente in M, riporteremo da questo punto M le larghezze delle doeles da una parte e dei lits dall'altra, prese perpendicolarmente alla linea ES dellaFig. 97, come nS, Oo, ecc. che daranno sulla linea D1 i punti 1, 2, 3, 4, per i quali condurremo altrettante parallele ad ES, come zT, zu; poi, se i conci sono uguali, sull'arco di prospetto, dal punto M per centro, e dall'intervallo di una doele a1 della Fig. 97, tracceremo un arco di cerchio, che intersecherà tutte le parallele Vz nei punti z; nello stesso modo se si prende per il suo arco il raggio del giunto di testa 15 della Fig. 97, questo darà tutti i punti yy della Fig. 98.
Tracceremo più comodamente e senza confusione tutte le larghezze di doele e di lit, formando l'arco retto come segue:
Tracceremo dal centro C una perpendicolare 7K all'essieu ES, sulla quale ritroveremo le suddivisioni della sousessieu, provenienti dai giunti di testa 1, 2, 3, 4 con delle perpendicolari a K7, o, che è la stessa cosa, con delle parallele all'essieu, sulle quali riporteremo le lunghezze delle perpendicolari tracciate dalle suddivisioni dell'arco di fronte alla sousessieu.
Per non ingarbugliare la figura con una grande quantità di linee, si propone di farne una a parte, come si vede in Fig. 99.

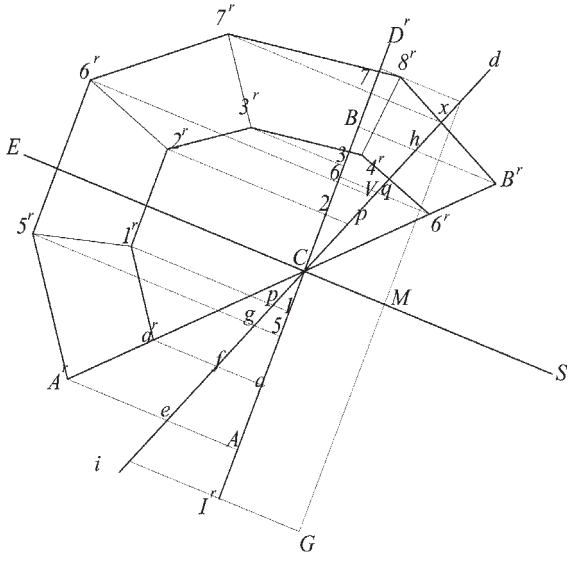


Fig.99 costruzione per tracciare i conci sulla pietra.

Dopo aver trasportato le linee ES e DI di in EM, della Fig. 97, facendo tra di loro lo stesso angolo, prenderemo sulla linea DI tutte le suddivisioni provenienti dalle perpendicolari, tracciate a questa linea per i giunti di conci, che riporteremo in di.
In seguito tracceremo dal centro C una linea D^r1^r perpendicolare all'essieu ES, e dalle suddivisioni della sousessieu efghilmnop, condurremo le parallele all'essieu ES, che intersecheranno la linea D^r1^r nei punti A, a, 5, 1, 2, 6, 3, 7, ecc.. dai quali, come termini, riporteremo sulle parallele all'essieu le lunghezze delle ordinate alla sousessieu, prese nella Fig. 97, sapendo che GA sta in AA, Fa in fa, b5 in 55, Pr in 1^r1^r, e così via, e otterremo i punti a^r, 1^r, 2^r, 3^r, 4^r, ecc..per le suddivisioni della doele, per i quali tracceremo le rette a^r1^r, 12^r, 23^r, che daranno un poligono formato dalla prosecuzione delle doeles piatte dell'arco retto.
La stessa cosa si fa per l'estradosso.
Adesso, è chiaro che si ha tutto ciò che è necessario per tracciare i conci sulla pietra, perché si hanno i panneaux di lit e di doele e i biveaux [6] di lit e di doele dell'arco retto, come nelle trattazioni dei metodi ordinari.

[6] Biveau: sagoma dell'apertura di un angolo qualunque.

Spiegazione dimostrativa.

Abbiamo dato la ragione della precisione dell'operazione per trovare l'essieu e la sousessieu in tutte le circostanze di (volte) sbieche, a scarpa e in pendenza date, adesso resta di dimostrare come si trova l'arco retto. Poiché la sousesieu è il diametro della maggior inclinazione, sarà anche il più grande di tutti i diametri, se la superficie della volta a botte è ellittica; poiché ne sarà l'asse maggiore, e supponendo che la volta a botte abbia il prospetto circolare, come quando è la metà di un cilindro scaleno, questo diametro di sousessieu, benché uguale a tutti gli altri, sarà sempre più grande di quello della sezione perpendicolare all'asse, poiché è inclinato; ma le linee perpendicolari al piano dall'asse e questo diametro di sousessieu saranno tutti uguali ai loro corrispondenti sull'arco di prospetto e sull'arco retto; è per questo che abbiamo riportato le lunghezze delle ordinate alla sousessieu come AG, aF perpendicolarmente al diametro dell'arco retto in AA^r, aa^r, ecc.. poiché l'asse non è inclinato rispetto a tutte le linee che sono perpendicolari al piano passante per la sousessieu; ma lo è rispetto a tutte le linee parallele o inclinate a questa sousessieu; è per questo che in questo metodo, in qualsiasi posizione sia la superficie nei confronti della volta a botte, non si ha attenzione né per la scarpa, né per la pendenza; perché le linee tracciate dalle suddivisioni al diametro sul quale si fa la prima proiezione dell'arco di prospetto non sono come negli altri metodi, delle ortogonali o delle linee inclinate in un piano verticale, che possono cambiare di rapporto e di inclinazione nei confronti dell'asse, in questo (metodo) sono sempre uguali alla larghezza della volta a botte, in tutte le sezioni dei lits; perché queste sono sempre perpendicolari al piano per l'asse, che è perpendicolare, per costruzione, a quello della superficie o base del cilindro. Ingegnosa invenzione di Defargues che avrebbe dovuto fargli onore se non l'avesse resa misteriosa e difficile da decifrare; avrebbe fatto meglio a inserire la spiegazione e la dimostrazione nel libro di Bosse, che fare questa pietoso estratto dai registri della Comunità dei Mastri Massoni di Parigi, per provare che Charles Beffi non era stato rifiutato per aver voluto fare la sua opera d'arte seguendo il nuovo metodo, e querelare un critico ignorante, che avrebbe smontato con la sola dimostrazione.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE DIPARTIMENTO DI PROGETTAZIONE DELL'ARCHITETTURA

Sezione "ARCHITETTURA e DISEGNO"

LA TEORIA E LA PRATICA
DEL
TAGLIO DELLE PIETRE E DEI LEGNI,
PER LA COSTRUZIONE DELLE VOLTE
E altre parti delle Costruzioni Civili e Militari



TRATTATO DI STEREOTOMIA PER L'ARCHITETTURA

Di **M. FREZIER,** Cavaliere dell'Ordine Militare di Saint Louis Ingenieur ordinaire du roy en Chef à Landau

Traduzione analisi del testo e delle immagini
a cura di Carmela Crescenzi

VOLUME SECONDO

Firenze maggio 2004

UNIVERSITA DEGLI STUDI DI FIRENZE DIPARTIMENTO DI PROGETTAZIONE DELL'ARCHITETTURA

Sezione "ARCHITETTURA e DISEGNO"

I trattati di Stereotomia. I. La Theorie et la Pratique de la Coupe des Pierres et des bois, pour la construction des voutes di Amedeo Frezier, Strasburgo, 1737-1739. ***All. 6.***

Traduzione
analisi del testo e delle immagini

a cura di
Carmela Crescenzi
Vol. II

Il lavoro sui trattati di Stereotomia è intimamente legato alla ricerca sulle superfici; l'analisi della trattatistica è affrontata col duplice interesse teorico-pratico: analizzare la conoscenza e lo sviluppo della Geometria Descrittiva e riappropriarsi della tecnica della Stereotomia. La scelta di affrontare il lavoro di Amedeo Frezier, tre Tomi per complessive 1500 pagine, è scaturita dalla necessità di appropriarmi di una chiave di lettura per i trattati che lo precedono. Studiare M. Desargues o M. De Lorme è molto arduo: alla difficoltà di intendere il pensiero geometrico, si aggiunge quello di una lingua diversa ed oscura nell'esporre il proprio pensiero, si riesce a comprendere, ma non a tradurre correttamente e/o con immediatezza. Il problema non è del tutto risolto per Frezier, infatti la traduzione, anche quella presentata in allegato, non è esente da errori o da un linguaggio involuto, per ottenere un buon risultato occorrerà ancora limare e riguardare più volte il testo fino ad appropriarsi della materia per presentarla correttamente.
Il lavoro affrontato inizialmente come ricerca si è dimostrato un ottimo strumento applicativo della didattica suscitando consenso ed interesse da parte degli allievi. Infatti il tema è catalizzatore fra la Geometria Descrittiva e l'Architettura costruita ed è riuscito a concretizzare l'astrattezza della teoria ostica per molti allievi.
Il lavoro è presentato in 2 volumi.

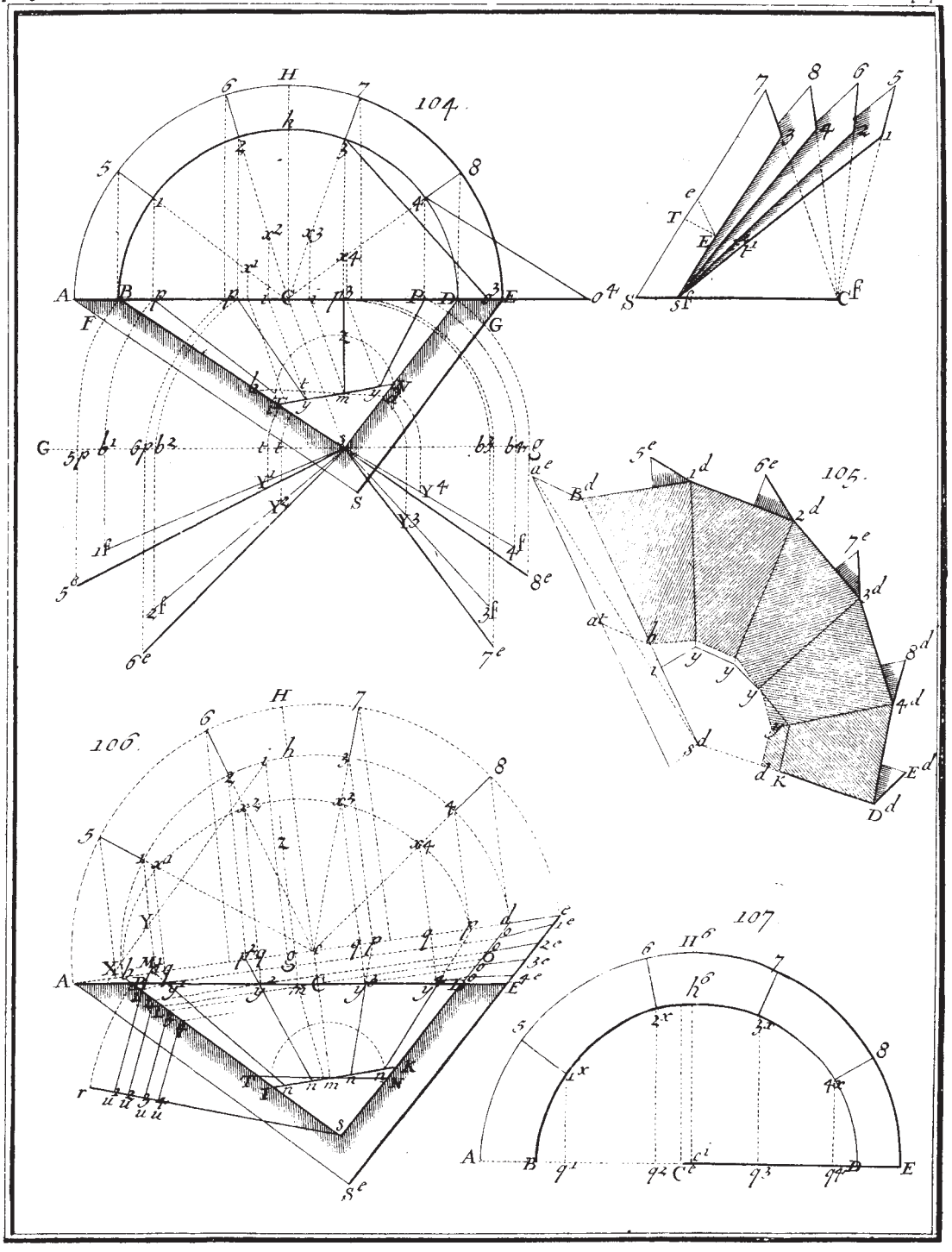
UNIVERSITA DEGLI STUDI DI FIRENZE DIPARTIMENTO DI PROGETTAZIONE DELL'ARCHITETTURA



Sezione "ARCHITETTURA e DISEGNO"

page 229.

Pl. 44.



Problema XIV

FARE UNA VOLTA CONICA DI FACCIA PIANA QUALUNQUE CIRCOLARE O ELLITTICA, OBLIQUA CON ASSE ORIZZONTALE.

Tale problema comprende vari casi di sbieco, pendenza o strapiombo, semplice o composto da due obliquità, le quali causano gli stessi effetti sia nelle volte coniche che in quelle cilindriche, di cui abbiamo già parlato nella trattazione dei *"berceaux"*.

1. L'obliquità della faccia che è verticale sulla direzione orizzontale dell'asse della *"trompe"* o volta conica, allunga le *"doëles"* e i letti da un lato, e li riduce dall'altro.
2. L'obliquità del *"talud"* semplice riduce le stesse parti dei conci verso la chiave di volta, mentre quella dello strapiombo al contrario le allunga man mano che si innalzano al di sopra delle imposte fino alla chiave.
3. Infine l'obliquità composta dallo sbieco e dal *"talud"* ha anche dei doppi effetti. Non ci riferiamo alle volte con tripla obliquità, dove l'asse è inclinato rispetto all'orizzonte; perché li tratteremo a parte, come abbiamo fatto per i *"berceaux"* in discesa. Si tratta qui di trovare le sezioni triangolari o ellittiche dei coni, il cui asse è inclinato rispetto al fronte, che il cono sia scaleno, sia su di una base circolare che su di una ellittica, e ciò può comprendere il cono retto tagliato in obliquo. Troveremo dunque diversi modi per fare le "*trompes biaises"*, come stiamo per vedere.

PRIMO CASO

"TROMPE" CONICA SBIECA CON FACCIA PIANA QUALUNQUE, CIRCOLARE, RIALZATA O RIBASSATA SENZA PENDENZA

PRIMA DISPOSIZIONE

Dove l'arco di fronte è preso come sesto primitivo

Sia, in ***Fig. 104a***, il triangolo *BsD* il piano orizzontale del vuoto del pennacchio, i cui profili esterni sono *AS*, *SE* [1] e il sesto in prospetto della *"doële" BhD* con il suo estradosso *AHE*, che per semplicità supporremo circolare, anche se la costruzione può convenire rialzata o ribassata.
Avendo diviso tale costruzione in conci nei punti *1*, *2*, *3*, *4* e avendo tracciato dai punti di queste divisioni delle perpendicolari al suo diametro *AE*, che lo incontreranno nei punti p^1, p^2, p^3, p^4 [2], tracceremo da questi punti delle rette fino all'angolo *s*, che esprimeranno le proiezioni dei

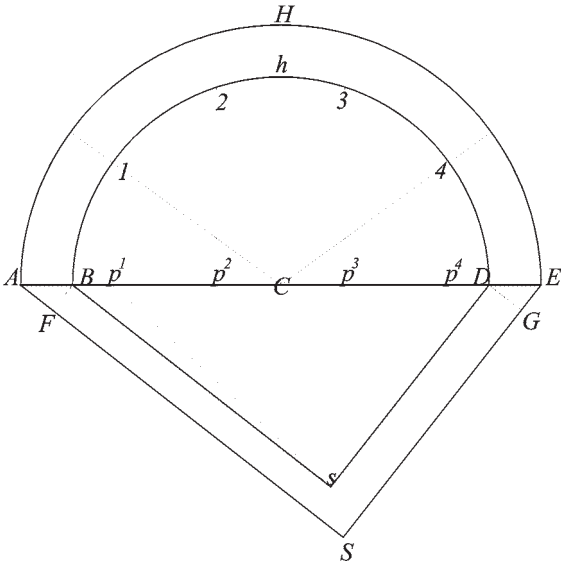


Fig. 104a: la prima disposizione con base triangolare e prospetto circolare, diviso nei suoi conci.

giunti di letto dei quali cercheremo la vera grandezza, come nel *"trait"* precedente, con dei profili, per ognuno in modo particolare. Ciò sarà facile da fare prendendo ognuna di queste proiezioni come base di profilo, in ***Fig. 104b***, e innalzando da ognuno dei punti p^1, p^2, p^3, p^4 [3], una perpendicolare con la stessa altezza dell'appiombo corrispondente $p^1 1$, $p^2 2$, ecc., per tracciare l'ipotenusa, che è il valore cercato del giunto di letto.
Possiamo anche ricavare questi profili prendendo per lato questi stessi appiombi,in ***Fig. 104c***, e portando le lunghezze delle proiezioni sulla linea AE prolungata, che è loro perpendicolare; così portando $P^4 s$ [4] in *PO*, e tracciando *4O*, troveremo il valore della proiezione $P^4 s$; allo stesso

[2] Nel testo originale si legge *P & p*
[3] Nel testo originale si legge *P p*

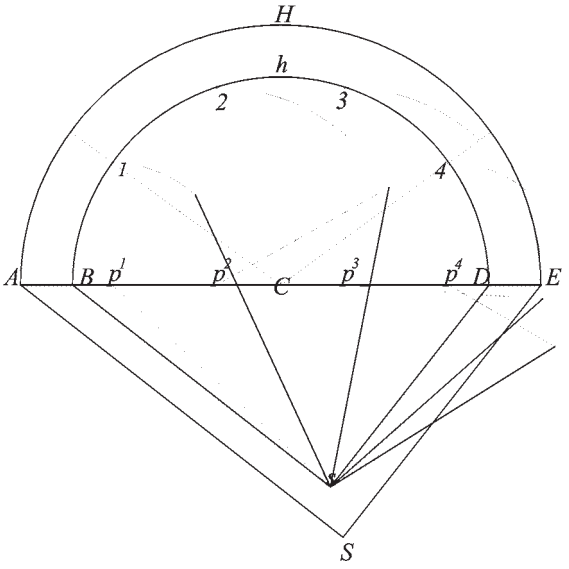


Fig. 104b: primo metodo per cercare il valore dei giunti di letto considerando le proiezioni come basi di profilo.

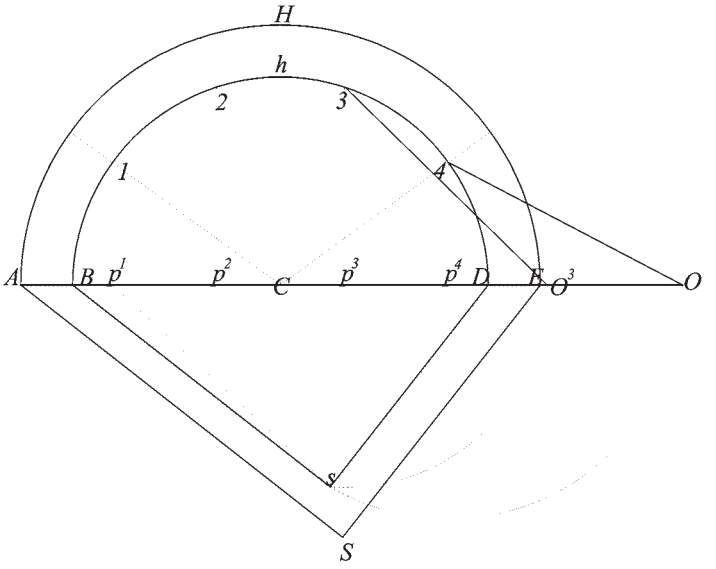


Fig. 104c: secondo metodo per cercare il valore dei giunti di letto tramite i lati degli appiombi e le lunghezze delle proiezioni.

modo se portiamo la proiezione p^3s in p^3O^3, avremo $3O^3$ come valore di p^3s che cerchiamo, ecc.
Entrambi questi modi vanno bene; ma quando abbiamo numerosi conci, ci creano confusioni.
E' più conveniente costruire questi profili al di fuori, per esempio su una base *Gg*, in ***Fig. 104d***, passando per il punto s alla sommità dell'angolo, poi puntando il compasso in questo punto, lo apriremo successivamente con ampiezze pari agli intervalli sp^1, sp^2, ecc che porteremo sulla base di profilo nei punti b^1 , b^2 da un lato e b^3 , b^4 dall'altro. Ciò è indicato da archi di circonferenza punteggiati p^1b^1, p^2b^2, p^3b^3, p^4b^4 [5], per indicarne le origini.
Poi per i punti indicati tracceremo delle perpendicolari b^11^f, $b^2\,2^f$, b^33^f [6], ecc. di ugual misura agli appiombi del sesto in prospetto $1p^1$, $2p^2$, ecc. Infine tracciando le rette 1^fs, 2^fs, 3^fs, 4^fs [7], otterremo tutte le lunghezze dei giunti di letto, senza confusione.
Se vogliamo ottenere i valori delle diagonali dei letti dalla sommità *s* agli estradossi *5*, *6*, *7*, *8*, prenderemo le lunghezze $s5^p$, $s6^p$ ecc. dallo stesso centro comune s, e troveremo il loro valore come già abbiamo fatto per le facce delle pietre 5^es, 6^es, ecc.
Avendo trovato le distanze reali da ognuno dei giunti di letto sino alla *"doële"* sarà facile ricavare dei pannelli di letto e di *"doële"* piatta, come già avevamo detto a proposito delle *"trompes"* rette.
Le *"doëles"* sono dei triangoli scaleni, formati da tre linee date: due

[5] Nel testo originale non si legge p^3b^3, p^4b^4
[6] Nel testo originale si legge b^11, b^22, b^33
[7] Nel testo originale si legge *1Ys*, *2Ys*, 3^fs, 4^fs

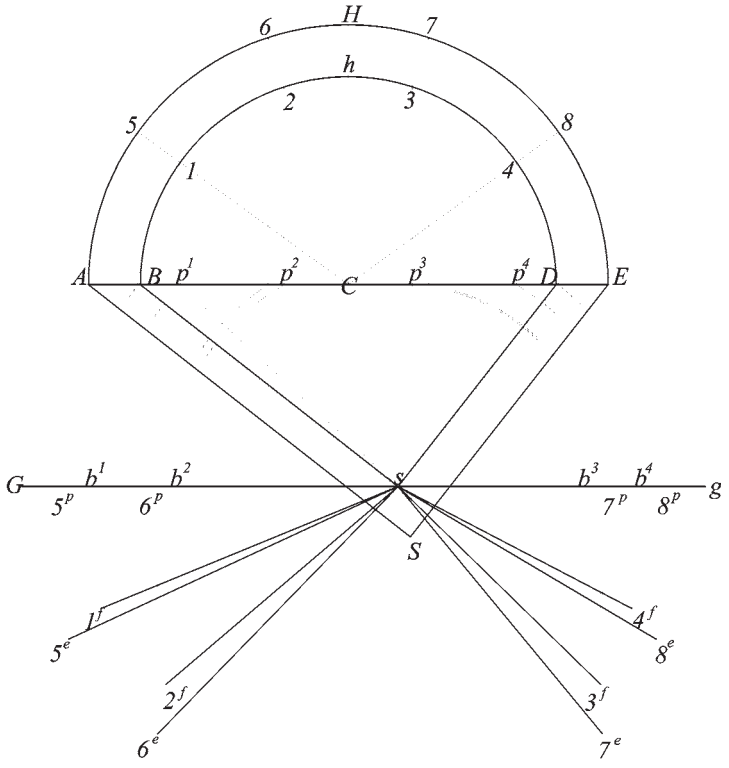


Fig. 104d: terzo metodo per cercare il valore dei giunti di letto tramite la base Gg.

giunti di letto e una corda dell'arco di testa da una divisione all'altra (*pps*) [8].
Ma siccome la loro punta deve essere smussata per la posizione del *"trompillon"* , bisogna anche cercare tramite il profilo la lunghezza che deve essere sottratta da ogni giunto; in ***Fig. 104e***, avendo dunque determinato nel piano orizzontale la proiezione del fronte del *"trompillon"* *bd* parallela alla faccia *BD* [9], o se vogliamo perpendicolarmente all'asse *sC* [10] della *"trompe"*, punteremo il compasso in *s*, e lo apriremo con ampiezza sino a dove le proiezioni dei giunti di letto *sp* incontrano la linea *bd* o *TN*, (nei punti *y*) [11], porteremo gli intervalli *sy*, *sy* in *st*, *st*, da dove tracceremo delle perpendicolari a *Gg*, che taglieranno i profili nei punti Y^1, Y^2, Y^3 , Y^4.
Le lunghezze sY^1, sY^2, sY^3, sY^4, che sono tutte diverse determineranno le parti da sottrarre da ogni *"doële"* a cominciare dalla punta, come illustrato in ***Fig. 105***, dove si vede la fuga delle *"doëles"* piatte tagliate, e la punta sottratta ad ognuna per il *"trompillon"* lasciato in bianco.

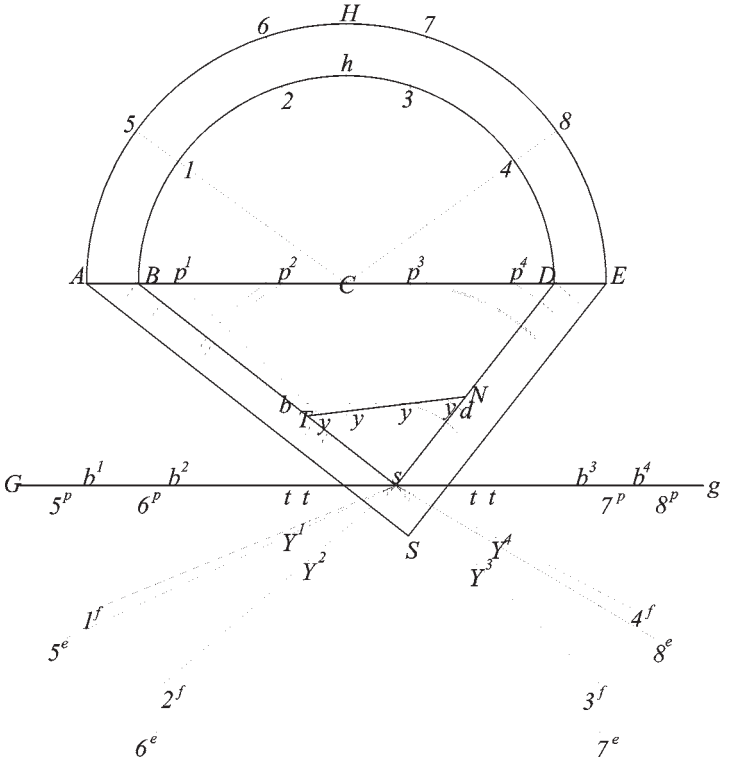


Fig. 104e: si ottiene la lunghezza che deve essere sottratta da ogni giunto.

Ciò permette di vedere d'un solo colpo lo sviluppo della piramide tronca, inscritta nel cono scaleno che ci proponiamo di fare.
Una volta fatti i pannelli di *"doële"* , dovremo fare quelli di letto, come abbiamo spiegato per la *"trompe"* retta rialzata o ribassata, con il metodo dei triangoli, che sono le sezioni dei piani dei letti nel vuoto interno della

[8] Nel testo originale non compare questa parentesi
[9] Nel testo originale si legge *bd*
[10] Nel testo originale si legge *SC*
[11] Nel testo originale non compare questa puntualizzazione

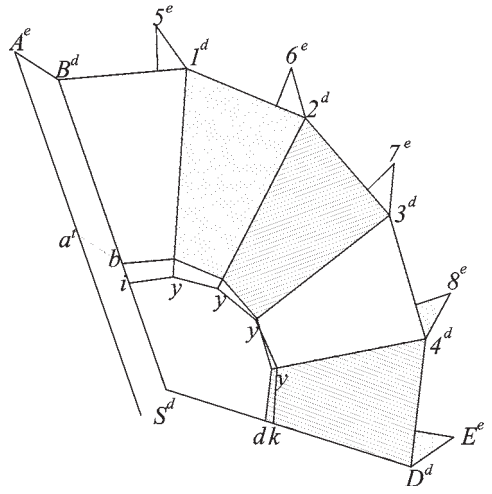


Fig. 105: vengono esplicitate le parti da sottrarre da ogni "doële".

"trompe" , i cui tre lati sono dati, cioè, in ***Fig. 104f***:

1. L'intersezione dell'asse del cono *CS*, dove tutti i piani si intersecano, se il prospetto è circolare, come in questo esempio, la cui lunghezza *CS* serve per tutti i triangoli; dunque è stata trasposta in $S^f\ C^f$ di lato, come base di tutti i profili.
2. Abbiamo tutti i raggi C_1, C_2, C_3, C_4 che sono uguali se la faccia è circolare; pertanto dal punto C^f come centro e con uno stesso raggio descriveremo un arco indefinito *4, 3, 2, 1* [12].
3. Abbiamo tutte le distanze dai giunti di letto alla *"doële"*, trovate nei profili in $s1^f$, $s2^f$, $s3^f$, $s4^f$, grazie alle quali con ampiezza pari al raggio e con il punto S^f come centro, descriveremo degli archi che taglieranno il primo fatto dal centro C^f ai punti *4, 3, 2, 1* [13]. Per questi e il centro C^f tracceremo le linee *4 8*; *3 7*; *2 6*; *1 5* [14]; che daranno gli angoli $s^f 48$; $s^f 37$; $s^f 26$; $s^f 15$ [15]; che sono quelli delle teste dei letti di fronte.

Infine dal punto *S* dell'estradosso, preso nel piano orizzontale dell'intervallo Ss^c, portato in *sS* tracceremo le parallele da ogni giunto *della "doële"* per avere la larghezza dell'estradosso. Questo darà luogo ai trapezi $Ss^f\ 48$ [16], e gli altri di fuga, che vediamo tratteggiati in figura, per evidenziare il fatto che stanno gli uni davanti agli altri.

Così sarebbero i letti se non ci fosse il *"trompillon"*; ma siccome è necessario farne uno, bisogna sottrarre da ognuno la stessa parte del profilo dei giunti di letto che abbiamo tolto alla *"doële"*, cioè sY^1 per il primo, sY^2 per il secondo, portarli in s^ft^1, s^ft^2, ecc, e tracciare per i punti trovati t^1, t^2 ecc, delle rette parallele ai capi sezionati *1, 5*; *2, 6* [17], ecc. Il parallelogramma $t^4\ e^4\ 8\ 4$ [18] rappresenterà la figura del primo letto; e così anche per gli altri, supponendo che il fronte del *"trompillon"* sia a piombo. Se volessimo farla con taglio di superficie conica convessa, invece della retta parallela $t^4\ e^4$ [19], avremmo tracciato una retta perpendicolare t^4T [20] sino al letto s^f4 [21] come abbiamo spiegato nel *"trait"* precedente.

Rimane da tracciare il sesto del capo del *"trompillon"* che serve anche per tutte le *"têtes en lit"* dei *"voussoirs"* che si posano sul *"trompillon"*.

Innanzitutto, in ***Fig. 104g***, se il capo del *"trompillon"* è costruito parallelamente alla faccia, come *bd* sta a *BD*, è chiaro che il sesto formerà un semicerchio, del quale *bd* è il diametro, sul quale le intersezioni delle proiezioni dei giunti di letto sp^1, sp^2, ecc, daranno dei punti di divisione

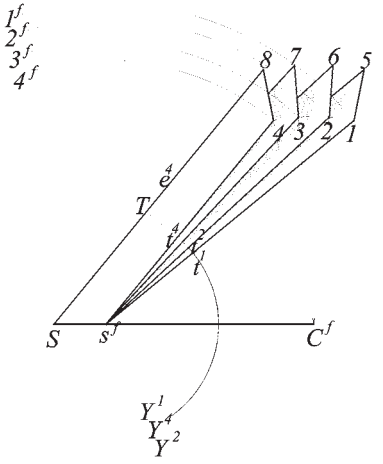


Fig. 104f: costruzione dei pannelli di letto con il metodo dei triangoli.

[12] Nel testo originale si legge *3, 4, 2, 1*
[13] Nel testo originale si legge *3, 4, 2, 1*
[14] Nel testo originale si legge *3, 7*; *4, 8*; *2, 6*; *1, 5*
[15] Nel testo originale si legge $^sf37$; $^sf48$; $^sf26$, $^sf15$
[16] Nel testo originale si legge S^sf37
[17] Nel testo originale si legge *3, 7*; *4, 8*
[18] Nel testo originale si legge t^17
[19] Nel testo originale si legge t^3, e^3
[20] Nel testo originale si legge *tT*
[21] Nel testo originale si legge s^f3

dei *"voussoirs"*, sui quali le perpendicolari tracciate nel semi-cerchio daranno le altezze delle ricadute di capi inferiori che si appoggiano sul *"trompillon"*.
Ma se invece di fare il capo del *"trompillon"* sbieco, volessimo farlo retto sull'asse, in ***Fig. 104h***, allora il centro di questo capo sarebbe una semi-ellisse, di cui *TN* è un diametro;per trovare il suo coniugato, si dividerà in due parti uguali in m, punto dal quale tracceremo *bd*, parallela a *BD*, poi si prenderà una media proporzionale tra *bm* e *md*, che ci darà *mz* come il semidiametro che cerchiamo, supponendo la faccia *BD* e la sua parallela *bd* circolare.

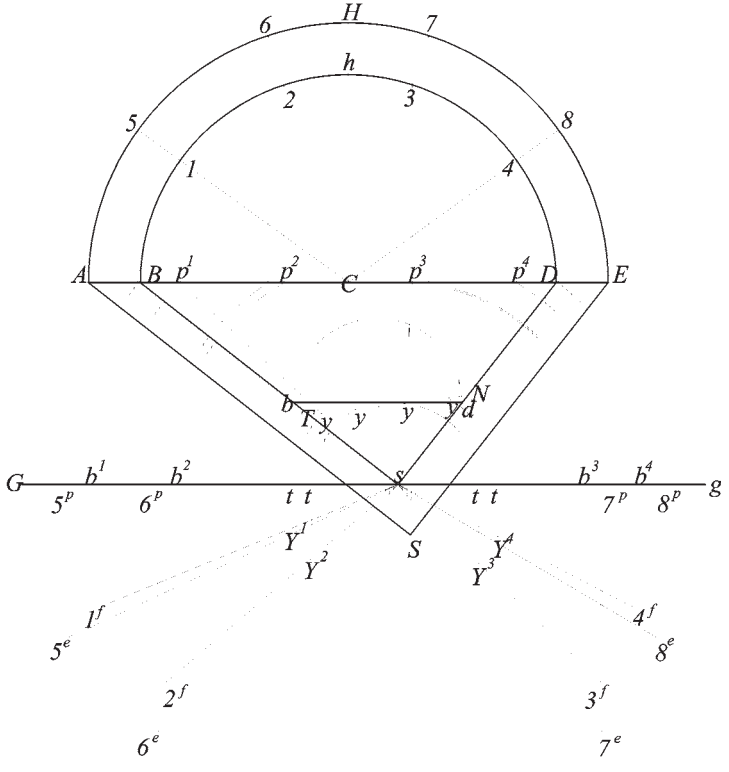


Fig. 104g: tracciamento del sesto del capo del "trompillon" nel caso in cui quest'ultimo sia costruito parallelamente alla faccia.

Ma se la faccia non è circolare, come se fosse rialzata o ribassata, allora, in ***Fig. 104i***, bisogna tracciare da tutti i punti *y y*, dove le proiezioni dei giunti di letto sp^1, sp^2 tagliano il diametro *TN*, delle parallele alla retta *sC* sino ad incontrare il diametro *BD* nei punti *ii*, dai quali tracceremo delle perpendicolari allo stesso diametro, che taglieranno le linee *1C*, *2C*, *3C*, *4C* nei punti x^1, x^2, x^3, x^4, le altezze ix^1, ix^2, ix^3, ecc. saranno quelle delle ricadute dei capi interni dei *"voussoirs"*, le quali essendo sistemate di seguito perpendicolarmente sul diametro *TN* nei punti *y y*, daranno dei

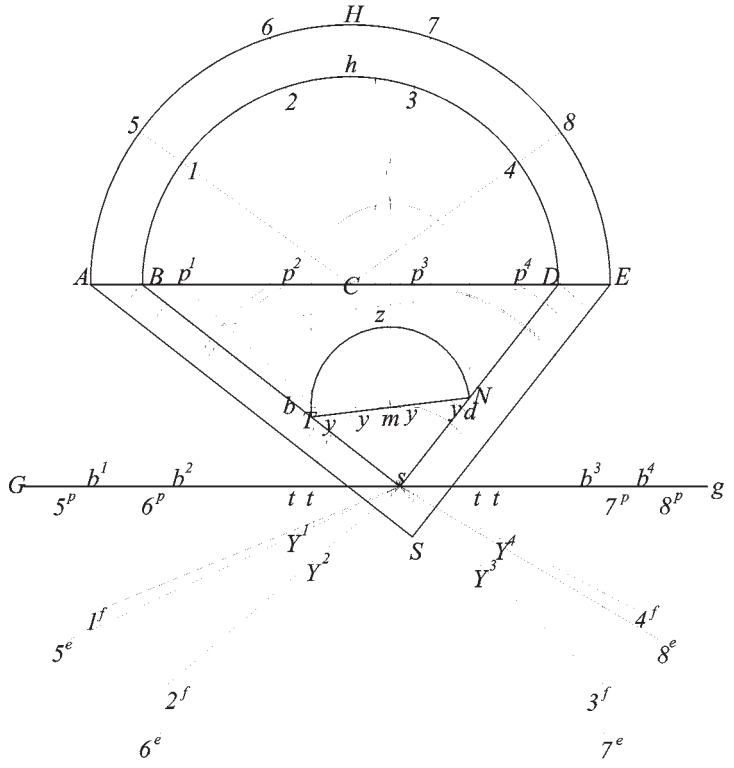


Fig. 104h: tracciamento del sesto del capo del "trompillon" nel caso in cui quest'ultimo sia sbieco.

punti nel contorno dell'ellisse che cerchiamo, che sarà il sesto in prospetto del *"trompillon"* retto. Vedremo tra poco questa costruzione inversa, che servirà a spiegare ciò che non si è compreso nella suddetta.
Si possono trovare tutte queste altezze di ricadute anche per mezzo dei profili dei giunti di letto, portando dal centro s tutti gli intervalli sy^1, sy^2 nei punti *st*, *st* sulla base del profilo *gG*; le perpendicolari su questa base tY^1, tY^2 saranno quelle cercate, le quali devono essere posizionate sulle divisioni trovate *y y* del diametro *TN* della faccia del *"trompillon"* o di una divisione trasversale dei *"têtes en lits"*, quando i *"voussoirs"* sono troppo corti, per occupare tutta la lunghezza dalla faccia al *"trompillon"*.

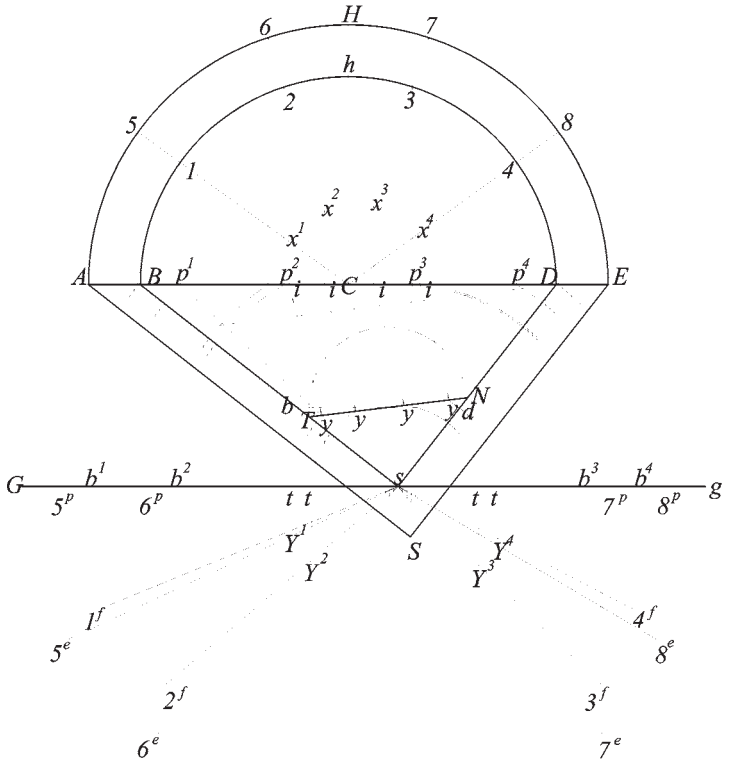


Fig. 104i: la costruzione precedente cambia se si ipotizza che la faccia sia rialzata o ribassata.

Non aggiungiamo qui niente sul modo di trovare *"Biveau"* di letto e di *"doële"*, e di testa e di *"doële";* perché le spiegazioni che abbiamo dato per la *"trompe"* retta, ha validità generale, anche per i casi in cui ci sono sbiechi, sia che il sesto sia circolare, sia che sia rialzato o ribassato. E questo è un vantaggio che non hanno la maggior parte degli altri metodo proposti dai vari autori.
Come quello del profilo di una sezione trasversale come propone M. de la Sue, il quale può essere utile per il cono intrinsequamente retto circolare, o tagliato obliquamente, e non per il cono intrinsequamente scaleno, senza molteplici correttivi, in questo caso i *"biveau"* sono ineguali in ogni letto a distanze diverse dalle imposte.

SECONDA DISPOSIZIONE

Dove si prende una curva di sezione retta come sesto primitivo.

Nella costruzione precedente, dove abbiamo preso la curvatura di faccia sbieca come curvatura primitiva, abbiamo cercato quella della sezione retta, per formare il capo del *"trompillon"* retto, e i giunti trasversali della *"doële"*.
Ora, con un metodo inverso, supporremo una sezione retta, all'interno della *"trompe"* come quella del *"trompillon"*, o una sezione immaginaria al di fuori della *"trompe"* prolungata, per dedurre la curva del sesto sbieca in prospetto.
Quando supponiamo una sezione retta all'interno del cono dato, chiamiamo questo metodo "per iscrizione"; quando invece la si suppone al di fuori, chiamiamo tale metodo "per circoscrizione".
E' evidente che, visto che tutte le sezioni del cono, le quali sono parallele tra loro, sono simili, importa poco ai fini della correttezza di esecuzione, che fissiamo un sesto all'interno o all'esterno del cono dato.
P. Deran, e dopo di lui M. de la Rue, operano "per circoscrizione", prolungando il lato più piccolo della *"trompe"*, fino a diventare uguale all'altro, al fine di trasformare la *"trompe"* obliqua in *"trompe"* retta, della quale, in seguito, tagliano le parti che eccedono all'obliquità; pertanto i loro pannelli si costruiscono per sottrazione, invece che considerarla dentro, si costruiscono per addizione delle parti eccedenti.

Ognuno di questi metodi ha qualche inconveniente, che non influisce nella prima disposizione, dove la curvatura in prospetto è primitiva; il primo riguarda il fatto che, visto che il sesto in prospetto diventa secondario, esso viene trovato soltanto quando l'operazione è compiuta, in modo che seguendo il tipo di obliquità, può essere più o meno ribassato, e a volte "sdraiato" in forma di rampante, il centro della chiave non essendo in appiombo sul centro del diametro che passa nelle imposte, invece di formare l'arco primitivo in prospetto sul diametro dell'obliquità in prospetto, li si da tale contorno che si ritiene adatto.
Il secondo inconveniente consiste nel fatto che l'arco secondario, in prospetto, perde non solo la regolarità della curvatura primitiva di sezione retta, che ci siamo dati, ma anche quella dello spessore apparente dei capi dei *"voussoirs"*, il quale è minore nella parte più corta rispetto alla parte più lunga, come si può vedere in ***Fig. 107***, ad iniziare dalle imposte, nel rapporto delle linee, che formano i capi dei profili esterni *AB* e *DE*, della ***Fig. 106a***. Ciò meriterebbe l'attenzione degli autori citati, i quali non hanno accennato alla prima disposizione.
Possiamo peraltro dire, in favore al loro metodo che se l'arco in prospetto è meno regolare, il contorno interno della *"doële"* lo sembrerà ancor più; rivolgendo dunque più attenzione alla *"doële"* che alla faccia potremo intervenire in due modi, che ottengono gli stessi risultati.

Primo metodo, per circoscrizione di un cono retto a un cono obliquo:

In ***Fig. 106a***, avendo prolungato il lato S^eE [22] sino ad *e*, in modo tale che S^ee [23] sia uguale ad *SA*, tracceremo la retta *Ae*, che rappresenterà il diametro della base di un cono retto, sopra il quale descriveremo un sesto che giudicheremo conveniente; lo supporremo per primo circolare, nel qual caso possiamo servirci del *"trait"* di P. Deran, seguito da M. de la Rue; ma se il sesto è rialzato o ribassato, non è più corretto e di

conseguenza, di nessuna utilità.
Dunque, avendo descritto il semicerchio *bhd*, e il suo concentrico per l'estradosso *AHe* [24], lo divideremo nei suoi *"voussoirs"* nei punti *1*, *2*, *3*, *4*, dai quali tracceremo delle perpendicolari al diametro *Ae*, che lo incontreranno nei punti p^1, p^2, ecc. Da tali punti tracceremo sino alla sommità del cono *s* le rette p^1s, p^2s, le quali taglieranno il diametro dato BD nei punti y^1, y^2, y^3, ecc.
Questi punti daranno le divisioni di questo diametro sul quale tracceremo le perpendicolari delle altezze delle ricadute, delle quali dobbiamo cercare la lunghezza, come l'abbiamo fatto nel *"trait"* precedente.
Da tutti i punti *y* tracceremo delle parallele alle linee $1p^1$, $2p^2$, che taglieranno i raggi *1c*, *2c* [25] ecc. nei punti x^1, x^2, x^3, x^4, i quali formeranno una semi-ellisse, come si può vedere in ***Fig. 106a***; ma a causa delle numerose linee, è conveniente tracciarla a parte, come si vede in ***Fig. 107*** dove i tratti *Bq* sono uguali a quelli *By* di ***Fig. 106a*** e le altezze $q^1 1^x$, $q^2 2^x$ [26] ecc. sono uguali a quelle di qx^1, qx^2 di ***Fig. 106a***.[27]
Ciononostante, siccome il metodo degli autori citati presuppone grandi intervalli tra i punti per i quali va cercata una semi-ellisse, si è obbligati a fare delle suddivisioni per trovare dei punti intermedi dell'ellisse. Ciò allunga l'opera e sporca il disegno con un grande numero di linee.

Fig. 106b: E' più semplice e più rapido cercare il semi asse coniugato a quello *BD* dato; si tratta solo di tracciare, dal punto medio *m* di *BD* una retta parallela a *Ae*, che è *LO*, e prendere una media proporzionale tra *Lm* in *mO*, e cioè della metà di *Lo* come raggio, e del punto vicino a *C*, dove taglia l'asse come centro, fare un arco di cerchio, che taglierà *mz*

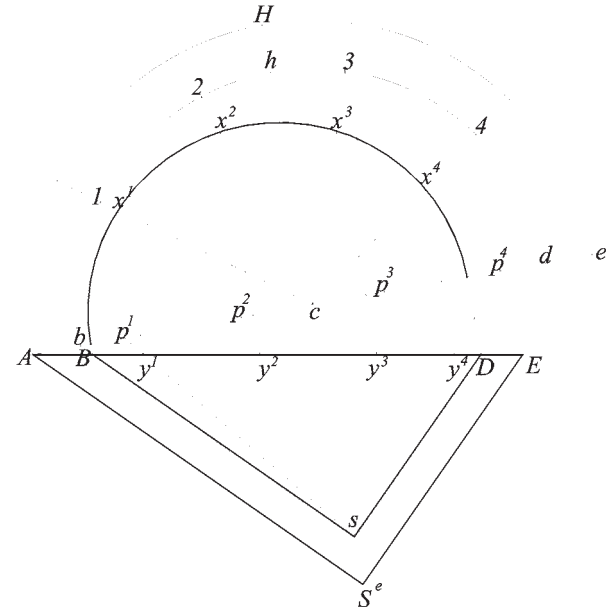


Fig. 106a: il metodo per circoscrizione, supponendo una sezione retta al di fuori del cono dato.

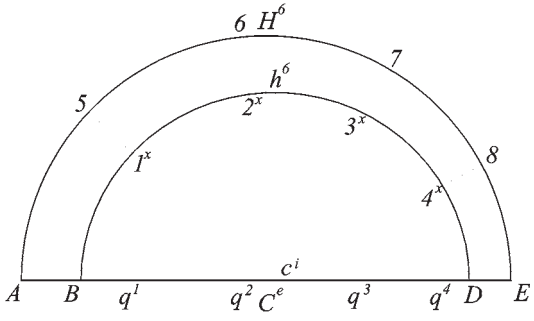
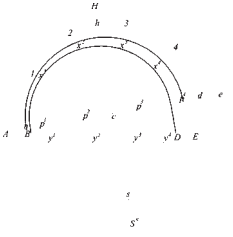


Fig. 107: si vedono con un disegno a parte le divisioni del diametro e le altezze delle ricadute.

nel punto *z*; questa linea *mz*, sarà il semi asse che cerchiamo, grazie al quale sarà possibile tracciare in una volta (con il probl. 7 del secondo libro) la semi ellisse *BhD* per la "doële", che taglierà le perpendicolari indefinite, tracciate da tutti i punti *q* ai punti x^1, x^2, ecc.
Faremo lo stesso per l'estradosso, considerando il punto medio di $AE\ C^e$, e tracciando la semiellisse *AHE* come estradosso eccentrico alla prima [come per il "Theor."1 del primo libro].(***Fig. 107***).
Per tracciare l'obliquità dei capi dei pannelli di *"doële"* quando il cono è retto e circolare, avendo tracciato delle parallele al diametro *Ae*, in ***Fig. 106c***, per tutti i punti *y*, che taglieranno *sB* [28], al lato della *"trompe"*, nei punti *1*, *2*, *3*, *4*, otterremo la fuga dell'accorciamento di ogni giunto di letto; supponendo così le divisioni dei *"voussoirs"* uguali al sesto primitivo, porteremo la corda *b1* in *br* e tracceremo *sr*; poi dal punto *s* come centro, e come raggi i lati disuguali *s1*, *s2*, *s3*, *s4*, *sB* formeremo degli archi, che taglieranno *sr* nei punti u^1, u^2, u^3, u^4 dai quali tracceremo le rette oblique $1u^1$, $2u^2$, $3u^3$, $4u^4$ che rappresenteranno i capi dei *"voussoirs"* di *"doële"* piatta.



[22] Nel testo originale si legge *SE*
[23] Nel testo originale si legge *Se*
[24] Nel testo originale si legge *AHE*
[25] Nel testo originale si legge *1C*, *2C*
[26] Nel testo originale si legge qx^1, qx^2
[27] Nel disegno originale, il sesto in prospetto è disegnato sul diametro *Ae* a partire dai punti *b* e p^4.E' necessario però proiettare sul diametro *Ae* i punti *B* e *D*, che rappresentano i veri limiti del sesto che stiamo considerando.

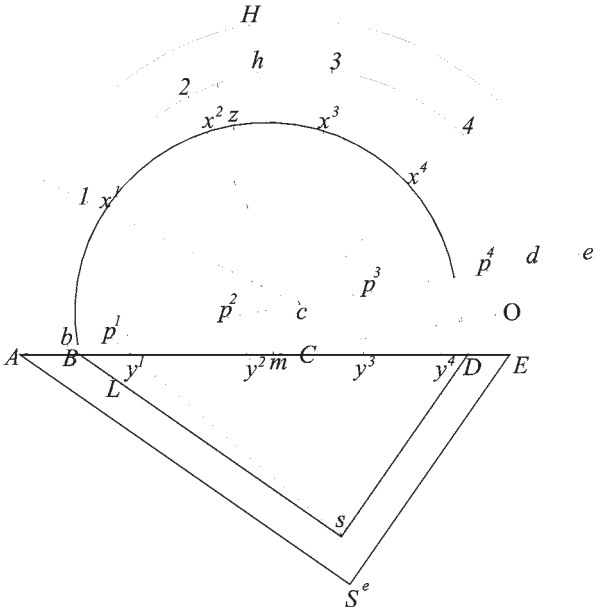


Fig. 106b: individuazione del semiasse coniugato a quello dato.

Per tracciare quelli dei giunti di letto basta tracciare dal punto *C* come centro ai punti *ooo*, dove le parallele passanti per i punti *y*, tagliano il lato *sd*, delle rette $o1^e$, $o2^e$, $o3^e$, $o4^e$, che saranno i capi dei giunti di letto; ma questo sistema come ho già detto non è generale, bensì appartiene al cono retto circolare; così, quando l'arco in prospetto sarà ribassato o rialzato, bisognerà cercare i valori delle proiezioni dei giunti di letto, come nei *"traits"* precedenti, e operare allo stesso modo per formare i pannelli di *"doële"* e di letto.
E' chiaro che se costruiamo il capo del *"trompillon" TN*, di ***Fig. 106d***, parallelo all'obliqua *AE*, la curvatura di questo capo sarà una semi-ellisse, simile a quella di prospetto, che troveremo dunque allo stesso modo.
Inoltre, se volessimo fare il *"trompillon"* retto, il suo sesto sarebbe simile al sesto primitivo, fatto sul diametro *bd*, cioè un semicerchio; se il cono è retto circolare, tagliato obliquamente da *AE*, e ellittico rialzato o ribassato, simile a quello in prospetto supposto per la costruzione; in tal caso, l'asse coniugato a quello della sezione obliqua *AE* non si trova più tramite una media proporzionale, come abbiamo detto, ma, in ***Fig. 106e***, tramite un profilo costruito sulla proiezione della linea del centro

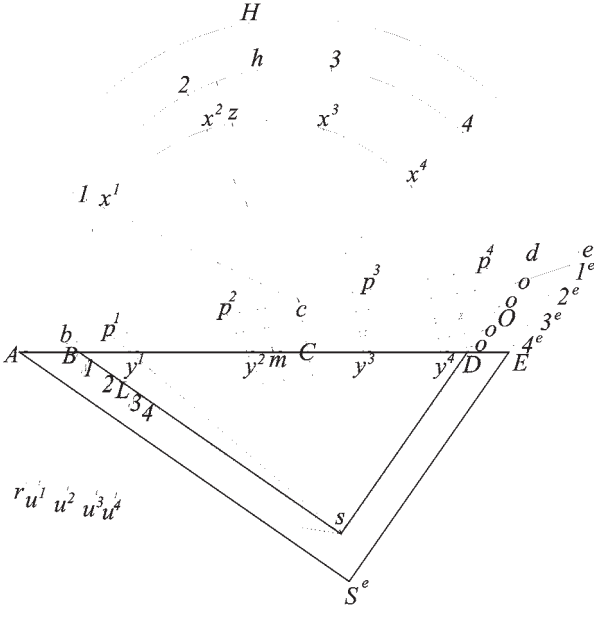


Fig. 106c: si traccia l'obliquità dei capi dei pannelli di "doële" nel caso del cono retto circolare.

della chiave passante per *smg*, dove *sg* e *gi* sono messi ad angolo retto, portando *gs* in *gX*; l'ipotenusa *iX* sarà il lato del cono retto ellittico; infine portando *gm* in *XM*[29], e tracciando *MY* parallelo a *gi*, che taglierà *iX* in *Y* la linea *MY* sarà il semidiametro che cerchiamo.

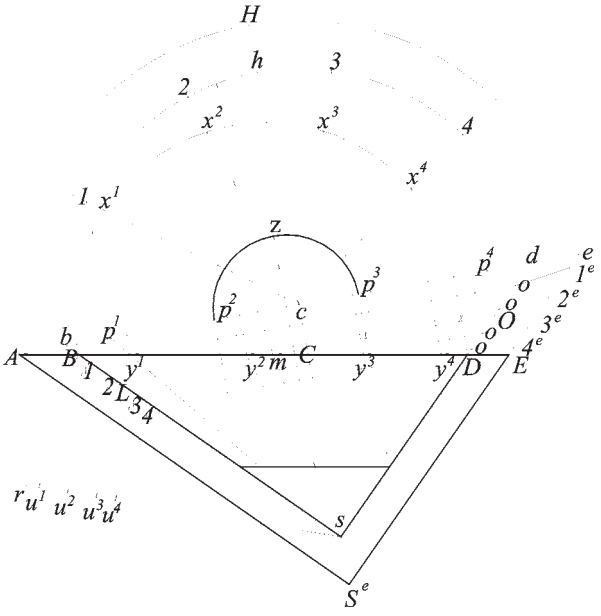


Fig. 106d: nel caso in cui il "trompillon" sia parallelo all'obliquità, si trova una curvatura semiellittica.

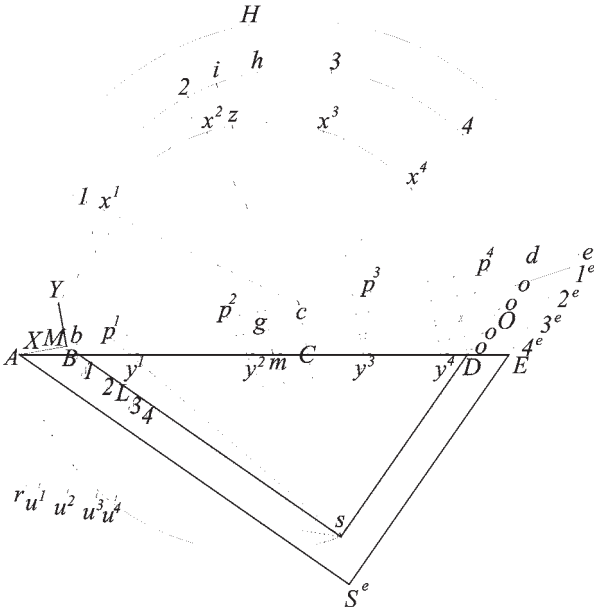


Fig. 106e: si trova ora l'asse coniugato non tramite una media proporzionale ma tramite un profilo.

Vediamo che l'evolversi di quest'operazione crea una grande irregolarità nella suddivisione dei capi dei *"voussoirs"* del prospetto, ma che la *"doële"* risulta più regolare in fondo alla *"trompe"*, dove i *"voussoirs"* divengono di larghezza uguale, misurati trasversalmente.

Secondo metodo, per iscrizione di un cono di base circolare o ellittica nel cono obliquo.

E' comprensibile che questo metodo è inverso rispetto a quello precedente. Bisogna prendere il cono retto all'interno della faccia obliqua e aggiungere la parte eccedente dell'obliquità, invece che ritagliare la parte eccedente del cono retto sul cono obliquo, come nell'esempio precedente.

Dunque, in ***Fig. 106f***, considereremo sui lati *sB*, *sD* delle lunghezze uguali, come *sI*, *sK*, e tracceremo *IK* come diametro del sesto primitivo, che faremo circolare o ellittico, a secondo del nostro giudizio. Poi avendolo diviso nei suoi *"voussoirs"*, e avendo tracciato delle perpendicolari, che taglieranno il diametro *IK* nei punti *nn*, tracceremo per detti punti e per il vertice *s*, le proiezioni dei giunti di letto, che prolungheremo sino ad incontrare il diametro del fronte *BD* nei punti $y^1, y^{2\,30}$, ecc.

Quindi, faremo dei profili sulle altezze del sesto primitivo per trovare i valori dei giunti di letto per mezzo della loro proiezione, dove gli stessi giunti, essendo prolungati sino alle perpendicolari, elevate sulle proiezioni nei punti y^1, $y^{2\,31}$, ecc daranno le altezze delle ricadute necessarie per formare il sesto in prospetto della ***Fig. 107***. E ciò è abbastanza chiaro da non attardarcisi oltre.

NOTA

In qualsiasi modo si facciano le *"trompes"* sbieche estradossate, non si possono evitare tutti gli inconvenienti dell'obliquità. Ne abbiamo

trovati due nel caso dove il sesto primitivo è immaginario retto, uno nel caso dell'ineguaglianza della divisione dei capi dei *"voussoirs"*, un altro nell'eccentricità dell'arco in prospetto della *"doële"* a quello dell'estradosso, i cui intervalli sono diversi da un'imposta all'altra, dal *Theor. I*, come è visibile in ***Fig. 107***.Se al contrario si fa l'arco in prospetto primitivo, da due archi di *"doële"* e d'estradosso concentrici, ne risulta un'ineguaglianza di spessore nei *"piedroits"*; e nello spessore della volta, se essa è estradossata, come si vede in ***Fig. 104a***, dove lo spessore *BF* è più piccolo di *DG*, seguendo la pendenza più o meno accentuata della *"trompe"*, e ciò sarebbe contraddittorio per la solidità dell'opera, se si esaminasse la questione in questo senso. Ma siccome questa diversità di spessore non è apparente, e siccome vi possiamo porre rimedio facilmente, quest'inconveniente è più facile da eliminare rispetto a quello della deformità del prospetto dei sesti secondari eccentrici e delle divisioni disuguali; sta dunque all'architetto scegliere; se vuole un prospetto regolare, bisogna prendere un sesto primitivo, se invece desidera la regolarità della *"doële"*, bisogna supporre una sezione retta circolare, e operare per iscrizione o circoscrizione.

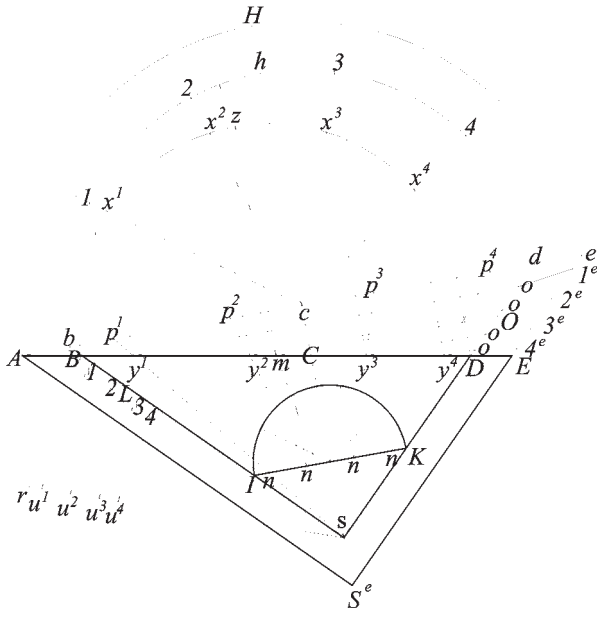


Fig. 106f: metodo per iscrizione, dove si suppone una sezione retta all'interno del cono retto.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA

Per concepire la ragione di tutte queste differenti costruzioni, bisogna ricordarsi di quello che si è detto all'inizio del primo Libro, parlando delle sezioni dei coni tagliati da piani: che tutte quelle che passano dal vertice sono rettilinee, che possiamo suddividere in due specie; cioè quelle che passano per l'asse, e quelle che non vi passano.

Quando la *"trompe"* è retta e il suo fronte circolare o sbieco, tutti i letti sono sezioni triangolari della prima specie; in quanto essendo prolungati nel vuoto della volta, si intersecano tutti nell'asse. E' da questa teoria che abbiamo tratto il metodo delle ***Fig. 104***, per tracciare gli angoli delle teste dei letti; perché i triangoli nel vuoto hanno tutti per lato comune l'asse *SC*, e un altro lato altrettanto uguale in tutte le sezioni circolari, che è il raggio della base; dunque, avendo gli angoli interni nel vuoto della *"trompe"* s^f1C^f, s^f2C^f [32], si ha il loro supplementare s^f15, s^f26, ecc. che sono quelli delle teste dei pannelli di letto.

Le sezioni triangolari della seconda specie, che non passano per l'asse, sono quelle dei piani supposti nel vuoto della volta passante per gli appiombi *1p*, *2p*, *hC* del prospetto, del quale, essendo perpendicolari al triangolo per l'asse *ASE*, supposto ancora perpendicolare al piano del cono in prospetto sono divise da questo piano in due triangoli rettangoli, che non hanno nessun lato in comune nè tanto meno uguali, come nelle sezioni perpendicolari. Questa è la ragione per la quale bisogna costruirli ognuno a parte; ora in questi rettangoli si conoscerebbero le due gambe, cioè la proiezione del giunto di letto e l'altezza della ricaduta o appiombo sul diametro del fronte; di conseguenza si trova facilmente l'ipotenusa, come abbiamo fatto nelle ***Fig. 104***.

Riguardo i sesti primitivi e secondari delle facce sbieche e di quelle dritte sull'asse, è evidente che abbiamo sempre un diametro dato sul piano orizzontale, che è un'asse, e che l'altro suo coniugato è proporzionale a quello del sesto primitivo.

Se il cono è retto, l'asse della base obliqua è una media proporzionale tra *Lm* e *mO*; se il cono è scaleno, sarà proporzionale alla perpendicolare *gi*

[30] Nel testo originale si legge *yy*
[31] Nel testo originale si legge *yy*

sul punto *g*, visto che proviene dalla proiezione smg, e avremo *sg=Xg*: *gi*::*sm*:*mz*.

Non aggiungiamo niente in questa sede che riguardi la costruzione dei pannelli di *"doële"* piatta, è chiaro che inscriviamo nel cono una piramide, i cui lati delle superfici triangolari sono dati.

Per quanto riguarda i *"Biveaux"* si rimanda al 14esimo Probl. Del 3° libro la spiegazione per la loro costruzione.

COROLLARIO I

Dalla costruzione del pennacchio semplicemente sbieco, si può arrivare alla costruzione di tutti gli altri pennacchi con diverse obliquità semplici, come pendenza, strapiombo, o discesa, ed anche quelli le cui facce hanno una doppia obliquità, come abbiamo fatto per i Berceaux, supponendo che l'obliquità è ruotata sul suo asse o cambiata di posizione rispetto all'orizzonte.

I° Se un cono obliquo che rappresenta un pennacchio sbieco senza pendenza, la cui sezione orizzontale è il triangolo *ASE* (***fig. 108***) e la retta *AE* il diametro della sua faccia, è supposto ruotato sul suo asse *SC*, in maniera tale che compia un quarto di rivoluzione da *E* verso *A*, allora il punto *E*, che si muove nel piano *ET*, perpendicolarmente all'asse *Sc*, verrà a trovarsi in aria sopra il punto *T*, e il cono così girato, avrà la sua faccia sdraiata in pendenza, come è rappresentata in *DTFM* della ***figura 108***, e in *AxE* della ***figura 111***. Abbiamo così, in questa situazione, un pennacchio retto in pendenza. E diciamo retto perché il diametro *MT* essendo arrivato in *DF* è diventato perpendicolare all'asse *SC*.

2° Se invece di far ruotare il cono da F verso A, gli facciamo fare un quarto di rivoluzione in senso inverso, da A verso F, il punto A, cadendo sul punto M, al di là del centro C, la metà superiore di questo cono sarà l'immagine di un pennacchio retto in strapiombo. E diciamo retto perché lo stesso diametro MT che era rappresentato in proiezione soltanto da un punto C, si è piazzato ad angolo retto sull'asse SC.

3° Se invece di un quarto di rivoluzione se ne fa fare un po' di più o un po' meno, come in Gh, è chiaro che l'obliquità non sparirà, come nei quarti di rivoluzione; infatti, il diametro AE non perverrà al piano verticale per l'asse MC; è altrettanto chiaro che l'inclinazione della faccia non sparirà, come nel caso di un semplice sbieco, infatti, lo stesso diametro AE, che abbiamo supposto in un piano verticale, ne è uscito, poiché il punto A è stato trasportato in h, e il punto E è stato trasportato in G, e può tornare nello stesso piano verticale soltanto dopo una rivoluzione completa, o in un altro piano verticale differentemente girato in B. Dopo una semi rivoluzione è dunque chiaro che la faccia avrà così una doppia obliquità, una di direzione espressa da hM o GT, e l'altra d'inclinazione sul diametro orizzontale DF, espressa da hK. Che quest'inclinazione sia in pendenza o in strapiombo, sarà sempre la stessa in senso contrario. I pennacchi che si hanno in questo caso si chiamano pennacchi sbiechi in pendenza o in strapiombo, e se le imposte non sono di livello, si chiamano rampanti.

4° Se in una di queste situazioni s'inclina l'asse, che abbiamo supposto orizzontale, senza girarlo verso A o B, si avrà l'immagine di un pennacchio in discesa o rampante, come lo sono alcune di queste aperture, che chiamiamo abajours in discesa retta.

5° Infine se l'inclinando l'asse, lo si gira verso A o verso B, vi si aggiunge la circostanza della discesa sbieca.

E' dunque chiaro, grazie a questa esposizione delle differenti situazioni di un cono obliquo, che le differenze dei pennacchi non sono altro che le diverse posizioni del pennacchio semplicemente sbieco, che dobbiamo guardare come fondamentale, al quale tutti gli altri casi si possono rapportare.

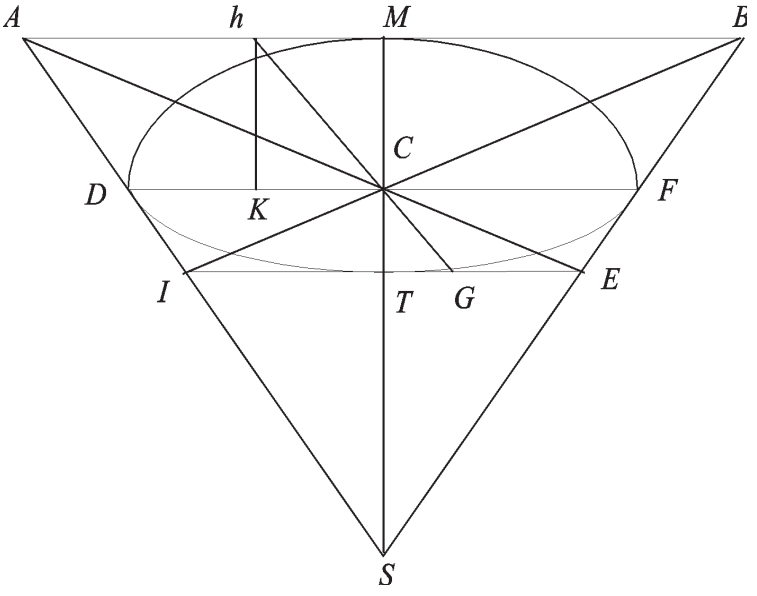


Fig. 108: piano orizzontale di un pennacchio sbieco senza pendenza

COROLLARIO II

Da ciò segue che è non solo l'elemento dei pennacchi obliqui con una faccia, ma anche di quelli che ne hanno due o più, facenti degli angoli sporgenti o rientranti, come sono i pennacchi negli angoli, i quali hanno due facce, e i pennacchi a spigolo, i quali ne hanno tre o più.

In effetti, si può considerare il pennacchio ad angolo di ***figura 122*** alla tavola 47 come due mezzi pennacchi sbiechi addossati ruotati in senso contrario, tali sono *BNS*, *DNS*. Se le loro facce sono circolari, si hanno due quarti di coni scaleni, se invece sono ellittiche, rialzate o ribassate, si hanno due quarti di coni obliqui su di una base ellittica, e se sono paraboliche, si ha una metà di cono retto circolare, tagliato obliquamente da due sezioni contrarie. Importa poco che le facce del pennacchio, che sono sporgenti, siano uguali o ineguali, più o meno sbieche o ancora, più o meno grandi; sono soltanto dei casi delle sezioni del cono, che non devono creare nessun cambiamento alla superficie interna della pietra; perché se volessimo rifarci ad una curva di sesto della faccia per ogni spigolo in particolare, succederebbe che la faccia della pietra non sarebbe più un'unica superficie conica continua, ma composta da due, interrotta da un angolo verso la chiave, o da più angoli se il pennacchio fosse a più spigoli.

NOTA

Da queste osservazioni ne consegue che si può applicare per i pennacchi il metodo generale di Desargues, per ciò che riguarda la ricerca della più grande obliquità della faccia nei confronti dell'asse del cono, che è secondo il suo linguaggio, l'angolo del "sottoasse con l'asse". Ma il resto dei risultati ottenuti con questo metodo, non è valido allo stesso modo per i pennacchi quanto per il Berceaux; L'autore si è confuso un po' a causa del grande numero di assi.
Innanzi tutto, per quanto riguarda l'arco retto, è chiaro che l'oggetto è interamente diverso.
Inoltre, è stato obbligato a moltiplicare gli assi ad ogni concio, quando le facce dei pennacchi sono ellittiche; ma quello che lui chiama asse è quello del cono solo per coincidenza, è la sezione di un piano orizzontale dal prolungamento di un letto. Per ottenere il vero asse avrebbe dovuto cercare la sezione circolare di queste specie di pennacchi, i quali, anche se dritti (retti) e cioè il cui asse è perpendicolare alla faccia, sono dei semi coni intrinsecamente scaleni, di cui possiamo trovare la base circolare, con il problema 33 del secondo libro, e di conseguenza il solo ed unico asse del cono; poiché non si può chiamare con tale nome la sezione del piano del letto prolungato con il piano dell'orizzonte, quando il letto non è nella direzione dell'asse del cono, come nei pennacchi di faccia ellittica, le cui teste sono di taglio, visto che non tende verso l'asse del pennacchio.

USO

I pennacchi obliqui (sbiechi) sono alcune volte degli ottimi accorgimenti per raccordare delle parti angolari, che si trovano negli edifici, quando il sito è per sua natura irregolare, oppure quando in un edificio regolare si trovano delle parti di torre rotonda addossate a dei setti murari rettilinei, che creano necessariamente degli angoli misti, che si devono correggere rendendoli rettilinei con un'aggiunta di spessore al muro convesso perché questi angoli sono spiacevoli da vedersi. So bene che un buon architetto trova il modo di nasconderli e di impiegarli per renderli funzionali nell'abitazione; ma vi sono casi dove non è conveniente trattarli in questo modo, come quando si vuole creare alcuni varchi di comunicazione; tale è il caso in cui mi sono adoperato per la composizione del piano dell'Ospedale Militare che sto costruendo attualmente a Landau su disegni miei, per mille malati.
Le sale sfociano in una cappella rotonda, che ne occupa il centro, e per metterci delle porte e delle finestre di comunicazione, che espongano l'interno della cappella alla vista delle sale ho recuperato e voltato i quattro angoli rientranti con altrettanti pennacchi, i quali, nonostante siano sbiechi e ribassati, sono gradevoli alla vista, alla quale presentano in ogni lato delle sale, un oggetto, dove non si nota nessuna irregolarità particolare, e attraverso il quale si vede la cappella ed un'altra sala da un estremo all'altro.

PENNACCHIO RETTO IN PENDENZA

Primo metodo, per mezzo di una nuova trasposizione

Allo stesso modo di come abbiamo tracciato le volte a botte dritte in pendenza, considerandole sbieche senza pendenza, possiamo fare il disegno del pennacchio retto in pendenza, come se fosse un pennacchio sbieco senza pendenza, la cui obliquità della faccia sul suo asse sarebbe uguale a quella della pendenza sul piano orizzontale.
Sia (figura 110) il triangolo SCH la sezione verticale dell'asse del pennacchio retto in pendenza, presa al posto del piano orizzontale.
Avendo fatto HT perpendicolare sull'asse SC, la retta CT rappresenterà l'indietreggiamento della pendenza nel mezzo della chiave, che supponiamo data, per determinare l'inclinazione della faccia, di cui CH è il profilo, sul quale tracceremo CA perpendicolare a CH e uguale al semi diametro della faccia, cioè di CH se il sesto è circolare, oppure più o meno grande se è ribassato o rialzato; lo si supporrà per ora circolare.
Dal punto C come centro, e con il raggio dato tracceremo il quarto di cerchio B1h, per la faccia della pietra e il suo concentrico A5H, per l'estradosso, e avendolo diviso in parti uguali in numero pari alla metà del numero dei conci di tutto il prospetto, in questo caso in due parti e mezzo per cinque conci. Nei punti 1, 2, h, tracceremo da questi punti delle rette perpendicolari su CH, come 1F, 2f ed altre 1P, 2p su AC.
Dal vertice s del pennacchio tracceremo nei punti F e f delle linee sF e sf che saranno le proiezioni verticali dei giunti di letto, dei quali troveremo le vere lunghezze, come davanti agli altri pennacchi, portandole su di una base di profilo sg, cioè sF in sG e sf in sg e poi tracceremo le perpendicolari $g2^f$, $G1^f$ uguali a f2, F1, e tracceremo dal vertice s le rette $s2^f$, $s1^f$ che rappresentano il valore dei giunti di letto che cerchiamo.

Avendo scoperto i veri valori dei giunti di letto è chiaro in questo passaggio, come anche in quelli precedenti, che disponiamo di tutto il necessario per costruire i pannelli.
1° Quelli della faccia piatta delle pietre saranno fatti da triangoli scaleni, formati da due di questi giunti e da una corda 12 dell'arco in prospetto; lo sviluppo di questi pannelli sarà la piccola metà della figura 110 rappresentata per ogni lato della chiave.
2° I pannelli di testa sono dati dall'elevazione in AB15, eccetera.
3° Quelli di letto si ricaveranno per mezzo dei giunti di letto e dei raggi del prospetto (della faccia), come per il pennacchio sbieco di figura 106.
I biveaux di letto e di faccia, e, di faccia e di testa, come per il pennacchio.
La dimostrazione di questa operazione è tutta racchiusa nella nota, dove abbiamo mostrato che il pennacchio sbieco ruotato sul suo asse di un quarto di rivoluzione ne crea uno in pendenza o in strapiombo.

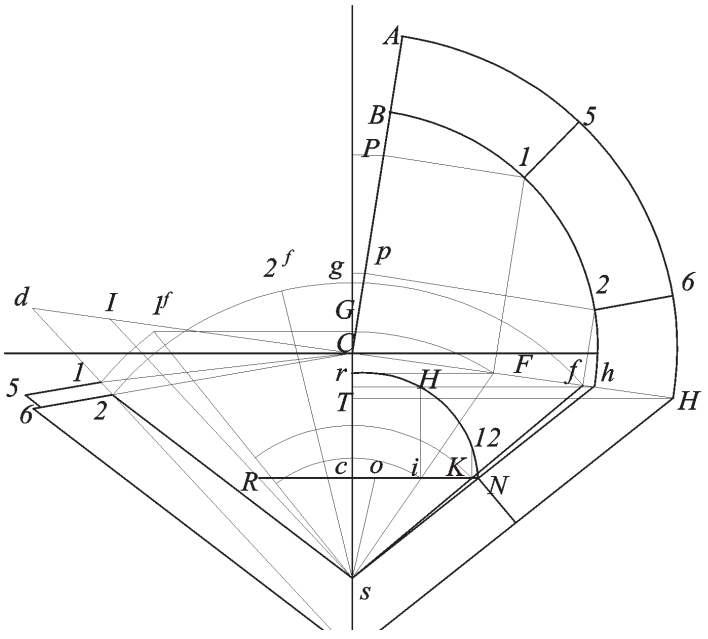


Fig. 110: disegno del pennacchio retto in pendenza come se fosse un pennacchio sbieco senza pendenza; ricerca delle vere lunghezze dei giunti di letto

TRATTATO

Secondo modo, con la proiezione ordinaria

Si può fare il disegno del pennacchio in pendenza, come tutte le obliquità, in due modi:

1° con inscrizione o circoscrizione di un cono retto su di una base circolare o ellittica.

2° formando immediatamente un cono scaleno, se si vuole fare la faccia (il prospetto) circolare.

P. Deran segue il primo metodo, prendendo per sesto primitivo un arco verticale sul diametro della faccia in pendenza.

M. De La Rue, al contrario, ha preso come sesto primitivo l'arco in prospetto, che sistema in posizione verticale per il contorno, poi, con un profilo lo stende sulla pendenza data, come P. Deran ha fatto nei disegni delle volte a botte in pendenza.

Il secondo metodo sembrerebbe preferibile in quanto non varia il sesto primitivo che abbiamo scelto, mentre il primo lo varia con l'obliquità della pendenza; in effetti, se il piano verticale è circolare la faccia in pendenza diventa ellittica; ma bisogna guardarsi dall'imitare quest'ultimo autore citato, nell'esempio che da del pennacchio in pendenza ribassato, invece di fare una semi ellisse sul suo asse maggiore, fa un segmento di cerchio, di cui mette il centro al di sotto dell'imposta; perché ne risulta infallibilmente una gobba nella nascita della volta.

Daremo un esempio più regolare di sesto ribassato che servirà per quelli rialzati e circolari, quest'ultimo essendo ancora più semplice.

Sia (figura 111) l'angolo rientrante BsD che dobbiamo voltare in pennacchio in pendenza ribassato.

Su BD, quale asse maggiore di un'ellisse, e Ch preso a piacere per asse minore, avendo descritto (con il problema VII del II libro) la semi ellisse BhD, la si dividerà nei suo conci nei punti 1, 2, 3, 4, da cui si tracceranno le perpendicolari 1p, 2p, sul diametro BD, al di là del quale le prolungheremo un po' per usarle nella proiezione della pendenza.

Prolungheremo anche DB per prendervi un punto A a piacere, sul quale, avendo tracciato una perpendicolare AL vi faremo l'angolo della pendenza LAT; prenderemo successivamente le altezze Ch, p2, P1,per portarle sulla retta AT in A^{ht}, A^{23},A^{14}, dacui tracceremo delle rette parallele ad AD, che incontreranno le perpendicolari hC, 1P, 2p eccetera, prolungate al di sotto di AB in X, 1^t, 2^t, 3^t, 4^t, che saranno dei punti della proiezione del prospetto dai quali potremo tracciare a mano, o se si vuole, con un movimento continuo, seguendo il problema VII del II libro; perché è una semi ellisse, il cui asse maggiore BD, e la metà del minore CX, sono dati.

Se dal vertice s si tracciano delle linee rette sino alle divisioni di questa proiezione 1^t, 2^t eccetera, si avranno le proiezioni dei giunti di letto.

Le proiezione dell'arco d'estradosso in prospetto, se se ne fa uno, e quella dei suoi giunti di letto si troveranno allo stesso modo delle facce della pietra.

Ora bisogna tracciare i giunti di testa 15, 26, non dal centro C, come fanno gli operai, ma perpendicolarmente all'arco ellittico, seguendo il metodo che abbiamo dato nel problema X di questo IV libro, parlando delle volte a botte rialzate o ribassate, infatti supponiamo che questa faccia sia visibile.

Questi giunti che formeranno le linee 51,62, essendo prolungati, taglieranno il diametro AE nei punti O ed o, da cui, per i punti 1^t, 2^t, tracceremo le rette $O1^t5^t$, $o2^t6^t$, che saranno le proiezioni delle sezioni della faccia per i piani di letto.

Cercheremo poi la vera lunghezza e inclinazione dei giunti di letto nella faccia della pietra a l'ordinaria, portando su di una base di profilo sD le lunghezze delle proiezioni orizzontali $s1^t$ $s2^t$ nei punti G e g, da cui tracceremo delle perpendicolari $G3^f$, $g4^f$ che faremo uguali alle altezze del profilo della pendenza $A^{14}i$, $A^{23}k$, poi tracceremo le rette $s4^f$, $s3^f$ che saranno le lunghezze e le inclinazioni cercate.

Per mezzo di questi profili dei giunti di letto si potrà costruire il sesto della sommità del pennacchio come lo si giudicherà di proposito, o in pendenza parallelo all'arco di prospetto, o in appiombo.

Se lo si fa parallelo alla facciata, è visibile che bisogna fare in piccolo su di un diametro preso a scelta ciò che si è fatto in grande per la faccia anteriore.

Ma se si vuol fare questo sesto in un piano verticale, ne risulta un cambiamento di curva; poiché se quello della facciata è circolare, quello della sommità del pennacchio sarà ellittico rialzato, e se è ribassata,

quello della sommità del pennacchio lo sarà meno.
Sia (figura 111) RN il diametro della sommità del pennacchio, di cui si vuole fare il prospetto o testa verticale, da tutti i punti p^n, P^n o dalle linee $s1^t$, $s2^t$, che formano le proiezioni dei giunti di letto taglianti questo diametro, tracceremo delle perpendicolari p^n1^n, P^n2^n, di cui cercheremo le altezze per mezzo del profilo di ogni giunto di letto, porteremo le lunghezze sP^n, sp^n in sd^1 ed sd^2, poi dal punto d^1, d^2 si tracceranno delle perpendicolari a sD, che taglieranno i profili dei giunti di letto $s3^f$, $s4^f$ nei punti 4°, 3°; le lunghezze $d^14°$, $d^23°$ saranno le altezze degli appiombi dei giunti, che arrivano alla sommità del pennacchio dal lato della chiave, e gli altri in senso opposto serviranno per l'altro lato del sesto. Per i punti delle loro estremità tracceremo la curva R1234N, che sarà il sesto che cerchiamo; oppure ci accontenteremo di cercare il semi asse verticale mu, il quale raddoppiato darà l'asse maggiore, per mezzo del quale, insieme a quello minore RN dato o preso a piacere, descriveremo la semi ellisse del sesto di testa della sommità del pennacchio, le cui parti $R1^n$, 1^n2^n, 2^n3, eccetera, saranno le teste inferiori nei letti dei conci.
Ora, abbiamo tutto ciò che è necessario per costruire i pannelli di faccia, di letto e di testa delle pietre.
1° I pannelli di faccia piatta saranno dei triangoli formati da due giunti di letto e da una corda di testa in prospetto, dal cui triangolo si rimuoverà la punta che taglia la sommità del pennacchio; e così per la seconda e la quarta faccia piatta; per esempio, avendo formato un triangolo dalle tre linee $s1^f$=$s4^f$, $s2^f$=$s3^f$, e dalla corda 12 o 34 tracceremo in direzione della punta le lunghezze s1°=s4°, s3°, fino ai giunti di letto corrispondenti, per rimuoverne un triangolo, che riduce la faccia piatta naturalmente triangolare in un trapezio, come nella figura 113 $1^d2^d2^n1^n$.
2° I pannelli di letto si troveranno con il metodo generale per tutti i pennacchi, che è stato spiegato alle figure 102 e 103, che sarà l'inverso in questo esempio, a causa del fatto che i triangoli nel vuoto del pennacchio, i quali aumentano andando verso la chiave, diminuiscono all'interno di questo. Il primo pannello, che serve anche per il quarto, si forma con le linee O1, Os, $O1^t$; il secondo con le linee o2, os, $o2^t$, e i supplementi degli angoli 1^t, 2^t, formati dal prolungamento dei lati, venendo dai punti O ed o, daranno le teste dei pannelli di letto, come abbiamo visto alla figura 104 della tavola 44 e qui alla figura 114.
Anche di questi pannelli di letto rimuoveremo la punta, che taglia la sommità del pennacchio, e per avere l'angolo del pannello di letto di questo lato, bisogna fare per questa testa inferiore la stessa operazione che si è fatta per la facciata; perché la facciata, essendo in pendenza, e la testa della sommità del pennacchio in appiombo, i pannelli di letto non sono conclusi con delle linee parallele.
3° I pannelli di testa sono dati all'arco in prospetto e a quello della sommità del pennacchio.
4° I biveaux di letto e di faccia, o di testa e di faccia, si ricaveranno con il metodo generale illustrato nel problema 14 del III libro, disponendo tre superfici di fuga; ma di queste tre superfici solo due sono date, e cioè una faccia piatta e un letto, la terza risulterà essere quella che passa per la diagonale della testa.
Possiamo anche servirci del metodo generale per mezzo della proiezione che abbiamo dato ai pennacchi precedenti; ma siccome il prospetto di quest'ultimo è in pendenza, bisogna prestare attenzione ad alcuni particolari.
Supponiamo ad esempio che si cerchi il biveaux di letto e di faccia del secondo concio.

Avendo prolungato la corda 21, figura 111, sino a farle incontrare l'orizzontale EA prolungata in O^r, si traccerà alvertice s la retta O^rs, che sarà la sezione del piano della faccia con l'orizzonte; ma siccome la retta $2O^r$ è inclinata nel piano verticale, essendo essa in pendenza, bisogna considerarne la proiezione tracciando O^r2^t per ottenere l'altezza verticale del punto 2^t al profilo della pendenza TAL, in A^{23}k, e la retta O^rs sarà la sezione del letto con l'orizzonte; così si troverà il biveau di letto e di faccia con il metodo ordinario del problema 14 del III libro.
L'applicazione della spiegazione sulla pietra non ha nulla di differente rispetto alle spiegazioni precedenti.

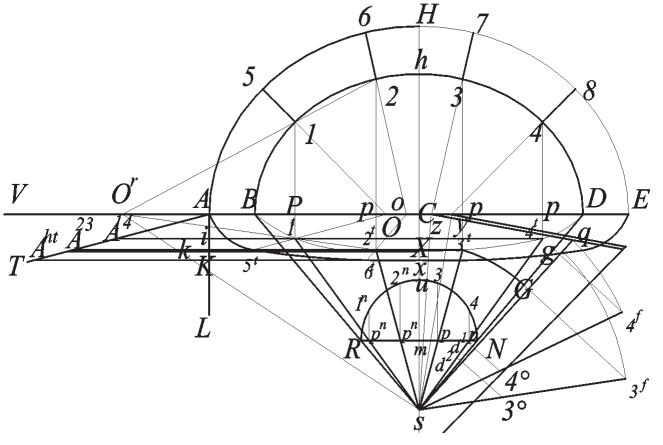


Fig.111: disegno di un pennacchio in pendenza ribassato, ricerca della vera lunghezza e inclinazione dei giunti di letto

Spiegazione dimostrativa

Si può qui riconoscere una parte della spiegazione sulle volte a botte in pendenza; la retta *AL* rappresenta in proiezione un piano verticale perpendicolare alla faccia *AE*, nel quale è l'angolo della pendenza dato *LAT* che siamo obbligati a ribaltare sul piano orizzontale; perché non lo si può rappresentare in aria, e siccome si suppone che esso si muova sul suo lato *AL*, perpendicolare ad *AE*, non risulta nessun cambiamento da questa differenza di posizione per le distanze dei punti delle altezze ribaltate *T, A^{ht}, A^{23}, A^{14}*, ne per le altezze in appiombo che sono sempre comprese nell'angolo *TAL* perpendicolarmente alla base *AL*, in questo modo le rette *Tx, htX* tracciate parallelamente ad *AE* rappresenteranno dei piani verticali, passanti per i punti *Hh* che incontreranno la linea del centro *CH* ad una determinata distanza orizzontale, che è l'intervallo *Xx*, così pure delle altre parallele ad *AE*, che daranno le proiezioni dei punti 1,*2,3,4*, nei punti *1^t, 2^t, 3^t, 4^t*, i quali stanno sulla circonferenza di una semi ellisse *BXD*, così come tutti gli indietreggiamenti di tutte le divisioni possibili della faccia *BhD*.

Questa semi ellisse riduce anche tutte le proiezioni dei giunti di letto s1^t s2^t, eccetera, le quali non sono tutte prolungate, come nei pennacchi precedenti, dal vertice s sino al diametro AE; e la direzione è anch'essa cambiata, in quanto non è tracciata dal vertice s sino agli appiombi Pppp, creando delle divisioni 1,2,3,4, ma alle loro proiezioni 1^t,2^t, 3^t, 4^t.

La ragione di ciò è logica, se si fa caso al fatto che il lato AHE, che è rappresentato per comodità di disegno in posizione verticale, deve muoversi attorno al suo diametro AE, per coricarsi lungo la pendenza TA, supposto in aria; in questo movimento tutti i punti delle divisioni 1,2,3,4, saranno sempre nei piani verticali 11^t, 22^t, che saranno espressi dalle perpendicolari 11^t, 22^t nel diametro AE.

La ragione di questa costruzione non ha niente di particolare che non sia già stato spiegato nei disegni dei pennacchi precedenti.

Riguardo al cambiamento di figura che si trova tra il sesto in prospetto e quello della sommità del pennacchio, è visibile, visto che le sezioni dei coni, tramite piani che non sono paralleli, non sono simili, eccetto il caso della sezione sotto contraria. Se si fa la testa della sommità del pennacchio coricata in pendenza con un angolo uguale a quello in prospetto, i due sesti saranno perfettamente simili, non rimarrà che ripetere in piccolo ciò che è stato fatto in grande per la faccia .

TERZO CASO

Delle volte coniche sbieche ed in pendenza

Ciò che abbiamo detto sulla costruzione della volta conica dritta in pendenza, seguendo la via della proiezione orizzontale della faccia, si applica facilmente alla volta sbieca e in pendenza, il cui arco in prospetto è preso come sesto primitivo, non è necessario darne un esempio, basta avvertire che il profilo della pendenza deve essere fatto come per le volte a botte sbieche e in pendenza stando attenti alla doppia obliquità.

Per non cadere in ripetizioni, e ciò nonostante non lasciare niente a desiderare, illustreremo un esempio dell'inverso del disegno, cioè di una volta sbieca e in pendenza, il cui sesto in prospetto è soltanto secondario, prendendo come primitiva una sezione retta o anche sbieca, che non sarebbe parallela alla faccia, come fosse, per esempio, una volta a strombatura sbieca e in pendenza, il cui sesto del colletto è dato circolare o ellittico .

Si deve considerare una volta a strombatura ADFGEB (figura 112) come una volta composta da due pennacchi, che si compenetrano su di un asse comune, e le cui basi sono ruotate in senso contrario, come i coni della figura 83 e 84 del I libro; e siccome ci occupiamo ancora soltanto di volte semplici, non è questo il luogo per trattare dell'incontro di questi due coni, e di conseguenza di una volta a strombatura completa.

Considereremo soltanto uno dei due coni ASB, la faccia è in pendenza, e la cui parte rimossa DSE può essere vista come il vuoto della sommità del pennacchio. L'altro coni FKG, la cui faccia FG non è supposta in pendenza, ricadrà nel caso del pennacchio sbieco, il cui arco in prospetto non è che secondario; così l'angolo dei due avampamenti interno ed esterno sarà la somma di quelli dei pannelli di letto dei coni, tagliati in appiombo sulla linea DE.

Dove bisognerebbe notare che se il sesto del colletto DhE non fosse primitivo, ma lo fossero quelli della faccia, ognuno per il proprio cono, quello del colletto non sarebbe più una curva piana, ma a doppia curvatura, a meno che per un caso straordinario non fossero tali come li abbiamo trovati.

Sia il triangolo ASB, il piano orizzontale del pennacchio o volta conica, che forma l'avampamento esterno della volta a strombatura, il cui asse SK, che esprime la direzione è obliquo sulla faccia AB, con la quale ha una doppia obliquità; cioè quella della direzione orizzontale, che forma degli angoli ineguali di fuga AKS, BKS, e quella della inclinazione della faccia, con la quale forma anche degli angoli ineguali, l'uno al di sopra e l'altro al di sotto dell'orizzonte, quello della pendenza essendo acuto.

Supponendo che il sesto del colletto DhE è dato in semi cerchio e perpendicolare alla direzione SK, la volta di questo avampamento sarà una porzione di cono retto tagliato obliquamente per la faccia in pendenza AxB.

E' il caso ordinario di un avampamento ben girato.

Si incomincerà cercando la proiezione orizzontale dell'arco in prospetto, in pendenza, per trovare con il modo delle proiezioni dei giunti di letto e delle altezze delle ricadute, la vera lunghezza di questi giunti, come abbiamo fatto per i pennacchi dritti in pendenza.

Da un punto B preso a nostra discrezione su AB, tracceremo BR perpendicolare a questo diametro AB, sulla quale costruiremo l'angolo della pendenza RBT, e dal vertice S del cono una parallela allo stesso diametro, che taglierà BR nel punto R; poi da tutti i punti p^1,p^2, eccetera, delle proiezioni delle divisioni del sesto primitivo DhF, tracceremo delle parallele ad AB, prolungate indefinitamente al di là di BR, sulle quali riporteremo le altezze delle ricadute del centro primitivo p^{1}1, p^{2}2 eccetera, seguendo il loro ordine nei punti 1^n, 2^n, 3^n, 4^n. Da tutti questi punti e il punto R tracceremo delle rette che taglieranno il profilo della pendenza BT nei punti 1^m, 2^m, 3^m, 4^m, per i quali passeranno delle parallele ad AB, che taglieranno le proiezioni dei giunti di letto nei punti 1^t, 2^t, 3^t, 4^t, che cerchiamo, e per i quali tracceremo a mano la curva AxB che sarà la proiezione della pendenza della faccia.

Si potrebbe trovare questi punti con meno profili, avendo innalzato soltanto l'altezza ch sul punto medio di ED, per avere il punto più alto T, da cui, avendo tracciato Tx parallela a BA, tagliando SK nel punto x, la linea Cx tracciata dal punto medio C, da BA al punto x, essendo

avrebbe dato il diametro coniugato alla linea AB, per descrivere con il problema 8 del II libro una semi ellisse AxB, che avrebbe tagliato tutte le proiezioni dei giunti di letto nei punti 1^t,2^t,3^t,4^t, che cerchiamo per due motivi; innanzitutto per avere le proiezioni dei giunti di letto, poi per descrivere l'arco in prospetto in pendenza in tutta la sua lunghezza come segue:
Da tutti i punti 1^t,2^t,3^t,4^t,tracceremo delle perpendicolari su AB prolungate indefinitamente al di là, sulle quali riporteremo al di sopra di AB le lunghezze del profilo $B1^m$ in $r1^e$, $B2^m$ in $r2^e$ eccetera e per i punti ottenuti 1^e, 2^e, 3^e tracceremo la semi ellisse AXB, che sarà l'arco in prospetto, che possiamo tracciare anche seguendo il problema 8 del II libro, sui diametri coniugati dati AB e due CX.

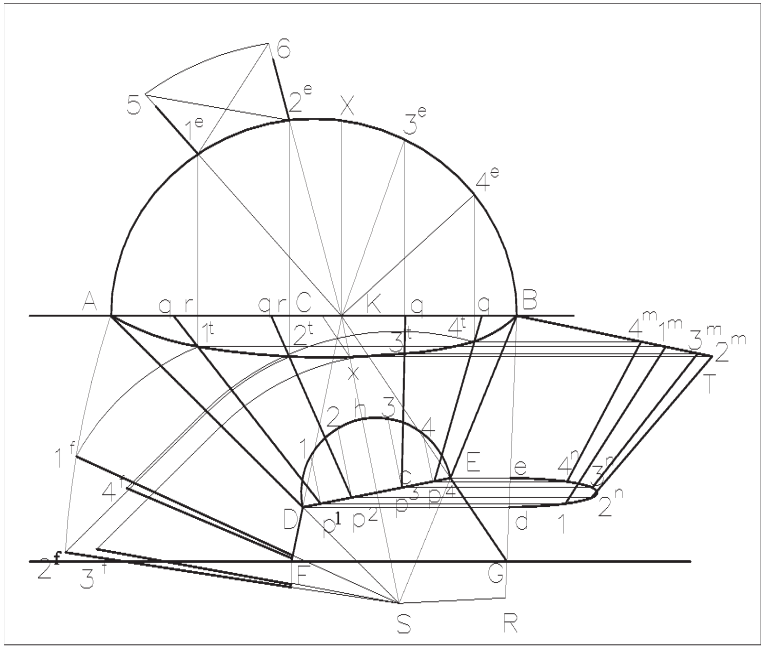


Fig. 112: rappresentazione di una volta a stombatura composta da due pennacchi che si compenetrano su un asse comune

Per le divisioni della faccia e il punto K dell'asse, tracceremo i giunti di testa che saranno un falso taglio, anche se danno un buon taglio al sesto primitivo del colletto DhE, il che è meglio nelle opere, come per gli avampamenti, piuttosto che fare le teste più regolari al di fuori e, tagli falsati all'interno in DhE, ciò nonostante sarà l'architetto a scegliere di fare le divisioni e i tagli sul sesto in prospetto se ci si trova in un'esposizione apparente; perché le divisioni delle teste dei conci diventano fortemente diverse in grandezza sul lato A, dove lo sbieco allontana di più la faccia del sesto primitivo DhE.
Essendo date le proiezioni dei giunti di letto e le altezze delle ricadute dell'arco in prospetto, abbiamo tutto ciò che è necessario per formare i pannelli di letto e delle facce, come si è fatto per il pennacchio precedente in pendenza, e per gli altri, che è inutile ripetere.
I biveaux di letto e di faccia si troveranno anche allo stesso modo che per gli altri pennacchi, con il metodo delle sezioni della faccia della pietra piana rispetto all'orizzonte, e dell'altezza della ricaduta presa perpendicolarmente sul piano orizzontale, invece di quella in pendenza sul diametro della faccia.
Oppure se si vuole, per un'altra via particolarmente semplice illustrata al problema 12 del III libro. Si farà lo sviluppo di una piramide immaginaria compresa: 1° da una faccia piatta, 2° la metà di un letto, 3° una metà formata, per esempio, per il secondo concio della diagonale 1^e6, tracciata dal punto della divisione 1^e ad un altro punto 6 preso a discrezione nel giunto di testa 2^e6, il cui sviluppo consisterà in tre triangoli messi di seguito, come si vede nella figura 113, cioè quello della faccia piatta $s^d\,1^d$, 2^d, poi una metà di letto s^i26 (figura 114) formata dalla diagonale s^i6, trasportato in $s^d2^d6^d$, infine il triangolo della divisione immaginaria passante nello spessore del concio, dal vertice del cono S, e la diagonale di testa 1^e6, che è il triangolo $s^d\,d^i\,1^d$, i cui tre lati sono dati, cioè $s^d\,1^d$ comune alla faccia, $s^d\,d^i$ uguale alla diagonale del letto $s^d\,6^d$, infine di 1^d uguale alla linea 1^e6 di figura 112.
Questi tre triangoli essendo sistemati di seguito, come si può vedere in figura 113, si prenderà sul giunto di letto e di faccia $s^d\,2^d$ un punto a nostra discrezione, per il quale tracceremo una perpendicolare bE che taglierà $s^d\,1^d$ nel punto b e $s^d\,6^d$ nel punto E, porteremo la lunghezza s^dE s^de su s^dd^i e tracceremo eb; poi dal punto b come centro, e prendendo be come raggio, descriveremo un arco verso x, e dal punto a come centro e prendendo aE per raggio, faremo un altro arco, che intersecherà il precedente in x, l'angolo ottuso bax sarà quello del biveau che cerchiamo, per formare la superficie del secondo letto.

Spiegazione dimostrativa

Abbiamo detto nel III libro che gli angoli dei piani devono essere presi su delle linee perpendicolari alle loro intersezioni comuni. Ma essendo la direzione *SK* dell'asse del pennacchio obliqua rispetto alla retta *AB* d'intersezione del piano in prospetto in pendenza e all'orizzontale, non si può prendere la misura dell'angolo della pendenza seguendo la direzione dell'asse, ne delle proiezioni dei giunti di letto che sono obliqui rispetto ad *AB*, ecco perché dal punto *S* si traccia una linea *Sq*, oppure, per non ingarbugliare il disegno si traccerà una parallela *BR* fuori dal cono, che servirà da base di profilo della pendenza *RBT*, il quale, nonostante sia sdraiato sul piano orizzontale, produrrà gli stessi effetti che

produrrebbe se fosse posto in aria in posizione verticale, per segnare gli indietreggiamenti delle altezze dei punti di divisione dei conci; perché, supponendo che la linea inclinata *BT* si muova attorno a *BR* senza cambiare l'angolo di apertura, è chiaro che il punto *T* dell'indietreggiamento maggiore e tutti gli altri, determinati su questa linea, staranno sempre a distanza uguale dal piano verticale, che passerebbe per *AB*; di conseguenza tutte le linee tracciate per tutti i punti *T* 1^m, 2^m, 3^m, 4^m, possono rappresentare dei piani verticali, che taglieranno il contorno della faccia in pendenza, e la proiezione dei suoi giunti di letto in dei punti 1^t, 2^t, che rappresentano le divisioni dei conci.
E poiché la proiezione della pendenza, secondo il teorema III del I libro, deve essere proporzionale all'ellisse in prospetto, di cui è la proiezione, e con la quale ha un asse comune AB; ne consegue che tutte le ordinate di quest'asse devono essere prolungate ad angolo retto; anche se i due piani della faccia e dell'orizzonte formano un angolo acuto tra loro attraverso la pendenza, e conservare sempre il rapporto di Bv su BT, cosa che è stata fatta per determinare gli indietreggiamenti delle divisioni della faccia sulle proiezioni orizzontali dei giunti di letto, grazie ai quali si trova il loro valore, e le misure necessarie per formare i pannelli di letto e di faccia, come negli altri pennacchi.

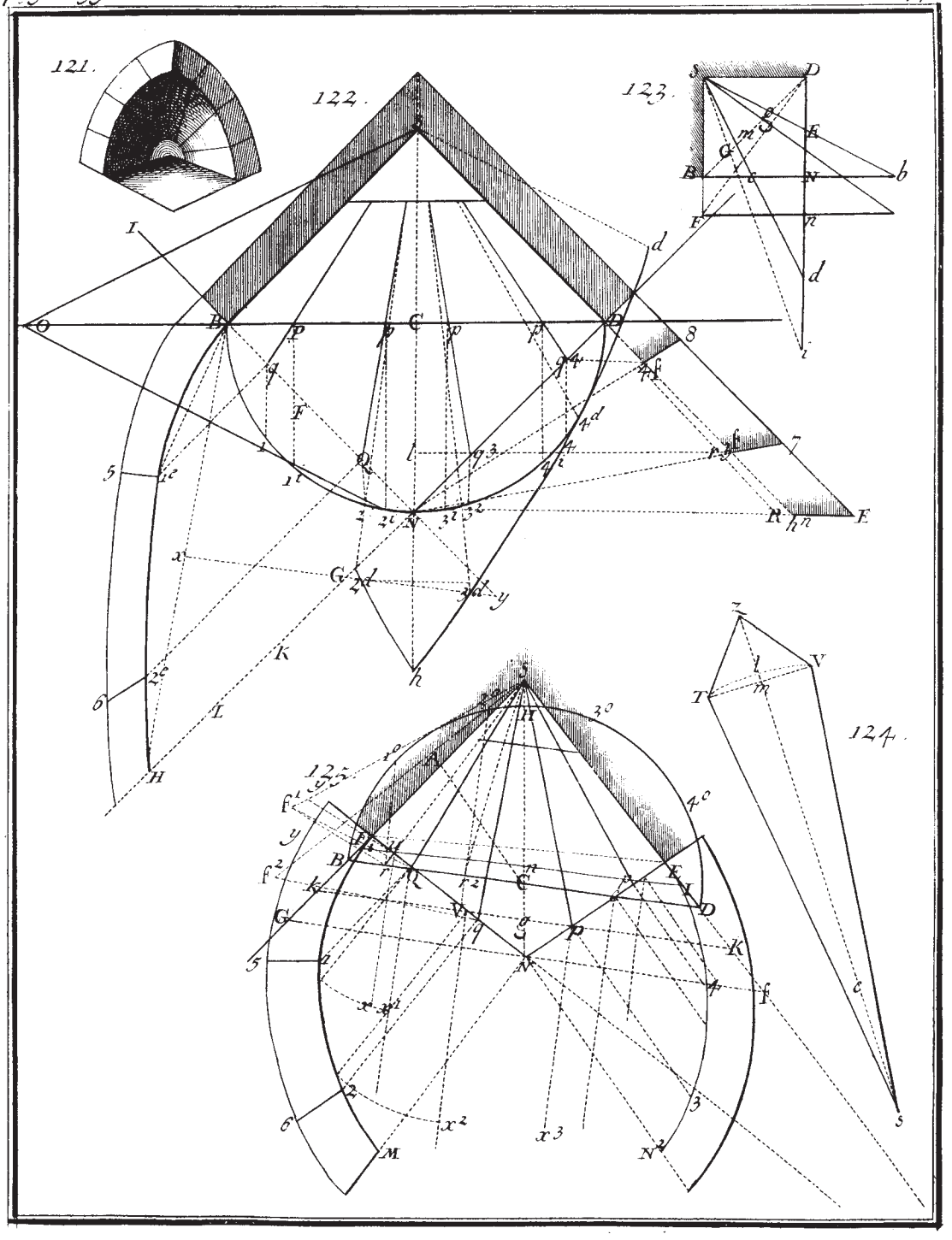
USO

Le volte coniche in pendenza, dritte o sbieche, sono molto frequenti nelle fortificazioni, dove ci sono delle cazemates o piazze sotterranee, come nei bastioni di M. de Vauban, e particolarmente nei forti marittimi, costruiti sugli scogli, voltati per stare a pelo d'acqua, servono a coprire gli avampamenti dove si piazzano i cannoni da cui viene il nome canoniere (volta a strombatura), che non è più in uso in questi giorni; e siccome l'oggetto sul quale si deve sparare non si presenta sempre di fronte ma anche di lato, le volte sbieche e in pendenza sono quasi più in uso rispetto a quelle dritte.
E' visibile che una volta a strombatura e un pennacchio differiscono soltanto nel fatto che in questo il semi cono è completo e che nella volta a strombatura è tronco verso il vertice, come se fosse un pennacchio di cui si sopprima la sommità; così il tratto dell'una va bene per l'altro, ne la riserva dell'angolo del colletto che è più aperto rispetto a quello del vuoto, che sarebbe la testa interna con la sommità del pennacchio, ne parleremo nella seconda parte, quando tratteremo le volte composte.

Fig.113-114: sviluppo di una piramide immaginaria data da una faccia piatta, una metà di un letto e dalla divisione immaginaria passante nello spessore del concio

page 259.

Pl 47.



SESTO CASO
Le volte coniche di faccia angolare nell'angolo aggettante
Nei termini dell'arte
Le volte sul cono

Le volte sul cono non sono altro che delle normali volte coniche tagliate obliquamente dalle loro facce in due parti, che formano un angolo agettante.

Quando le due facce sono uguali tra loro, e le loro basi uguali a quelle dei piedritti, e l'angolo è retto, allora la volta è chiamata *Retta sul cono;* perché il suo asse non gira più verso un piedritto che verso l'altro. Cosi è ciò che si può vedere alla figura 121. Se al contrario l'angolo agettante o rientrante è ottuso o acuto e i lati o le facce diverse la volta è chiamata *Obliqua sul cono* .

Fig.121 Volta conica con angolo aggettante

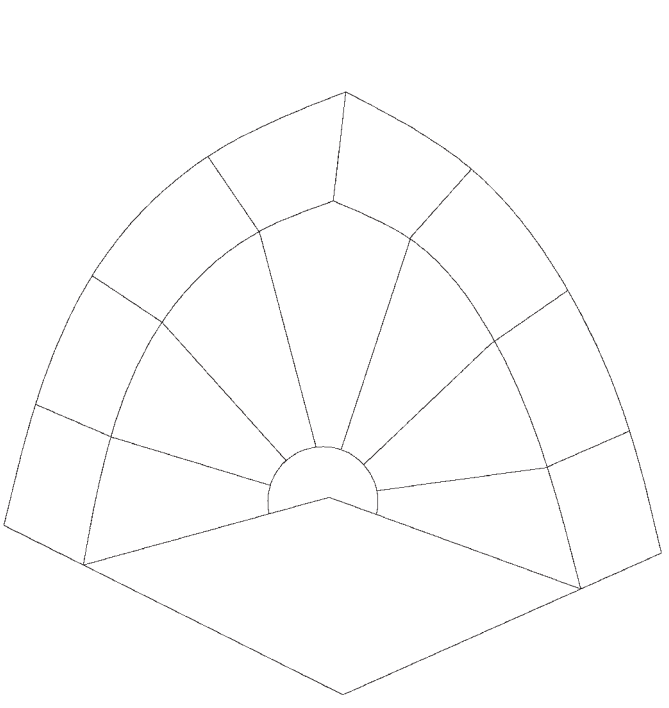
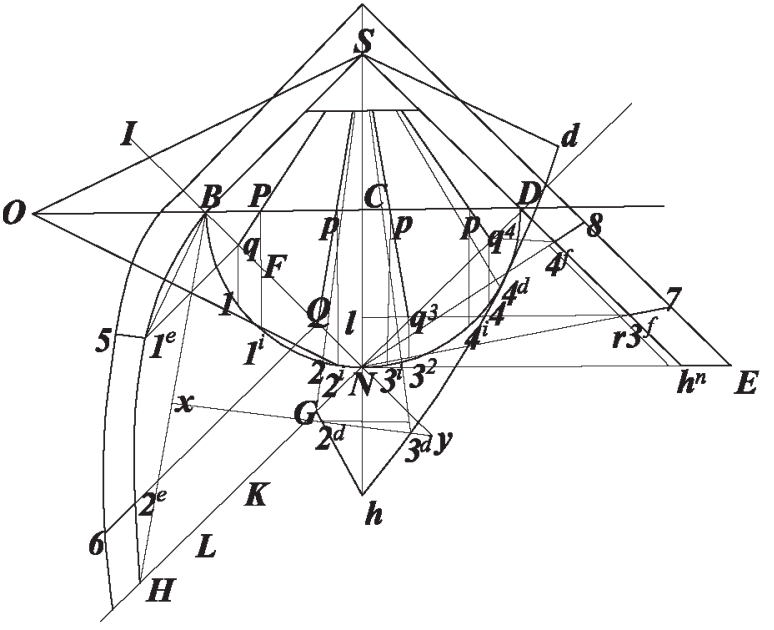


Fig.122 Costruzione geometrica della volta



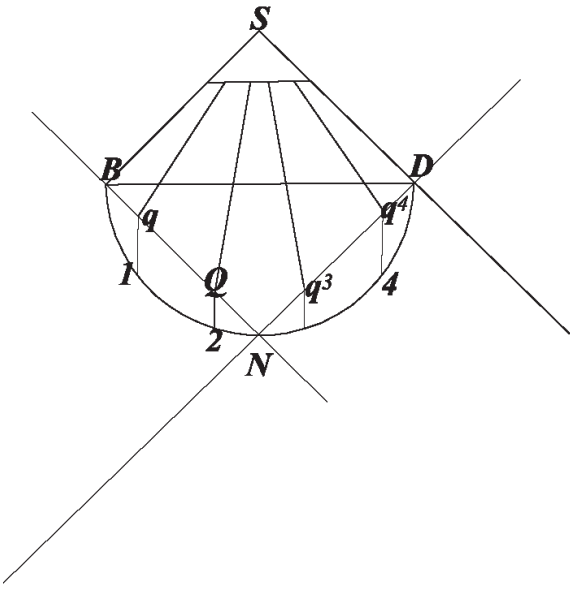
Prima Specie
Volta retta sul cono

Possiamo stabilire che questa volta sia una porzione di un cono retto o di un cono scaleno.

Trattato
Prima disposizione

Sia il quadrato *BNDS*, la proiezione orizzontale della volta che si vuole in nell'angolo retto rientrante *BSD*. Dopo aver tracciato la diagonale *BD* si descriverà su questa linea, usata come diametro, un semicerchio *BND* come arco primitivo , che è qui girato dall'alto in basso. Avendolo diviso nei suoi conci uguali ai punti *1,2,3,4,* si tracceranno da questi punti delle linee parallele all'asse SN, che taglieranno la proiezione delle facce *BN*, *DN* ai punti *q* e *Q,* dai quali si traccerà da una parte delle linee rette al vertice *S*, che saranno le proiezioni dei giunti del letto , che taglieranno il diametro *BD* ai punti *P* e *p*, dai quali si alzeranno le perpendicolari al diametro, che taglieranno la circonferenza del arco primitivo *BND* ai punti *1i, 2i, 3i, 4i,* che saranno le vere divisioni dell'arco primitivo, che diventano diverse come dovrebbero essere perché quelle delle facce siano più o meno uguali, come si vede sulla curva del suo arco che cerchiamo. Se si vuole che le divisione delle teste dell'arco di faccia siano perfettamente uguali, bisogna tracciare quest'arco senza preoccuparsi alle divisioni dei conci, in seguito dividerle ugualmente,

Fig.122a. Il quadrato di base della volta BSDN è il punto di partenza della costruzione geometrica



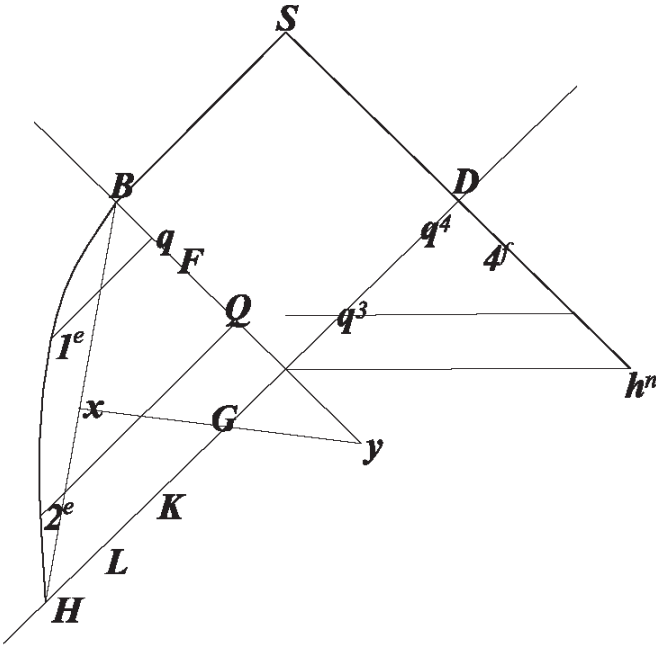
questa è meglio, ed è meno difficoltà del metodo di P. Deran e di M de Rue[1], che non fanno punti geometrici, ed ecco il metodo:

Si eleverà dal punto *N* una perpendicolare alla diagonale *SN*, che incontrerà il lato *SD* prolungato in h^n , si proietterà la misura Nh^n su *DN* prolungato in *H*, dove sarà il vertice della chiave sull'angolo *N*, e l'ampiezza di una semi-parabola, che forma l'arco della faccia di ciascun lato; e dato che quest'ampiezza *NH* é un'ordinata al suo asse *BN*, e il punto *B* il vertice della parabola, la si traccerà seguendo il Problema X del II Libro.

O meglio in un modo un po' differente, si dividerà *NH* in quattro parti uguali *G, K, L*; per il punto *G* della prima si prenderà perpendicolarmente su *HB*, che la intersecherà in *x*. La stessa *x G* prolungata fino ad incontrare l'asse *BN* prolungato in *y*, darà una lunghezza *Ny* uguale a quella che dovrà averci dal vertice *B* al fuoco *F* della parabola, e al di fuori della direttrice, passando in I sull'asse *NB* prolungato; così con il fuoco *F* e il punto *I* della direttrice, si tracceranno tanti punti quanti si vorranno alla curva della parabola, o meglio si descriverà con il movimento continuo, come spiegato nel problema citato.

[1] Viene citato il trattato di P.Deran e M de Rue , che spiega altri metodi per disegnare la volta considerata

Fig.122b.Costruzione per trovare i giunti di letto



Si possono anche trovare più punti della parabola, tirando delle parallele a *BD* per i punti q^3, q^4, della proiezione dei giunti di letto sulla faccia, gli stessi incontreranno *SD* prolungato ai punti 4^f, 3^f, in seguito dal punto *N* come centro, e con intervallo $N4^f$, $N3^f$ come raggi, si faranno archi di cerchio, che taglieranno le perpendicolari, che saranno tracciate su DN ai punti q^3, q^4, o sui loro corrispondenti $q1^e$ $Q2^e$ nei punti 1^e2^eH, che appartengono alla circonferenza della parabola. E' da notare che questo metodo presuppone che l'arco primitivo sia circolare.

Gli angoli delle teste dei letti saranno anche essi dati prolungando i raggi Nh^n, $N3^f$, $N4^f$, se si vuole che tutti i letti tendano ad intersecarsi sull'asse del cono *SN*. In questo modo $S4^f8$ sarà l'angolo di testa dei due primi letti, uno a destra, l'altro a sinistra, $S3^f7$ è quello del secondo, così per il resto.

Ma se si tracciano i giunti di testa perpendicolarmente agli archi parabolici, seguendo il metodo indicato nel problema 26 a pagina 195 del Secondo libro, i letti non tenderanno all'asse della volta. In questo caso io credo che il primo metodo, che è più adatto ad una buona e solida costruzione , è preferibile alla regolarità apparente dei giunti di testa.

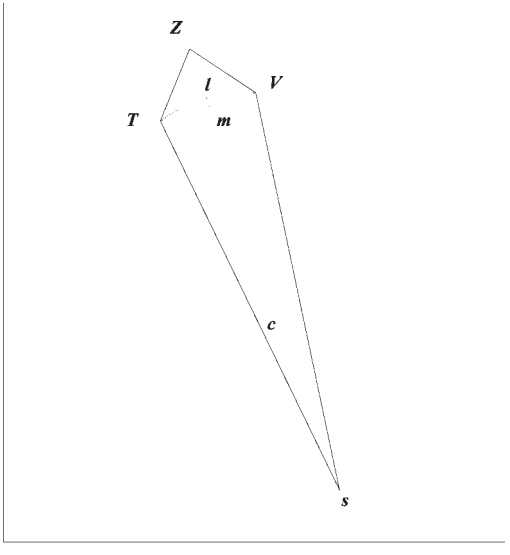
Secondo il metodo delle proiezioni dei giunti di letto dell'intradosso , e l'altezza delle ricadute delle facce, sarà meglio trovare con i metodi ordinari le vere grandezze di questi giunti necessari, per trovare i pannelli ; e dato che noi supponiamo il cono intrinsecamente retto, non c'è bisogno di cercale, esse sono date sulla pianta in $S4^f$, $S3^f$, Sh^n.

A questo punto tutto è conosciuto per fare i pannelli dell'intradosso piatto o sviluppato, e per quelli dei letti.

1° Per quelli di intradosso, basta formare un triangolo con due giunti di letto, per esempio attraverso il primo con le lunghezze *SD*, *S4*^{f}, e la corda della faccia *Bi*^{e}, così anche gli altri.
Se al posto degli intradossi piatti si vogliono avere gli intradossi sviluppati, per formare dei pannelli flessibili, al posto delle corde degli archi di faccia si prenderanno gli archi parabolici estesi , o meglio rettificati, e disponendoli di seguito, come si vede dalla figura per una metà di h e d, si tracceranno con la mano o con una curvilinea una curva *h3*^{d}*4*^{d}*d*, che sarà lo sviluppo della faccia su una superficie piana, la quale potrà piegarsi e applicarsi sulla superficie di un cono retto, nella quale si determinerà il contorno della parabola sulla semi-faccia piana di ciascuna ala; ma questo modo, che è quello degli Autori, non è affatto il migliore, noi qui riproponiamo di utilizzarne un altro più giusto per la pratica.

Se si fanno gli intradossi piatti, ci sarà ancora un altro problema, cioè che quella della chiave si trova divisa in due superfici piane *h3*^{d} *S e h2*^{d} S, che formano tra loro un angolo rientrante, circa uguale a quello che formano le due corde *2N*, *N3* dell'arco *2N3*, dico circa uguale, perché esso è un po' più chiuso di quello del *biveau* , che ne è la vera grandezza
Fig. 124 Costruzione per trovare l'intradosso dei conci

per questo noi rimandiamo il Lettore a un altro trattato, più conveniente



per la pratica e più generale, che tratteremo presto.

Si può tuttavia fare uso di quello, dal momento che abbiamo tutto il necessario per tracciare i conci; poiché noi abbiamo il pannello di intradosso piatto, e due lati della chiave, possiamo anche farne uno solo della chiave, prendendo la corda *2*^{i} *3*^{i} al posto di due corde della faccia *2*^{e} *H* di destra e di sinistra, con quella e i due giunti di letto *S3*^{f} , anche di ciascun lato si farà un triangolo *STV*, al quale, sulla stessa corda *TV*, se ne aggiungerà un'altra per il valore dell'angolo aggettante *2*^{i} *N3*^{i} , che non tenderà però all'angolo *N*; perché passerà sotto di una certa quantità, da trovare; si prenderà la lunghezza *l3*^{f} , dalla quella come raggio, e da uno dei punti *T*, o *V* per il centro, si farà un arco verso *S*, che taglierà la linea di mezzo al punto *c*, dal quale come centro e con lo stesso raggio *l3f*, si descriverà l'arco *Tl V*, dal quale si porterà la freccia lm in *3*^{f}*r* su *l3*^{f} della figura 122 poi dal punto *S* per r si tirerà la linea *SR*, si porterà anche la distanza *rR* su *Sz* di *M* in *z*, e da questo punto *z*, si tracceranno linee ai punti *T* e *V*, il trapezoide *STzV* sarà il pannello di intradosso piatto della chiave, di cui il punto z è sotto al punto *h* dello sviluppo, o *H* dell'altezza dell'angolo sulla stessa perpendicolare *NH* o *Nh*^{n} del profilo dell'intervallo *Rh*^{n}, è quello che mostra l'errore del trattato di M. de la Rue, che fa passare il suo pannello di intradosso piatto al vertice dell'angolo aggettante all'intradosso.
I *biveaux* di testa e di intradosso, e di intradosso e di letto, si formeranno alla stessa maniera della volta piatta, ciascuno in particolare, dalla metà delle corde degli archi delle facce prolungate, per avere la sezione dell'intradosso piatto di ciascun concio con l'orizzonte.

Applicazione del trattato alla pietra

I conci di teste unite al lato della chiave si tracceranno come la volta piatta; prima di tutto, si poserà il pannello di intradosso piatto su un paramento, si abbasserà la pietra per formare la testa con il *biveau* di intradosso e di testa; dopo di che avendo applicato su questo secondo paramento il pannello di testa, presa come altezza, *2*^{e}*651*^{e} , si avvicinerà la pietra al regolo , si appoggerà sugli spigoli dell'intradosso e del giunto di testa.

Attraverso la chiave si farà un po' meglio, perché essa è angolare a due teste, e in modo che il pannello di intradosso piatto non tocchi i quattro angoli.

Avendo utilizzato un paramento che serve da intradosso piatto, si applicherà il pannello *STzV* della figura 124, dopo di che avendo tracciato il tratto di mezzo *Sz*, si applicherà il *biveau* dell'angolo *SRE*, seguendo il quale si farà una spennacchiatura , fino a che lo spigolo dell'angolo non spanci ne a destra ne a sinistra, si farà dai punti *T* e *V* per i centro degli archi dentro al solco di questa spennacchiatura, che si incroceranno in un punto, per il quale e il per il punto *R* si traccerà una linea, che sarà lo spigolo dell'angolo aggettante.

Per il mezzo di questo spigolo, e di quelli di testa dell'intradosso *zT* e *zV*, si potrà fare le due teste di destra e di sinistra senza *biveau*, facendo cadere il regolo su questa due linee, nella misura in cui si abbasserà la pietra.

Essendo definite si applicherà il pannello *2*^{e}*H* della faccia, posando il punto *2*^{e} su *T* da un lato e *v* dall'altro, e il punto *H* sullo spigolo sopra all'angolo dell'intradosso piatto dell'intervallo *Rh*^{n}; in questa situazione

si traccerà l'arco parabolico, che sarà sufficiente per incavare l'intradosso senza queste curve cercate, che gli Autori trovano con molti passaggi, per indicare un falso contorno circolare, e una curva in posizione perpendicolare all'intradosso, anche quelle non ci sono che degli archi ellittici che possano convenire. In effetti per incavare l'intradosso, basta abbattere la pietra al regolo, appoggiata da un lato al punto *S*, se c'e,oppure sull'arco della piccola volta , fatto come noi abbiamo detto per la volta retta circolare, e dell'altro sull'arco parabolico, osservano fedelmente che questa regola è stata ogni volta diretta da un lato alla sommità *S*, ovvero posta su delle parti proporzionali alla larghezza della testa e della piccola volta ; come abbiamo detto nell'introduzione alla formazione delle superfici,è ciò che rientra nei falsi e inutili cerchi.

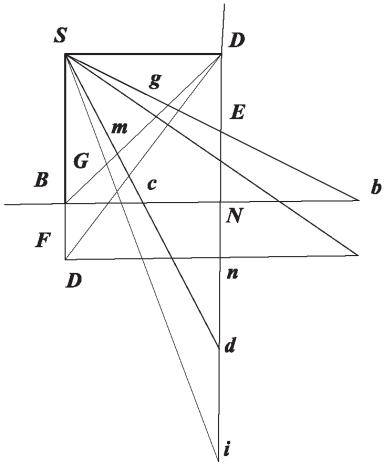
Se intanto si vuole usare per maggiore sicurezza, si può porre il cerchio di un arco di centro primitivo, si deve inclinare seguendo l'angolo acuto *CDS*, o il suo supplementare CDh^n, sul quale si appoggerà il cerchio, osservando che una parte tende alla sommità, e l'altra è allineata con lo spigolo di mezzo della testa, quello che io definisco solamente passante la chiave, poiché questa verifica è inutile per gli altri conci.

Non rimane niente da aggiungere per il taglio dei letti più che hai giunti di testa e giunti dei letti dati per guidare il metodo con cui si devono mettere le pietre.

SECONDO TIPO
Volta sul cono, retto, schiacciata o rialzata

Si può fare questo tipo di volta così facilmente come il primo, né in variazione al trattato, nel quale si sceglie un arco primitivo dentro o alle

Fig.123 Dimostrazione che la superficie dell'intradosso forma uno spigolo dal basso verso l'alto



facce senza trovare alcuna difficoltà, che induca in errore il P.Deran&Deschales, e M. de la Rue, pag. 151. Questi autori in aumento tale da poterne prendere a volontà, tramite l'arco di origine e le facce prendono una corda qualunque schiacciata o rialzata, e ugualmente circolare; è un errore facile da dimostrare.

E' chiaro che l'intradosso deve essere uniforme senza stropicciamenti ne piegature; o quello di una volta sul cono, le cui facce sono di tutt'altra curva che di una parabola, forma un angolo aggettante o rientrante tutto lungo l'intradosso, a metà della chiave; conseguentemente questi centri non sono da fare né le porzioni di cerchio, ne di ellisse.

Per provare la minore, non devo far altro che dimostrare che l'intradosso degli Autori citati è composto da due quarti di cono uguali; ma girati in senso contrario, come si vede dalla figura 80 del primo libro, tavola 7 in cui l'angolo di sommità è più piccolo che *BSD*.

Supponiamo in primo luogo (fig. 123) che il quadrato *BSDN* è il piano orizzontale della volta retta schiacciata, se si prolungano le facce *BN*, *DN*, ne esce che *NB* è uguale a *NB*, e *Nd* è uguale a *ND* è chiaro che questa linea *Bd* o *Dd* sarà il diametro intero del arco di faccia, se esso è un quarto di cerchio o un quarto di ellisse; e di conseguenza che se si allungano i punti b e d alla vertice S al fondo della volta, si avranno due semi-coni BSd, BSb uguali e girati in senso contrario, in cui l'angolo di sommità S è comune a tutti e due, è minore di quello dei piedritti della tromba *BSD* della quantità *BSE* o *DSE*.
Da cui segue che la sezione *BD* perpendicolare all'asse *SN* è composto da due semi-ellissi, i cui diametri sono le parti *Bg* e *DG*, che sono divise inegualmente dal punto m; ma i più grandi ordini di questa ellisse, che sono le loro più grandi altezze sull'orizzonte, sono a metà di questi diametri; da cui segue che l'ordine comune alle due ellissi in m è più piccolo di quelle che sono a metà; di conseguenza il punto dell'intradosso che è perpendicolare al di sopra del punto m è più basso di quelli dei lati, così la superficie dell'intradosso si abbassa , e forma uno spigolo dal basso in alto, come volevasi dimostrare.

Se si faranno i centri delle facce delle porzioni di ellissi minori di un quarto, lo spigolo della piegatura diventerà meno sensibile; ma che si facciano i piccoli, l'errore sussisterà sempre; perché sempre si potrà determinare la lunghezza del diametro di questa porzione di ellisse, che sarà sempre finita, e l'asse della parabola è infinito.

E' dunque evidente che se si vuol fare una volta retta sul cono schiacciato o rialzato, si deve fare il centro di origine su *BD* nella porzione di ellisse sul suo grande o piccolo asse; poi avendo trovato per il profilo l'altezza che questo centro da all'angolo aggettante in *NH*, si descriveranno i centri della faccia parabolica alla stessa maniera, che se la volta fosse stata porzione di un cono retto su una base circolare, di cui noi andremo a parlare.

Se al contrario, si va a prendere come arco primitivo gli archi delle facce, si darà quell'altezza *NH*, che congiungerà a proposito ,con quella, la sommità *B* o *D*, e l'asse *BN* o *DN* , si traccerà la parabola come nel problema 10 del secondo libro, e si continuerà il trattato come al

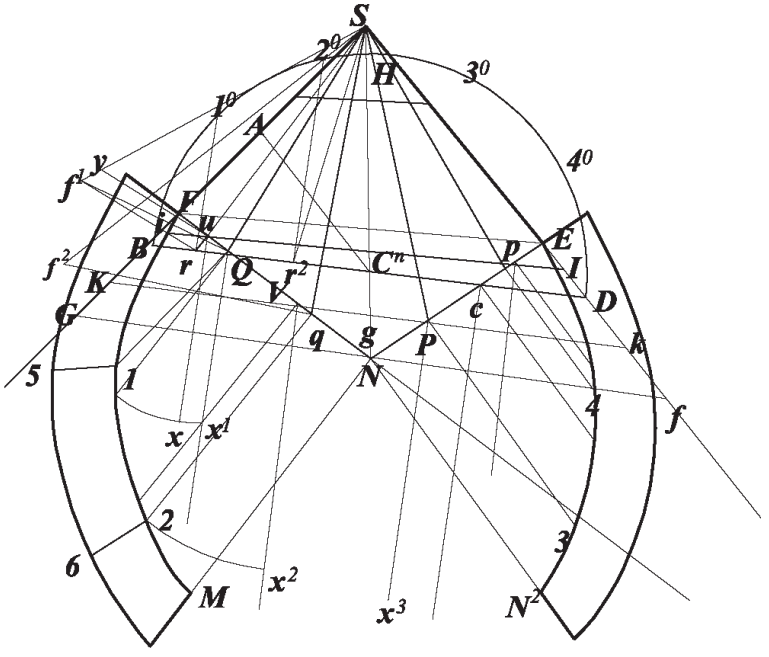
precedente, senza alcun cambiamento che sia di misura o di profilo, che non si potrà prendere sull'imposta, come questo trattato; ma si farà ciascun in particolare, come le volte oblique precedenti; questo è abbastanza facile da capire senza che sia necessario ripeterlo nella pratica.

TERZO TIPO

Volta sul cono obliquo

Gli Autori citati sono caduti in questo trattato negli stessi errori dei precedenti, prendendo per l'arco primitivo degli archi delle facce circolari o ellittiche, e non hanno parlato della volta obliqua, il cui piano orizzontale è un parallelogramma , come *FSDn*, al quale caso le facce sono sempre necessariamente delle semi-parabole; sebbene l'arco primitivo formato su *FD* sia circolare o ellittico, ciò significa che il cono, di cui la volta è una porzione, è di sua natura retto o scaleno, questo è incontestabile.
La costruzione di questo caso non avendo niente di differente dalla precedente, se non l'ineguaglianza degli assi delle parabole delle facce, non richiede che si faccia una descrizione particolare.

Fig.125 Costruzione di volta obliqua con facce e piedritti diversi tra loro, che formano un trapezio in proiezione orizzontale



Noi sceglieremo per esemplificare la volta obliqua, quella le cui facce e piedritti sono ineguali, la cui proiezione orizzontale è un trapezio, come *FNES*. (fig. 125)

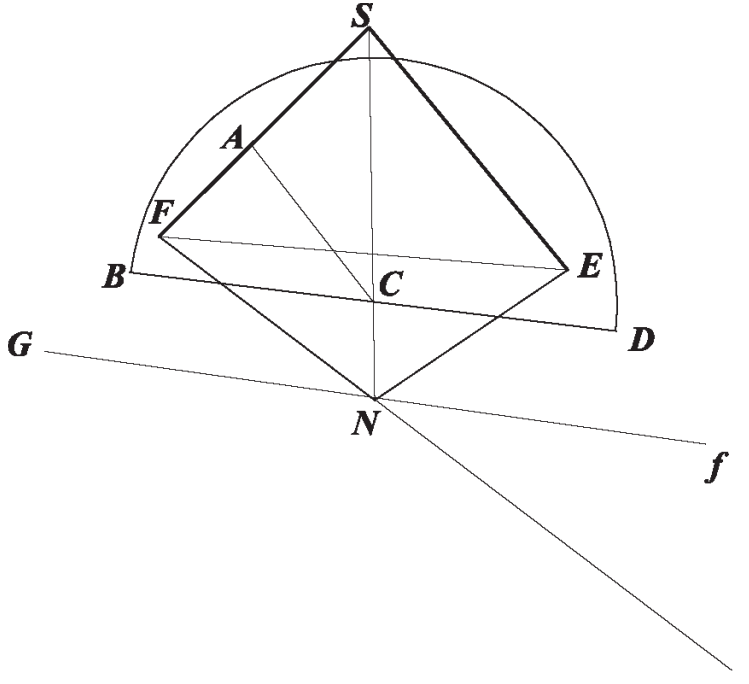
M de la Rue prende per arco primitivo la sezione verticale sulla diagonale FE; questa costruzione è buona, ma può portare a una difformità, se le facce sono troppo diverse, quella in cui è il centro secondario, ellittico su una delle due facce, potrebbe diventare una porzione di ellisse, più grande di un quarto,facendo si che l'angolo agettante non sia più alla sommità della faccia, ma al di sotto dal basso in alto.

Per evitare questo inconveniente, conviene far si che l'asse del cono sia sempre sulla diagonale *SN*, o almeno che il centro dell'arco primitivo della sezione verticale sia sempre su questa stessa diagonale. Se non è circolare, conviene cercare la sezione circolare di un cono scaleno, i cui lati e assi sono dati.

Per un punto *C* preso dove si vuole sull'asse SN, si traccerà *CA* parallelamente al piedritto *ES*, il quale incontrerà l'altro *BS* in *A*. Si porterà la lunghezza *AS* in *AB*, per avere il punto *B*, per la quale e per il punto *C* si tirerà *BCD*, che rincontrerà *SE* al punto *D*, la linea *BD* sarà il

Fig.125a La costruzione parte dal trapezio di base

diametro dell'arco primitivo , circolare o ellittico, che serve a



regolare il contorno dell'intradosso, circa come l'arco retto nelle volte cilindriche.

In primo luogo per formare i centri delle facce, che sono diverse, a causa

della differenza della loro obliquità riguardo all'asse *SN*; si traccerà per il punto *N* una parallela a *BD,* che incontrerà i piedritti prolungati in *f* e *G*, la metà *NG* sarà l'altezza dell'angolo agettante , se l'arco primitivo è circolare, la quale *NG* sarà una ordinata comune a due corde dei centri di faccia della destra e della sinistra, per il mezzo di quella, dei punti b o e presi per la sommità con il diametro della corda, che si troverà sul prolungamento *FN* o *EN* perché esso si rincontra il piedritto opposto prolungato, che non può incontrarlo dentro questa figura ma al di fuori della tavola, si descriverà nel problema 4 del secondo libro la porzione di ellisse, che è il centro dell'arco di faccia a ciascun lato.

L'arco primitivo *BHD* e quelli delle facce sono dati o un quarto di ellisse, o una semi-parabola, è a scelta dell'architetto fare le divisioni dei peducci dove gli viene a proposito, per la regolarità dell'intradosso o delle facce, essendo chiaro, come noi abbiamo detto prima, che le obliquità lasciano sempre le loro tracce o sull'intradosso o sulla faccia; non si può cercare dappertutto ; se divide la faccia in parti uguali. Gli intradossi diventano diversi nelle distanze trasversali, e se quelle sono uguali, quelle diventano molto diverse tra loro; in qualunque maniera la si faccia, servono le proiezioni di letto per trovare i valori, con i quali quelli formano i pannelli di letto e di intradosso.

Se le divisioni sono state fatte sugli archi di faccia, si avranno le altezze *1Q, 2q, P3, p4*, le quali appartengono all'angolo retto sulla proiezione *SQ, S*q, ecc. le ipotenuse Sf^1 , Sf^2 , ecc. saranno le vere lunghezze dei giunti di letto.

Se le divisioni sono state fatte sul centro di origine della sezione trasversale *BD*, come ai punti *1°, 2°, 3°, 4°*, Si faranno triangoli rettangoli con i piedi Sr^1, Sr^2 *e* $1°r^1$, $2°r^2$, la cui ipotenusa sarà la lunghezza del giunto di letto, poiché arco primitivo; ma siccome l'arco è qui ripartito al di fuori della volta in r1 e della lunghezza r^1 *u*, e parte al di dentro, come in Vr^2, si deve prolungare la base del profilo dentro quest'ultimo della lunghezza Vr^2, e nel rintracciare per prima la lunghezza r^1u, e per i punti *u* e *V* si devono tirare le perpendicolari alla proiezione, che incontreranno le ipotenuse o i raccordi nei punti *y,y*, che determineranno il giusto valore dei giunti di letto.

Allorché l'arco primitivo delle sezioni trasversali è circolare si possono trovare le stesse altezze delle ricadute nell'una o nell'altra maniera.

Si traccerà per i punti trovati *u* e *V*, o le proiezioni dei giunti di letto che tagliano il semi-diametro *FN* della faccia, delle parallele a *BD*, che taglieranno i lati *SB*, *SD*, prolungati in *i* e *I, k* e *K*; poi si cercherà le metà proporzionali tra le partii *u, uI*, e *kV, VK* che saranno le altezze delle ricadute richieste; così avendo elevato le perpendicolari infinite ux^1 Vx^2 su *iI* e *kK*, dei punti n e g punti di mezzo di queste linee, e delle loro metà per i raggi, si descriveranno gli archi di cerchio, che taglieranno le perpendicolari a queste linee nei punti x^1 x^2, che determineranno le altezze delle ricadute ux^1, Vx^2 che stavamo cercando.

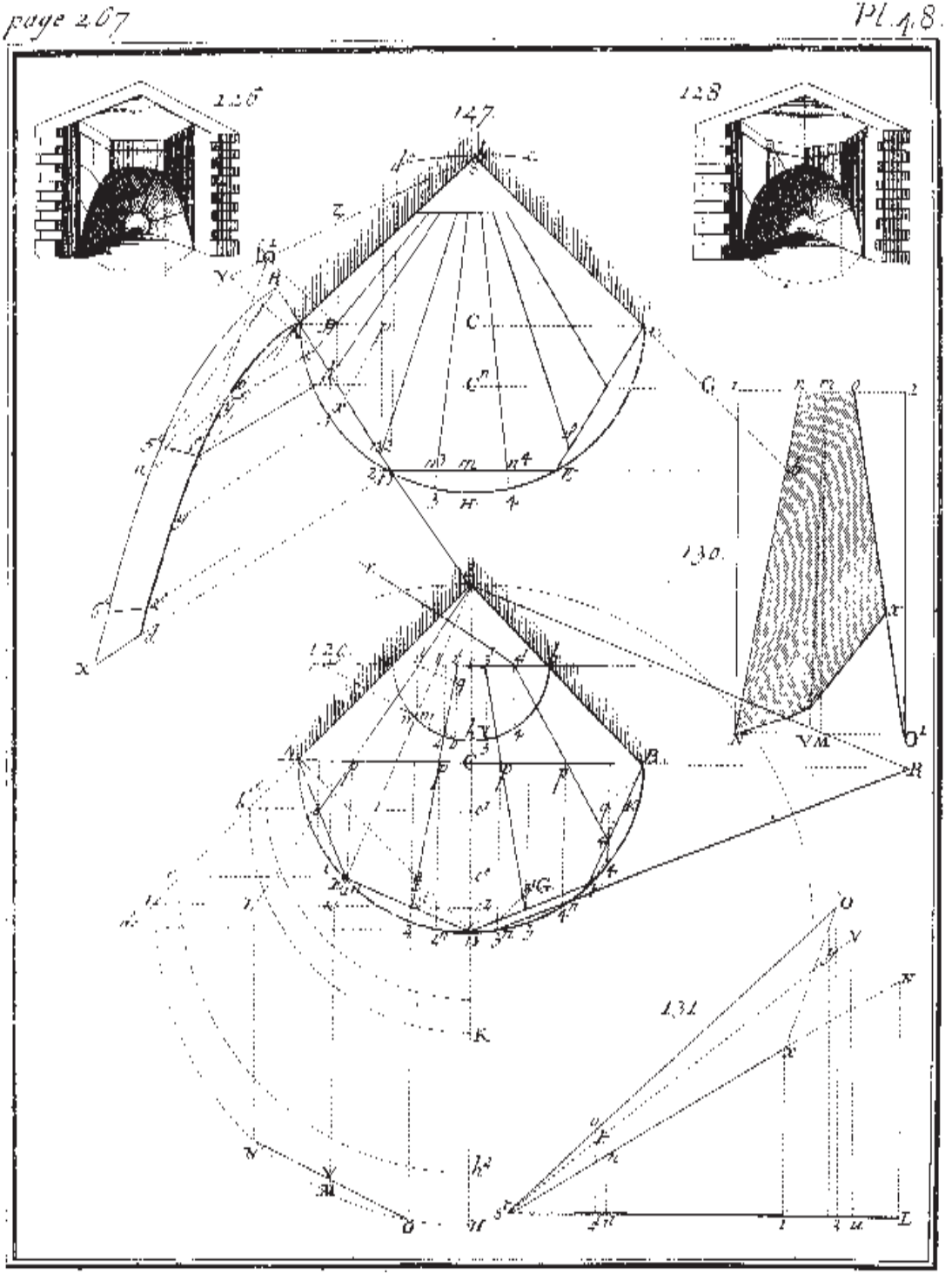
SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA

Le volte sul cono, di cui abbiamo parlato, non sono altra cosa, che dei coni tagliati da due piani, le cui intersezioni devono trovarsi nella parte più alta alla metà della chiave, affinché l'arco di faccia di un lato non sembri ricadere senza appoggi. Si può supporre, è chiaro, che se questi piani, che formano le facce, sono paralleli alle imposte di base della volta, si formeranno degli archi di parabola, come nelle volte rette circolari, se fosse così sarebbero diverse,ci si arriva allorché gli angoli dei piedritti e quelli del cono sono retti, come nelle figure 122 e 123, ma se l'angolo del cono fosse acuto, questi archi della faccia dividerebbero delle porzioni di iperbole, di cui noi non abbiamo parlato; perché in questo caso la volta spingerà troppo in fuori; così essa non potrebbe resistere se non difficilmente; allora conviene abbattere l'angolo dove si incontrano i due muri e fare una volta a *Pans*.

Ci resta solamente da spiegare la pratica che noi abbiamo dato per trovare una sezione trasversale, nella quale il punto N è il punto di mezzo del diametro.

Dopo che per la costruzione *AB =AS* e *AC* è parallelo a *SD*, che taglia l'asse dato *SN* al punto *C*, si avrà *BA, BS, BC, BD*; ma *BA=BS*; quindi *BC=1/2 BD*; di conseguenza il semi-cerchio *BH*D è la base del cono scaleno, di cui SN è l'asse dato.

Se questa linea *SN* non è stata data attraverso l'asse, essa sarà almeno data attraverso la proiezione di un piano verticale, passante per l'asse comune ai due quarti di ellisse di faccia *FM* e *EN*, e a una sezione trasversale sconosciuta, ma il cui punto *N* deve essere la metà , essa sarà determinata dalla posizione per questa circonferenza; così avendo trovato la sezione simile o si vedrà, come in *BD*, non rimane che tracciare per il punto dato *N* una parallela *Gf*, il cui semi-asse *NM*, può essere preso come si vuole a formare un centro rialzato o schiacciato; il quale determinerà l'ampiezza dell'angolo, e conseguentemente il semi-asse verticale dei centri di ciascuna faccia, se sono dei quarti di ellisse, o l'ampiezza degli archi parabolici, se le facce sono parallele alle imposte.


page 207
Pl. 48.
126
127
128
129
130
131

Problema VI

LE "TROMPE" A FASCE POLIGONALI.

IN TERMINI DELL'ARTE

FARE UNA "TROMPE" PIATTA

Quando l'ampiezza di un angolo è troppo acuta oppure quando siamo in presenza della bisettrice, questo angolo deve essere smussato con una faccia in modo da creare un esagono all'interno.
Come si vede in prospettiva nella ***"Fig. 126"*** e in proiezione nella ***"Fig. 127"***, dove le lettere *ASB* disegnano l'angolo della nicchia e *ADEB* del prospetto.

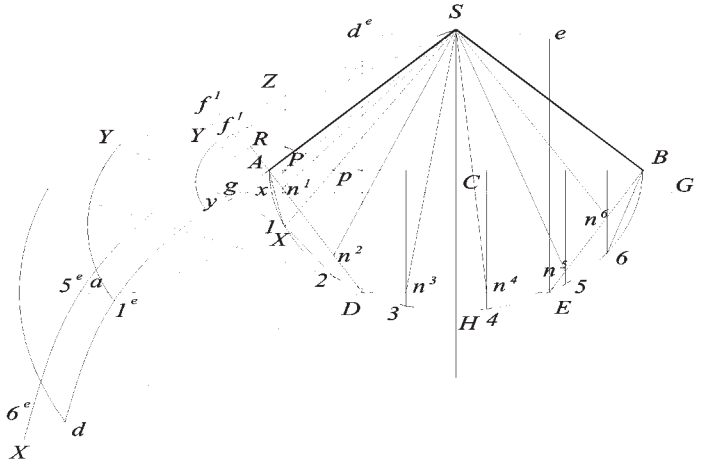


Fig. 127 Prime fasi della costruzione geometrica, proiezione sul piano orizzontale della "TROMPE" piatta.

Se si prolungano i lati *SA* e *SB* in *a* e *b*, punti di intersezione con il prolungamento del lato *DE*, si otterrà la proiezione di un semicono perpendicolare a *Sb*, che circoscriverà l'intera nicchia; poiché i lati *DA* e *EB* del poligono non sono paralleli ai piedritti *AS* e *BS* dell'angolo si incontreranno in un punto altre l'apice *S*. Si potrà notare che i piani delle facce che tagliano il cono creano delle porzioni di iperbole, il cui apice si trova nel piano orizzontale e precisamente in *A* e *B*, e la faccia *DE*, che è una parte della base del cono, individuerà un arco di circonferenza. Quanto detto fino ad ora è l'ipotesi.

Si consideri il segmento *AB* come diametro del cerchio primitivo e si tracci un semicerchio *AHB* diviso in corde nei punti *1, 2, 3, 4*, ecc. dai quali si tireranno le linee perpendicolari ad *AB* che intersecheranno le facce nei punti n^1, n^2, n^3, n^4, ... dai quali si tireranno le linee al punto *S* dando le proiezioni Sn^1, Sn^2, Sn^3, Sn^4, *ecc.*
Supponendo che si voglia mantenere una uguaglianza nelle divisioni dell'arco di circonferenza in corde, in modo da ottenere *"la doële"* (intradosso dell'arco) diviso in parti uguali, allora nella sezione trasversale *AB* si deve tirare le proiezioni dal punto *S* ai punti *P, p* in modo da intersecare le facce nei punti *x, X*, così le proiezioni daranno la larghezza di testa altrettanto ineguale all'allontanarsi dal punto *S* vertice del cono.

Con le proiezioni delle giunture *"des joints de lit"* date dalle altezze delle loro divisioni nell'arco primitivo *P1, p2*, si cercheranno le loro lunghezze dal profilo (di scorcio) di ciascuna, come abbiamo detto per il concio sull'angolo.

Per esempio per il primo SPx [1] si porterà *P1* in Pf^1 perpendicolarmente su *PS* e avendo tracciato Sf^1 lo si prolungherà verso *Y*, si condurrà da x^1 una parallela a Pf^1, che intersecherà il profilo in *Y*, la linea *xY* sarà l'altezza della divisione della testa del primo concio sullo spigolo de *"la doële"*, per conseguenza questa altezza, essendo portata in *xy* e perpendicolarmente su *AD*, darà un punto *f* sul contorno dell'arco iperbolico, e cosi facendo per tutti gli altri; questo è valido per tutti gli archi primitivi di sezione trasversale sia circolare a tutto sesto, che rialzato e ribassato.

Se l'arco è a tutto sesto allora basta condurre le parallele al suo diametro *AB* da tutti i punti delle proiezioni n^1, n^2, delle sezioni delle facce, come *Gg* da n^1, che intersecherà il lato *Sa* in *g*, e *Sb* in *G* e si prenderà la mediana proporzionale tra gn^1 e n^1G; questa linea sarà una ordinata dell'iperbole *Ayd*, che è l'arco delle due prime fasce della faccia sia a destra sia a sinistra, il quale arco sarà disegnato come lo abbiamo detto altrove.

Questa mediana proporzionale si trova come lo abbiamo spiegato nel tratto precedente, mandando una perpendicolare su *gG* al punto n^1, come n^1z; poi dal punto C^n come centro, e la metà *gG* come raggio, si farà un arco che intersecherà la perpendicolare n^1z nel punto *z*, la linea n^1z sarà quella che si cerca per fare l'arco delle facce iperboliche.

Per quanto riguarda la parte di fronte del lato *DE*, non si tratta che di fare un arco di cerchio $d^e e$ dal punto *m* preso come centro, con raggio *ma*, questa è una cosa molto semplice.

Il resto delle operazioni di questo trattato riguarda i conci sull'angolo, la procedura è sempre la stessa, tanto per formare i pannelli di letto che di *"la doële"*, l'unica differenza è sui conci (porzione di arco) che hanno le teste angolari come in *D* e *E*, si possono pensare come una parte di concio dritto e poi ritagliare le parti oblique che rimangono Dn^2, En^5 con il *"biveau"* (squadro) dell'angolo *DEB* messo orizzontalmente oppure con il metodo che stiamo per spiegare nella ***"Fig. 130"***.

La più naturale e miglior disposizione per la solidità dei conci sull'angolo, quando l'arco primitivo e circolare e perpendicolare all'asse, è di seguire

[1] Nel testo originale il punto *x* è indicato come x^1.

la direzione dei letti che tendono verso quest'asse.
Per evitare che queste disposizioni provochino falsi tagli di testa sugli archi iperbolici delle prime fasce, si possono seguire le regole di perpendicolarità alla tangente dell'iperbole al punto 27 di pag.197 del II libro, oppure di una maniera più facile.

Si farà una semiiperbole uguale alla precedente *Ayd*, a tale distanza *AR* del punto *A* della *"doële"*, quella che si giudicherà più conveniente per lo spessore della volta, poi dal punto *D* si tracceranno le linee, dalle divisioni del primo arco *Ayd* prese a piacere oppure date dalle giunture di testa 1^e, 2^e, le linee $D1^e5^e$, $D2^e6^e$, e dal punto *R* si tracciano le linee parallele alle corde delle testa che incontreranno le linee tracciate dal punto *D* nei punti *5e 6e* che saranno al contorno dell'estradosso e da quelli di *"doële"* si tracceranno le giunture di testa; così le linee $R5^e$ parallele alla corda $A1^e$ che intersecano quelle tracciate dal punto *D* passando da 1^e, darà le giunture di testa 1^e5^e, e la parallela alla corda 1^ed passando per il punto 5^e, darà il punto *X*.

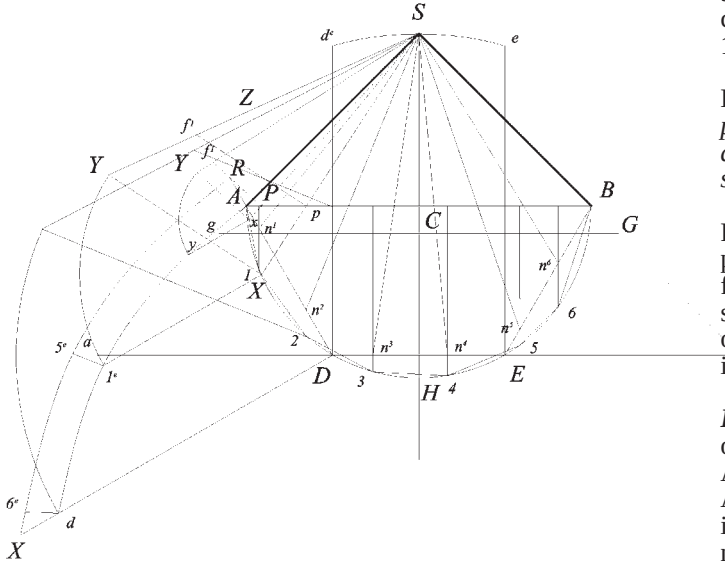


Fig. 127a Costruzione geometrica della proiezione sul piano orizzontale della "TROMPE" piatta.

E' abbastanza inutile tracciare queste giunture di testa, poiché gli squadri di letto di *"doële"* le danno naturalmente nel lavoro di intaglio.

Quanto a quegli del fronte di mezzeria, di cui *DE* è la proiezione e di cui noi abbiamo tracciato l'elevazione in $d^eh\,e$, è chiaro che le giunture di testa (se ce ne erano) sarebbero tracciate dal centro *m*, preso sull'asse *SH*, e la linea *DE*, poiché è una porzione di una base circolare di un cono retto.
Le altezze dell'elevazione corrispondenti alle divisioni delle giunture del letto, essendo date, sarà facile trovare le vere lunghezze delle giunture di letto Sn^1, Sn^2, perché sono come negli altri conci le ipotenuse dei rettangoli formati dalle altezze n^11^e *e* n^22^e e le proiezioni Sn^1, Sn^2.

I pannelli di *"doële"* saranno così dati poiché si conosce i tre lati cioè due letti di giunture e le corde all'arco iperbolico della faccia *Ayd*, compreso tra le divisioni 1^e2^e, $A1^e$.

2.o I pannelli di letto saranno così dei trapezi di cui i quattro lati sono dati, e gli angoli di testa si trovano dal profilo come precedentemente spiegato.

3.o I pannelli di testa sono delle fasce anch'esse ad arco.

4.o Gli squadri di letto di *"doële"* si trovano cercando le sezioni della *"doële"* con la linea di orizzonte grazie al prolungamento di una corda dell'arco iperbolico $A1^e$ per il primo concio, *1e, 2e* per il secondo, fino all'incontro dell'asse orizzontale *DA* dell'iperbole prolungata in *O*.

5.o Gli squadri di testa e di *"doële"* si costruiranno con gli stessi principi, come è stato detto prima e a proposito del concio piatto, e al problema 14 del III libro.

LA MANIERA GENERALE
per fare tutti i tipi di volte a nicchia coniche con delle fasce angolari, a due o più fasce, senza conoscere le curve degli archi visti di fronte supponendo una curvatura di forma circolare.

Poiché abbiamo dato in precedenza delle costruzioni molto semplici per tracciare gli archi di ellisse, di parabole, di iperboli e di archi per le fasce delle nicchie possiamo mostrare che si può pervenire a formare le stesse figure per assurdo, senza conoscerle cominciando ad inscrivere ogni concio in una porzione di cono retto, da cui si toglie quello che è in eccesso alla forma del concio inscritto.

Fig:129. Sia una nicchia a fasce nell'angolo ASB, di cui la proiezione orizzontale della sua faccia è a 4 fasce, e il suo monaco un ottagono AEDFB. Dal punto C, in mezzo ad AB, avendo tracciato un semicerchio ADB, lo divideremo in segmenti non uguali in quanto risultano troppe ineguaglianze alla testa delle fasce, come lo abbiamo fatto notare nella nicchia sull'angolo, ma dividendola in maniera ineguale, oppure nella maniera che abbiamo proposto in questo trattato, che si tratta di prendere le intersezioni *Gg* alle perpendicolari delle divisioni uguali con la corda *AD*, oppure facendo solo caso alle divisioni arbitrarie delle fasce *AE, ED, D F, F E*, come in questo esempio, le proiezioni delle giunture *S* 1^i, *S* 2^i, *S* 3^i, *S* 4^i.

Avendo prolungato il lato *SA* verso *d*, si condurrà da tutti i punti della divisione dei letti 1^i, 2^i, 3^i, 4^i, e dagli angoli del poligono *E, D, F,* delle perpendicolari all'asse ossia tratto medio *SD*, che intersecheranno nei punti c^1, c^e, c^2 *D*, e il lato *SA* prolungato ai punti *k* e *J d*.

Dai punti c^1, c^e, c^2, *D*, come centri e prendendo per raggio la lunghezza c^1K, c^ee, c^2J, *Dd*, si tracceranno gli archi di cerchio *Kk*, eh^2, *JH*, *dS*; quest'ultimo è girato in alto perché non cera abbastanza posto nella pianta in basso.

Si metterà a piacere anche il diametro *ab* della nicchietta sul quale si traccerà il semicerchio *ahb* e da tutti i punti 1^t, 2^t, 3^t, 4^t, dove le proiezioni delle giunture intersecano il diametro *ab*, si eleveranno delle perpendicolari al diametro, che intersecheranno il semicerchio *ahb* ai punti *n, o, 3, 4.*

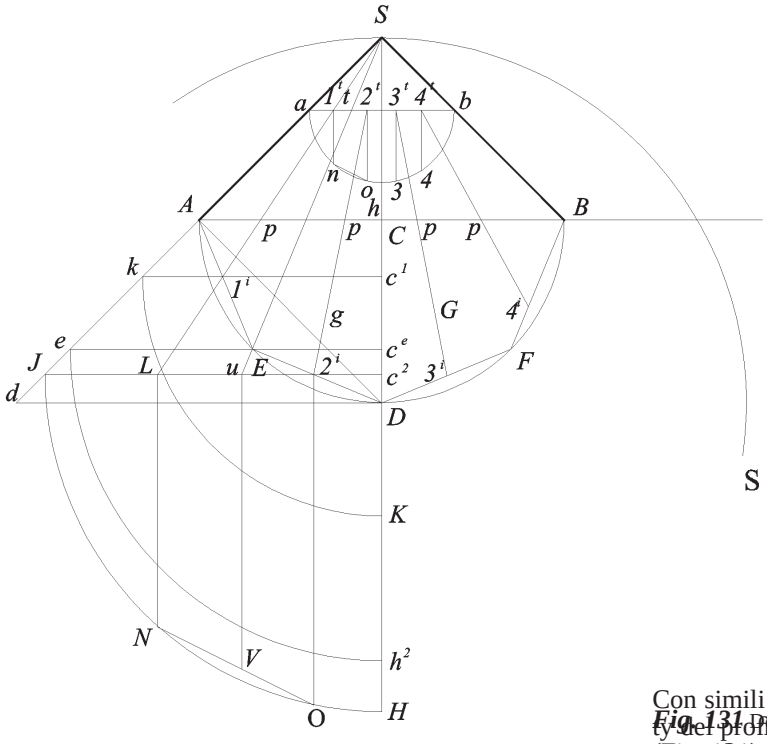


Fig. 129, Costruzione geometrica della "TROMPE" piatta

Questa costruzione essendo stata fatta supponendo che si voglia tracciare il secondo concio, di cui le proiezioni in orizzontale è il quadrilatero $S1^iE2^i$, si prolungherà $S1^i$ fino al punto *L*, dove incontra la linea Jc^2, e da questo punto *L* si eleverà su Jc^2 una perpendicolare *LN* che incontrerà l'arco *JH* al punto *N*; si prolungherà con lo stesso metodo la linea *SE* in *u* e dai punti *u* e 2^i si eleveranno delle perpendicolari *uV*, 2^iO, quest'ultima incontrerà l'arco *JH* in *O*, da dove si traccerà la corda *NO*, la quale intersecherà la linea *uV* al punto *V*.

Adesso bisogna ricercare dai profili il valore delle linee, di cui si ha solo la proiezione orizzontale, e le altezze delle perpendicolari.

Si porterà *SL* della ***"Fig. 129"*** in *SL* [2] della ***"Fig. 131"*** e facendo *LN* perpendicolare su questa linea uguale alla ***"Fig. 129"***, si traccerà *SN* [2] che sarà il valore delle proiezioni SL; si porterà anche su SL del profilo le lunghezze $S1^t$, $S1^{i\,3}$, del piano orizzontale, e avendo elevato 1^t, i, delle perpendicolari che intersecheranno SN ai punti n, x, la lunghezza nx sarà il valore del lato del concio, della nicchietta fino alla fascia.

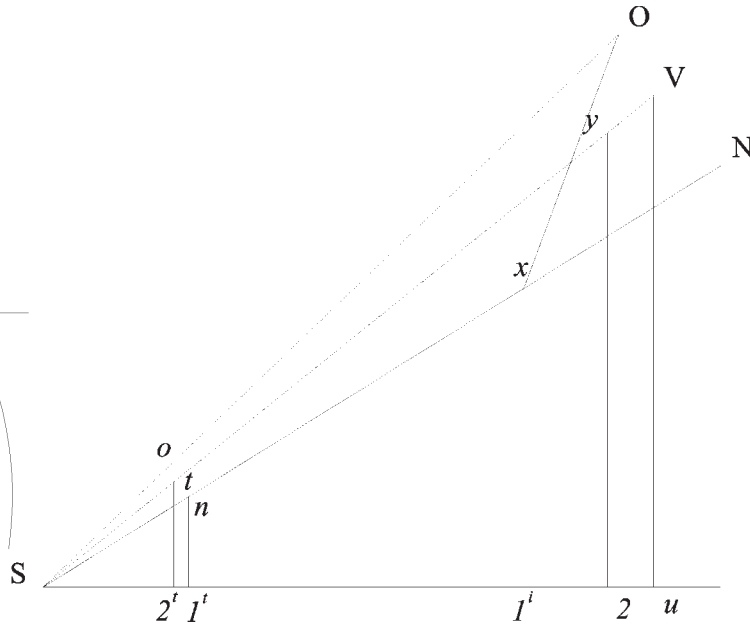


Fig. 131, Determinazione della misure dei lati del concio

Con simili profili si traccerà il valore delle linee tE della proiezione in ty del profilo e il valore della seconda giuntura 2^t, $2^{i\,4}$ in Oo del profilo (Fig. 131).

Avendo trovato questa lunghezza si potrà tracciare il pannello di "doële" piatta come segue.

Fig: 130. Si traccerà a parte una linea 1, 2, uguale alla corda NO della "Fig. 129", nella quale m è nel mezzo, si porterà da ognuno dei lati le mezzerie delle corde no dell'arco della nicchietta, in mn e mo della "Fig. 130", poi avendo tracciato dai punti 1, m, 2, delle perpendicolari indefinite alla linea 12; dei punti n e o come centri e per raggi le lunghezze del lato *SJ* della ***"Fig. 129"***, si faranno due archi che intersecheranno le linee *1N, 2O* [5] ai punti *N* e *O* [5], il trapezio *nNOo* sarà la *"doële"* piatta di una

[2] Nella figura originale la lettera *S* è sostituita dalla lettera *S*'.
[3] Nella figura originale la lettera 1^i è sostituita dalla lettera *i*.
[4] Nella figura originale la lettera 2^i è sostituita dalla lettera *2*.

nicchia retta, che avrebbe per base Jc^2, la quale è al di la del concio a fasce di una quantità, di cui la proiezione è il quadrilatero 1^i *L* 2^i *E* 1^i, di cui i valori di tutti i lati sono conosciuti; così per rappresentare la *"doële"* dal basso, si porterà *ox* dal profilo della ***"Fig. 131"*** in *ox* della ***"Fig. 130"*** la linea *NV* della ***"Fig. 129"*** in *NV* della ***"Fig. 130"*** per tracciare *Vm*, sulla quale si porterà la lunghezza *ty* del profilo ***"Fig. 131"*** in *my* della ***"Fig. 130"*** e dai punti *Nyx* si condurrà le linee rette *Ny*, *yx*, che formeranno la testa angolare della *"doële"* piatta *nNyxo*, di cui si deve trovare la figura e la dimensione.

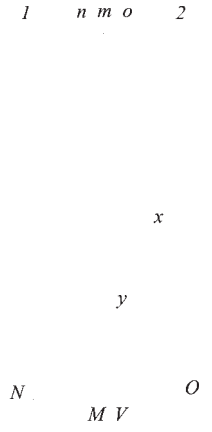


Fig. 130. Determinazione delle altezze del concio.

Per tracciare e tagliare la pietra rimane solo da trovare le misure angolari di letto e di *"doële"*, e di testa con i metodi generali.

Queste misure angolari di letto e di *"doële"* si troveranno come se la nicchia fosse retta su una fascia supposta *ADB*, anche se questa non è una di questa nicchie, ma una sezione perpendicolare all'asse.

Avendo prolungato la corda dell'arco della divisione che è per il secondo I^n, 2^n oppure uguale al lato 3^n 4^n, finché non incontra la linea *AB* prolungata in *R*, la linea *SR* sarà la sezione della *"doële"* con l'orizzonte, con la quale si cercherà l'angolo di letto e di *"doële"*, come per la nicchia retta circolare.

La stessa misura si può trovare con il metodo della sezione verticale dov'è la testa della nicchietta *ahb*, prolungando la corda *on*, ossia la sua uguale, corrispondente dell'altro lato della chiave, fino all'incontro del diametro *ab*, prolungata la corda da un lato e dall'altro in *r* o solo tracciando dal punto *t* la linea *tq* parallela a *no*, oppure *4V* parallela *BA*; ma allora invece di prendere tutta l'altezza 2^io, bisogna prendere solo quello che è al di la del punto *n*, da dove dovrebbe passare il piano orizzontale, nella precedente operazione si suppone che passiamo dall'asse del cono, quello che non cambia nulla alla costruzione del problema generale.

Si cercherà anche con lo stesso problema le misure angolari di testa e di *"doële"* tanto per la testa inferiore della nicchietta che per quelle che sono a fasce sulla fascia angolare. Si può rivedere per questo caso l'applicazione della regola alla nicchietta retta di ***"Pag. 80"***.

Per mezzo di queste misure angolari si potrà realizzare senza pannelli di letto.

COROLLARIO
delle nicchie di fasce ondulate in cui le imposte sono a livello ossia rampante come quelle di "Anet".

Se si deve fare una nicchia di cui la fascia non è rettilinea, cioè composta da superfici piane, ma curva ondulata oppure rampante come le famose nicchie del castello di *"Anet"*, si potrebbe eseguire con la maniera seguente.

Fig.129. Sia, per esempio, la proiezione di una fascia il contorno ondulato di *AGFKB*, bisognerà circoscrivergli un poligono con lati a piacere ed angoli sporgenti e rientranti, che intersecano e toccano alternativamente le parti concave e le parti convesse, moltiplicando il numero di questi lati più o meno a seconda che ci si vorrà avvicinare alla curvatura, poi avendo fatto con questo problema le facce a fasce, si arrotonderanno facilmente per mezzo di cerchi formati sulla proiezione orizzontale, applicati poi perpendicolarmente ai segmenti sporgenti, e gli angoli rientranti che formeranno tra di loro i piani delle fasce angolari alla loro intersezione.

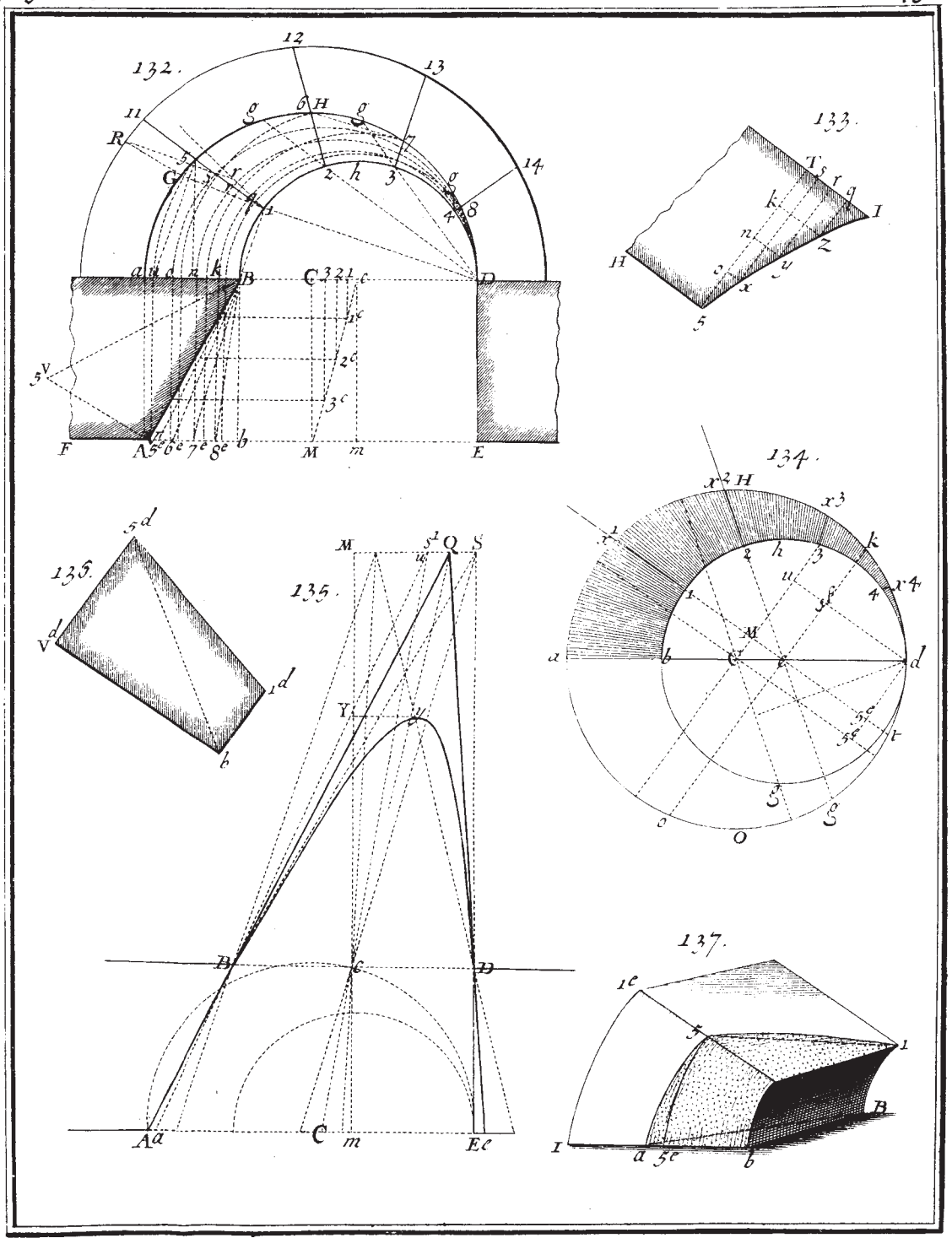
Così si può fare senza i disegni che *"Philibert Delorm"* inventore della nicchia di *"Anet"* e dopo di lui tutti gli autori del taglio della pietra, che hanno dedotto e immaginato ingegnosamente, con qualche modifica, per ottenere lo sviluppo del contorno della *"doële"*.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA
Se si rileva con la mente i semicerchi *ahb*, *ADB* e i quarti di cerchio *Kk*, *IH*, ecc... perpendicolarmente al piano orizzontale *ASB* si riconoscerà che sono delle sezioni di un cono retto su una base circolare i quali passano dalle estremità dei lati della nicchia a fasce al di sopra della loro proiezione; con questo metodo si trovano le vere lunghezze di questi lati nella superficie del cono, i quali segnano i termini da dove devono passare i piani delle fasce verticali della nicchia, di cui gli squadri danno la posizione, a riguardo di una *"doële"* supposta piatta in ogni concio; ciò è troppo chiaro per meritare che si dimostri essendo già spiegata nella costruzione delle precedenti fasce e sul cono.

[5] Nella figura originale la lettera *S* è sostituita dalla lettera S^i.

page 273

Pl. 49.



LE VOLTE CONICHE

QUANDO ESSE GIACCIONO SU SEZIONI OBLIQUE RISPETTO ALL'ASSE

Finora abbiamo sempre supposto che le basi devono essere delle sezioni di un piano passante per l'asse del cono, oppure che le direzioni di tutte le basi si devono incrociare anche nel vertice del cono e perpendicolarmente alle tangenti dei giunti di base, e ciò è in effetti l'unica giusta costruzione e la più semplice nella quale c'è il pannello a basi rettilinee, questo perché la sezione di un cono passante per il suo vertice è un triangolo e, se passa per l'asse, divide il cono in due parti uguali.
Tuttavia, è piaciuto agli architetti fare volte nelle quali i giunti delle basi non stanno all'interno di un triangolo passante per l'asse, e nemmeno passante per il vertice, ma su un piano che taglia l'asse, questo è il tronco di cono che chiamiamo "corno di vacca", nel quale il cambiamento di direzione naturale delle basi causa tre irregolarità: 1) la prima sta nel fatto che i giunti del concio non sono tutti linee rette, sebbene dovuti a un po' di obliquità delle volte ordinarie si possono trovare rette; così sembrano quelle di P. Deran e M. De la Rue, poiché non c'è alcuna menzione della loro curvatura.
La seconda irregolarità avviene tra le due teste opposte della volta, che derivano dalle due basi del cono tronco, non sono degli archi di uno stesso numero di gradi come vedremo in questo trattato; poi vi è una terza difformità, quella nella quale la chiave del centro dell'arco secondario di *aHD*, non passa al centro ma più vicino a *D*; ne deriva che la corda *6,7* non si trova in posizione orizzontale ma è inclinata verso *D*, ciò la rende sgradevole alla vista.
La quarta irregolarità sta nel fatto che i giunti dei conci si trovano su un falso taglio di una delle facce poiché vanno messe a contatto su una stessa superficie piana per avere una base che non sia storta, in effetti le due basi dei giunti sono parallele sebbene non dovrebbero esserlo poiché esse non potrebbero stare su uno stesso piano tranne quando questo piano passa per il vertice del cono. La ragione sta nel fatto che i giunti di testa dei conci devono essere perpendicolari alla tangente dell'arco nel punto della divisione, è evidente che queste due tangenti non possono stare sullo stesso piano, poiché non si trovano su quello che tocca il cono nel vertice, quindi uno dei due giunti del concio è in un falso taglio; questo è inevitabile quando abbiamo la superficie di base storta, contrariamente all'usanza e alla comodità di collegamento come è detto nel 3° libro
Lo stesso inconveniente avviene anche in altre volte della stessa natura di quelle già trattate; esse sono quelle "sul retro", volte coniche bombate e quelle di Marsiglia delle quali parleremo poi.

IL CORNO DI VACCA
L'intervallo tra due semicirconferenze eccentriche *aHD*, *BhD*, con le quali si fa l'elevazione della volta viene chiamato il "Corno di Vacca", questa volta ha un nome così bizzarro poiché questa figura ha qualche somiglianza con un corno di vacca ed è la stessa figura che i giovani allievi di geometria chiamano la 47^ d'Euclide; il mulino a vento.
Il Corno di Vacca è dunque una volta conica scalena tronca, nella quale uno dei piedritti è sghembo e l'altro è a squadra rispetto alle sue facce, il punto d'intersezione tra i giunti dei conci non corrisponde al vertice del cono prolungato come dovrebbe ma è più vicino alla retta che congiunge i centri dei due semicerchi, di solito verso quello più piccolo; ciò causa delle irregolarità di cui parleremo.
Vale la pena di dare una buona spiegazione riguardo all'irregolarità di questa costruzione; è l'unica che possiamo dare, e che non è poco, e riguarda la facilità di esecuzione dei tagli di squadratura. Bisogna comunque sottolineare il fatto che è un metodo non ottimizzato e non deve essere praticato poiché genera una gran quantità di pietra di scarto anche con il vecchio metodo si consuma molto materiale inutilmente: eccolo qua descritto.

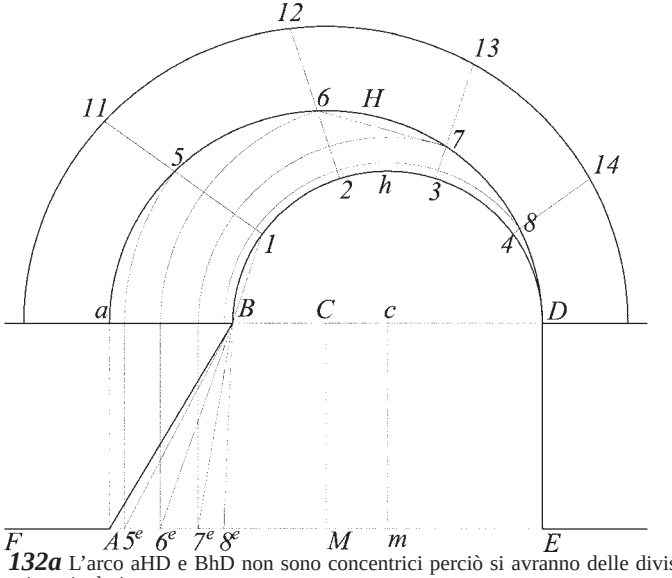


Fig. 132a L'arco aHD e BhD non sono concentrici perciò si avranno delle divisioni dei conci particolari.

Sia (***Fig. 132a***) il trapezio *ABDE*, sul piano orizzontale della base sulla quale vogliamo voltare il Corno di Vacca, nel quale il lato *DE* è perpendicolare alle due facce *AE* e *BD*, tracciamo per il punto *c*, punto medio di *BD*, e per *A* le sue parallele *cm*, *Aa*, poi dal punto *c* medio di *BD* e dal punto *C* medio di *aD*, descriviamo poi le semicirconferenze *BhD*, *aHD*. Si sceglierà poi uno dei due come centro principale per fare le divisioni della volta; normalmente si prende l'interno *BhD*, il quale va diviso ad esempio in 5 parti dai punti *1*,*2*,*3*,*4*, tracceremo per questi punti le rette congiungenti il centro *c* che chiamiamo *1° 11*, *2° 12*, *3° 13*, *4° 14*, che allo stesso tempo definiranno i giunti dei conci e taglieranno l'arco esterno *aHD* nei punti *5*,*6*,*7*,*8*. Si riporteranno poi le distanze *c5*, *c6*, *c7*, *c8* sulla linea *AE* partendo da m: *m5e*, *m6e*, *m7e*, *m8e*, *mb* e per i punti *5e*, *6e*, *7e*, *8e*, *b*, si tracceranno delle rette fino al punto *B* che marcheranno la strombatura che va data a ciascuna volta al di là dell'apertura di un cilindro ad ogni concio; così la prima strombatura del concio d'imposta sarà l'angolo *FAB*; quello del concio seguente sarà l'angolo *F5eB*, l'angolo *F6eB* sarà quello del concio seguente che passa per il punto *2* della seconda volta; poi *F7eB* così di seguito, e la procedura sarà finita: non resta che applicarla sulla pietra.

APPLICAZIONE DELLA PROCEDURA SULLA PIETRA

Abbiamo elevato una parete per un "doele" piatto, partendo da esso se ne faranno altri due a squadra a distanza dello spessore *DE* o *Aa* dei piedritti della volta, poi tracciamo su questi due i paramenti di testa, gli archi di faccia del disegno *B1*, o *1° 2*, per mezzo della sagoma *aB15*. Taglieremo la pietra per formare le basi e una volta concava dritta, così come rappresentato in figura 137. Di seguito si deve tracciare sulla testa davanti che dovrà essere scavata l'arco *a5* o *56*, per mezzo della stessa sagoma o di un cerchio creato con le distanze *Ab*, *b5*^{e}, *b6*^{e}, *b7*^{e},ecc. si traccerà poi sopra e sotto le linee rette *aB*, *51* e si scolpirà tutta la parte della pietra segnata con un tratteggio nella ***Fig. 137***. Applichiamo poi il procedimento sull'arco di una faccia *BI*, e sull'altro *a5* stando attenti alle proporzioni come già si era detto per la formazione di superfici coniche e la volta sarà terminata.

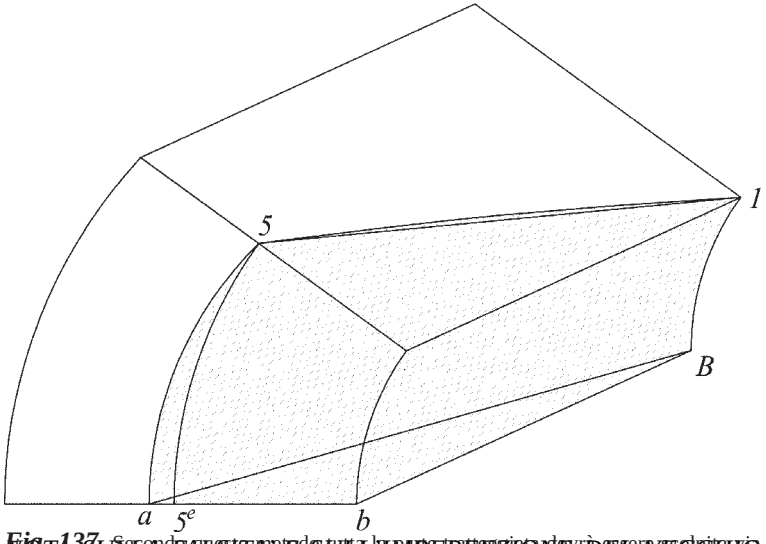


Fig. 137 Secondo questo metodo tutta la parte tratteggiata dovrà essere scolpita via dal concio di pietra.

NOTA SULLA FALSITÀ E SULL'IMPERFEZIONE DEL VECCHIO METODO

Abbiamo visto che per questa costruzione tutti i giunti dei conci alla "doele" sono ugualmente dritti benché solo quelli che stanno sul triangolo che passa per l'asse, che è orizzontale, sono complanari, gli altri giunti al di sopra sono necessariamente curvi in archi di iperbole: convengo che la loro curvatura è poco sensibile, ma poiché esaminiamo le cose con il lume della ragione, non è inutile far notare un difetto che è sfuggito agli autori del taglio delle pietre.

Riguardo l'imperfezione di questo metodo: è evidente in ***Fig. 137*** quanto si consumi la pietra in pura perdita, poiché si deve scolpire tutta la parte che è segnata con un tratteggio. Vediamo ora il metodo per ovviare ad entrambi questi difetti.

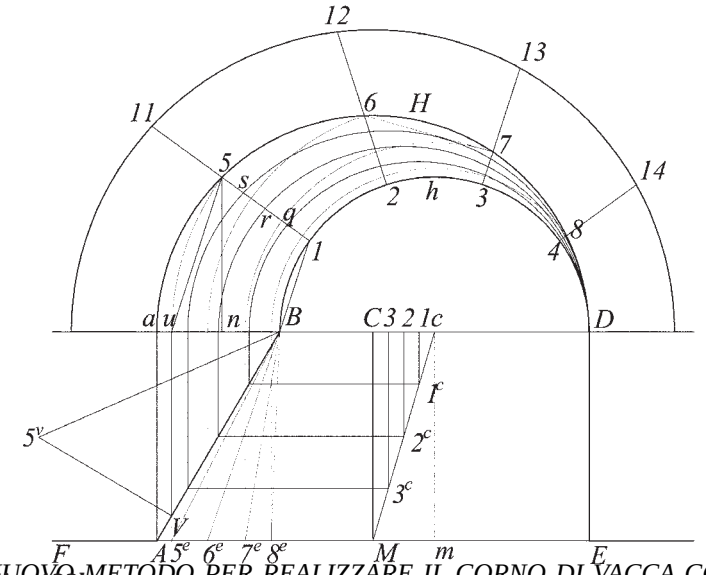


Fig. 132b Tra l'arco più piccolo e quello più grande vengono creati dei semicerchi ausiliari

NUOVO METODO PER REALIZZARE IL CORNO DI VACCA CON L'AUSILIO DI SAGOME

Sia data la stessa base di prima *ABDE* (***Fig. 132b***) abbiamo diviso *AE* a metà in *M*, e *BD* in *c*; uniamo i due punti *c M*, poi abbiamo tracciato da *M* la linea *MC* perpendicolare a *BD*, si dividerà l'intervallo *Cc* dei due centri in quante parti vogliamo,ad esempio in questo caso in quattro parti, nei punti *1*, *2*, *3*, presi come centri e per raggi gli intervalli *cD 1D 2D 3D CD*, si tracceranno i semicerchi *DhB*, *Dqk Drn Dso DHa*.

Poi si dividerà il primo *BhD* in quante parti uguale vogliamo, in questo caso 5; e dal centro *c* si tireranno i collegamenti *1° 11*, *2° 12*, *3° 13*, *4° 14*, come abbiamo già fatto nella precedente costruzione. Potremmo prendere anche la semicirconferenza più grande per fare questa operazione ma a causa dell'eccentricità dei giunti vi saranno delle divisioni disuguali in uno dei due archi, è più naturale far avvenire la disuguaglianza sul più grande cosicché sarà meno evidente che sul più piccolo.

Adesso cre eremo la sagoma di base. Per esempio la prima *5*,*1*.

Riporteremo in un disegno a parte la lunghezza *1*,*5* del giunto del concio "doele" in *T1*, (***Fig. 133***) e si farà passare per il punto *T* una perpendicolare *T5* uguale alla lunghezza *Aa*, che poi è lo spessore dei piedritti della volta, poi si riporterà sulla linea *1T* tutte le divisioni fatte per le intersezioni *q*, *r*, *s*, degli archi di circonferenza e della linea *15* della figura 132. Per *q*, *r*, *s* si manderanno altrettante parallele a *T5* (a ***Fig. 133***), poi si dividerà *T5* in *4* parti uguali ai punti *o*, *n*, *k* da questi si tracceranno delle parallele a *T1* che intersecheranno le altre rette ai punti *x*, *y*, *z*, per i quali tracceremo la curva principale *5y1* che cercavamo. La quale differisce un po' dalla linea retta; la figura *H*, *5*, *1*, *T* sarà la sagoma del primo concio al di sopra dell'imposta.

Non è possibile creare una sagoma "doele" piano per questo tipo di volta

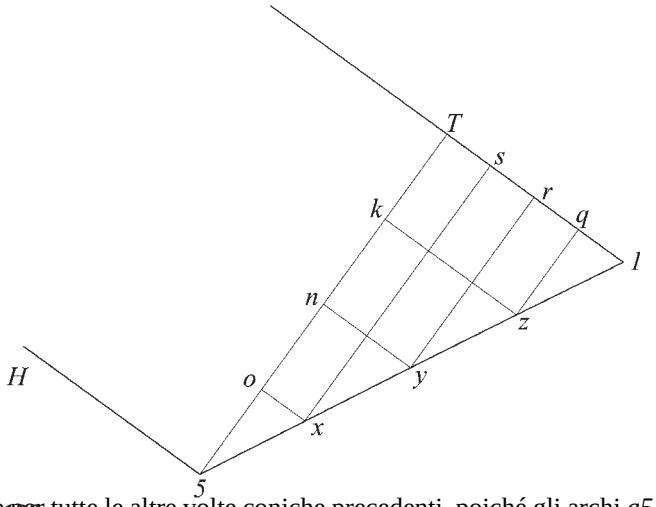


Fig. 133 Per comodità riportiamo su un disegno a parte il particolare del giunto di non 5*o*.

come per tutte le altre volte coniche precedenti, poiché gli archi *a5*, *B1*, non sono simili, i quattro vertici della volta *a*,*5*,*1*,*B* non stanno sullo stesso piano come nelle altre volte coniche dove i giunti si trovano sul piano che passa per il vertice del cono.

Si deduce quindi che dobbiamo basarci su un "doele" piatto che passi solo per i tre vertici del "doele"; così si manderà per il punto *5* una linea *5u* parallela alla corda *B1* che intersecherà *aB* in u da cui si traccerà *uV* parallela ad *Aa*, poi si dovrà tracciare *BV* sul quale si disegnerà la sua perpendicolare $V5^v$ uguale all'altezza avente piede *5n* e si traccerà $B5^v$ che sarà la diagonale della sagoma a "doele" piano.
Su questa diagonale come base di partenza disegnata a parte (***Fig. 136***) si faranno due triangoli, con *b* come centro e *BV* di fig. 132 come raggio si traccerà un arco verso V^d e da 5^d come centro si descriverà un arco che

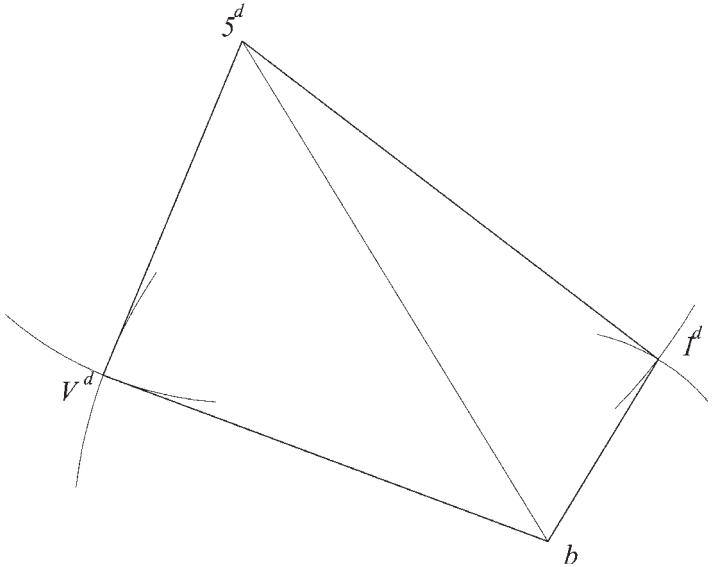


Fig. 136 Raggio (*Fig. 132b*) nella direzione del precedente, i due archi

si intersecheranno in V^d dal quale si tracceranno le linee bV^d, 5^dV^d, che formeranno il primo triangolo, il secondo si formerà allo stesso modo con la corda *B1* di ***Fig. 132b*** e la distanza *5*, *1* di ***Fig. 133***, il trapezio *b* V^d 5^d 1^d sarà la sagoma a "doele" piano cercata che passerà per i tre vertici *5*, *1*, *B* della volta del primo concio, ma non per il quarto vertice *a*, il quale sarà allineato al giunto di sotto a distanza orizzontale *a u* dal punto reale.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA
La differenza di questa volta conica rispetto a quelle sghembe ordinarie sta nel fatto che i piani dei giunti prolungati non passano per il vertice

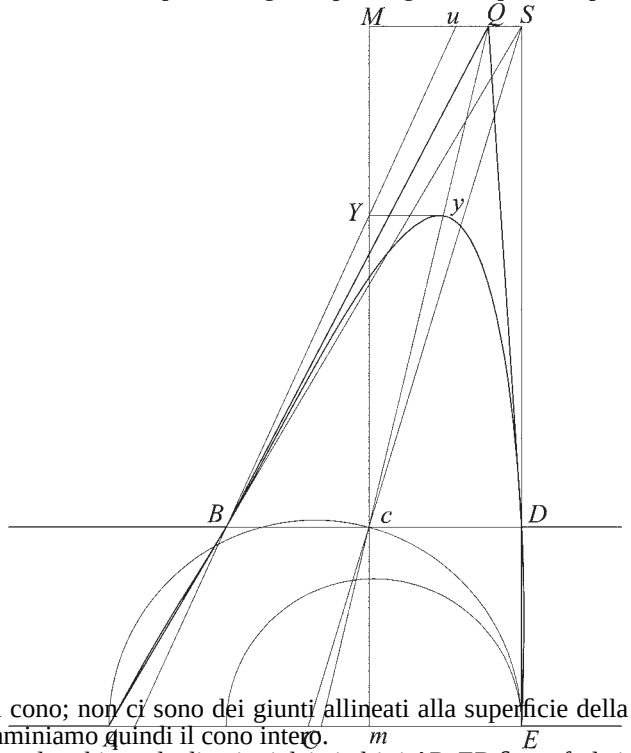


Fig. 135 Sezione orizzontale del cono con evidenziata l'iperbole di profilo.

del cono; non ci sono dei giunti allineati alla superficie della "doele"; esaminiamo quindi il cono intero.
Se prolunghiamo le direzioni dei piedritti *AB*, *ED* fino a farle incontrare in *S* (***Fig. 135***) riconosceremmo che il triangolo *ASE*, sezione orizzontale passante per il piano d'imposta che passa per l'asse *CS* è una sezione piana di un cono scaleno, rappresentiamo in ***Fig. 134*** una proiezione verticale per la linea *a*, *d*, dove il punto *d* rappresenta i tre punti *E D S* di ***Fig. 135***; ma se prolunghiamo la direzione del giunto x^11 passante per *c* fino a *t*, riconosceremo che il piano del primo giunto non passerà per il punto *d*, dove si trova il vertice del cono, e non sarà una sezione dritta, come pure la seconda base x^2g; ma formerà con la superficie della volta un arco di sezione conica che in questo caso è una porzione di iperbole così come l'abbiamo descritta in ***Fig. 133***.

Se volessimo trovare il vertice e la posizione dell'asse del cono, non si dovrà far altro che tirare da *c* una perpendicolare *ko* a x^1c e per *d* una parallela a x^1c, che incontrerà il segmento *ko* nel punto S^f il quale rappresenterà il vertice del cono proiettato su *ko*.
Tracciamo SM perpendicolare su *Mm* in ***Fig. 135*** e si riporterà la distanza *c* S^f o *Mu* di ***Fig. 134*** in *Mu* di ***Fig. 135***, e per il punto *u* si traccerà *uB* che intersecherà la direzione di base *mM* supposta su un piano verticale

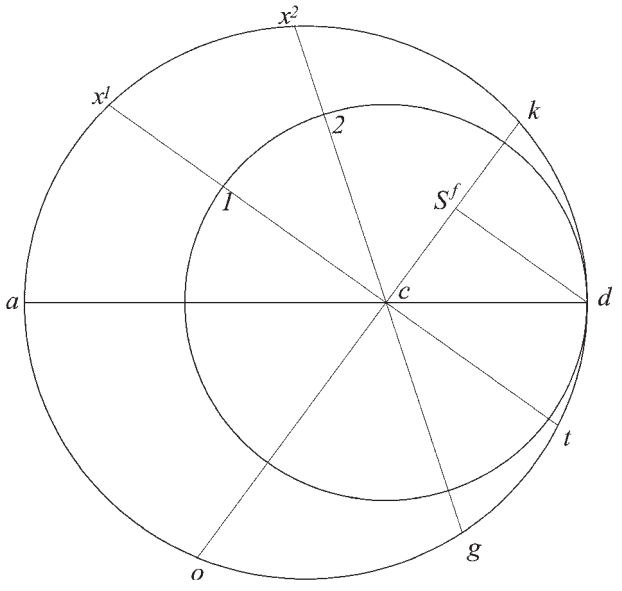


Fig. 134 Sezione verticale del cono.

in *1* che sarà il vertice dell'iperbole di profilo.
Se si vuole rappresentare in proiezione orizzontale sul cono, si deve cambiare il piano orizzontale con quello verticale e fare la proiezione sulla linea x^1t; questo poiché si riporterà la distanza S^fd di ***Fig. 134*** in *MQ* in ***Fig. 135***, si tirerà dai punti *B* e *D* delle linee al punto *Q* e per il punto trovato *Y* una parallela a *BD* che intersecherà la linea di mezzeria *cQ* in *y*, che sarà il vertice dell'iperbole *aByDe* cercata solo per dimostrazione. In effetti è inutile da tracciare se abbiamo già disegnato ***Fig. 133***.

NOTA SULLA REVISIONE DEL VECCHIO METODO
Io non approvo questo tipo di volta dove vengono fatte delle irregolarità senza nessun'altra ragione se non quella di rendere l'esecuzione più facile quando si squadra la pietra per linee rette, niente vieta di ricondurre il Corno di Vacca, per la tendenza del metodo e per le direzioni delle basi della volta, alla tipica sghemba nella quale le direzioni di base sono rette e normali rispetto alle sezioni dei tagli di testa dove i giunti possono allora essere tracciati dal centro delle facce.

Tutto questo cambiamento è molto semplice, pensiamo alla ***Fig. 132c***, quando l'abbiamo realizzata, dovevamo tirare dal punto *D* che rappresenta il vertice del cono in proiezione verticale, le linee *D1G*, *D2g*, *D3g*, *D4g*; le linee *1G*, *2g*, *3g*, saranno le sezioni delle basi della "doele". Poi per i punti dei centri C e c, si tracceranno i giunti di testa come prima, GR, gr, per la facciata più grande *aHD* e *1r 2r 3r* ecc. per fare quella piccola *BhD*; così questa volta si farà come una proiezione di "trompe" sghemba, dove è ristabilita l'uguaglianza di testa di ciascuna faccia, quella degli angoli dei giunti di testa sui loro fermi e la linearità dei giunti dei conci,

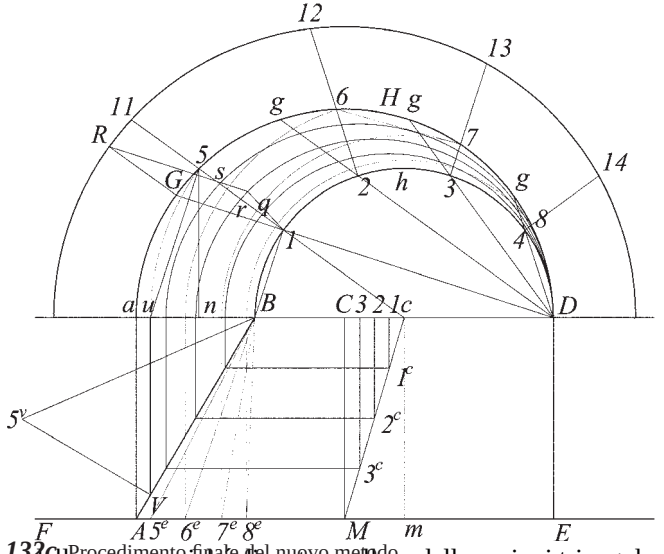


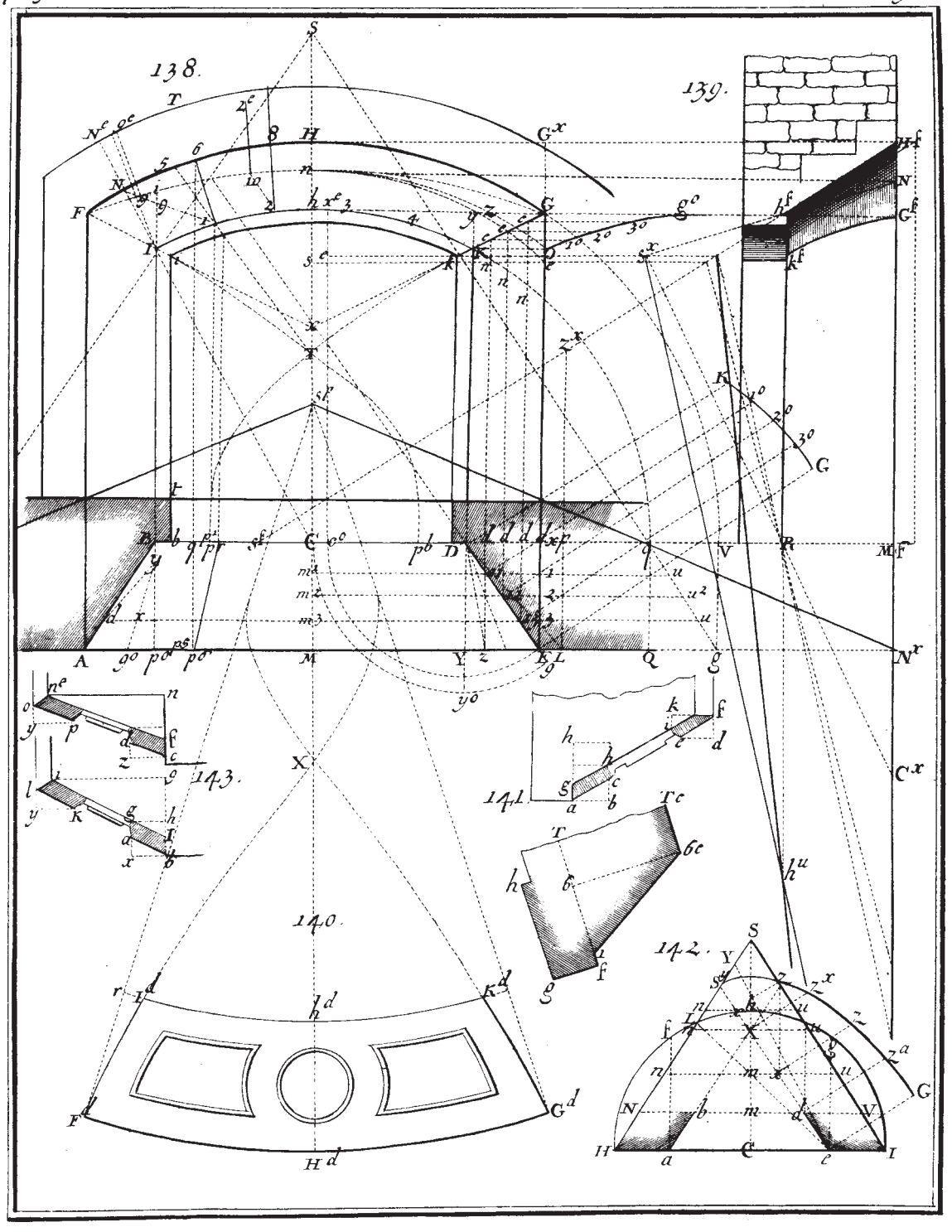
Fig. 132c Procedimento finale del nuovo metodo.

invece delle curve, poiché diventano allora delle sezioni triangolari dei piani che si incrociano tutti sull'asse *CD* del cono scaleno, del quale la sezione orizzontale è rappresentata nella ***Fig. 135*** dal triangolo *ASD*, che si può vedere solo in elevazione, o in proiezione verticale, i punti *EDS* si riuniscono in uno solo: *D*; poiché la rappresentazione di una perpendicolare al piano di proiezione si riduce a un solo punto come è stato detto a pag. 208 del 2° libro.

IL CORNO DI VACCA DOPPIO
Gli Architetti chiamano il "Passo sghembo" ciò che noi abbiamo chiamato nel Cap. precedente il Corno di Vacca doppio, ma questo nome è molto improprio poiché il "Passo sghembo" è una volta cilindrica, quindi è ben diversa dal Corno di Vacca che è conico, se dovessimo dare questo nome a qualche volta, questa sarebbe quella dove 2 Corna di Vacca sono addossate, di questo si parlerà comunque nella seconda parte di questo libro dove si tratterà di volte composite.

page 281.

Pl. 50.



PRIMA SPECIE

VOLTA POSTERIORE CONICA BOMBATA DESTRA SU DI UN ASSE

Definisco destra la volta posteriore i cui cerchi di fronte e di taglio sono concentrici nell'altezza, perchè l'asse del cono essendo perpendicolare frontalmente, riduce la sua proiezione verticale in un punto, il quale è il centro comune di tutte le sezioni ad esso perpendicolari.

Il trapezio *ABDE* ***Fig 138a*** , rappresenta il piano orizzontale del vano di una porta o di una finestra a cui dobbiamo fare una volta. Dai quattro punti *A, B, C, D* facciamo partire tante perpendicolari su *AE* come su *AF*, *BI*, *DK*, *EG*. Scegliamo un punto *C*, sulla linea del mezzo *MC*, come centro dell'arco *IK*, da questo stesso centro poi descriviamo un arco interno *FG*; tuttavia visto che il raggio di quest'ultimo non è di lunghezza arbitraria come *IK*, bisogna cercargli la minima lunghezza, affinché la chiusura dei battenti della porta possano aprirsi totalmente senza battere sulla volta. Ma come si può notare molto frequentemente nei palazzi e nel 14° capitolo del libro sul taglio del legno di M. Blanchard, dove i battenti non possono aprirsi totalmente, anche gli operai e qualche volta i maestri d'arte sbagliano.

OSSERVAZIONE GENERALE
PER LA POSIZIONE D'INIZIO DELLE VOLTE POSTERIORI BOMBATE O CURVATE DAVANTI E DIETRO.

La prima cosa alla quale dobbiamo fare attenzione nel tracciato dei disegni delle volte posteriori bombate o curvate dal davanti e dal dietro, è di poggiare bene la base dell'arco frontale, elevato sulla strombatura dei piedritti, perché se è troppo bassa, le ante delle porte o delle persiane non possono aprirsi totalmente, o toccano la volta con il centro del loro arco; gli operai inesperti di norma la mettono allo stesso livello con l'arco di taglio, ed è proprio per questo che le porte o le persiane possono aprirsi solo in parte: bisogna dunque portare dal centro *h* della chiave dell'arco di battuta una linea di livello *hG*, che taglierà *EG* nel punto *G*. Questa sarà l'origine più bassa che possiamo dare all'arco frontale, nel caso in cui la profondità della volta sia uguale alla metà della larghezza della parte *BD*; se invece la larghezza del piedritto *DE* fosse inferiore a *CD*, possiamo abbassare ulteriormente la base, portando *DE* in De^o, e tirando $e^o x^e$ parallelamente a *CH*, la quale taglierà l'arco *IhK* nel punto x^e, e da dove tireremo il livello della base *G*. Ma siamo anche liberi di sollevare la base al di sopra di *G* tanto quanto vogliamo. Tuttavia in questo caso l'intradosso della volta si rovinerebbe più del necessario per l'usura della volta posteriore.

La ragione di questa costruzione è facile da capire, infatti possiamo notare che il battente, girando sui perni, descrive con questo movimento nell'aria un arco di cerchio orizzontale, di cui la linea *hG* è la proiezione verticale; l'arco Cy^oE ne è la proiezione orizzontale, perfettamente uguale a quelli dell'alto e del basso che sono descritti dalle sommità degli angoli del battente.

Qui vediamo chiaramente che la parte della volta che si abbassa al di sotto di questa linea, ferma necessariamente il movimento del battente girando sui suoi perni.

Supponendo quindi un arco di faccia *nZO* la cui origine *O* sia allo stesso livello della battuta in *K*, la sommità del battente in *h* sarà fermata al punto *Z*, dove la linea *hG* taglia l'arco *nZO*, e se l'arco scende più in basso come in *e*, la porta sarà fermata in *y* dove l'orizzontale *hG* taglia

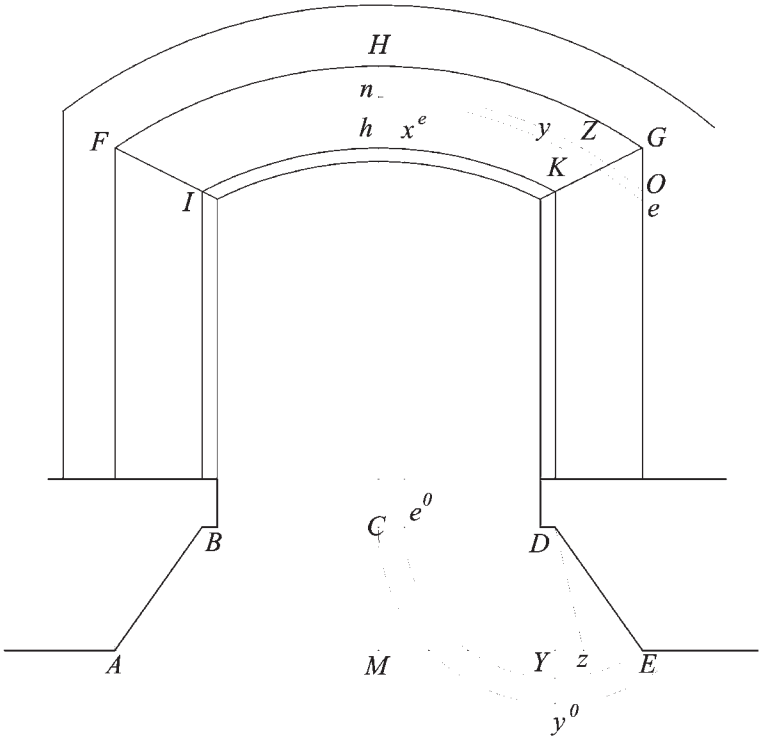


Fig. 138a Volta posteriore bombata con centro *h* della chiave dell'arco di battuta

l'arco *nye*, e che la larghezza del vano *CD* sia uguale alla profondità della volta Dy^o; ma nel caso in cui questa profondità fosse inferiore alla larghezza *CD* come in *DY*, sarebbe visibile che il battente si apre un po' di più.

Porteremo la strombatura del piedritto di *DE* in De^o su *CD*, e tracciamo dal punto e^o una parallela a *MH*, che taglierà l'arco in un punto x^e. La linea tracciata da questo punto parallelamente a *hG*, incontrerà l'arco *nye* un po' sotto a *y*, per es. sotto *Z* ***(Fig 138b)***; se da questo punto abbassiamo una retta *Zz* perpendicolare al piano, che taglia *AE* in *z*, la linea che parte da *D* a *z* darà un angolo *CDz* per l'apertura più grande possibile del battente da dove si può far partire la base dell'arco, affinché la porta si apra tanto quanto vogliamo.

Supponiamo ora che la base del centro interno sia posata in *F* e in *G*, dove si trova l'arco *IhK*; prendendo come centro *C* e *CG* come raggio, tracciamo l'arco *FHG*.

Dopo aver tracciato i centri, bisogna sceglierne uno principale sul quale fare le divisioni dei conci. Qualunque dei due centri si scelga, l'irregolarità della divisione rimane inevitabile. E' quindi più naturale scegliere il centro di taglio a causa della sua regolarità di chiusura, che normalmente è visibile dall'esterno; ma in questo modo le teste dei primi conci interni diventeranno considerevolmente più larghi dei seguenti;

perché supponendo l'arco *IhK*, diviso in quattro volte uguali nei punti *1, 2, 3, 4*, se si tirano da queste divisioni i giunti al centro *C*, come *IN 1-6, 2-8*, è visibile che l'arco *F6* è più grande di *6-8* ed *FN* è più piccolo di *N6*.

Potremmo fare le divisioni uguali tra loro e dello stesso numero su ogni arco del centro, come se facessimo *F5* uguale a *5-8*, e unire *5* e *1*; tuttavia il giunto non sarebbe una linea retta ma una curva, simile a quelle già descritte dal Corno di Vacca, al quale questa costruzione deve essere rinviata.

Questa curvatura del giunto, che può essere evitata con la divisione precedente dei conci, diventa inevitabile in *FI* e *KG*, perché la linea *FI* non può tendere al centro dove passa l'asse del cono, ma deve tendere verso qualche altro punto *x* sopra quest'asse unito in *G*. Gli archi *FH* e *Ih* non sono simili, visto che *FH* è di qualche grado più grande di *Ih*, della stessa quantità di gradi di *FN*; bisogna dunque cercare la curva della base della volta sulla superficie piana del piedritto. Questa curva può essere un arco con flessioni coniche differenti, le quali seguono più o meno la strombatura del piedritto *DE*.

Avendo prolungato gli archi dei centri frontali e di taglio fino al loro semidiametro comune *CV* che incontrano in *q* e *V*, tiriamo dai punti *g* e *q* la linea *gqS*, la quale incontrerà la linea di mezzo *MS* al punto *S*; se la linea *qg* è parallela a *DE*, la curva dell'imposta *KG* sarà una porzione di

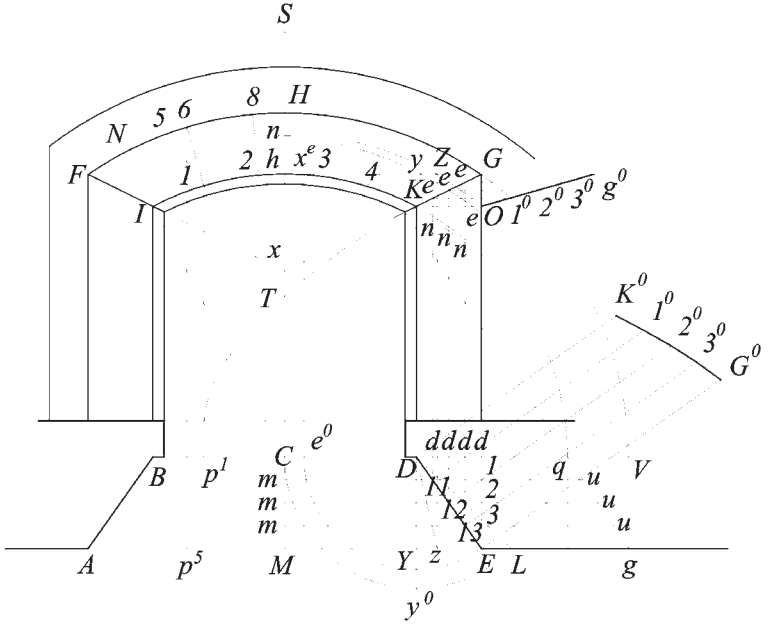


Fig. 138b Volta posteriore bombata concentrici *x* della chiave dell'arco di battuta e ribaltamento della curva *KG* per ottenere la vera grandezza

parabola; se la strombatura del piedritto è in *DL*, *YL* è più grande di *YE=qV*, l'arco sarà una porzione di ellisse; al contrario se il piedritto è in dentro come *Dz* o come *DY* la sezione sarà una porzione di iperbole; questa curva si può descrivere facilmente e regolarmente con la seguente pratica, che servirà per tutte le volte successive più o meno dello stesso tipo.

Avendo diviso la linea *DY* o *dE* che esprime la profondità della volta in parti uguali, per esempio in questo caso è divisa in quattro punti *1, 2, 3,*

E, porteremo da questi punti delle parallele a *AE*, le quali taglieranno la

linea del centro *MC* nei punti *m, m, m*; il lato del cono *qg* ai punti *u, u, u*, e *DE* ai punti *11, 12, 13*, dai quali partiranno delle parallele a *DK*; le quali saranno le mediane proporzionali tra *mu+m11* e *11u*, *mu+m12* e *12u*, etc., cioè da un punto *m* come centro con un raggio *mu*, descriveremo un arco che taglierà la perpendicolare *11n* al punto *n*. Poi eleveremo tutte queste mediane proporzionali al di sopra della linea *Bd* in *de*, dove daranno dei punti *e, e, e*, la curva *KeeeG* sarà quella della base della volta posteriore sul piedritto *DE*, o se vogliamo sarà l'angolo posteriore attraverso l'incontro della superficie piana del piedritto *DE* e della concava conica della volta posteriore, non in tutta la sua estensione ma accorciata dalla proiezione del rapporto tra *Dd* e *DE*.

Per tacciare questa curva nella sua vera grandezza, bisogna elevare delle perpendicolari in *DE* e farle uguali alle mediane proporzionali *11n*, *12n*, *13n*, *EG*. Quindi possiamo riprodurla da *KG* tirando dai punti *KeeeG* delle parallele *KO*, *e1°*, *e2°*, *e3°*, *Gg°*, che faremo uguali alle linee *DE*, *D13*, *D12*, *D11* a cominciare dalla fine della linea *GE*, e avremo la vera curva *01° 2° 3° g°* che cercavamo in tutta la sua ampiezza.

Come i giunti di base dell'intradosso sarebbero delle curve con la stessa natura, se si facesse la divisione dei conci uguale all'arco di battuta *IhK*, e uguale all'arco di facciata *FHG*; si potrebbero quindi trovare allo stesso modo attraverso la loro proiezione, come quella del giunto della base *5-1*, attraverso la sua proiezione p^1 p^5.

OSSERVAZIONI

Man mano che i letti si avvicinano alla chiave della sezione (se ce ne fosse una), divenendo verticali, questa curvatura diventa sempre meno sensibile, cioè passando dalla sommità del cono, possiamo con una semplice operazione ignorarla e fare questi giunti quasi dritti, ma visto che la curvatura aumenta verso l'imposta, non possiamo evitare un piccolo errore. E' sorprendente che gli autori dei libri sul taglio delle pietre e del legno non se ne siano accorti e che non abbiano detto niente; è una prova che non hanno esaminato le cose da vicino e con occhi geometrici.

La volta posteriore di destra fatta da cerchi concentrici; è senza dubbio la più regolare, ma visto che a volte l'altezza interna di un piano ci disturba, siamo obbligati a fare l'arco interno meno bombato che quello di taglio. Da qui risulta che la superficie, che è in questo caso una porzione del cono destro, diventa allora una porzione di superficie di un cono scaleno; di sorta che qualsiasi direzione orizzontale della volta posteriore sarà perpendicolare alla facciata e l'asse del cono sarà a lui obliqua, quindi questa volta posteriore diritta per la sua elevazione, diventerà rampante per il profilo seguito dal suo asse, in modo che la chiave possa essere allo stesso livello o addirittura leggermente spostata verso l'alto.

SPIEGAZIONE DIMOSTRAIVA

Per concepire la ragione del tracciato di questa volta posteriore, bisogna rappresentare un cono destro e vedere quale parte ne costituisce.

Se supponiamo che il triangolo *HSI* ***Fig 142*** sia la sezione orizzontale dell'asse del cono destro, il quale è tagliato da due piani verticali *abX*, *edX*, i quali si incrociano in *X*, riconosceremo che le sezioni di questi piani taglieranno dalla superficie del cono una porzione triangolare, composta da tre linee curve, un arco di cerchio *fhg*, una parte di cerchio di base *HhI*, compreso tra le verticali *af* e *eg* e due porzioni di sezioni coniche uguali a Z^xG, che sono ciascuna una parte di parabola S^yz^xzG, in questo esempio dove *Xe* è parallelo a *SI*, di una iperbole, se il piano verticale su

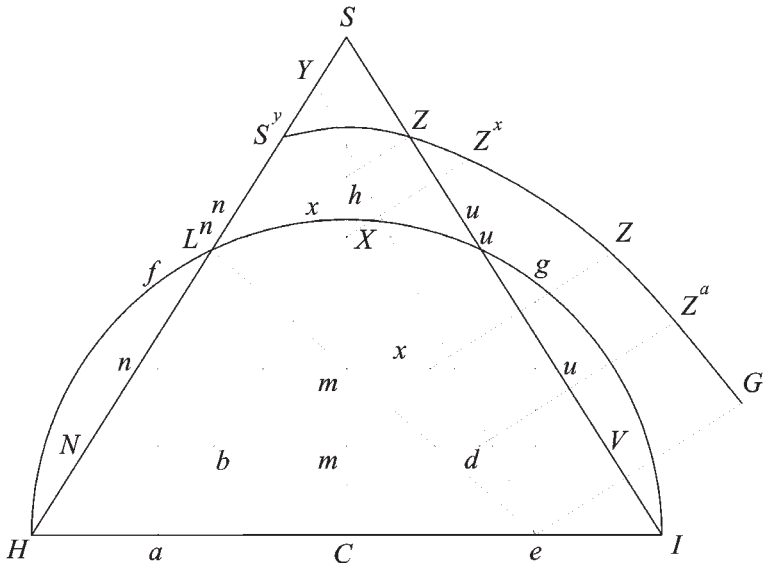


Fig. 142 Sezione orizzontale dell'asse del cono destro tagliata da due piani verticali *abX* e *edX*.

Considerando di questi piani verticali solo le parti *ab* e *ed*, le quali rappresentano i piedritti e le profondità della volta posteriore, riconosceremo che questa prima porzione di superficie triangolare essendo tagliata da un piano verticale su *bd*, resta per la volta posteriore una superficie quadrilatera compresa tra quattro linee curve, due porzioni di cerchi ineguali sui diametri *HI* e *NV*, e due porzioni di parabole uguali tra loro, rappresentate qui dall'arco Z^aG.

I due archi dei cerchi sono dati, non resta che cercare gli archi parabolici. Dobbiamo portare delle perpendicolari all'asse *SC* per avere dei punti di sezione, i quali taglieranno i lati del cono in *NV*, *nu* e il piano *cX* nei punti *xxX*. Cercheremo le mediane proporzionali tra *nx* e *xu*, che eleveremo perpendicolarmente a *Xe* nei punti *xx*. Il seguito di queste linee darà i punti della curva richiesta $S^yzz^xzz^aG$.

Il resto della costruzione di questo trattato non ha bisogno di spiegazioni, basterà guardare la ***Fig 138c***, dove abbiamo tracciato in proiezione verticale ogni mezza parabola $GKTP^r$, $FITp^b$, di cui gli archi *KG* e *FI* dell'imposta sono delle piccole parti, le quali curve s'incrociano in *T*, ed hanno le loro sommità sull'orizzontale *BD* in p^r e p^b.

SECONDA SPECIE

VOLTA POSTERIORE BOMBATA E STROMBATA, DESTRA O SGHEMBA DI CUI GLI ARCHI FRONTALI O DI TAGLIO NON SONO SIMILI NÉ CONCENTRICI.

1° CASO

DOVE I CERCHI SONO POCO DIFFERENTI.

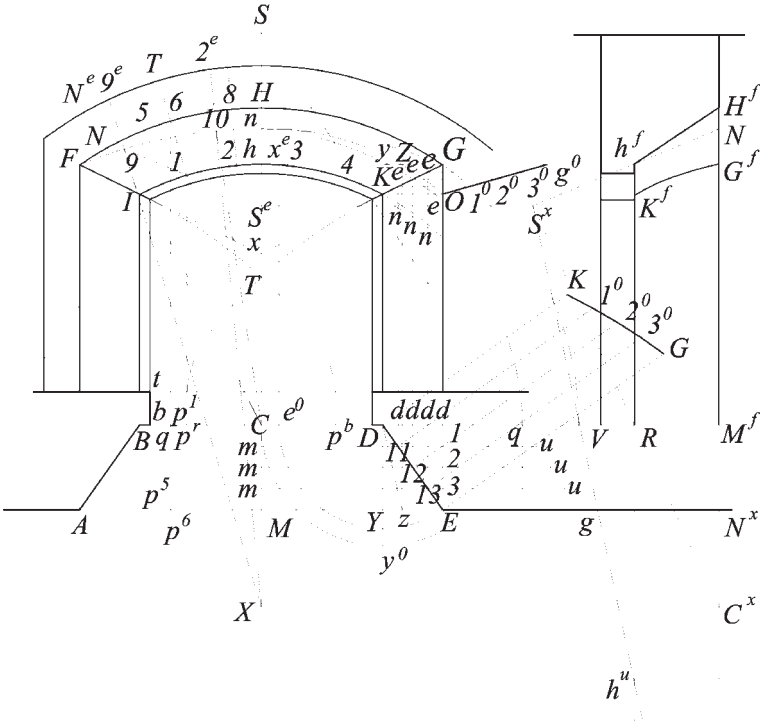


Fig. 138c Costruzione della sezione verticale e dei giunti della volta.

Il piano orizzontale del vano da voltare supposto come nel disegno precedente della ***Fig. 138b***, e l'arco di taglio dato *InK*, il cui centro è *C*,

supponiamo che l'arco frontale interno sia dato più basso rispetto al punto *H* del precedente, e meno curvo, come in *FnG*, il cui centro è dato in *X* su *SM* prolungato.

Supposto questo, segue come nel tracciato precedente, che possiamo prendere per cerchio iniziale delle divisioni delle volte, il cerchio che vogliamo, e che se facciamo le "teste" uguali tra loro in ciascuno dei due cerchi, i giunti di base dell'intradosso formeranno delle linee curve come nel Corno di Vacca. Ma se le facciamo partire da uno dei centri *C* o *X*, a

differenza del disegno precedente formeranno ancora linee curve, poichè ne l'uno ne l'altro di questi punti sono la proiezione verticale della sommità del cono, come lo è il punto *C* nell'esempio precedente del cono destro; supponendo dunque di voler fare questi giunti in linea dritta, bisognerà cercare la proiezione di questa sommità per mezzo di un profilo.

Prendendo a caso un punto *R* sulla linea *BD* prolungata, e sulla stessa linea un punto M^f lontano da *R* ad una distanza pari a *DY* o *dE*, che segni la profondità della volta, porteremo da questi punti *R* e M^f le perpendicolari C^xH^f e $h^u\ h^f$ prolungate all'infinito, e porteremo da una parte all'altra del punto *R*, l'altezza *Ch* della ***Fig. 138***c in h^f e h^u, e l'altezza *Cn* della chiave interna in M^fN e *CX* in M^fC^x. Poi porteremo dai punti Nh^f e C^xR delle rette che si incroceranno al punto S^x, il quale rappresenterà la sommità del cono scaleno dove l'intradosso della volta posteriore sarà una parte della superficie, e la linea inclinata $S^x\ C^x$ ne rappresenterà l'asse.

Ora per avere la proiezione verticale della sommità, dobbiamo far partire da S^x una parallela S^x, ovvero S^e all'orizzontale *BD* che taglierà la linea del centro *MS* nel punto S^e, dove ci sarà la proiezione della sommità del cono che cerchiamo.

Da questo punto possiamo fare i giunti dell'intradosso in linea dritta; se da questo punto e da queste divisioni delle volte *1, 2, 3, 4*, facciamo partire delle linee fino all'incontro con l'arco frontale *FnG* che taglieremo in *9*, *10*,ed i giunti di base dell'intradosso *9-1*; *10- 2* costituiranno delle linee rette. Da qualsiasi altro punto rispetto a S^e che si possano tirare,

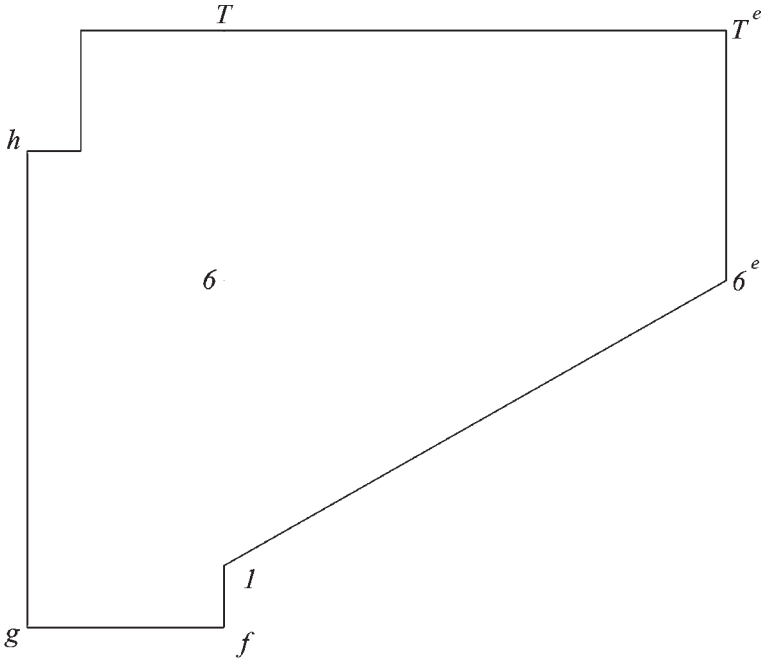


Fig. 141. Sezione della volta posteriore

queste linee saranno curve; pertanto a causa della gran disuguaglianza delle divisioni delle prime sezioni, possiamo qualche volta farle curve. Questo conviene anche quando le differenze sono molto grandi, come lo vedremo nella sezione posteriore a Marsiglia.

Il secondo effetto della disuguaglianza degli archi, e delle differenti posizioni dei loro centri, si trova nella direzione dei giunti di testa; nel disegno precedente questi giunti si trovano nella stessa linea, di conseguenza sullo stesso piano, per esempio il giunto IN^e ***(Fig 138c)*** si trova in linea dritta con il giunto *IN* proveniente dal centro *C*, allo stesso modo come quello della testa di battuta. Ma in questo tracciato dove i centri sono diversi, se per la prima base *9-1* tiriamo i giunti *9*, 9^e e per la seconda *10*, 2^e proveniente dal centro *X* dell'arco frontale, non possiamo poi tirare i giunti della testa di taglio dallo stesso centro *X*, ma dobbiamo tirarli dal centro *C* come *1-6*; *2- 8*.

Il resto sarà formato come nel disegno precedente, per la curva delle nascite dell'intradosso sulle imposte, con la differenza che spiegheremo meglio nel tracciato successivo, che non è altro che una variazione di questo tracciato.

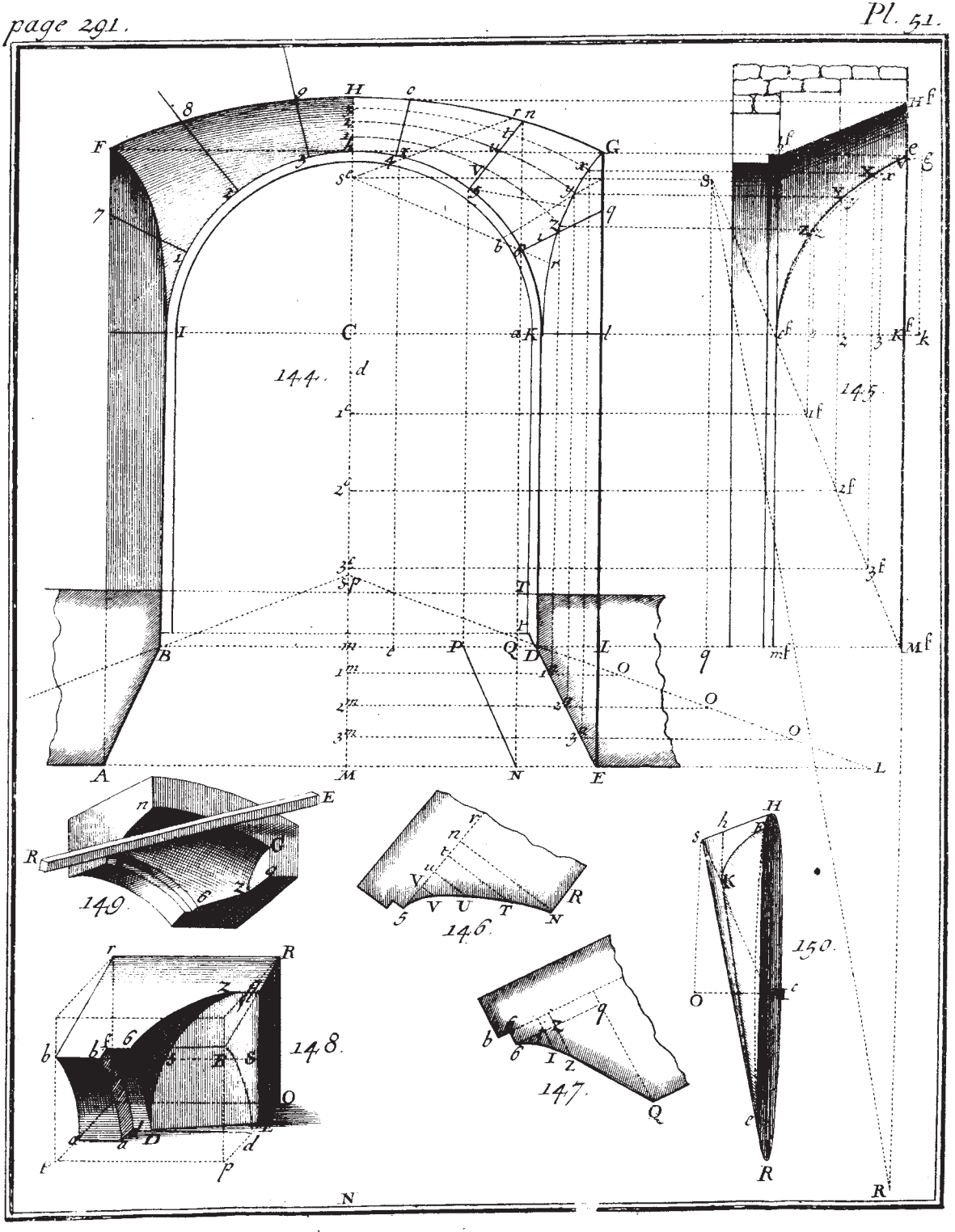
Basterà dare un esempio di come fare una base, che in fondo è la stessa che abbiamo impiegato per quelli del Corno di Vacca, visto che i giunti sono curvi ed è ancora più semplice quando sono dritti; se ci fosse ad esempio, la seconda base da fare, la cui proiezione verticale è la linea *1- 6T* nella ***Fig. 138c***, dovremmo portare a parte questa linea come nella ***Fig141***, elevare al punto *6* una perpendicolare $6\text{-}6^e$ che faremo uguale alla profondità della volta posteriore, presa su una perpendicolare alla facciata, come qp^6 della ***Fig. 138c*** o *dE*, poi dai punti *1* e 6^e porteremo la retta $1\text{-}6^e$, che sarà il giunto di base dell'intradosso, infine porteremo dallo stesso punto 6^e una linea 6^eT^e parallela a *1T* e il pannello di base sarà fatto.

Aggiungeremo il profilo del taglio *1f*, dal quadro *fg*, e dalla facciata esterna *gh*, che esprime il giunto della testa dell'arco esterno nelle stesse misure della proiezione orizzontale *Bbt*.

Se al posto del giunto destro *1, 6* avessimo avuto un giunto curvo, come sarà quello che passerà dalle divisioni *1, 5*, avremmo dovuto fare il pannello di base esattamente come il Corno di Vacca, ma nel caso presente, dove questa curvatura non è molto sensibile, bisognerà scavare un po' questo giunto relativamente al pannello di quello dell'imposta *FI*, o del suo eguale *KG*, diminuendo un po' di questa prima curvatura alla prima base, ed ancora di più nella base seguente, se ce ne fosse uno che passa dal punto *2* fuori dal punto *8*, come in *2, 10* prolungato; ma

page 291.

Pl. 51.



Secondo caso,

IN CUI I SESTI DI PROSPETTO E DI BATTUTA [1] SONO MOLTO DIVERSI.

In termini artistici.

NUOVA ARRIERE-VOUSSURE [2] DI MARSIGLIA, REGOLARMENTE CONICA.

Il più e il meno, dicono i filosofi, non cambiano la specie, ma qui la grande diversità tra i sesti di prospetto e di battuta cambiano così tanto la figura dall'arriere-voussure precedente, al punto che non è più riconoscibile, perché l'arco di battuta è un semi cerchio completo, e quello della superficie interna un arco al massimo di 60 gradi, solitamente molto minore; tuttavia se si considera solo la parte centrale della Fig. 144, per esempio 82h5nH8, riconosceremo che l'arriere-voussure precedente non deve esser considerata per questa, come la parte per il tutto.
I muratori fanno l'arriere-voussure di Marsiglia seguendo le trattazioni del P.Deran e di M. de la Rue, in una maniera molto diversa, che produce una superficie irregolare, di cui parleremo quando ci sarà richiesta di queste superfici.
Faremo vedere qui che la si può fare regolarmente conica. E visto che la regolarità è uno dei principi della bellezza, credo che la mia nuova trattazione debba rendere questa arriere-voussure più gradevole alla vista di quella antica.
Sia (Fig.144) il trapezio ABDE il piano orizzontale dell'apertura della porta o della finestra che si deve voltare, di cui ritagliamo la battuta e la cornice, come se fossero delle parti di volte diverse e di queste cilindriche, in cui non troviamo alcuna difficoltà.
Avendo tirato su come nel disegno precedente delle verticali indefinite sui quattro angoli dell'apertura, AF, BI, DK, EG, prenderemo a piacere sulla linea media MH un punto C, da cui, come centro, descriveremo il semi cerchio IhK, per sesto di battuta, che toccherà le linee BI e DK nei punti I e K, che troveremo tracciando da C la linea IK parallela a BD.
Per il punto h, vertice di questo semi cerchio, condurremo FG parallela al suo diametro IK che intersecherà le verticali su A e E nei punti F e G, dove staranno i vertici dei piedritti.
Si può abbassare un po' questa linea se la larghezza del piedritto DE è minore di Dm, allora se si riporta la lunghezza DE in De su DB, e se si tira ex parallela a HM, potremo tracciare dal punto x la linea di sommità dei piedritti, che darà i punti F e G un po' più bassi dei precedenti

[1] per battuta s'intende quella di un infisso, quindi qui s'intende di battuta = di profilo.

[2] volta costruita dietro l'intradosso di un'apertura.

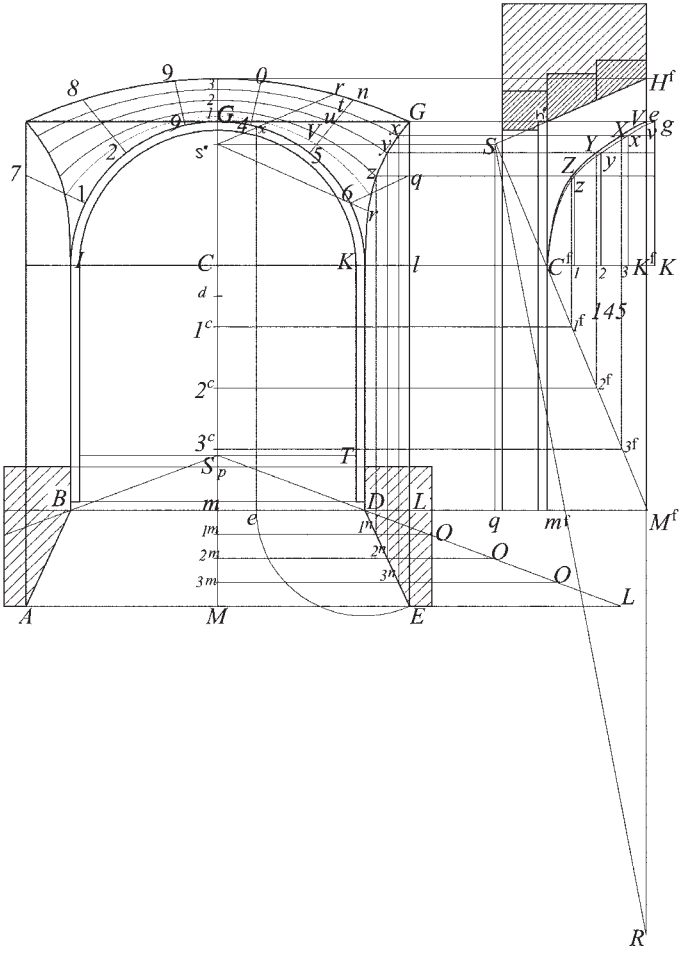


Fig.144-145 costruzione frontale e laterale dell'arriere-vossure

.

Avendo determinato le sommità F e G dei piedritti come abbiamo appena detto, affinché le ante del falegname possano aprirsi totalmente e attaccarsi ai piedritti strombati BA DE, prenderemo a piacere sulla linea HM un punto m per centro dell'arco della superficie interna, dal quale e dall'intervallo mF o mG per raggio, il quale passerà nella disposizione precedente al di sotto del punto h di un intervallo Hh quasi uguale a quello della strombatura del piedritto DE, espresso dalla linea DL.
Se si fosse preso il centro di questo arco molto più lontano di m, come per esempio in basso alla tavola in N, la strombatura della chiave di

volta sarebbe diminuita, poiché l'arco, benché passante per le sommità F e G, sarà passato sotto al punto H; in ragione del fatto che se il centro di questo arco fosse stato infinitamente lontano, si sarebbe confuso con la linea retta del vertice FhG, a quel punto la chiave dell'arriere-voussure sarebbe stata orizzontale senza alcuna strombatura, e non avrebbe impedito ai battenti delle chiusure del falegname di aprirsi totalmente.
Da qui segue che, a meno che la lunghezza dei piedritti BA, DE, non sia molto minore della semi larghezza mB o mD dell'apertura, non si può bombare l'arco interno senza impedire i movimenti di queste ante, perché le imposte di un tale arco saranno necessariamente al di sotto del punto h della differenza dell'altezza dei punti x e b, che è di poco conto. Così quando si fa la chiave di volta orizzontale come il Maestro Blanchard nella sua planche 14 conformemente al suo discorso, si cade come lui nell'errore dell'altezza dei piedritti, e di conseguenza in quello di poter aprire le ante solo in parte e non totalmente, dovendosi attaccare alla strombatura del piedritto.
Dopo aver tracciato i due sesti di prospetto e di battuta, divideremo quello di battuta nei suoi conci, per esempio qui in sette nei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, per i quali tracceremo dal centro le spezzate 17, 28, 39, 40, 5n, 6q.
Divideremo in seguito l'intervallo hH della strombatura della chiave di volta, in altrettante parti uguali che si vorranno avere dai punti della curva d'imposta o di origine della doele dell'arriere-voussure sul suo piedritto in KzG, per esempio qui in quattro, nei punti 1, 2, 3, H. Poi avendo anche diviso in quattro l'intervallo Cm dei due centri dei due archi di profilo e di prospetto nei punti 1^c, 2^c, 3^c, m, da ciascuno di questi punti per centri e dall'intervallo della prima divisione corrispondente tra h e H per raggio, come 1^c1, 2^c2, 3^c3, descriveremo gli archi dei cerchi indefiniti 3x, 2y, 1z, di cui bisogna cercare la conclusione.
Avendo diviso l'intervallo mM che è la profondità della volta in altrettante parti uguali tra di loro, che abbiamo diviso Hh nei punti 1^m 2^m 3^m, condurremo per questi punti delle parallele a AE, che incontreranno il piedritto DE nei punti 1^n 2^n 3^n, per i quali condurremo delle parallele a DK, che incontreranno gli archi di sopra nei punti y z x, che apparterranno alla curva che stiamo cercando; così tracceremo a mano o con un regolo pieghevole la curva KzyxG, che è la proiezione verticale dell'origine della doele [3] sul suo piedritto.
A questo punto bisogna cercare il valore di questa proiezione che restringe questa curva; cosa che faremo facilmente con il metodo delle sagome allungate.
Prolungheremo il diametro IK, sul quale riporteremo la linea DE a piacere, per esempio in fk Fig. 145 con tutte queste divisioni 1 2 3 k, per le quali tireremo su delle perpendicolari indefinite a questa orizzontale, poi per i punti G x y z condurremo delle orizzontali che intersecheranno le verticali precedenti nei punti z y x g, per i quali tracceremo la linea curva f z y x g che stiamo cercando, la quale è più larga di quella del profilo fZYXV nel rapporto di DE a EL, e il disegno sarà fatto.
A questo punto se si considera la natura delle sezioni della doele, seguendo le osservazioni che abbiamo fatto sulle superfici deformate all'inizio del quarto libro, pagina 5, riconosceremo che i quattro angoli della doele di ciascun concio non sono su uno stesso piano; conseguenza del fatto che non si possono fare dei panneaux [4] di doele piatta.
Non resta altro dunque, che fare quelli di testa, che sono dati in elevazione, e quelli di lit [5] di cui i giunti della doele non sono linee rette per le ragioni che abbiamo dato prima, parlando di quelli del corno di vacca, la cui costruzione è la stessa, eccetto che per quelli che attraversano in parte la volta, e in parte il piedritto, come fanno quelli che danno le spezzate 17 e 6q, la cui parte del giunto 6z è curva, e l'altra zq retta; daremo un esempio per ciascuno di questi lits.
Dopo aver riportato la lunghezza 5n della Fig. 144 in un posto a parte, come in Fig.146, con tutte le sue divisioni t, u, v, ci condurremo da questi stessi punti delle perpendicolari, di cui
prenderemo le lunghezze sul piano orizzontale; sapendo Rr o nN uguale a mM, tT uguale a $m3^m$, uU uguale a $m2^m$ e vV uguale a $m1^m$, e per i punti NTUV5 tracceremo la curva, che sarà il giunto della doele, del lit inferiore del quinto concio.

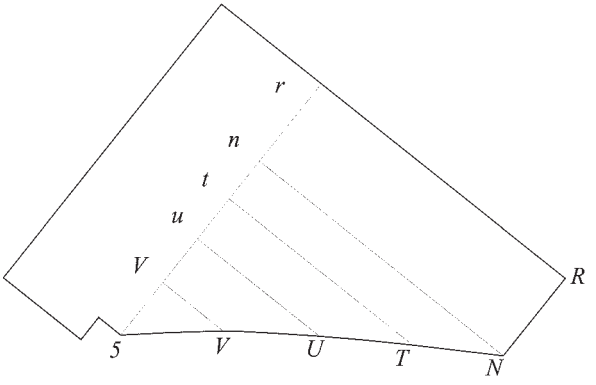


Fig. 146 costruzione del giunto della doele quinto concio.

Per formare il panneau del lit successivo il giunto della doele è misto, si opererà circa in questo modo.
Dopo aver riportato a parte la lunghezza 6q come nella Fig. 147 con la sua suddivisione Z, ci alzeremo su dal punto q una perpendicolare

[3] così si chiama il paramento interno di una volta o di un concio incavato. La superficie piana che passa per la corda dell'arco di una doele si chiama doele plate, è una fase di preparazione per la definizione di una doele concava.

[4] sono le sagome di una delle superfici di un concio, tagliate in legno o cartone, che saranno applicate sulla pietra per tracciare i contorni.
[5] superficie sulla quale si posa una pietra,sia che sostenga un'altra pietra sia che venga sostenuta. Quella sulla quale si appoggia una pietra si chiama lit de dessous, quella sulla quale un'altra pietra si appoggia si chiama lit de dessus, quando le facce sono inclinate in orizzontale come nei conci si chiama lit en joins.

qQ che faremo uguale a mM, o che è la stessa cosa LE, alla quale questa corrisponde, e sul punto z una perpendicolare zZ uguale a $m1^m$ che è la profondità del primo arco 1Z, poi tracceremo una linea retta da z a z, e una curva concava da Z a 6; ma visto che se ne hanno solo due di punti, bisognerà cercarne almeno un terzo.

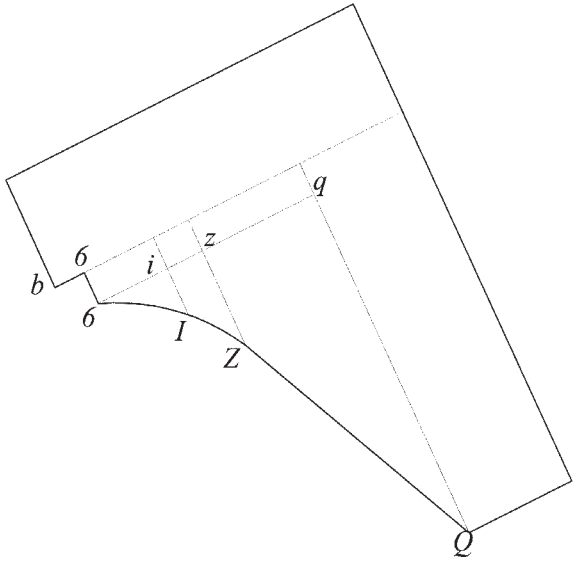


Fig.147 giunto della doele sesto concio.

Per questo effetto divideremo l'intervallo $C1^c$ dei due primi centri degli archi hK, e 1z in due parti uguali in d, da dove come centro, e con raggio dh, più la metà di h1, descriveremo un arco che intersecherà 6z in un punto i; riporteremo nella Fig. 147 la lunghezza 6i in i, alla stessa distanza da 6, e da questo punto i tireremo su una perpendicolare i1 che faremo uguale alla metà dell'intervallo $m1^m$, e per i punti 6IZ, tracceremo la cura richiesta.
È visibile che più che i lits saranno vicino alla chiave di volta, meno i loro giunti di doele saranno curvi; in ragione del fatto che se ce ne fosse uno al centro della chiave, questo sarebbe perfettamente retto; perché a quel punto la sezione passerebbe per l'asse del cono, e al contrario più che si avvicinano ai piedritti, più s'incavano. E infine quando il lit seziona il piedritto, il giunto ha una parte curva che segue la larghezza della doele che seziona e una parte retta, in quella del piedritto che seziona;poiché la superficie del lit deve essere piana, questa può sezionare solo un piano che segue una linea retta: non sarebbe così se il lit fosse deformato.
Abbiamo supposto nelle trattazioni precedenti che l'arriere-voussure non fosse troppo profonda affinché i conci fossero fatti da un solo pezzo dal prospetto al profilo; ma se per un eccesso di profondità, o per difetto delle pietre della lunghezza conveniente, si fosse obbligati a fare dei corsi di conci di due o più pezzi, bisognerà cercare gli archi delle teste che formeranno dei giunti di doele trasversali.
Dopo aver determinato la lunghezza orizzontale del concio, e avendola riportata sul piano ortogonalmente, condurremo per questo punto una parallela al prospetto che intersecherà la strombatura del piedritto, per esempio in 2^n, condurremo una parallela all'elevazione di questo piedritto, che incontrerà quella dall'angolo rientrante che fa con la volta in y, dove sarà l'origine dell'arco del giunto di doele che stiamo cercando.
Se gli archi di prospetto e di battuta sono concentrici, come nell'arriere-voussure bombata retta, questo arco sarà facile da descrivere dal centro comune C, e dall'intervallo dal punto trovato da questo centro.
Ma se questi archi di prospetto e di battuta sono eccentrici, bisognerà cercare una quarta proporzionale allo spessore o profondità orizzontale della battuta, a quella del concio, e alla distanza dai centri di prospetto e di battuta; il quarto termine darà la distanza dal centro 2^c al di sotto del centro C, per mezzo del quale e dell'intervallo 2^cy descriveremo l'arco del giunto di doele trasversale che stiamo cercando per il giunto di testa del concio.
Questa trattazione suppone ancora una cosa che può variare; si sa che il giunto trasversale è in un piano parallelo a quello del prospetto; ma può capitare per ragioni di decorazione, che questo giunto non sia su un piano verticale, come quando si vuole fare una banda di larghezza uniforme misurata non orizzontalmente, ma seguendo la distanza perpendicolare dallo spigolo del prospetto, sul bordo opposto alla banda; così sono le bordature dei rivestimenti in marmo, e le intelaiature dei rivestimenti di falegnameria. A questo punto si deve cercare la curva della proiezione di questi giunti trasversali per più punti, cosa che è piuttosto una trattazione di falegnameria che di taglio di pietre, come si vedrà dopo questa, quando parleremo di arte, di incrostazioni di marmo o di rivestimento.

Applicazione della trattazione sulla pietra.

Supponendo che si voglia cominciare facendo il cuscinetto, segnato dall'elevazione 6qlK.
Dopo aver disposto un paramento per servircene da superficie esterna, ne faremo un parallelo per la superficie interna, se la pietra può fare da spessore, cosa che supporremo per facilità d'istruzione, poi avendo tirato su un panneau sull'epure [6] in lK6q, lo disporremo su uno di questi paramenti, per tracciare i lits superiori, che faremo a squadra seguendo le linee 6q e Kl.

[6] disegno di una volta tracciato su un muro o su una tavola, della stessa grandezza dell'opera da eseguire per poter prendere le misure necessarie alla costruzione dei conci.

In seguito scaveremo in lunghezza sempre a squadra, sul solito paramento, una doele cilindrica fBdD, come se si volesse fare un concio di volta a botte retto seguendo l'arco K6, se la pietra termina alla battuta, o sull'arco ab che segna lo spigolo della cornice, se la pietra comprende la cornice, il quale arco è più avanzato di K6 di tutta la larghezza della battuta, cosa che obbliga a fare due superfici di doeles cilindriche diverse, l'una abba che comprende la larghezza della cornice, l'altra f6D che è quella della profondità della battuta.
Porremo in seguito sul lit inferiore il panneau del piedritto, sezionato sul piano orizzontale della Fig. 144, in TDEL per ottenere nella Fig. 148 il contorno che vi è disegnato in prospettiva in a aDEO.
Prenderemo anche il panneau del lit superiore, circa come è nella Fig. 147; dico all'incirca perché quello della Fig. 148 definisce un lit più elevato, in cui la parte curva 6Z è più grande della destra Zq, cosa contraria alla Fig.147. Così bisogna supporre che il lit in prospettiva della Fig. 148 rappresenti quello che sarebbe tracciato dal centro C della Fig. 144 per il punto y.
Dopo aver tracciato i due lits superiore e inferiore, sbozzeremo la pietra secondo una superficie piana, tra le tre linee rette tracciate DE, Eq, qZ. Poi con una sagoma fatta sull'arco iperbolico c^{f}zg del profilo della Fig. 145 concluderemo questa superficie piana con un quarto lato curvo DZ (Fig.148)

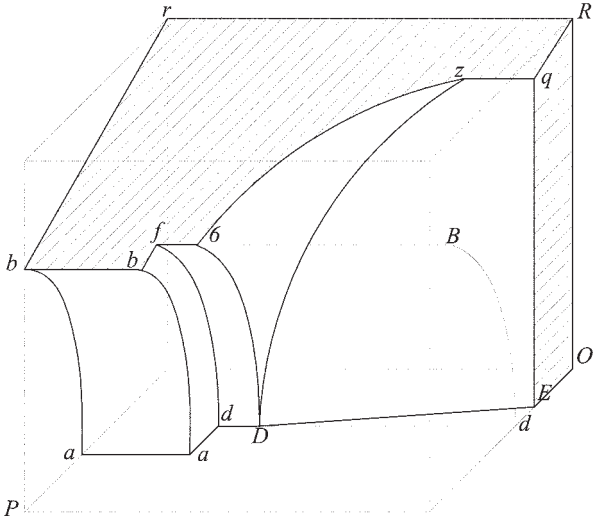


Fig.148 settimo concio della doele.

Allora non resterà altro che fare la porzione triangolare della doele dell'arriere-voussure, compresa tra tre linee curve date, conoscendo l'arco circolare di battuta D6, l'arco iperbolico del joint de lit [7] 6z, e l'arco iperbolico dell'origine della doele sul piedritto DZ. Così sbozzando la pietra compresa tra questi tre termini, non si può non farla abbastanza precisa.

Per maggior esattezza si può ancora dare una quarta linea retta, tracciando nella Fig. 144 una linea S^{e}r dai punti S e 6, che darà sull'arco KG un punto r, di cui prenderemo l'altezza sulla linea Kl per riportarla in S, e tracciare sS parallela a DE che intersecherà l'arco Dz in s; se la superficie è ben fatta potremo porre il regolo sui punti 6 e r senza che appaia del vuoto tra il regolo e la doele.
Si opererà circa nella stessa maniera per il taglio del concio seguente, al di sopra del cuscinetto segnato sull'elevazione 5nGq6, con questa differenza, che richiede un po' più d'attenzione, perché la doele cava del precedente si concludeva con tre linee curve; quella che abbiamo disegnato in prospettiva nella Fig. 149 è conclusa da cinque linee curve, conoscendo 5n, che è il giunto del lit superiore, nG l'arco di prospetto, Gz parte dell'arco di origine sul piedritto, z6 giunto del lit inferiore della doele, e 65, arco di battuta.

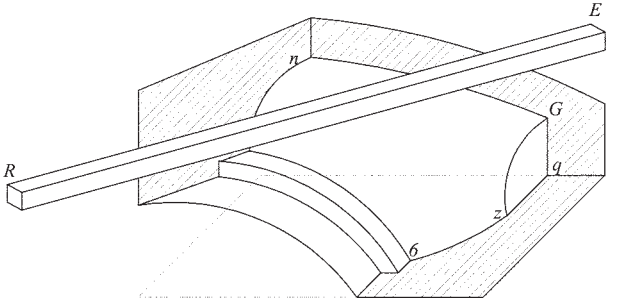


Fig. 149 sesto concio della doele.

Questo concio comprende in più un triangolo piano misto Gqz, ecco qui la pratica.
Dopo aver predisposto e misurato i paramenti sul davanti e sul dietro, se la pietra fa da spessore, applicheremo su uno dei due il panneau fatto sull'elevazione della Fig. 144 in 5nGq6 per tracciarne il contorno, poi avendo sbozzato la pietra a squadra sul paramento,

[7] linea di divisione dei conci, divisioni longitudinali della doele, per indicare la superficie inclinata di una pietra inserita in una volta si dice invece lit en joins

.

seguendo le linee rette 5n e 6q per fare i lits, e seguendo il contorno dell'arco di cerchio 56, avremo un concio simile a quello di una volta a botte, osservando l'incavo della battuta
In seguito applicheremo al lit inferiore il panneau della Fig. 147 e a quello superiore il panneau 146, poi dalla linea retta ZQ data al lit inferiore, e per la linea retta qG, tracciata sul paramento di prospetto, faremo passare una superficie piana sbozzando la pietra a triangolo, di cui faremo il lato ZG con una sagoma formata sull'arco Zg della Fig. 145, allora avremo il contorno dei cinque lati curvi che concludono la porzione di doele dell'arriere-voussure compresa in questo concio.
La molteplicità di questi lati, fare bene la sbozzatura della pietra è cosa abbastanza difficile, in modo che si formi una superficie regolarmente conica; è per questo motivo che ci si deve dare qualche punto di posizione per poterci applicare la regola.
Per questo effetto, tracceremo dal punto S, e dai punti presi a piacere sul contorno del concio, per esempio 5V, delle linee rette che termineranno sull'arco ZG verso y e verso x, dove prenderemo delle sporgenze dell'altezza sul lit 6q che riporteremo nella Fig.149 dove segneremo anche i primi punti 5 e V. Allora ponendo il regolo RE su questi giunti, sbozzeremo la pietra in modo che ci si applichi esattamente; così avremo delle guide per non scavare troppo tra i termini del contorno della doele data; moltiplicheremo queste linee rette per quanto si giudicherà necessario, e il concio sarà fatto esattamente affinché la doele prosegua senza sporgenza con la porzione precedente ma seguendola; queste saranno più facile a farsi, poiché saranno concluse da quattro lati, invece quelle della Fig. 149 lo erano da cinque, dove si deve osservare bene che il regolo non può essere applicato esattamente sulla doele, in nessun altra posizione se non quella dove con direzione passante per il punto S.

Spiegazione dimostrativa delle trattazioni, delle due specie di arriere-voussures coniche, scalene, convessa e di Marsiglia.

Per concepire che l'arriere-voussure conica scalena, semplicemente curvata, come quella che è disegnata nella Fig. 138 dalla parte FnGKhI, è intrinsecamente la stessa cosa dell'arriere-voussure di Marsiglia, bisogna considerare la sola parte 82n5 della Fig.154 e immaginare che il piedritto DE sia trasportato in PN, allora l'elevazione della sua strombatura sarà il trapezio misto P5nQ, al posto dell'altro, che era un triangolo misto composto da due lati retti DL LG, e da un lato misto DKG; così si deve considerare l'incurvata come una parte di quella di Marsiglia.

(Fig.150) Per dare una giusta idea di questa volta, abbiamo disegnato nella Fig. 150 un triangolo scaleno in piccolo e in prospettiva, simile a quello di profilo 145, il cui triangolo RSH è una sezione per l'asse, e per il diametro H^fR della più grande obliquità. Se si seziona questo cono con un piano parallelamente a questo diametro, e perpendicolarmente al piano della base, è chiaro che si formerà sulla superficie del cono un'iperbole Fke, che rappresenterà la sezione che sarà fatta per EL, nella Fig.144, e se questo piano è ruotato diversamente, si farà un'altra sezione che possa ancora essere un'iperbole, o una parabola, o un ellisse; quale che sia la linea SM rappresenterà l'asse SM^f di profilo della Fig.145, la curva FK della Fig.150 rappresenterà l'origine fg della Fig. 145 e il triangolo MspL sarà la proiezione orizzontale della metà del cono scaleno, dove SpM rappresenterà l'asse.

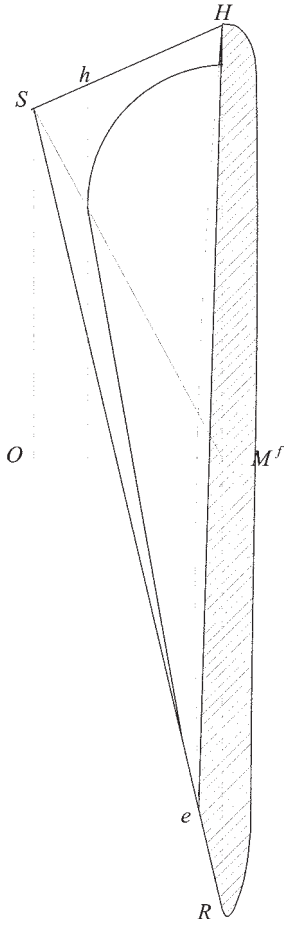


Fig.150 proiezioni del cono scaleno.

Supposta questa preparazione, sarà agevole seguire le ragioni della nostra costruzione; perché supponendo il cono scaleno SHR Fig.150, sezionato da più piani verticali paralleli alla base, saranno rappresentati nella proiezione orizzontale della Fig. 144 con delle linee rette di cui le metà sono mD 1^mo, 2^mo, 3^mo, le quali saranno i raggi dei cerchi formati sulla superficie del cono, e nella stessa proiezione l'asse del cono chiamato SM^c nella Fig.150 sarà rappresentato di scorcio dalla linea SpM, e in alzato dalla linea S^em uguale a Sq del profilo 145. Adesso poiché le parti proporzionali di questo asse tra il prospetto e la battuta, rappresentate in tre proiezioni diverse, sono anche divise ciascuna in parti uguali tra di loro, ne consegue che tutte le sezioni del cono sono proporzionali e

Da qui segue che le linee simili poste in ciascuna di queste proiezioni, rappresentano la sezione di un piano passante per le tre dimensioni di lunghezza, altezza e profondità; così avendo supposto il piano del piedritto DE sezionante il piano della proiezione orizzontale ABDE, darà come sezione una linea retta DE. Lo stesso, incontrando la superficie curva della doele, divisa proporzionalmente da più piani verticali, formerà la curva K_2G, condotta per le intersezioni HG, 3x, 2y, 1z, aK, che sarà tangente, i quali piani verticali rappresentano in alzato per questi archi di cerchi di cui sono il contorno, sono al contrario rappresentati sulla sezione da delle linee rette 1Z 2Y 3X, di cui ci si accorge facilmente se si è persone interessate all'architettura che capiscono la sezione. Ma dato che il piano del piedritto in posizione obliqua rispetto all'asse, come DE, si trova scorciato in sezione nel rapporto di DE a LE, la curva fYe diventa inutile per fare un panneau; è per questo che abbiamo allungato questa curva con una nuova sezione, o piuttosto una giusta elevazione fyg, di cui la base fk è uguale a DE, e gli intervalli delle ascisse uguali alle divisioni di questa linea DE, come l'abbiamo insegnata nel secondo libro per la formazione degli ellissi e altre sagome allungate.

Tuttavia, per far vedere che la prima sezione può diventare utile per la trattazione, farò notare che per mezzo di questa e la curva di elevazione KzG, si può tagliare il cuscinetto per squadratura.

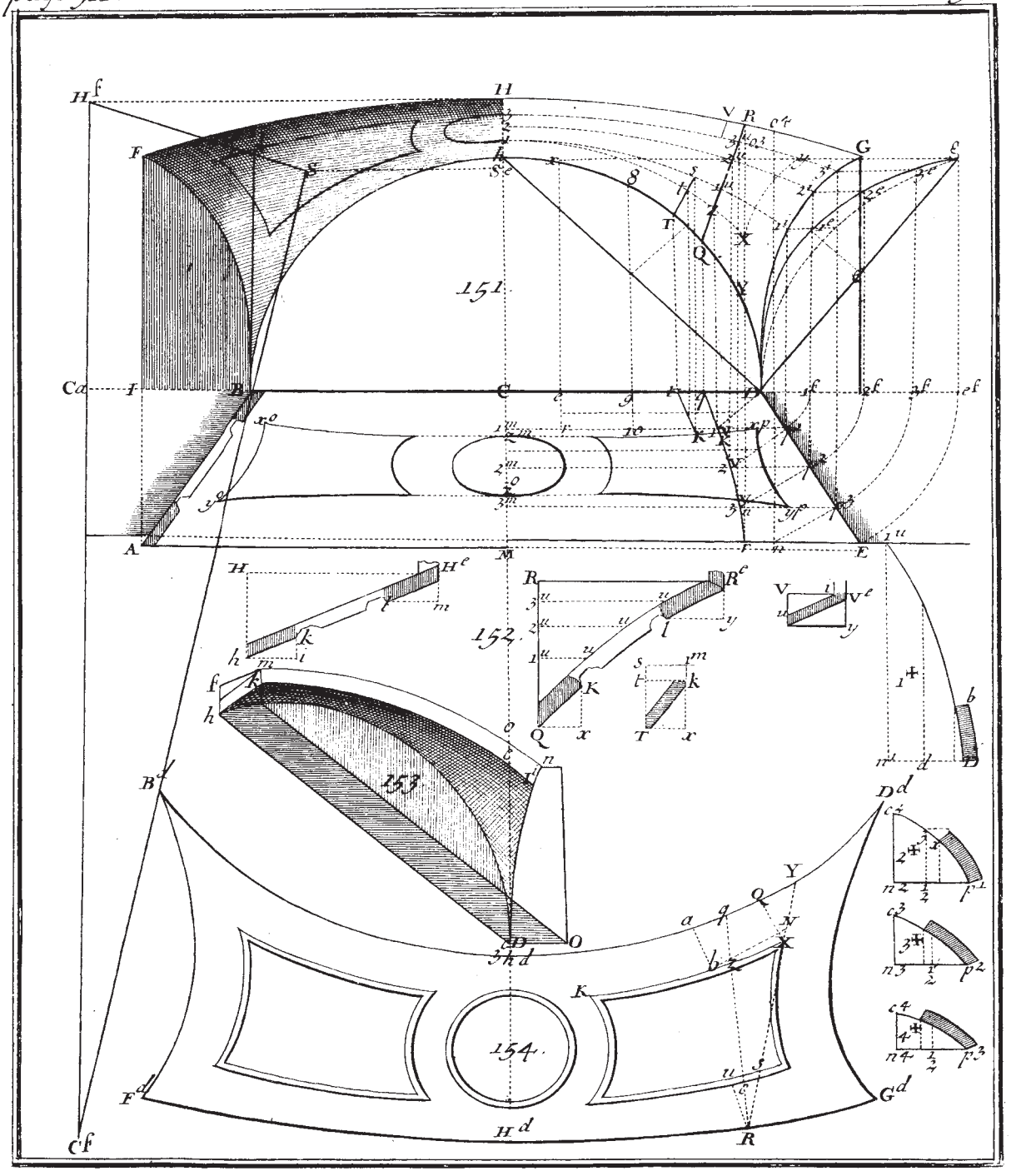
Dopo aver tracciato un paramento a piombo, e di larghezza uguale alla profondità dell'arriere-voussure, la curva della sezione fYe, tracceremo sul ritorno di squadra quella di elevazione KzG, poi sbozzeremo la pietra in cavità cilindriche sino ad incontrare il contorno convesso.

L'incontro di queste due superfici, l'una concava, l'altra convessa, darà la curva dall'origine più distesa, come quella chiamata fyg della Fig. 145, tutte quelle curve sono della stessa natura dalla Teoria III del primo libro.

Riguardo ai joins de lit, questi fanno delle curve la cui costruzione è fondata sullo stesso principio di quelle dei giunti del corno di vacca.

page 311.

Pl. 52.



RIVESTIMENTO DELLA SEZIONE BOMBATA DI MARSIGLIA, REGOLARMENTE CONICA

Sia (Fig. 151a) il trapezio ABDE, il piano orizzontale del retro della sezione bombata, e BFHGDh, la sua altezza fatta come è stato detto per la MASSONERIE, con l'inizio della curva della sezione bombata, sul suo piedritto bombato DE, il quale è tracciato per tutta la sua estensione in $D1^e2^e3^e$g, e ed in proiezione verticale in $D1^i2^i3^i$G.
Si tratta di cercare lo spessore del livello e le altezze dei pezzi di legno, su i quali si va ad assottigliare la costruzione dell'assemblaggio del rivestimento che ci proponiamo di fare, come si vede illustrato nella figura 154, come queste costruzioni sono deformate, ci sono quelle che sono sempre diversamente inclinate all'orizzonte, dopo di che l'imposta fino a metà della clef[1], la loro larghezza orizzontale aumenta dopo l'imposta, dove le costruzioni sono meno in surplomb[2], fino a che la clef, dove raggiungono la loro massima inclinazione; nel quale punto può succedere che la superficie è inclinata così forte, che essa diventa tutto d'un tratto orizzontale, mentre in questo punto non ci sono punti di bombatura.

Da dove si vede, che l'ispessimento del legno, destinato a tagliare una traversa della struttura per squadrarla, sarà terminata da una parte da una linea dritta BD o AE su gli archi della battuta e della faccia; ma da una linea curva da un lato del pannello, per esempio, $x^pz^mx°$ e $y°zy^p$ dove deve cercare un punto del profilo preso a piacere.

Inizialmente, al centro della clef, è sempre necessario fare un profilo rettilineo, perché la linea hH passa per la sommità del cono S^e. Si farà dunque questo profilo come nel tratto precedente, si porterà a parte l'altezza hH della figura 151a, in hH della figura a sinistra nella 152, poi si tirerà una perpendicolare HH^e uguale alla profondità della sezione bombata CM, si tirerà la linea H^eh, il triangolo rettangolo hHH^e sarà il profilo di mezzo (della figura 151a), sul quale si farà il profilo dell'infisso, da dove si porterà la lunghezza sull'ipotenusa in hk e lH^e, per il punto h e l si tirerà l'orizzontale hi, lm, e per il punto k e H^e la perpendicolare H^em e ki che tagliano le orizzontali in i e m, che si porterà al piano orizzontale in Cz^m, e Mz su CM per avere il primo punto di mezzo di questa curva in $z^{m(3)}$.
I profili di queste due traverse dell'infisso sono stati fatti in una sola sezione, non si potrà fare lo stesso nel seguito della volta, se lo hanno visto operare esattamente, perché le lunghezze degli infissi devono essere misurate perpendicolarmente agli arètes[4] curvi che le terminano, e come questi arètes curvi sono eccentrici, la perpendicolare sul l'uno è obliqua a l'altra dentro l'elevazione.

Per farlo più esatto possibile, bisogna tirare la linea dell'infisso dei profili di mezzo dei centri dei due archi eccentrici, per esempio, per l'infisso al di sopra della battuta dove gli archi hanno per centro l'uno il punto C e l'atro il punto I[5], dove il mezzo è o, si tirerà per questo punto per un punto preso a piacere, per esempio T, la linea Ts, che si porterà a destra della fig.152, in Ts; poi prendendo la larghezza orizzontale $C1^{m(6)}$, di questi due archi, la si poserà perpendicolarmente da Ts al punto s, e si traccerà $T1^m$, sulla quale si porterà la larghezza della base ab della figura 154, dove hk della fig. a sinistra nella 152 in TK, e si traccerà Kt parallela a $S1^m$; la larghezza tK essendo portata dal piano orizzontale in tk, darà dal punto k* della curva, che stiamo cercando, la quale passerà per z^m. Si cercherà lo stesso un terzo punto x^p, si traccerà con una linea piana la curva $x^pz^mx°k*$ che sarà quella cercata sul piano orizzontale.

A proposito dell'elevazione, si porterà l'altezza xk del piccolo profilo che stiamo creando sulla linea Ts della figura 151 da T in s che darà un punto t* alla circonferenza della curva di altezza. Così supponendo l'altezza hi uguale all'altezza mH^e del profilo della fig.152 ed un terzo punto X trovato come il secondo t*, si traccerà con una linea piegata la curva 1t*, che sarà l'altezza dell'infisso che si è cercato in precedenza dell'arco hTD che è il suoarète inferiore.

Se si vuol mettere i due spigoli della sezione su di un unica sezione, la si dovrà tirare dal mezzo dell'intervallo del centro i più lontani C e hD che è in 2^e, che darà la sezione QR, supponendo che si traccerà dal punto Q al punto R preso a piacere, allora si avrà, per quanto spiegato in precedenza, che il profilo QRR^e a centro nella 152 dove la linea $QKlR^e$ è curva in sezione conica, secondo i punti trovati, come è stato detto nella formazione delle panneaux [7]della corne de Vache.

Su questa linea curva che è una sezione doele[8], si collocherà il profilo delle due traverse dell'infisso di fronte e della battuta come si vede in $QK^{(9)}$,lR, per avere le altezze diverse, Kx e R^ey, e le larghezze dove lo spessore è anche diverso Qx e ly, le quali misure diverse delle altezze e delle larghezze, provengono contemporaneamente dalla larghezza dell'infisso che si suppone sempre uguale alle linee ab e uR della figura 154.

Ma come questa operazione non può dare esattamente il valore della larghezza dell'infisso che dovrà essere sempre uguale; ciò significa che questa operazione non può essere accettata che verso la metà della sezione bombata Hh, e diventa sempre di più inesatta in modo che la sezione scelta a volontà sull'imposta; noi la inseriamo qui per maggiore chiarezza a prova dell'errore di Maitre Blanchar.

ERRORE DEL TRATTATO DEL MAITRE BLANCHAR

Ho già detto in precedenza che il pubblico era obbligato dagli artigiani i quali avevano dei segreti nelle loro arti; e credo soprattutto di incoraggiarli a pubblicarli, fino a quando a forza di ripetere i soliti errori ne subiscano poi le conseguenze, ma come quelli del libro di Maitre Blanchar sono troppo consistenti per non prenderli in considerazione, mi sento quindi obbligato a rivelarli, tanto che non si tratta di un unico errore eclatante, visto che è ripetuto nella maggior parte del libro.

Per trovare i punti delle curve dello spessore e dell'altezza dell'infisso, fa sempre delle sezioni verticali del punto preso a piacere, e anche in quantità molto elevate, dentro i quali si collocano le larghezze degli infissi in profilo senza ne aumentarle ne diminuirle; dove risulta che queste sezioni verticali, erano tutte diversamente inclinate dall'arco delle

superfici degli arrivi delle sezioni , questi devono necessariamente dare delle larghezze degli infissi diverse contro le sue intenzioni e contro l'armonia della falegnameria, che esige che le larghezze dell'infisso siano uguali, esso può arrivare dentro i rivestimenti sferici o conici, dentro i quali si trova il polo, che si deve diminuire di larghezza a misura di quello in precedenza.

Ciò supposto, si deve mostrare dentro la circonferenza presentata, così che l'errore sarà grande se si segue la pratica, nel momento in cui si fa la sezione del profilo destinato a cercare un punto della curva perpendicolare alla metà dell'arco, sia per la proiezione orizzontale che deve
regolare l'ispessimento, sia per la verticale che deve determinare l'altezza del legno destinato a tagliare un infisso per squadrarlo.

Inizialmente, è una cosa saputa da tutti, senza l'aiuto della geometria, che le larghezze delle superfici devono essere misurate perpendicolarmente al loro lato; che tutte le misure oblique possono variare la larghezza che l'angolo d'inclinazione della linea sulla quale si prende questa misura.

In secondo luogo, è dimostrato dagli elementi di geometria , che la più corta di tutte le linee tracciate da un punto alla linea data, è la perpendicolare a questa linea, di conseguenza, se si piazza obliquamente ad una linea la lunghezza di questa perpendicolare tra le due linee parallele, questa non arriverà alla seconda ma la sua estremità resterà tra le due, dove si vede chiaramente che rappresenterà una larghezza inferiore.

Con ciò si suppone, se si fa passare una sezione verticale per il punto R preso a piacere, su l'arco HG, l'estremità inferiore di questa sezione cadrà in Y, dove si avrà un angolo acuto, con hYD, e sempre più acuto man mano che questa sezione si avvicina al punto D; di conseguenza la stessa misura data per la larghezza della costruzione, era sempre più inclinata a questo arco, segnerà quindi per la sua estremità una larghezza sempre inferiore.

Per rendere questa verità sensibile agli occhi e non solo allo spirito, abbiamo tracciato la figura 154, lo sviluppo della superficIe della doele della sezione bombata, la quale era esattamente conica può essere senza contraddizioni, sviluppata su di una superficie piana come è stato detto dal Corollario del problema VI del terzo libro

Poiché la curva h^dD^d è sviluppata dall'arco circolare hYD, il punto Y sullo sviluppo deve essere anche lontano dal punto di mezzo h^d, che è dal punto h alla 151; per la stessa ragione il punto R della figura 154 deve essere altrettanto lontano dal punto H^d, che il punto R della figura 151 è dal punto H; inoltre la linea YR sarà lo sviluppo di una porzione dell'iperbole fatta per un piano tagliante il cono parallelamente ai suoi spigoli dalla linea RY, la quale farà un angolo curvilineo acuto, con la curva h^d a YD^d, questo è evidente, in quanto è divergente dalla linea di centro h°H°, ben lontana dall'essere convergente. E sebbene la linea RY sia curva nella vera forma questa curvatura è così poco sensibile che non può influire sull'angolo che fa in Y, come si pupò vedere dal problema VII del terzo libro fig. 266 e 267 della pl 22, supponendo dunque una larghezza ab sull'infisso dato tra gli archi h^daYD^de KbX; è chiaro che se si prende su YR una larghezza YN uguale ad ab, e si tracci bN, questa restringerà l'infisso verso N.

E' ancora più chiaro che l'errore sarà più piccolo, se si prende la sezione in QR tracciata da metà $2^{e(10)}$ dei centri della battuta e della faccia;ma si sostituirà ancora, perché questa linea fa in q un angolo acuto aqR.

Da dove è chiaro che il trattato di Mitre Blanchard, "per trovare le curve dello spessore e delle altezze dei legni propone di assottigliare degli infissi della larghezza degli angoli, e trovando gli spigoli per la squadratura, sono generalmente tutti falsi;" per la sola ragione che tutte le sezioni su le quali fa i suoi profili sono parallele tra di loro, essendo tutte verticali;essendo che esse non dovrebbero essere parallele ma convergenti; ciò che non subisce alcuna difficoltà, poiché tutte queste sezioni sono inegualmente inclinate alle curve dei centri delle facce e delle battute di tutte le sezioni bombate, eccetto alla sola sezione per il centro, le quali passano per il loro asse.

Noi abbiamo dato il modo per trovare la proiezione verticale ed orizzontale delle traverse degli infissi che ci sono sulle facce e sulle battute, ci resta da vedere quella per trovare degli spazi che assemblino in una sezione le traverse davanti e dietro; le quali formano l'inizio delle superfici del rivestimento sui piedritti.

Si traccerà dal punto D,p^1,p^2,p^3, perpendicolare al piedritto DE, che taglieranno le trasversali $1^mp^1,2^mp^2,3^mp^3$,ME in dei punti $n3^v2^v1^{v(11)}$, per i quali si svilupperanno delle verticali parallele a CH che taglieranno gli archi eccentrici dell'elevazione HG,, $33^i,22^i,11^i$, ai punti $o2^io^3o^{4(12)}$.

Questa preparazione è stata fatta, si formeranno dei profili su ciascuna delle perpendicolari a DE, che ne faranno delle basi orizzontali uguali, ma da cui le altezze sul punto n saranno tutte diverse, essendo la differenza delle altezze dei punti $1^i,2^i,3^i$,G, e dei punti corrispondenti delle sezioni e degli archi $o^3o^{4(13)}$.

Ma come questi profili non daranno che due punti di ciascuna curva, l'uno in alto in $o^{4(14)}$, e l'altro in basso in o^3, conviene cercarne un terzo tra i due, ciò è facile a fare suddividendo 1°) gli intervalli della proiezione $Dp^1p^2p^3$ e E per le suddivisioni, dalle quali si condurrà delle parallele a CD. 2°) si suddividerà dagli stessi gli intervalli dei centri degli archi dell'elevazione $D1^i,1^i2^i$, e quella degli archi dopo h fino a H, per tracciare degli archi anche essi eccentrici tra hD, $11^e12^{e(15)}$,che daranno delle differenti altezze, per la minore delle quali si troverà un terzo punto della curva del profilo, come si rappresenta dalla figura +.

Si potrà sicuramente aggiungere a questa sezione della doele il profilo delle larghezze simili delle battute, come si può vedere dalle stesse

figure per fargli fare una linea in proiezione orizzontale curva, come si è visto in y^px^p, ma si ricadrà nell'errore che ho trovato nel trattato del

signor Blanchard, perché se bene le basi dei profili siano perpendicolari alla proiezione dell'arco che nasce sui piedritti $D1^eg$, essi non sono

perpendicolari a questo arco ed è per questo che per trovare la vera grandezza di questa proiezione si dovrà riuscire a combinare l'obliquità della sezione aumentando il profilo della larghezza dell'infisso, ci si eviterà una nuova operazione che ci si dovrà risparmiare per la pratica successiva.

APPLICAZIONE DEL TRATTATO SUL LEGNO

Si comincerà inizialmente ad esaminare un punto di vista sull'altezza, la curvatura che si dovrà dare allo spazio dell'infisso che ci si propone di fare, per scegliere un punto dell'infisso di larghezza opportuna per tracciarvi l'arco di maggiore concavità, per assicurarsene si tirerà una corda per esempio hD, si tratta dell'infisso del lato della battuta hQD, sulla metà del quale si tirerà una perpendicolare, che segnerà il braccio che è la cavità di questo arco,ed in più quella della curva al di sotto di 1ZX, che è il bordo superiore di questo infisso, al quale deve aggiungere lo spessore che gli si vuol dare.

Si potrà fare la stessa cosa per la traversa dell'imposta tirando una corda Dg per avere la più grande profondità che è verso il punto 1^e, alla quale profondità si aggiungerà la distanza di questo punto dalla linea Xy, se essa è stata esattamente tracciata; ma come si può notare non c'è che da aggiungere circa la larghezza dell'infisso; noi andiamo a seguire la proiezione di questa superficie, dopo di che torneremo nella battuta.

Si inizierà con il raddrizzare il lato dello spazio dell'infisso che deve essere applicato sul piedritto poi ci si applicherà il panneau della curva $D1^eg$ successivamente la quale si approfondirà l'infisso dentro il suo spessore a squadra, come si è voluto fare per una sezione della volta a botte, poi si porterà sullo spigolo della curva dallo stesso lato la distanza $D1^eD2^eD3^eDg$ per avere dei punti di riparo per il quale si traccerà la squadratura, sulla faccia tracciata, e dentro la superficie concava della linee uguali a quelle del piano orizzontale $D1^v,p^12^v,p^23^v,p^3n^{(16)}$,, dove solamente nel loro centro, se la struttura non è abbastanza spessa.

In seguito si prenderà con il sauterelle[17] l'angolo ottuso D e G, e applicando una riga sull'estremità del legno in D e g, si farà scorrere uno dei bracci del sauterelle , lungo questa riga, e l'altra successivamente sull'estremità di ciascuna delle linee tirate dentro l'incavo di traversa dello spessore del legno; si traccerà lungo questo secondo braccio, delle linee dritte che saranno in opera delle verticali, sulle quali si porterà le altezze corrispondenti di ognuno dei profili marcati + per avere dei punti, successivamente ai quali si traccerà con una riga pieghevole una curva, che farà una sezione della doele: inoltre dopo questa curva si smusserà il legno come in taglio obliquo fino a che quella che è stata tracciata dalla parte opposta secondo la panneau dove il centro $D1^eg$, e l'addobbo della doele sarà fatto; ma poiché non avrà la solita lunghezza del legno si traccerà l'eccedenza che si traccerà con il trusquin[18]tirato sull'arco $D1^eg$, quello che fa vedere si può passare dal

la proiezione del piano orizzontale y^px^p.

Venendo primariamente alla costruzione di uno spazio delle strutture delle traverse di fronte alla battuta, che servirà come esemplificazione alla precedente, che noi non abbiamo potuto accompagnare da una figura per meglio farlo capire al lettore.

Sia uno spazio del legno hmI^in (figura 153) destinata a formare solamente la metà della costruzione della battuta che non si può fare in un solo spazio, fatta dal legno piuttosto grande. Avendo tracciato un paramento per il lato della battuta, vi si tirerà una linea hD uguale alla corda hD della figura 151d sulla quale si applicherà la panneau dell'arco hTD, per tracciarne il contorno del paramento disegnato appositamente.

Poi si taglierà il legno alla squadratura successiva a questo arco, per formare una porzione scavata cilindrica, dunque si aggiusterà lo spessore sulle larghezze diseguali della proiezione orizzontale della struttura CDx^p10z^m come si vede.

Si prenderà dal punto sulla curva z^mK*x^p, per le quali si manderà delle parallele a CH, che incontreranno l'arco hTD nei punti x8QY, poi avendo portato sul contorno del legno scavato a forma cilindrica le lunghezze delle corde hx,h8,hQ, hY, si traccerà per tutti i punti del cono, che daranno al arete del legno, abbastanza linee alla squadratura sul parametro tracciato, che si farà uguale alla lunghezza corrispondente dentro la proiezione Cz^m, er, 9 1O,qK,Dx^p, e si taglierà il legno alla squadratura sul parametro incavato, successivamente questi spessori diseguali. In seguito per i punti dell'incavo che queste linee danno sullo spigolo della nuova superficie curva , si manderà delle linee parallele tra di loro, e alla linea della testa km della figura 153 che corrisponde alla linea Hh della figura 151, che è stata tracciata con la mezza zappa[18] dai tagli di pietre ThH, o con la sauterelle degli inizi, successiva all'angolo ottuso DhH, applicando uno di questi bracci sulla corda Dh disegnato all'inizio del parametro tracciato come Dhf alla figura 153.

Infine su ciascuna di queste parallele si porterà le altezze dei profili corrispondenti, e ci si applicherà la sagoma della corda iX, se questa è stata tracciata sull'elevazione, sebbene dentro la rigidezza questa maniera sia meno corretta, perché la nuova superficie è curva si dovrà utilizzare un elemento flessibile.

Questa curva di altezza dello spigolo superiore della struttura e stata tracciata, non resta che smussareil legno, o come dicono alcuni debillarder, dopo questa linea al primo spigolo inferiore in maniera obliqua che cambia continuamente di inclinazione come si è visto al profilo hI^i della figura 153, che si allarga talmente dopo il punto I^i che la superfice curva fino al punto D, (che è la superficie piana contro la battuta), che l'intervallo della smussatura è cinque o sei volte più grande di quanto non lo era in k, di questa forma che si chiama la sinistra della costruzione, la quale obliquità è di questa lunghezza più grande che in alcun altra, non si presenta lo stesso fino a quando non si forma nella superficie più a sinistra; contemporaneamente la sua irregolarità che è deforme dentro un spazio separato, disparato mentre è in

un piano perché è parte di un superficie regolarmente conica.

Noi non parliamo di quelle parti degli assemblaggi, che sono i morsetti, i perni, le chiavi ecc. Ne della precauzioni che bisogna prendere per il taglio delle traverse in legno, della maniera in cui si usano le forze; sta all'artigiano di prendere le precauzioni nelle diverse situazioni, che sono

puramente di sua iniziativa, noi ci atteniamo all'arte del tracciato del lavoro, lasciando all'operaio quello dell'esecuzione.

Se si vuol fare il rivestimento del legno piegato, si dovrà fare lo sviluppo della doele, come si vede alla figura 154, successivamente al metodo che è stato dato al problema VII del terzo libro per lo sviluppo del cono scaleno.

Si troverà entro il diagramma della tavola precedente 5, tutto ciò che è necessario per questa operazione. Si tratta di fare lo sviluppo della superficie di un cono scaleno, rappresentato un po' alla figura 150 dove la sezione di più grande obliquità per l'asse è data dalla figura 145 in H^fSR, e la metà H^fSM^f della figura 151 della tavola 152, in H^fSC^f non c'è che il prolungamento H^fC^f di una lunghezza uguale, che sarà fuori dalla tavola, tirando dalla sua estremità a questo punto S una linea che darà il lato più lungo di un cono, poi tracciando su di uno sviluppo quello dell'arco della battuta BhD e della faccia FHG, come è stato spiegato dal problema citato, e le due parabole ed iperboli,dove la proiezione verticale sono FB, GD; resterà sullo sviluppo di questo cono un quadrilineo curvilineo, tale che è tracciato dalla figura 154, compreso tra quattro curve $B^dD^dG^dF^d$ disuguali, e le linee uguali opposte D^dG^d, B^dF^d.

ESPILICAZIONE DIMOSTRATIVA.

Si troverà la dimostrazione di questa operazione al problema citato al terzo libro.

E' quella applicazione del trattato sul legno alla pagina 318 dello stesso libro, nel quale abbiamo detto che per tracciare una curva a doppia curvatura, come sono quelle degli spigoli dell'infisso nel lalto della sagoma, dentro questa volta a botte; si dovrà fare per meglio arrivare ad una conclusione, supporre una superficie cilindrica da cui la base sia una delle proiezioni della curva a doppia curvatura la quale proiezione da spesso delle curvature sconosciute, come qui z°x° che gli interessa poco di conoscere quello che è stato tracciato, basta portare su questa superficie le distanze della curva proposte a questa proiezione, su delle linee parallele tra loro, è quello che abbiamo fatto formando il cilindro sulla curva z°x° della figura 151, successivamente un cerchio allungato sulla corda hD, noi abbiamo preso le distanze di questa base del corpo cilindrico del punto dato sulla curva a doppia curvatura.

RIASSUNTO

Dopo quello che abbiamo detto delle diverse curve, che si formano con joints de lit[19], e alla base dello sviluppo della maggior parte delle volte coniche; si può giudicare da questo che l'anticipazione dell'autore del libro della " Pratique della coupe de piere" alla pagina 265 dove dice che: "la connaissance des sections conique est plus propre à la Catophine, a la Diofhine,l'Aftronomie, qu'à la Coupe des Pierres" come si è visto.

Inizialmente l'ellisse si è trovata quasi ovunque, è comune a tutte le volte a cono e a cilindro, si vedrà nella fuga, che non è meno frequente nel trattato delle volte Sphériques e Sphéroides.

Secondariamente, non è raro trovare dentro queste volte coniche ,le più ordinarie delle porzioni delle parabole e dell'iperbole, poiché sono inseparabili dalle nostre sezioni bombate. Inoltre non si deve consigliare a nessuno, quelli che vogliono diventare abili nell'architettura , delle regole dei loro studi sono opinioni dell'autore.

Non è difficile trovare tra la gente che si è confusa, una teoria presuntuosa per una perfetta esecuzione delle opere, che essi ci presentano, senza volere ancora le deviazioni di quelli di cui essi non possono passarsi, c'è il rischio di fare degli errori grossolani, dove senza perdere tempo e materiale, per riassumere quelli si fanno degli azzardi.

Ci sono dei pareri simili , che hanno formato tra gli artisti delle false supposizioni, che la teoria era inutile.

Non bisogna pretendere che un installatore, un carpentiere o un maniscalco, siano dei grandi geometri, la loro educazione, i loro bisogni che nascono da un lavoro giornaliero per sopravvivere, non gli da la possibilità di istruirsi con la scienza; ma un in geniere ed anche un architetto non sono giustificati, non devono ignorare li elementi delle sezioni coniche, e devono conoscere l'utilità dei punti, l'uso delle arti relative all'architettura, ed ancora meno il voler stabilire l'inutile

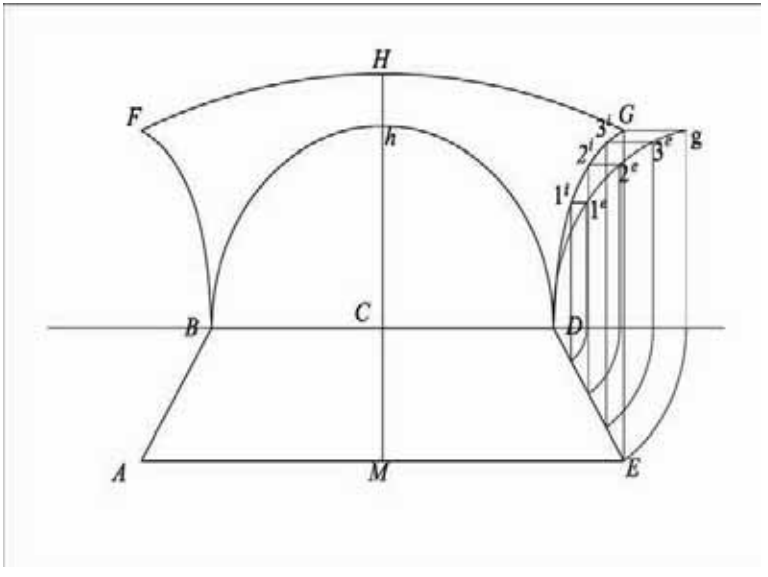


Fig.151a: Il trapezio ABDE rappresenta il retro della sezione bombata con il piedritto DE rappresentato in vera grandezza dalla curva $1^e2^e3^e$, ed in proiezione dalla curva $1^i2^i3^i$.

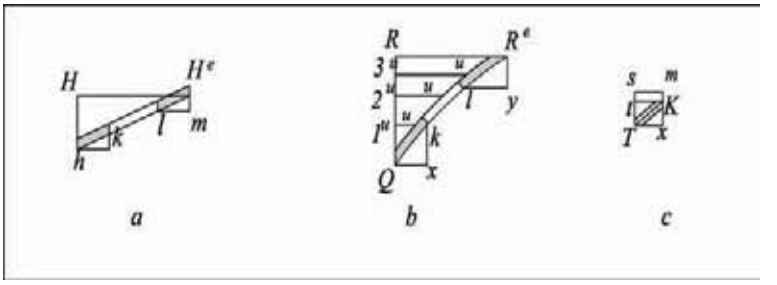


Fig.152: Nelle tre figure, sono riportate le tre sezioni(Hh, RQ, Ts) attraverso le quali è possibile ricavare la vera grandezza del disegno dell'infisso.Nella fig.152a l'altezza hH viene riportata in vera grandezza, perpendicolarmente ad essa in h viene inserita la misura di CM, che è l'ltezza del trapezio dato ABDE, così da formare un triangolo rettangolo, sul quale porterò le tracce del disegno della figura, attraverso k l, che nella fig 151 b indico con z^m e z. fig.152b sempre con il solito sistema di prima indiviuo una sezione generica dell'infisso QR che rappresento nella figura 151b, RR^e crrisponde di nuovo a CM, con i punti kl indico due generici punti del fregio che nella figura successiva vado ad indicare con le lettere 3^u4^u fig.152c qui sono riportati due punti il punto T e il punto s, il quali sono stati trovati unendo la curva di altezza centrale con l'arco dell'intradosso. T è un punto generico, la direzione corretta Ts viene data come proseguo dell retta che unisce o a T, dove o rappresenta il centro delle due circonferenze che hanno come centro l'una il punto C e l'altra il punto I.

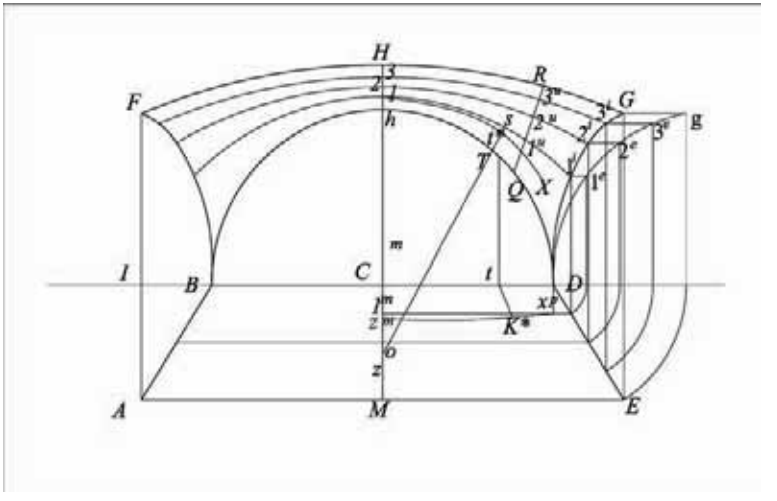


Fig.151b.Nella figura viene riportato il concio della fig.151a precedente indicando le sezioni hH,Ts,QR, attraverso le quali nella fig.152 è stato possibile ricavare alcini punti della decorazione. Si è inoltre trovato un terzo punto K* il con la proiezione di T, il quale pernetterà di tracciare la curva, relativa alla decorazione del concio, $z^mK^*x^m$

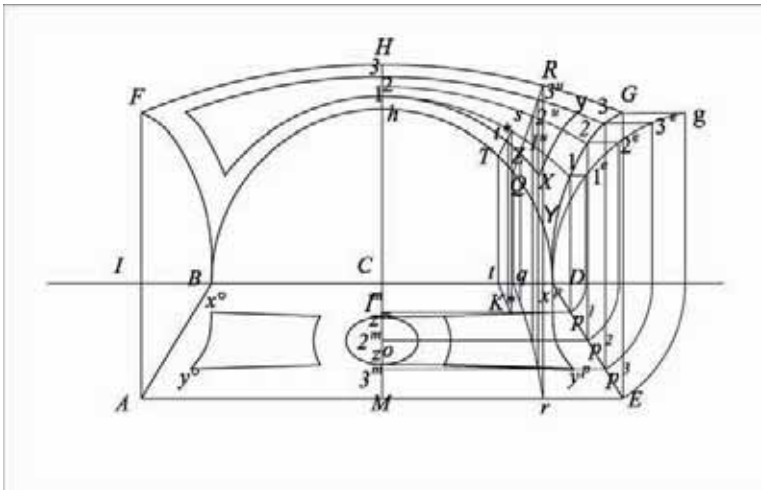


fig 151c nella figura viene tracciato il disegno della decorazione unendo i punti delle curve trovati in precedenza

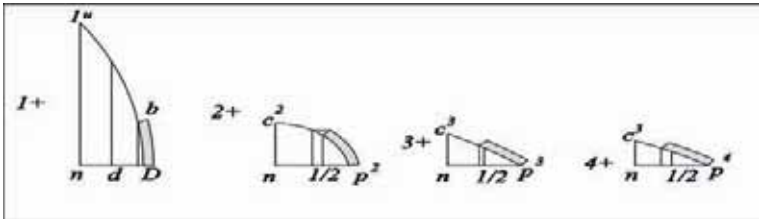


fig.+ .nella figura + sono riportate le sezioni dell'intradosso nei punti $p^1p^2p^3$, attraverso le quali ricavo la corretta disposizione del'intarsio.

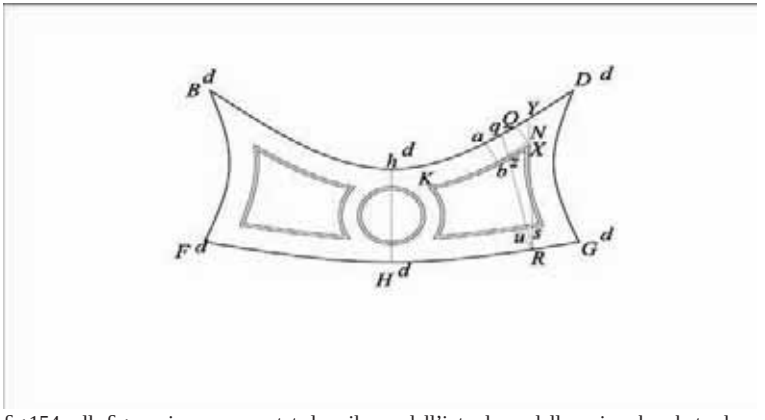


fig 154 nella figura viene rapprsentato lo sviluppo dell'intradosso della sezione bombata, dove le due curve BhD, FHG,FB,GD, provengono rispettivamente dalle curve BhG,FHG,FB,GD, della fig.151 con lo stesso sistema si ricava anche il disegno all'interno.

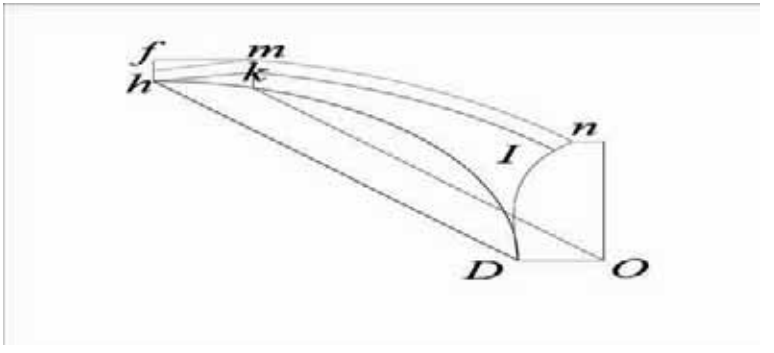
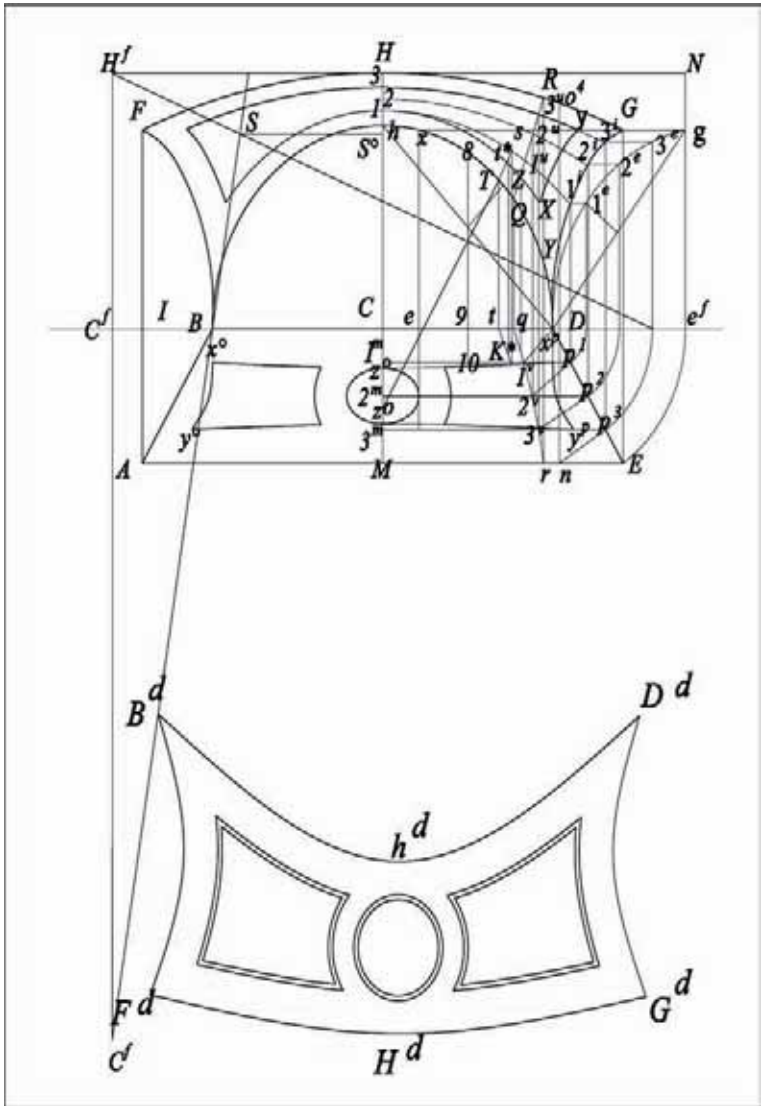


fig 153 sezione in vera grandezza della sezione bombata dove la retta hD rappresenta la corda hd della figura 151.

fig 151d. nella figura sono rappresentate la le due figure 151 e 154, la curva $z^{m}K^{*}z^{p}$ trovate in precedenza danno dei nuovi punti sull'arco hTD, utili per tracciare la curva $B^{d}hD^{d}$.L'imposta può essere inserita in un rettangolo$H^{f}NC^{a}e^{f}$, la diagonale del quale si incontra nel punto S con la retta tracciata da $C^{f}B$, che sarà il lato più lungo del cono, tracciando su di esso lo sviluppo dell'arco BhD e FHG le due parabole ed ipotenuse, dovela proiezione crea un quadrilatero compreso tra quattro curve $B^{f}h^{f}D^{f}$, $F^{f}H^{f}G^{f}$,$B^{f}F^{f}$,$D^{f}G^{f}$.



[1] Clef: concio alla sommità di una volta.
[2] Surplomb: per strapiombo, si intende inclinato verso l'esterno

[3] Nel trattato in francese viene indicato con Z.
[4]Arète: angolo sporgente che formano due superfici.

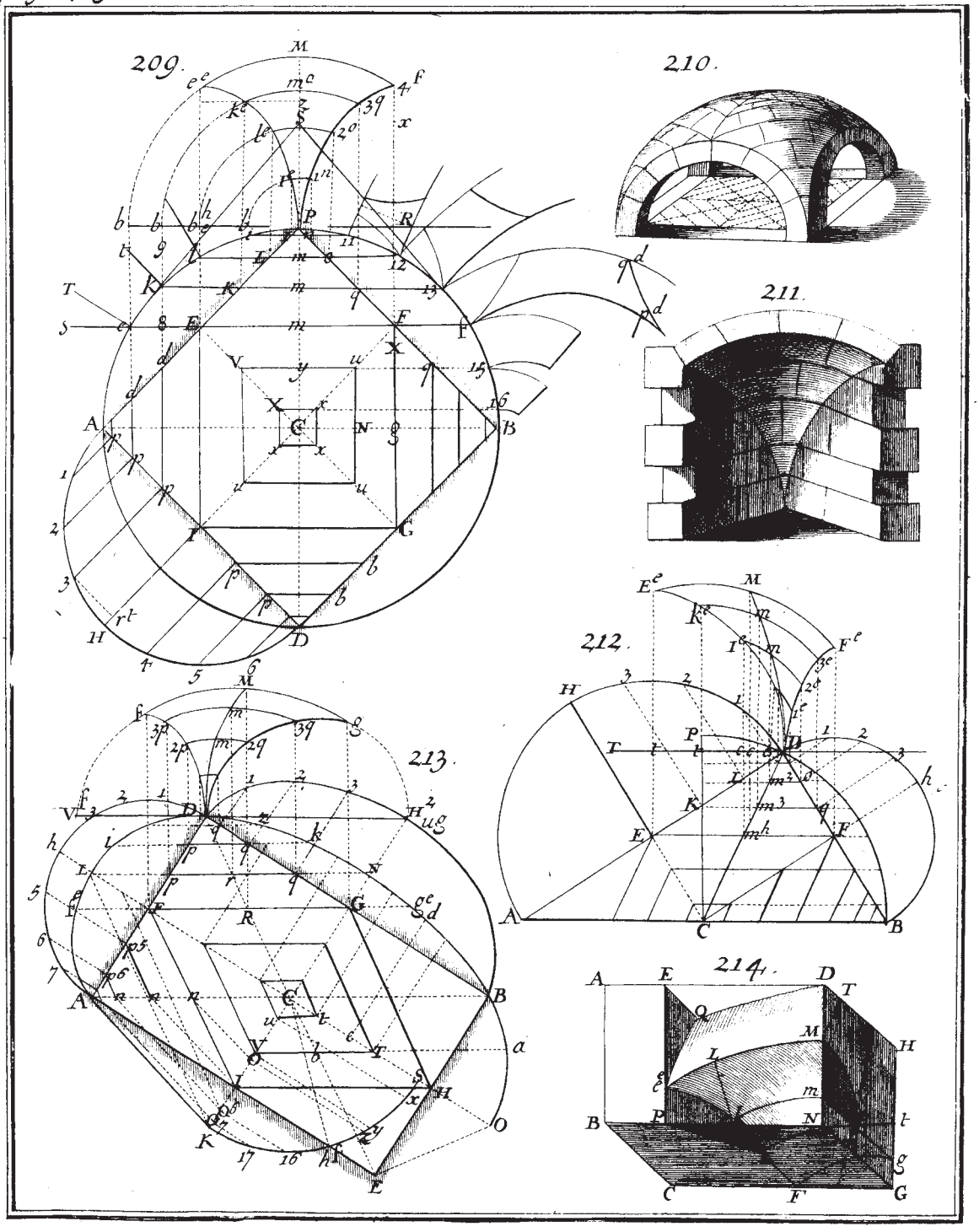
[5]Nel trattato in francese viene indicato con $I^{C.}$
[6] Nel trattato in francese viene indicato con I.
[7] I Panneaux: sono le sagome di una delle superfici di un concio , tagliate in legno o in cartone che saranno applicate sulla pietra per tracciare i contorni di un lit di una doele.
[8] Doele: così si chiama il parametro interno di una volta o di un concio incavato.La superficie piana che passa per la corda dell'arco di una doele si chiama doele plate, è una fase di preparazione per la definizione di una doele concava.
[9] Nel trattato in francese viene indicato con x.
[10] Nel trattato in francese viene indicato con 2^{c}
[11] Nel trattato in francese viene indicato con $n2^{v}nn$.
[12] Nel trattato in francese viene indicato con $o2^{v}oo$
[13] Nel trattato in francese viene indicato con oo
[14] Nel trattato in francese viene indicato con o
[15] Nel trattato in francese viene indicato la lettera c non presente nel disegno.
[16] Nel trattato in francese viene indicato con $D1^{v}$,$p^{1}22^{v}$,$p^{2}n$,$p^{3}n$.

[17] Saturelle:calandrino, strumento per tracciare disegni simile alla squadra.
[18] Trusquin:truschino, strumento per tracciare disegni simile al compasso
.

19 JOINTS DE LIT: linea di divisione dei corsi dei conci, divisioni longitudinali della doele, per indicare la superficie inclinata di una pietra inserita in una volta si dice lit en joins.

page 409.

Pl. 60.



Di Stereotomia Libro IV

VOLTE SFEROIDI TRONCHE.

IN TERMINI DELL'ARTE

VOLTE IN SEMICATINO IN PENNACCHIO SU UN RETTANGOLO, O SU UNA LOSANGA, IN CUI LE CHIAVI DEI FORMERETS[1] SONO SULLO STESSO PIANO.

Sia il rettangolo ADBE (Fig. 213a) il piano orizzontale delle volte in semicatino. Avendo tracciato le diagonali AB, DE, che si incrociano in C, si traccerà su uno dei lati minori (Fig. 213b) AD come diametro, il semicerchio AhD per definire l'arco di cerchio, che si dividerà in conci di numero pari, come i tratti precedenti delle volte sferiche di questa tipologia , ai punti *1,2,3,h,5,6,7*, dai quali avendo proiettato delle perpendicolari su *AD*,lo taglieranno nei punti *Pp*, si condurranno per questi punti da ogni lato del centro *F*, delle rette *FG*, *pq*, *pq*, parallele alle diagonali *AB*, *DE*, che taglieranno il lato *DB* nei punti *G*, *q*, *q*, si farà lo stesso ai quattro spigoli del rettangolo, come si vede nella figura, per avere i piani o le proiezioni orizzontali dei pennacchi .

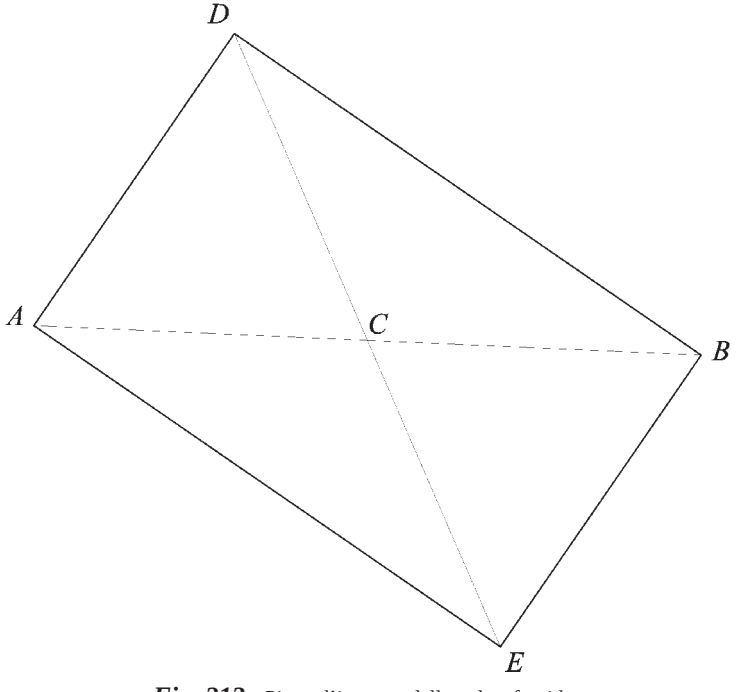


Fig. 213a Piano d'imposta della volta sferoide.

[1] Formerets: archi laterali lungo le navate gotiche o romaniche.

Passando alla ***Fig. 213c*** si porterà poi la metà *AF* da *I* in h^f sul lato *AE*, dal centro *C*, per il punto h^f, si farà un quarto di cerchio *CSK*, che taglierà l'asse *GI* prolungato in *K*, da dove si condurrà *KL* parallelo a *IF*, che taglierà l'asse *HF* prolungato al punto *L*, le linee *CK* e *CL* faranno la metà degli assi unite all'Ellisse *ALDNBO* ecc. circoscritta al rettangolo *ADBE*, che è il piano orizzontale della volta sferoide, tagliata dai muri alzati sui lati *AD*, *DB*, *BE*, *EA*.

Ora, poiché supponiamo che lo sferoide regolare è formato dalla rivoluzione di questa ellisse sul suo asse *LO*, si può considerare la metà *LDNBO*, come il profilo o sezione verticale di questa volta dal suo asse, nel quale si vede che *CG* essendo uguale a *Fh*, altezza dal centro *AhD*, per costruzione, il punto *G* può rappresentare il punto H^2dell'arco DH^2B, al di sopra del quale la volta si eleva di un segmento, di cui *DNB* è il profilo che comprende la parte formata dalla proiezione del rombo *FGHI*, e sue parallele, che fanno le proiezioni dei giunti di superficie.

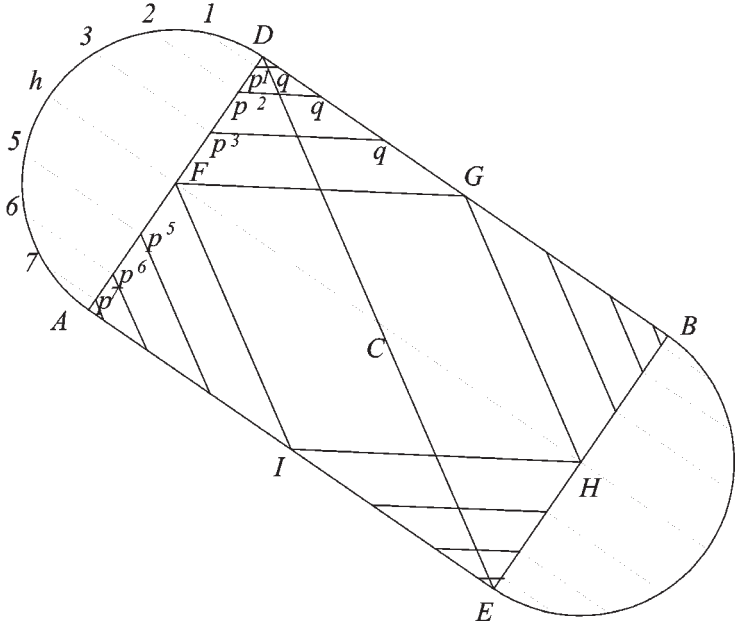


Fig.213b Proiezione dei giunti di superficie sul piano d'imposta della volta.

La formazione del centro DH^2B dell'arco è molto agevole, poiché si hanno i punti della proiezione delle divisioni in *G*, *q*, *q*, e le altezze delle perpendicolari che si devono alzare, conosco $p^1 1$, $p^2 2$, $p^3 3$, Fh (***Fig. 213c***).

Ci restano da trovare (***Fig. 213d***) le altezze dei centri degli archi del Pennacchio che descrivono i semiassi delle Ellissi, di cui gli archi *fMg*, $3^p m 3^q$, ecc. fanno parte; si traceranno dai punti p^5, p^6, e p^7, delle parallele alla retta *FI*, che taglieranno la diagonale *AC* nei punti n, n, n, dai quali si condurranno delle parallele alla retta *AK*, che intersecheranno il raggio *CK*, nei punti *o*, *I*, o^6, o^7, dai quali si tracceranno delle perpendicolari a *CK*, che taglieranno il quarto di cerchio *SK* nei punti z, h^f , i^6, i^7, dove saranno le altezze richieste, così la linea *oz* sarà il semiasse dell'Ellisse di cui *fMg* è una parte, della quale *FG* è la proiezione orizzontale, e nello stesso tempo una parte del suo asse maggiore, di cui si troverà l'intera lunghezza prolungandola da una parte all'altra, finché incontrerà l'Ellisse *ALDBO* circoscritta al rettangolo *ADBE*, che intersecherà nei punti f^e g^e, la retta f^e g^esarà il suo asse maggiore, per mezzo del quale, e dell'asse minore trovato *oz*, si descriverà una porzione dell'Ellisse *fMg* che è l'ultimo giunto di superficie del centro del pennacchio.

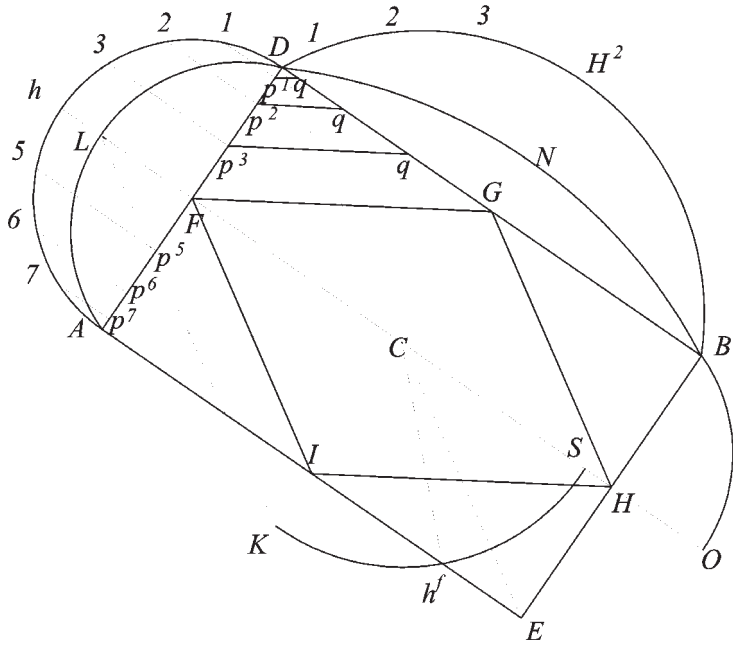


Fig. 213c Sviluppo della porzione di ellisse *ALDNBO* in cui *LDNBO* rappresenta il profilo o sezione verticale della volta.

Si troverà lo stesso l'asse maggiore *LN* dell'Ellisse di cui $3^p m 3^q$ è l'arco verticale dell'alzata del terzo giunto di superficie del pennacchio, per mezzo del quale e della metà del suo asse minore Ih^f, si descriverà un arco ellittico che passerà per i punti 3^p, *m*, 3^q.

Si avrà così anche l'asse maggiore *ik*, e la metà del minore o^6, i^6 , per tracciare l'arco $2^p m 2^q$, ecc., e il resto delle proiezione verticale di tutti i giunti di superficie del pennacchio compresi nella figura *DfMgD* .

Restano ancora da tracciare (***Fig. 213e***) le proiezioni dei giunti di superficie comprese tra i quattro pennacchi nel Rombo *FGHI*, perciò si dividerà l'arco Sh^f che è tagliato in h^f dalla retta *AE*, in due parti e mezzo per comprendere due ordini di conci, e la metà della Chiave ai punti *y*, *x*, dai quali si tracceranno delle perpendicolari sul raggio *CK*, che lo intersecheranno nei punti *V* e *u*.

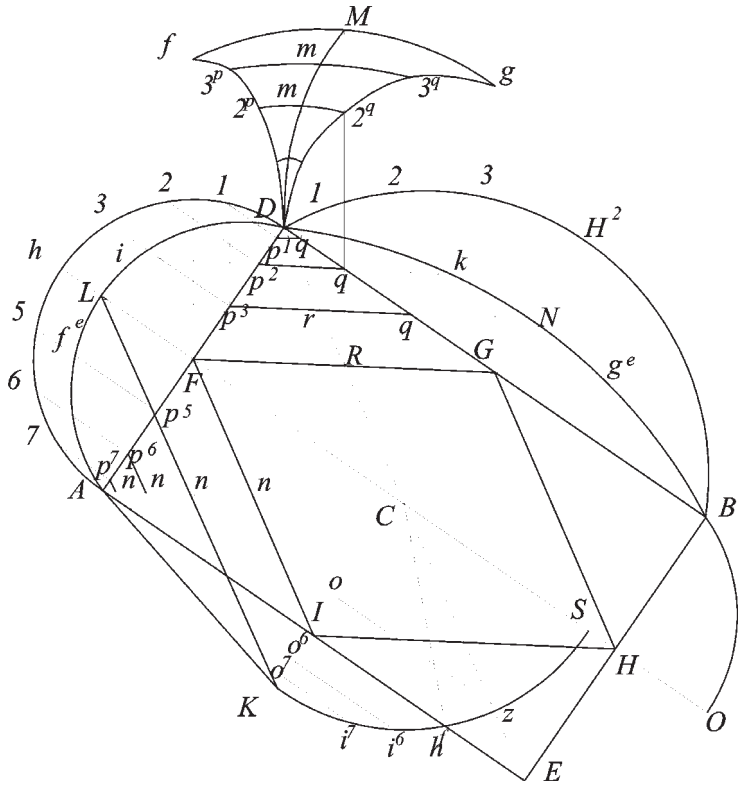


Fig. 213d Sviluppo dei pennacchi.

Si tracceranno da questo punto da una parte all'altra delle rette ut e *VT* parallele a *IH*, che intersecheranno *CH* nei punti *t* e *T*, dalle quali si condurranno altre rette uguali alle precedenti e parallele ad *HG*; continuando così intorno a *C*, queste rette *u x* e *Vy* saranno le altezze delle basi *u t* e *V T* degli archi ellittici dei giunti di strato degli ordini di conci verticali compresi nel semicerchio di cui le proiezioni orizzontali sono *ut*, *VT*, che sono anche parti dei loro assi maggiori, che si troveranno

prolungando queste rette fino all'Ellisse circoscritta, come *VT* in *a*, la retta *ba* sarà la metà di questo asse, di cui bisogna ancora trovare la metà del suo coniugato, che è rappresentata in proiezione orizzontale dal solo punto *b*.

Si traccerà la retta *EO*, alla quale si farà be parallela, che taglierà *CO* in *e*, da dove si alzerà sulla stessa *CO*, una perpendicolare *ed* che taglierà l'arco ellittico *DNB* del semicerchio nel punto *d*; la linea ed sarà il semiasse coniugato al semiasse *ba*, per mezzo dei quali si descriverà l'arco ellittico di cui *VbT* è la proiezione orizzontale, come descritto per quelli del Pennacchio si troverà anche quello di cui ut è la proiezione .

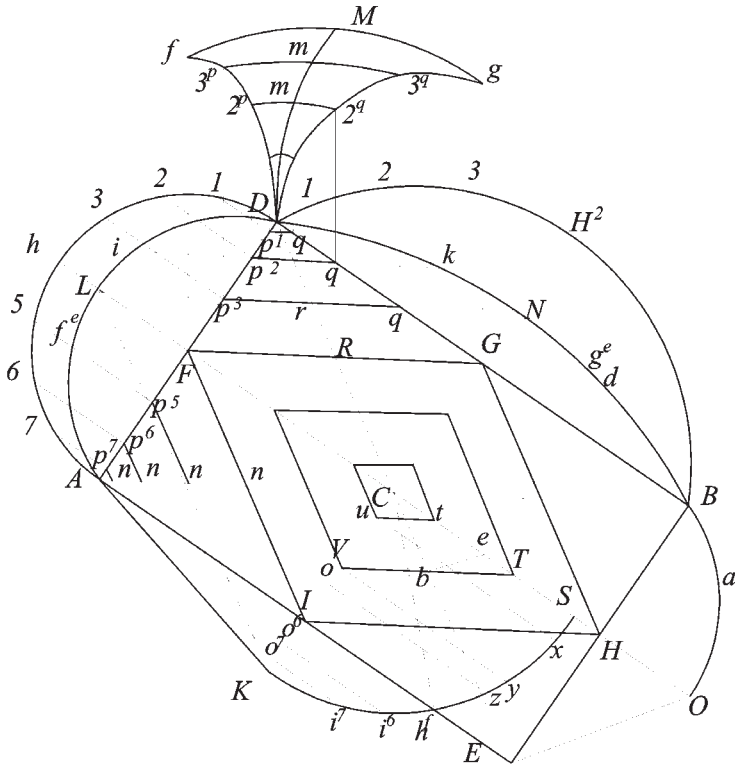


Fig.213e Figura del testo originale completa.

Avendo tracciato a parte questi archi, (ciò che non abbiamo fatto in questo tratto per mancanza di posto nella tavola) si avranno tutte le informazioni necessarie per tagliare i conci per mezzo delle squadrature che è la più conveniente e la più rapida per questa specie di volte.

Si potrà tuttavia servirsi benissimo della formazione dei segmenti di sferoide, per iscriverci i conci ad incastro negli angoli *F, G, H, I; T, V, u, t*, ecc., allo stesso modo che abbiamo spiegato per i conci dello Sferoide Oblungo della Volta in semicatino su un piano ovale; poiché questa è anche un semicatino su un piano ovale, ma tagliato dalle parti *ALD, DNB* e da due altre opposte e uguali dai muri *BE, EA*, con questa sola differenza che gli ordini dei conci sono verticali.

Non proponiamo qui la via delle *"doele plates"*[2] (intradosso piatto), perché le superfici che passano attraverso i quattro angoli dei conci, non sono piane, ma curve (c'è soltanto il Cuneo triangolare dall'origine di ogni Pennacchio); è molto conveniente tagliare ad intradosso piatto, come abbiamo già spiegato al capitolo precedente, per i Pennacchi delle Volte sferiche; poiché non ci sono che tre angoli nel suo tronco; è il metodo più semplice e dove c'è la minor perdita di pietra. Il metodo migliore per gli altri Cunei che hanno quattro lati, è di tracciarli e tagliarli per squadratura, come è stato detto per le Volte Sferoidi, la differenza sta nella figura dell'elevazione e non nell'applicazione.

Bisogna solo cambiare i *"biveaux"*[3] misti di superficie e di intradosso , secondo l'esigenza dei tagli dell'Ellisse, ai punti in cui esse sono tagliate dalle superfici, ciò richiede un po' di cura e di attenzione perché questi sono superfici coniche curve in quanto fanno parte di Coni Scaleni e non dritti come per le Volte Sferiche.

[2] Doele: dal latino dolium, botte, identifica il paramento interno di una volta o di un concio incavato, come la doga di una botte.
Doele pletes: la superficie piana che passa per la corda dell' arco di una doele si chiama doele plate, è l'elemento di preparazione per la definizione di una doele concava.

[3] Biveaux: il termine deriva dal latino bivium, bivio, strada biforcata. In effetti è la sagoma di un'apertura di un angolo qualunque, rettilinea curvilinea o spesso mista, per indicare l'angolo tra due superfici che si incontrano: se queste sono piane, ci si serve di stecche mobili; se invece una delle due superfici è curva il biveaux è uno strumento di legno, fisso, fatto a posta per quell'angolo.

Bisogna rappresentare una porzione di Volta Sferoide di cui l'Ellisse ALDNBO ecc. (***Fig. 213e***) è il piano orizzontale dell'imposta, dopo che questa metà è tagliata con piani verticali paralleli tra di loro DB, AE, e AD, BE, che troncano i segmenti ellittici ALD, DNB ecc. le cui sezioni verticali sono rappresentate, una con il semicerchio AhD, considerato come perpendicolare all'asse LO della semi-ellisse LNO che è la generatrice dello Sferoide per la sua rivoluzione intorno quest'asse LO. L'altra sezione è rappresentata dall'Ellisse DH^2B, che deve essere simile all'Ellisse generatrice LNO dal Teorema V del primo libro, perché lo Sferoide è tagliato in DB, parallelamente all'asse LO, e la metà del suo asse minore GH^2 deve essere uguale al semi-diametro Fh della sezione circolare, cioè, le altezze delle due sezioni devono essere uguali, eccone la ragione.

Se si suppone un terzo piano verticale che taglia lo Sferoide nei punti F e G del piano orizzontale, che sono le proiezioni dei punti h e H^2 , taglierà i piani verticali attraverso AD e DB, a distanze uguali dal punto R della diagonale DE, dove è il centro della sezione ellittica fatta da questo terzo piano; dunque le ordinate delle Ellisse tracciate dai punti F e G al suo diametro f^e g^e saranno uguali tra di loro per l'articolo 37 del primo libro; ma queste ordinate sono anche comuni alle sezioni dei piani AD e DB tagliate da essi dai loro centri F e G; dunque le verticali rappresentate dalle linee F h e GH^2 sono uguali tra di loro, ciò che si doveva dimostrare.

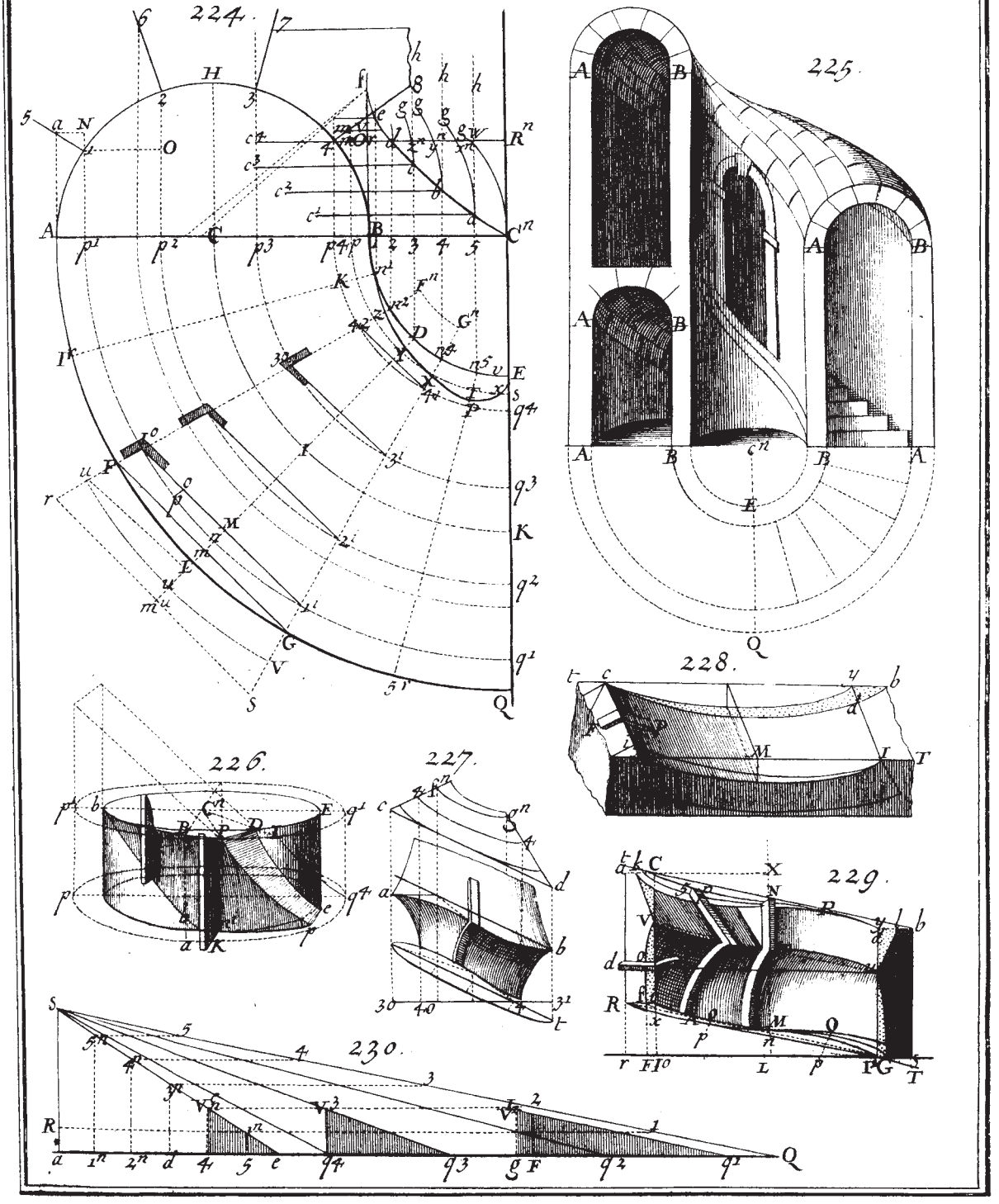
Ora, se si esamina il resto della costruzione, per trovare i diametri e le altezze delle sezioni ellittiche dei piani passanti per i giunti di superficie si noterà facilmente che abbiamo trovato questi diametri prolungando le proiezioni dei giunti di superficie fino alla circonferenza dell'Ellisse ALDNBO ecc., dove esse devono finire, supponendo il Semisferoide intero, e che abbiamo trovato le altezze dividendo questi diametri proporzionalmente a quelli delle altre sezioni, che non sono loro né uguali né paralleli; e che infine abbiamo a volte supposto delle sezioni immaginarie, per esempio dal centro della Chiave in KN per avere le altezze del quarto di cerchio SK che bisogna rappresentare come perpendicolare al piano ADBE, sebbene sia adagiato su questo piano con la necessità del disegno che non può esprimere delle superfici in aria; così per poco che vi si faccia attenzione, si riconoscerà che tutto vi è stato fatto nell'esattezza Geometrica.

DELLE VOLTE CONOIDI

Sarebbe questo il luogo per parlare delle Volte Conoidi, se esse fossero in uso in Architettura, ma siccome è raro che ci si serva di parabole o di iperbole per fare dei centri, poiché la loro nascita sarebbe una sporgenza all'imposta con i piedritti, non ne diremo nulla; tuttavia se si presenterà l'occasione, non sarà più difficile da risolvere se non con gli Sferoidi, allorché i giunti di superficie saranno al livello di ciascun piano dei conci perché le loro proiezioni saranno dei cerchi e i giunti montanti delle porzioni di parabole o di iperbole uguali tra loro in ogni piano; infine le sezioni delle superfici si troveranno con il metodo dato al Probl. 16. a pag.194 del secondo libro. Ma se queste Volte erano chiuse in Poligono, come alcune Sferiche di cui abbiamo parlato, per trovare i giunti di superficie bisognerebbe cercare le sezioni dei piani che le taglierebbero, le quali seguendo le direzioni date, sarebbero ordinariamente delle Ellissi, come è stato dimostrato al teorema VI del primo libro.

page. 434.

Pl. 62.



LE VOLTE ELICOIDALI.
IN TERMINI DELL'ARTE,
LE BOTTI GIRANTI E RAMPANTI.

SE si suppone che una Volta sopra il Nocciolo, al posto di girare orizzontalmente si eleva girando, si formerà un'altra specie di Volta che si deve chiamare Spirale sopra il Nocciolo, tuttavia gli diamo ordinariamente due differenti nomi; se il Nocciolo è di un diametro sufficientemente grande per poter essere vuoto nel suo centro, si chiama Botte girante e rampante, tale è quella rappresentata in prospettiva alla fig. 225 ma se il Nocciolo è così piccolo che sia pieno a forma di colonna, si chiama la Volta, Spirale St. Giles, perché la prima più considerevole può essere stata fatta al Priorato di St. Giles, in Linguadoca.

DI quello che veniamo a dire, ne segue 1°. che la Generazione delle Spirali sul Nocciolo differisce da quella delle Volte sul Nocciolo, nel semicerchio generatore AHB, che forma la sua rivoluzione su una Curva orizzontale, elevandosi sopra un'elica senza inclinare il suo piano e il suo diametro, e senza cambiare la Direzione del lato dell'asse di questa Elica.

2°. Che ogni punto del semicerchio Generatore preso al suo diametro,

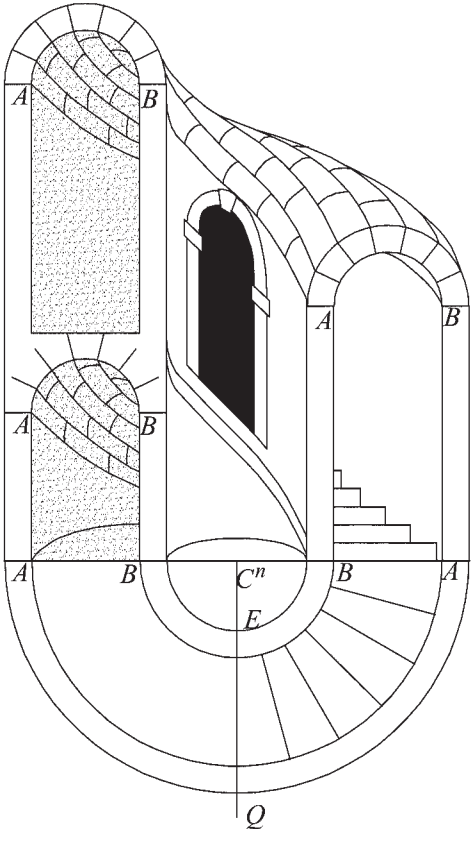


Fig. 225 Botte girante e rampante.

dove la sua Circonferenza descrive per tale movimento, un'elica della stessa natura di quella della rivoluzione centrale, cioè a dire di cui la proiezione sarà una Curva della medesima specie, circolare, o Ellittica, ma che ciascuna di queste eliche sarà non solamente differente dalla centrale, ma ancora che esse sono tutte differenti tra loro, in sorte che non se ne troveranno di uguali; quelle che saranno più vicine all'asse, saranno le meno curve e meno inclinate, di quelle che sono più lontane.

3°. Che tuttavia quelle che saranno prodotte per il movimento dei punti, che sono di livello tra loro, come 1 e 4, 2 e 3, della fig. 224 a e tutti quelli del diametro AB, marceranno a passo uguale, in altezza, e perverranno allo stesso tempo alla linea perpendicolare, all'asse della Spirale e al piano tangente dell'elica di rivoluzione centrale. Chiamerò queste qui Eliche compagne.

4°. Che le linee delle quali l'inclinazione è data con il diametro AB, o un arco del sesto Generatore, come sono i tagli dei giunti di testa, conserveranno sempre la stessa inclinazione, rispetto all'orizzonte, o di una linea a piombo parallela all'asse della Spirale.

5°. Che non solamente ogni punto del semicerchio Generatore, o di un altro sesto ellittico non cambia di altezza relativa al suo diametro orizzontale, ma ancora che esso non cambia di distanza rispetto all'asse della Spirale, allorché la proiezione dell'elica è circolare; non è la stessa se la proiezione dell'elica è ellittica; giàcché dunque è visibile che il sesto Generatore e le sue parti si approssimano, e si allontanano due volte ad ogni rivoluzione completa. Io chiamerò questa distanza dell'elica al suo asse il semi diametro dell'elica.

6°. Infine quello che segue di questa generazione, che la superficie di una Volta a Spirale è un composto di infinità di eliche ineguali quantunque della medesima specie, che formano un intradosso, e dei letti intrinsecamente sinistri, di sorte che si può adattare una superficie piana quadrilatera che la può toccare per i suoi quattro angoli; per conseguenza che si può fare una tale Volta per la vista dei pannelli di intradosso piatto semplice, senza aggiungersi un secondo pannello in giunzione, che raggiunga al quarto angolo, come abbiamo fatto alla Trompe nella Nicchia sull'angolo, ciò getterà confusione nel Trait; così lo si può dire con il Sig. de La Rue che la vista dei pannelli non conviene a queste Volte, ma non che sia impossibile come lui dice, poiché è sempre possibile fare passare un piano quadrilatero per tre punti, e trovare la distanza di un quarto punto dato a questo piano, per un secondo pannello di ritorno.

Problema XXII.

FARE UNA VOLTA A SPIRALE DI UN CENTRO QUALUNQUE.

In termini dell'Arte,

FARE LA SPIRALE ST.GILES, A PIENO CENTRO, RIALZATA O RIBASSATA.

SIA, fig. 224 a il quarto di cerchio BDEC^n, il Nocciolo della Spirale, cioè il quarto di Nocciolo al quale gli altri tre sono uguali, e il quarto di cerchio ALQ, il piano orizzontale della Torre tonda, nella quale è la Volta a Spirale, girante e rampante intorno al Nocciolo.

SI comincerà a fare le divisioni del centro AHB, e le proiezioni dei giunti alla stessa maniera, che per la Volta sul Nocciolo, di cui andiamo parlare.

DI seguito si dividerà il grande arco ALQ, in tante parti uguali che si vorrà, per assegnare a ciascuna una altezza arbitraria per esempio quella di un gradino della scala, che si suppone nella Torre Voltata, per esempio in sei ai punti I^r,F,L,G,5^r,Q, di cui gli intervalli salgono, ciascuno di sei pollici in altezza. Per tutti questi punti si tireranno le linee rette al centro Cn del Nocciolo, che taglieranno la sua Circonferenza nei punti n^1,n^2,D, ecc.

O bene senza riguardo ai gradini, assegnare al quarto di rivoluzione una altezza come fB, primariamente si devono sviluppare le due eliche, che si formano alle imposte della Volta, l' una al Nocciolo BDE, l'altra al muro della Torre ALQ, ciò si farà per mezzo delle divisioni, che noi veniamo a trovare sulla proiezione dell'una e dell'altra, per le altezze che sono loro assegnate.

O bene rettificando tutto d'un colpo, ciascuno di questi archi ALQ e BDE, riprendendo l'altezza totale che faremo in questo esempio di tre piedi, supponendo ogni altezza di sei pollici.

SI farà dunque a parte fig. 230 a un angolo retto saQ, si porterà su sa l'altezza data per un quarto di rivoluzione e su aQ la lunghezza dell'arco ALQ della fig. 224 a rettificata portando successivamente tante piccole parti che si giudicheranno a proposito, per esempio qui solamente le sei della prima divisione I^r,F,L,G,5^r,Q, più ce ne saranno, più l'operazione sarà esatta; e si tirerà l'ipotenusa sQ, che sarà lo sviluppo della prima elica, dell'origine della Volta sul bordo della Torre cava.

SI rettificherà allo stesso modo tutti gli archi delle proiezioni dei giunti di letto, p^1q^1, p^2q^2, ecc., e quello del contorno del Nocciolo BDE, dove è l'altra origine della Volta, per avere lo sviluppo della fig. 230 a i punti e,q^4,q^3,q^2,q^1,Q, per i quali e la Sommità S, si tireranno delle linee rette se, sq^4, sq^3, sq^2,sq^1, che saranno i due sviluppi di ciascuna delle eliche dei giunti di letto.

SI determinerà in seguito la lunghezza del Cuneo che si propone di fare per delle linee tirate sul piano orizzontale, per esempio per un Cuscinetto della Torre cava, la lunghezza FG; per le estremità F,G; e il medio L, si tirerano delle linee al centro C^n del Nocciolo, che taglieranno la proiezione del primo letto, ai punti $1°1^1$, e avendo prolungato queste linee nello spessore del muro a piacere per la coda della pietra che deve ivi entrare in r e s, la figura quadrilatera mista $r1°1^1s$, sarà la proiezione del Cuneo che si propone di fare, di cui i bordi non saranno nelle loro misure, a causa dell'inclinazione della Volta, si deve cercare il valore come si va a dire.

PRIMARIAMENTE, si tireranno le corde $1°1^1$, FG, e la parallela, che taglieranno la linea del mezzo ai punti a M, m, m^u; poi si farà a parte, come alla fig. 229 una verticale XL, e un'orizzontale rS, sulla quale si porterà da parte ed altro del punto L, le lunghezze della metà delle corde m^ur in Lr, e , LS; mF [1] della fig. 224 b [2] in LF e LG, della fig. 229 [3], e M1° in L1° e $L1^1$; poi per tutti i punti r, S, F, G, 1°, 1^r, si tireranno delle parallele a XL indefinite, che saranno i limiti delle tre differenti eliche degli spigoli del Cuneo, 1°. al letto superiore 2°. a quello inferiore all'origine, e 3°. alla stesso letto inferiore nello spessore del muro preso in rs della fig. 224 b.
BISOGNA adesso cercare l'altezza di cui ciascuna di queste eliche si eleva salendo sulla lunghezza orizzontale data, e perché esse devono tutti elevarsi allo stesso livello, basta avere la altezza dell'una per averle tutte.

SI porterà la rettificazione dell'arco FLG, della fig. 224 b [4] in QF della fig. 230 b [5]; l'altezza 2F sarà quella cercata, che porterà alla fig. 229 [6] in Ff per dove si tirerà l'orizzontale iR che taglierà le verticali rR e 1°i in Ri. Si tirerà per questi punti e gli opposti dell'altra le linee RS, fG e $i1^1$ che segneranno le inclinazioni differenti di ciascuna delle eliche degli spigoli del Cuneo proposto, al letto inferiore, dove si incroceranno in M.

PER tracciare le eliche del letto superiore, bisogna prima portare sopra la linea del mezzo XL, l'altezza della retta di richiamo $1p^1$, della fig. 224 b in Mm della fig. 229 e di sopra dell'altezza N1 della fig. 224 b presa di livello a un punto a, o un altro punto 5, preso a piacere sul taglio 1.5, e per i punti M e N si tireranno delle parallele alla linea inferiore, i1' come Vu, e cb terminate alle verticali 1°C, 1'y. [7]

PER il punto N si tirerà anche kl parallela a fG,[8] se il punto N è stato preso al livello del punto a della fig. 224 b ma se questo punto è preso altrove come all'altezza di un altro punto, a piacere come 5. che risponde per esempio al punto u della proiezione sulla linea Fu, si tirerà per il punto

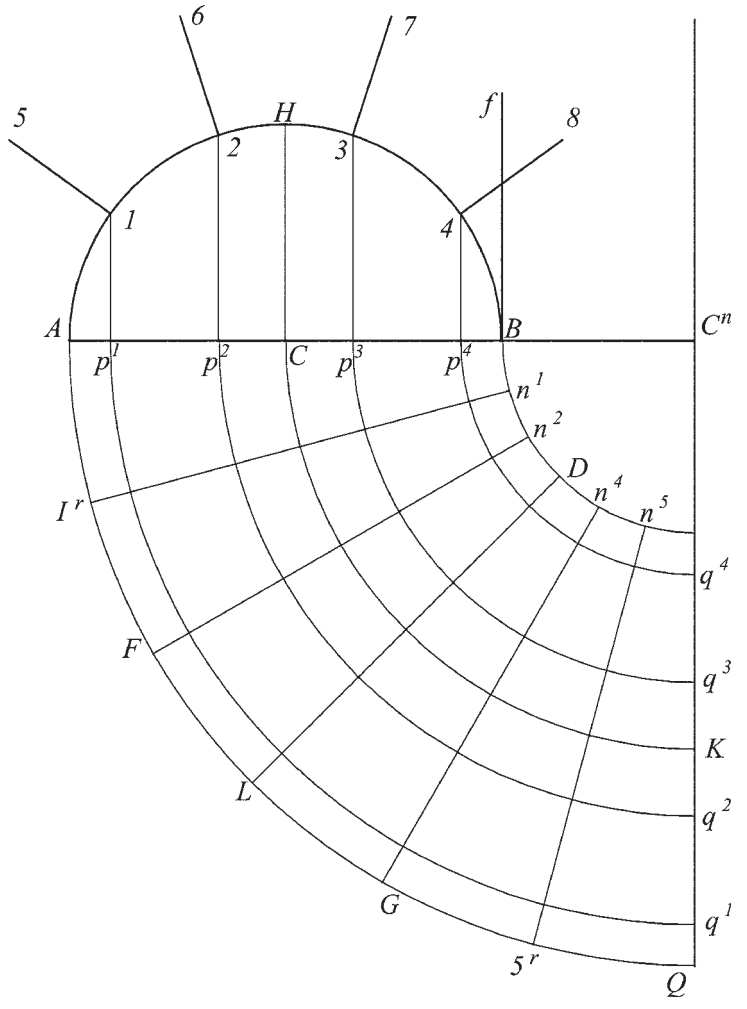


Fig. 224 a Rivoluzione del semidiametro AB lungo il quarto di cerchio del Nocciolo.

C un'orizzontale a, sulla quale si porterà la lunghezza Iu della fig. 224 b in Xk,[9] e per il punto k e N si tirerà la linea kl, facente Nl uguale a Nk, ci sarà una proiezione verticale del Cuneo, Racdbs1^1R, che darà tutte le misure dell'altezza e della lunghezza della pietra compresa per delle linee rette, che non esprimono gli spigoli del Cuneo, che sono delle eliche, ma solamente le loro corde passanti per tre dei loro punti ciascuna, che sappiamo, loro estremità e la proiezione verticale del mezzo.

ORA come queste eliche hanno per proiezione orizzontale un arco di cerchio, se la Spirale è circolare, ne segue che queste curve sono la superficie di una porzione di cilindro, di cui le basi sono gli archi FG, $1°1^1$, uV della fig. 224 b bisogna cominciare a formare un segmento di cilindro, sufficientemente grande per poter ivi tracciarle.

CIÒ perché bisogna tirare delle linee rette per i punti più avanzati C e

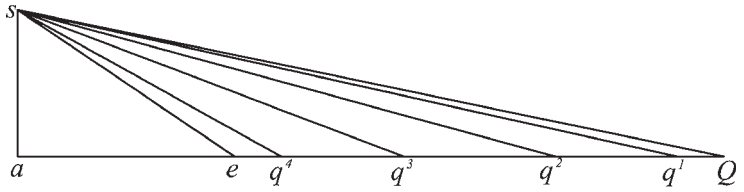


Fig. 230 a Rettificazione degli archi di cerchio della rivoluzione con sviluppi delle eliche dei giunti di letto.

b al letto superiore, e R e 1[1] a quello inferiore da cui le linee tb e RT, la fetta di cilindro RtbT, che sarà circoscritta agli angoli del Cuneo, sarà capace di contenerli in tutta la loro dimensione.

BISOGNA adesso cercare il valore dell'arco, di cui la proiezione è l'arco di centro 1°n1[1] dalla parte del Cuneo più avanzata all'interno che ha per corda la linea inclinata x1[1] della fig. 229, al letto inferiore, o Cy al letto superiore, il quale arco è una porzione d'Ellisse, e non una porzione di cerchio, come fanno tutti gli autori del taglio delle pietre, per l'operazione dei tre punti perduti bisogna cercare i punti come segue.

SI dividerà la metà della proiezione 1°M [10] della fig. 224 b in due ugualmente in o, per tirare op parallela alla freccia mn,[11] poi avendo diviso la linea i1[1], o Cy in quattro parti uguali ai punti o,M,O, e tirate per questi punti delle perpendicolari, ci si porterà le lunghezze Mn della fig. 224 b e op, in Nn, op e Op della fig. 229 e per i punti CpnPy, si traccerà a mano con una riga pieghevole la curva sulla quale si dovrà formare la sagoma, per scavare la superficie cilindrica di preparazione al taglio del Cuneo.

GLI autori descrivono tanto che ci sono altre eliche, ma nel nostro metodo si vedrà che una sola a noi basta, si potrà ugualmente accontentarsi

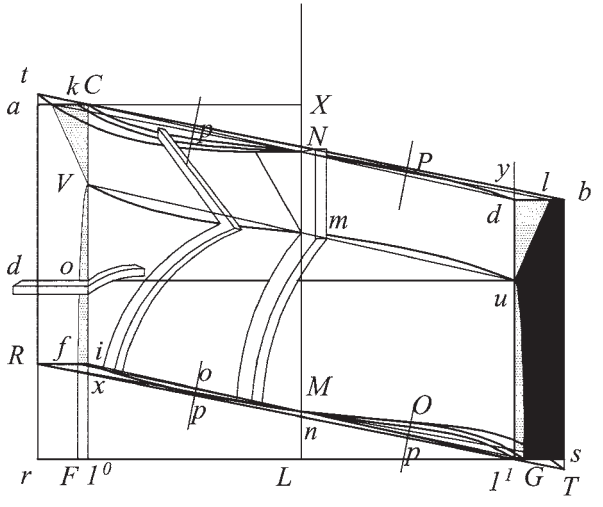


Fig. 229 Cuneo concavo del lato della Torre con i diversi calandrini necessari alla sua formazione.Vista ortogonale al piano d'intradosso. Le curve sulle corde, eliche, sono esasperate per visualizzare la concavità e la convessità rispetto le corde per tre punti che altrimenti sarebbe minima.

dell'arco di cerchio 1°n1[1], se si vorrà fare un primo Cuneo che poggerà il suo cuscinetto di livello all'origine della Volta.

APPLICAZIONE DEL TRAIT SULLA PIETRA PER LA FORMAZIONE DEI CUNEI CONCAVI.

AVENDO drizzato un paramento supposto verticale, ivi si applicherà il

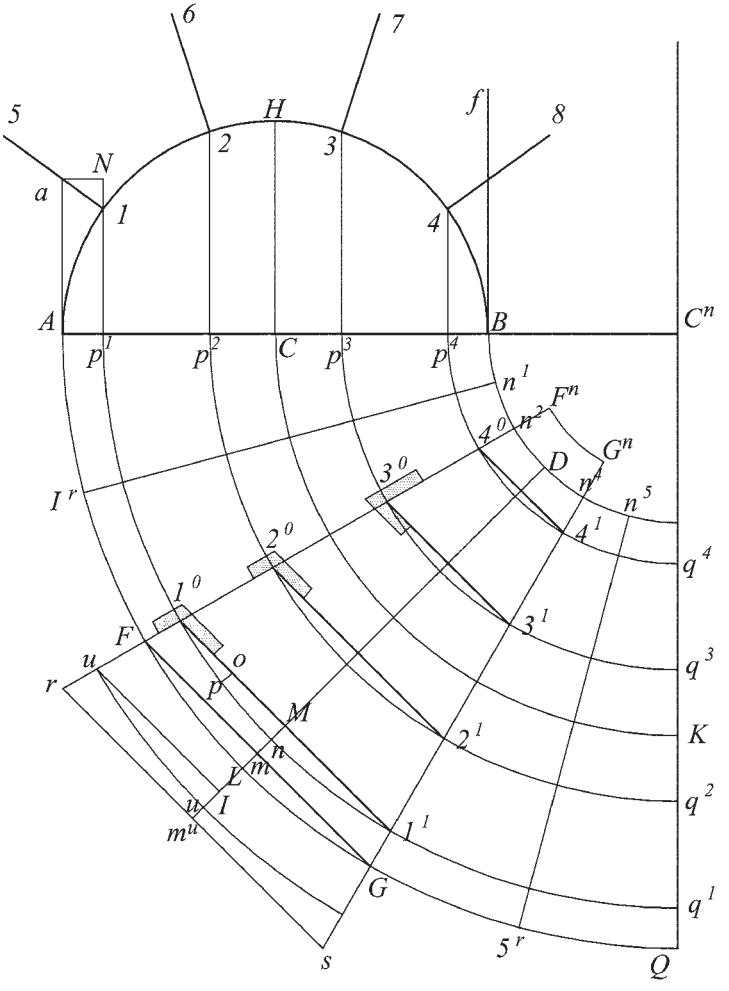


Fig. 224 b Determinazione delle lunghezze dei Cunei. Si notano i calandrini per la sagomatura delle pietre agli intradossi 1°1', 2°2', 3°3'.

[1] Errore di stampa: m invece di M.
[2] Nel testo è indicata la fig. 130 ma è chiaramente riferita alla fig. 224.
[3] Errore di stampa: nel numero della figura la prima cifra era 1 anzichè 2.

pannello Romboide, della sezione piana fatta per una corda per esempio 1°1[1] del primo Cuneo del bordo della Torre dove forma l'origine della Spirale, il quale è il parallelogrammo xcy1[1] della fig. 229.

IL contorno di questo pannello sarà tracciato sopra il paramento, si abbatterà la pietra a squadra sui due bordi Cy e x1[1], per il mezzo di questi due archi si scaverà alla riga una superficie concava cilindrica, com'è rappresentata alla fig. 228.

SI porterà in seguito l'altezza della retta di richiamo 1p[1] della fig. 224 b in 1[1]u della fig. 229 sul bordo dello spigolo y1[1], e la stessa altezza sul bordo opposto Cx in iV, in modo che l'intervallo xV di questo bordo è più grande che 1[1]u, dell'altezza xi compresa entro la linea di livello Ri, e l'inclinata RT, passante per i punti più avanzati R e 1[1], entro i punti riparati sugli spigoli in u e V, si troverà un'elica con il pannello di

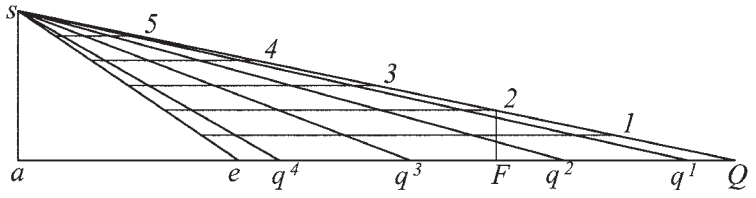


Fig. 230 b

sviluppo, di quella che passa per il punto p[1] della fig. 224 b che è alla fig. 230 c il triangolo rettangolo V[1]gq[1], il quale pannello sarà fatto di cartone, o di una lamina di piombo, per essere applicato nell'incavo del paramento concavo, formato per la preparazione della fig. 228 posando il bordo V[1]g sullo spigolo Cx della fig. 229 il punto V[1] su V, il punto q[1] cadrà dall'altro lato in u.

SI può anche tracciare la stessa elica senza pannello flessibile, solamente con una riga pieghevole, sulla quale appoggeremo una mano per farla toccare al fondo dell'incavo, si traccerà con l'altra l'elica Vmu, che sarà lo spigolo dell'intradosso con il letto superiore del Cuneo, per mezzo del quale si troverà quella dello spigolo del letto inferiore.

BISOGNA prima formare le teste opposte del Cuneo per mezzo di un calandrino misto, F1°pn presi sul piano orizzontale della fig. 224 b di cui i bracci saranno posati in squadra agli spigoli xC e y1[1],[12] come è segnato alla fig. 228 in Fp e 229 in do. Su ciascuna di queste teste si troverà per mezzo di un pannello, o di una sagoma l'arco A1, dell'elevazione della fig. 224 b ed il suo taglio 5.1 come lo si voglia scorciare alla fig. 229 in basso in luG, e a quella in alto in CVf. Si formerà di seguito un calandrino misto N1A, alla stessa quota, che è compresa per la verticale N1, e l'arco dell'intradosso 1A. (fig. 228 a)

SI poserà il braccio retto N1 parallelamente agli spigoli Cx e y1[1], e si batterà la pietra seguendo l'esigenza dell'altro braccio curvo convesso, per scavare l'intradosso, osservando che il piano di questo calandrino, sia sempre bene perpendicolare alla superficie concava, e che il suo angolo 1 scorre sempre sull'elica, che è stata tracciata in Vmu, l'estremità del braccio curvo traccerà per questo movimento lo spigolo del letto inferiore con l'intradosso. (fig. 228 b)

[4] Errore di stampa: nel numero della figura la prima cifra era 1 anzichè 2.
[5] Errore di stampa: nel numero della figura la prima cifra era 1 anzichè 2.
[6] Errore di stampa: nel numero della figura la prima cifra era 1 anzichè 2.
[7] Nel testo originale il punto C viene richiamato usando indifferentemente il carattere minuscolo.
[8] Errore di stampa: f invece di F.
[9] Errore di stampa: k invece di K.

INFINE si formerà un secondo calandrino di letto e d'intradosso sulla quota della fig. 224 b in 51A abbattente la pietra secondo l'esigenza del braccio retto, la curva servente qui da guida, come la retta era al primo calandrino a piombo e di intradosso; se il centro è circolare, lo stesso calandrino rovesciato servirà per le pose di sopra e di sotto, osservando di tenere quest'ultimo precisamente nella stessa situazione verticale, e il suo piano perpendicolare allo scavo cilindrico, in forza che se fosse prolungato passerebbe per l'asse della Spirale, supposto al punto C[n]. (fig. 228 c)

FORMAZIONE DEI CUNEI CONVESSI.

BISOGNA ricordarsi che chiamo Cunei convessi quelli che sono del lato del Nocciolo, dopo la Chiave fino all'origine sopra il Nocciolo, perché sono in effetti convessi nel profilo orizzontale, quantunque siano ancora concavi del profilo verticale, di modo che si potrà chiamarli concavo-convessi.

FINCHÉ il Nocciolo è abbastanza grosso per essere composto di più pezzi nel suo circuito orizzontale, è chiaro che la costruzione dei Cunei convessi non è che un rovesciamento di quelli concavi, in ciò che bisogna cominciare a formare una superficie cilindrica convessa fig. 227 per tracciare lo spigolo di letto superiore, e di intradosso al posto del cilindro concavo, che noi abbiamo formato alla fig. 228 e 229. E che il Cuneo deve essere più largo all'intradosso che alla coda, come lo rappresenta la fig. cf[n]g[n]d della fig. 227 in luogo del contrario osservato nei Cunei concavi.

QUESTA differenza del resto non cambia in niente il fondamento della costruzione, di forza che gettando gli occhi sulla fig. 227 si può riconoscervi quella della fig. 229 osservando che quella li era per uno dei primi filari dei Cunei concavi, all'origine, e che la fig. 227 è quella di Cuneo di secondo filare concavo convesso, di cui l'elica b ha la sua proiezione al quarto di cerchio p[3]q[3], e il suo sviluppo alla fig. 230 d è il triangolo rettangolo v[3]q[4]q[3],[13] sarà facile farne uso come prima del V[1]gq[1], così che credo potermi dispensare dal dettagliare la costruzione della fig. 227 dove non si può avere alcuna nuova difficoltà.

NON sarebbe lo stesso per la formazione del primo filare di Cunei convessi, alla loro nascita sul Nocciolo, se il Nocciolo è un sì piccolo diametro che si sia obbligati di farlo d'un pezzo ad ogni assisa, come si fanno le colonne per tamburi, e lo stesso se non sia fatto che di un piccolo numero di pietre ad ogni assisa, come di tre o quattro per cui bisogna che i Cunei in Tamburo portino la rampa del cuscinetto i cui letti siano di livello, ciò ci obbliga a cercare due curve di sezione della Spirale per un piano orizzontale.

LA prima è la sezione di un corpo elicoide convesso, tagliato da un piano perpendicolare, all'asse di questo corpo cilindrico girante, e rampante attorno al suo asse, la quale curva ha il profilo degli spigoli di intradosso con i letti di livello, o piuttosto gli spigoli di intradosso di due Cunei portanti cuscinetti.

LA seconda curva che bisogna trovare, è la sezione di un corpo elicoide in Spirale, di cui la superficie è tutta convessa nel suo profilo, ma retta nella direzione all'asse della spirale, a differenza dell' intradosso che sarà curva in tutti i sensi.

PRIMA CURVA DI SEZIONE ORIZZONTALE.

[10] Errore di stampa: M invece di m.
[11] Nel disegno il tratto op è chiaramente radiale allo stesso centro C[n] di mn e quindi non parallelo a questo.

PER la facilità di istruzione, noi supporremo qui il quarto dell'elica, e del nocciolo BDEC[n]. Si comincerà per dividere la Circonferenza BDE, in tante parti uguali che si vorrà avere di punti nella curva, come qui sei ai punti n[1], n[2], D, n[4], n[5], E, per i quali si tireranno tante rette indefinite parallele all'asse QR, sulle quali si porteranno successivamente le altezze della linea se della fig. 230 e che è lo sviluppo dell'elica del profilo del

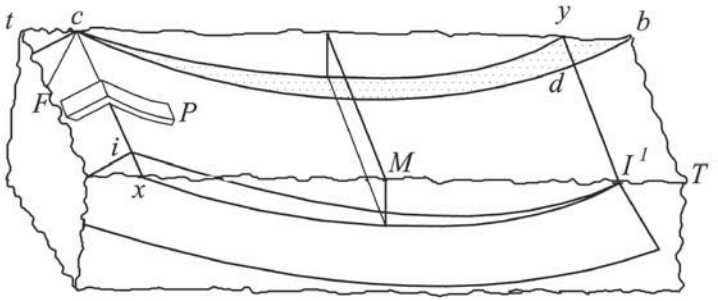


Fig. 228 Preparazione del cuneo concavo per mezzo del calandrino misto.

Nocciolo al di sopra dell'orizzontale AC[n], per esempio 5 1[n] della fig. 230 e in 5a della fig. 224 c 4V[n] in 4b, d3[n] in 3c, [14] 2 4[n] in 2d, così del resto, e per tutti i punti C[n], a, b, c, d, e, f, si tirerà una linea curva C[n]f che sarà la proiezione verticale dell'elica della nascita della Volta a Spirale sul Nocciolo; come questa origine deve essere tagliata per il letto orizzontale del tamburo all'altezza della prima ricaduta della divisione 4 del centro AHB, bisogna cercare le differenti faglie del Cuneo di questa origine, all'altezza del letto di livello del tamburo. Ciò perché si porterà per ciascuno dei punti dati alla proiezione dell'elica abcdef, delle orizzontali parallele al diametro AB, come ac[1] , bc[2] , cc[3] ecc. e un'altra orizzontale 4dR per il punto 4 dell'arco HB che rappresenterà il letto superiore del Tamburo.

INFINE con raggio AC trasportato successivamente su tutte le orizzontali ac[1] , bc[2] , e si troverà tutti i punti c[1], c[2], c[3], c[4], dei quali si descriveranno degli archi C[n]g , ag, bg, cg, che taglieranno l'orizzontale 4R ai punti W, x, y, z, dove saranno gli aggetti che si cercano.

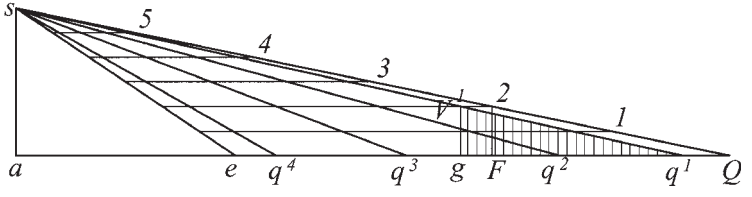


Fig. 230 Preparazione della sagoma formata sul triangolo rV gq da applicare al

COSI' prendendo a piacere[15] un punto P sull'arco della proiezione del giunto di letto p[4] q[4] sul raggio della rivoluzione n[5], 5[r], per la più grande faglia, che è quella della ricaduta p[4]B, si porterà sul raggio seguente n[4]G, l'intervallo xW dalla linea verticale n[5]h all'arco ag tagliato per l'orizzontale 4R in x, questa lunghezza xW portata su n[4]G, darà il punto X, che è uno di quelli che si cerca; si continuerà ugualmente a portare l'intervallo yn su DL, per avere il punto Y, e l'intervallo zn su n[2]F, per avere il punto Z, e come l'elica af è tagliata per l'orizzontale 4R al punto d, non ci sarà punto di faglia nel punto, che risponde al punto n[1] del profilo orizzontale del Nocciolo, così si tirerà a mano o con una riga pieghevole la linea curva n[1]YP, per i punti trovati n[1]ZYXP, che sarà quella che si cerca per sezione orizzontale dell'intradosso all'altezza del punto 4, della prima ricaduta del lato del Nocciolo.

SECONDA CURVA DI SEZIONE ORIZZONTALE AL LETTO DELLA SPIRALE.

LO stesso piano orizzontale che ha tagliato l'intradosso dopo il punto d fino al punto R[n], alla quota seguente la curva n[1]YP del piano orizzontale taglia in seguito il letto della Spirale seguendo una curva differente PxE, dopo il punto P che è comune alle due sezioni fino al punto E che bisogna trovare.

SI prenderà la altezza ro dal punto r, [16] dove il giunto di testa 4.8 taglia la verticale del Nocciolo fB, sull'orizzontale 4R, e la si porterà alla fig. 230 e dal punto a in r, per dove si tirerà una parallela alla base ae, che taglierà la linea se al punto 1[n], dove si abbassa su ae la perpendicolare 1[n]5.

SI porterà di seguito la lunghezza rettificata 5e sull'arco BE della fig. 224 c dal punto n[5], in E nella tagliante, come dire applicando e piegando questa lunghezza sulla linea curva, ciò si fa in due modi, o prendendo successivamente delle piccole partizioni della lunghezza 5e, e girandola come una tangente mobile, dopo il punto n[5] fino a che il punto e della riga diviene quello dell'attacco al punto e.

FATTA quella si ha già due punti della curva in P ed E, bisogna cercare gli altri; avendo diviso l'intervallo del punto 4r [17] in tante parti uguali che si vorrà avere, per esempio in due in m, si dividerà anche nello stesso numero l'arco n[5]E al punto u, per dove si tirerà dal centro C[n] una linea indefinita ux, sulla quale si porterà la distanza mV del punto m,

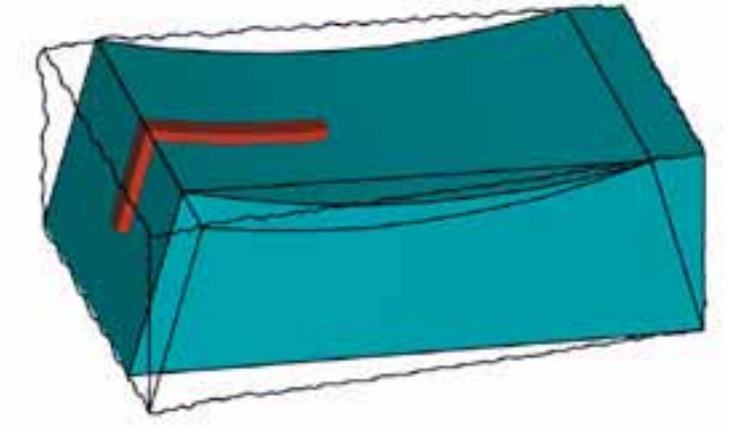


Fig. 228 a Preparazione delle teste opposte del cuneo concavo per mezzo del calandrino misto.

[12] Nell'originale è scritto solo y[1] pur riferendosi a y1[1].

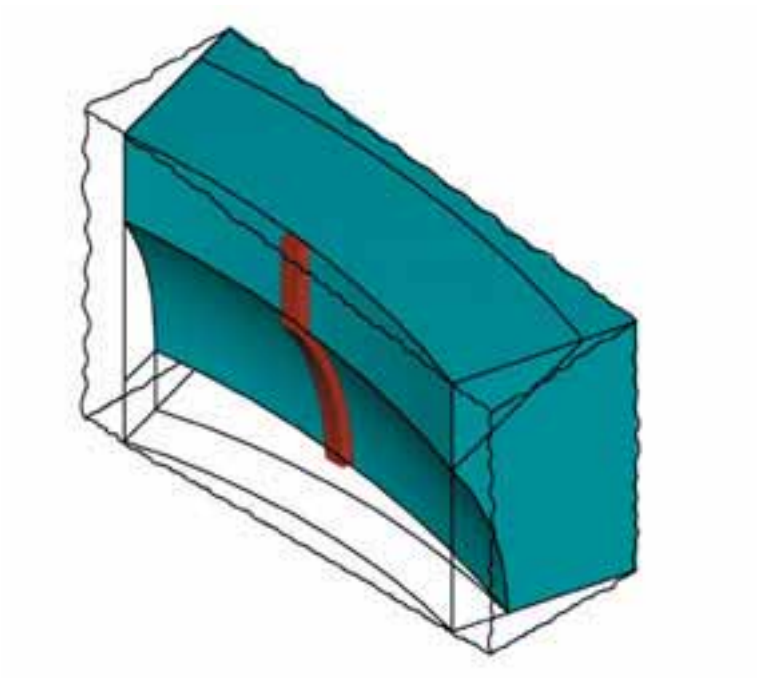


Fig. 228 b Preparazione dell'intradosso del cuneo.

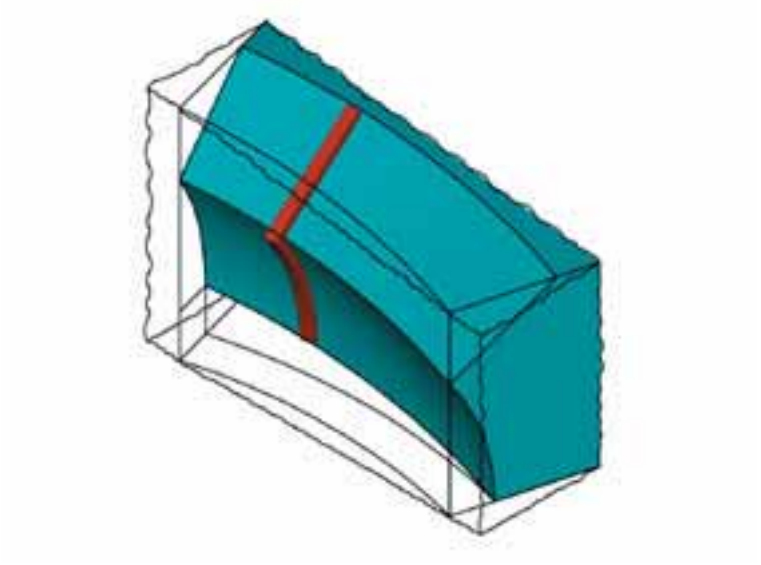


Fig. 228 c Preparazione del letto superiore del cuneo. Si noti che il cuneo ottenuto è lo stesso descritto alla fig. 229.

riga pieghevole, per i punti PxE, sarà quella che si cerca per la sezione orizzontale del letto della Spirale.

LO spazio che le due curve n^1YP e ExP comprendono, è la sezione orizzontale della Spirale tagliata per il letto orizzontale di un Tamburo del Nocciolo, tanto all'intradosso che al letto, di cui si farà uso come segue.

FORMAZIONE DI UN TAMBURO DI UNA PORZIONE D'ASSISA DEL NOCCIOLO, PORTANTE L'ORIGINE DELLA SPIRALE.

SE il Nocciolo della Spirale è di un diametro abbastanza piccolo per essere fatto di un solo Tamburo, bisogna aggiungere ad ogni estremità del suo diametro l'allungamento della prima ricaduta p^4B, e su questo nuovo diametro formare un Tamburo in porzione di cilindro, perché possa comprendere il Tamburo dal nudo del Nocciolo, e la faglia dell'origine.

PER la facilità dell'istruzione noi supporremo il nocciolo abbastanza grande per essere fatto di quattro pezzi ad ogni assisa, così noi ne formeremo che un quarto di Tamburo, come si vedrà alla fig. 226.

SI comincerà per formare un quarto di tamburo, di cui la altezza sarà quella della retta di richiamo $4p^4$, e i letti superiori e inferiori calibrati, e in ritorno di squadra sui giunti montanti, saranno uguali al quarto di cerchio $C^np^4q^4$ della fig. 224 c.

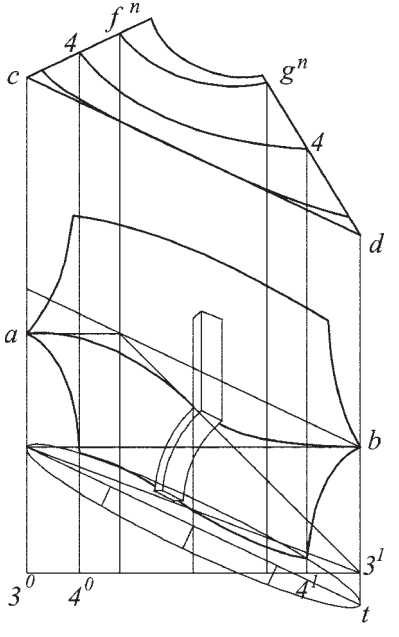


Fig. 227 Cuneo concavo convesso sul lato del Nocciolo alla cui formazione si perviene in modo analogo al cuneo concavo della fig. 229.Come nella figura 229 le eliche di intradosso sono visualizzate con curve esdasperanti la concavità e la convessità che date le dimensioni e lo scorcio apparirebbero coincidenti con le corde.

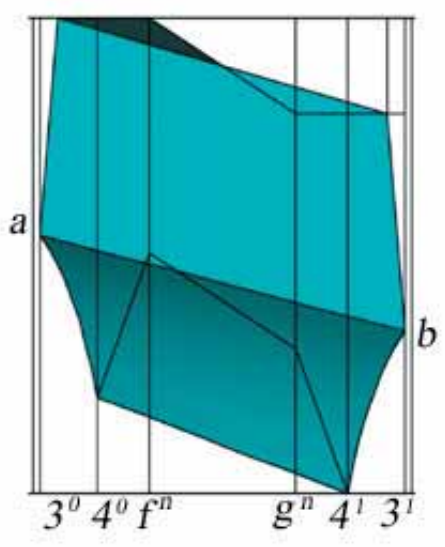


Fig. 227 a Cuneo concavo convesso sul lato del Nocciolo alla cui formazione si perviene in modo analogo al cuneo concavo della fig. 229. Vista ortogonale al piano d'intradosso.

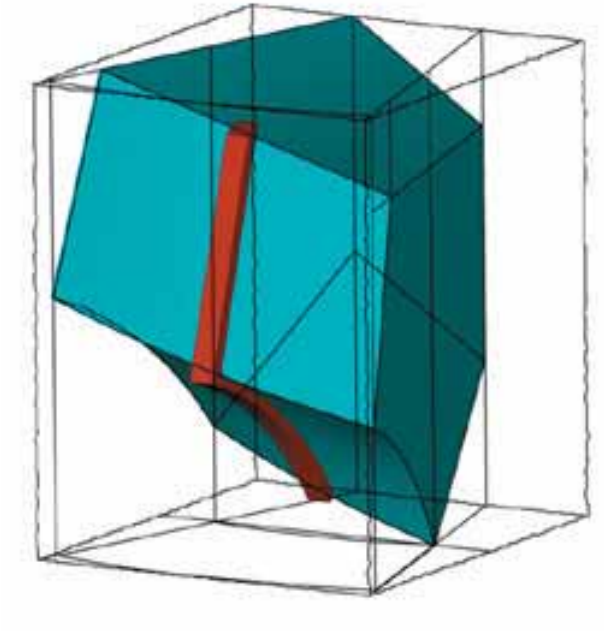


Fig. 227 b Cuneo concavo convesso sul lato del Nocciolo. Si noti come la differenza con il cuneo della fig. 229 consista nell'angolazione delle teste opposte verso l'interno.Vista assonometrica.

SI alzerà di seguito il pannello Bn[1]YPE, che si applicherà sul letto inferiore in epn[1] della fig. 226. poi avendo tracciato un quarto di cerchio EDB al letto superiore con raggio C[n]B della fig. 224 c si porterà sul suo profilo l'intervallo En[2], di quattro divisioni, perché il punto n[2] risponde a piombo sotto il punto d, dove l'orizzontale 4d taglia l'elica dell'origine C[n]df, e si avrà per indietreggiamento del letto sul Tamburo il punto D [18] della fig. 226. per il quale si tirerà dal centro C[n] la linea C[n]L che taglierà lo spigolo superiore del grande Tamburo p[4]Pq[4] [19]al punto L per il quale, e per il punto q [20] si traccerà l'elica Lq [21] sulla superficie del più grosso cilindro con una riga pieghevole.

SI porterà di seguito l'intervallo qp del letto inferiore, in LP al letto superiore, e per i punti p e P, si traccerà con una riga pieghevole appoggiata a questi due punti una seconda elica simile alla prima. Infine

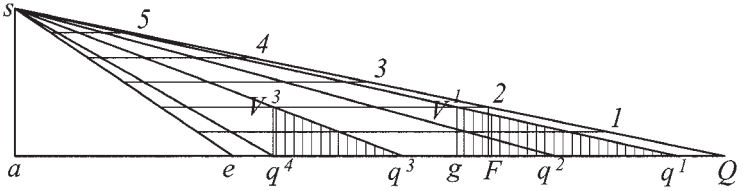


Fig. 230 d

avendo tirato alla fig. 224 q una linea dal centro C per l'origine n[1], della sezione dell'intradosso n[1]YP, che taglierà l'arco p[4]Pq[4] al punto K, si porterà la distanza q[4]K in qpK della fig. 226 per avere il punto K, che risponde al punto n[1] dell'origine della sezione orizzontale dell'intradosso, e al letto superiore indietreggiando il pannello, si avrà il punto della stessa origine che cade al di là del quarto di cerchio, per mezzo del quale si troverà una terza elica parallela e uguale ai due precedenti.

LA pietra essendo così tracciata, si abbatterà ad angolo retto 1°, il prisma misto DLqq[4]EeD, per avere l'angolo rientrante in elica De.
(fig. 226 a)

SECONDO il prisma triangolare misto DLPpqeD [22]per mezzo di una piccola sagoma concava formata sulla linea convessa PxE della fig. 224 c che si terrà sempre di livello, come dire parallela al letto. (fig. 226 b)

TERZO si abbatterà il prisma misto Bbakn[1]B,[23] per mezzo di una sagoma convessa, formata sull'arco concavo A1 o 4B della fig. 224 c che si terrà sempre diretto al centro del Nocciolo, e il suo piano per l'asse del Nocciolo; e la pietra sarà finita. (fig. 226 c)

LA BOTTE GIRANTE E RAMPANTE INCOMPLETA.

In termini dell'Arte,

LA SPIRALE A GIORNO SOSPESA.

SE si sopprime tutta la parte convessa della spirale St. Giles, il nocciolo che gli servirebbe da appoggio diventa inutile, di conseguenza lo si può pure sopprimere, sembra di primo acchito che ciò non si può fare senza distruggere il resto della Volta, tuttavia l'esperienza ci fa vedere il contrario in quei tipi comuni di scale, che si chiamano Spirale a giorno sospesa in Curvatura, che sostituisce perfettamente per una ragione simile a quella che noi abbiamo dato delle Volte sferiche, e sul Nocciolo incomplete, cioè che i filari dei Cunei dopo l'imposta concava della Torre [13] q[4] era indicato q[1].

e fino a quella che forma la Chiave, si sostengono mutuamente, e per servirmi dei termini dell'Arte, fanno Chiave ciascuna in particolare; la differenza che c'è nella Spirale consiste in ciò che l'ultimo Cuneo che è il più alto di ogni filare, non essendo appoggiato contro un altro Cuneo, come nelle Volte sul Nocciolo, non si sosterrebbe senza un appoggio di qualche arcata, o di un pezzo di legno di pianerottolo[24]; ma anche quest'ultimo Cuneo non è così difficile da contenere nelle Volte sul Nocciolo, perché spinga molto poco, particolarmente se la spirale è un po' ripida, l'inclinazione della sua posizione rigettando il fardello sui Cunei inferiori che gli servono d'appoggio.

NON parrebbe necessario entrare nel dettaglio della costruzione di questa Spirale incompleta, poiché è esattamente la stessa che quella di St.Gilès fino alla Chiave, il resto rimanente vuoto e soppresso, non comporta che di una piccola differenza al filare del Cuneo più elevato che deve portare il Montante della scala, sul quale si mette la Balaustra, o un appoggio di ferro.

QUESTA differenza dell'ultimo filare che fa chiave, consiste nel fare il paramento a piombo del lato del vuoto nella porzione di cilindro, dell'altezza che dà lo spessore della Curvatura in questo punto, precisamente nel modo che è stato detto, per l'abbozzo di un Cuneo concavo disegnato alla fig. 228 nella cui porzione cilindrica avendo descritto le eliche uguali dall'alto al basso cd e i1[1], si farà l'appoggio della balaustra con la squadra, al posto del calandrino a piombo e di taglio, di cui ci siamo serviti per formare i letti della spirale, tenendo sempre una delle braccia della squadra a piombo parallela all'asse del cilindro, in forza che essendo applicata sulla faccia concava, non parrebbe di giorno tra due; l'altro braccio che è supposto di livello sarà sempre diretto a quest'asse, come noi abbiamo detto all'inizio di questo libro, per la formazione delle superfici in elica pagina 37.
Parleremo più a lungo delle Spirali a giorno alla fine del 3° Tomo.

LE BOTTI A SPIRALE SUL NOCCIOLO ELLITTICO.

QUELLO che abbiamo detto delle Volte sul Nocciolo ellittico, fornisce già il modo di fare le proiezioni delle spirali senza alcuna differenza, ciò che è chiaro.

ORA questa proiezione essendo fatta, non si presenta alcuna nuova difficoltà per l'elevazione, non c'è che da servirsi degli stessi Calandrini a piombo, di intradosso, e di taglio, come negli esempi precedenti, così questa differenza non merita che vi ci si fermi.

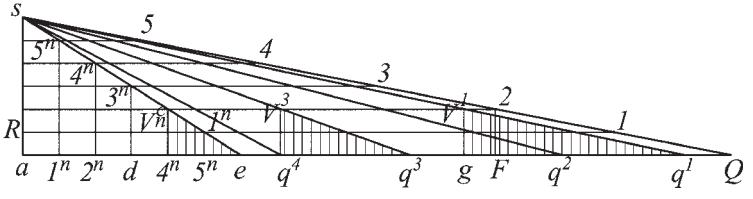


Fig. 230 e Ricerca delle altezze dell'elica sul Nocciolo prese sulla rettificazione dalla proiezione dell'arco p[1]p[2] perché è visibile.

NON è più necessario di parlare del caso, dove il centro primitivo della spirale al posto di essere circolare, come noi l'abbiamo supposto è ellittico o alzato o ribassato, perché è visibile che la differenza non cade che sui tagli, bisogna servirsi dei calandrini alla stessa maniera, che è stato detto per le botti orizzontali di questa specie; per i calandrini a piombo e di intradosso bisogna cambiarne ad ogni assisa, che il centro sia circolare no, così non si tratta che di cambiare il braccio curvo seguendo l'esigenza della parte ellittica, che comprende il filare di Cuneo che si fa.

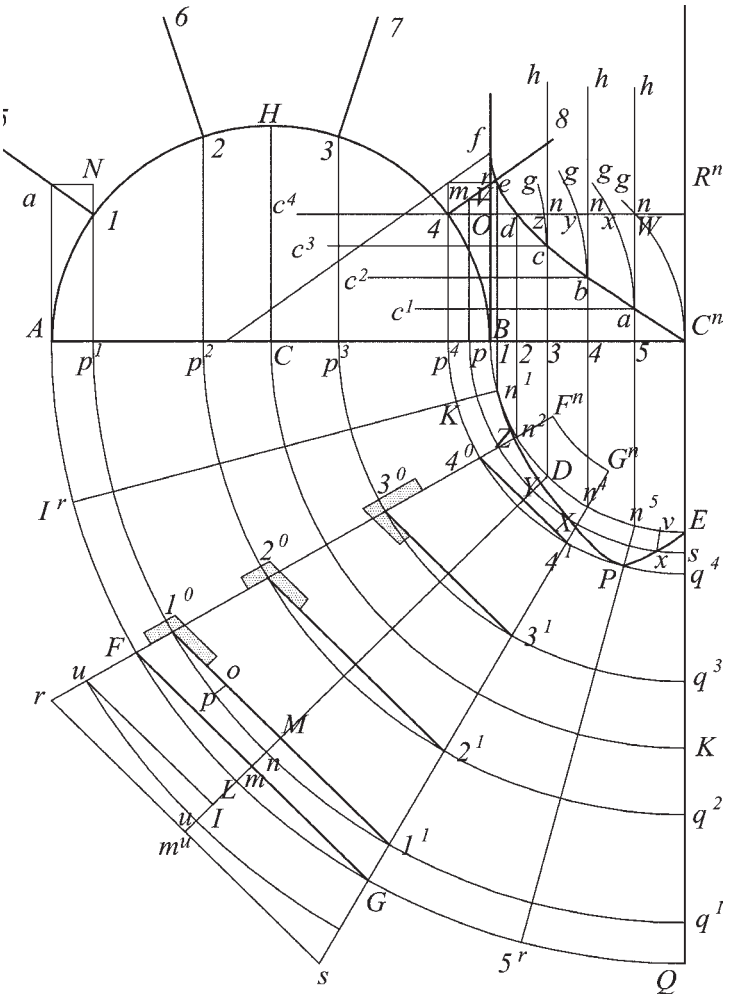


Fig. 224 c Proiezione verticale dell'elica della nascita della Volta a Spirale sul Nocciolo e sezione orizzontale del tamburo.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA.

QUELLO che noi abbiamo detto all'inizio di questo Capitolo, toccante la Generazione delle Botti giranti, e rampanti a spirale sul Nocciolo, è già una buona preparazione, per rendere ragione della loro costruzione.

[14] 3c anzichè g[c].

[15] Il disegno nel testo, unito alla forma lessicale "a piacere" (à volonté) usata dal Frezier, trae in inganno, facendo credere che il punto P non sia sull'arco p[4]q[4]; cosa che non può accadere, come si vedrà meglio nella formazione di un tamburo della fig.226, ove, nell'originale, permane l'errore di posizione di P. Nel detto punto P la giunzione della prima curva di sezione orizzontale con la seconda non è così dolce come pare nel disegno con la psizione errata di P, ma presenta una netta spigolosità.

PRIMO si conosce che le superfici di queste Volte sono composte di un'infinità di eliche, che sono delle curve a doppia curvatura, esse sono intrinsecamente sinistre, di forza che è impossibile applicarvi dei pannelli di intradosso piatto, che le toccano in più di tre angoli; così gli Scalpellini che dai tempi di Philibert de Lorme cercavano di fare il Trait per pannelli, sbagliavano ad intendere il fondo della questione, cercavano l'impossibile, seguendo degli intradossi piatti o flessibili per essere applicati a una superficie conica, come alle Volte Sferiche. Essi potevano solamente servirsi di pannelli flessibili di sviluppo, per tracciare gli spigoli su una superficie cilindrica, di cui l'intersezione comune all'intradosso forma un elica, che lo spigolo di letto e di intradosso.

SECONDO, poiché la Spirale non è in qualche modo che una ripetizione continua del centro primitivo AHB, che si eleva su un'elica, cambiando la direzione del suo piano, senza cambiare la situazione orizzontale del suo diametro, ne segue che tutto ciò che conviene alle botti toccanti i tagli, le ricadute e i calandrini a piombo e di intradosso, conviene anche alla nostra Spirale in una linea di intersezione solamente, migliore che è comune alla botte di livello e lì alla spirale che può penetrare.

DELLA prima osservazione che l'elica è una curva a doppia curvatura, che può essere comune a un cilindro e una spirale, ne segue che per trovare più spigoli di letto e di intradosso, bisogna anche supporre più superfici cilindriche, per potervi tracciare per mezzo di pannelli flessibili, le eliche degli spigoli, secondo i principi che sono stati dati al terzo libro, pagina 342. e fig. 281. La ragione è che la superficie elicoide essendo intrinsecamente sinistra, è impossibile da pervenire immediatamente alla formazione; così si è obbligati a considerare ogni filare di Cuneo come rinchiuso tra due cilindri, passanti l'uno per lo spigolo del letto di sotto con l'intradosso, l'altro per quello del letto superiore, gli uni concavi del lato della Torre, gli altri convessi e del lato del Nocciolo.

ADESSO, se si considera le differenti eliche, che si formano agli spigoli di ogni Cuneo, si riconoscerà che se ne ha quattro, come sappiamo, due agli spigoli di letto e di intradosso, e due agli spigoli d'estradosso e di letto; quindi quando ugualmente la volta non sarà estradossata, si è obbligati di supporre delle larghezze uguali ad ogni letto, che determinano uno spigolo d'estradosso.

CIÒ perché facendo l'elevazione di un Cuneo sbozzato in porzione di cilindro bisogna fare la proiezione di sei eliche, che sono totalmente ineguali nei loro profili e nella loro inclinazione all'orizzonte ,come sappiamo, di tre eliche alla superficie cilindrica passante per i punti C, V, i; (fig. 229) e quattro agli spigoli del Cuneo in k, V, [25]f, R, dei quali ce n'è una in Vu, che è comune alla superficie del cilindro.

DI queste sei eliche ce n'è due kl , Cb, [26] al di sopra, e altre due RS, f1[1] al basso della porzione di cilindro, che devono marciare a passo uguale, cosa questa per più lunghi e più corti circuiti, ciò a dire che non devono più elevarsi nè avanzarsi in numero di gradi nel circuito, l'una che l'altra, in modo che la linea retta acX perpendicolare all'asse della Spirale che passa per l'una di queste eliche Cb,[27] che è sul cilindro, incontra anche la compagna kl [28] sulla spirale, da cui segue, che se si considera il punto N, come la proiezione di un'orizzontale perpendicolare al piano del foglio, le due eliche compagne kl , Cb[29] devono passare per il punto N, di conseguenza le due linee rette kl e Cb,[30] ugualmente che le loro simili RS e f1[1] che si incrociano in M, passano tuttavia per tre punti delle due eliche parallele e compagne, che sono sempre a distanza uguale l'una dall'altra; così i punti NM sono equivalentemente doppi, e se al posto delle due linee rette RS , f1[1] si suppongono due curve che siano le proiezioni verticali delle eliche compagne, queste due curve si incrociano nello stesso punto M, e hanno due eliche parallele tra loro, che sono per questa ragione compagne; ciò che non può arrivare in alcun caso a delle linee rette, perché le proiezioni di due parallele in qualunque situazione possano essere, sono anche sempre parallele tra loro, checchè più o meno allontanate che gli obiettivi che rappresentano; esse possono bene in un caso confondersi in una, nella proiezione, ma mai possono incrociarsi.

[16] La posizione di r nel disegno originale non era corretta.
[17] Nel testo indica 4e ma si riferisce al nudo del Nocciolo cui corrisponde r.

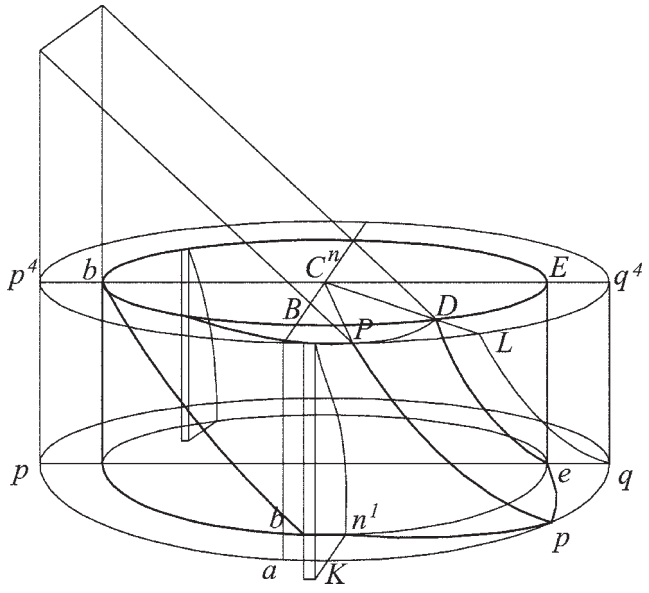


Fig. 226. Formazione di un quarto di tamburo del Nocciolo sulla sagoma della evisibile che per comprendere tutto l'intervallo

QUESTA proiezione verticale degli spigoli del Cuneo essendo supposta, cilindro, ha occorso supporre dei piani tb e RT, passanti per i punti più elevati c e b, e i più bassi R e 1[1]; di forza che la superficie del cilindro eccede le eliche che devono essere tracciate sul cilindro, i due triangoli misti, punteggiati alla fig. 228. in cyb [31], e xi1[1], i quali devono essere sottratti per un taglio a squadra sulla superficie cilindrica, perché le linee che si devono supporre tirate all'asse, per i punti dell'elica del cilindro, incontrano alla stessa altezza, quella dello spigolo del Cuneo all'intradosso o all'estradosso.

RESTA da dimostrare che i punti delle curve della situazione orizzontale dell'intradosso, e quella del letto sono stati ben trovati.

PRIMO per la sezione dell'intradosso, poiché noi vogliamo che questa sezione sia fatta per un piano orizzontale, questo piano e la curva del suo profilo sarà rappresentata in una proiezione verticale, per una sola linea orizzontale 4R , passante per il punto 4 della divisione del primo Cuneo del lato del Nocciolo; ciò è un effetto della proiezione spiegata al decimo Libro, pagina 207. perché è perpendicolare al piano di descrizione; sarà ancora vero per la stessa ragione, che se si suppone più piani verticali passanti per l'asse C[n], e per i punti presi e piacere F,L,G,5[r], Q, essi taglieranno il Nocciolo secondo le linee rette, di cui punti n[1], n[2], D, n[4], n[5], E, sono le proiezioni orizzontali, per le quali si tirano delle perpendicolari al di sopra dell'orizzontale AC[n] , è si avrà la rappresentazione, dell'intersezione di questi piani con il Nocciolo, alle linee C[n] R[n], 5[h], 4[h], 3[h], 2[h], che taglieranno l'orizzontale 4R[n] ai punti D, z, y, x, R[n] del piombo del nudo del Nocciolo; ma perché questo Nocciolo è debordato per una parte dell'intradosso al di sopra dell'origine della Volta, espressa in proiezione verticale per la curva C[n]abcdef, bisogna trovare la faglia della parte dell'intradosso che deborda il Nocciolo sopra, ciascuna delle sezioni dei piani verticali passanti per l'asse C[n], e

i punti F L G 5^{r} Q.

POICHÉ le sezioni di tutti questi piani sono dei semi cerchi uguali al Generatore AHB, è chiaro che tutte queste faglie R^{n}n, nx, ny, nz, saranno uguali al Seno verso l'arco di cerchio compreso tra l'origine sul Nocciolo, e la linea orizzontale e 4R passante per il punto 4, dove è l'altezza del letto superiore del Tamburo; poiché le altezze an, bn, cn, sono uguali al loro Seno retto, che sono determinate per i resti delle altezze abcd, al di sopra dell'orizzontale BC^{n}, fino alla sua parallela 4R^{n}; ciò che pare evidente alla più grande altezza 4p^{4}, la quale è il Seno retto dell'arco 4B, e p^{4}B, il suo Seno verso, il quale arco è uguale all'arco C^{n}W, la altezza CR uguale a 4p^{4}, e per conseguenza WR^{n}, uguale a p^{4}B.

NON resta dunque più da provare che le altezze di questi punti abcd, sono state ben trovate, ciò che non implica alcuna difficoltà, poiché esse sono state prese sulle perpendicolari comprese entro lo sviluppo del nocciolo BDE, rappresentato alla fig. 230 e per la linea ae, e lo sviluppo dell'elica se, l'altezza 5a della fig. 224 c essendo stata fatta uguale a 5 1^{n} della fig. 230 e [32]; l'altezza 4b della fig. 224 c uguale a 4V^{c} della fig. 230 e così di seguito, per conseguenza la curva C^{n}f è la proiezione verticale della linea dell'origine della Volta, sul Nocciolo della Spirale, è infine chiaro che tutte queste faglie sono posate sulle proiezioni dei piani verticali taglianti la spirale 1^{r}n^{1},[33] Fn^{2}, LD, Gn^{4}, ecc. in n^{2}z, Dy, n^{4}, saranno nella situazione dove devono essere, poiché sono delle partizioni di questi piani, di cui la curva n^{1}zyxP è quella della sezione orizzontale dell'intradosso che deve essere aggiunta al nudo del Nocciolo, per formare il primo Tamburo che si propone di fare.

LA spiegazione della costruzione della seconda curva, della sezione orizzontale di detto letto, di cui il profilo è la linea 4.8, è poco diversa da quella dell'intradosso, in ciò che la sezione del piano verticale AHB, che dalla più grande faglia in n^{5}P, uguale alla ricaduta che è il Seno verso p^{4}B dell'arco di B4, dà anche la più grande faglia del letto 4O = p^{4}B, che è la proiezione della linea 4e, che eccede il nudo del Nocciolo fB, ciò perché il punto P è comune alle due curve di sezione di intradosso PYn^{1}, e della sezione di letto PxE; ora all'altezza re dalla parte dell'elica, di cui la proiezione verticale è ed, e il suo sviluppo alla fig. 230 e in se sarà la linea 1^{n}e di cui la proiezione è la retta 5e che deve per conseguenza essere anche lo sviluppo dell'arco orizzontale Od [34], alla proiezione verticale e dell'arco n^{5}E all'orizzontale, perché il punto n^{5} risponde alla più grande faglia P, così il punto E sarà l'origine della faglia.

ADESSO è chiaro che poiché la linea r4 [35] è divisa in due ugualmente, in m, l'altezza eO[36] sarà anche divisa ugualmente per la linea mV [37] al punto V [38], per conseguenza il punto V [39] corrisponderà alla metà dell'arco d'elica ed, e lo stesso alla metà della sua proiezione; da dove segue che il punto v deve essere al mezzo dell'arco n^{5}E, e poiché la linea mV [40] deve tendere all'asse v, e che la linea x deve avere la stessa direzione, la faglia Vm [41] sarà ben portata in vx, per conseguenza il punto x è la sezione del letto, da cui la curva PxE passa per tre punti della sezione orizzontale del letto, ciò che basta fare.

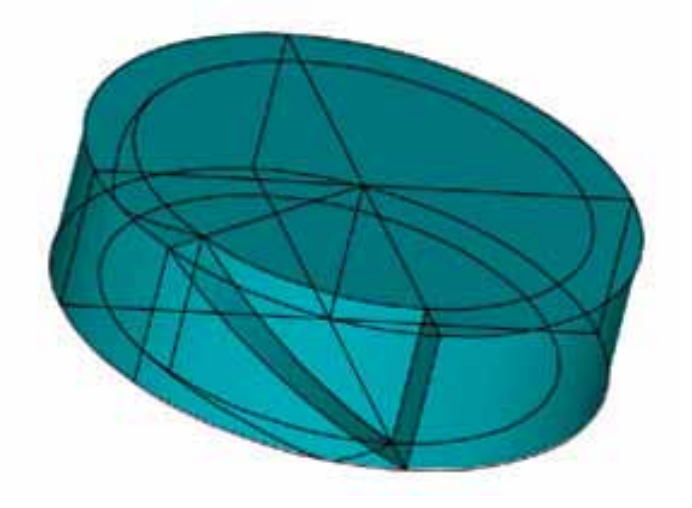


Fig. 226 a Primo taglio della pietra ad angolo retto secondo l'elica De.

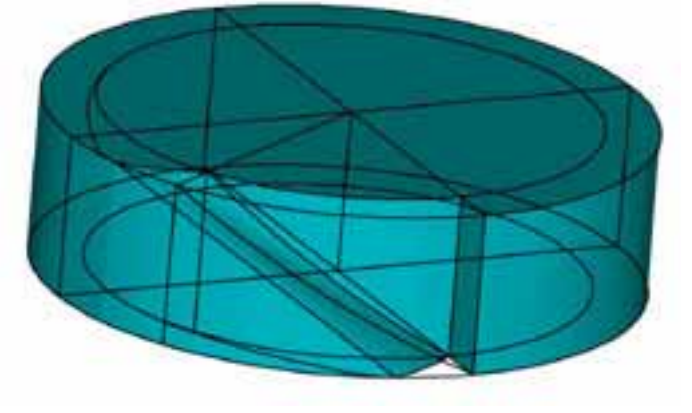
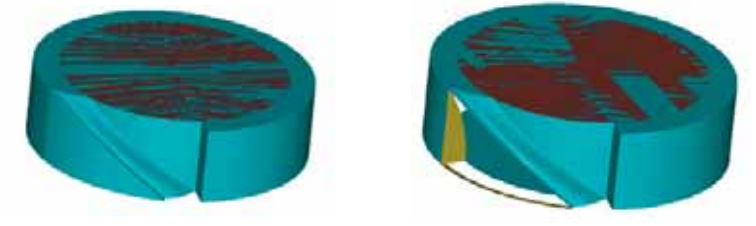


Fig. 226 b Eliminazione del prisma triangolare misto.



[18] Nel testo è indicato d minuscolo.
[19] p^{4} e q^{4} sono posizionati dove nel disegno erano indicati p^{1} e q^{1}.
[20] q è posizionato dove nel disegno era posizionato q^{4} in modo errato.
[21] Il testo indica Llq, ma l minuscolo non compare in nessun modo da cui è plausibile un errore di stampa.
[22] Si veda la nota 15; l'autore parlando di prisma triangolare smentisce il disegno originale poichè se P non fosse sull'arco del cilindro esterno, si avrebbe una piccola striscia di risulta che non andrebbe più a coincidere con la prima curva di sezione orizzontale; vedi disegno a fianco.

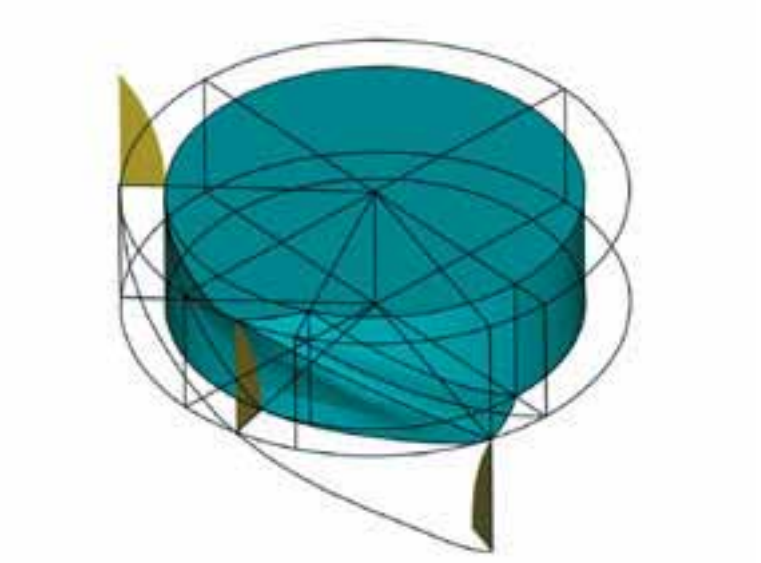


Fig. 226 c Completamento del taglio della pietra attraverso l'uso della sagoma convessa che riproduce l'intradosso del cuneo.

SARÀ agevole trovare tanti punti che si vorrà tra x e P, x e E, in sottodivisioni 4m e me del giunto 4.8, se si vuole avere la curva con più esattezza.

NOTA SULL'UTILIZZO.

LA parte del Trait che concerne la maniera di far portare l'origine della spirale, ai tamburi del Nocciolo, non è necessario nella costruzione della spirale St. Giles, propriamente detta, dove l'inclinazione dell'elica del cuscinetto darebbe degli angoli troppo acuti.

NELLE botti giranti e rampanti attorno un grande Nocciolo,dove questo inconveniente non si trova, conviene meglio fare i Cunei delle prime ricadute allo stesso modo che gli altri di sopra.

AL resto un buon Architetto che non ha motivo di temere la bomba[42], non s'accorge quasi mai di voltare a spirale di St. Giles, una scala che è abbastanza piccola, perché il suo Nocciolo possa essere fatto da un Tamburo d'un solo pezzo ad ogni assisa; quindi allora è presupposto che i gradini non sono troppo lunghi per essere fatti in un solo pezzo, di forza che negli smussamenti inferiori, si fa in poco conto una Volta a conchiglia che è sorte propria.

SE la scala è troppo spaziosa perché si possa fare solidamente i gradini di un solo pezzo, allora non conviene fare un Nocciolo così piccolo, perché i gradini diventano troppo stretti all'incollatura, o troppo larghi alla fine; in questo caso si può fare un Nocciolo abbastanza spesso per alloggiarvi i cuscinetti della spirale, che formano l'origine di questo lato, come lo si pratica al suo posto negli incavi della Torre, allora il trait di sezioni orizzontali non è di alcuna utilità.

NOI abbiamo parlato al primo e al secondo libro del Trait delle sezioni verticali delle stesse volte, di cui facciamo anche poco uso in questa costruzione; non è in effetti necessario al caso che si volle fare una Spirale St. Giles, tonda in una Torre quadrata, o a più facce; ciò che nessuno che io sappia ha proposto di mettere in pratica, checchè la cosa sia anche fattibile che una Volta Sferica su un quadrato; la sola osservazione che vi si dovrebbe fare, è che le centine rampanti degli archi laterali sui muri delle facce della Torre, sarebbero di un profilo poco gradevole alla vista nel quadrato; ma essi lo diventerebbero di più a misura che il poligono aumenterebbe in numero di lati.

QUESTA parte della costruzione non renderebbe il trait più difficile perché non si tratterrebbe che di sostituire allo sviluppo dell'elica dell'origine della Volta, la curva del quarto ordine di cui abbiamo parlato, formata sulla sezione del muro verticale di ogni faccia della torre, la quale sarà in un angolo rientrante, se si vuole che il Cuneo comprenda una parte di questa faccia; o in angolo fagliante formante uno spigolo con l'intradosso della spirale, e un letto tagliato orizzontalmente, come se si formasse un'arcata d'arco rampante, lasciante negli angoli del poligono un pennacchio anche questo rampante.

[23] Nel testo compare un p[4] che non risulta dal disegno da cui è plausibile un errore di stampa.
[24] Bois de palier.

1 Errore di stampa: m invece di M.
2 Nel testo è indicata la fig. 130 ma è chiaramente riferita alla fig. 224.
3 Errore di stampa: nel numero della figura la prima cifra era 1 anziché 2.
4 Errore di stampa: nel numero della figura la prima cifra era 1 anziché 2.
5 Errore di stampa: nel numero della figura la prima cifra era 1 anziché 2.
6 Errore di stampa: nel numero della figura la prima cifra era 1 anziché 2.
7 Nel testo originale il punto C viene richiamato usando indifferentemente il carattere minuscolo.
8 Errore di stampa: f invece di F.

9 Errore di stampa: k invece di K.
10 Errore di stampa: M invece di m.
11 Nel disegno il tratto op è chiaramente radiale allo stesso centro Cn di mn e quindi non parallelo a questo.
12 Nell'originale è scritto solo y1 pur riferendosi a y11.
13 q4 era indicato q1.
14 3c anziche gc.
15 Il disegno nel testo, unito alla forma lessicale "a piacere" (a volonté) usata dal Frezier, trae in inganno, facendo credere che il punto P non sia sull'arco p4q4; cosa che non può accadere, come si vedrà meglio nella formazione di un tamburo della fig.226, ove, nell'originale, permane l'errore di posizione di P. Nel detto punto P la giunzione della prima curva di sezione orizzontale con la seconda non è così dolce come pare nel disegno con la psizione errata di P, ma presenta una netta spigolosità.
16 La posizione di r nel disegno originale non era corretta.
17 Nel testo indica 4e ma si riferisce al nudo del Nocciolo cui corrisponde r.
18 Nel testo è indicato d minuscolo.
19 p4 e q4 sono posizionati dove nel disegno erano indicati p1 e q1.
20 q è posizionato dove nel disegno era posizionato q4 in modo errato.
21 Il testo indica Llq, ma l minuscolo non compare in nessun modo da cui è plausibile un errore di stampa.
22 Si veda la nota 15; l'autore parlando di prisma triangolare smentisce il disegno originale poiché se P non fosse sull'arco del cilindro esterno, si avrebbe una piccola striscia di risulta che non andrebbe più a coincidere con la prima curva di sezione orizzontale; vedi disegno a fianco.
23 Nel testo compare un p4 che non risulta dal disegno da cui è plausibile un errore di stampa.
24 Bois de palier.
25 Scambia le minuscole: da k, V a K,v.
26 Ripete KL e scrive cd invece di cb e c è lo stesso C.
27 Vedi nota precedente.
28 Vedi nota precedente.
29 Vedi nota precedente.
30 Vedi nota precedente.
31 Riporta erroneamente CYd che corrispondono nel disegno a cyb.
32 Errore di stampa: nel numero della figura la prima cifra era 1 anziché 2.
33 Caratteri non comprensibili dal testo ma deducibili dal disegno.
34 Nel testo la o è minuscola maentre nella fig.224 è maiuscola.
35 Il testo indica e4 ma dal disegno è chiaro si riferisce ancora a r4.
36 Nel testo la o è minuscola maentre nella fig.224 è maiuscola.
37 Il testo indica u ma dal disegno si riferisce a V.
38 Il testo indica u ma dal disegno si riferisce a V.
39 Il testo indica u ma dal disegno si riferisce a V.
40 Il testo indica u ma dal disegno si riferisce a V.
41 Il testo indica u ma dal disegno si riferisce a V.
42 Craindre la bombe.

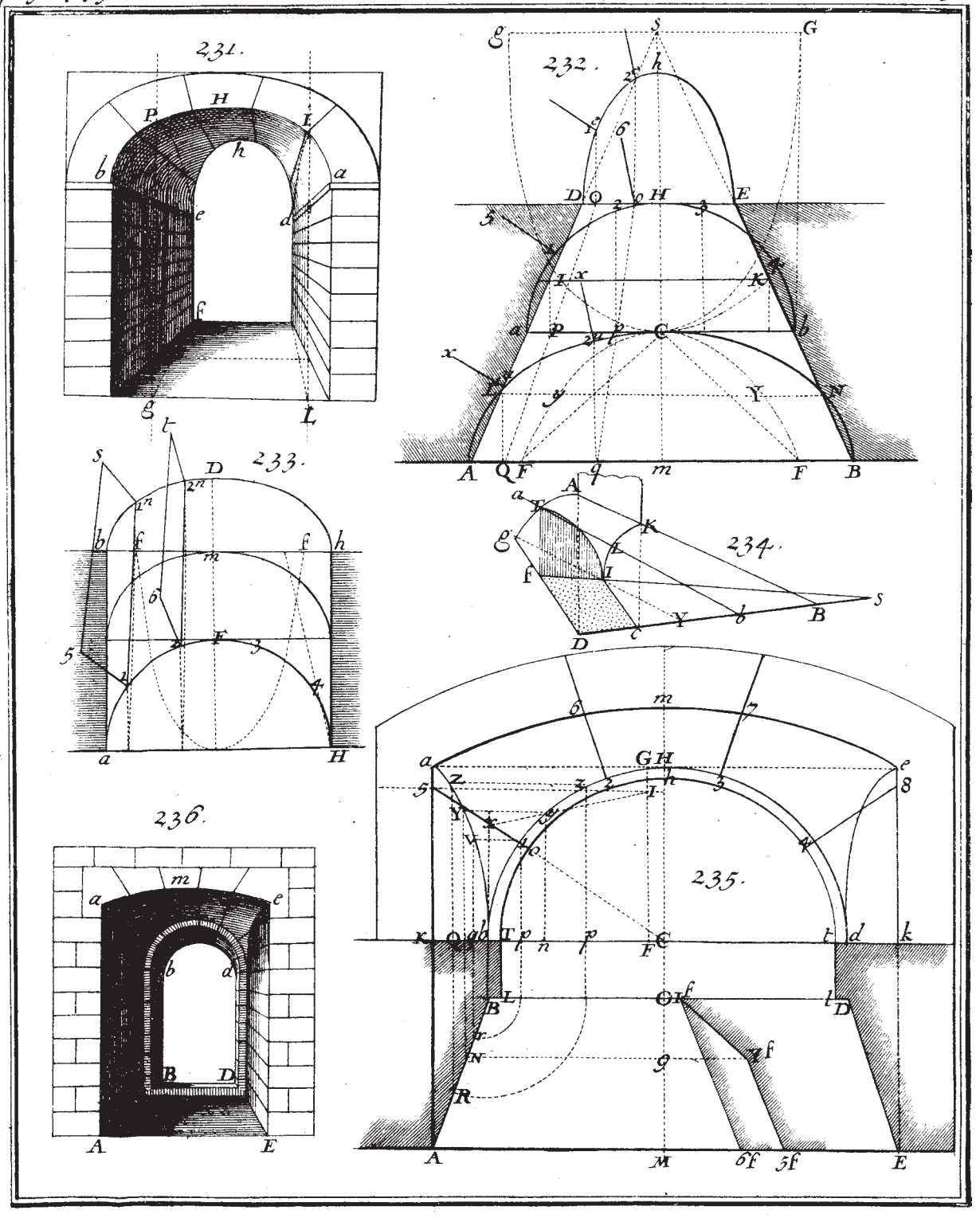
[32] Errore di stampa: nel numero della figura la prima cifra era 1 anzichè 2.
[33] Caratteri non comprensibili dal testo ma deducibili dal disegno.

[34] Nel testo la o è minuscola maentre nella fig.224 è maiuscola.
[35] Il testo indica e4 ma dal disegno è chiaro si riferisce ancora a r4.
[36] Nel testo la o è minuscola maentre nella fig.224 è maiuscola.
[37] Il testo indica u ma dal disegno si riferisce a V.
[38] Il testo indica u ma dal disegno si riferisce a V.
[39] Il testo indica u ma dal disegno si riferisce a V.
[40] Il testo indica u ma dal disegno si riferisce a V.
[41] Il testo indica u ma dal disegno si riferisce a V.

[42] Craindre la bombe.

page. 443.

Pl. 63.



Capitolo X

LE VOLTE CON SUPERFICI IRREGOLARI.

Tutte le volte di cui abbiamo parlato fini ad ora sono porzioni di corpi irregolari primitivi, di cilindro, di cono, o di sfera, o di corpi regolarmente irregolari, come i conoidi, gli sferoidi, e i cilindri con basi non circolari.
Qui tratteremo quelle che hanno un rapporto molto imperfetto con questi corpi, tra le quali si considerano due classi, una che sono curve solo nelle loro sezioni trasversali, e rette in quelle longitudinali, come le cilindriche e le coniche, come sono qualche arriere-voussure [1], e altre volte che appartengono ad entrambe le specie, avendo in una delle loro sezioni la proprietà del cilindro, quando i lati sono paralleli all'asse, e in un'altra la proprietà del cono, quando i lati sono convergenti e tendono ad un asse; per questa ragione le chiamo conico-cilindriche.
La seconda classe è di quelle la cui superficie è a doppia curvatura, l'una trasversale l'altra longitudinale, e dato che questa proprietà è comune alle sfere, le compareremo tutte a questo corpo primitivo; ma anche perché oltre a questa proprietà ce ne sono anche altre comuni al cono, al cilindro e ai prismi, le chiameremo con i nomi composti di conico-sferica, di sferico-cilindrica, e di sferico-prismatico, come spiegheremo dopo.

PRIMA CLASSE, DELLE VOLTE CONICO-CILINDRICHE.

(Fig. 231 e 232) Possiamo rapportare al cono e al cilindro alcune figure di volte semplici, di cui le prosecuzioni delle sezioni parallele tra di loro, e perpendicolari al piano orizzontale e verticale, per cui passa il loro asse, sono delle curve diverse, o di diverso diametro; possiamo ridurre questa specie di volte a tre specie, che non sono altro che differenti casi della stessa figura di prospetto.
La prima è quella che chiamiamo passage ébrasé [2] tra due porte, che sembra al primo sguardo una volta in cannoniera, o un tronco di cono, ma che tuttavia non lo è; perché supponendo le imposte e la chiave di volta orizzontali, ciascuna a parte, è chiaro che, prolungando le direzioni delle imposte, queste si incontreranno fuori dalla volta, poiché sono convergenti sullo stesso piano, orizzontale o inclinato, ma l'asse o linea intermedia tra queste imposte, che è in questo stesso piano nell'intersezione col verticale, passante per la chiave che supponiamo sempre della stessa altezza, al di sopra delle imposte, non incontrerà mai la linea di direzione della chiave, poiché le è parallela; quindi, superato il sesto di prospetto, (questo asse) si restringerà talmente che si ridurrà sulla linea retta verticale, nel punto di giunzione dove concorrono le imposte; così la semi ellisse di questo sesto si riduce alla metà del suo asse, dove è infinitamente ristretta, il suo asse minore diventa niente, cioè, seguendo il linguaggio dell'algebra, è uguale a zero.
(Fig. 233) La seconda specie è quella delle volte a botte, a tutto sesto su un prospetto, e ribassate sull'altro, cioè i cui semi diametri verticali sono disuguali, dato che la volta è rampante, o per le imposte, o per la chiave, supponendo uno dei due orizzontale, o la chiave o l'imposta; questa specie non è altro che un posizionamento diverso del passage ébrasé ruotato sul suo asse, trasportando la chiave sull'imposta: perché allora questa volta che aveva una strombatura orizzontalmente, non ce l'ha più rispetto all'orizzonte, ma verticalmente alla chiave, che è facile da concepire.
(Fig. 237 vedi planche 64) La terza specie, che è quella dell'arriere-voussure rigata e convessa, può essere considerata come la supplementare della precedente, cioè, la sua estremità, se la si suppone prolungata fino a che la chiave, che concorre con l'asse, non si abbassa così tanto sul piano delle imposte che il sesto ribassato non ha più altezza, dato che si riduce alla linea retta che rappresentava il suo asse maggiore, il minore va a niente, nel linguaggio del calcolo, è uguale a zero.
(Fig. 238 vedi planche 64) Per dare un'idea più semplice di questa arriere-voussure, non si deve far altro che rappresentare una linea retta AB che percorre ugualmente da una delle sue estremità un arco qualsiasi DHE, e dall'altra una linea retta FG, il flusso di questa linea descriverà una superficie che abbiamo chiamato mistilinea all'inizio di questo libro, che è quella della volta di cui stiamo parlando, in cui i piedritti possono essere convergenti, o paralleli tra di loro senza alcun cambiamento di figura.
Potremmo poi aggiungere una quarta specie di superfici di volte, la cui generazione può essere spiegata con il movimento di una linea retta, su delle curve di diversa specie, come è quella dell'arriere-voussure di Marsiglia ordinaria, considerata in alcune circostanze di soggezione, come se (Fig. 234) si desse un'inclinazione AK della chiave, il punto T per altezza del vertice di uno dei ventagli, l'arco KI per metà del sesto esterno, e un angolo di strombatura immaginario sull'imposta IG, che è appunto supposta, poiché il vero sesto è sull'arco TI sul piano verticale TIF; se si prolungano le diverse strombature GI dell'imposta in Y, e AK della chiave in linea retta fino alla linea intermedia DS in B, si riconoscerà che la linea generatrice deve muoversi sull'asse DS, da B a Y, mentre si muove nello stesso tempo sull'arco KLI, e che con questo movimento la linea generatrice intersecherà il piano della superficie anteriore GAD, seguendo una curva GTA, che sarà variabile a seconda delle diverse aperture delle strombature date. Ma benché questa superficie non sia abbastanza deformata da poter essere intersecata seguendo certi posizionamenti dei piani intersecanti in linea retta, come sulla chiave, la rinviamo al rango delle volte irregolari a doppia curvatura, perché le sezioni dei lits nell'apparecchiatura sono delle linee curve eccetto che all'imposta, e perché al centro della chiave non c'è mai un giunto

[1] volta costruita dietro l'intradosso di un'apertura.
[2] letteralmente = passaggio strombato

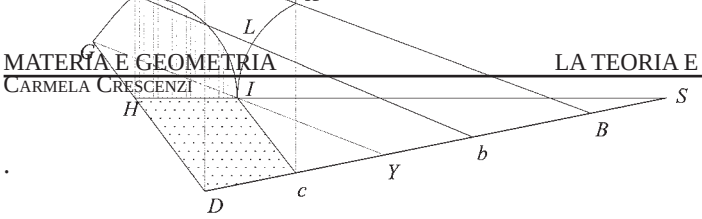


Fig. 234 *Quarta specie di superficie di volte.*

Problema

Fare una volta conico-cilindrica.

Prima specie,

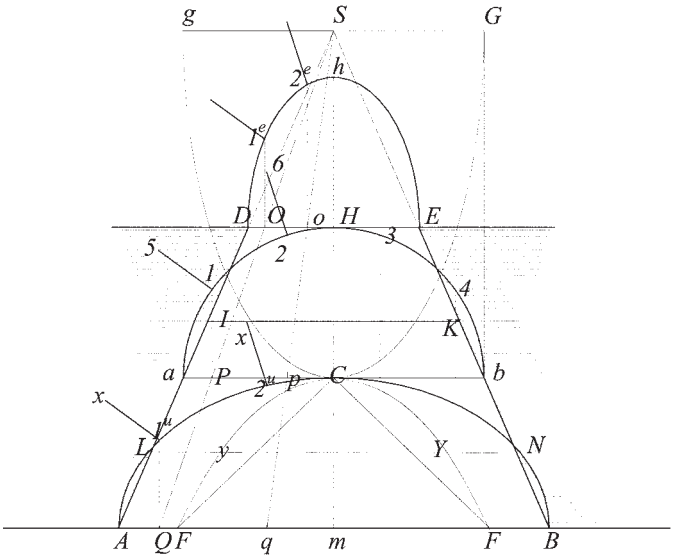
PASSAGE ÉBRASÉ TRA DUE SUPERFICI RETTE, IN CUI LE IMPOSTE SONO ORIZZONTALI, COME LA METÀ DELLA CHIAVE.

In questa trattazione, come nella precedente, bisogna cominciare col determinare a scelta dal cintre primitif [3], l'altezza che si propone di dare alla chiave, si deve decidere in quale posizione è il sesto, perché a volte conviene prenderlo al centro del passage, a volte su una delle superfici, d'entrata o di uscita.
Sia (Fig. 232) il trapezio ABDE, il piano orizzontale dell'apertura che si vuole voltare, che è aperta più su un lato AB che sull'altro DE, cosa che causerà la differenza di altezza sulla chiave, se i sesti fossero tutti circolari, ma visto che si vuole che questa sia orizzontale, è evidente che bisogna renderli ellittici per fare loro un semi asse verticale uguale all'altezza.
Supponiamo che si voglia prendere il sesto centrale aHb, per cintre primitif circolare, quello della superficie minore ED sarà rialzato, e quello della superficie maggiore AB sarà sbassato.
Divideremo quindi il semi cerchio aHb nei suoi conci come ordinariamente, nei punti 1, 2, 3, 4, dopo aver fatto la proiezione delle sue suddivisioni in

[3] indica il profilo arrotondato della parte interna di una volta presa in punto preciso o perpendicolarmente alla sua direzione e allora avremo l'arc droit oppure obliquamente e allora avremo l'arc de face; il profilo che tra i due si usa per primo per costruire il trait di una volta si chiamerà centro primitivo l'altro centro secondario.
[4] disegno di una volta tracciato su un muro o su una tavola, della stessa grandezza dell'opera da eseguire per poter prendere le misure necessarie alla costruzione dei conci.

Fig. 232 esempio di volta conico-cilindrica.

P e p sul diametro ab, prolungheremo i lati AD BE fino a che non s'incontreranno in S; da qui, per i punti di proiezione P e p, tracceremo le linee opq, OPQ, che saranno le proiezioni orizzontali dei giunti, sulle quali riporteremo le altezze delle suddivisioni del cintre primitif, sapendo che P1 va in O1^{e}, e in Q1^{u}; p2 in o2^{e} e in q2^{u} ; CH in Hh e mC e così via, e per i punti di queste altezze condurremo la curva ellittica che sarà il sesto di ciascuna superficie, o se si vuole sui diametri dati AB, DE, e i semi assi Hh, e mC, divideremo gli ellissi come al solito, con il problema VI del secondo libro.
Se la strombatura desse il punto s troppo lontano fuori dal piano dell'épure



[4], si ricorrerà al problema I del terzo libro per fare la proiezione dei giunti.
Essendo dati i punti delle suddivisioni dei tre sesti di prospetto e di centro, lo saranno anche le inclinazioni dei giunti di testa, seguendo l'uso delle perpendicolari alle tangenti, ma poiché queste si trovano su delle curve disuguali, ne risulterà che i lits [5] saranno deformati, cosa che non si vorrebbe fare per le ragioni che ho dato nel terzo libro; conviene quindi che si assoggettino ai piani passanti per i giunti di taglio 1°5, 2°6 del cintre primitif.
Da qui risulta che i giunti di testa 1^{u}x, 2^{u}x del sesto ACB sono troppo stesi, e quelli del sesto DhE sono troppo radi; con questo questa volta non riserva alcuna difficoltà. La potremo fare con dei panneaux [6] o per squadratura; quest'ultimo metodo sarà il più agevole, perché ad eccezione

[5] superficie sulla quale si posa una pietra,sia che sostenga un'altra pietra sia che venga sostenuta. Quella sulla quale si appoggia una pietra si chiama lit de dessous, quella sulla quale un'altra pietra si appoggia si chiama lit de dessus, quando le facce sono inclinate in orizzontale come nei conci si chiama lit en joins.
[6] sono le sagome di una delle superfici di un concio, tagliate in legno o cartone, che saranno applicate sulla pietra per tracciare i contorni.

della chiave, tutte le doeles [7] sono deformate, cosa che renderà la vista dei panneaux troppo complessa.

Applicazione della trattazione sulla pietra.

Dopo aver predisposto un paramento per servircene da lit orizzontale, ci applicheremo il panneau
Della proiezione orizzontale, per esempio AQOD per il primo, QOoq per il secondo ecc.., faremo i due paramenti di testa , sui quali riporteremo le altezze delle cadenti 1P, 2p, ecc..per applicarci i panneaux degli archi di prospetto,che daranno i giunti di testa che taglieremo come al solito, cosa che non richiede alcuna difficoltà, perché tutte le superfici potranno essere disposte a squadra, osservando ciò che abbiamo detto parlando di questa disposizione nella formazione di superfici deformate doliolimes, a pagina 36 di questo libro.
Se il passage è abbastanza lungo da aver bisogno di fare le teste dei conci tra il cintre primitif e una delle superfici sul davanti o sul didietro, vedremo per il punto dato, per esempio L, una linea LN che sarà l'asse maggiore di un ellisse, la cui metà dell'asse minore sarà l'altezza costante CH.
Al contrario se il punto era stato dato tra a e D, per esempio in I, allora la linea IK sarebbe stata l'asse minore, e CH la metà del maggiore.
Su questo c'è una osservazione curiosa da fare, cioè che la prosecuzione dei fuochi dell'ellisse dal cintre primitif ab verso A, forma un'iperbole fy
CYF, le cui linee delle imposte ADS, BES, sono gli asintoti che si avvicineranno continuamente, se si prolungano, e non la incontreranno mai, come è facile dimostrare.
Poiché se si nomina Am la metà dell'asse maggiore aiFC che è uguale per costruzione a b, l'altezza costante mC,c e la distanza variabile mF,x, si avrà bb=aa=cc+xx, quindi aa-cc=xx, di conseguenza x sarà sempre più piccolo di a, cioè che mF non potrà mai essere uguale a mB o a mA, ciò che si doveva dimostrare.
Non sarà la stessa cosa per la curvatura che formerà la prosecuzione dei fuochi, dal diametro ab verso DE, e fino al punto S, questa formerà una semi ellisse gGC, la cui metà dell'asse maggiore sarà CS, e del minore gG uguale alla linea ab, diametro del cintre primitif ruotato su un piano verticale; la ragione è che i fuochi non saranno più sullo stesso piano orizzontale come i precedenti, ma in un piano verticale che gli sarà perpendicolare, nel quale stanno tutti gli assi maggiori della prosecuzione degli ellissi, e gli assi minori diminuiti continuamente fino a zero in S, dato che allora xx diventano = aa; di conseguenza la linea intermedia della chiave è una tangente della curva, la quale essendo parallela alla orizzontale CS, ne consegue che la curva rientrerà in se stessa se verrà

[6] sono le sagome di una delle superfici di un concio, tagliate in legno o cartone, che saranno applicate sulla pietra per tracciare i contorni.
[7] così si chiama il paramento interno di una volta o di un concio incavato. La superficie piana che passa per la corda dell'arco di una doele si chiama doele plate, è una fase di preparazione per la definizione di una doele concava.

Corollario I.

Da ciò tracciamo la costruzione di un'altra volta che io chiamo volta a botte irregolare in pendenza, i cui sesti di prospetto siano di altezza disuguale sui loro diametri, perché è facile concepire che questa volta non è altro che la parte cCHEb, della metà del passage ébrasé ruotato diversamente, mettendo l'imposta bE per chiave, e la chiave CH per una delle imposte, ripetendo la stessa cosa per l'altra metà, come lo si vede nella Fig. 233.
Così la doele di questa volta è anch'essa deformata come quella del passage ébrasé, di conseguenza si può farla comodamente con panneaux sulla chiave, dove le corde degli archi delle teste sono parallele tra di loro; d'altronde queste non lo sono perché conviene farle per squadratura come il passage ébrasé, prendendo soltanto l'altezza della cadente al posto della cadente.
In questa trattazione troviamo anche la stessa difficoltà che concerne i tagli dei lits, che non si possono fare piani senza falsare i tagli dei diversi sesti, e che conviene farli deformati quando le superfici sono apparenti cosa che confonde molto un muratore come ho sperimentato nel primo ingrandimento di Saint Malo nella Place du Fiel, dove avevo la direzione in secondo.
Avevamo fatto una volta su le scale, che saliva rampante, la quale doveva raccordarsi in basso con quella di un pianerottolo a tutto sesto, e essere ribassata in alto per poter passare sotto la piattaforma dove c'era l'uscita apparente, dato che in questa circostanza la doele e i lits dovevano essere deformati. Il muratore in difficoltà tracciò i suoi conci sul piano, e nonostante questa precauzione i conci si ritrovarono tagliati, cioè sprecati, perdendo così tempo e pietra; essendomi accorto che faceva ricadere la colpa dello sbaglio sull'esecuzione del lavoro dei tagliatori di pietre, mi confessò che procedevano a tentoni perché questa trattazione non si trovava nel libro del P. Deran.
Allora capii quale utilità aveva la conoscenza del taglio delle pietre nella costruzione delle fortificazioni, tanto più che tra le cinquanta volte che faremo sotto una inclinazione ne troveremo ancora due dalla figura irregolare. Qualche anno più tardi mi si presentò un caso di arrotondamento di un angolo singolare, di cui ho parlato all'inizio di questo libro; in seguito mi ritrovai obbligato nell'isola di Santo Domingo in America a fare io stesso il muratore per eseguire delle volte sugli archi di un chiostro. Tutte queste circostanze, gli errori che avevo riscontrato in svariate opere, e quelli degli altri che hanno scritto su questa materia, mi hanno fatto sentire la necessità del trattato che ho intrapreso principalmente ad uso degli ingegneri.
Si vede nella Fig. 233 che se i tagli 1°5, 2°6 del sesto anteriore aFH sono tracciati dal centro C e che se quelli del sesto bDh, 1^{n}s, 2^{n}t sono perpendicolari al contorno dell'ellisse, non essendo questi tagli paralleli, i lits sono dei quadrilinei deformati, 5s1^{n}1, che ho chiamato planolimes all'inizio di questo libro. Se si vogliono fare piani, bisogna stendere il taglio 1^{n}s parallelamente al taglio 1°5, ma allora l'angolo della testa s1^{n}b diventerà interamente acuto e debole, e l'inclinazione apparente sarà difforme facendo da una parte e dall'altra due angoli disuguali, l'uno acuto e l'altro troppo ottuso; è per questo che faccio i lits della volta di cui parlo deformati contro l'uso ordinario

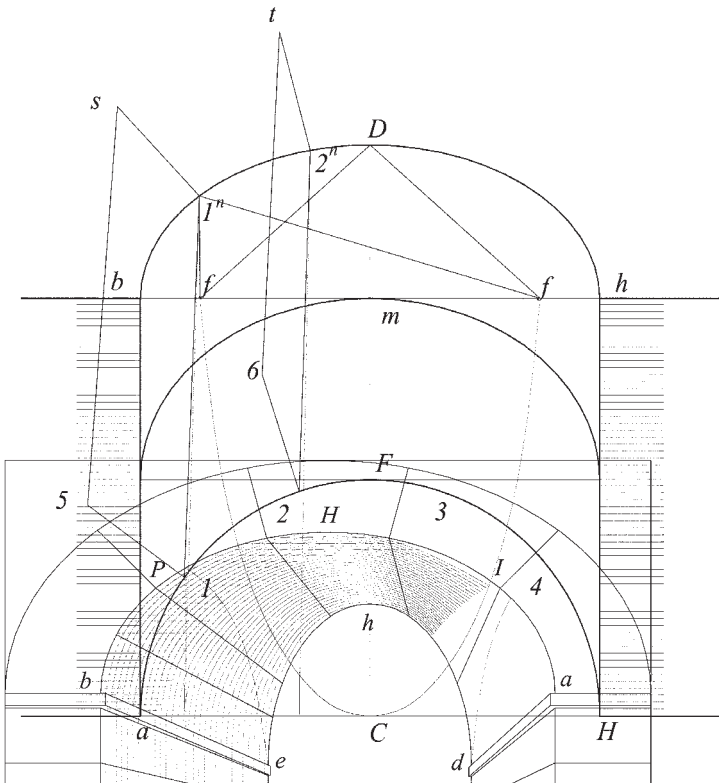


Fig. 233 esempio di volta conico-cilindrica.

Corollario II.

L'ARRIERE-VOUSSURE DI MARSIGLIA ORDINARIA.

Se si suppone che il passage ébrasé, rappresentato in prospettiva nella Fig. 231, sia intersecato su ciascun lato da un piano verticale passante sull'arco bHa, questi due piani verticali ritaglieranno su questo passage una parte di superficie curva, compresa tra quattro linee curve, cioè per il semicerchio o semi ellisse ebd, per l'arco pHi che è una parte arbitraria del sesto bHa, e per altre due curve pe e di.Questa porzione di superficie forma quella di una arrière –voussure che chiamiamo col nome di Marsiglia, perché si dice che la prima ad essere eseguita lo è stata in una delle porte di questa città.

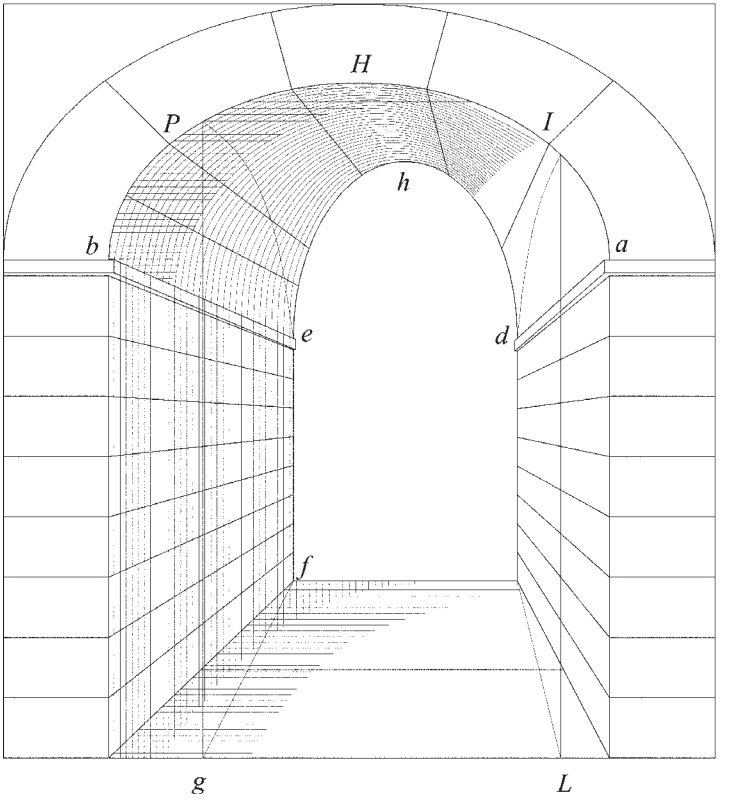


Fig. 231 prospettiva del passage èbrasè.

Abbiamo parlato di una simile arrière-voussure trattando le volte coniche, dove abbiamo dato il nuovo metodo per farle regolarmente in porzione di cono scaleno, adesso la consideriamo seguendo l'uso consueto, come una porzione di superficie irregolare, che non può essere esattamente conica perché si vede che le curve ep e di che dovrebbero essere delle porzioni di iperboli, sono degli archi di cerchio o almeno delle porzioni dell'arco ehd, di qualche curva che questo forma, eccone la ragione.
L'infisso di falegnameria che dobbiamo applicare in due ante all'arco ehd, quando la porta è chiusa deve trovare lo stesso spazio tra i punti h

e p per potersi aprire affinché ogni anta, quando è aperta possa applicarsi sul suo piedritto rappresentato dal piano verticale fe pg e diL, come si vede più distintamente nella Fig. 236, disegnato in prospettiva in Abba, EDde.

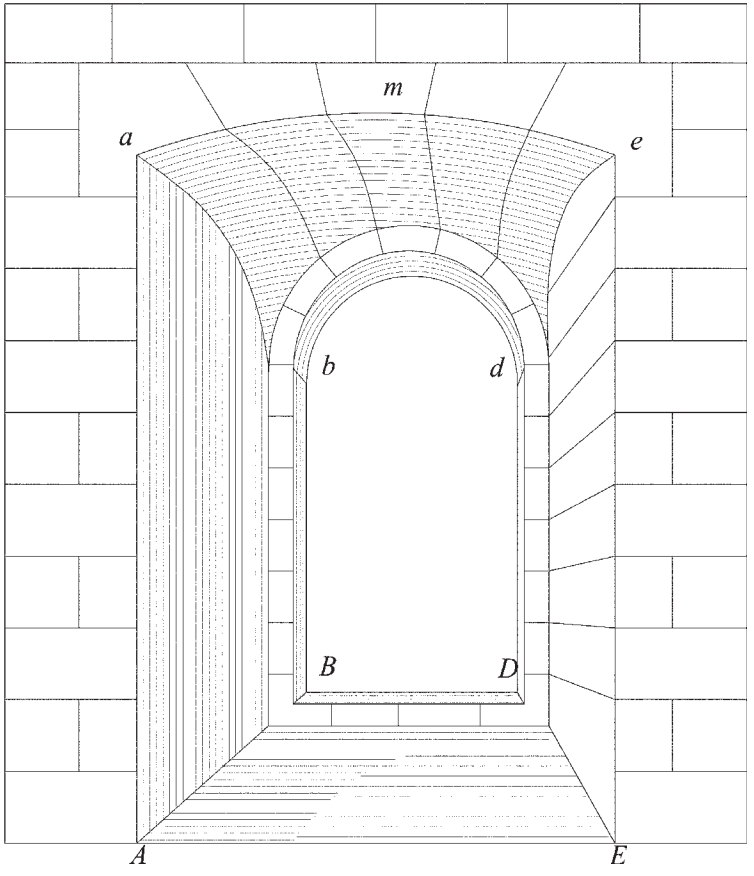


Fig. 236 altro esempio di passage èbrasè.

Sia (Fig. 235) il trapezio ABDE il piano orizzontale dell'apertura che si vuole voltare con l'arrière-voussure di Marsiglia, la cui battuta è BL

Dal punto C centro di bd=BD preso come centro, descriveremo un semicerchio o un semi ellisse bHd, che divideremo nei suoi conci, qui per esempio in 5 nei punti 1, 2, 3, 4, per i quali tracceremo i giunti dal centro C indefiniti come nelle volte cilindriche; poi avendo riportato la base del piedritto BA su BD in bF, tireremo su da questo punto una perpendicolare FG, che intersecherà l'arco bHd nel punto G, per il quale

condurremo aGe parallela a EA che incontrerà Aa perpendicolare su AE nel punto a, e la sua parallela Ee nel punto e; poi dopo aver preso sulla linea intermedia CH prolungata un punto m a piacere, tracceremo l'arco di cerchio ame per i tre punti dati.

.

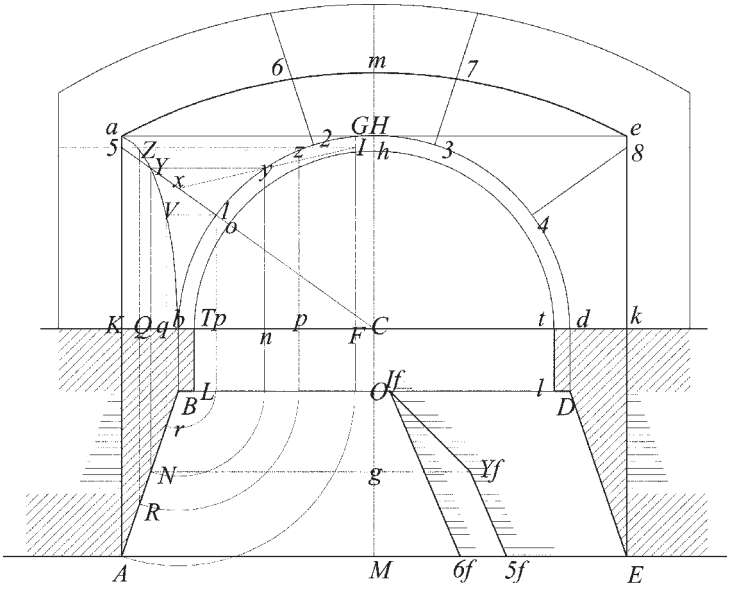


Fig. 235 L'arriere-voussure di Marsiglia ordinaria.

Tutti i joins de lit [8] della doele che intersecheranno questo arco come 2°6, 3°7 saranno le linee rette,e tutti quelli che intersecheranno lo spigolo del piedritto ak o ek saranno una piega con angolo rientrante, poiché il piano del lit interseca due superfici diverse, l'una curva dell'arrière-voussure, l'altra piana del piedritto.

Principalmente bisogna cercare la proiezione verticale dell'arco b12G, sulla strombatura del piedritto in aYb, o soltanto il punto Y di questa proiezione, per cui passa il piano del lit o5.

(Fig.240 vedi planche 64) Tracceremo dal punto b o B una parallela alla verticale CH, che intersecherà il giunto 1°5 nel punto x; per il punto 5 condurremo la linea 5I parallela a BD o ae, che intersecherà la verticale GF nel punto I, per il quale e per il punto x tracceremo la linea inclinata Ix, che intersecherà l'arco b12G nel punto y, per cui condurremo l'orizzontale indefinita yY, e l'ortogonale yn che darà la cadente bn, che riporteremo sul piedritto AB in BN; per il punto N condurremo una parallela alla verticale Aa, che intersecherà l'orizzontale yY nel punto Y che stiamo cercando, che si trova sull'arco ellittico aYb, dove c'è la piega del giunto 1°5 o 0°5.

[8] linea di divisione dei conci, divisioni longitudinali della doele, per indicare la superficie inclinata di una pietra inserita in una volta si dice invece lit en joins.

Potremo trovare molti altri punti di questo arco ellittico aYb se lo si vuole descrivere esattamente con lo stesso metodo, per esempio, i corrispondenti dei punti 1 e 2, portando le loro cadenti bp, bP su BA in Br, BR, e tracciando per i punti r e R le verticali Rz, rV, che intersecheranno le orizzontali z2, V1 nei punti z e V; la curva azYVb sarà la proiezione verticale dell'arco bG sulla strombatura del piedritto, che può essere usata per l'applicazione della trattazione sulla pietra.

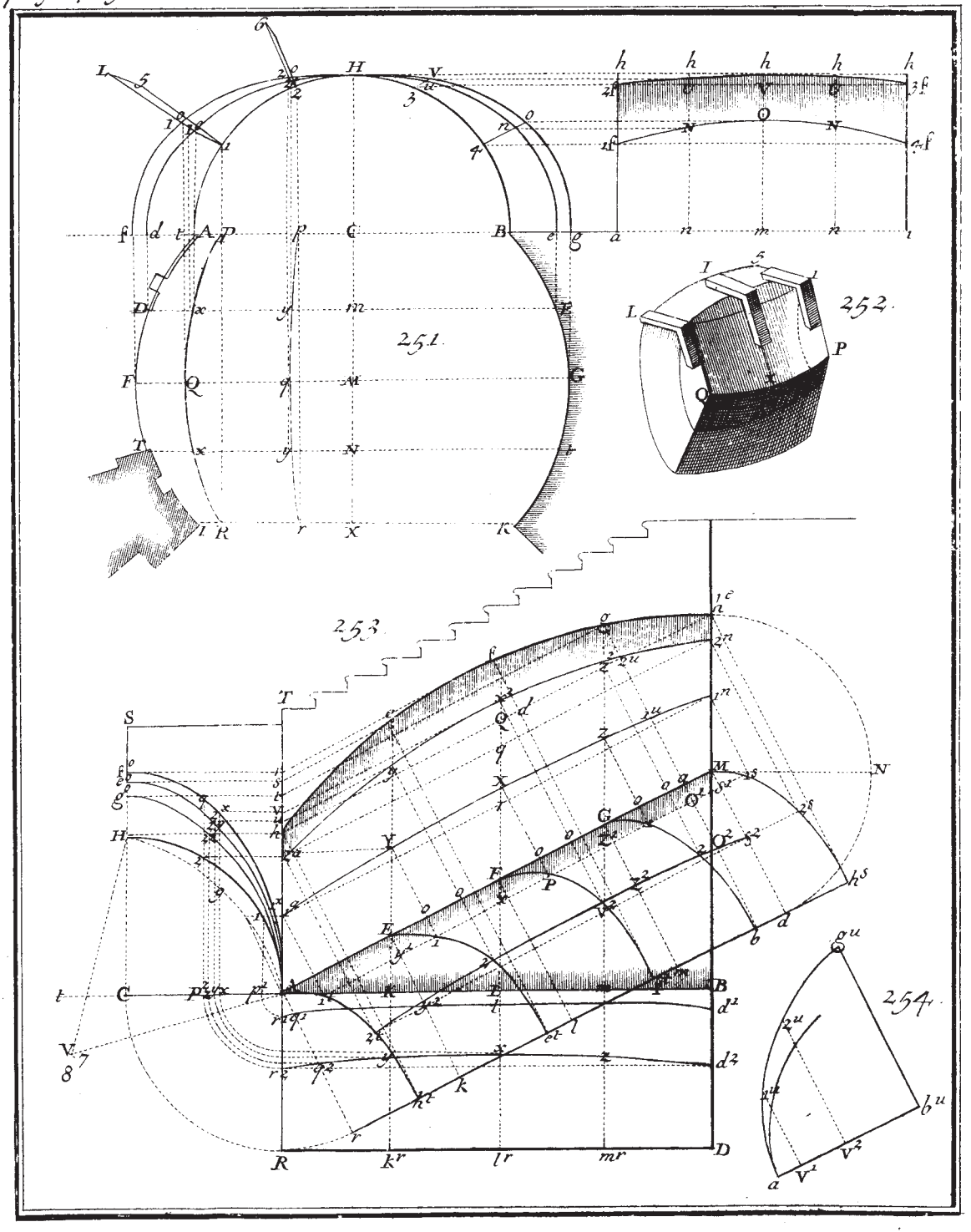
Adesso ci resta solo da tracciare i panneaux di lit 1°5, 2°6 per il primo che forma una piega, tracceremo per un punto C preso a piacere su bd una perpendicolare CM che intersecherà BD in O, e AE in M; prenderemo OIf uguale alla battuta BL, poi avendo condotto per il punto Y una verticale YN che incontrerà la base del piedritto BA in N, tracceremo l'orizzontale NYf indefinita che intersecherà CM nel punto 9, sulla quale riporteremo la lunghezza della parte oY dal giunto 1°5, o 0°5 in 9Yf, e tracceremo la linea IfYf; poi, riportando tutta la lunghezza dal giunto 50 in M5f su AE, tracceremo la linea Yf5f; il contorno tCOIfYf5fE sarà quello del panneau del primo lit 0°5, e del suo eguale 4°8.

Gli altri panneaux di lit che si arrestano sull'arco ame sono più semplici, supponendo la stessa base di profilo per la cornice, e la battuta in COIf, riporteremo la lunghezza 2°6 su ME in $M6_f$, poi tracceremo la linea inclinata If6f; il contorno tCOIf6fE sarà quello del secondo pannello di lit 2°6, e del suo eguale dall'altro lato della chiave 3°7.

Dopo aver tracciato questi panneaux, l'applicazione della trattazione alla pietra si farà nello stesso modo che si è detto a pagina 285 per quella della stessa arriere-voussure più regolarmente conica.

page 469

Pl. 66.



Problema xxv

FARE UNA VOLTA CILINDRICA SFEROIDALE.

IN TERMINI DELL'ARTE

FARE UNA SPECIE DI VOLTA A BOTTE, IL CUI CONCIO DI CHIAVE E LE CUI IMPOSTE SIANO DI DIFFERENTE NATURA, L'UNO RETTO, LE ALTRE CURVE.

Abbiamo visto dal disegno precedente, che si può fare una volta le cui imposte siano rette e convergenti; ma di cui tutte le altre linee dei giunti e di linee simili sul paramento interno della volta tendenti al punto in cui concorrono le imposte, si curvano quanto si elevano, visto che quella del concio di chiave è la più concava.

Da qui segue che possiamo fare ancora la stessa cosa, quando le imposte concorrono ad una distanza infinita, cioè quando queste sono parallele tra loro.

Possiamo fare ancora a questa figura di intradosso una modifica, facendo fare ai corpi cilindroidi di cui è fatta, un quarto di rivoluzione intorno al suo asse, allora le linee rette delle imposte si disporranno dove era il concio di chiave, senza che la volta subisca altri cambiamenti oltre a quello della disposizione delle sue parti, considerate rispetto all'orizzonte; rispetto alla quale situazione distinguerei questa sorta di volte in due specie, l'una in cui il concio di chiave è retto e le imposte curve, l'altra in cui l'imposta è retta e il concio di chiave curvo.

PRIMO CASO
Volta a botte irregolare, le cui imposte sono curve e il concio di chiave retto.

Sia (figura 251a) il quadrilineo misto ABKI, la proiezione orizzontale di una volta, i cui lati AB,IK sono retti, e AI,BK curvi concavi, il quadrilineo essendo diviso dalle linee per il centro CX,FG, è uniforme in ciascuno dei suoi quarti ACMF, BCMG, ecc.

Su AB preso come diametro del centro primitivo, avendo descritto il semicerchio AHB, riporteremo le distanze dalla linea di centro, MF, MG in Cf, Cg, da una parte e dall'altra del punto C, e così per le lunghezze mD, mE, in Cd, Ce, supponendo DE parallela ad AB, e distanziata a piacere, per esempio alla metà di CM.
Sulla linea fg presa come asse maggiore di un'ellisse, e CH come metà di quello minore, tracceremo il semiellisse fHg, che è il più grande di tutto il sesto, nello stesso modo su de preso come asse maggiore, e il doppio di CH come asse minore, tracceremo il semiellisse dHe dentro questi sesti, ne potremo tracciare di simili quando si giudicherà conveniente, per la comodità e l'esattezza della costruzione.
Divideremo poi ciascuno di questi sesti in uno stesso numero di parti uguali tra di loro, per formare tanti conci quanti se ne necessitano, per esempio qui in cinque nei punti A,1,2,3,4,B per il circolare f,1^{O},2^{O},V,o,g, per il grande ribassato d, 1^{e},2_{e}, u, ne per il medio ribassato, e per questi punti tracceremo le curve 4no, 3uV che saranno le proiezioni verticali, in sezione a ciascuno delle divisioni longitudinali dei conci da una parte, e le loro uguali 1,1^{e},2,2^{e}, dall'altra, le quali sono sempre più curve più si avvicinano all'imposta Bg, e sempre più rette man mano che i letti di posa si avvicinano alla chiave H, il cui centro è perfettamente retto; queste curve servono per la formazione delle teste dei conci, per mezzo della squadratura.

A questo punto dobbiamo tracciare nello stesso modo quelle dei joins de lit[1] della doele[2].

Sul diametro AB prolungato, riporteremo le profondità della volta espressa da CX con le sue divisioni MN in ai, e per i punti a,n,m,n,i, alzeremo da questo le perpendicolari indefinite ah,nh,mh,ih, per i punti delle curve di testa di cui abbiamo parlato 4,n,o,3,u,V, e il vertice H, condurremo delle orizzontali parallele ad AB, che intersecheranno le verticali ah,ecc. in punti che saranno sul contorno delle curve che cerchiamo, le quali saranno ripetute da una parte e dall'altra nello stesso modo in senso contrario, dalla linea per la metà mh; così l'orizzontale passante per il punto 4, darà i punti d'intersezione 1^{f},4^{f}; il punto n darà i punti N e N, e il punto o, quello di centro O, la curva 1^{f}NON4^{f}, sarà quella del primo letto di posa dell'intradosso.

Con lo stesso metodo i punti 3,u,V, del profilo di testa daranno la curva 2^{f}UVU3^{f} per la seconda base della pietra di una doele[3a].

Visto che le proiezioni verticali dei letti di posa di testa e di intradosso sono curve, da qui segue che anche le proiezioni orizzontali dei giunti dell'intradosso lo saranno; è per questo che bisogna cercarle piuttosto come quelle d'intersezione, per mezzo dei punti del profilo dell'intradosso, da dove tireremo giù le perpendicolari su AB, che prolungheremo fino all'incontro con le sue parallele DE, FG, Tt, IK. Così la verticale condotta dal punto 1, darà i punti P e R, quella che sarà tirata giù dal punto 1, darà i punti x e x, all'intersezione con le linee DE, Tt,e quella che sarà tracciata dal punto 1^{o}, darà sulla linea alla metà FG il punto Q, la curva PxQxR sarà la proiezione orizzontale della prima linea di divisione dei conci. Quella del secondo pqr si troverà nella stessa maniera, la quale come si vede è molto meno curvata della precedente, perchè si avvicina a questa proiezione dal centro del concio di chiave CX, che è perfettamente ortogonale al piano orizzontale così come la verticale in hhh.
Poichè tutte le proiezioni delle linee di divisione dei conci sono curve, ne consegue che le costole dei giunti in opera sono delle curve a doppia curvatura, che non si possono fare con la semplice squadratura, attraverso la preparazione di superfici piane, ma con la preparazione di una superficie cilindrica, e con sagome[3] flessibili, come è stato detto nel terzo Libro pagina 311[4].

APPLICAZIONE DEL DISEGNO ALLA PIETRA
Sia,per esempio, proposto di fare il primo concio, la cui proiezione orizzontale è il quadrilineo misto APQF. Avendo predisposto un paramento per fare da letto di posa orizzontale, ci applicheremo il panneaux[5] formato sull'èpure[6] APxQFDA, di cui tracceremo il contorno su questo letto di posa, poi sbozzeremo la pietra a squadra seguendo la curva PxQ, formando così un pezzo di torre cava, nella quale alzeremo

sui punti di riferimento PxQ, le perpendicolari al letto diposa orizzontale parallele tra loro, sulle quali riporteremo le altezze delle cadenti 1P, 1^{e}A sulla metà x e 1^{o}t sul punto Q, le quali altezze daranno i punti per i quali tracceremo con un regolo pieghevole lo spigolo del letto di posa superiore.
Prenderemo il concio a strapiombo e di taglio P1^{o}5, con il quale sbozzeremo la pietra, per formare il letto di posa tenendo uno dei rami a strapiombo, e l'altro a squadra sullo spigolo, e con questo metodo formeremo una superficie convessa cilindrica, la cui proiezione è sottolineata sul profilo dalla curva 1,1^{e},1^{o}, o la sua uguale 4no, dall'altra parte.

Formeremo le teste con i conci misti xQF e xPA, per tracciarvi gli archi A1e f1^{o}, seguendo i quali la curva del letto di posa inferiore ADF, e lo spigolo trovato del letto di posa superiore, sbozzeremo la pietra per formare l'intradosso concavo della volta deformata, nella metà della quale applicheremo la sagoma dell'arco d1, sugli appoggi dati in D al letto di posa inferiore e in x a quello superiore, e la pietra sarà fatta.
USO
Benchè al primo sguardo sembra che ci sia qualcosa di bizzarro nella figura di questa volta, posso giurare che questa riesce molto bene in opera, con il modello che ne ho fatto per voltare i bracci rigonfi della croce greca, di una cappella di cui ho dato il disegno ad un Conte dell'Impero, che lo farà eseguire vicino al suo castello di Bockenheim nel palatino. Benchè eviti le occasioni di occuparmi d'architettura, ho eseguito questa con piacere, tanto d'aver obbligato un signore molto stimato da lui stesso, che mi onora con la sua benevolenza, a contribuire all'opera pia della riedificazione di un'antica cappella celebre nei dintorni e prima anche in Germania, che era diventata diroccata dopo le rivolte degli eretici.
Dopo che la provvidenza ha riportato questo signore in grembo alla Chiesa della religione dei suoi padri, egli segue le tracce dei suoi illustri antenati, che si distinsero non meno per la loro pietà, che per le grandi azioni che hanno reso loro uno dei primi ranghi nell'Impero da tempi immemorabili. Abbiamo a Landau una prova di ciò di cui parlo, poichè è al Signor Conte di Linange che il capitolo e la chiesa collegiale devono la loro fondazione da 470 anni circa.

SECONDO CASO INVERSO AL PRECEDENTE.
Volta a botte retta sulle imposte, e curva sotto la chiave di volta.

Se si costruisse una volta a botte completa, cioè, che si estende da un'imposta alla sua opposta; dopo aver determinato la linea curva del sesto, di ciascuna delle sue teste a piacere seguendo l'esigenza dell'opera, bisognerebbe determinare nello stesso modo a piacere seguendo l'occorrenza la linea curva, che determina la concavità a metà della chiave di volta al di sopra del lato retto di un cilindro inscritto in questa volta a botte irregolare sulla stessa base. Poi bisognerebbe diminuire questa curvatura poco a poco scendendo fino alle imposte dove questa si deve raddrizzare totalmente, e confonderla con i lati del cilindro inscritto.Poichè questa figura della volta è d'uso in architettura solo per le scale sospese e a riposo, dove questa è messa in opera solo per metà, da un imposta fino alla chiave, il resto rimane vuoto, e dove è anche più spesso rampante che orizzontale, scegliamo questo caso d'uso per esempio di disegno, che consiste in:
Fare una Semivolta a botte Rampante retta all'Imposta, curva sotto la Chiave di volta.

Sia, (figura 253a) il parallelogramma rettangolo ABDR, la proiezione orizzontale della semi volta a botte, di cui l'imposta rampante è AM, terminata in M dalla verticale BM, data per altezza della rampa di Avendo prolungato BA verso C, e determinata la natura del sesto preso obliquamente[7] montante a quarto di cerchio o d'ellisse, o solamente ad arco minore di un quarto, riporteremo la larghezza AR in AC, per descrivere dal centro C, l'arco AH, per esempio un quarto di cerchio; condurremo da A la verticale RAT, e da C e M le parallele CS e Mh^{e}. Poi dal vertice H, tireremo l'orizzontale Hh, che intersecherà AT in h, da dove condurremo hh^{e} parallela ad AM, che intersecherà la verticale BM prolungata in h^{e}.

In seguito si traccerà la curva di convessità dal vertice hfh^{e}, come si giudicherà consono, la supporrei per maggior facilità un arco di cerchio tracciato dal punto D per centro,al fine che se questa volta raccorda in altezza un arco di chiostro, come spesso succede, non passino delle gobbe in h.

Dopo aver diviso il sesto tracciato obliquamente *AH* nei suoi conci, per esempio in tre uguali nei punti *1,2,H*, tracceremo per i punti *1* e *2* le orizzontali, che intersecheranno la verticale *AT* nei punti *1^{a},2^{a}*, per i quali condurremo le parallele alla rampa *AM*, che daranno su *Mh^{e}* i punti *1^{n},2^{n}*;queste linee rette saranno le corde degli archi delle divisioni della pietra, la cui curvatura deve diminuire insensibilmente, nella misura in cui questi si avvicinano all'imposta *AM*, che diventa infine una linea retta.

Per trovare i punti di queste curve, che sono le proiezioni verticali delle linee di divisione dei conci, i cui spigoli devono essere in opera a doppia curvatura, bisogna dividere la rampa *AM* in tante parti uguali quante se ne vogliono dai punti di ciascuna di queste curve, per esempio in quattro nei punti *E,F,G*, per i quali tireremo su altrettante verticali parallele a *TR* che intersecheranno l'arco dato per la chiave di volta *hfh^{e}*, nei punti *e,f,g*, e la proiezione orizzontale nei punti *h*[r8] ,*l^{r}*, *m^{r}*.

Per i punti *e,f,g*, condurremo le parallele alla rampa *AM*, che intersecheranno la linea *AT* nei punti *r,s,t*, per i quali condurremo le orizzontali *rf^{o}*, *se^{o}*, *tg^{o}*,le cui intersezioni con la verticale *Cs* nei punti *f^{o},e^{o},g^{o}*, daranno i vertici di ciascun quarto di ellisse, che deve essere la sezione di ciascuno dei piani passanti verticalmente per i punti dati *E,F,G*, e perpendicolarmente alla direzione dell'asse della volta a botte.

Così le linee *Cf^{o},Cc^{o},Cg^{o}* essendo state raddoppiate, saranno gli assi maggiori di questo ellisse, e *CA* la metà dell'asse minore comune a tutte, visto il Problema VII del secondo libro[9], potremo descrivere i quarti degli ellissi *Af^{o},Ae^{o},Ag^{o}*, che divideremo ciascuno nello stesso numero di parti uguali tra di loro in cui abbiamo diviso il cintre primiti *fAH*, e dato che tutte le circonferenze di questi quarti degli ellissi sono disuguali, le loro divisioni in conci nello stesso numero saranno anche queste tutte disuguali, come si vede di profilo nei punti *2,2^{z},2^{y},2^{x}*, i quali serviranno per trovare la proiezione orizzontale delle divisioni longitudinali dei conci, se si vuole anche la loro proiezione inclinata sul piano della rampa *AM*.

Per trovare i punti della loro proiezione orizzontale, non resta che abbassare da questi stessi punti le perpendicolari su *AC*, che intersecheranno nei punti p^2,*z*,*y*,*x*, dove ci saranno le loro cadenti, le quali saranno condotte sulle orizzontali corrispondenti, *Ax*, proveniente dal punto 2^x dell'arco Af^o, sulla linea Fl^r dal punto *L* in *x*, la cadente *Ay* proveniente da 2^y dell'arco Ag^o su Gm^r da *m* in *z*, e per i punti r^2yxzd^2, tracceremo la curva che sarà la proiezione orizzontale della seconda linea di divisione della pietra.

Tracceremo con lo stesso metodo quella del primo letto di posa r^1ld^1, che servirà per tracciare i conci nella squadratura consueta.

Adesso, se per riguardo nei confronti della pietra, vogliamo tracciare la proiezione di queste stesse divisioni alla base del concio sul piano della rampa, bisogna operare diversamente.

Per tutti i punti *h*,*e*,*f*,*g*,h^e della curva di rigonfiamento, e per tutti i punti trovati dagli altri giunti 2^a,x^2,2^n,1^aX1^n, dove sono le intersezioni di queste curve con le verticali *eE*, *fF*, *gG*, tracceremo le perpendicolari su *AM*, le
quali essendo state prolungate intersecheranno il lato rh^s nei punti $h^t e^t f^t b$ *h*, che sottolineeranno i vertici di tutti i sesti trasversali, in proiezione sul piano inclinato della rampa; e per trovarne altri punti prenderemo le cadenti di divisione di ciascun sesto *Ax*, Ap^2, ecc. o ciò che è la stessa cosa, le distanze orizzontali $V2^x$,$u2^y$,ecc. che riporteremo sulle perpendicolari a *AM*, che corrispondono a queste divisioni, per esempio $V2^x$, che è nel sesto della metà per la seconda divisione in oV^2 proveniente dal punto x^2 della linea *fF*, e la distanza orizzontale $i1^x$ su *Xo*, prolungata in *OP*, la curva FPV^2f^t sarà a proiezione inclinata dell'arco ellittico, che è la sezione trasversale per la metà della lunghezza della volte a botte, così come delle altre, come mostra sensibilmente la figura; cosa che è così inerente ai disegni che abbiamo dato prima nel capitolo V^{10} per i disegni delle discese[11], che pare inutile di dettagliarne tutti gli altri esempi.

Queste curve sono necessarie per tracciare le teste dei conci, che sono a strapiombo; ma se li si volesse fare disposti perpendicolarmente alla rampa, o meglio fare delle sagome per forare l'intradosso, adatto ad essere messo perpendicolarmente alla linea della rampa *AM*, è chiaro che le curve di queste sagome saranno rappresentate sul piano inclinato, in proiezione delle linee rette, visto che ci vuole un'operazione a parte per descriverne il contorno.
Sia, per esempio una di queste sagome che si vuol fare, passante per il punto *g*, presa piacere.
Tracceremo per questo punto una perpendicolare *ga* su *AM*, la quale essendo prolungata, intesecherà le curve di proiezione 1^t 1^t 1^s, e 2 $^tV^x$ 2^s nei punti o^1 o^2, e la linea retta h^th^s, nel punto *b*.
Riporteremo da una parte (figura 254) la linea ab con le sue divisioni o^1 o^2 in ab^u,V^1, V^2 per i quali tireremo su le perpendicolari V^1 1^u V^2 2^u b^u g^u, che faremo uguali alle altezze delle divisioni, prese sulla proiezione verticale nei punti d'intersezione della linea *ga*, con le curve delle proiezioni verticali delle divisioni dei conci 1^u 2^u *g*, della figura 253 e per
i punti trovati 1^u 2^u g^u della figura 254 tracceremo una curva che sarà quella della sagoma che si richiede, o di una sezione di testa inclinata di un concio, che serve da intradosso trasversale.

Ho riportato come esempio per questo disegno un cintre primitif[12] a quarto di cerchio, da cui seguono dei sesti secondari a quarto di ellisse; ma visto che questa volta spinge nel vuoto nel suo vertice le sue due estremità, conviene spesso fare il cintre primitif minore del quarto di cerchio, o piuttosto parabolico; da questa ultima costruzione, ne segue che i sesti secondari sono tutti parabolici, le cui ampiezze si ricavano con lo stesso metodo dei quarti di ellisse, e che possiamo descrivere con il Problema X del secondo libro[13].

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA
Poichè le superfici delle volte sono necessariamente diverse da quelle che si fanno inizialmente regolari, conviene avvicinarle il più possibile, ed è per questo che tra le curve date, per i due sesti obliqui, in salita e in discesa, abbiamo determinato una serie di quarti di ellisse, che termina in basso sull'imposta data, e in altezza è indicata dai punti di sezione, presi a piacere sulla curva di sommità, che è anche questa data, e poichè le divisioni dei conci apparenti devono dividere l'intradosso in parti sempre proporzionali, affinchè gli intervalli dei conci si allarghino, e si restringono in modo uniforme, abbiamo diviso le circonferenze delle sezioni prese a piacere, in uno stesso numero di parti aliquote, le quali sono sempre una serie che si allontana dalla linea retta , da ciò risulta che gli spigoli dei letti di posa dell'intradosso sono della curve a doppia curvatura, poichè le loro tre proiezioni, la verticale di sezione in lunghezza, quella di profilo di traverso, e quella del piano orizzontale, sono ciascuna curvate differentemente.
A questo punto il disegno per spigoli simili non può essere accennato se non per mezzo della supposizione di una superficie cava cilindrica, formata su una delle tre proiezioni, come l'abbiamo spiegato nel terzo Libro a pagina 311 e nelle seguenti[14]. Il resto di questa volta rampante è relativa alle rampe di discesa, di cui abbiamo a lungo parlato alla fine del quinto capitolo.

APPLICAZIONE SUL DISEGNO DELLA PIETRA.
Poichè questa volta è a doppia curvatura come gli sferoidi, e gli spigoli dei letti di posa dei conci non sono piani, cioè in un piano, è chiaro che bisogna cominciare formando una superficie concava cilindrica, come abbiamo spiegato nel capitolo VII parlando delle volte sferoidi[15], e di recente nell'ultimo disegno; ma poichè questa volta s'inerpica, si può fare questa prima superficie cilindrica, o sulle curve della proiezione orizzontale come r^2 *x* d^2, r^1 *l* d^1, o su quelle della proiezione inclinata 2 $^tV^2$ 2, e 1^t 1 s^1.

Col primo metodo si perde molta pietra, perchè dopo aver operato come nel caso precedente, bisogna poi ritagliare le parti triangolari, l'una per esempio *AEK*, per un primo concio nel letto di posa inferiore, e l'altra 1^aY2^a nel letto di posa superiore.

Col secondo metodo ci sono ancora due parti triangolari da ritagliare del parallelepipedo *AY*, ma un pò meno che in quello precedente nel rapporto del triangolo *AEK* al suo opposto *YEO*, al quale è uguale quello dell'altra estremità *aiA*, se i giunti di testa sono a strapiombo, e non ci sarà che quest'ultimo, se si fanno le teste perpendicolari alla rampa; così si potrà scegliere quella che dei due metodi converrà meglio, seguendo le circostanze a strapiombo, o a squadra sulla rampa.
Fatta questa prima disposizione di sbozzatura, dopo aver forato un intradosso supposto a strapiombo come è stato detto nel disegno precedente, riporteremo in questa cavità le altezze delle cadenti delle estremità dei conci, e dalla metà per tracciarci con un regolo

lo spigolo del letto di posa superiore, e con il concio a strapiombo e di sezione, foreremo il letto di posa superiore convesso, e il letto di posa inferiore del concio seguente concavo, come conviene al dello stesso concio capovolto.

Il paramento cavo supposto verticale, ed essendo stati fatti letti di posa, tracceremo lo spigolo del letto di posa inferiore, portando le cadenti perpendicolarmente agli spigoli di testa del paramento cavo, nello stesso modo che abbiamo spiegato per la formazione dei conci della vite di San Giles, con la quale questa volta ha qualche rapporto, con questa differenza cioè che le teste non sono in sezione come nella vite, ma parallele tra di loro, come nelle volte a botte in discesa.

OSSERVAZIONE DEGLI ERRORI DEL VECCHIO DISEGNO
Gli autori del taglio delle pietre hanno fatto quattro errori nel disegno di questa volta.

Il primo consiste nel fare una sporgenza nella piega, all'origine del loro cintre primitif[16] sul piedritto, come lo si può ben vedere dalla loro costruzione; avendo elevato *CH* perpendicolare e uguale a *CA*, prendono l'intervallo *HA* per raggio di questo sesto, di cui cercano il centro d'intersezione degli archi *V7V8*, tracciati con lo stesso raggio *H* e *A*; così tracciando l'arco *A9H* dal centro *V*, è visibile che la verticale *AR*, che è il profilo del piedritto non gli è tangente, poichè il raggio *VA* è inclinato rispetto a questo di un angolo acuto *VAR*, di conseguenza questo arco fa gobba in *A*, dove è la sua origine.

Vediamo da questa costruzione, che al posto di un quarto di cerchio come ho fatto per esempio in *H2A* fanno un arco di 60 gradi; la loro motivazione è senza dubbio quella di diminuire la spinta del vertice, che spinge nel vuoto tra le due estremità. Ammetto questa motivazione, ma farò vedere come possiamo conciliare la regolarità dell'origine senza gobba, con questa motivazione di solidità per mezzo di un sesto parabolico, mentre sarà una questione delle volte composte dalla giunzione dei pennacchi, come capita alle scale sospese e a répos[17].

Vediamo da questa costruzione, che al posto di un quarto di cerchio come ho fatto per esempio in *H2A* fanno un arco di 60 gradi; la loro motivazione è senza dubbio quella di diminuire la spinta del vertice, che spinge nel vuoto tra le due estremità. Ammetto questa motivazione, ma farò vedere come possiamo conciliare la regolarità dell'origine senza gobba, con questa motivazione di solidità per mezzo di un sesto parabolico, mentre sarà una questione delle volte composte dalla giunzione dei pennacchi, come capita alle scale sospese e a répos[17].

Il *secondo errore* degli autori consiste, nelle proiezioni orizzontali che essi fanno delle divisioni longitudinali dei conci in linea retta,cosa che rende le divisioni dell'intradosso dei conci disuguali tra loro in ogni sezione verticale, perchè i quarti di ellisse o altre curve di queste sezioni, non essendo parallele a quelle del cintre primitif[18] *HA*, saranno ugualmente inclinate ad una stessa verticale, per esempio 2^xP, da cui segue che le divisioni non saranno delle parti aliquote uguali di ciascun sesto; poichè, se si prende per esempio *2q*, per una di queste verticali, che rappresentano il piano, la cui sezione longitudinale parallela all'asse, dà come proiezione delle divisioni dei conci una linea retta, è chiaro che la porzione f^bq è minore di f^b2^x, che è il quarto dell'arco ellittico *fA*; e contrariamente, se si prende questa verticale in 2^xP, è visibile che l'arco *HP* sarà più grande del quarto d'arco di cerchio *HA*: così per gli altri giunti.

Il *terzo errore* consiste, nel fatto che essi tracciano male le curve delle divisioni dei conci, considerati nella loro elevazione, come $1^aX\ 1^n$; $2^ax^22^n$, relativamente alla curva del vertice hfh^e, perchè essi dividono la distanza *fQ*, dal vertice *f* di questo arco dato alla corda hh^e, in uno stesso numero di parti uguali, che ci sono delle file dei conci, per esempio qui in tre per determinare la distanza di ciascun arco al di sopra della corda, per il numero di queste divisioni, di cui questa deve essere aumentata o diminuita; così l'intervallo *1X* della corda 1^a1^n al suo arco 1^aX1^n, è un terzo di *Qf* secondo gli autori; l'intervallo qx^2 della corda 2^a2^n al suo arco, e i due terzi di *Qf*, così del resto; ciò che dà loro occasione di tracciare degli archi circolari per tre punti dati, di cui fanno le linee di divisione, e che produce ancora evidentemente delle divisioni dei conci disuguali tra di loro, perchè queste distanze a sttrapiombo sono proporzionali alle frecce *fd*,ecc. di questi archi; le quali frecce non sono tra di loro per motivi matematici, né nel cerchio, né nell'ellisse; così è visibile che queste distanze dipendono dalla differenza delle altezze delle divisioni proporzionali degli archi f^b2^xA, e *H2A*.

Il *quarto errore* consiste nella natura delle curve, che essi fanno circolari, che non possono esserlo seguendo le divisioni delle file dei conci, né seguendo la natura dei corpi sezionati, che non è sicuramente di numero regolare, le cui sezioni per i piani paralleli tra di loro, in lunghezza o in larghezza sono circolari di conseguenza forzando i giunti a passare per degli archi di cerchio; essi non lo possono fare se non per mezzo dell'inflessione della superficie dell'intradosso, che devono causare delle irregolarità, comparabili a quelle delle onde dell'acqua agitata. Convengono che queste sinuosità non saranno molto sensibili, ma ci saranno realmente e senza alcuna necessità, poichè possiamo far meglio con altrettanta facilità di quella che si trova nell'esecuzione del vecchio disegno.

COROLLARIO
Dal Bonnet du Prete[19] , con direzione concava da una parte e dall'altra.

Abbiamo appena parlato di una figura che produrrà nella sua strombatura
un'apertura quadrata su un lato, e rotonda sull'altro come una finestra, o una rientranza di una volta, poichè le linee di direzione, tracciate dal quadrato interno al cerchio esterno sono rette; adesso supponiamo che queste linee siano curve come quarti di ellisse, più o meno allungati; in questo caso si formerà una superficie a doppia curvatura, che può essere molto utile per raccordare in una stanza quadrata, con un rinforzo della volta interna, una bordatura rotonda, o al contrario un'apertura, o una

Il disegno di una tale volta interna non sarà diverso da quello della volta di cui si è appena parlato, eccetto che per una composizione di quattro parti della stessa natura girate diversamente, sapendo che la loro origine e i loro vertici sono in piani orizzontali, l'uno sopra l'altro, invece di essere in piani verticali paralleli tra loro. Poi ognuno di questi quarti

dovrà essere chiuso tra dei piani verticai convergenti, su i quali potremo prendere i cintre primitifs[20], le cui diagonali saranno uno dei semi assi, e l'altezza sarà la solita uguale; queste volte interne sono molto adatte ad ornare un soffitto, per la varietà di passaggi delle figure dal cerchio al quadrato, o dal rettangolo all'ellisse che si troveranno raccordati gradevolmente.

IMMAGINI

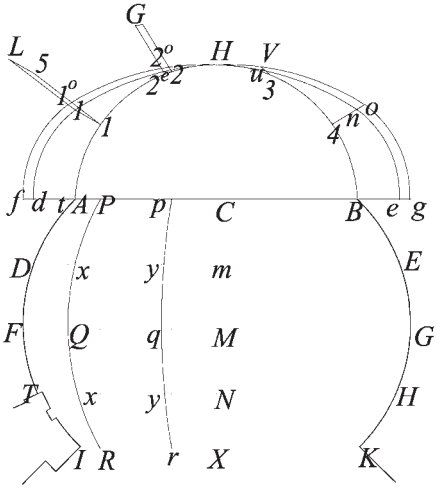


Fig.251a proiezione orizzontale della volta a botte

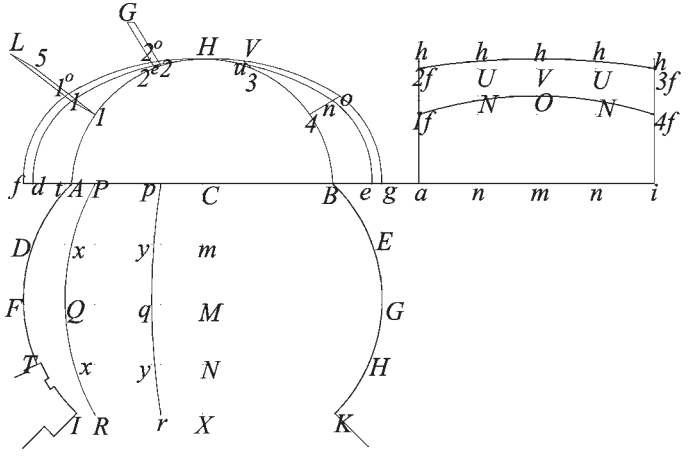


Fig.251b proiezione orizzontale e verticale dei giunti all'intradosso della volta

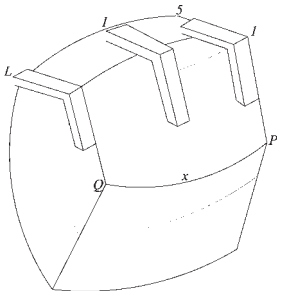


Fig. 252 realizzazione del concio in pietra all'intradosso della volta

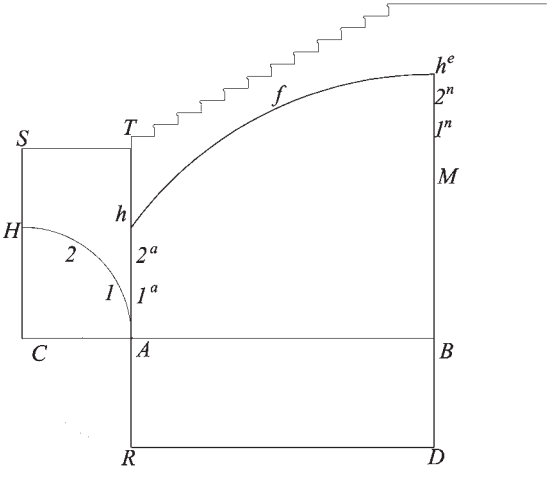
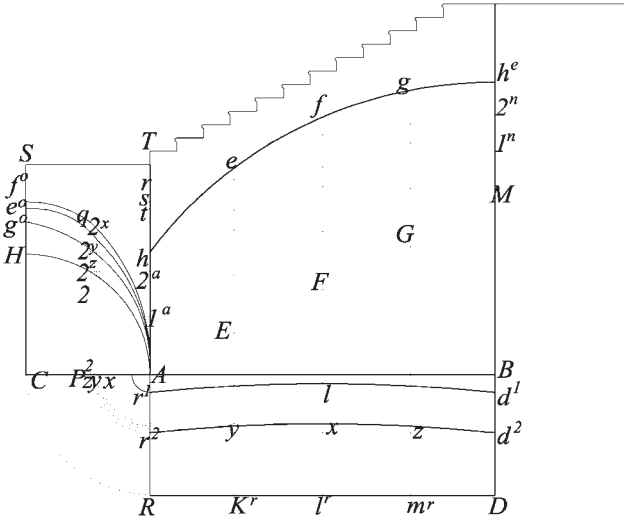


Fig.253a proiezione orizzontale della semivolta a botte retta all'imposta e curva sotto la chiave di volta.



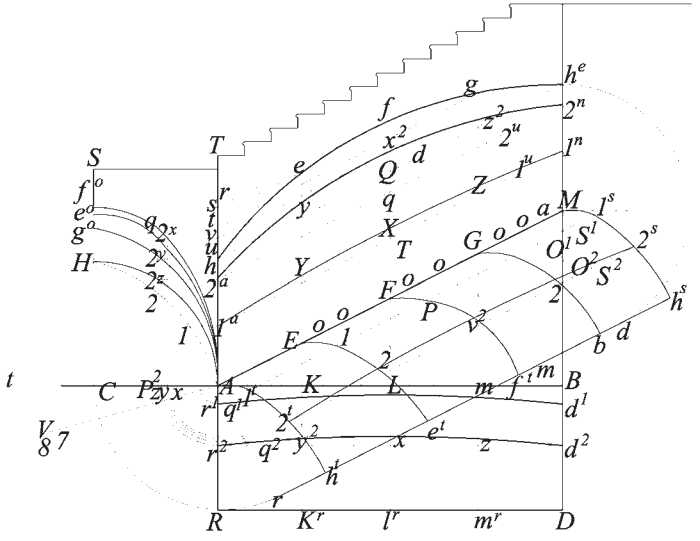


Fig 253c semivolta a botte retta all'imposta e curva sotto mla chiave di volta.

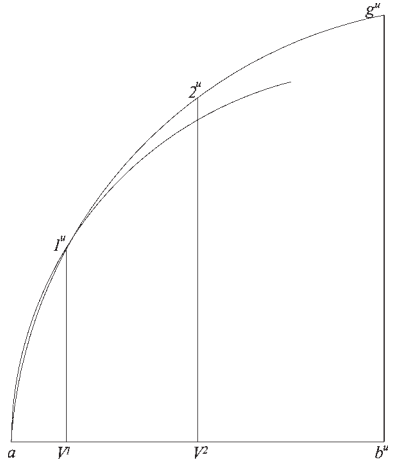


Fig.254 costruzione per la sagomatura dei conci

FOOTNOTES

[1] Linea di divisione dei conci, divisioni longitudinali della doele.

[2] Così è chiamato il paramento interno di una volta o di un concio incavato, genericamente tradotto con intradosso.

[3] Lett. pennaux, sono le sagome di una delle superfici di un concio, tagliate in legno o cartone, che saranno applicate sulla pietra per tracciare i contorni.

[4] Op. citata, Terzo Libro per la costruzione delle costole dei giunti in opera.

[5] Vedi nota 3.

[6] Disegno di una volta tracciato su un muro o su una tavola, della stessa grandezza dell'opera da eseguire per poter prendere le misure necessarie alla costruzione dei conci.

[7] Lett. cintre de face che assume il significato di disposto obliquamente.

[8] Il testo indica la lettera h mentre nel disegno è indicata la lettera K.

[9] Op. citata.

[10] Op.citata, riguardo alla realizzazione delle rampe di scale.

[11] Lett. discese, probabilmente riferimento alle rampe della scala.

[12] Indica il profilo della parte interna di una volta presa in un punto preciso.

[13] Op. citata, a riguardo della costruzione dei quarti di ellissi

[14] Op. citata, a riguardo della costruzione degli spigoli dei letti di posa.

[15] Op. citata, a riguardo delle volte sferoidi.

[16] Vedi nota 12.

[17] Lett. a riposo.

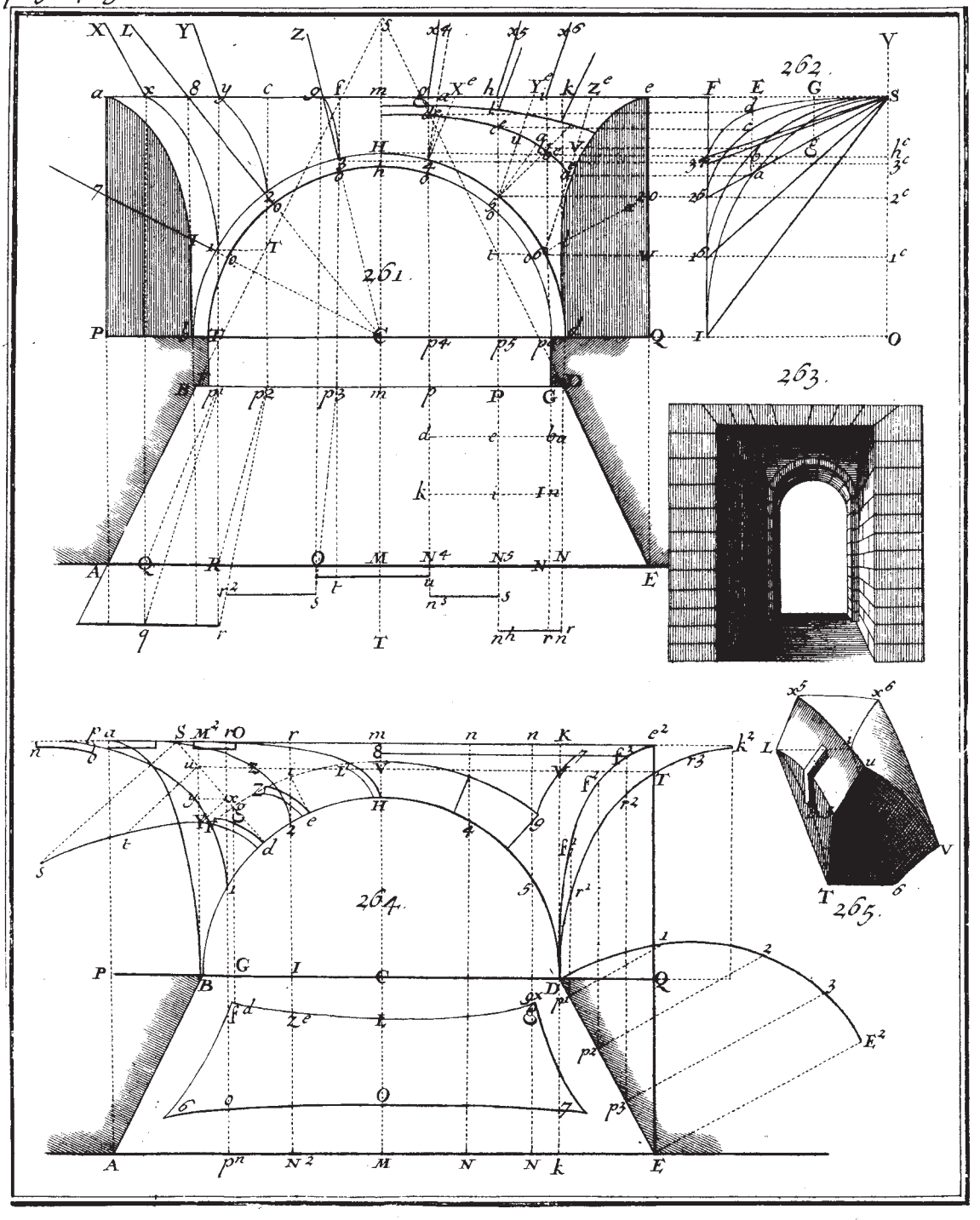
[18] Vedi nota 12.

[19] Letteralmente cappello del prete, forse si richiama la forma a calotta.

[20] Vedi nota 12.

page 489

Pl. 68.



COROLLARIO
Sulla volta posteriore di Montpellier

Rovesciando la volta di Panache, di cui noi tratteremo, con la strombatura o senza la strombatura, trasportando la base retta *AB*, della figura 245, dal Coronamento alla piattabanda, come nella ***figura 263A-B*** della tavola 68, e prendendo l'arco *GMD* orizzontale, per la base posteriore della volta, ruotato in posizione verticale, e più ristretto,si avrà la volta rappresentata in prospettiva alla ***figura 263A-B***, che Blanchard chiama "Volta posteriore di Marsiglia, cadente sull'angolo ottuso" e gli altri artisti, "Volta posteriore di Montpelier", che essendo fatta regolarmente, non differisce dalla "Panache" rovesciata, se non nel fatto che gli elementi di queste sezioni verticali devono essere dei quarti di ellisse, mentre la "Panache" è composta da archi di cerchio di differente numero di gradi, come li fa ancora lo stesso Blanchard, abbastanza a sproposito; noi ne diremo la ragione.

Nessuno degli autori del taglio delle pietre ha parlato di questa parte posteriore della volta. È stata soltanto menzionata nel libro del taglio del legno del falegname citato con il nome di cui sopra; tuttavia, da quando i nostri architetti si sono avveduti di fare, alle case degli individui, delle finestre a tutto sesto, che, non molto anticamente, si usavano solo nelle chiese, è diventato di moda per due ragioni, la prima, che la chiusura interiore della piattabanda lascia uno spazio più regolare sulla cornice del soffitto della camera, rispetto alla parte posteriore della volta di Marsiglia, o di Sant'Antonio, che lascia un quadriligno misto poco gradevole alla vista, se non è ornato da qualche scultura; la seconda, è che la strombatura superiore taglia una parte di questo spazio, che è scuro per l'opposizione della grande luce della finestra, e che raccorda bene la centinatura esterna con la piattabanda interna.

Senza cambiare niente alla superficie della *doele*[1] di questa volta posteriore, la possiamo eseguire in tre modi differenti attraverso la sola disposizione delle facce dei conci.

Con il primo modo (***Fig. 261A***) la possiamo fare perpendicolare alla circonferenza del battente, come in una botte e alla volta posteriore di Marsiglia, tali sono le giunzioni *1-7* e *2-8*; ma ne derivano due inconvenienti, l'uno che le teste (facce) dei conci diventano troppo larghe alla piattabanda e assai ineguali tra di loro nei rapporti delle tangenti; l'altro che i letti (facce) così disposti fanno degli spigoli troppo acuti verso il piedritto, come *a8L*, ciò li rende senza forza e facili a rompersi al taglio, in modo che è obbligatorio cambiarne la direzione.

Con il secondo (***Fig. 261C***) modo possiamo fare i giunti della *doele*[1] con piani paralleli alla direzione della volta, tali sono quelli le cui proiezioni sono espresse dalle linee p^4N^4, p^5N^5,p^6N^6, questo si può fare rompendone il letto (faccia) in due o tre parti, cioè, una perpendicolare alla piattabanda, l'altra poco inclinata di taglio al di sopra della piattabanda e la terza perpendicolare alla arcata del centro sul *tableau.*

Ma questa disposizione ha ancora i suoi inconvenienti.

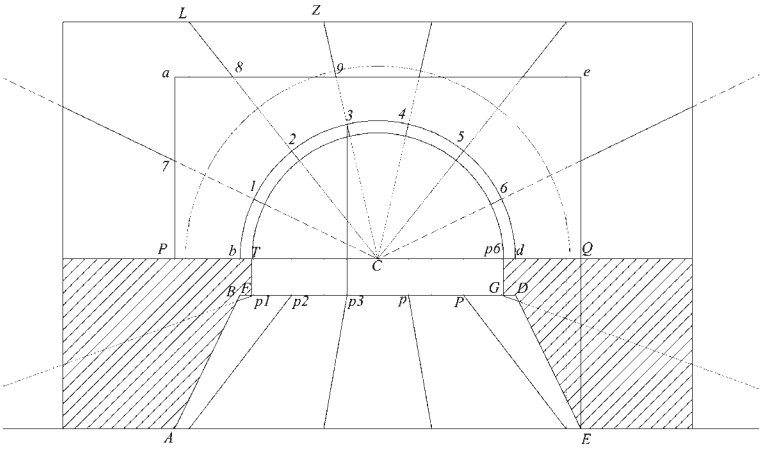


Fig. 261A - Costruzione della volta di Montepellier attraverso il primo metodo sopradescritto in cui le facce dei conci sono perpendicolari alla circonferenza del battente.

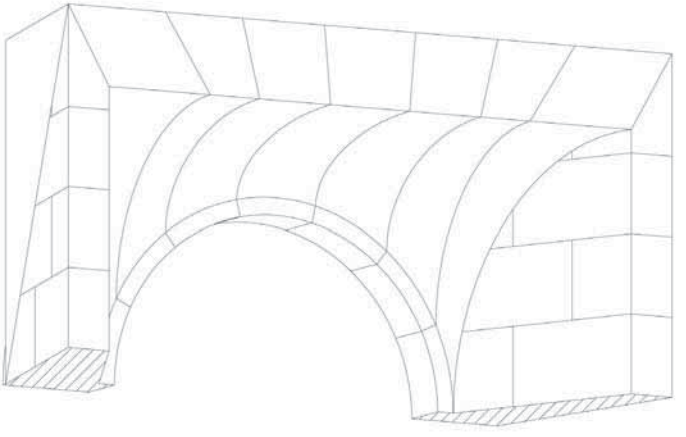


Fig. 263A - Rappresentazione assonometrica della volta di Montepellier attraverso il secondo metodo sopradescritto in cui le le direzioni dei giunti delle facce di letto sono parallele alla direzione della volta.

1- DOELE: dal latino dolium, botte, identifica il paramento interno di una volta o di un concio incavato, come la doga di una botte.

2- ERRORE DI TESTO: p^4N, p^5N,p^6N deve essere sostituito con: p^4N^4, p^5N^5,p^6N^6.

1° - Se facciamo le divisioni dal centro del battente uguali tra di loro, le larghezze delle teste (facce) dei conci alla piattabanda diventano troppo ineguali tra di loro, come si vede dalle teste *fg*, *gh*, *ik*, che vanno a diminuire nel rapporto tra i seni fino alla strombatura, aumentando al contrario tutto d'un colpo da *k* ad *e*, secondo più o meno la strombatura, ciò che getta una irregolarità sgradevole alla vista.

2° - Allorché le larghezze orizzontali dei conci diminuiscono verso gli archi secondo i rapporti dei seni, diventano all'improvviso ridicolmente piccoli, come si vede *ik* rispetto alla precedente *hi*; in modo che per conservare alle teste (facce) della piattabanda qualche apparenza di uguaglianza, bisogna abbracciare due teste del cerchio del battente *5-6*, *6-d*, per avere quello *hk* della piattabanda, circa uguali a *gh*.

3° - Infine ne risulterà ancora un terzo difetto, cioè che gli angoli misti dalla parte dell'imposta, come *56i* e *6dk*, diventano così acuti, che sarà impossibile formare una pietra senza romperla, in modo che bisogna toglierne la parte *6d*, per aggiungerla al cuscinetto, ciò lo possiamo fare per mezzo di una piccola porzione di taglio *6l*, che darà la parte *l6d* al di fuori della perpendicolare *kd* dell'imposta.

La terza maniera (***Fig.261E-F-G***)di disporre le giunture dei letti (facce) alla *doele*[1] è quella di farli su dei piani verticali diretti ad un punto *S* dell'asse *MS*, dove tendono le strombature dei piedritti prolungate come *ABS* e *EDS*, dunque per il punto *S*, e le proiezioni delle divisioni *1, 2, 3* date su *BD* in p^1, p^2, p^3, si tireranno le linee p^1Q, p^2R, p^3O, che taglieranno la proiezione della faccia *AE* ai punti *Q*, *R*, *O*, per le quali si condurranno le verticali *Qx*, *Ry*, *Og*, che taglieranno la piattabanda ae ai punti *x*, *y*, *g*, dove si faranno le divisioni delle teste dei conci, per le quali si tracceranno da un punto *M*, preso a piacere come centro di taglio, i giunti di testa *xX*, *yY*, gZ^3.

Questa maniera è più bella della precedente perché distribuisce su ciascun concio una parte della strombatura, che si trovava tutto intero al primo *DNE*; ma non toglie le imperfezioni degli spigoli troppo acuti verso le divisioni *1* e *2*; in modo che si avrà sempre una porzione di taglio in *o1*, *o2*, *o3*, dentro al battente, e la prolunga all'esterno, come conviene alla larghezza della cornice o dell'archivolto; ciò obbliga lo scalpellino a fare una sporgenza nel letto (faccia).

Noi andiamo a parlare in particolare di ciascun di questi metodi, tralasciando il primo a causa dei suoi difetti, veniamo a parlare del secondo.

Dato (***Fig.261B-C-D***) il trapezio *ABDE*, il piano orizzontale della Baye che vogliamo incurvare; siano *BF* e *GD* i battenti dove dobbiamo mettere l'infisso in legno, e *FT* e Gp^6 i montanti.

Si descriverà su *bd*, con diametro uguale a *BD*, il semicerchio *bHd*, e il suo parallelo per il battente Thp^6. In seguito si disporrà sopra a piacere l'orizzontale *ae* all'altezza della piattabanda interiore, che sarà delimitata in *a* e *b* dalle verticali *aA*, *eE* tirate per i punti di strombatura *A* e *E*.

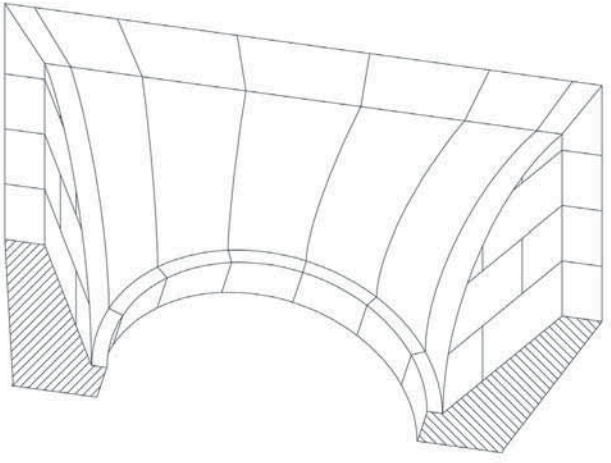


Fig. 263B - Rappresentazione assonometrica della volta di Montepellier attraverso il terzometodo sopradescritto in cui le le direzioni dei giunti delle facce di letto sono fatte su dei piani verticali diretti ad un punto S.

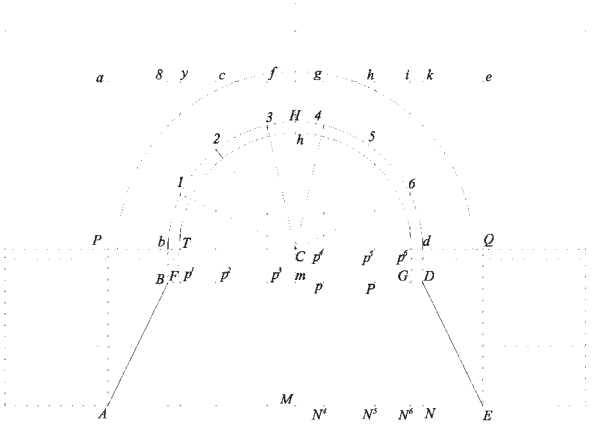


Fig. 261B - Costruzione della volta di Montepellier attraverso il secondo metodo sopradescritto in cui le le direzioni dei giunti delle facce di letto sono parallele alla direzione della volta.

Poi avendo diviso il centro primitivo *bHd* nei suoi conci, per esempio in sette parti *1, 2, 3, 4, 5, 6*, si tracceranno per questi punti le perpendicolari alla base di elevazione *PQ*, che taglieranno la piattabanda *ae*, ai punti *8, y, c, f, g, h, i, k*, per i quali si tracceranno i giunti della piattabanda da un punto *M*, preso al vertice di un triangolo equilatero, che ha per lato la lunghezza della piatta banda *ae* (come è stato detto al problema VII).

Adesso, se si tracciano le sezioni del cerchio *bHd* dal centro *C*,

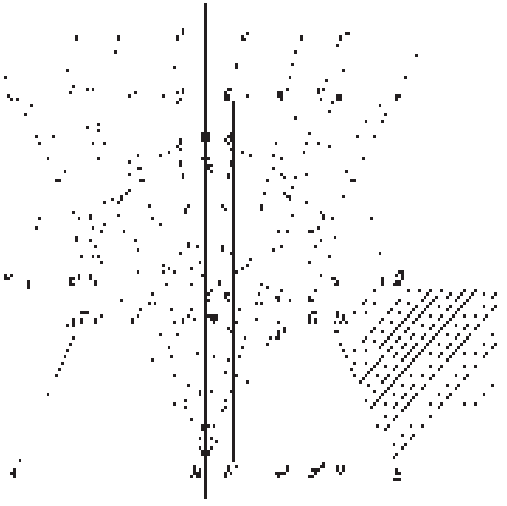


Fig. 261C - Costruzione della volta di Montepellier attraverso il secondo metodo sopradescritto in cui le le direzioni dei giunti delle facce di letto sono parallele alla direzione della volta.

come conviene naturalmente al cerchio a tutto sesto, avremo le linee *4a*, *5a*, *6a*, che non saranno per niente parallele alle sezioni della piattabanda, gx^4, *lx*, *ix*, di conseguenza i letti che passano per queste linee, non saranno delle superfici piane, ma sghembe tanto più che si allontaneranno dalla chiave, ciò che si dovrà evitare, per le ragioni che abbiamo addotto parecchie volte; in modo che conviene fare questi letti in due parti piane, l'una che comprende soltanto il *tableau* e il battente e l'altra che si stacca dalla precedente per una rientranza o sporgenza interiore, che non può sembrare che all'estradosso, che non è mai visto in opera.

Per non sentire la necessità, non resta che tracciare per i punti *6* e *5*, (per esempio) le linee *5u*, *6V*, parallele alle sezioni della piattabanda gx^3, *lx*, *ix*, e si vedrà che la sezione del cerchi circolare sarà falsa e difforme, se la faccia esteriore è visibile, gli angoli della sezione al *tableau* *45u*, *56V* saranno così acuti che non si potranno conservare nel

3- ERRORE DI TESTO: gx, lx, ix, devono essere sostituite con gx^4, hx^5, ix^6

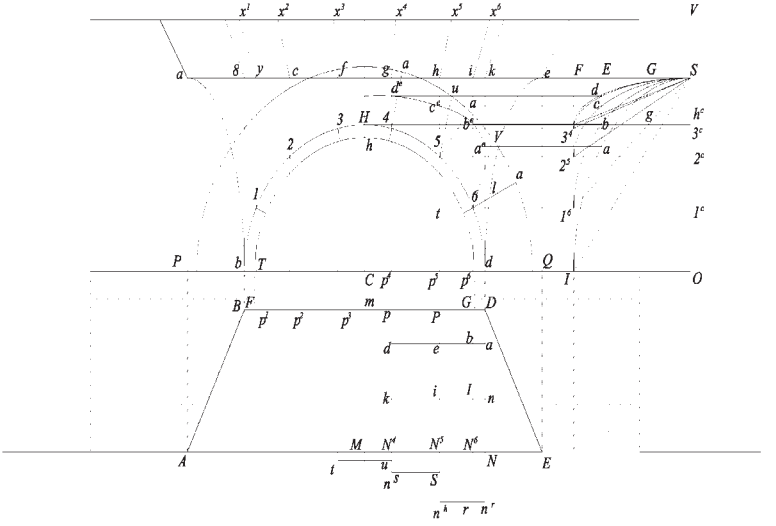


Fig. 261D e 262 - Costruzione della volta di Montepellier attraverso il secondo metodo sopradescritto in cui le le direzioni dei giunti delle facce di letto sono parallele alla direzione della volta.

tagliarli, e che sebbene posti in opera saranno senza forza e esploderanno inevitabilmente con il carico.

Essendo determinate le direzioni delle sezioni ed essendo date anche quelle dei letti parallele alla linea di centro *MC*, si trovano le curve delle giunture, cioè degli spigoli degli stessi letti alla *doele*[1], che sono delle sezioni di piani verticali espressi dalla proiezione per le linee p^4N^4, p^5N^5 etc, parallele tra di loro, e alla direzione del centro *MC*, dalle cui sezioni, esso non ha che due punti dati a ciascuno, cioè, l'uno al battente delle divisioni *1, 2, 3, 4*, etc l'altro alla piattabanda *y*, e^4, *f*, *g*, etc, in modo che si può far passare per i due punti di ciascuna sezione parecchie curve della stessa o di differente specie.

Blanchard ci fa passare degli archi di cerchio; ma poiché la loro origine al battente deve cominciare impercettibilmente e finire alla piattabanda nello stesso modo, bisogna che gli archi siano tangenti al battente, ad una linea verticale, e tangenti anche ad una linea orizzontale sotto la piattabanda; ciò che non può convenire al cerchio, che nel solo caso dove l'altezza della piattabanda sulla giuntura del *tableau* è uguale alla profondità della parte posteriore della volta; in qualsiasi altro luogo un arco di cerchio farà una piega con la linea perpendicolare, e quella

4- ERRORE DI TESTO: la lettera e deve essere sostituita con: la lettera c.

5- DOELE PLATE: La superficie piana che passa per la corda dell'arco di una doele si chiama doele plate: è la fase di preparazione per la definizione di una doele concava.

del livello, questo è il motivo per cui non si possono impiegare che dei quarti dell'ellisse.

Per tracciare questi quarti dell'ellisse (***Fig.261D e 262***), bisogna cominciare a fare il profilo della volta posteriore, che darà la posizione dei loro semiassi.

Avendo prolungato *ae* e *PQ* a piacere verso *S* e *O*, si prenderà a piacere anche una linea di altezza *FI*, alla quale tracceremo una parallela *SO*, alla distanza *FS*, uguale alla profondità della volta posteriore *mM*; poi per il centro *H* della chiave e le divisioni *4*, *5*, *6*, si tracceranno delle parallele a *aS*, che taglieranno *FI* ai punti 3^{4}, 2^{5}, 1^{6}, e *SO* ai punti h^{c}, 3^{c}, 2^{c}, 1^{c}, le linee *IO*, *OS* saranno i semiassi del più grande quarto d'ellisse, espresso dalla altezza della figura 261 per la verticale *kd* all'imposta per tracciare *IaS*; le linee 1^{6},1^{c}, $1^{c}S$, saranno i due semiassi della sezione espressa per la verticale *i6*, le linee $2^{5}2^{c}$, $2^{c}S$ saranno quelle della sezione per *h5*, così le altre; poi per il problema VII del secondo libro, tracceremo i quarti d'ellisse *IaS*, $1^{6}bS$, $2^{5}cS$, $3^{4}dS$, dove vediamo che i loro semiassi sono già dati alla figura 261, cioè, l'orizzontale *mM*, che è comune a tutti questi quarti d'ellisse è dato dal piano orizzontale e gli altri, che sono variabili, sono dati dalla elevazione *g4*, *h5*, *i6*, *kd*.

Essendo tracciate le curve dei giunti del letto, tracceremo le loro corde *IS*, $1^{6}S$, $2^{5}S$, etc. di cui ci si servirà per formare la sagoma della doele piatta, che saranno dei parallelogrammi rettangolari, le cui corde determinano la lunghezza e la divisione dei conci daranno la loro larghezza.

Così il parallelogramma $p^{5}put$, sarà la *doele plate*^{5} della chiave, facendo *pu* uguale alla corda $S3^{4}$, il rettangolo $pPSn^{4}$, sarà la sagoma della *doele plate* del concio successivo, compreso tra le divisioni *4* e *5*; $PGn^{4}n^{h}$, quello della sagoma seguente, etc. come lo si vede sistemato di seguito in forma di sviluppo alla ***figura 263A-B*** la costruzione sarà tracciata.

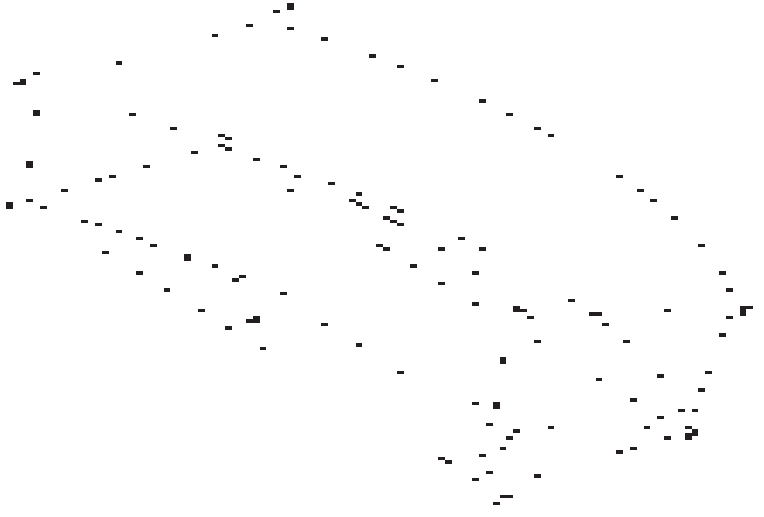


Fig. 265 - Secondo concio al di sopra dell' imposta ottenuto attraverso il metodo in cui le direzione dei giunti delle facce di letto dei conci sono parellele alla direzione della volta

Applicazione della tracciatura sulla pietra

La difficoltà di costruzione che può causare la formazione del *tableau* e del battente, che sono parti estranee alla volta posteriore, noi la rinviamo alla volta posteriore di Marsiglia, di cui noi abbiamo precedentemente parlato; ciò supposto noi prenderemo per esempio il taglio del secondo concio al di sopra dell'imposta contrassegnato dalla elevazione *5hi6*, in quanto esso è il più deformato.

Avendo innalzato un paramento servendosi della *doele plate*^{5}, ci applicheremo la sagoma $PGrn^{h}$, per tracciarne il contorno, poi con il *biveau*^{6} formato sull'angolo $1^{6}SV$ della corda con una verticale, si abbatterà la pietra per formare la testa della piattabanda, sulla quale si applicherà la sagoma della testa $x^{5}lix^{6}$, collocando il lato sullo spigolo della *doele plate*^{5} .

Si prenderà così ugualmente il *biveau*^{6}dell'inclinazione della *doele plate*^{5} con l'orizzontale sull'angolo $S1^{6}W$, con la quale si abbatterà la pietra, come si è fatto alla piattabanda, per prendere su questa terza superficie lo spessore del battente e ancora del *tableau*, se il concio lo può portare; noi supporremo per la semplicità dell'operazione che porta solo il battente.

Avendo tracciato su questa terza superficie la linea di profondità del battente, si abbatterà la pietra a squadra per formare una quarta superficie piana, che sarà il paramento esteriore se il *tableau* è compreso, o che sarà una opera verticale nello spessore del muro se non si tratta che del battente; sulla quale superficie si traccerà la testa *V65u*.

Appena fatti questi due paramenti della terza e della quarta superficie, ne faremo una quinta a squadra rispetto al letto di sopra, passante per il lato destro della sagoma della *doele plate*^{5}, per applicare la sagoma delle giunture del letto inferiore $Sb1^{6}$ e superiore $2^{5}cS$, posti l'uno sopra l'altro come sono di profilo e ne tracceremo il contorno. La stessa cosa la possiamo fare al letto di sotto per il motivo che il taglio *6V* forma un angolo ottuso con l'orizzontale *t6*, per questo bisogna scavare una falsa *doele*^{1} cilindrica, sulla curva *TAL*, della ***figura 265***, chiaramente alla superficie *T5* e una secondo il lato della *doele plate*^{5}, nella quale si adatterà la sagoma del letto inferiore $1^{6}bS$, posto perpendicolarmente al piano della doele piatta, posando il punto1^{6}sul punto *6* della ***figura 265*** e il punto *S* della sagoma ellittica sul punto *i* della stessa ***figura 265***.

Allora avremo le quattro linee del contorno della doele scavata, cioè, la retta li della piattabanda.

L'arco di cerchio *65* del battente.

6-BIVEAU: Il termine deriva dal latino *bivium*, bivio, strada biforcata. In effetti è la sagoma dell'apertura di un angolo qualunque, rettilineo, curvilineo o più sovente misto, per indicare l'angolo tra due superfici che si incontrano . Se queste sono piane, ci si serve di steccehe mobili; se invece una delle due superfici è curva il biveau è uno strumento di legno fisso fatto apposta per quell'angolo.

Il quarto dell'ellisse *1⁶bS* del letto di sotto.

E il quarto dell'ellisse *2⁵cS* del letto di sopra.

Infine si traccerà sulla seconda superficie, che è quella della piattabanda, i tagli della testa *x⁶i*, *lx⁵*, con la sagoma della testa e sulla quarta superficie, che è la perpendicolare del battente contro il tableau, si traccerà la testa *V65u*, facendo *5u* e *6V* parallele a *lx⁵* e *ix⁶* e il concio sarà tutto tracciato, come è rappresentato in prospettiva alla ***figura 265***.

Non rimane che abbattere la pietra dei letti, che non sono delle superfici piane, sebbene sembrerebbero a prima vista, in ciò che le giunture sono nei piani verticali, perché quella del letto di sopra è convessa e quella del letto di sotto è concava; ma la loro curvatura si fa insensibilmente e facilmente al letto di sopra, non rimane che prendere il *biveau* dell'angolo ottuso perpendicolare e del taglio *t5u* e abbattere la pietra a misura in modo da non scivolare sulla curva del letto, che è stato tracciato nel piano verticale, tenendo sempre uno di questi rami paralleli tra di loro e alla superficie della piattabanda.

Non è la stessa cosa per il letto di sotto, bisogna prendere il *biveau* della inclinazione del taglio sull'orizzonte, che è *t6V* e tenere sempre uno di questi rami paralleli allo spigolo della piattabanda, con la *doele* [1] che farà scivolare così dentro la superficie cava cilindrica e l'altro ramo sarà tenuto parallelo allo spigolo di questa piattabanda, con il taglio del letto inferiore; in questa situazione si farà scivolare l'angolo del *biveau*, sulla curva di spigolo del letto inferiore, per abbattere la pietra del letto in modo che formi una superficie un po' concava.

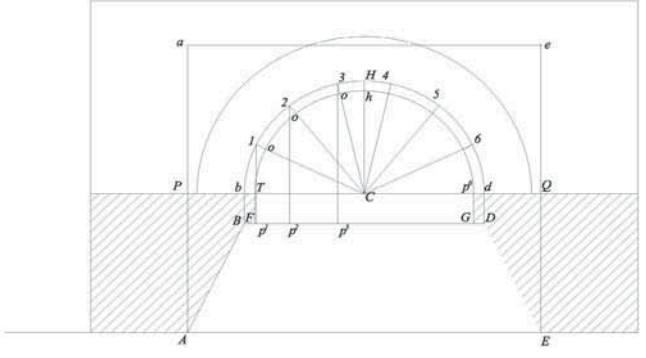


Fig. 261E - Costruzione della volta di Montepellier attraverso il terzo metodo sopradescritto in cui le le direzioni dei giunti delle facce di letto sono fatte su dei piani verticali diretti ad un punto S.

Se il concio include il *tableau*, è ovvio che le superfici dei letti che sono cilindriche, si cambierebbero in altre a doppia curvatura, che sarebbero molto deformi nei primi conci, perché il taglio 664 fa un grande angolo con il taglio parallelo a quello della piattabanda *6V*, ciò rende l'esecuzione più difficile; spetta allo scalpellino se questa costruzione gli conviene, e se è il caso formerà queste superfici come un incurvato *planolimes*, di cui è stato trattato al capitolo I di questo libro.

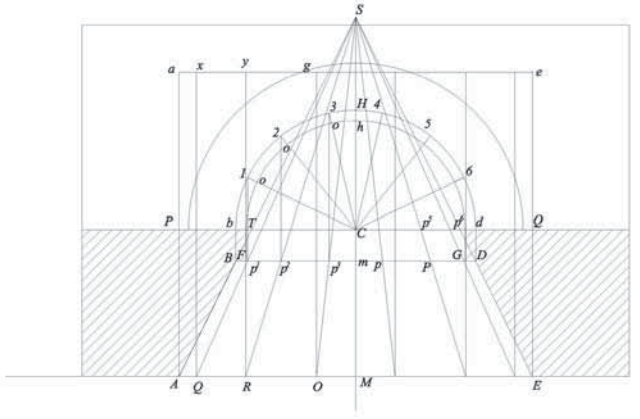


Fig. 261F - Costruzione della volta di Montepellier attraverso il terzo metodo sopradescritto in cui le le direzioni dei giunti delle facce di letto sono fatte su dei piani verticali diretti ad un punto S.

Secondo metodo[7], dove i letti sono dritti

C'è ancora un modo di tracciare le curve degli spigoli, se vogliamo fare dei letti piani, è possibile e renderà l'esecuzione molto più facile, supporre che i conci non sostengano il *tableau*, o che nel caso volessimo che lo sostenessero, cambieremo i tagli interiormente per una sporgenza.

Alla costruzione precedente abbiamo fatto le direzioni dei giunti del letto, in proiezione orizzontale paralleli tra di loro e alla linea di mezzo *mM* e per conservare la regolarità di queste direzioni; abbiamo fatto dei letti con superfici curve cilindricamente concave e convesse.

Adesso, noi proponiamo di darlgi delle direzioni convergenti verso il battente, proporzionalmente alla strombatura dei piedritti.

7 - In realtà si tratta del terzo metodo

E faremo dei letti con superfici piane invece di cilindriche.

Sia, lo stesso piano orizzontale della Baye della volta posteriore

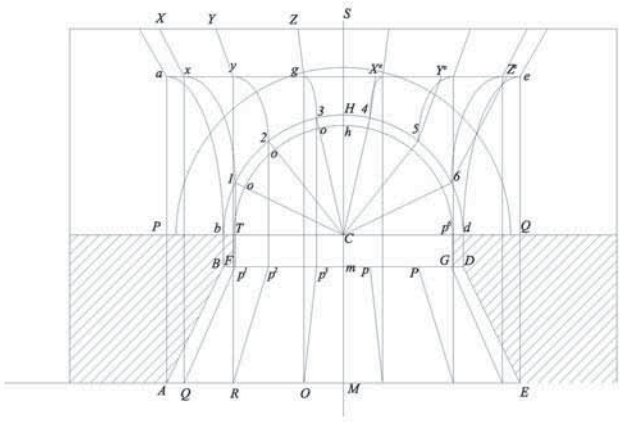


Fig. 261G - Costruzione della volta di Montepellier attraverso il terzo metodo sopradescritto in cui le le direzioni dei giunti delle facce di letto sono fatte su dei piani verticali diretti ad un punto S.

delle ***figure 261E-F-G*** si prolungheranno i piedritti *AB*, *DE*, finché concorreranno in S, da dove per le proiezioni p^1, p^2 , p^3 delle divisioni *1*, *2*, *3*, del centro originario, tracceremo le linee p^1Q, p^2R, p^3O, che saranno le proiezioni delle corde degli spigoli del letto con la *doele*[1], le quali curve saranno, come nella costruzione precedente, dei quarti di ellisse; ma invece di prendere per il semiasse dell'altezza una linea verticale come *1y*, *2c*, *3f*, si prenderà la distanza della divisione del centro originario alla piattabanda, su una linea inclinata parallela al taglio della piattabanda, come $6Z^e$, $5Y^e$, $4X^e$, tirate dalle divisioni corrispondenti e uguali a quelle dell'altra parte *1*, *2*, *3*, per evitare la confusione delle linee; per il medio di questi semiassi e della orizzontale *mM*, comune a tutte le sezioni, si tracceranno gli altri quarti d'ellisse.

Si eleveranno quindi delle verticali su *AE*, per i punti trovati *Q*, *R*, *O*, che taglieranno la piattabanda ae ai punti *x*, *y*, *g*, per i quali, dal centro di taglio *M* o *T*, si tireranno i giunti della testa *gZ*, *yY*, *xX*.

Per formare la sagoma della doele piatta, si prenderanno le corde dei quarti di ellisse, quindi le proiezioni orizzontali delle divisioni del centro primitivo e della piattabanda, con le quali si formerà un trapezio, come è stato detto ai problemi X e XI, del terzo Libro.

Supponiamo, per esempio (ciò che non è) che l'arco 1^6bS, sia quello della sezione per il punto *1* della prima divisione, sarà *Qq*, perpendicolare su *AE* e indefinito, poi dal punto p^1 per il centro e dell'intervallo di questa corda 1^6S, come raggio, si descriverà un arco che taglierà la perpendicolare *Qq* al punto *q*, per dove si traccerà *qr*, parallela e uguale a *QR*, poi si tirerà rp^2, il trapezio p^1qrp^2, sarà quello della seconda doele piatta, nello stesso modo avremo il trapezio $p^2r^2sp^3$, per la sagoma della terza, e così di seguito.

Applicazione del taglio sulla pietra

Questa seconda costruzione è quasi la stessa della precedente, la differenza consiste solo che qui i letti sono delle superfici piane, e quindi ho molto meno "lavoro";

prima di aver formato la quarta superficie che è verticale, parallela alle facce, si potrebbe posare centrata la sagoma di testa, e non rimane che abbattere il paramento pietroso dritto da un giunto di testa all'altro, ciò è facile con il righello, poiché lo si può fare "colare" su tre linee date, cioè, sulla costa della *doele plate*[5] e su le due teste tracciate.

Formati i letti, non rimane che applicarci le sagome dei quarti d'ellisse, tracciato il profilo per i giunti del letto a la *doele*[1], allora avremo le quattro coste della superficie sinistra e senza che sia necessario il calandrino, taglieremo la superficie come quelle sinistre, che noi abbiamo chiamato *mixtilimes* all'inizio di questo libro e la *doele*[1] della volta posteriore di Marsiglia, da cui quella è derivata, supponendo questa linea di sommità infinitamente poco curva, sarebbe a dire sensibilmente dritta.

Non rimane che cercare le curve dei giunti della *doele*[1] trasversale, come sono quelle delle teste dei conci, che non sono abbastanza lunghi per occupare tutta la profondità della volta posteriore; ciò sarà pressappoco lo stesso, di ciò che noi abbiamo detto per la ordinaria volta posteriore di Marsiglia. Sia per esempio per la prima costruzione, un piano verticale che taglia la volta posteriore parallelamente alle sue facce per i punti *kiIn*, della proiezione orizzontale, o *dcba*, che segna la lunghezza della pietra a partire dal battente fino alla sua testa, ai giunti della *doele* [1] trasversale; porteremo la distanza *Da* o *Pc* della figura 261 alla sagoma 262 da *F* a *E*, o *Pk* da *F* a *G*, così la pietra sarà più lunga; poi per il punto *E* o *G* si traccerà *Ea* o *Gg*, parallela alla verticale *FI*, che taglierà i quarti d'ellisse del profilo ai punti *a*, *b*, *c*, *d*, per i quali si tracceranno delle orizzontali, che taglieranno i giunti corrispondenti alla elevazione in a^e, b^e, c^e, d^e, cioè, il primo verticale *dk* in a^e; *6i* in b^e; *5h* in c^e; *4g* in d^e e per questi punti d'intersezione, si traccerà la curva d^e, c^e, b^e, a^e, che servirà a formare la sagoma della testa del concio, che non avrebbe come lunghezza orizzontale a^e ma *FE*, o che è la stessa cosa, *Gb* della figura 261; è visibile che avremmo lo stesso la testa di un concio, che avrebbe per lunghezza una altra curva meno concava, tracciata in altezza al di sopra della precedente e al di sotto della piattabanda *ae*.

Per non confondere troppo la costruzione per queste linee orizzontale, basterà riportare le altezze del profilo *Ea*, *Eb*, *Ec*, etc. sulla

piattabanda *ae*, con l'elevazione sulle verticali, che sono le elevazioni dei giunti del letto come *Ea* su *ka*[e] etc.

Fra i conci noi non concepiamo affatto il primo, che comprende una parte della strombatura del piedritto e la sommità della piattabanda, perché il modo migliore di farlo è lo stesso, della volta posteriore di Marsiglia, di cui noi abbiamo parlato; affinché comprenda l'angolo rientrante dentro un solo pezzo; sebbene lo possiamo fare come gli altri conci; ma avendo troppi inconvenienti per conferirgli la forma.

Sul rivestimento di questa volta posteriore, con un rivestimento di falegnameria

Il principio di taglio esplicato a pagina 290 per il rivestimento di falegnameria, dove abbiamo supposto i pezzi di intelaiatura di uguale lunghezza, deve applicare la volta posteriore di Montpellier, pressappoco come a quella di Marsiglia, di cui abbiamo parlato alla pagina 299; ma a causa della *doele*[1] di quella di cui trattiamo, che è una superficie a doppia curvatura, il taglio è un poco più difficile; si riconoscerà, attraverso la comparazione con quello che vado a dire, la grossolanità dell'errore di quello che si vede nel libro del taglio del legno del Maestro Blanchard, (Capitolo XI) sotto il nome di volta posteriore di Marsiglia, cadente sull'angolo ottuso.

Sia, (***Fig.264***) il trapezio *ABDE*, il piano orizzontale della Baye; *Pae*[2]*Q*, l'altezza della volta posteriore fatta come nella tracciatura del taglio delle pietre della figura 261. Si dividerà il centro *BHD* in tante parti uguali da ottenere dei punti delle curve di proiezione dell'infisso, tanto orizzontali quanto verticali, per esempio qui in sei dei punti *1*, *2*, *H*, *4*, *5*, per i quali si tireranno altrettante perpendicolari a *PQ* o *AE*, come *mM*, *nN*, *nN*, *Kk*, etc. *rp*[n], *rN*[2], sopra i quali si tracceranno dei quarti d'ellisse, come è stato detto nella tracciatura precedente, sopra il semiasse dato *r1* e *Gp*[n]; *r2* e *IN*[2]; *mH* e *CM*; tali sono gli archi *noy1*, *az2*, *M*[2]*LH*, per le sezioni passanti per i punti *1*, *2*, *H*, le quali sono uguali a quelle dell'altra parte, fatte dalle linee *n4*, *n5* e l'arco *DTk*[2], per la sezione per *KD* e *BM*[2].

Riguardo all'arco della base sopra il piedritto *DE*, se ne farà l'altezza come *D2*, *E2* e la proiezione verticale *Dfe*[2], sopra il semiasse dato, in cui le orizzontali *DQ* e *DE* sono l'una più grande e l'altra più piccola di quelle delle altre sezioni, che sono tutti uguali tra di loro; e alla perpendicolare *CM* e le verticali sono uguali alla altezza *Qe*[2], come si è visto in *DTk*[2].

Essendo fatta questa preparazione, bisogna cercare per il mezzo di queste sezioni verticali, dei punti equidistanti dal contorno del centro *BHD* e della piattabanda *ae*[2], per tracciare le curve della proiezione dello spigolo dell'infisso, che sono a doppia curvatura, come *fLg* e 6O7, al piano orizzontale e sul piano verticale *V9* e *87*.

Per dei punti presi a piacere su l'arco *BH*, come *d* e *e*, si traccerà dal centro *C* delle linee *dx*, *ei*, che taglieranno le sezioni verticali *rG*, *rI* ai

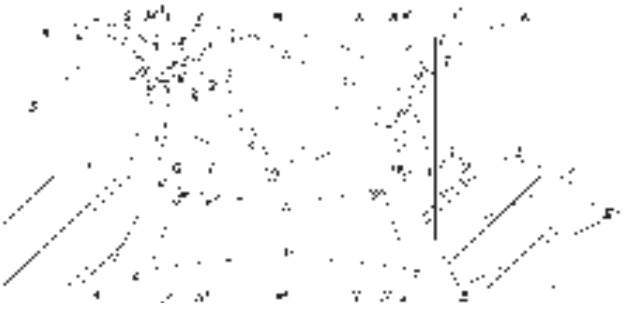


Fig. 264 - Costruzione del rivestimento in falegnameria della volta posteriore

punti *x* e *i*, per i quali si tireranno le perpendicolari *xy*, *iz*, che taglieranno gli archi ellittici *ny1*, *az2*, ai punti *y* e *z*, quindi per i punti *x* e *i*, si tireranno le perpendicolari *xY* e *eZ* alle linee *ei* e *dx*, che si faranno uguali alle precedenti *xy* e *iz*, e si tracceranno a mano gli archi *Ze*, *Yd*, sopra i quali si prenderà la larghezza data dall'infisso *dF* e *eZ*, che si trova a questo punto per caso a cedere in *Z*.

Basterà, per la precisione necessaria alla pratica, tracciare questi archi a mano un po' più concavi, che quelli della sezione verticali *yI* e *z2*; tuttavia se vogliamo avere questi archi con più precisione e trovarne più punti, bisognerà cercare come si deve.

Si prolungherà la linea *dx* in *S*, questa linea taglierà due verticali *rG* e *M*[2]*B*, ai punti *x* e *u*, e la piattabanda *ae*[2] in *S*, per dove si tracceranno su *dS* le perpendicolari *xY*, *ut*, *Ss*, le quali saranno le ordinate della curva che si cerca, che sono comuni alle sezioni verticali: noi abbiamo già trovato la prima *xY=xy*; la terza *Ss* è evidentemente uguale alla profondità della volta posteriore *CM*, la seconda *ut* si troverà come la prima, così avevamo tracciato la sezione ellittica sulla verticale; ma per mancanza di spazio e per evitare la confusione della figura, sono uguali a quelle tracciate dall'altro lato in *DTk*[2], si traccerà per il punto *u* una parallela *uT* al diametro *BD*, che taglierà l'arco *Dk*[2]al punto *T* e la retta *KD* al punto *V*; la linea *VT* sarà l'ordinata che si cerca, che si porterà dall'altra parte in *ut*, e per i punti *S*, *t*, *Y*, *d*, si traccerà a mano o con un righello pieghevole la curva *stYFd*, che si cerca.

Noi abbiamo trovato nella formazione delle curve *eZ*, *dF*, le faglie delle larghezze dell'infisso inferiore, espresse dalle linee *gf*, *iz*, per avere le ordinate della curva di proiezione orizzontale *f*[i], *z*[e], *L*,*9*[x], e le larghezze *gd*, *ie*, presi su un piano verticale, le quali determinano i punti della proiezione verticale *g*, *i*, *V*, *gx*, fanno adesso determinare l'incontro della larghezza dell'infisso trasversale inferiore, con quello di ogni base della volta posteriore, sopra i piedritti ne tracciamo la curva

di proiezione di ciascuno di questi infissi, ciò che si farà nello stesso modo in cui l'abbiamo detto alla pagina 303, relativamente alla figura 151 della tavola 52.

L'applicazione del tratteggio sul legno sarà perciò lo stesso.

Spiegazione dimostrativa

Noi abbiamo già detto parecchie volte perché le basi degli archi e le superfici che si alzano con delle linee rette, o sul piano, devono trovarsi ai punti di attacco; così le linee curve che sono gli elementi verticali della superficie della volta posteriore, devono esse tangenti ai due piani, cioè alle loro sezioni per queste curve, cioè, al piano verticale passante per il centro primitivo e all'orizzontale passante per lo spigolo della piattabanda; o come questi piani sono perpendicolari tra di loro, non ha le curve di sezioni coniche, che le potesse toccare tutte e due, che quelle che ritorno in loro stesse, come il cerchio e l'ellisse; ma il cerchio non può toccare due perpendicolari se non ad una distanza uguale dalla loro intersezione, dunque questa curva non conviene che in un solo caso, dove l'altezza della piattabanda sulla base della *doele* è uguale alla profondità della volta posteriore, dunque per tutti gli altri casi questa curva farà una sporgenza con la linea perpendicolare alla base, o con quella del livello della piattabanda, per il n.36 del terzo libro di Euclide; questo è ciò che condanna il tratto del Maestro Blanchard.

Non è la stessa cosa della ellisse, questa può toccare due linee perpendicolari tra di loro, ad una tale distanza a piacere da una parte e dall'altra dal punto della loro intersezione, dunque gli elementi della superficie della volta posteriore in questione dovranno essere dei quarti di ellisse; e non importa che siano diretti parallelamente tra di loro , o in piani convergenti proporzionalmente a quelli dei piedritti, perché nei casi in cui siano intorno all'asse, che rimane in posizione verticale, saranno sempre tangenti ad un piano orizzontale passante per la piattabanda.

Ma se supponiamo la *doele*[1] tagliata da un piano inclinato, come per esempio in *Sd*, (figura 264) è chiaro che la sezione non sarà della stessa specie, ciò è perché noi fummo obbligati di cercare i punti della intersezione di questo piano inclinato, con le verticali ellittiche; perché tutti questi piani, essendo perpendicolari ad una terza verticale, passano per il centro primitivo *BHD*, le loro intersezioni comuni gli saranno perciò perpendicolari; o queste linee di intersezione sono delle ordinate conosciute nella ellisse, di conseguenza daranno alle loro estremità dei punti della nuova curva non conosciuta, la conoscenza della quale diviene per questa costruzione inutile per descriverla, poiché la descriverà esattamente senza conoscerne la natura.

COROLLARIO

Fino ad ora abbiamo ricavato il modo per fare una volta dritta sulle imposte, raccordata ad un arco circolare o ellittico, il cui piano è parallelo a quello che passa per le imposte.

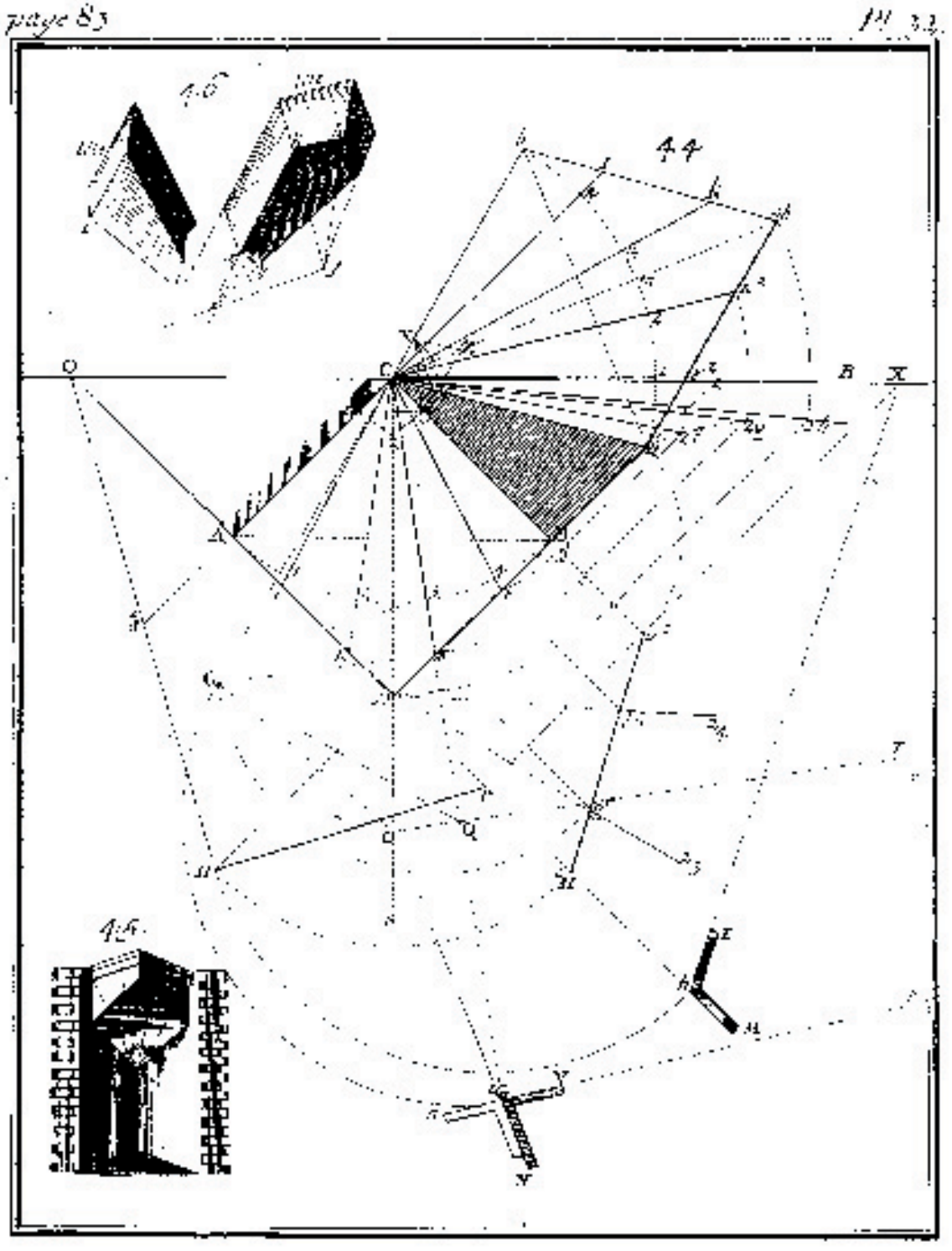
Se si vuole fare un soffitto circolare su una stanza quadrata, o ellittico su una stanza rettangolare, si può facilmente per mezzo di una volta, la cui costruzione si farà nello stesso modo che nella volta posteriore di Montpelier; perché se è stata posta attenzione, l'altezza perpendicolare della imposta al soffitto essendo uguale per tutti , e la ricaduta di ciascun punto del cerchio orizzontale, che è il contorno del soffitto essendo irregolare, avremo una serie di quarti di ellisse, che avranno un semiasse costante, cioè, il verticale e un altro variabile che è l'orizzontale.

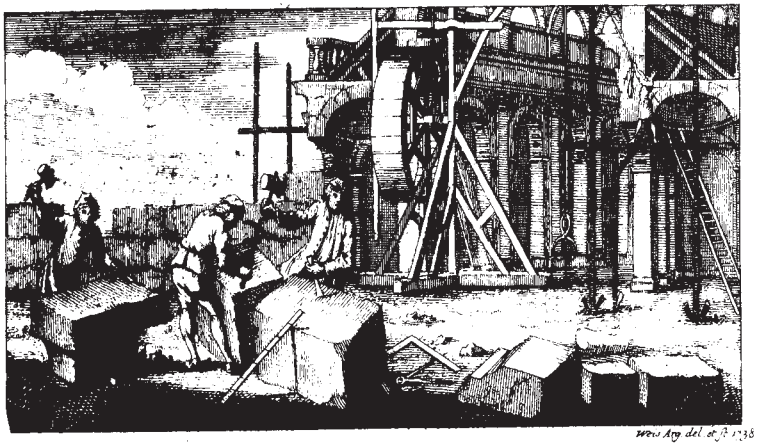
Deve esserci soltanto una piccola differenza tra la posizione dei piani di queste ellissi, che devono essere sempre disposte dal centro del cerchio alla circonferenza, che non è lo stesso della volta posteriore.

In secondo luogo, i giunti dei letti orizzontali della volta, saranno inegualmente lontani dalla superficie, che dividono in basi di larghezza diversa.

Negli altri casi le curve di questi giunti orizzontali si troveranno precisamente nello stesso modo, che noi abbiamo impiegato per trovare quelle della Tromba a Panache, fa soltanto due scelte per il quarto d'ellisse, che deve servire da centro primitivo sul quale si vuole fare la divisione; se si prende quello che è dentro la diagonale del quadrato, per prenderci delle divisioni uguali, ne risultano due inconvenienti, l'uno che l'irregolarità si spande nel centro sul quarto di ellisse, che è fra le due diagonali, e perpendicolare al lato destro, dove le basi superiori si restringono troppo alla *doele*, e se si prende questo estremo per il centro primitivo, l'irregolarità si spande alle diagonali dove le basi superiori si allargano troppo; da ciò bisogna concludere che si deve prendere per il centro primitivo l'arco ellittico , che è ad un quarto della circonferenza del quarto di cerchio compreso tra le due diagonali. Avendo gli archi ellittici dei giunti montanti e le curve irregolari dei giunti delle facce di letto, si farà questa volta come la Tromba a Panache, o per risalire più lontano per il metodo della inscrizione dei cilindri, come è stato spiegato per la costruzione delle volte sferiche.

Si potrà fare le divisioni dei giunti della faccia di letto tutti uguali a ciascun quarto d'ellisse, allora le facce di letto non sarebbero più a livello, ma ondeggianti, montanti a partire dalla metà dell'imposta destra fino alla diagonale del quadrato, da dove ricadranno decrescenti fino alla metà dello spigolo contiguo; così di seguito, la costruzione e la decorazione non saranno affatto meno belle.


Page 83
Pl. 33
46
44
45



TRATTATO DI STEREOTOMIA

SECONDA PARTE DEL QUATRO LIBRO DELLE VOLTE COMPOSTE

Di due o più superfici

Dopo aver percorso tutte le specie di superfici, degli intradossi e delle Volte, che io chiamo *Semplici*, perché esse non sono interrotte da alcun cambio di direzione, non ci resta da vedere che come si possono riunire alcune parti di queste superfici, per formare una sola Volta, *Composta* di figure simili o differenti, formanti tra di loro degli angoli salienti o rientranti.

Se si è fatta attenzione a ciò che è stato detto nella seconda Parte del primo Libro, riguardante la Penetrazione dei corpi; si capirà facilmente, quali devono essere le intersezioni delle superfici delle Volte, che si incontrano, o che si incrociano in angolo saliente o rientrante, e si conoscerà la natura delle linee curve, che si formano agli spigoli di questi angoli quando sono salienti, o nella loro cavità, quando sono rientranti, ciò che noi chiamiamo *Angoli di Spigolo*, nel quale consiste tutta la difficoltà delle *Volte Composte* di più superfici.

Se queste linee curve sono piane, si troverà la maniera di descriverle con i Problemi della prima parte del secondo Libro.

Se esse sono a doppia curvatura, si vedrà con la terza parte dello stesso Libro, che per giungere a descriverle, bisogna prepararcisi non solo con la via della proiezione, ma anche con la formazione di una delle superfici curve, che da una parte dello loro proiezioni.

Di qualunque natura siano queste Curve d'intersezione delle superfici di due Volte che si incontrano, è chiaro che esse determinano le estremità delle direzioni di ogni intradosso, o dell'estradosso, di conseguenza, che esse forniscono i mezzi di svilupparle, per conoscere la superficie di ogni parte, che può comprendere un Concio di grandezza data, sia che si rettifichino gli archi di queste Curve meccaniche, sia che ci si contenti di prenderne le corde, per la formazione delle superfici piane inscritte, che noi chiamiamo intradossi piatti; Così tutto ciò che noi abbiamo da dire delle *Volte Composte*, di due o più superfici uguali o differenti, simili o dissimili, che confluiscono le une nelle altre per formare una sola Volta di più parti, non è che una applicazione dei principi di Teoria, o di pratica del primo Tomo, compreso nel primo, secondo e terzo Libro, al quale noi potremo rinviare il Lettore, per trovarci le dimostrazioni dei Tratti di ciascuna Volta, e abbreviare così il discorso.

Per mostrare più sensibilmente la conformità di questo terzo Tomo, con la seconda parte del primo Libro, che concerne la penetrazione reciproca di corpi rotondi, della stessa o differente specie, come Sfere, Coni, Cilindri, Anelli ed Eliche, noi seguiremo da vicino lo stesso ordine di combinazioni delle Volte che loro assomigliano, che noi abbiamo osservato a riguardo di questi stessi corpi, con questa differenza che noi chiameremo con i nomi consacrati all'Architettura.

Ho detto *più o meno*, perché non conviene assoggettarsi precisamente allo stesso ordine, in quanto il più regolare era di andare dal semplice al composto, non si può mantenere nella pratica dei Tratti, la formazione dei corpi più semplici, come la più facile.

Benché nella Teoria la Sfera sia il corpo più semplice, e in seguito il cono, non è lo stesso per il Tratto delle Volte delle stesse figure.

I Tratti delle Sferiche sono più composti di quelle delle coniche, ed i conici più che i cilindrici; è per questo che noi abbiamo sistemato differentemente le materie di questo ultimo Tomo, che noi divideremo in dieci Capitoli.

Nel primo noi, tratteremo dell'incontro e della penetrazione, delle Volte a Botte fra di loro, in qualsiasi situazione possano essere le une rispetto alle altre, ciò che risponde al quarto Capitolo del primo Libro.

Nel secondo, tratteremo l'incontro delle Volte a Botte con le Trombe e le Volte coniche.

Nel terzo, gli incontri delle Volte a Botte con le Volte a Quarto di Sfera o Volte Sferiche.

Nel quarto, delle Volte coniche fra di loro.

Nel quinto, delle Coniche con le Sferiche.

Nel sesto, delle Cilindriche, Coniche e Sferiche con le Anulari.

Nel settimo, delle Volte composte di superfici irregolari, e di regolari Cilindriche, Coniche e Sferiche.

Nell'ottavo, delle Anulari Elicoidi con le irregolari.

Nel nono, noi tratteremo della Struttura delle Scale, considerate in se stesse, senza alcuna Volta; ma solamente per i loro *Supporti e Intradossi della rampa*.

A questi nove Capitoli, ne aggiungeremo un decimo, diviso in due Appendici, concernenti i dispositivi per la costruzione delle Volte.

Il primo, tratterà della *Spinta delle Volte*, e dei mezzi per trovare lo spessore dei piedritti, necessari per sostenere lo sforzo.

Il secondo, tratterà del carico dei Sesti, di Carpenteria, prima che le Volte siano chiuse dalla loro Chiave.

Infine noi termineremo questo terzo ed ultimo Tomo con questo accessorio, che noi abbiamo promesso nel programma riguardante l'esame della vera bellezza, e del buono e cattivo uso di questo genere di Decorazioni che si chiamano *Ordini* di Architettura.

CAPITOLO PRIMO

DEGLI SPIGOLI CHE SI CREANO ALL'INCONTRO DELLE VOLTE A BOTTE TRAVERSATE DA ALTRE VOLTE A BOTTE.

Quando abbiamo parlato nel primo Libro delle intersezioni delle superfici cilindriche, noi non abbiamo avuto nessun riguardo alla loro situazione relativa all'orizzonte, perché non si trattava che della Teoria delle Curve. Non è lo stesso per la pratica del Tratto, bisogna considerare i semi Cilindri, che noi chiamiamo Volte a Botte in tre situazioni differenti, come abbiamo fatto trattando delle Volte semplici.

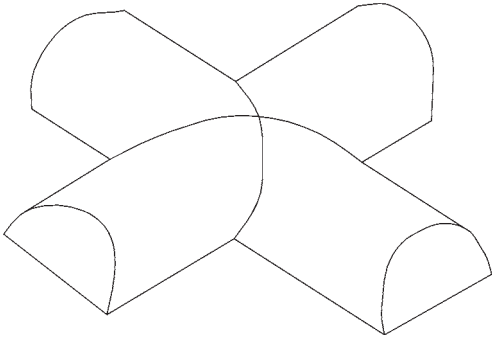
Primo, *di livello*, ossia, quando le imposte e la Chiave sono in situazione orizzontale.

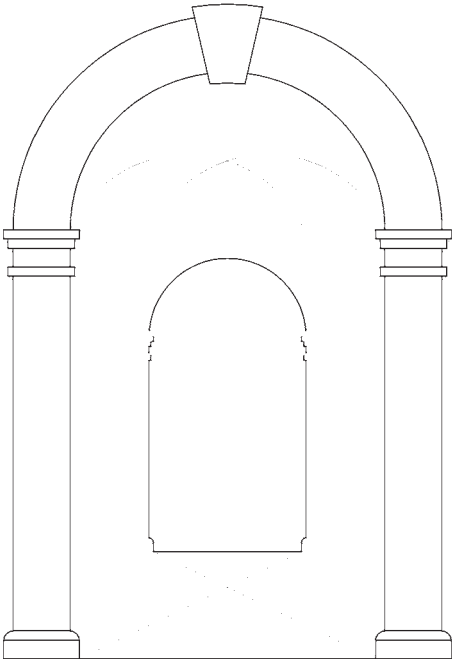
Secondo, *appiombo*, quando gli assi sono verticali, tali sono le Torri rotonde, che non si considerano come delle Volte; ma che si devono considerare come delle Volte a Botte *"in piedi"*; perché se si fanno degli spigoli, quando sono incontrati, o attraversati da altre Volte a Botte di livello o rampante, i cui spigoli di intersezione sono delle Curve della stessa specie, che quelle degli altri incontri delle Volte a Botte, secondo gli angoli d'intersezione degli assi tra di loro, e le loro relative posizioni.

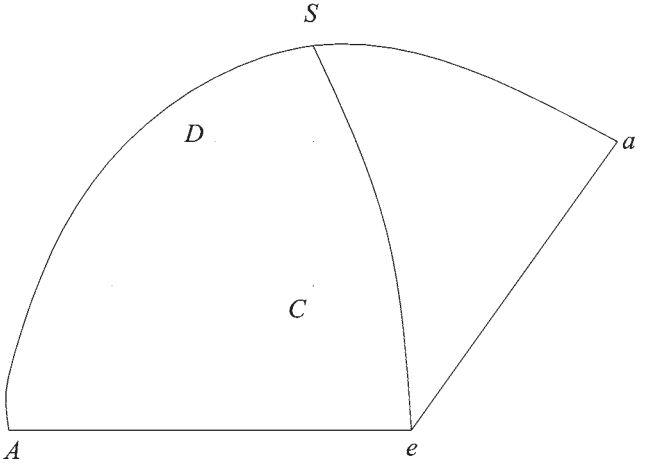
La terza situazione delle Volte a Botte, è quella dove i loro assi e le loro imposte non sono né di livello né appiombo, ma *rampanti* o *in discesa*.

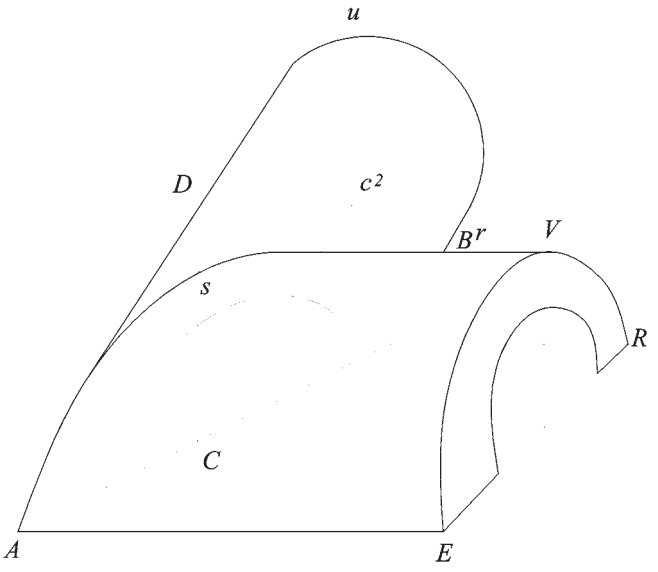
COMPOSIZIONE DELLE VOLTE DELLA PRIMA SITUAZIONE, DELL'INCONTRO DI VOLTE A BOTTE ORIZZONTALI TRA DI LORO.

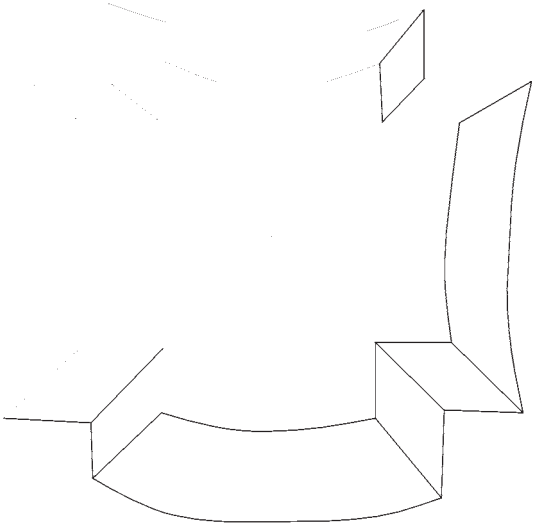
Una Volta a Botte di livello non può incontrarne un'altra della stessa situazione, che in due maniere, o perpendicolarmente, o obliquamente, ossia in termini dell'Arte, che le loro direzioni sono necessariamente rette o sbieche, senza discese.

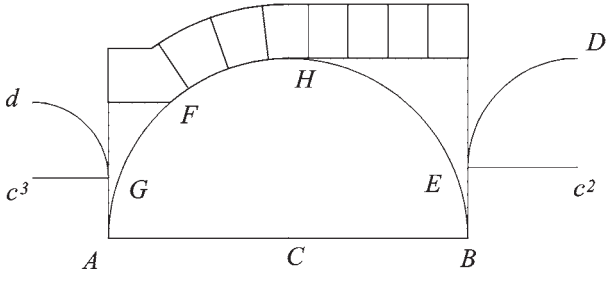


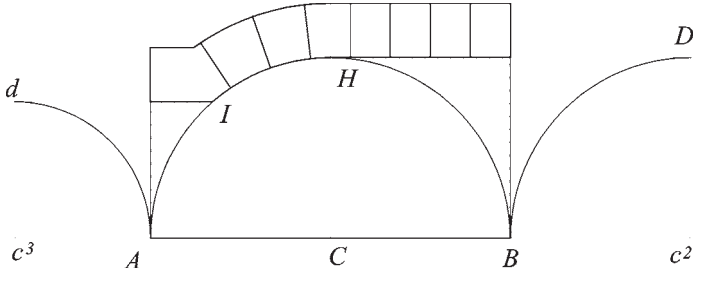


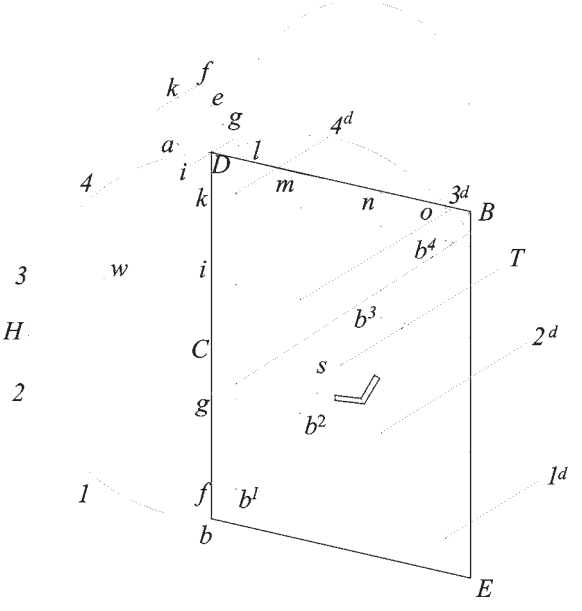

S
D
a
C
A
e

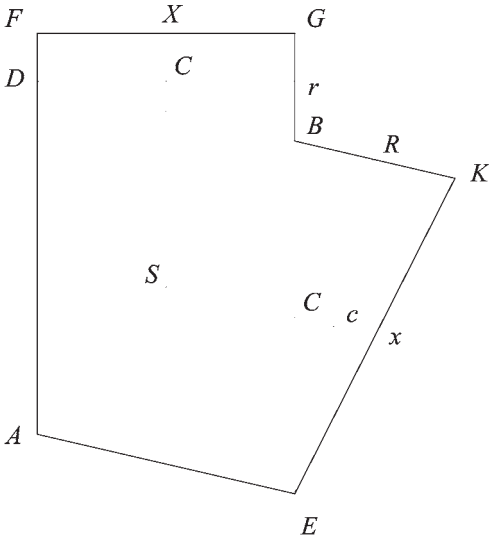

u
D
c²
B^r
V
s
R
C
A
E

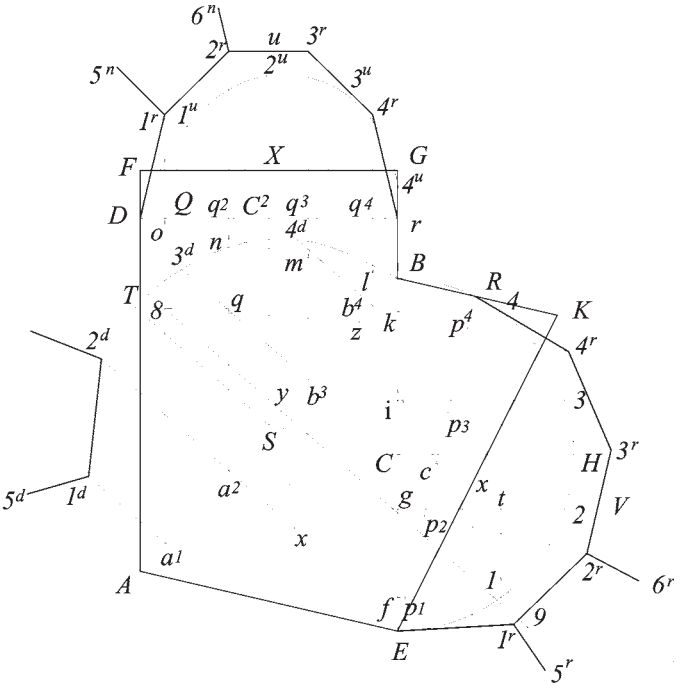


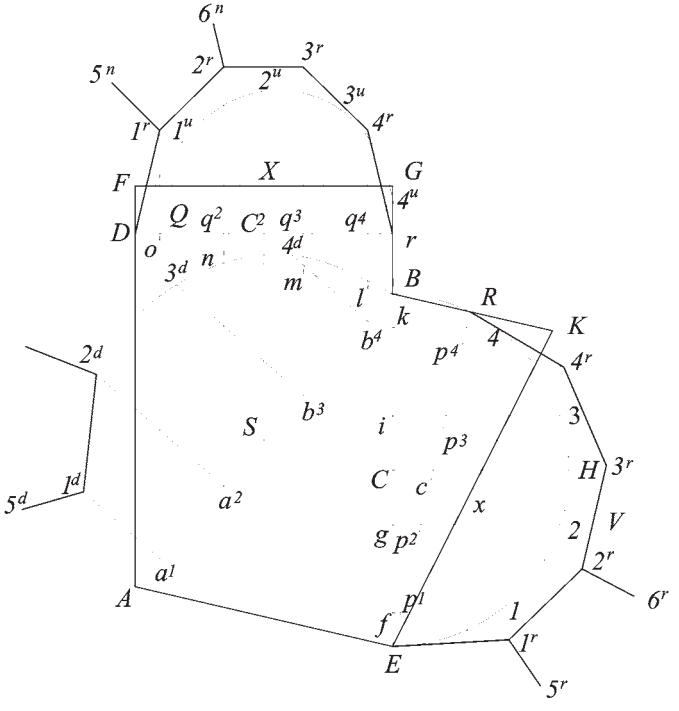

D
d
H
F
c³
G
E
c²
A
C
B

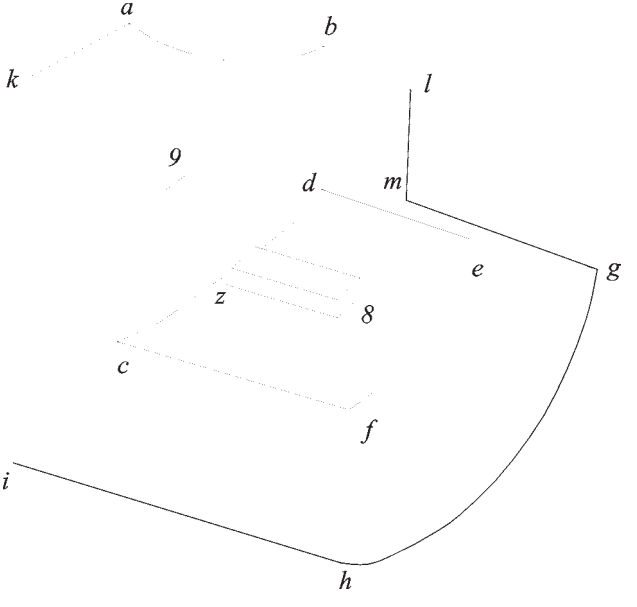

D
d
H
I
c³
A
C
B
c²

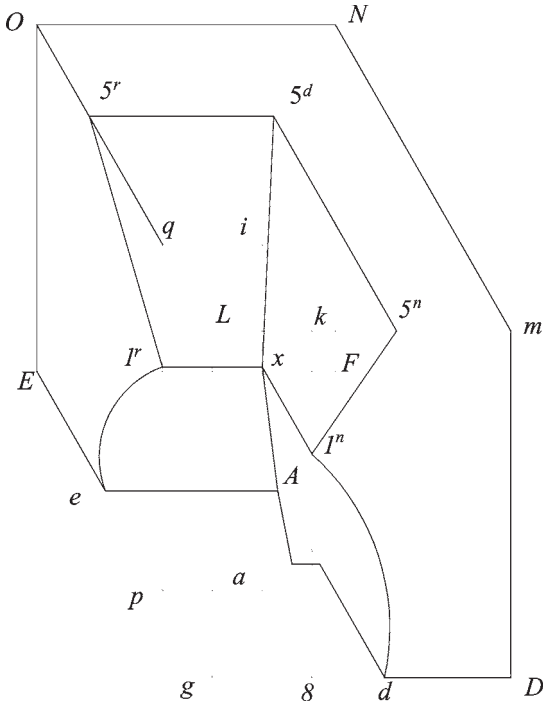

k
f
e
g
4^d
a
l
4
i
D
m
3^d
B
k
n
o
b⁴
T
3
w
i
b³
H
C
2^d
s
2
g
b²
1
1^d
f
b^l
b
E

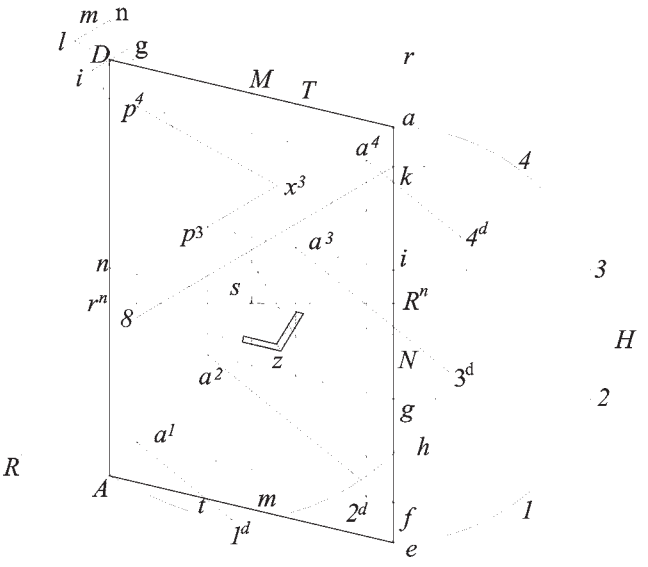

F
X
G
D
C
r
B
R
K
S
C
c
x
A
E

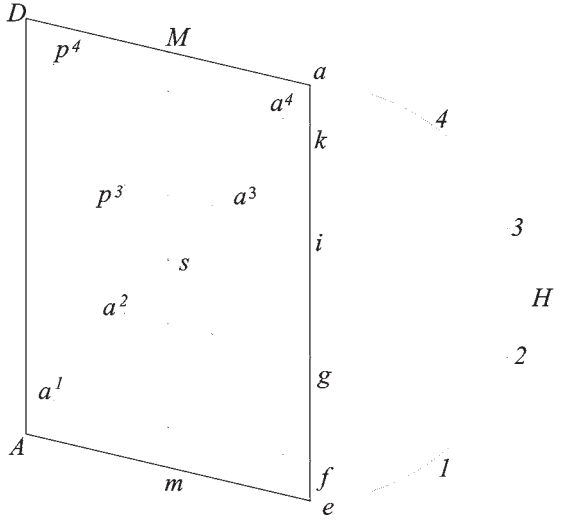

6n
2r
u
3r
5n
2u
3u
4r
1r
1u
F
X
G
4u
D
Q
q2
C2
q3
q4
o
4d
r
n
3d
m
l
B
T
8
q
b4
z
k
p4
R
4
K
2d
4r
y
b3
i
3
S
p3
C
c
H
3r
5d
1d
a2
g
x
t
2
V
p2
x
a1
1
2r
6r
A
f
p1
9
E
1r
5r

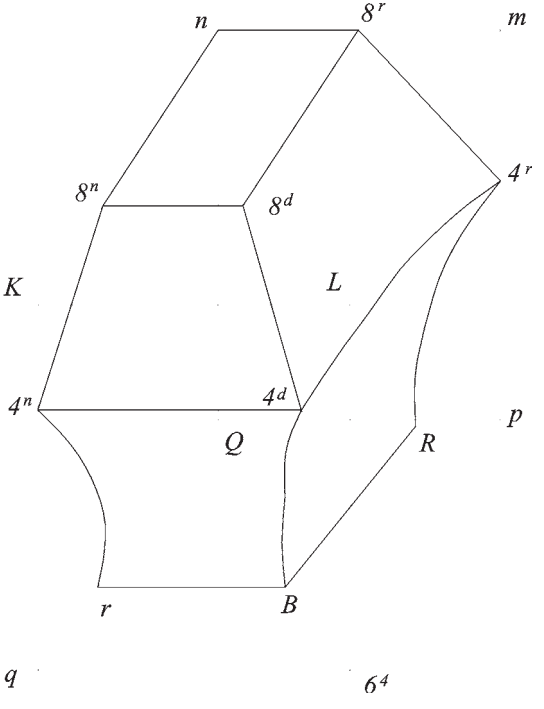

6n
2r
3r
5n
2u
3u
4r
1r
1u
F
X
G
4u
D
Q
q2
C2
q3
q4
o
4d
r
n
3d
m
l
B
k
R
b4
p4
4
K
2d
4r
S
b3
i
3
p3
H
3r
C
c
5d
1d
a2
x
V
g
p2
2
2r
a1
6r
A
p1
f
1
E
1r
5r


a
b
k
l
9
d
m
e
g
z
8
c
f
i
h


O
N
5r
5d
q
i
L
k
5n
m
E
lr
x
F
ln
A
e
p
a
g
8
d
D


m
n
l
D
g
r
i
M
T
p4
a
a4
4
k
x3
p3
a3
4d
n
i
3
s
rn
8
Rn
H
z
N
a2
3d
2
g
a1
h
R
A
m
2d
f
1
1d
e


D
M
p4
a
a4
4
k
p3
a3
3
i
s
H
a2
2
a1
g
A
m
f
1
e


n
8r
m
4r
8n
8d
K
L
4n
4d
p
Q
R
r
B

q 64

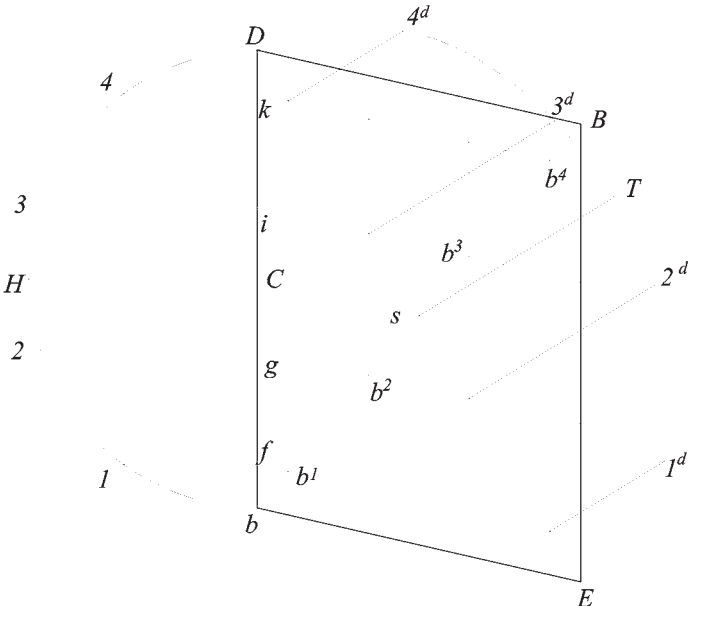


Fig. 1 L'arco *BDc²* ha la medesima altezza di imposta e di chiave dell'arco *ABH*, mentre l'arco *Adc³* ha la stessa altezza di imposta ma una diversa altezza di chiave dell'arco *ABH*.

Fig. 2 L'arco *EDc²* ha la medesima altezza di chiave dell'arco *ABH*, ma una diversa altezza d'imposta; mentre l'arco *Gdc³* ha altezze di imposta e di chiave differenti dall'arco *ABH*.

Fig. 5 Incontro di due volte a botte e ricerca dei sesti primitivi.

Fig. 5 Incontro di due volte a botte, ricerca dei sesti primitivi e delle loro divisioni

Fig. 5 Incontro di due volte a botte, ricerca dei sesti primitivi, delle loro divisioni e della squadra zoppa.

Fig. 7 Squadratura per la parte di spigolo *AS*

Fig. 9 Squadratura per lo spigolo *BS*

Fig. 6 Concio di spigolo rovesciato.

Fig. 12 Raffigurazione prospettica di una volta in arco di chiostro di quattro lati

Fig. 8 Proiezione orizzontale di una volta in arco di chiostro di quattro lati, e ricerca dei suoi sesti.

Fig. 10 Raffigurazione prospettica di una volta a crociera.

Fig. 3 Chiave di una volta a crociera.
Fig. 4 Proiezione orizzontale di una volta a crociera.
Fig. 4 Proiezione orizzontale di una volta a crociera.
Fig. 8 Proiezione orizzontale di una volta in arco di chiostro.

* Nella PL70 i punti dell'arco diritto *Dr* vengono indicati con Q,q^2,q^3,q^4.

* Nella PL70 le due altezze vengono indicate con $p^1 1^r, p^4 4^r$.

* Tale lato nella PL70 è indicato come a^1p^1
* * Nella PL70 il paramento viene indicato con *FDgE*

* Nella PL70 il lato è indicato con a^1p^1

* Nella PL70 l'angolo viene indicato con $Q1^r 5^n$.
** Nella PL70 il lato viene indicato con $p^1 1^r 5^r$

* Nella PL70 l'angolo è indicato come $q\ 6^4\ p$

* Nella PL70 gli angoli sono indicati con $Q\ 1^r\ 5^n$ *e* $p^1\ 1^r\ 5^r$.

* Nella PL70 gli angoli sono indicati con $D\ 1^r\ 5^n$ *e* $E\ 1^r\ 5^r$.

SULLE VOLTE GOTICHE

Si chiamano volte gotiche, o secondo Padre Deran[1], volte moderne, & a ogiva, quelle in cui gli intradossi perpendicolari alla loro direzione sono composti da due archi di cerchio tracciati da differenti centri, che formano un angolo acuto in chiave. La moda di queste volte che noi riteniamo dei Goti, o piuttosto, secondo qualche studioso di antichità, dei Mori, è talmente sorpassata che non se ne costruiscono più di questo tipo nei nuovi edifici; ma siccome nel restauro degli antichi chiostri, chiese, o altri edifici, si presenta l'occasione di ripristinarne qualche parte, è necessario conoscerne i tratti.

Bisogna innanzitutto rilevare che gli intradossi delle volte gotiche sono molto raramente porzioni di superfici cilindriche, come nelle volte a botte & nelle volte antiche, che sono usate nell'architettura moderna; ma ogni pennacchio è una porzione triangolare di una specie di sferoide irregolare, in cui la superficie si curva insensibilmente dalla sua imposta, seguendo la direzione della chiave, man mano che si avvicina, e così ogni pennacchio è una superficie a doppia curvatura, per cui noi dovremmo rimandare i tratti al rango delle superfici irregolari; nonostante questo daremo loro spazio qui per più ragioni.

Innanzitutto, a causa della loro grande similitudine con le volte regolari. In secondo luogo perché sono le loro nervature il principale oggetto per il taglio delle pietre, mentre non c'è n'è quasi mai bisogno per i pennacchi che terminano le nervature, perché il loro spessore minimo

renderebbe il taglio pressoché impercettibile in ogni concio; è per questo che ci si accontenta solitamente di farli di piccole pietre, senza taglio, che si chiamano *pandans*, per i quali la malta, messa un po' più spessa all'estradosso che all'intradosso, si sostituisce al taglio del un concio.

Le principali di queste nervature sono gli archi doppi *AB, ED* & le ogive *AD, EB*; le prime le attraversano diametralmente, & le seconde nelle diagonali in cui si incrociano; è per questo che si dice normalmente incrocio di ogive (***Fig. 21***).

Le curve di queste centine sono arbitrarie, tuttavia si impiegano soltanto archi di cerchio. Questi archi doppi sono sempre tracciati da differenti centri, presi di solito alle imposte opposte, e allora sono a 60°; qualche volta il centro è dentro, qualche volta fuori; se ne vedono anche (ma a sproposito) alcune in cui i centri sono al di sopra o al di sotto della linea delle imposte: P. Deran li mette al di sopra.

Gli archi delle ogive sono qualche volta tracciati anche da due centri, ma spesso da uno solo che forma un semicerchio; cosa che non si fa mai per gli archi doppi, nell'architettura gotica.

Sia il parallelogramma rettangolo *ABDE* (***Fig. 21***) il piano orizzontale della volta gotica, di cui le diagonali *AD, DE*, sono le proiezioni delle ogive; i lati *AB, DE*, quelle degli archi doppi, così come *AE, BD*, se la volta è in una crociera aperta; ma se la volta è chiusa da questi lati, gli archi doppi prendono il nome di *formerêts.*

Tra queste nervature principali se ne mettono spesso delle altre, come *MG* & *MH*, & le loro opposte *MF*, *MI*, che sono le proiezioni delle *liernes*; le linee *BG* & *BH*, & le linee dello stesso tipo riunite formano le proiezioni dei *tiercerons*.

Si tratta adesso di tracciare gli archi di cerchio di cui queste linee sono le proiezioni orizzontali, cioè i piani, seguendo il linguaggio degli Apareilleurs.

Avendo diviso *AB* in due parti uguali in *m*, si prenderanno arbitrariamente e a distanza uguale da questo punto, i centri *C* & *c*, per gli archi doppi *AS*, *BS* a seconda che si voglia la volta più o meno rialzata in SI, dove questi si incrociano. Padre Deran prende questi centri al di sopra della linea di imposta *AB*, & dice che si usa così, cosa molto grave, perché una tale origine comincia da un arco rovesciato inclinato.

Per tracciare poi gli archi d'ogiva, si porterà la proiezione *BM* in *B p* su *BA* dove si alzerà una perpendicolare *p* m^2, che si può fare uguale a *MB*, se si vuole l'ogiva a tutto sesto, o più alta se la si vuole formata da due archi di meno di un quarto di cerchio, come si è fatto per gli archi doppi.

In questi due casi, il punto m^2 sarà più alto del punto *S*; il punto p sarà il centro dell'arco *B* m^2, se l'ogiva è formata di un solo arco a tutto sesto; se essa è invece formata da due di questi archi, il centro sarà più vicino ad *A*, ma sempre sull'orizzontale *AB*; il metodo per trovare questo nuovo centro è quello di tracciare una corda in sommità al di sopra di m^2, per esempio *z* al punto *B*, dividerla in due parti uguali e mandarle una perpendicolare, che taglierà *AB* in un punto che sarà il centro cercato, come faremo per trovare gli archi delle altre nervature.

Innanzitutto, per l'arco *lierne*, bisogna considerare che esso deve passare per il vertice m^2, che è la mezzeria dell'incrocio d'ogiva, di cui la proiezione è il punto *M*, & per il vertice *S* dell'arco doppio, di cui la proiezione sarà, a scelta, il punto *L* oppure *m*. Si traccerà per il punto *S* una linea *OR*, parallela ad *AB*, che taglierà la verticale *p* m^2, nel punto *O*, da dove si prenderà *OR* uguale a *ML*; per i punti m^2 & *R* dati, si traccerà un arco, il cui centro è sulla verticale m^2 *p* prolungata fino al punto *Q*, che si troverà tracciando una corda da m^2 a *R*, & facendo sulla sua mezzeria una perpendicolare che taglierà questa verticale in *Q*, cosa che non è mostrata in figura, per evitare una confusione di linee; l'arco m^2 R tracciato da questo centro *Q*, sarà la metà di una *lierne*, di cui la proiezione è *ML* oppure *M m*, se *ABDE* è un quarto; ma siccome per la disposizione in figura delle proiezioni delle nervature, questo arco non scende fino a *L*, terminando in *G* oppure *H*, bisogna riportare la distanza *MH* sul profilo *OR in O g*, & tracciare g *h* verticale, che taglierà l'arco m^2 *R* in *h*; l'arco m^2 *h*,di cui *M h* è dato attraverso la sua proiezione,sarà quello cercato

In secondo luogo, per avere l'arco *tierceron BH* oppure *BG*, si porterà la lunghezza della proiezione *BG* in *B k*, dove si innalzerà la verticale *k K* indéfie, poi si traccerà per il punto *h* trovato un'orizzontale *h i*, che taglierà questa verticale nel punto *k*, & per questo punto & per il punto *B*, si traccerà la corda *K b*, che si dividerà in due parti uguali in *n*, dove si farà una perpendicolare a questa corda, che taglierà l'orizzontale *AB* nel punto *y*, dove si troverà il centro dell'arco *KB* del *tierceron*, che si vuole formare sulle facce del pennacchio sferico; così si avranno tutti gli archi delle nervature tracciati in proiezione, seguendo la figura compresa nel quadrato *ABDE*.

E' semplice ricavare da questo procedimento il metodo per trovare gli archi delle nervature di tutti quei diversi settori che si vorranno tracciare sul piano orizzontale.

Per esempio, se si prolungassero i tiercerons *AF, DI*, etc., fino alle ogive in *T & t*, & e si tracciassero le linee *F u, I u, IV, HV*, in modo da formare dei settori di losanga *F uIT, HVI t*, è già chiaro che la quota dei punti *F, H, I*, è data sul profilo, che abbiamo appena fatto, al punto *h*, & che i punti *T* & *u* oppure t & *V*, sono determinati nell'ogiva attraverso la proiezione; così se si porta la lunghezza *D t* su *AB* in *B* & se si innalza la verticale *t x*, essa incontrerà l'arco m^2 *B* dell'ogiva nel punto *x*, che

sarà più basso del punto *h*.
In seguito, avendo tracciato attraverso *x* l'orizzontale *x q*, & una verticale attraverso il punto *b*, che la taglierà in un intorno di *x*, si porterà la lunghezza *H t* della proiezione in *x q*, (supponendo *x* all'intersezione della verticale & dell'orizzontale) & per i punti dati *h, q*, si traccerà un arco il cui centro deve essere sulla verticale passante per *h*.
Se si fosse cercato invece l'arco di cui *VH* è la proiezione, si sarebbe trovato nello stesso modo, ma invece di essere *h* il punto il più alto, come in questo caso, sarebbe stato il più basso nel profilo.
Si può riscontrare, nelle antiche chiese & nei chiostri gotici, una varietà ammirevole di questi compartimenti; quello che ho visto più bello e meglio eseguito tra quelli di questo genere è al Monastero di Betlemme, vicino a Lisbona in Portogallo, tanto nella chiesa che nel chiostro, dove la maggior parte delle nervature sono di marmo.
Sembrano esserci, nelle nostre antiche chiese, molte particolarità in questi compartimenti; qualche volta gli archi doppi sono soppressi entro l'incrocio delle ogive per attraversarle con delle nervature, passando per la chiave dei *formerêts*, parallelamente alle ogive, di modo che la loro proiezione orizzontale dà una figura con reticoli quadrati o a forma di losanga come si vede in ***Fig.18***, cosa che fa sì che queste *liernes* spingano da una parte e dall'altra au vuide contro la mezzeria dei reni delle ogive; qualche volta le nervature sono staccate dalla volta a metà della crociera, dove l'intradosso si innalza al di sopra in forma di catino irregolare come in M, dal quale pendono dei peducci, delle *Guimberges* & altri ornamenti dell'architettura gotica, sospesi con delle barre di ferro che sono adesso universalmente rifiutate dagli architetti, come se si fosse in situazioni forzate & di poca stabilità.
E' evidente, attraverso queste costruzioni, che essendo le direzioni degli intradossi curve in chiave, i pennacchi sferici non sono porzioni di cilindro, dato che finiscono con tre lati curvi circolari, con l'arco doppio, con quello a ogiva, con quello a *lierne* (se ce n' è una), o a sua volta con l'angolo curvo & rientrante, che è lungo la chiave; supponendo questo, cosa che non succede quasi mai,cioè che si facciano i *pandantifs* in pietra da taglio, bisognerebbe riferirsi a ciò che abbiamo detto per le Volte Sferiche, o meglio per le Sferoidi Irregolari, perché i *pandantifs* non sono triangoli esattamente sferici benché possano esserlo.
E' ancora evidente che, se si fanno altre nervature in più, in forma di rosa, di stella, etc., le parti dei pennacchi sferici compresi entro le nervature circolari sono superfici che non formano una serie uniforme, se queste nervature sono rialzate, perché le sezioni di una superficie irregolare non sono archi di cerchio, essendo tagliate in tutte le direzioni; esse formerebbero spesso, al contrario, delle curve a doppia curvatura, la cui esecuzione richiederebbe una grande attenzione; ma si assoggetta le vuide dei compartimenti alle terminazioni delle nervature, & non le nervature alla superficie dell'intradosso.
Una delle principali difficoltà delle volte gotiche, è quella delle intersezioni e delle imposte delle nervature. Riguardo le intersezioni di quelle che si incrociano, è evidente che esse devono avere anche lo stesso profilo delle modanature, perché gli angoli acuti siano esattamente nel piano delle diagonali della loro proiezione.
Per trovare l'allungamento, cioè la sagoma curva *ralongée* del loro contorno, basta fare un angolo *BAD*, uguale a quello degli incroci e delle ogive, di cui il lato *AB* rappresenta, per esempio, la *lierne* & *AD* l'ogiva; si traccerà su *AB* la perpendicolare *BD*, & tante parallele quante si vorranno avere ai punti del contorno della modanatura, che taglieranno *AD* nei punti *o, o, o, D*, per i quali si tracceranno delle perpendicolari su *AD*, che si faranno uguali alle brevi linee *a d, a d*, etc. come *o x, o x*, etc., le cui estremità determineranno il contorno delle modanature allungate, nell'angolo acuto dell'intersezione delle due nervature.
Trattiamo ora dell'origine delle nervature al di sopra di un pilastro o di un peduccio, che è spesso anche senza imposta,partendo direttamente sul muro.
Bisogna farne la proiezione, come si vede in *N*, al di sotto della ***Fig. 22***, dove *NF* è quella del *formerêt*, *NT* del *tierceron*, *NO* dell'ogiva, *N t* di un altro *tierceron*, & *N d* di un arco doppio, dove le principali nervature *NF, N o, N d*, coprono una parte delle intermedie *NT, N t*.
Adesso, per sapere a quale quota esse si aprono, bisogna riportare le *retombées*,date, di ciascuno degli archi di queste nervature sulle linee *NO, NT, NF* prolungate, & tracciarvi di nuovo gli stessi profili delle nervature; supponendo per esempio, che lo spessore della pietra dato per formare una parte della nervatura, sia *BN* della ***Fig. 21***, la sua *retombée* sarà uguale a *d N*, che mostra che la proiezione della nervatura deve essere avanzata di questo intervallo; così, rifacendo a questa distanza i profili delle modanature delle nervature che si allontanano, si potrà riconoscere se esse sono tutte aperte a questa quota, oppure se restano ancora alcune parti di quelle intermedie coperte da quelle principali delle ogive, dei *formerêts* & degli archi doppi.
Lo stesso procedimento servirà per trovare le superfici delle nervature di cui le imposte sono prese su punti distanti, & che si incrociano poi un poco al di sopra per essere continuate ciascuna alla loro destinazione.
Questa cosa non si vede affatto nelle nervature che prendono origine sui pilastri, ma assai spesso in quelle che nascono senza appoggio d'imposta, direttamente dal muro; siccome questo tipo di opera non capita nella pratica, se non in caso di restauro di antichi edifici, non ci soffermeremo oltre.

OSSERVAZIONI SULLE VOLTE GOTICHE

Se gli intradossi delle volte gotiche non fossero in qualche modo spezzati & interrotti in mezzeria sotto la chiave, con un angolo rientrante che è spiacevole alla vista, esse sarebbero senza dubbio preferibili alle nostre volte moderne, per più ragioni.
La prima è che la grande inclinazione dei loro pennacchi sferici, che è ancora notevole alla sommità verso la chiave, permette che le si facciano estremamente sottili & leggere, da cui seguono numerosi vantaggi:
1°. Esse consumano molto meno materiale.
2°. Esse sono di più facile & più rapida esecuzione, perché essendo i materiali più piccoli sono più facili da trasportare & da porre in opera.
3°. Esse costano molto meno in rapporto a quanto si usurano, & in giornate di lavoro.
4°. Ci sono minori costrizioni per le dimensioni dei conci, in cui non è necessario alcun taglio per le superfici d'appoggio: non essendo il loro spessore che di circa cinque o sei pollici, non c'è bisogno del taglio, cosa a cui si può supplire con un po' di malta, più spessa all'estradosso che all'intradosso; si usano quindi delle piccole pietre tagliate a squadra che si chiamano *pandans*.
La seconda ragione che dà loro un grande vantaggio sulle nostre, è che essendo molto più leggere e inclinate, esse hanno molta meno forza di ribaltare i muri sui quali sono innalzate; di conseguenza esse permettono di risparmiare gran parte di quello spessore che bisogna dare ai piedritti per sostenere le volte a semicerchio, fatto che determina una forte

riduzione di spesa.
Non deve dunque stupire che la tradizione di queste volte sia durata così a lungo, & che se ne vedano ancora oggi in così gran numero nei chiostri, nelle chiese & negli altri edifici pubblici, i quali non avrebbero potuti essere costruiti se la spesa fosse stata così grande come risulta oggi, seguendo la nostra architettura massiccia; è vero anche che questa supera quella gotica in bellezza & in stabilità.
Si vede in ***Fig.20*** l'effetto di una volta gotica con queste nervature.

SULLE VOLTE PERSIANE

Benché noi guardiamo all'angolo acuto che si forma all'intradosso delle volte gotiche sotto la chiave come ad un difetto, i Persiani non danno lo stesso giudizio: essi vi fanno un angolo ancora più marcato, preceduto da due piccole parti di arco convesse, come si vede in *d* & *e*, in ***Fig. 19***; vediamo, nelle stampe del viaggio di Chardin[1], che generalmente gli intradossi di tutte le loro volte e persino le arcate delle finestre & dei negozi, sono circondate all'incirca con profili in stile di *combles à l'impériale*, o piuttosto in forma di punte di antichi stemmi rovesciati, composti da due parti concave *a d, b e*, & da due convesse in *d* & *e*, che si uniscono in *S*.
Un aspetto così fuori dall'ordinario per una volta ci prova che la bellezza non è altro,di solito, che un pregiudizio dell'educazione & dell'abitudine di vedere le cose approvate dalla moda del Paese in cui si abita.
E' tuttavia vero, giudicando le cose senza essere prevenuti, chedi tutte le curvature degli intradossi tipici delle volte, quella di cui parliamo adesso è la meno appropriata per la stabilità; conseguentemente essa deve essere intrinsecamente deforme, dato che non è in grado di assicurare la durata.
La ragione è ben plausibile: le parti convesse vicino alla chiave spingerebbero immancabilmente au vuide se i conci fossero tagliati seguendo il taglio che è naturale per questa figura, taglioche sarebbe divergente dal di fuori al di dentro, invece di convergente, così che non si può dubitare che essa sia fatta nella parte interiore in senso contrario.
Da qui segue che le parti convesse devono essere costituite da conci, di cui le file devono essere più lunghe delle altre, che sono concave, cosa che aumenta considerevolmente il carico della volta, nel punto dove essa causa una più grande spinta.
In secondo luogo, gli spigoli dei conci contigui sono molto diversi, l'uno ad angolo ottuso, l'altro ad angolo acuto; sembra che queste volte non si eseguono molto spesso in pietra da taglio.
Tutti questi fattori fanno vedere con stupore che una popolo così spirituel come i Persiani, che sono ritenuti avere molto gusto nelle opere ornamentali, abbiano adottato una forma all'intradosso che ci sembra ridicola; non mi soffermerò a ricercarne i tratti, perché non credo che adotteremo mai un tale gusto in Francia: dirò soltanto, velocemente, che mi sembra, da quanto posso giudicare attraverso le stampe di Chardin, che ogni lato dell'intradosso è composto da tre archi di cerchio, quello di origine, che sale circa a 30° o 45°, di cui il centro è preso sul raggio opposto, per esempio, per l'arco *a f* oppure *a h* tra *m* & *b* in *1*; poi sul raggio *1 f*, viene preso un secondo centro verso la mezzeria in *2*, per formare l'arco *h g*, & infine sul raggio *g 2* prolungato in fuori, un altro centro in *3*, per tracciare l'arco *g S*. E siccome questi centri possono essere presi più vicini o più lontani da m & da b, ne risultano intradossi rialzati o ribassati; siccome non penso che questo libro arriverà in Persia, non credo di essere criticato su questa congettura.
Si potrebbero trovare altre curve geometriche o meccaniche, che darebbero tali contorni senza l'ausilio degli archi di cerchio; una di queste potrebbe essere la "compagne de la roulette" di Mr. Roberval[2], ripetuta e girata in senso contrario, che si potrebbe far incrociare per diminuire le parti convesse dell'intradosso a proprio piacimento; ma è già abbastanza su un'osservazione dettata da semplici curiosità, che non deve essere messa in pratica.

NOTE

(pag. 2)

1. Père François Derand (1588? - 1644). Gesuita, matematico e architetto ecclesiastico, autore di “L’Architecture des voutes, ou l’Art des traits, et coupe des voutes: traicté tres-util, voire necessaire à tous architectes, Maistres Massons, Appareilleurs, Tailleurs de pierre, et généralement à tous ceux qui se meslent de l’architecture, mesme Militaire”, Parigi, 1643.

(pag. 4)

1. Jean Chardin (Parigi 1643 - Londra 1713), autore di “Travels in Persia, 1673 - 1677”. Ha visitato Le Indie e la Persia e ha lasciato i racconti dei suoi viaggi.

2. Gilles Roberval (Senlis 1602 - Parigi 1675). Studioso di matematica, autore di “Traité des indivisibles”, è il fondatore della geometria cinematica. La curva “compagne de la roulette” è una sinusoide.

SULLE VOLTE A DOPPIO SPIGOLO

Si chiamano volte a doppio spigolo quelle in cui gli angoli sporgenti sono smussati con delle falde cilindriche e angolari, di cui la punta è sull'imposta all'origine della volta.

Così, supponendo una volta di spigolo formata dall'incontro di due volte a botte che si incrociano ad angolo retto, ritagliate ai loro angoli sporgenti con due volte a botte che incrociano le precedenti con un angolo di 45°, si avrà una volta a doppio spigolo, che sarà composta da otto porzioni di superfici cilindriche in pennacchi sferici, terminate in sommità da una superficie piana che forma un soffitto.

La ragione per cui esse terminano così alla loro sommità deriva dal fatto che le quattro semi-volte a botte, che si incrociano seguendo le diagonali delle quattro prime volte a botte, si tagliano mutuamente parallelamente ai loro assi; secondo la teoria 16 del primo libro, di conseguenza,si tagliano seguendo quattro linee orizzontali, che possono essere i quattro lati di una superficie piana quadrata, se la volta è impostata sulle direzioni perpendicolari delleprime volte a botte uguali di diametro, o in forma di rombo, se le direzioni sono oblique, o i diametri diseguali.

P. Deran, al posto di un soffitto a forma di parallelogramma, ne propone uno di forma ottagonale, ma è chiaro, dato che abbiamo detto precedentemente del suo errore riguardo ai soffitti quadrati sulle volte di spigolo semplice, che una figura ottagonale non può raccordarsi con la superficie delle volte a doppio spigolo, dato che degli otto lati del soffitto, non se ne possono avere che quattro, che sarebbero impostati su linee dritte comuni all'intradosso della volta: le falde *f t, u x, o p, q r,* che sono parallele alla direzione dei cilindri, di cui le falde *AGF, BGI, DIK, EKF,* sono delle parti. I quattro altri lati dell'ottagono *t u, x o, p q* & *r s*, tagliando obliquamente queste stesse porzioni di cilindro, non possono essere che al di sotto delle loro superfici, in piani verticali, di cui le sezioni sono ellissi che hanno per corde questi stessi lati, supponiamo i quattro primi lati alla superficie di ciascuna di queste porzioni di cilindro.

Così il raccordo con un soffitto ottagonale non si può fare se non attraverso una bordatura sporgente al di sotto dell'intradosso nei lati che la tagliano obliquamente, o per meglio dire, non può affatto essere raccordato con la volta.

VOLTE A DOPPIO SPIGOLO CON UN SOFFITTO QUADRATO, O A FORMA DI LOSANGA

Sia *ABDE* il piano orizzontale della volta di spigolo, di cui le quattro imposte sono agli angoli *A, B, D, E*; avendo tracciato le diagonali da uno di questi angoli all'altro & le linee di mezzeria *c N, CL,* che si intersecheranno anche con le diagonali nel punto di mezzo M, si determinerà la metà della larghezza o della lunghezza del soffitto su una di queste linee *MG* o *MF*; & per questi punti *G* & *F*, si tracceranno delle parallele alle diagonali *MA, ME*, che daranno, alla loro intersezione con le linee di mezzeria *CL, c N,* i punti *K* & *I,* & di conseguenza tutto il rombo *FGIK* del soffitto.

Per gli stessi punti *F, G, I, K*, si tracceranno le linee *GA, FA; FE, KE; KD, DI*, etc. agli angoli delle imposte, linee che saranno le proiezioni orizzontali degli spigoli della volta, da cui bisogna tracciare gli intradossi; supponendo che si scelga di fare su *AB* il primo intradosso in forma di semicerchio *AHB*, lo si dividerà al solito nei suoi conci *1, 2, 3, 4, 5, 6*, da dove si abbasseranno delle linee perpendicolari su *AB*, che si prolungheranno fino al punto in cui incontrano il primo spigolo *AG* nei punti q^1, q^2, q^3, per i quali si tracceranno delle parallele alla diagonale *EM*, che incontreranno lo spigolo seguente *AF* nei punti r^1, r^2, r^3,punti per i quali si tracceranno delle parallele al lato *AB* prolungate indefinitamente al di là di *AE*, che esse taglieranno nei punti f^1, f^2, f^3.

Su queste linee indefinite si porteranno al di là di *AE*, le altezze corrispondenti alle *retombées* del primo intradosso, come *p 1* in f^1 1^f, p 2 in f^2 2^f, *p 3* in f^3 3^f, & per i punti 1^f, 2^f, 3^f, etc. si traccerà l'arco ellittico *A h E*, che sarà l'intradosso del piccolo lato.

Bisogna adesso cercare gli intradossi degli spigoli, di cui *AG & AF* sono le proiezioni; si porterà la lunghezza *AG* su *AB* in *A g*, & *AF* in *AR* su *AE*, come anche tutte le loro divisioni *A q* & *A r*, in *AQ* & *AR*, dalle quali si alzeranno delle perpendicolari, che si faranno uguali alle corrispondenti del primo intradosso *p 1, p 2,* & si avrà per l'intradosso dello spigolo *AG*, l'arco ellittico *A x X*, & per lo spigolo *AF*, l'arco *A y Y*.

Essendo dati la proiezione orizzontale delle divisioni longitudinali,& gli intradossi dei lati & degli spigoli della volta, i conci si faranno in ciascuna delle loro parti nello stesso modo con cui si sono fatti nelle volte di spigolo semplice, di cui abbiamo parlato, senza alcuna differenza, perciò è inutile spiegare più a lungo.

Per dare un'idea di come appare questa volta, ne abbiamo disegnato una metà in prospettiva nella ***Fig.27***, dove abbiamo segnato gli angoli con le stesse lettere del piano orizzontale & dell'alzato della ***Fig.28***.

VOLTA A DOPPIO SPIGOLO CON SOFFITTO CIRCOLARE, OPPURE UN CATINO

Sembra, dalla descrizione che abbiamo fatto della volta della famosa chiesa di S. Paul di Londra, che essa sia del tipo che noi trattiamo qui, benché eseguita in carpenteria, tanto che ne abbiamo disegnato una metà nella ***Fig.29***; comunque, è certo che anche se essa non è del tutto rassomigliante a quelle di cui descriveremo i tratti, tuttavia avrebbe potuto esserlo senza inconvenienti di stabilità, ne di difformità; & in più essere costruita in pietra da taglio fino al soffitto.

Sia data *ABDE* (***Fig.30***) la pianta orizzontale di una campata o di una parte della navata, compresa tra due pilastri, che è effettivamente proporzionata come quelle di S. Paul, seguendo la pianta che ne ho.

Sia anche dato il cerchio *FGIK*, di grandezza presa arbitrariamente, per il soffitto di mezzeria. Si tracceranno come per la volta a doppio spigolo, le proiezioni *AG, AF, EF, EK, DK, DI*, etc. & la pianta orizzontale sarà tracciata.

Adesso, bisogna considerare che si possono fare queste volte in due modi, uno che si potrebbe chiamare a triplo spigolo, che sarebbe composto da superfici regolari, l'altro di cui i pennacchi sferici della mezzeria sarebbero porzioni di sferoidi irregolari.

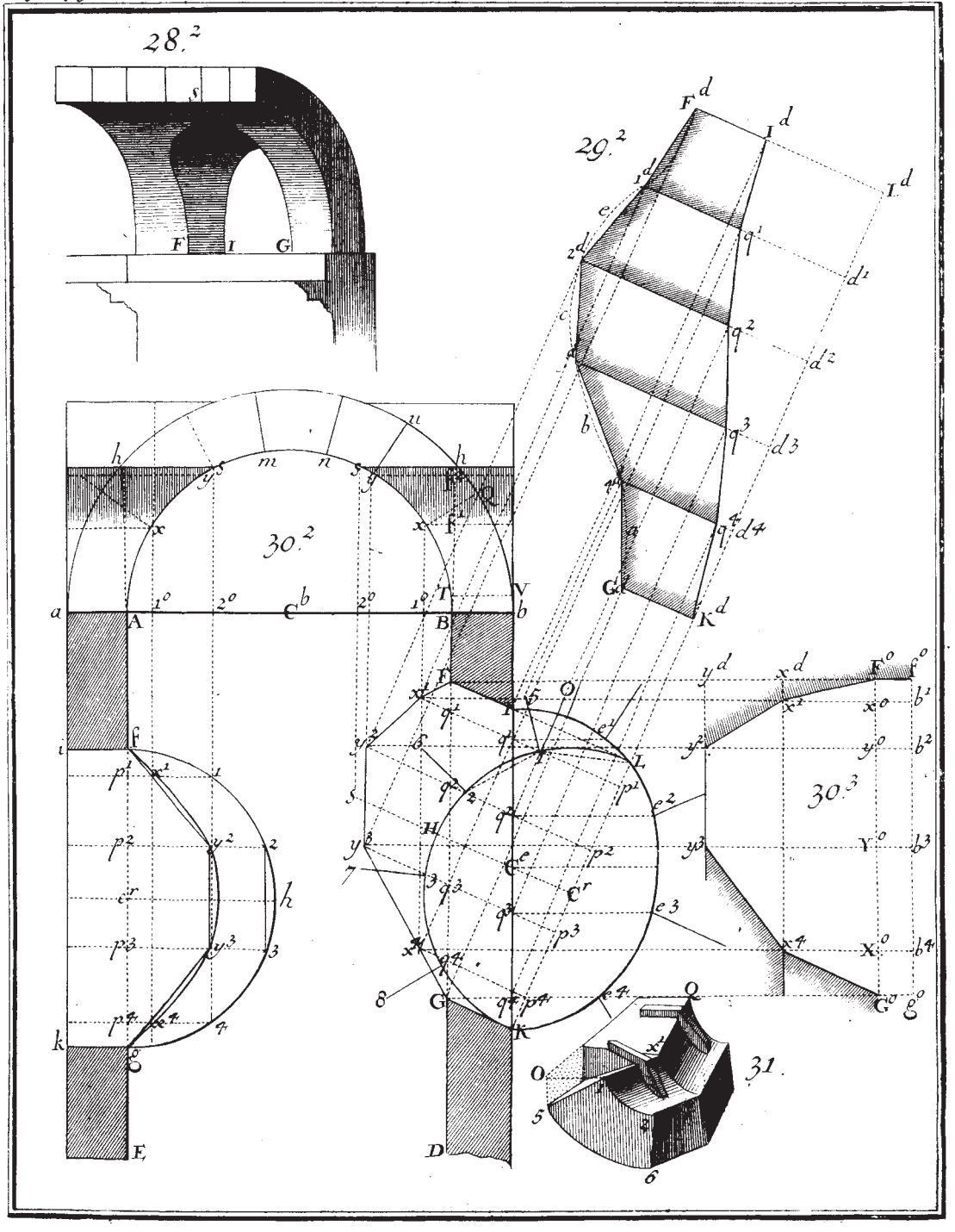
Per il primo modo, avendo tracciato la corda *FG*, si farà dapprima il pennacchio sferico *AFG*, nello stesso modo usato per la volta precedente della ***Fig.28***, dove esso è una porzione di volta a botte regolare cilindrica.

Poi vi si aggiungerà la lunetta, di cui *F m G* è l'intradosso; avendo così diviso la corda *AG* in *M*, & avendo formato l'intradosso di mezzeria di questo pennacchio sferico su *AM*, come si sono formati quelli degli spigoli *AG* & *AF*, si metterà questo intradosso da parte, come a*TM°*; poi, avendo tracciato la retta m^t M^o, parallela a *a* m^a, & uguale a *m M* della pianta orizzontale, si traccerà (attraverso il problema 3, del secondo libro) la tangente *T* m^t , che formerà la strombatura superiore della lunetta di mezzo, & seguendo questo profilo si finirà il suo tratto nel modo che abbiamo spiegato prima per le porzioni di botte. L'unica differenza

di una volta a botte orizzontale che ne interseca un'altra uguale; qui invece se ne ha una verticale, che ne interseca una orizzontale; così prendendo la linea $m^a M^o$, per una orizzontale, si ricadrà nello stesso caso.
Il secondo modo, per cui si fa il pennacchio sferico con superficie irregolare, dovrebbe essere rinviato al capitolo in cui tratteremo l'intersezione di queste superfici, se i lati di spigolo non fossero dati; ma siccome lo sono, l'intersezione delle superfici è nota & regolare.
Innanzitutto, questo pennacchio sferico potrebbe essere una porzione triangolare di una sfera regolare, se gli intradossi degli spigoli non fossero determinati in porzioni d'ellisse, per la fuga necessaria dell'intradosso originario *AHB*, & per l'altezza uguale data anch'essa all'intradosso del *formerêt A h E*, perché, facendo un arco di cerchio su ciascuno dei raggi dati *AG* & *AF* delle curve dell'intradosso degli spigoli, si avrebbe un triangolo sferico di cui il terzo lato sarebbe *F m G*.
A questo punto però succederebbe che gli intradossi dell'arco doppio *AB* & del *formerêt AE* non sarebbero entrambi composti da una sola curva semiellittica, ma uno sarebbe composto da due archi che formerebbero un angolo in chiave, come le volte gotiche; poiché i piani verticali passanti per gli spigoli *AG* & *AF* non sono tangenti al cerchio *FGIK* in *G* & in *F*, dato che non sono perpendicolari ai raggi del soffitto, la sezione della sfera passante per *AF* non formerà un arco di 90°, e nemmeno *AG*, che formerà un angolo maggiore di quello formato da *AF*, perché l'angolo *AGK* si avvicina più ad un angolo retto che non *AFI*.
Non ci resta dunque di meno che raccordare tutte queste porzioni di volte a botte con il soffitto e formare il pennacchio sferico di mezzeria in forma di superficie di sferoide irregolare.
Avendo trovato le proiezioni delle divisioni longitudinali agli spigoli, come nella volta precedente (***Fig.28***) ai punti *q* & *r*, si prenderanno le distanze del centro C^l del soffitto ai punti *q* & q^2 dello spigolo *AG* che è il più lontano, & portando le punte del compasso aperte di questa distanza successivamente ai punti *q* & *r*, da questi due punti presi come centri, si faranno delle sezioni in *z*, dove ci saranno i centri degli archi *qnr* etc., che saranno le proiezioni delle divisioni longitudinali del pennacchio sferico di mezzeria, & che serviranno per tracciare tanti archi quanti si vorrà tra i due spigoli *AG*, *AF*: Ne daremo soltanto uno verso la mezzeria, per esempio in *z*, di cui l'arco è q^2n *r*.
Dal punto *A* al punto *m*, preso arbitrariamente sull'arco *F m G*, si traccerà una linea che taglierà gli archi trasversali *q r*, *q r*, nei punti *n*, *n*; si riporteranno poi su *AB* le lunghezze $A\ n^2$, $A\ n^3$, *A m*, in $A\ N^2$, $A\ N^2$, $A\ N^3$, *AQ*, per innalzare su questi punti $N^2\ N^3\ Q$, delle perpendicolari uguali alle corrispondenti dell'intradosso primitivo *p2 p3*, *CH*; poi attraverso i punti *1, 2, 3*, si tracceranno delle linee orizzontali che intersecheranno queste perpendicolari nei punti $x^1\ x^2\ x^3\ V$, per i quali si traccerà la curva dell'intradosso, di cui *A m* è la proiezione, e così altre linee di sezione che si potranno tracciare per altri punti per esempio *A d*.
Essendo date le proiezioni delle divisioni longitudinali & i profili delle perpendicolari, questa volta si traccerà sulla pietra come le volte di spigolo semplice, avendo solamente riguardo per le differenze degli angoli, che saranno misti quando i conci saranno fatti; ma dato che si possono abbozzare prendendo le corde degli archi, come se fossero rettilinei, la conformità di questa volta con la precedente ci dispensa dall'entrare in maggiori dettagli, che sarebbero solo una ripetizione di quello che abbiamo appena detto, osservando solamente che l'altra, avendo l'intradosso del concio cilindrico, si può fare à la regle, & questa, essendo a doppia curvatura si può intersecare soltanto con diversi cerches, come tutte le superfici concave irregolari, seguendo quello che abbiamo detto all'inizio del quarto libro.

page 43.

Pl. 73.



SULLA TERMINAZIONE DI UNA VOLTA A BOTTA, CHE NE INTERSECA UN'ALTRA DI ALTEZZA DIVERSA IN TERMINI D'ARTE LUNETTA DIRITTA O DI SBIECO DI LIVELLO IN UNA VOLTA A BOTTE DI LIVELLO

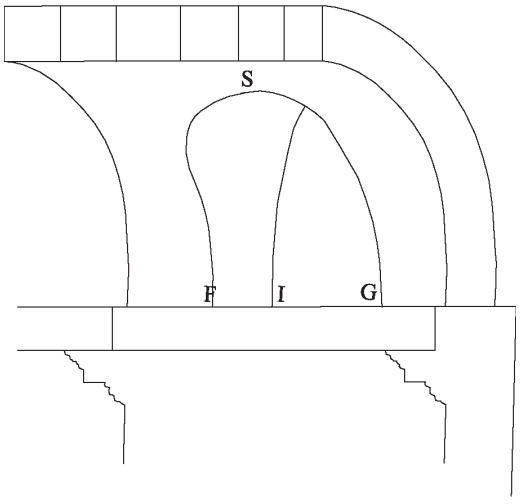


Fig. 28.[2] Incontro di due volte a botte di altezze diverse: lunetta (diritta o di sbieco).

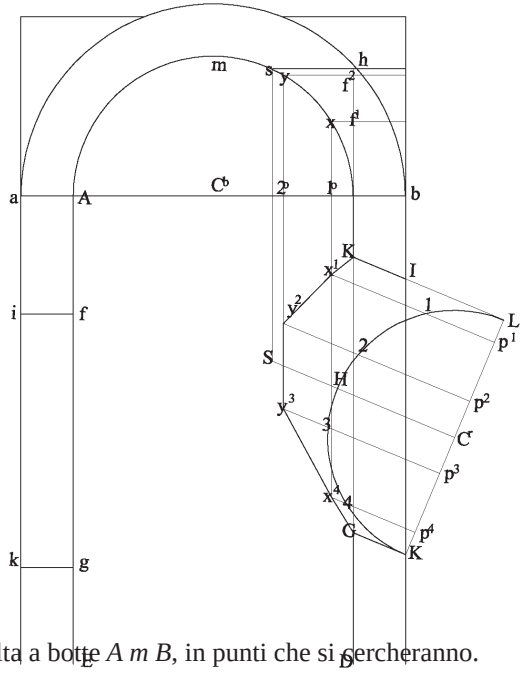
Si chiama lunetta l'incontro di due volte a botte di cui l'angolo di intersezione forma un profilo che racchiude uno spazio a forma di croissant o di luna, da dove trae il suo nome; cosa che non succede se non quando una delle volte a botte è meno alta dell'altra, perché quando sono tutte due della stessa altezza dopo l'imposta questo incontro forma due curve piane che si incrociano con un angolo sporgente, nel punto in cui la lunetta fa una curva a doppia curvatura continua, senza l'interruzione di alcun angolo; tuttavia si dà qualche volta questo nome alle parti delle volte di spigolo, ma impropriamente.

Sia (***Fig.30.***[2]) il parallelogramma *ABDE* il piano orizzontale di una volta a botte *A mB*, & *FGIK*, quello di un'altra volta a botte di minore altezza, che lo interseca obliquamente, o se si vuole perpendicolarmente come *i f g k* dell'altro lato, cosa che forma una lunetta di sbieco o diritta; ci richiameremo al tratto di quella di sbieco, perché questo comprende quello di quella diritta.

1. Nella figura si legge K.

Si traccerà per un punto *k*[1], preso arbitrariamente su un lato *KG*, una perpendicolare a questo lato, che incontra il lato opposto *FI* prolungato fino a *L*.

Su *KL*, come diametro, si farà un semicerchio *KHL*, che formerà l'arco retto della lunetta, & l'intradosso d'origine, che si dividerà nei sui conci nei punti *1, 2, 3, 4*, per i quali si tracceranno delle parallele alla direzione dei piedritti *FI* oppure *GK*, prolungati indefinitamente da una parte & dall'altra delle divisioni, che taglieranno il diametro dell'arco retto *LK*, nei punti p^1 p^2 p^3 p^4, & le proiezioni degli incontri delle divisioni della



grande volta a botte *A m B*, in punti che si cercheranno.

Fig. 30.[2] Lunetta di sbieco in una volte a botte e determinazione delle terminazioni degli intradossi piatti dei conci.

Avendo fatto *B h* perpendicolare ad *AB*, vi si tracceranno le altezze dalle *retombées* dell'intradosso *KHL* della lunetta, *1* p^1 in *B* f^1, *2* p^2 in *B* f^2, & l'altezza della mezzeria *CH* in *B h*; per i punti *h* f^2 f^1, si tracceranno delle parallele ad *AB*, che taglieranno l'intradosso della grande volta a botte *A m B* nei punti *s, y, x*, dei quali si abbasseranno delle perpendicolari, che incontreranno le proiezioni delle divisioni della volta a botte, che forma la lunetta nei punti x^1, y^3[(2)], *S*, y^3, x^4, che si cercano; si tracceranno per questi punti delle linee rette *F* x^1, y^2 y^2 y^3, x^4, x^4 *G*[(1)], che daranno le

2. Nella figura c'è scritto y^2.

terminazioni degli intradossi piatti dei conci delle due volte a botte. Non parleremo della mezzeria *S*, perché è al di fuori dell'intradosso piatto del concio di chiave.
Bisogna adesso cercare la superficie degli intradossi piatti dei conci, che sono ristretti dalla proiezione nell'una & nell'altra volta; ecco cosa bisogna fare per svilupparli.

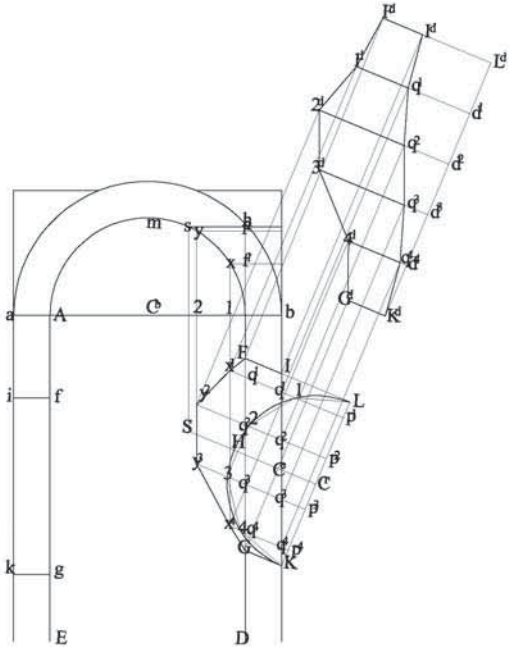


Fig. 30.²e 29.² Ricerca della superficie degli intradossi piatti dei conci.

Innanzitutto, per formare i pannelli dell'intradosso piatto dei conci della piccola volta a botte che forma in quella grande questa rientranza, chiamata lunetta, si traccerà a parte una linea $K^d\ L^d$ (***Fig. 29.²***) o se lo spazio lo permette, si prolungherà il diametro KL dell'arco retto indefinitamente verso L^d, & avendo preso su questa linea prolungata un punto K^d, arbitrario, si porteranno in seguito tutte le corde di divisione dell'arco retto *L 1, 1 2, 2 3, 3 4, 4 K* in $L^d\ d^1$, $d^2\ d^3$, etc. da cui si tracceranno delle perpendicolari alla direttrice $L^d\ K^d$, prolungate indefinitamente, sulle quali si riporteranno successivamente le distanze orizzontali del diametro *KL*, dalle linee *KI* oppure *GF*, prese sulle proiezioni delle divisioni longitudinali $p^1\ q^1$, $p^2\ q^2$, etc. per avere i punti I^d, $q^1\ q^2\ q^3$, etc.

1. Dalla figura si deduce che dovrebbe essere scritto F x^1, $x^1\ y^2$, $y^2\ y^3$, $y^3\ x^4$, x^4 G.

della ***Fig. 29.²***, cosa che ci darà lo sbieco delle teste del lato di entrata della lunetta.
Per avere l'altra testa di ogni pannello all'intersezione, si prenderanno le lunghezze o le distanze orizzontali del diametro *KL*, ai punti x^1, y^2, y^3, $x^{4(2)}$, che si porteranno sulle perpendicolari alla direttrice $L^d\ K^d$, per avere i punti F^d, 1^d, 2^d, 3^d, 4^d, $G^{d(3)}$, per i quali si tracceranno mutuamente delle rette, che daranno lo sbieco richiesto per l'angolo di intersezione.
Se al posto di queste linee rette se ne traccia una curva $G^d\ a\ 4^d\ b\ 3^d\ c$, etc., si avrà lo sviluppo dello spigolo a doppia curvatura dell'intersezione, che in questo caso è quello dell' ellipsimbre, supponendo che le corde prese sull'arco retto siano così piccole & in così gran numero da non differire tanto dall'arco retto e questa curva di sviluppo potrebbe servire a tracciare questo spigolo, sull'intradosso della piccola volta a botte tagliata in forma di cilindro se si facessero i pannelli di materiale flessibile, come cartone, latta, lamine di piombo, etc.

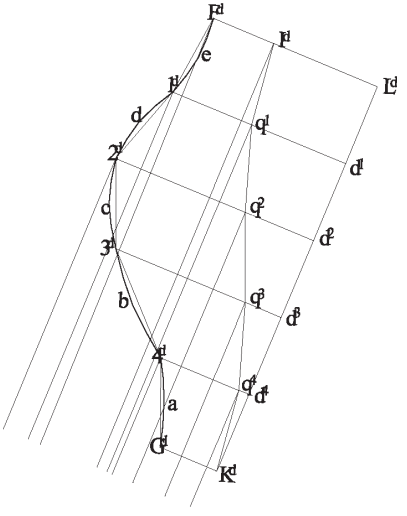


Fig. 29.² Parallelogramma K^dF^d: sviluppo dello spigolo a doppia curvatura.

Si può rimarcare che, nello sviluppo della ***Fig. 29.²***, si è presa la parte di volta a botte di sbieco, compresa nello spessore del muro *FIKG*, che si poteva omettere perché non trattandosi qui che della lunetta, sarebbe stata sufficiente soltanto la parte *FGSF*.
L'esempio di questa lunetta di sbieco servirà anche per la lunetta diritta *f h g*, essendo il cui tratto meno elaborato, sarà di conseguenza molto più facile, perché il cerchio *f h g* è non soltanto l'intradosso dell'arco retto, ma anche quello della faccia della lunetta sul paramento del muro;

2. Per completezza avremmo dovuto trovare la scritta F, x^1, y^2, y^3, x^4, G.
3. Nella figura corrispondente l'altezza F^d non è data, coerentemente alla descrizione del procedimento, da LF, ma da p^3y^3 e quindi l'autore trova un concio più alto del dovuto.

cosa che non succede per la lunetta di sbieco il cui centro è differente da quello dell'arco retto *LHK*.
Sarà facile tracciare questo intradosso ellittico attraverso il Prob. 8 del Secondo Libro.

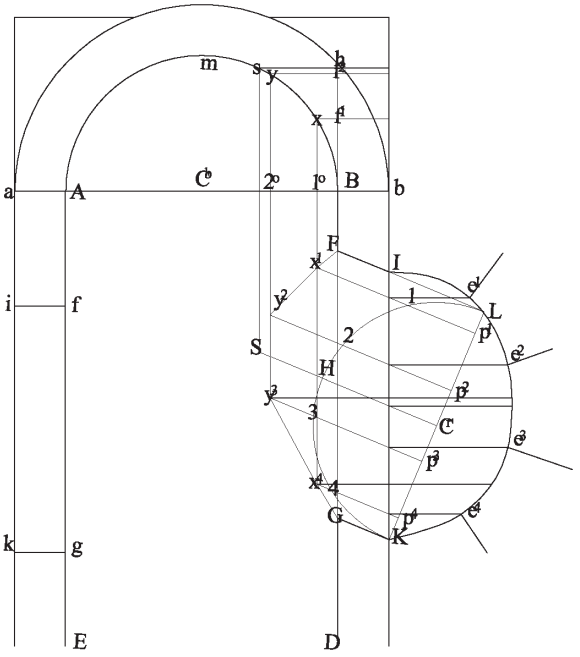


Fig. 30.² Sviluppo dell'intradosso ellittico attraverso il Prob. 8 del Secondo Libro : determinazione della faccia della lunetta sul paramento del muro.

Secondariamente,ecco come si procede per fare lo sviluppo dei pannelli dell'intradosso piatto del concio della parte della grande volta, nella quale la lunetta fa una rientranza.
Si tracceranno per tutti i punti trovati *F, x, y, y³, x⁴, G*(1), della proiezione della lunetta, delle linee perpendicolari alla direzione *BD* al di dentro o al di fuori della volta a botte, come nella ***Fig.30.³***, prolungate indefinitamente, alle quali si manderà,a una distanza arbitraria, una perpendicolare *Fº Gº*, che le taglierà nei punti *xº yº, Yº, Xº*; questa linea rappresenterà l'origine della volta *ABDE*, nella parte *FG* della sua imposta *BD*, se la lunetta nasce sulla stessa imposta; ma se essa nascesse più in alto come in *TV*, bisognerebbe che essa si trovasse al di sopra di *B*, della lunghezza dell'arco *BT* rettificato; così in questo caso la linea dell'imposta della grande volta a botte dovrebbe essere più bassa in *fº gº*.
Supponendo che *Fº* sia il punto dell'origine, si porterà la corda *B x* in *Fº xᵈ*, & poi la corda *x y* dello stesso profilo, in *xᵈ yᵈ*, & per i punti *xᵈ yᵏ*(2), si tracceranno delle parallele a *Fº Gº*, che daranno attraverso la loro intersezione con le linee provenienti dalla proiezione della lunetta, tutti i punti dello sviluppo che si vuole fare; la più alta passante per *yᵈ*, darà i due punti *y² y³*, comuni all'intradosso piatto del concio di chiave & delle assises collaterali; la più bassa *xᵈ x⁴*, darà i punti *x¹ x⁴* delle giaciture superiori dei primi conci & delle giaciture inferiori dei secondi conci, per le intersezioni delle linee *x x*º(3), & *x⁴ Xº*, come mostra la ***Fig.30.³***.

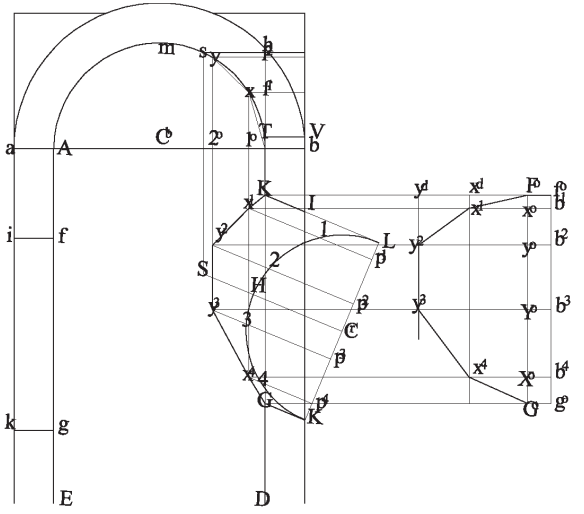


Fig. 30.² e 30.³ Sviluppo dell'intradosso piatto dei conci della volta più alta nella quale viene aperta la lunetta.

Attraverso la mezzeria di questo sviluppo, si hanno gli angoli delle teste dell'intradosso piatto dei conci della grande volta a botte, che fanno capo a quelli della lunetta, per esempio *xᵈ x¹ Fº* per il primo che si deve congiungere con la testa *Fᵈ 1ᵈ* del primo pannello dell'intradosso piatto del concio della ***Fig.29.²***, e così per gli altri , come l'angolo *yᵈ y² x¹*, per la testa del secondo intradosso piatto del concio della volta a botte, che si deve congiungere alla testa del secondo pannello della lunetta *1ᵈ 2ᵈ*, della ***Fig.29.²***.
Si rimarcherà che parliamo qui soltanto delle teste degli intradossi piatti dei conci, che sono sempre linee rette, perché se si prendesse lo sviluppo dello spigolo a doppia curvatura dei due intradossi dei conci della volta a botte & della lunetta, non si potrebbero far congiungere queste due curve se non nel rivestimento che si potrebbe fare attraverso pannelli flessibili inutili alla pratica, come si riconoscerà nell'applicazione del tratto sulla pietra.

1. Al posto di x, y leggi x^1, y^2.
2. Leggi x^d y^d.
3. Leggi x^1 x^o.

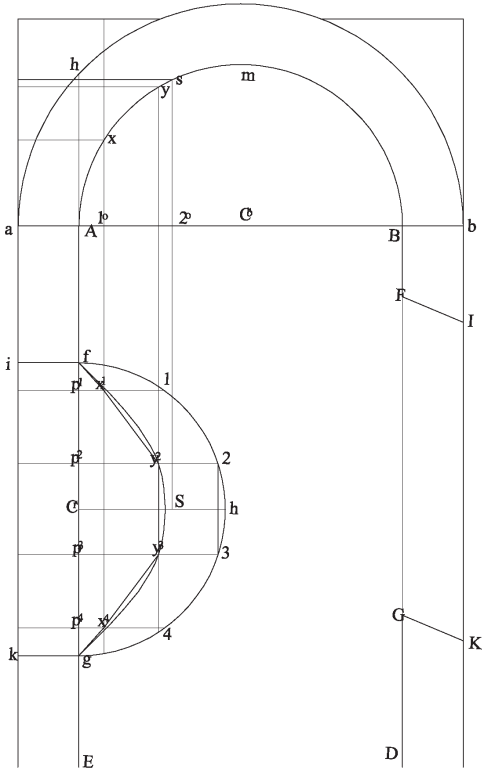


Fig. 30.[2] Lunetta diritta tracciata seguendo il procedimento utilizzato per la lunetta di sbieco come indicato da Frézier.

APPLICAZIONE DEL TRATTO SULLA PIETRA

Avendo preparato un rivestimento che serva da letto orizzontale di appoggio, si prenderà il *biveau* dell'angolo che forma la direzione del giunto orizzontale della Lunetta con quello della volta preso sul piano orizzontale; per esempio, supponendo che si voglia fare il secondo concio verso *B*, si prenderà l'angolo $p^1x^1j°$, con una *sauterelle* o una *fausse equerre*, e la si applicherà sul rivestimento fatto; in seguito, con il *biveau* dell'intradosso della lunetta e dell'orizzonte *0 1 2*, si abbatterà la pietra lungo la linea p^1x^1, sulla quale si tenderanno sempre le aste a squadra; così si formerà una superficie sulla quale si applicherà il panneau dell'intradosso $1^d\,2^d\,q^2\,q^d$, da cui si traccerà il contorno della testa ed il resto, se ce n'è bisogno.

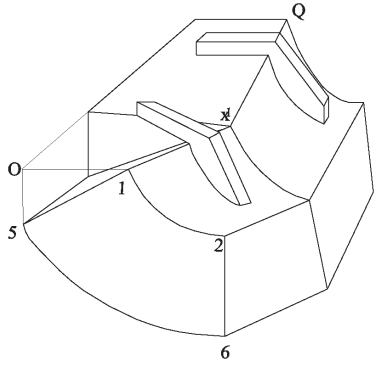


Fig. 31 Taglio di un concio.

In seguito, si prenderà il *biveau* dell'intradosso e dell'orizzontedella volta sulla giacitura stessa f^1xy e con questo si abbatterà la pietra seguendo la linea $x^1\,I°$, aussi quarriment su questa linea, da cui risulterà una seconda superficie, che formerà con la prima uno spigolo saliente, che si dirigerà applicando sulla superficie della lunetta il panneau dell'intradosso piatto della volta $x^dx^1y^2y^d$, posando su questo spigolo il lato x^1y^2 e x^dx'sullo spigolo della giacitura orizzontale e si traccerà il contorno di questo panneau come minimo per la giacitura superiore y^dy^2, perché il lato y^dx^d può essere più avanzato o più ritirato, seguendo la lunghezza della pietra e del collegamento che deve fare.

Essendo stati tracciati gli intradossi piatti, si abbatterà la pietra con i *biveaux* dell'orizzontale e dell'intradosso, presi ad arco retto di solito su ogni *berceau*, come *L1°5* per la giacitura superiore, a lunetta al primo concio *5°1°2*, per la giacitura inferiore del secondo *1°2°6*, per quello superiore allo stesso modo etc.

Parimenti, per la parte del concio che entra nella volta si taglieranno le giaciture con il *biveau Qxy* per la giacitura inferiore e *uyx* per quella superiore. L'incontro di queste giaciture formerà un angolo, uno spigolo saliente alla giacitura superiore ed un angolo rientrante in quella inferiore, come nelle volte di spigolo di cui abbiamo parlato.

Circa le teste, le si taglierà sempre a squadra sulla giacitura orizzontale prima di formare le giaciture.

Ultimate tutte le superfici piane, che comprendono il concio, non si tratterà che d'incavare l'intradosso seguendo la cherche dell'arco della volta più conveniente , per esempio per la parte che entra nella lunetta,

la si formerà sull'arco *1°2* e per quella della volta sull'arco *xy*, ed il concio sarà finito.

OSSERVAZIONE

E' bene fare attenzione al modo in cui si applica questo tratto sulla pietra, perché è il modello del nostro metodo, quello con cui taglieremo tutti gli spigoli da cui si otterranno i panneaux dell'intradosso piatto dei due lati del concio; è per questo che rinvieremo spesso il lettore alla lunetta dritta o di sbieco per l'applicazione di questo metodo.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA

Poiché lo spigolo della lunetta, di cui si sta parlando, è una curva doppia, essa non può essere mai espressa attraverso una linea dritta; tuttavia, siccome si possono inscrivere dei prismi in ciascuna delle volte cilindriche che s'incontrano, le intersezioni dei loro angoli finiranno in alcuni punti comuni a questa linea curva e le linee d'intersezione di ciascuno dei piani dei prismi potranno essere considerate come delle specie di corde di spigolo. Specie di corde, perché le corde propriamente dette sottendono gli archi delle curve piane; comunque sia, incavando questi prismi dandogli cavità cilindriche, questa curva doppia si forma da sola, dall'incontro di due segmenti cilindrici.

Ora, se si considera la grande volta *AmB* come un prisma, si vedrà attraverso la costruzione che la ***Fig.31.***[2](1) ne è uno sviluppo a partire dal punto *S*, dove termina la sommità della piccola volta a botte, che la penetra fino al punto *B*, dove c'è l'imposta, che si può supporre comune alle due volte, se quella piccola si origina alla stessa altezza; così il poligono $F°x^r y^2 y^3 x^4 G°$[(2)] sarà il vuoto che il piccolo prisma forma in quello grande attraverso l'intersezione, e se attraverso i suoi angoli si traccia a mano una linea curva, essa rappresenterà lo spigolo di intersezione dei due cilindri. Si può anche vedere, attraverso la nostra costruzione, che la ***Fig.29***[2] è lo sviluppo esatto del piccolo prisma compreso tra un muro a piombo e la superficie di quello grande, e che inscrivendo tutte le linee $1^d q^1 q^2 q^3 q^4 K^d$ in un semicerchio *KHL*, da dove sono tracciate, esse si ordineranno tutte su una stessa superficie piana, benché nello sviluppo esse siano ordinate in linea curva, poiché abbiamo dimostrato nel terzo Libro, pagina 330 e 331, che lo sviluppo di un cerchio su un cilindro scaleno, è una curva di questa specie.

Non è meno chiaro che è stata anche trovata la terminazione delle superfici del piccolo prisma in quella del grande, perché avendo supposto orizzontale la sua direzione, le proiezioni delle divisioni di queste superfici, che sono quelle degli angoli dei piani, saranno loro parallele, di conseguenza uguali in lunghezza; non è lo stesso per quanto riguarda la loro larghezza, che è inclinata all'orizzonte in modo diverso per ciascuno.

Da cui segue che se si traccia una linea curva per i punti trovati da questo sviluppo $F^d 2^d G^d$, si avrà quello della curva doppia sull'intradosso della piccola volta a botte; e questa, piegata, si ricongiungerà alla precedente $F°y^2G°$, piegata sulla grande, benché la loro differenza sembri molto grande; cosa che è peraltro evidente, poiché ognuna rappresenta lo spigolo comune alle due volte a botte.

Riguardo all'esattezza dell'applicazione del tratto, per trovare l'inclinazione degli intradossi piatti : è chiaro che è molto semplice e molto adatta, dato che rapporta differenti inclinazioni al piano orizzontale, che è sempre costante e comune alle loro origini.

Da questo fatto segue che le inclinazioni delle giaciture sono determinate, dato che esse dipendono da quelle degli intradossi; poiché questo metodo fornisce i due punti degli angoli della loro testa e una linea del loro lato, che è il giunto orizzontale, è evidente che tutte le loro superfici sono date conseguentemente e che seguendo questo metodo si può fare a meno di fare i *panneaux de lit*, che sono indispensabili seguendo il metodo degli Auteurs; in questo modo si ha un grande vantaggio rispetto all'antichità.

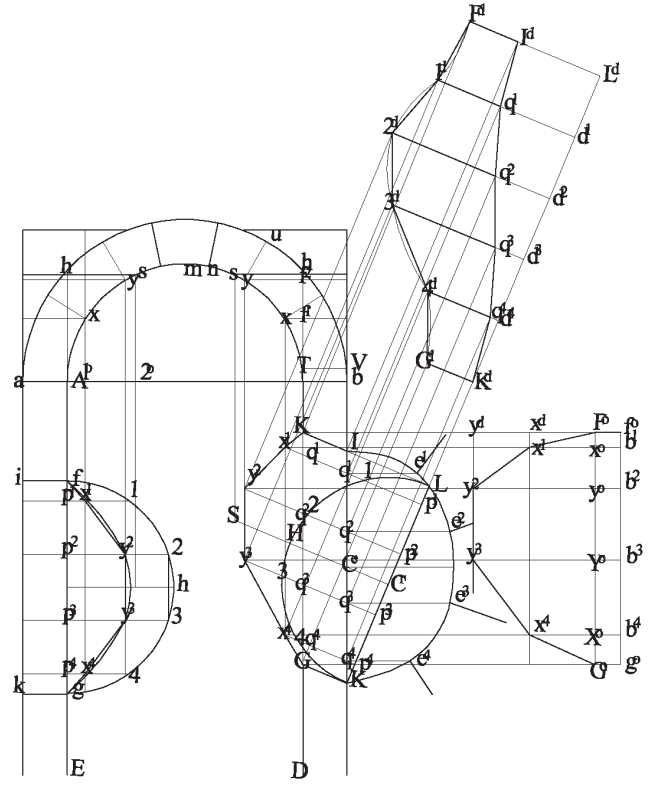
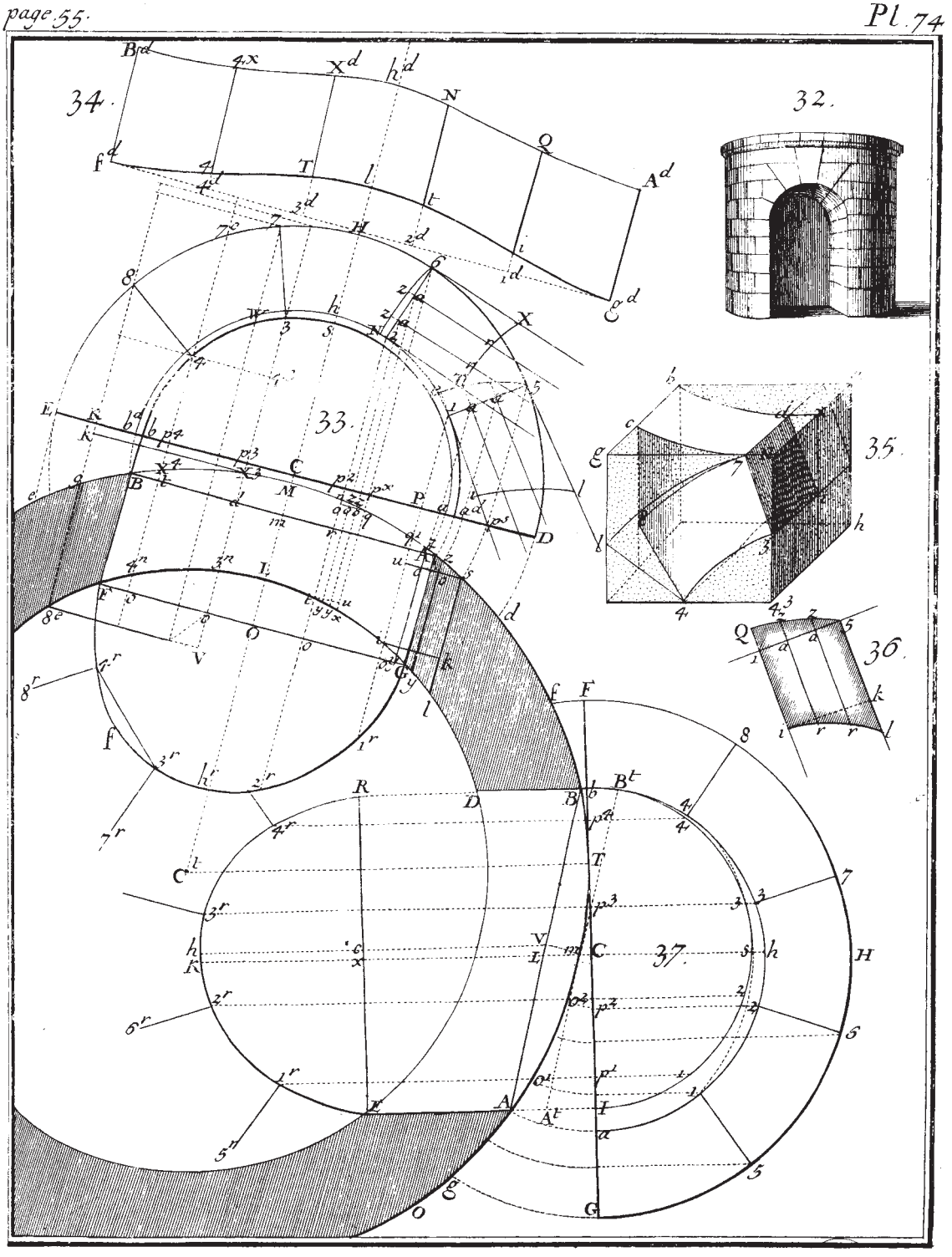


Fig. 30.[2]***, 29.***[2] ***e 30.***[3] Lunette diritta e di sbieco in una volta a botte il cui piano orizzontale è BmA.

1. Leggi ***Fig. 30.***[2].
2. Leggi $Fx^1y^2y^3x^4G$.


page 55.
Pl. 74
34.
32.
33.
35.
36.
37.

SULL'INCONTRO DELLE VOLTE A BOTTE ORIZZONTALI CON QUELLE VERTICALI.

ESEMPIO

PORTA DRITTA O DI SBIECO IN UNA TORRE RONDE[1] O IN UNA TORRE CREUSE[2]

Siccome si tratta in questo caso di formare degli spigoli a doppia curvatura, non vi è mezzo più esatto nel suo principio, che quello dell'operazione che si chiama par équarrissement[3], attraverso la quale si formano queste curve senza conoscere altra cosa che le loro proiezioni.
Si può anche eseguire questo lavoro par panneaux[4], con un'esattezza sufficiente alla pratica, passando sopra alle difficoltà geometriche che s'incontrano (di cui alcune sono insormontabili) perché la grossolanità delle opere fatte a mano non può giungere alla perfezione a cui il ragionamento vorrebbe condurle.

Mi sembra tuttavia di dimostrare, a proposito, queste difficoltà, per chiarire lo spirito degli Apareilleures[5], e mostrare a quale livello di perfezione possono lavorare attraverso il metodo dei panneaux.

La prima difficoltà è quella di rettificare la curvatura del cerchio, che bisogna stendere in linea retta in questa parte dell'arco orizzontale della torre tonda o cava, compresa tra gli stipiti della porta, e dividere quest' arco nello stesso modo in cui era stato diviso, quando era curvo, dalle perpendicolari di divisione dei conci della centina della faccia della porta, tracciata su di una superficie piana tangente alla torre.

Questa difficoltà che, come si sa, è difficilmente superabile, non produce alcuna conseguenza nella pratica, dove è sufficiente prendere di seguito tante piccole corde, che si diversificano poco dagli archi (Fij), e ordinarle su di una linea retta, o, se si vuole, prendere meccanicamente il contorno curvo con un filo che poi si stende.

La seconda difficoltà consiste nella descrizione della curva formata dalla circonferenza della centina primitiva stesa su una superficie piana per mezzo delle ordinate del cerchio, alzate perpendicolarmente sulle ascisse, per cui i rapporti cambiano ad ogni divisione, a seconda del fatto che l'arco rettificato si discosti o si avvicini al parallelismo con il diametro di una centina tangente alla torre; e questa curva non può che essere tracciata a mano, o con una riga pieghevole appoggiata su più punti trovati.

La terza difficoltà consiste nella curvatura che bisogna dare alle teste dei panneaux de lit e dell'intradosso piatto, curvatura che non è circolare come la supponevano gli Autori dei Libri sul taglio della pietra per la loro operazione des trois pointes perdus[6] , ma ellittica nelle torri senza talud[7] perché le corde degli archi di queste teste giacciono in un piano inclinato rispetto all'asse del cilindro de bout, che è la torre concava o convessa.

Ho detto nelle torri senza parte inclinata perché in quelle che invece l'hanno, questa curva diventa spesso un arco di parabola o d'iperbole, essendo allora la torre un tronco di cono, che può essere tagliato dai piani dei letti, seguendo l'inclinazione che forma queste curve.

Quanto alla curva dello spigolo che forma il punto d'incontro dell'intradosso della porta con il paramento cavo o tondo della torre, essa non può essere una sezione conica perché è a doppia curvatura, e precisamente un cicloïmbre quando la porta è dritta e a tutto sesto, e un ellipsimbre negli altri casi, com'è stato dimostrato al Sesto capitolo del Primo libro.

Dando per scontata la conoscenza di queste cose, parleremo ora del metodo di eseguire questo tipo di opera. Sia (***Pl.74 Fig.33-37***) una porzione di torre che sarà chiamata ronde, se si suppone la sua faccia *BAT*[8] all'esterno, e creuse se essa è vuota all'interno in *FGDE*, nella

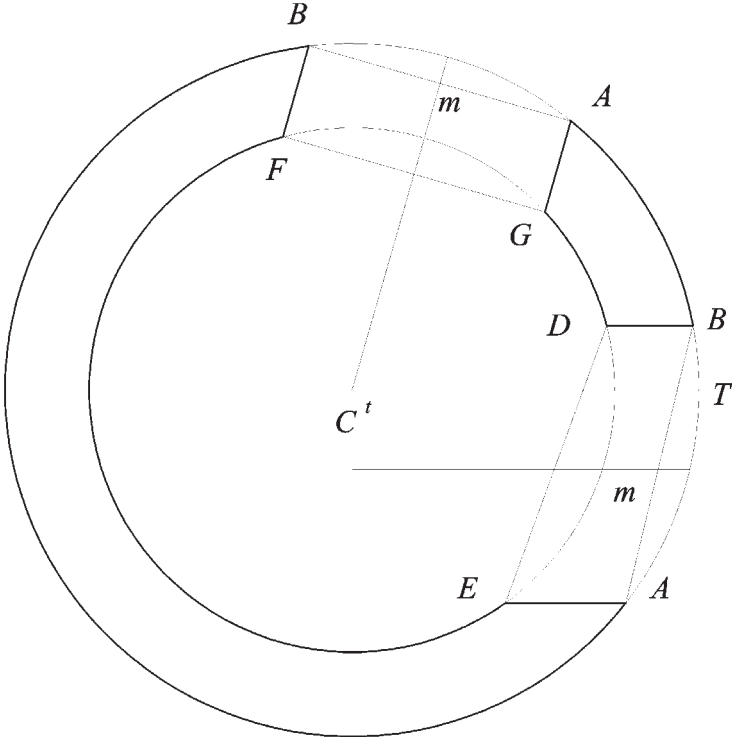


Fig.33-37. Porta dritta o di sbieco

quale noi supporremo due aperture di porte, di cui l'una, come *BA*, sia dritta, essendo i suoi piedritti *BF, AG* paralleli alla direzione di una linea

[1] tonda
[2] cava
[3] per squadratura
[4] per pannelli
[5] Sagomatori
[6] Rif.Op.Cit.
[7] parte inclinata, a scarpata
[8] Nel testo originale si legge *BATO* ma la lettera *O* non indica alcun punto nel disegno

della mezzeria *Cm*, che passa per il centro *C* della torre e il punto medio m della corda *BA*, che essa taglia perpendicolarmente.

L'altra di cui la direzione della mezzeria *KL* è obliqua sulla corda *BA*, cosicché essa non passa per il centro e sarà chiamata di sbieco.

PRIMO CASO
SULLA PORTA DRITTA IN UNA TORRE RONDE *O* CREUSE

Si comincerà con il determinare la scelta della centina primitiva, che si può prendere a arco retto o a arco con faccia curva; è più comodo scegliere il primo, perché può essere descritto su di una superficie piana e perché il secondo non può esserlo che per lo sviluppo; tuttavia se si vuole ottenere una perfetta uguaglianza tra le teste dei conci, non si può farlo scegliendo l'arco retto come centina primitiva, perché da questo risultano delle divisioni un po' diverse sulle teste della faccia, che si restringono dalle imposte fino alla chiave; il motivo di tutto questo è il fatto che gli archi orizzontali della torre si avvicinano tanto più al parallelismo con l'arco retto quanto più si allontanano dalle imposte di destra e di sinistra, come si vede nella figura 33, in cui l'arco X^4X^3 è più grande rispetto al segmento *td*, di quanto non lo sia l'arco X^3n nei confronti di dr. Questa cosa fa sì che gli Architetti scelgano spesso la centina con faccia curva per primitiva, e allora essi chiamano questa opera "Porta dritta in una torre tonda o cava par têtes égales" (per teste uguali).

PRIMO METODO
L'ARCO RETTO È PRESO COME CENTINA PRIMITIVA

Sulla corda *BA*, larghezza della porta, o su di una parallela ed uguale *ba*, come diametro preso tra i piedritti *FB* e *GA* prolungati, si traccerà la centina circolare o ellittica, e avendola divisa nei suoi conci nei punti *1, 2, 3, 4*, si tracceranno per questi punti delle parallele ai piedritti, o, equivalentemente, alla direzione C^tC, che passa per il centro C^t della torre e per quello della centina *C*; tali parallele taglieranno l'arco convesso BMA[9] nei punti X^4X^3 etc. e quello convesso nei punti 4^n3^n ecc..

Se ne utilizzerà ugualmente per la centina dell'estradosso *EHD*, e si avranno attraverso questo metodo le intersezioni di tutte queste parallele con gli archi orizzontali della torre, concavi all'interno e convessi all'esterno; tali parallele daranno modo di formare I panneaux de lit, e le curve dei loro giunti di testa concave o convesse, problema in cui consiste

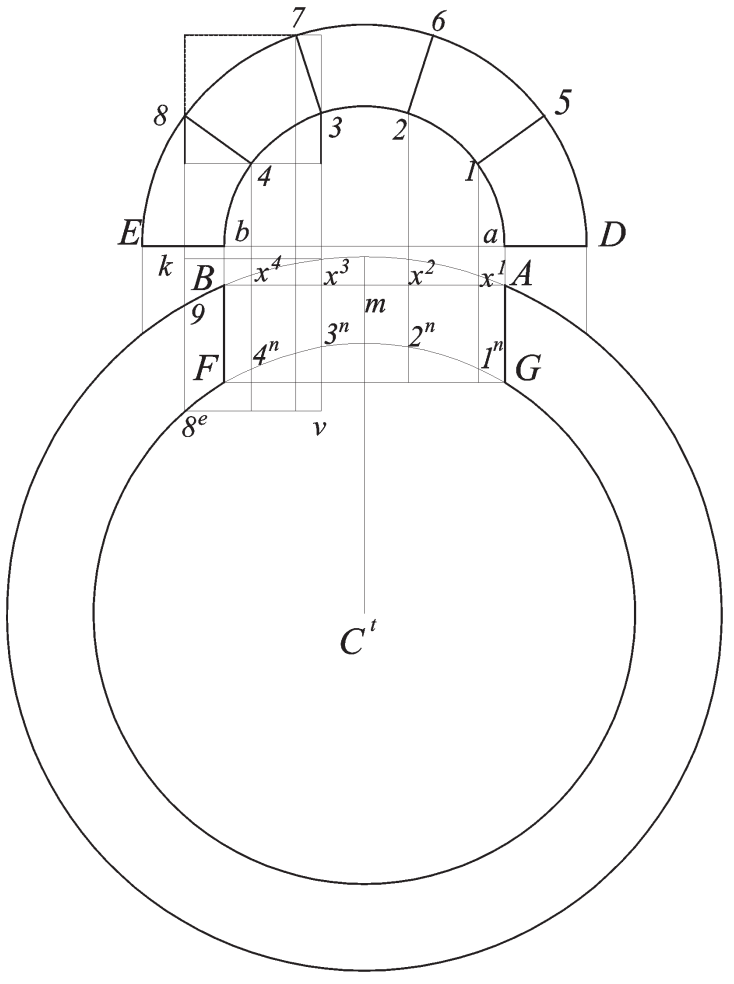
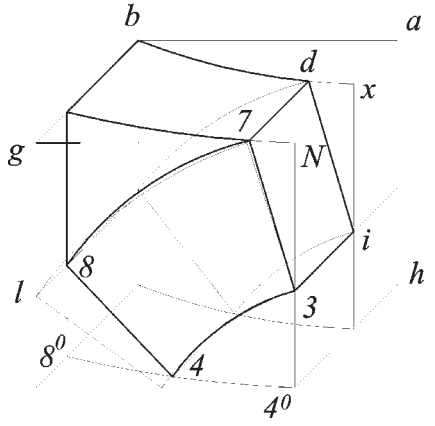


Fig. 33 Il primo metodo di costruzione

[illegible] differisce da quella di questa costruzione, in quanto il resto di essa non differisce in niente da quella delle volte a botte ordinarie.

Si può anche fare a meno di cercare le succitate curve dei giunti di testa, se si vuole tagliare ogni concio come se fosse la porzione di una volta a botte retta circoscritta alla porzione della torre che comprende l'intradosso della porta con il suo estradosso, come diremo, cosa che abbrevia molto l'operazione.

[9] Nel testo originale si legge *BcA*
[10] Nel testo originale si legge kp^3V8^e
[11] Da "Le carnet de Villard de Honnecourt":faccia di una pietra o di un muro che si vede in aggetto



PER L' EQUARRISSEMENT

Fig.35 Concio ottenuto per squadratura

Sia dato (***Fig.35***) un secondo concio al di sopra dell'imposta, come quello segnato *4 3 7 8* della figura 33, di cui la proiezione orizzontale è il parallelogramma kx^3V8^{e10}; supponendo questo concio fatto come una porzione di volta a botte retta, all'intradosso *4 3* , e al letto *4 8* al posto di tagliare l'estradosso seguendo la curva *8 7*, gli si farà un parement[11] come per un letto di livello, seguendo la linea *Na*, a squadra su un parement a piombo *3N*, come è rappresentato in figura 35, in *abgN*.

Si innalzerà poi sul disegno un panneau di triangolo misto $9kX^3$ che si poserà sulla giacitura orizzontale della figura 35 in *cgN*, ponendo il punto *9* in *c*, il punto *k* su *g* e il punto X^3 in *N*.

Si rileverà ugualmente dalla parte dell'incavo un panneau misto 8^e3^nV, che si applicherà sullo stesso letto orizzontale sull'interno, ponendo il punto 8^e sul punto *b*, il punto *V* su *a* e il punto 3^n su *x* della figura 35.

Tracciati i contorni di questo panneau sul letto *ag* della figura 35, si taglierà la pietra a squadra sul letto, seguendo gli archi tracciati, per formare all'esterno la superficie convessa $NC8^O4^{O12}$, e all'interno la superficie concava opposta; dopo di che con il biveau[13] misto a braccia mobili dell'intradosso e della sezione del letto superiore, posto a squadra sullo spigolo, passando per il punto *3*, si taglierà la pietra per formare il letto superiore e il concio sarà finito.

Non si è parlato delle linee *xi*, *c8*, che devono essere tracciate sui parement a piombo *bl* e *a3*, per fare bene gli spigoli, che si devono formare; benché si abbia poco l'abitudine di frazionare il tratto, si sa che è necessario darsi per guide il maggior numero di linee possibile; è per questo che si vede che bisogna tracciare sul parement a piombo *a3*, una linea *xi* parallela a *ah*, per segnare il primo spigolo di preparazione, benché si debba in seguito toglierla per il taglio *id*, *3 7*[14], e così sull'altro parement a piombo: una linea *c8* parallela a *gl*, che bisognerà ancora togliere se bisogna formare l'estradosso *8 7*.

Si vede che per la formazione di queste due superfici circolari concave e convesse, si dà ai giunti di testa *3 7*, *4 8*, una curvatura ellittica senza

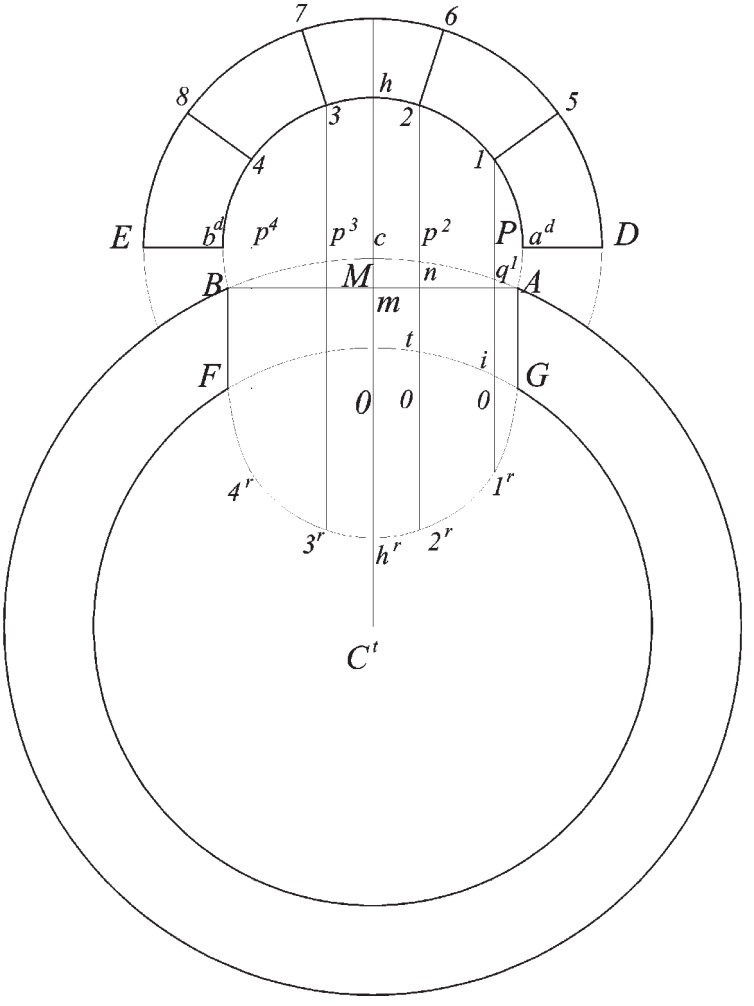


Fig.33b Secondo metodo:Sesto primitivo a superficie curva

[12] Sulla Planche,nella figura 35,nell'operazione di tagliare la pietra a squadra sul letto,non viene trovata geometricamente la superficie convessa $NC8^o8^o$.Il disegno é errato

[13] "...non é altro che uno strumento simile alla squadra, ma mentre la squadra si mantiene fissa, e le sue aste mobili, il biveau le ha mobili: in modo che si chiudano e si aprano come si vuole per fare tutti i tipi di angoli, così che se ne possano fare di retti, ottusi, acuti (...) inoltre le aste del biveau (...) presentano una forma curva secondo la curvatura dell'opera che si vuole realizzare." (PHILIBERT DE L'ORME, *Architecture*, Rouen, 1648)

[14] Nel testo originale si legge *3°8*

[15] Nel testo originale si legge *BcA*

conoscerla, perchè si formano dei cilindri che i letti piani, passando per questi giunti di testa, tagliano in modo obliquo; e che se si leva in seguito la parte cilindrica mista *7C8*, si formeranno sui contorni circolari *3 4* e *7 8* delle curve doppie che saranno del tipo che abbiamo chiamato cicloïmbre, e che sarebbero delle ellipsimbres, se questi archi *3 4*, *7 8*, fossero delle porzioni di centina rialzate o ribassate; così si formano delle curve esattamente uguali a come dovrebbero essere senza conoscerle; questo modo di realizzare la porta di una torre tonda o cava non ha altri inconvenienti se non un po' di spreco di pietra ed a volte addirittura niente, allorquando si facciano i letti di livello sull'estradosso, come si vede nell'apparecchio murario della figura 32.

SECONDO METODO
LA CENTINA PRIMITIVA HA SUPERFICIE CURVA, RONDE *O* CREUSE*, PER FORMARE DELLE TESTE UGUALI*

Si vede che la differenza del diametro *BA*, dell'arco retto della porta della torre tonda o cava con il diametro curvo, preso sulla faccia *BMA* consistente nel rapporto della corda *BA* con l'arco *BMA*[15], sarà tanto più grande quanto più la torre sarà piccola, supponendo una apertura costante; di conseguenza le disuguaglianze che risultano dalla divisione delle facce convesse o concave, prendendo l'arco retto per centina primitiva, sono più o meno considerevoli, secondo il rapporto del diametro della porta con quello della torre; così quando la porta apre una parte molto piccola della circonferenza della torre, queste disuguaglianze diventano così poco sensibili che si possono trascurare.

Supponendo dunque che si vogliano fare le teste dei conci perfettamente

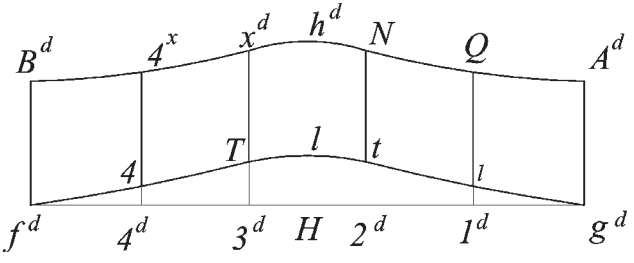


Fig.34 Pannello dell'intradosso piatto

uguali, si rettificherà l'arco orizzontale della torre *BMA*, stendendolo in linea retta sulla tangente o su una linea che gli sia parallela come *ED*; questa rettificazione darà un diametro $b^d a^d$ più grande della corda *BA*, o di quella ad essa uguale *ba*; su questo diametro si formerà la centina primitiva in semicerchio $b^d h a^d$ o in semiellisse, se si vuole; lo si dividerà come di solito in conci nei punti *1, 2, 3, 4* da cui si abbasseranno delle perpendicolari sul diametro, che daranno le proiezioni di queste divisioni.

Per formare l'arco retto che deve provenire da questa centina primitiva di sviluppo, bisogna ripiegare le parti del suo diametro sull'arco orizzon

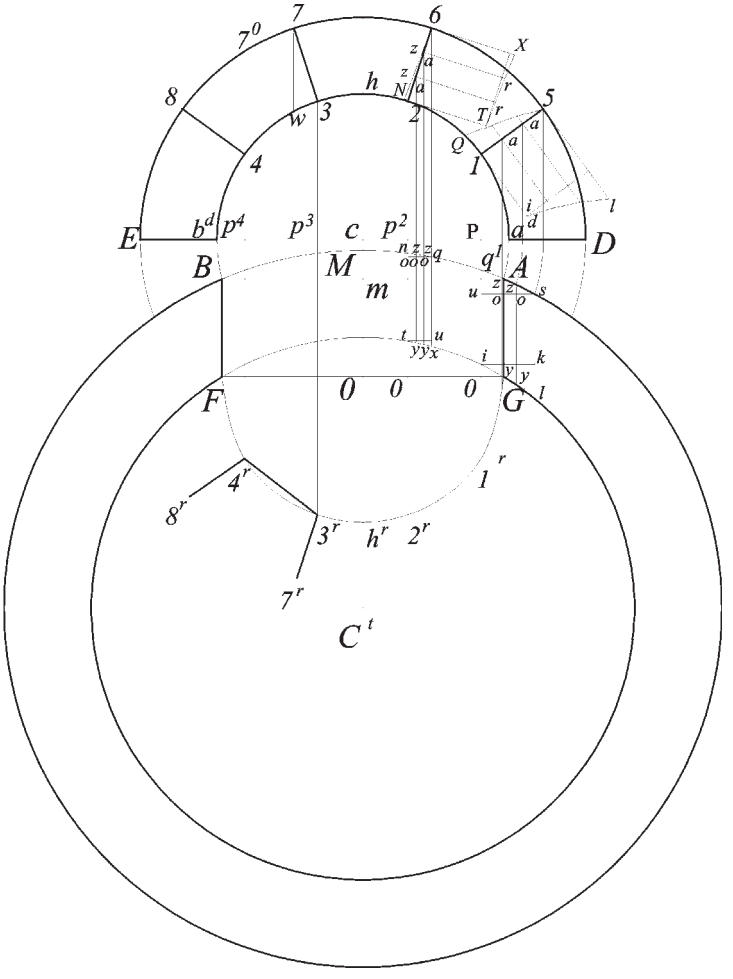


Fig.33c Pannelli di letto[2]

tale della torre *BMA*, cominciando dal mezzo portando la lunghezza della retta *Cp⁴* da *M* in *n*, *p⁴P* da *n* in *q'*; di conseguenza risulterà *q'A* uguale a Pa^d; per i punti trovati *n, q', A*, e i loro corrispondenti dall'altro lato da *M* in *B*, si manderanno delle parallele indefinite alla direzione *MC*, che taglieranno l'arco concavo *FtG* nei punti t ed i e la sua corda *FG* in *oo*, sulle quali si porteranno le altezze delle retombées (ricaschi) $2p^2$, *1P, ch* in $o2^r$,$o1^r$,Oh^r[16], e per i punti *G*, 1^r, 2^r, h^r, etc.. si descriverà l'arco retto rialzato Gh^rF che si cerca, e che sarà usato come per tutte le altre volte a botte.

[16] Nel testo originale si legge *Oh*
[17] Rif.Op.Cit
[18] Nel testo originale si legge *FhG*

Si vede che le divisioni uguali della centina sviluppata, rendono ineguali quelle dell'arco retto.

Si potrebbe ancora fare l'arco retto a tutto sesto per primitivo, e quello sviluppato ribassato per secondario, e poi riprendere il secondario per

primitivo, nelle divisioni dei conci in parti uguali, cosa che P. Deran[17] mette in dubbio; su questo si può dire, senza soffermarsi troppo, che non è affatto scrupoloso nella sua operazione, in cui trasporta la linea rettificata sull'arco della torre attraverso archi di cerchio, prendendo inoltre per raggio da un lato un arco di cerchio e dall'altro una linea retta.

Bisogna adesso formare i panneaux dell'intradosso e del letto.
Abbiamo fatto uso dei panneaux dell'intradosso piatto ovunque dove le facce erano delle superfici piane; ma qui, a causa del fatto che le facce sono concave e convesse, possiamo fare uso soltanto dei panneaux flessibili nello sviluppo dell'intradosso, perché lo spigolo che forma l'intradosso con la testa è una curva doppia che non può mai essere rappresentata da una retta, e perché la superficie convessa che si deve fare non può essere abbozzata in piano se non per mezzo di tangenti e non per mezzo di corde come quelle concave.

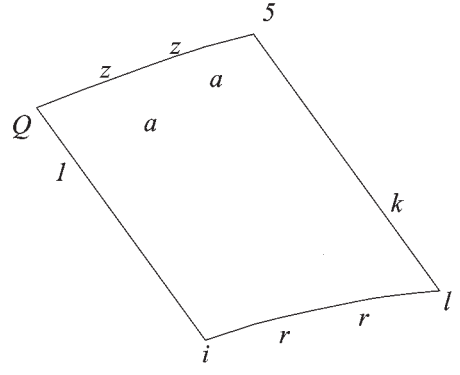


Fig.36 Singolo pannello

Per fare questo sviluppo, si traccerà a parte una retta $f^d g^d$ figura 34, che si farà uguale alla circonferenza dell'arco retto $Fh^r G^{18}$ della figura 33, poi dalla sua mezzeria *H* si riporterà da una parte e dall'altra la lunghezza dell'arco $h^r 2^r$ in $2^d 3^d$; poi l'arco $2^r 1^r$ in $2^d 1^d$, $3^d 4^d$, e per i punti $f^d 4^d 3^d H$ $2^d 1^d g^d$ si manderanno delle perpendicolari alla retta $f^d g^d$, indefinite; su di esse si riporteranno le sporgenze della torre sulla corda *FG* , *OL* della figura 33, in *Hl* della figura 34; *ot* in $2^d t$, *oi* in $1^d i$, facendo la stessa cosa dall'altra parte tra *H* e f^d, per avere la curva ondulata $f^d l g^d$, nello sviluppo dello spigolo concavo.

In seguito si prenderanno gli avanzamenti dell'intradosso convesso, di cui si farà lo stesso uso, portando *OM* in Hh^d, on in $2^d N$, *oq'* in $1^d Q$, e *GA* in $g^d A^d$, e per i punti trovati, che si possono moltiplicare a piacimento suddividendo ulteriormente l'arco *BM*, si traccerà la curva ondulata $B^d h^d A^d$, per lo spigolo convesso della faccia esterna con l'intradosso, e lo sviluppo dell'intradosso formerà il quadrilineo misto $B^d g^d$.

Per formare i panneaux del letto si abbasseranno per i punti dell'estradosso *5,6,7* e *8* delle perpendicolari sul suo diametro *ED*, che lo taglieranno nei punti p^x e p^s etc. e daranno per proiezioni sviluppate le rette $p^2 p^x$ e Pp^s, che si porteranno e ripiegheranno sull'arco orizzontale *eMd*, della torre in *nq* e *q'S*.

Per i punti *q* e *S* si manderanno delle perpendicolari *qo*, su, alle proiezioni dei letti *nt* e *q'i*; poi avendo diviso le linee *1 5*, *2 6* in tante parti uguali quanti punti si vorrebbero avere per la curva del giunto di testa, per esempio, in tre, ai punti *a* ed *a*, si divideranno anche nello stesso numero di parti uguali le linee della proiezione *oq* e *uS*, ai punti *o* ed *o* , per i quali si manderanno delle parallele *z o y* , *z o y* alle proiezioni dei giunti delle giaciture *nt*, *q'I*, che taglieranno l'arco convesso della torre in *z* e *z*, e l'arco concavo in *y* e *y*.

Fatta questa preparazione, si traccerà a parte (***Fig 36***) due linee a squadra *Qi*, *1°5*; si farà *1°5* uguale al giunto di testa *1°5* della figura 33, con le sue divisioni uguali *a*, *a* e per queste e per il punto *5* si tracceranno delle parallele a *Qi* sulle quali si porteranno, oltre la linea *1°5*, gli avanzamenti *uq'*, *oz* ed *oz* della proiezione in *1Q*, *az* ed *az* e per i punti *Qzz5*, si traccerà l'arco ellittico del giunto di testa convesso, di cui la proiezione è l'arco di cerchio *q'zzS*. Si troveranno allo stesso modo i punti della curva del giunto di testa concavo, portando sulle stesse parallele al di sotto della linea *1°5*, le lunghezze *oy*, *oy*, *Sl* della proiezione della figura 33 in *ar*, *ar*, *5 l*, della figura 36, e per i punti *i*, *r*, *r*, *l*, si traccerà la curva del giunto di testa concavo; il quadrilineo misto *Q5li* sarà il panneau de lit che si cercava; così di tutte le altre, come si vede quello del giunto di testa *2°6* tracciato in figura 33, in *Nz6XrT*, ed il seguente e*5li*.

APPLICAZIONE DEL TRAIT *SULLA PIETRA PER IL* PANNEAUX

Avendo preparato un parement di grandezza conveniente, vi si traccerà l'intradosso piano attraverso due linee parallele prolungate della distanza della corda dell'arco retto; per esempio per un secondo concio, quest'intervallo sarà la lunghezza della corda $4^r 3^r$ della figura 33; in seguito, avendo tolto la cerche dell'arco $4^r f 3^r$ di cui questa linea è la corda, si incrocerà un intradosso cilindrico appena abbozzato verso le due teste, nel quale si applicherà il panneau flessibile di cartone tagliato sullo sviluppo della figura 34 in $4^x X^d T 4^d$ il quale, essendo dentro l'intradosso cavo, di modo che vi combaci esattamente, servirà a determinare il contorno delle teste che erano indeterminate.

[19] Falsa squadra

Si prenderà poi il biveau misto del letto e dell'intradosso dell'arco retto *8r 4r f 3r*, per formare il letto inferiore, e *4r f 3r 7* per quello superiore, angoli misti che non saranno uguali se l'arco retto è ellittico.

Avendo tagliato la pietra seguendo questi biveaux per formare i letti, vi si applicheranno I panneaux che sono più adatti, cioè quello della figura 36 per il letto inferiore che passa per il giunto *4r* e quello che è segnato alla figura 33, in *N6XT*, per il letto superiore, che passa per il giunto *3 o 2*, e si tracceranno i contorni curvi di questi panneaux che daranno, sui letti piani, le tracce dei giunti di testa, seguendo le quali e quella dell'intradosso cavo, che è stata tracciata prima, si potrà formare la proiezione concava o convessa della torre, che è compresa tra queste tre linee curve, tagliando la pietra a occhio dall'una all'altra.

Ma siccome si potrebbe mancare in qualche punto, se non si fosse sufficientemente guidati, si prenderà con la fausse équerre[19] un angolo *4W7* di una corda dell'intradosso *4W*, con una verticale *W7*, che si traccerà sulla pietra, poi con un cerchio formato sull'arco orizzontale della torre, come per esempio *BM*, si formerà la testa del concio posando questa cerche perpendicolarmente alla verticale *7W*, oppure la sua parallela *7o4*, e facendola scivolare in questa situazione su questa retta, appoggiandola sulle altre curve della testa e dell'intradosso, o del letto e della testa, l'operazione sarà corretta.

Si vede attraverso questo metodo che i panneaux della testa sono inutili, perché non potendo essere formati che su un materiale flessibile adatto ad essere applicato su una superficie cilindrica, non servirebbero ad altro che a verificare l'operazione.

Tuttavia si potrebbe utilizzare in principio per formare una testa cilindrica ed allora, nel caso che se ne facessero due, uno per quella convessa e l'altro per quella concava, si potrebbe passarlo per panneau dello sviluppo dell'intradosso.

Ma bisogna sottolineare che questi panneaux di testa sarebbero lunghi da realizzarsi, perché anche quando la centina della faccia fosse stata fatta su una superficie piana di sviluppo, i giunti della testa *1 5*, *2 6* etc.. tirati in linea retta nell'alzato, seguendo il modo più comune, sarebbero fuorvianti perché non darebbero lo sviluppo del cilindro della torre dalle teste dei letti in superficie piana, prendendo le cose nel modo più esatto possibile, perché il piegarsi di una retta su una superficie cilindrica non può diventare un arco ellittico se non quando questa linea è perpendicolare all'asse, o al lato del cilindro, come quando il cilindro è retto su una base obliqua; al di fuori di questo caso, essa non si curverà in un arco di ellisse, cosa che è dimostrata nel problema 7 del terzo libro, dove abbiamo parlato dello sviluppo dei cerchi o delle ellissi, tracciati sulla superficie di cilindri retti o scaleni; e così per fare I panneaux di testa; con precisione, bisognerebbe tracciare i giunti della testa dello sviluppo seguendo gli stessi principi, cosa che renderebbe l'operazione inutilmente lunga e sconveniente per parti così piccole come lo sono quelle di ciascun giunto di testa.

OSSERVAZIONI SULL'IMPIEGO

Non bisogna credere che perché l'usanza di fare delle torri sia pressoché del tutto passata, il trattare la porta in una torre tonda o cava sia diventato più raro, anzi, è ancora usuale; benché non si facciano più tanto delle torri intere, si fanno, molto frequentemente, parti di muro concave e convesse.

Nelle costruzioni civili, niente è più comune che le porzioni di torre tonda o cava.

Tutte le aperture delle cupole sono porte o finestre di torre cava dal dentro e tonda dal di fuori; tali sono anche le finestre di una parte dell' Orangerie di Versailles, che sono dei modelli di un buon Apareil e quelle che si fanno nei Fers à Cheval (Ferri di Cavallo)[20] delle grandi entrate, e in un' infinità di altri riscontri.

PORTA DI SBIECO IN UNA TORRE RONDE *O* CREUSE

L'irregolarità della direzione della mezzeria di una porta di sbieco rispetto alla torre, consiste nel fatto che essa non passa per il centro della torre, se è circolare, oppure se non è perpendicolare alla tangente in questa mezzeria se la torre è ellittica, cosa che dà origine ad alcune differenze tra questo discorso ed il precedente, dato che la curva dello spigolo di faccia con l'intradosso, che era regolare da una parte e dall'altra della chiave, in forma di cicloïmbre o di ellipsimbre, diventa un ellipsimbre più stretto da una parte che dall'altra, se si prende l'arco retto come centina primitiva; fatto che dovrebbe escludere questo arco, allorquando l'entrata della porta occupasse una grande porzione della torre, perchè non è gradevole a vedersi; e se si fa l'arco di faccia regolare, l'arco retto diventa a sua volta ineguale da una parte e dall'altra della chiave.
Sia il quadrilineo misto *ABDE* il piano orizzontale dell'apertura che si vuole voltare; si determinerà la scelta della centina primitiva, che si può prendere in tre diversi punti.

[20] Rif.Op.Cit

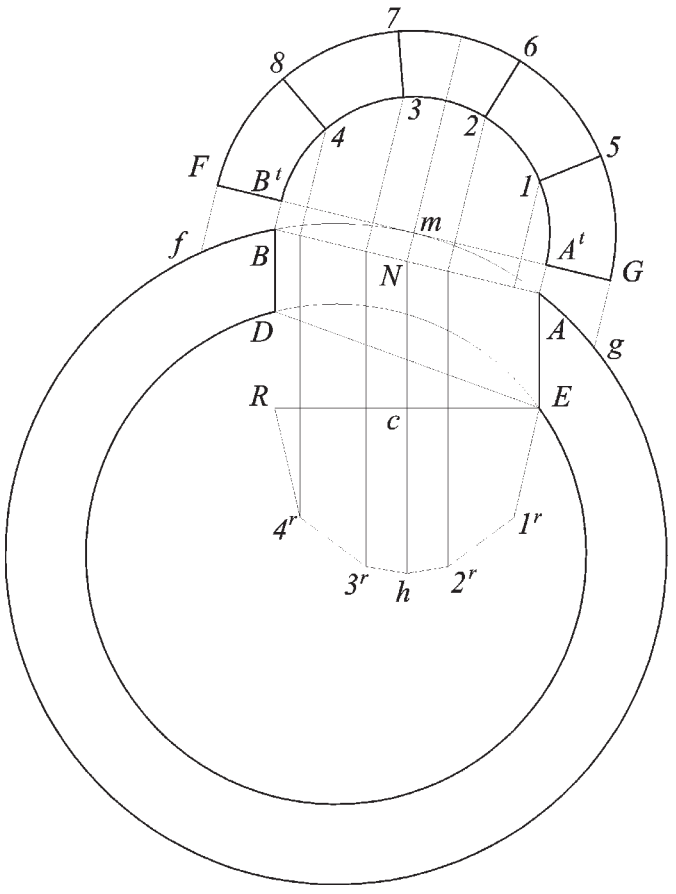


Fig.37a Primo metodo: Centina primitiva sulla corda *AB*

1⁰ Sulla corda *AB*, o, cosa equivalente, su una linea A^tB^t tangente alla mezzeria m dell'arco *BmA* della torre, ed uguale a questa corda, più o meno come abbiamo fatto prima per la figura 33, prendendo l'arco retto per centina primitiva, arco retto che è qui però differente, perché la corda *AB*, non essendo parallela alla linea *ER*, perpendicolare alla direzione della mezzeria *mk*, non gli è uguale, ma è più corta; da questo fatto risulta che se la centina su *AB* è circolare, l'arco retto su *ER* sarà rialzato.

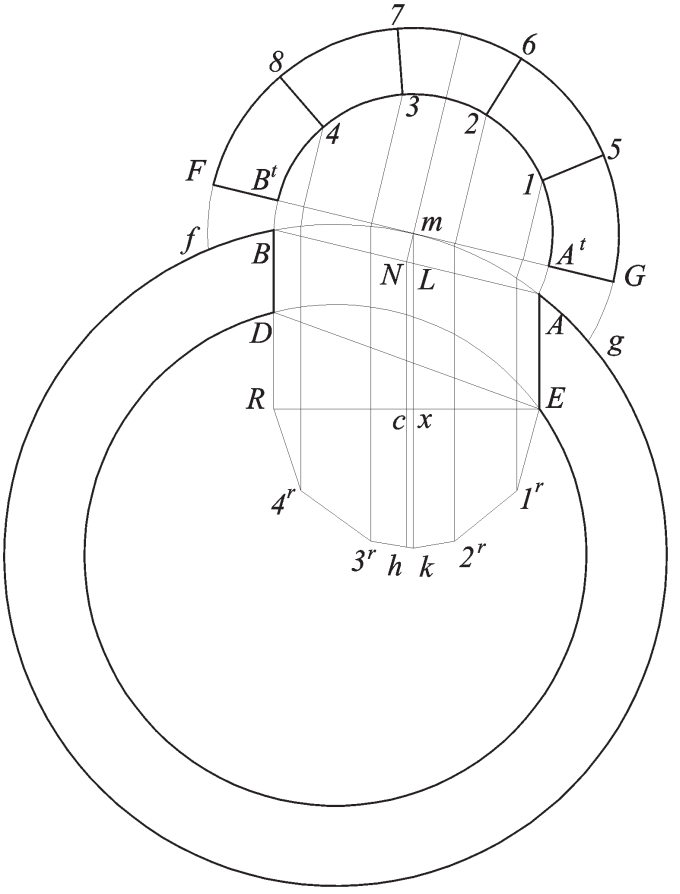


Fig.37b Centina primitiva sullo sviluppo dell'arco *AmB*

2° Siccome la scelta della corda *AB* per diametro della centina primitiva causa qualche ineguaglianza nella divisione nelle teste dei conci alla faccia per lo stesso motivo di cui abbiamo parlato nel caso precedente, si può prendere la centina primitiva sullo sviluppo dell'arco *AmB*, per esempio, sulla linea A^tB^t, supposta uguale al suo contorno rettificato, ed operare come nel caso precedente; ma allora il contorno interno dell'intradosso diventerà irregolare, perché la linea mandata per la mezzeria m dell'arco *BA*, parallelamente alla direzione dei piedritti *BD*, *AE* non taglia affatto la perpendicolare *RE* nella sua mezzeria *c*, ma più in basso, in *x*, di modo che la chiave dell'arco retto *RhE* non può essere nella mezzeria *h*, ma nel punto *K* corrispondente alla proiezione *m* della mezzeria della faccia; questo fatto rende l'arco retto inclinato in modo rampante.

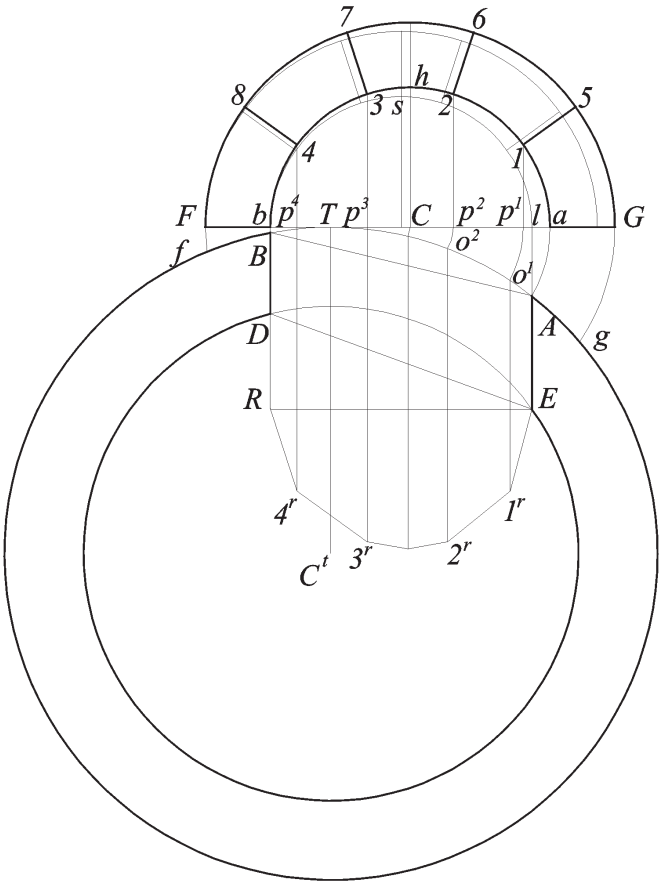


Fig.137. Anche se si mostra più attenzione per la regolarità dell'intradosso interno che a quella della faccia di ingresso, si può scegliere l'arco retto per centina primitiva, ed operare come è stato detto nel caso precedente; allora facendo *bI* parallela ed uguale a *RE* e che tocchi l'arco orizzontale della torre in *T*, sarà facile riconoscere l'irregolarità che questa scelta provoca alla centina secondaria di faccia sviluppata (*bha*) così che le parti che sono poco differenti dalla centina primitiva bsI verso l'imposta b diventano sempre più grandi man mano che si avvicinano all'imposta opposta in *a*.
Tuttavia è la sola costruzione che propone Mr. de la Ruë, e la prima di P.Deran[21] .

Date la centina della faccia, l'arco retto e la proiezione dei giunti orizzontali, sarà facile usarle per tracciare i conci, come già abbiamo detto per la porta dritta nella torre tonda, sia seguendo la strada dell'équarrissement che quella dei panneaux flessibili, formati sullo sviluppo dell'intradosso, non essendoci alcuna differenza che quella dell'irregolarità, cioè della disuguaglianza dei panneaux delle parti corrispondenti di ciascun lato della chiave, le quali sarebbero uguali a quelle della porta dritta.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA

Si è visto con I Teoremi 18 e 20 del primo Libro, che lo spigolo di incontro delle superfici della torre e dell'intradosso della porta è sempre una curva doppia, sia nel caso della porta dritta che in quello della porta di sbieco; nel primo caso questa curva è un cicloïmbre se l'arco retto della porta è a tutto sesto; sarà un ellipsimbre se esso è ribassato e se la direzione della sua mezzeria incontra l'asse della torre, nel qual caso le parti corrispondenti ai lati della chiave sono uniformi; ma nella porta di sbieco, dove questa direzione della mezzeria non incontra l'asse della torre, questa stessa curva è disuguale nelle parti equidistanti dalla chiave, fatto che è stato dimostrato con il Teorema 20 citato.

Si è anche visto nei problemi 37 e 38 del secondo Libro che per tracciare queste specie di curve è necessario trovarne le ordinate, e ordinarle su una delle due superfici curve, e di conseguenza, in qualunque maniera si cominci, bisogna sempre cominciare col formare una di queste due superfici cilindriche, o quella convessa della torre tonda o quella concava dell'intradosso; e siccome l'intradosso è terminato con due superfici cilindriche, quando la porta fora la torre, cioè con quella convessa all'esterno e quella concava all'interno, è chiaro che è più conveniente cominciare formando la parte cilindrica della volta della porta, di qualsiasi metodo ci si serva (dell'équarrissement o dei panneaux).

Abbiamo proposto nelle altre volte dei panneaux dall'intradosso piatto, anche per quelle in cui gli spigoli di intersezione sono a doppia curvatura e gli intradossi concavi; ma siccome si tratta qui di quelli di una superficie concava dell'intradosso con una convessa della faccia della torre, non si ha lo stesso vantaggio; è per questo che proponiamo dei panneaux di sviluppo di una superficie cilindrica, che danno tanti punti di questo spigolo quanti se ne vogliono, al posto dei due che può dare l'intradosso piatto, che sono quelli delle estremità del giunto di testa.

Alcuni operai, come Maître Blanchard, nel suo Trait de la coupe des Bois[22], suppongono nella loro pratica una sezione piana verticale, come termine della quale allungano delle rette che determinano con la loro lunghezza numerosi punti dello spigolo a doppia curvatura; ecco come

[21] Rif.Op.Cit.

[22] Rif.Op.Cit.

operano al Capitolo XIV.

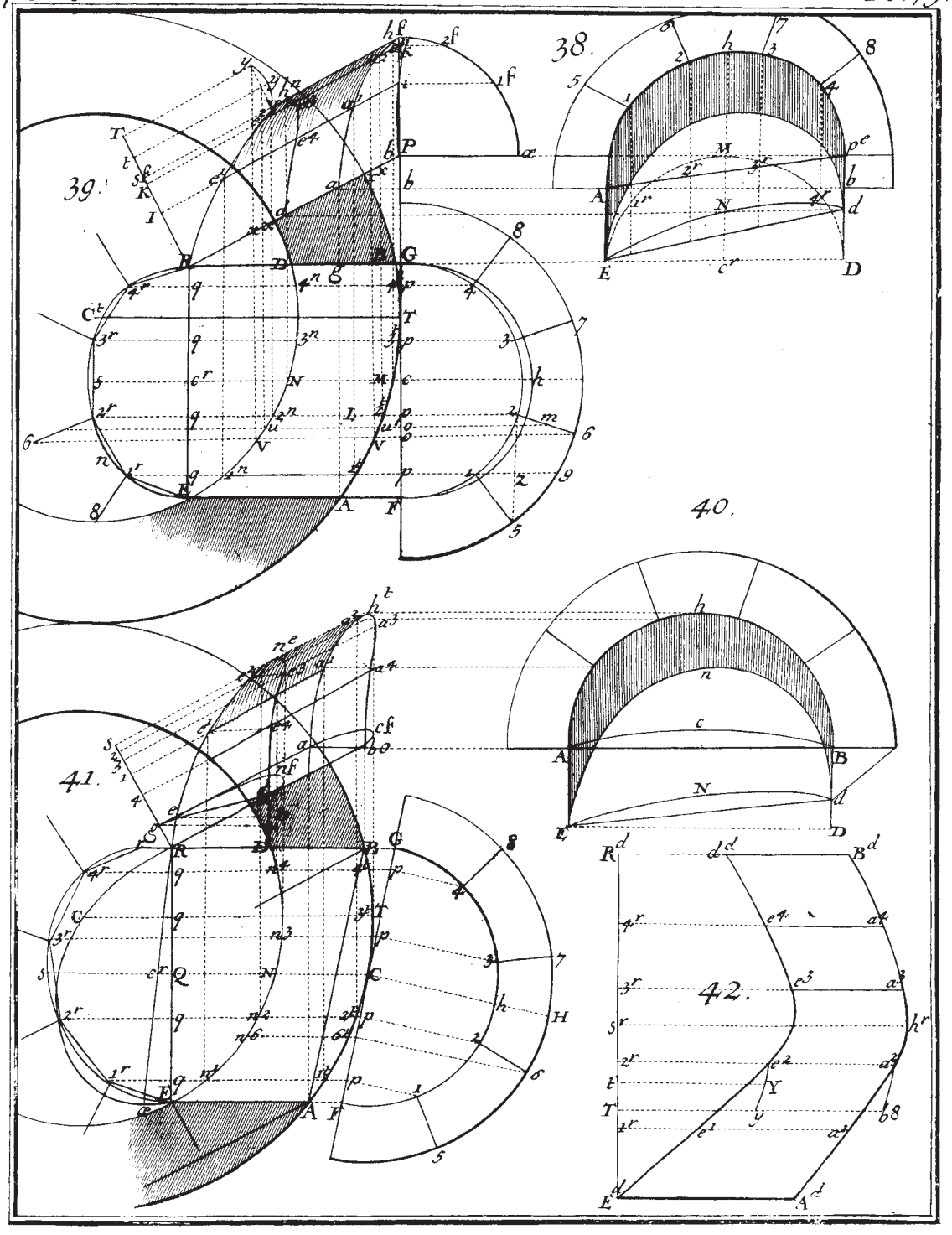
Dopo aver formato l'incavo cilindrico dell'intradosso, seguendo le indicazioni del disegno, vi si applica una riga pieghevole, seguendo la quale si traccia un arco che in qualche modo sostituisce la corda dello spigolo a doppia curvatura; al di là di questo si portano in avanti le faillies[23] di questa curva, presi sulla proiezione; questo metodo è valido; ma è anche un metodo meno veloce e di esecuzione meno corretta rispetto a quello dei panneaux flessibili, sui quali è più semplice tracciare, per dei punti trovati, lo sviluppo dello spigolo, che non su una superficie concava, dove non si può del resto che tracciarlo con la mano male appoggiata e guidata meno bene.

Bisogna sottolineare che benché la torre sia cilindrica circolare e di spessore ovunque uguale, le curve di sviluppo degli spigoli dell'intradosso convesso esterno e concavo interno, non sono né uguali né paralleli tra loro, perché gli archi *AB* e *FG* della porta dritta non sono simili, cioè, con uno stesso numero di gradi, cosa che si vede dato che i piedritti *AG* e *BF* prolungati non tendono al centro della torre, se li si suppone paralleli tra di loro, e di conseguenza non comprendono parti proporzionali del cerchio interno *FG* e di quello esterno *BA* concentrico; questo fatto è ancora più sensibile nella porta di sbieco, per gli archi *BA* e *DE*.

[23] aggetti

page 63.

Pl. 75.



SECONDO CASO
SULL'INCONTRO DELLE VOLTE A BOTTE INCLINATE CON LE VERTICALI.

IN TERMINI DELL'ARTE

DISCENDENTE DIRITTA, O SBIECA IN UNA TORRE ROTONDA, O CAVA.

Si possono dare differenti disposizioni per questa trattazione, riguardo al piano di sviluppo, passando per le imposte, perché se si fanno orizzontali tra di loro all'arco retto, questo piano sarà perpendicolare al verticale, passante per l'asse della discendente, e se esse non sono tali, gli sarà inclinato.

Prima disposizione: dove il piano di sviluppo è perpendicolare alla direzione del verticale, se la discendente è retta, cioè se l'asse della volta incontra quello della torre, allora le imposte dell'arco di prospetto saranno sullo stesso piano, come quelle dell'arco retto; ma se la discendente è inclinata, cioè, se il suo asse non incontra quello della torre, l'arco in prospetto diventa rampante, essendo un'imposta più alta dell'altra; sebbene l'arco retto resti orizzontale, come lo si vede alla ***Fig. 38***, nell'uno e nell'altro caso la trattazione sarà la stessa per la costruzione, anche se quello con la discendente diritta è più semplice , visto che i lati della chiave dell'arco di prospetto sono uniformi; è per questo che noi scegliamo per esempio quello della porta inclinata.

Siano dati il quadrilatero misto *AMBDNE*, (***Fig. 39***) il piano orizzontale di un'apertura in pendenza in una torre circolare, il cui centro è *C*.

Si determinerà a piacere dall'arco primitivo, come abbiamo detto sopra per la porta in una torre circolare o cava, dove abbiamo scelto quello sviluppato di prospetto; qui per varietà di esempi scegliamo l'arco retto del piano orizzontale, cioè un sesto perpendicolare alla direzione orizzontale della volta, che non è l'arco retto della pendenza, perché non è perpendicolare al piano della pendenza, il quale è inclinato all'orizzonte.

Avendo prolungato i piedritti *DB*, *EA*, si traccerà loro una perpendicolare *FG*, che li intersecherà in *F* e *G*; su *FG* come diametro, si descriverà un semicerchio *GhF* , o un semiellisse , se si vuole, per l'arco primitivo del prospetto, che divideremo nei suoi conci nei punti *1* , *2*, *3*, *4*, dai quali si tracceranno le perpendicolari, che prolungheremo indefinitamente all'interno della torre.

In seguito dal punto *E* si tirerà su *AE* una perpendicolare chiamata *ER* che intersecherà *BD*, prolungata in *R*, la linea *BR* sarà presa come base del profilo della pendenza, o un'altra che le sia parallela, più in alto o più in basso.

Su questa base si formerà l'angolo *BRP* uguale a quello della pendenza con l'orizzonte, di cui termineremo il lato *RP* con l'incontro della tangente
TP, che è una perpendicolare al raggio $C^t T$ tracciato dal punto C^t parallelamente a *DB*.

Dal punto *P* si porterà $Pae^{(1)}$, parallela a *RB* e uguale a *cF*, semidiametro dell'arco primitivo; con *Pae* come raggio si descriverà il quarto di cerchio *ae* h^f, sul quale si riporterà le suddivisioni della metà del sesto *FhG* in 1^f, 2^f ,h^f , da dove si porterà $1^f i$, $2^f k$, parallela a *Pae* , che intersecheranno *TP*, prolungato al punto *i* e *k* da dove si condurranno le parallele a *RP* segnate *iI*, *kK*, $h^f s^s$, le quali saranno le proiezioni verticali dei giunti di base che serviranno per le due parti della volta dalla chiave all'imposta; in modo che queste linee dovranno essere considerate come doppie in qualche parte.

A questo punto, per trovare le proiezioni dei sesti esterno e interno, che determinano le lunghezze di questi giunti di base, bisogna tracciare da tutti i punti, dove le loro proiezioni orizzontali intersecano gli archi *AMB*, *END* della torre , delle perpendicolari alla loro direzione; così dai punti $A,1^t,2^t$, $M,3^t,4^t,B$ si alzeranno delle perpendicolari , che termineremo nell'intersezione con le linee del profilo, che rappresentano gli stessi letti di quelle del piano orizzontale , come *Aa*, per l'imposta che si fermerà in *a* all'intersezione di *RP*, $1^t a^1$, che si fermerà alla linea *Ii*, nel punto a^1 , profilo del primo giunto, passante da *i*, in seguito $2^t a^2$, che terminerà sulla linea *Kk*, profilo del secondo giunto in a^2, così per gli altri; e dagli altri punti *a*, a^1, a^2, h^f, a^3, che dovranno essere dopo *k*, a^4 dopo *i* e *b*, tracceremo una curva, che sarà il profilo in proiezione verticale dell'arco di prospetto.

Troveremo nello stesso modo il profilo dell'arco interno $Re^1e^2h_\eta e^3e^4d$, lo spazio compreso tra queste due curve, determinata la lunghezza inclinata dei giunti di base e dell'intradosso, e per fare le dime dell'intradosso piatto, e dell'intradosso sviluppato, se lo si vuole.

Infine formeremo l'arco retto *RsE*, con le perpendicolari alla pendenza *RP*, comprese tra le proiezioni verticali lei letti, sapendo *RI*, *RK*, RS^f, facendo $q1^r$, $q4^r$, uguali a *RI*, $q2^r$, $q3^r$, uguali a *RK*, ecc.

SVILUPPO DELL' INTRADOSSO.
(***Fig.39-Fig.42***) Se si vogliono fare le dime dell'intradosso piatto, tracceremo su una linea retta E^dR^d (***Fig.42***) le corde dell'arco retto.

E se si vogliono fare le dime dell'intradosso cavo su dei materiali flessibili, come conviene, correggeremo il contorno del semi ellisse *EsB*, con tutte le divisioni 1^r, 2^r, 3^r, 4^r, che trasporteremo sulla retta R^dE^d.

In seguito avendo tirato su delle perpendicolari su ciascuna di queste divisioni corrette, ci porteremo le lunghezze degli aggetti, che convengono loro, presi di profilo, e non dal piano orizzontale, come si è fatto per la porta di torre rotonda orizzontale, poiché la pendenza non è parallela a questo piano, e queste lunghezze si misureranno dalla linea RS^f, che è il profilo dell'arco retto; così per i giunti di base dell'imposta prenderemo *Rd*, che riporteremo in E^d, A^d, della figura 42, per l'esterno convesso; in seguito per il primo giunto superiore, riporteremo la lunghezza Ia^1 per l'esterno in $1^r a^1$, e Ie^1 per l'interno in $1^r e^1$, stessa cosa per il secondo giunto Ka^2 e Ke^2 per la metà $s^f h^f$ in $s^r h^r$, poi scendendo sul profilo, prenderemo Ka^3 e Ke^3, Ia^4, Ie^4, *Rb* e *Rd*, che riporteremo, nella ***Fig. 42***, in $3^r a^3$, $3^r e^3$, $4^r a^4$, $4^r e^4$, R^dB^d, e R^dd^d.

Se si volessero fare delle dime di giuntura, ***(Fig. 39)*** le potremo fare con lo stesso metodo che abbiamo dato per la porta rotonda orizzontale, poiché si tratta sempre di porzioni di ellisse, più o meno concavi o convessi, di cui, nella pratica, sarà necessario trovare un punto o due alla metà del giunto di testa; così prendendo per esempio quello che è chiamato *2·6*, prenderemo a scelta un punto *m* verso la sua metà, tireremo giù dai punti *m* e *6* delle perpendicolari parallele a *2p*, le quali intersecheranno gli archi *AB* e *ED*, dal piano orizzontale della torre in dei punti *u*, *v*, da dove tracceremo delle perpendicolari alle precedenti, che intersecheranno la linea della pendenza *RP*, in dei punti *x*, *x*, al di sopra dei quali riporteremo le altezze *om*, *o6* in *xy* e *xY*, la linea curva yYe^2 sarà il profilo del giunto di testa concavo; nello stesso modo tracceremo il convesso, che servirà a trovare la curva della testa del giunto, prendendo per linea di direzione il giunto di testa *2·6* al posto di s^fT, che dà il profilo, perché s^fT è scorciato dalla proiezione; così portando sulla direttrice di sviluppo R^dE^d (***Fig.42***) la lunghezza 2^rT, uguale a *2·6* di prospetto, e tracciando le ordinate *tY*, *Ty*, uguali a quelle di profilo, avremo i punti e^2, *Yy* per l'arco concavo della testa del giunto di base, il convesso opposto a^2b^8 si troverà nello stesso modo.

Possiamo risparmiarci questa pena formando la testa per mezzo di una squadratura, come stiamo per spiegare.

APPLICAZIONE DELLA TRATTAZIONE SULLA PIETRA.
Dopo aver eretto un paramento, per esempio, per un secondo concio *1·2* tracceremo due parallele alla distanza della corda dell'arco retto 1^r2^r, poi con la sagoma convessa dell'arco retto 1^rn2^r, scaveremo l'intradosso ortogonalmente al paramento, e a quelle due parallele che saranno gli spigoli dei giunti e dell'intradosso.

Applicheremo poi su questa superficie concava cilindrica la sagoma di sviluppo, fatta su di un materiale flessibile e^1e^2, a^2a^1, della ***Fig 42***, per tracciare il contorno delle teste curve a^2a^1,e^2e^1.

In seguito prendendo il **biveau** misto dell'intradosso e del letto come conviene, 1^r2^rb, per il letto di posa superiore, 2^r1^r8, per quello inferiore, sbozzeremo la pietra per formare le superfici piane di questi letti, sulle quali applicheremo le sagome di base, se si sono fatte, o che termineremo con una squadratura, come segue.

Tracceremo sulla bozza un'orizzontale *2·5*, sulla testa del concio, e ci tracceremo dal punto *1* una perpendicolare *1z*, poi prendendo il **biveau** *2·1z*, porremo ortogonalmente uno dei suoi rami sugli spigoli dell'intradosso, e l'altro darà una linea sulla testa, che volgeremo col **biveau** della pendenza e della testa *RPk*, di cui porremo un ramo sullo spigolo del giunto di intradosso e di base superiore, e l'altro che congiungeremo con il ramo del **biveau di doele** e di strapiombo *2·1z*; sbozzeremo la pietra seguendo questi due **biveaux** per ottenere una cesellatura *1z9* sulla testa, a cui tracceremo una perpendicolare *2·5*, che scaveremo con la sagoma concava dell'arco della torre *AM*, posta ortogonalmente sulla linea *1·9*, e sui punti dati *5·2*, o, che è la stessa cosa, a^2, dal profilo che è stato determinato con la sagoma dell'intradosso, e il punto trovato *z*; così, facendo scendere questa sagoma parallelamente a questa, anche sulla linea *1·9* faremo la superficie convessa della torre, sbozzando la pietra a squadra sui ripari, che avrà dato la sagoma, e formeremo così le teste ellittiche di letti di posa, senza averne cercato la curvatura.

Faremo nello stesso modo per la superficie concava del concio all'interno della torre, con questa differenza, che bisognerà porre i **biveaux di doele** e di testa, e di **doele** e di strapiombo sul letto di posa superiore che sporge meno sull'interno, al posto che nella superficie esterna, li porremo sul letto di posa inferiore che sporge meno sull'esterno.
SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA.
Avendo supposto verticale il sesto *GhF*, e perpendicolare alla direzione orizzontale della linea di pendenza sarà uguale a tutte le sezioni parallele a *GF*, tangente della torre; così può essere considerato come posto in *ER*, in *Ag* e seguendo tutte le parallele che passano per i punti 1^t2^tM, ecc. 1^n2^nN, ecc. e tutte queste linee saranno i profili, o proiezioni verticali delle sezioni uguali a questo sesto, i cui diametri sono supposti disposti perpendicolarmente sulla linea della pendenza *RP*, in virtù del fatto che seguendo le regole della proiezione sono rappresentati solo da dei punti come *R*, *d*, *a*, *b*, ecc. così tutte le altezze degli sbalzi dell'arco primitivo per ciascun giunto di base, si sono dovute riportare sulle verticali, al di sopra della linea della pendenza *RP*; cosa che è stata fatta conducendo delle parallele alla linea della pendenza dalle altezze $1^f2^fb^f$, dal quarto di cerchio aeh^f, il quale deve essere supposto ruotato e posto perpendicolarmente al piano del foglio sul suo raggio Ph^f.

Adesso, poiché l'arco retto deve essere perpendicolare al piano della pendenza, abbiamo tracciato *RT* perpendicolare a *RP*, la quale è intersecata proporzionalmente da tutte le parallele alla pendenza, che esprimono l'altezza dei giunti; così questa linea è la proiezione verticale di tutte le altezze delle divisioni dell'arco retto, sul suo diametro *ER*.
Riguardo all'operazione di squadratura per formare la superficie curva della testa dei conci, è chiaro che la linea *1·9*, essendo verticale, sarà nello stesso piano del giunto di letto, che passa per il punto *1*; in conseguenza al fatto che l'angolo del giunto di base con quello di testa è uguale a quello della pendenza; nello stesso modo l'angolo dell'intradosso *2·1z*, è in un piano verticale, che può essere considerato nella proiezione in $L1^t$, nell'intradosso ortogonalmente ai giunti di base 1^n1^t e 2^n2^t, di conseguenza sarà perpendicolare al precedente, la cui intersezione sarà la linea *1·9*, cosa che bisognava fare per ottenere una linea, sulla superficie del cilindro, che era parallelo al suo asse, per poterci porre perpendicolarmente una sagoma dell'arco orizzontale della torre, il quale è dato in pianta, per mezzo del quale possiamo formare la testa del concio, e le sezioni ellittiche dei suoi letti, con il metodo con cui formiamo tutte le superfici cilindriche concave o convesse, facendo scorrere un regolo parallelamente all'asse su due archi dati.

SECONDA DISPOSIZIONE DELLE PENDENZE IN UNA TORRE ROTONDA O CAVA, IN CUI L'ARCO PRIMITIVO È ORIZZONTALE E L'ARCO RETTO È RAMPANTE.
(***Fig. 41***) Nella precedente disposizione abbiamo creato l'arco primitivo su una sezione verticale, perpendicolare alla direzione orizzontale della volta a botte in pendenza, da cui segue che questa era anche perpendicolare al piano verticale, passante per l'asse della volta a botte, sia che fosse retta o sbieca; mentre la volta a botte era retta le sue imposte erano orizzontali, nei rispettivi punti, benché in pendenza seguissero la direzione; ma

mentre questa era sbieca, queste erano a diverse altezze, e quelle dell'arco retto orizzontali: qui prendiamo il sesto in un piano verticale parallelo alla corda *AB* dell'arco *BCA* della torre, che è compresa tra i piedritti della pendenza; quando la volta a botte è retta questa disposizione ricade nella precedente; ma quando è sbieca, ne risulta che le imposte della pendenza sono sempre orizzontali, considerate parallelamente a questa corda, benché siano inclinate seguendo la pendenza.

Ne risulta anche che si possono fare le teste uguali, se al posto di una sezione di volte a botte, si sviluppa la sua faccia sulla torre *BcA* correggendola su una linea retta *GF*, come si è detto per la porta della torre rotonda a teste uguali.

Infine ne risulta, come nelle pendenze sbieche a facce piane, che essendo le imposte della faccia orizzontali, quelle dell'arco retto diventano rampanti.

Sia (***Fig. 41***) la corda *AB* dell'arco *AcB*; per il punto c, metà di questo arco, tracceremo *GF* parallela ad *AB*, che sarà conclusa nei punti *G* e *F*, dall'intersezione dei piedritti *DB*, *EA* prolungati.

Su *GF* come diametro, descriveremo un semi cerchio *GhF*, o se si vuole un semi ellisse rialzato o sbassato, come arco primitivo, il quale essendo diviso nei suoi conci nei punti *1*, *2*, *3*, *4*, tireremo giù sul suo diametro delle perpendicolari, che lo intersecheranno nei punti *p*, *p*, per i quali condurremo delle parallele alla direzione della volta, cioè, ai piedritti DB, *EA*, che intersecheranno la superficie esterna nei punti $1^t\ 2^t\ 3^t\ 4^t$,e quella interna nei punti $n^1\ n^2\ n^3\ n^4$.

Da tutti questi punti eleveremo delle perpendicolari, che intersecheranno i lati del piano della pendenza *R*,*b*,*a*,*e*, che tracceremo di profilo, come si è detto per le pendenze ordinarie, nel Problema XII del tomo precedente.

Essendo nota la linea di pendenza *Rb*, con la sua base orizzontale *RB*, condurremo dal punto *c* centro dell'arco *AB*, una verticale $c\ h^t$, che intersecherà l'orizzontale condotta dal punto *b*, vertice della linea di pendenza data, nel punto *o*, al di sopra del quale riporteremo le altezze delle divisioni dell'arco primitivo *p1*, *p2*, *ch* in a^4, a^3, h^t, per cui condurremo le parallele all'arco *RB*, a^4a^1, a^3a^2, le quali si concluderanno ai loro estremi con l'intersezione delle verticali, provenienti dai punti che corrispondono loro nella proiezione orizzontale; per esempio l'orizzontale *oa*, sarà conclusa in *b* e *a*, dalle linee *Aa* e *Bb*, provenienti dai punti *A* e *B*; nello stesso modo l'orizzontale a^1a^4, dalle linee 1^t4^t provenienti dai punti *1* e *4*; l'orizzontale a^2a^3, sarà conclusa dalle linee 2^t3^t, provenienti dai punti *2* e *3*, e da tutti i punti a^1, a^2, a^3, a^4, condurremo le parallele alla linea di pendenza *Rb*, le quali intersecheranno le linee verticali, provenienti dai punti *E*, n^1, n^2, n^3, n^4, nei punti *e*, e^1, e^2, n^e, e^3, e^4, *d*, per i quali tracceremo una curva, che sarà la proiezione verticale dell'arco di prospetto interno, come la curva $a\ a^1\ a^2\ h^t\ a^3a^4\ b$, è quella del prospetto esterno: le linee rampanti che stanno nell'intervallo tra queste due curve, danno le lunghezze dei giunti di base, che sono rappresentati nel piano orizzontale da delle linee troppo corte *EA*, n^11^t, n^22^t, *Nc*, ecc. a causa dell'inclinazione della volta.

Non resta altro che fare l'arco retto che dovrà essere rampante, poiché la pendenza è sbieca, ed il diametro dell'arco di prospetto è orizzontale.

Dal punto *R*, o anche un altro della linea *Rb*, condurremo una linea *Rs*, perpendicolare a *Rb*, la quale *Rs* intersecherà tutte le parallele alla linea di pendenza nei punti *g*, *4*, *1*, *3*, *2*, s, che saranno le altezze delle divisioni del sesto dell'arco retto; ma prima di farne uso, bisogna trovare il diametro inclinato di questo arco rampante.
Su *AE* prolungato riporteremo la lunghezza *Rg* da *E* in *ae*, e tracceremo *Ra*, che sarà il diametro rampante dell'arco retto, e nello stesso piano della base orizzontale *ER*, sulla quale riporteremo successivamente tutte le lunghezze delle divisioni della linea *RS*, sulle proiezioni dei giunti di base corrispondenti; così riporteremo sul primo prolungamento 1^tq, l'altezza *R1* da *q* in 1^r, *R2* del profilo in $q2^r$, *Rs* in *Qs*, *R3* in $q3^r$, *R4* in $q4^r$, e per i punti *a*, 1^r, 2^r, *S*, 3^r, 4^r, *R*, tracceremo un semi ellisse, che sarà l'arco retto richiesto, che si poteva anche tracciare per mezzo del problema VIII del secondo libro, usando i diametri coniugati dati *ae R* e sc^r, con l'angolo $s\ c^rae$.

A questo punto abbiamo tutto ciò che è necessario per fare le sagome.

1°. Quelli dell'intradosso saranno fatti normalmente con i giunti di base, le cui lunghezze sono date sul profilo tra le curve $e\ n^e\ d$, $a\ h^t\ b$, il loro intervallo, o distanza perpendicolare, è anche questo dato dalle corde dell'arco retto, e l'obliquità dei loro angoli si troverà come nel primo caso di questa trattazione, dalla differenza dei loro vertici, sul profilo dell'arco retto *RS*, riportata sulla direttrice di sviluppo R^dE^d.

Per le sagome di base, a causa della curvatura della loro testa, bisogna fare come nell'esempio precedente un estradosso, e qualche divisione, almeno una sul giunto di testa, per avere la freccia dell'arco 2^t6^t, che è la proiezione orizzontale di questo giunto, la quale freccia darà quella dell'arco ellittico, che è la testa della sagoma di base per l'esterno in aggetto; nello stesso modo c'è anche la testa interna n^2n^6, che è soltanto un po' più lunga e scavata, invece l'altra è convessa.

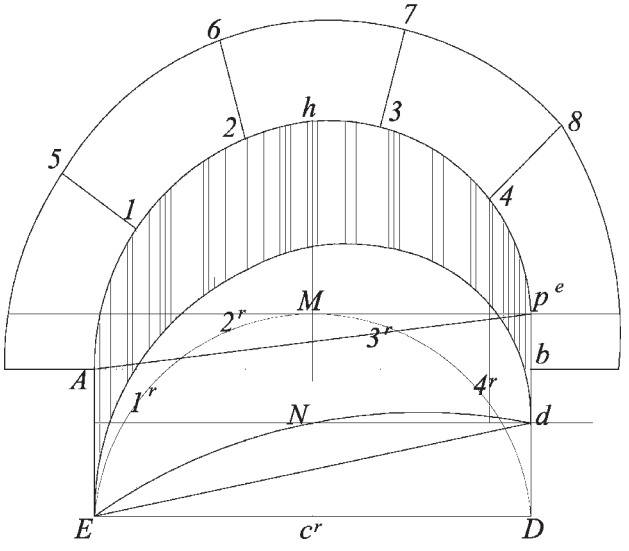
Note le sagome dell'intradosso e delle basi, questi serviranno per formare la testa del concio, nella maniera che abbiamo spiegato per la porta di una torre rotonda, e primo caso di questa trattazione per la pendenza in una torre rotonda.

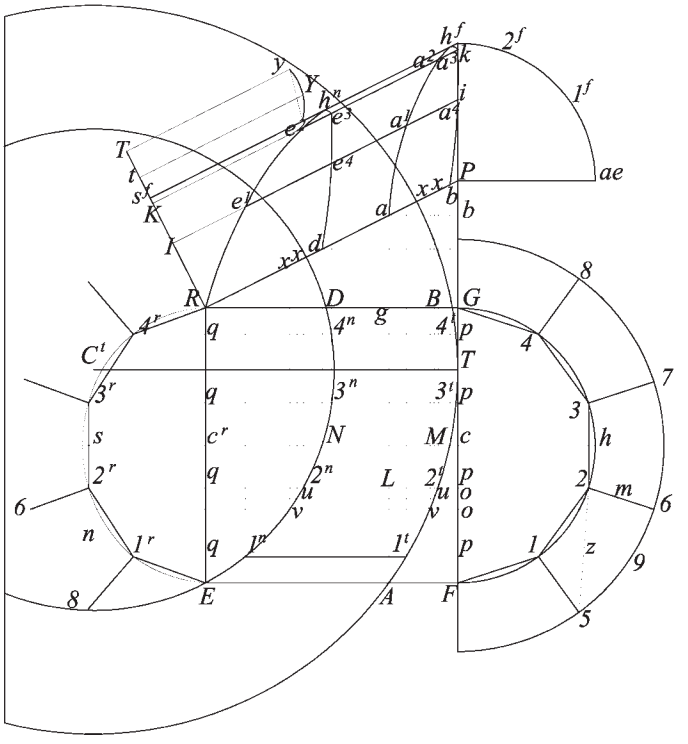
SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA.
Il diametro *GF*, dell'arco primitivo verticale, essendo parallelo ad *AB*, per costruzione, e compreso tra le parallele *DG*, *EF*, questo sesto è uguale a tutte le sezioni parallele ad *AB*; così questa volta è una metà del cilindro scaleno, la cui base ha doppia obliquità nei confronti del suo asse; conoscendo una orizzontale *QcF* o *QcG*, e una verticale *RbB*, o la sua supplementare Rbh^t, in cui questo caso differisce dal precedente, dove l'arco primitivo, essendo retto sulla direzione orizzontale, il cilindro avrà solo un'obliquità sul suo asse, che era la verticale; è per questo che il piano passante per l'asse, e per il diametro *GF* dell'arco primitivo, è inclinato al piano verticale, passante per questo asse, da cui risulta che la proiezione verticale di questo piano non è una sola linea retta, come *RP* nel caso precedente, ma una figura mistilinea eac^f , bdn^f, composta da due linee rette *ea* e *bd*, che sono le imposte della volta, e da due archi ellittici ac^fb, e dn^fe, che sono le sezioni di questo piano con le superfici

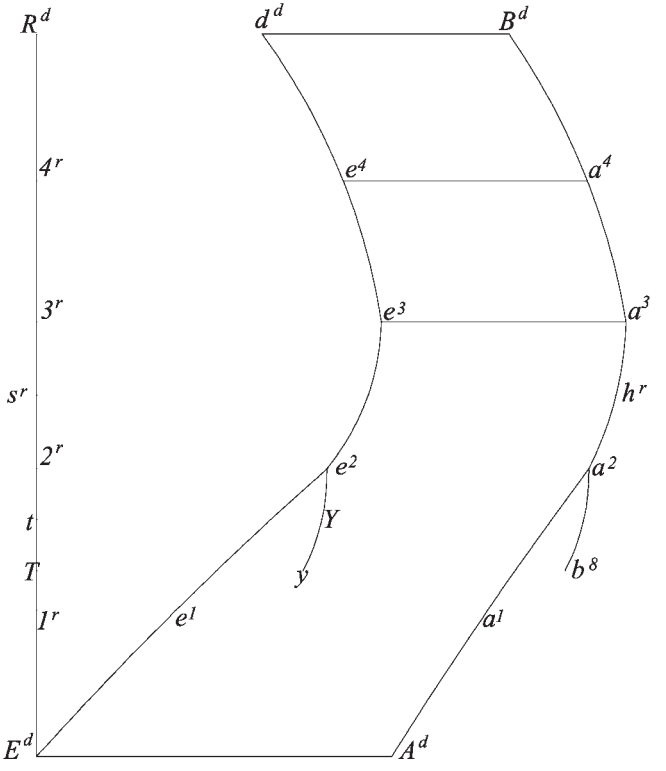
interne ed esterne della torre, e poiché gli archi *AB* e *ED*, che ritagliano i piedritti, non sono simili, non lo sono neanche queste sezioni ellittiche; da qui si capisce che la corda *ed* dell'interno non è parallela alla corda *ab* dell'esterno, che è orizzontale.

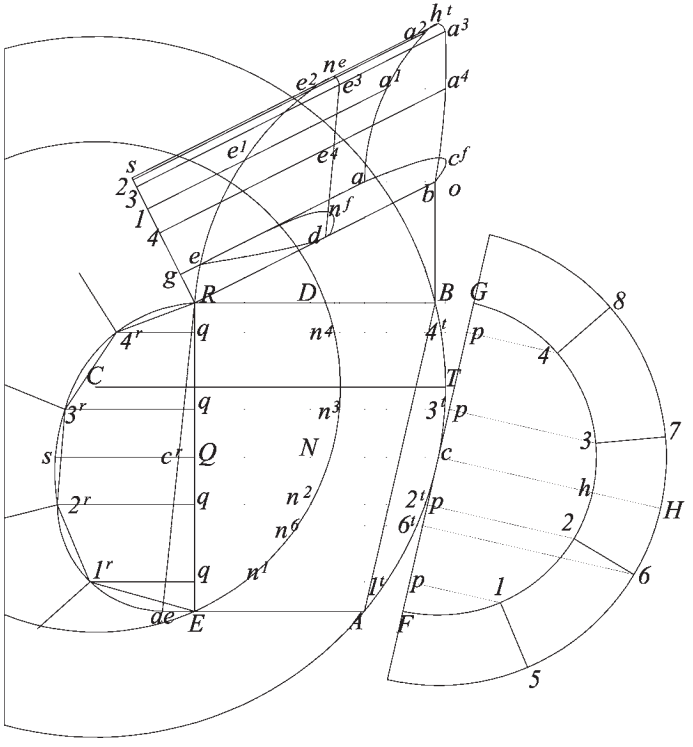
(***Fig. 40***) Da qui viene allo stesso modo che il cerchio interno *EnA* è rampante, cosicché il primitivo *AnB* è orizzontale.

Guardando l'arco retto esso è rampante per la stessa ragione che abbiamo posto per le rampe oblique discendenti dalle volte semplici.









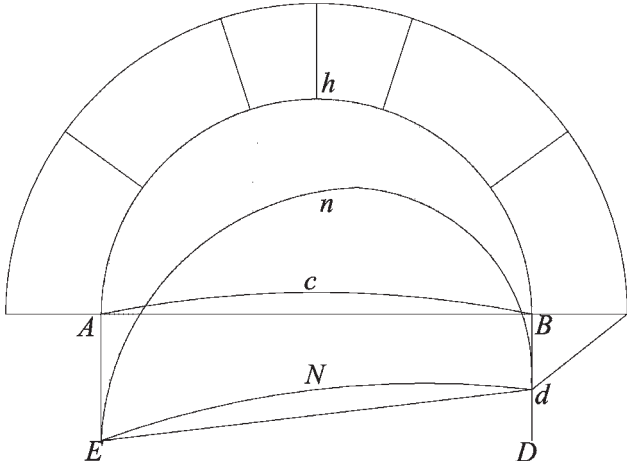


Fig. 38 Visualizzazione dell'arco retto nel caso il piano di sviluppo sia orizzontale alla direzione del piano verticale e dell'arco rampante nel caso del piano inclinato.

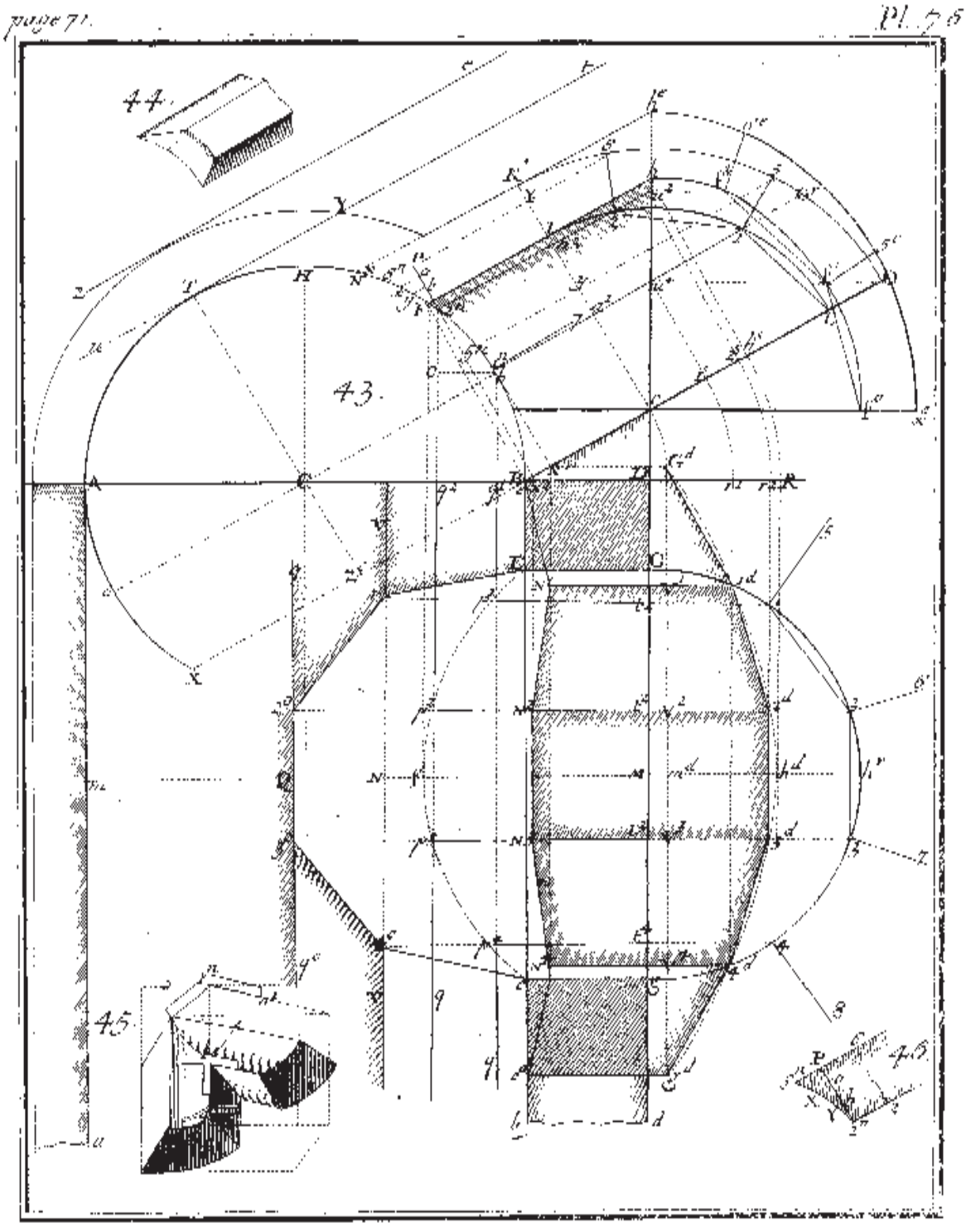
Fig. 39 Sviluppo con piano orizzontale della volta di un'apertura inclinata di una torre circolare con centro in C.

Fig. 40 Visualizzazione dell'arco retto nel caso il piano di sviluppo sia parallelo alla corda *AB* dell'arco *BcA* della torre.

Fig. 41 Secondo sviluppo delle pendenze in una torre rotonda in cui l'arco primitivo è orizzontale e l'arco retto è rampante. Per il punto *c* dell'arco *AcB* si traccia la retta *GF*, parallela ad *AB*, conclusa nei punti *G* e *F*, dall'intersezione dei piedritti *DB*, *EA* prolungati. **Parte del disegno originale non è riportata in questa figura in quanto non viene descritto il procedimento per ottenerla.**

Fig. 42 Sagoma dell'intradosso piatto per il taglio delle pietre. Sulla linea retta E^dR^d si tracciano le corde dell'arco retto.

[1] le due lettere *ae* così unite sostituiscono il simbolo del testo originale.


page 71.
Pl. 76
44.
43.
45.

PRIMO CASO, LUNETTA RAMPANTE, O DISCESA DRITTA COLLEGANTE UNA BOTTE DI LIVELLO.

Si può fare questo *trait* [1] in due modi, l'uno si fà semplicemente posizionando i conci della discesa alla botte di livello, senza farci nessuno spigolo, come fà il P. Duran [2], e dopo di lui il de la Ruë[3]; in modo tale che gli strati della discesa sfondino la *doële* [4] dell'altra botte, che si trova allo stesso livello.
L'altro modo che io preferisco rispetto a quello degli autori, è quello di fare incontrare le botti sugli spigoli dei conci, come abbiamo detto prima sulle volte a crociera e sulle lunette.
Preferisco questr'altro modo perché l'apparato diventa più solido e bello, poiché con il primo modo la *doële* della botte di livello è separata dalla *doële* della botte discendente nel punto di collegamento, il che si può evitare, vista la sicura disuguaglianza, supponendo che i letti siano di larghezza uguale; è chiaro che le sezioni di queste imposte con la *doële* danno delle rette parallele all'asse della botte di livello, e man mano che si inclinano avvicinandosi alla chiave della discesa, si curvano sempre di più, e danno alla *doële* una forma ad arco ellittico, che diventa più grande, quando la chiave della discesa si avvicina alla tangente *Tt* dell'arco retto *AHB*, della botte di livello, parallelamente all'asse *BC* di quello della discesa, e al di là di questa tangente i collegamenti di testa sono interrotti alla *doële*, perchè la tangente *Tn* rientra nello spessore della volta *ATY* [5] ; alla quale gli autori non hanno provveduto.
Sia dato il rettangolo *ABba*, **(*Fig. 43*)** come piano orizzontale della botte di livello; *EGge*, quello della discesa o lunetta, e la linea *BL*, il profilo della sua inclinazione all'orizzonte.
Su *AB*, come diametro, si determini il centro della botte di livello circolare o ellittica.
Tracceremo su *Gg*, come diametro, l'arco-retto Gh^rg della discesa, preso come generatore, se consideriamo la superficie della *doële*, piuttosto che quella dell'estradosso, o che sia risultante dal centro della parte generatrice, come potrebbe essere di profilo il quarto dell'ellisse chf^b, *perchè in seguito prenderemo sempre l'arco-retto della discesa come centro generatore*, come si è parlato al Probl. XII delle discese semplici, del tomo precedente, dove abbiamo dato il modo di tracciare relativamente a tutte le situazione delle facciate a piombo, in *talud* [6],sfalsate senza *talud*, o con *talud*, ecc.
Sia dato dunque il mezzo cerchio o la mezza-ellisse Gh^rg, il centro dell'arco-retto, diviso dai suoi conci curvi nei punti *1*,*2*,*3*,*4*, tracceremo da questi punti delle perpendicolari al suo diametro *Gg*, prolungate al di là indefinitamente, che lo taglieranno nei punti $t^1\ t^2\ t^3 t^4$.
Da un punto *c*, preso a caso sul profilo della rampa *BL*, si traccerà una perpendicolare *cIK*, sulla quale si riporteranno le altezze delle *retombées* [7] $1t^1$ in ca^1, e $2t^2$ in ca^2; infine Mh^r in *cI*, per i punti I,a^2,a^1, si tracceranno delle perpendicolari indefinite a *cK*, che taglieranno l'arco-retto *AHB* della botte di livello, nei punti $1^n,2^n,F$, e la linea *hc*, della faccia discendente, che io suppongo a piombo o in *talud*, (non importa) nei punti u^1, u^2.
Ora, abbiamo molte cose da fare, a seconda del modo in cui si andranno a tagliare i conci curvi tramite squadratura, o tramite *panneaux* [8] e tramite intersezione, come le volte a crociera, o per collegamenti di testa, che attraversano la *doële* delle botti di livello.
Se si vuol fare l'incontro di queste due botti tramite l'intersezione e la squadratura, come le volte a crociera, e le lunette delle botti, bisogna fare la proiezione sul piano orizzontale *ABba*, tracciando dai punti trovati sul profilo 1^n, 2^n, delle perpendicolari su *AB*, prolungate al di sotto sino all'incontro delle proiezioni dei collegamenti di letto della discesa, che si incontreranno nei punti p^1, p^2, p^3, p^4; lo *Gnomone*, cioè la figura a forma di squadra q^1, p^1, t^1 *GEB*, sarà la proiezione del primo concio, lo *Gnomone* seguente $q^2\ p^2\ t^2\ t^1\ \ p^1\ q^1$, sarà quella del secondo concio, quella della chiave avrà la forma di *T*, Qq^c [9], q^1, p^2, $N^3\ N^2\ p^2\ q^2$, perchè essa sarà la metà della croce, che è quella della volta a crociera.
Per mezzo di queste proiezioni, si possono intersecare i conci attraverso la squadratura, come quelli della volta a crociera, stando attenti solamente di dare ai bracci della discesa, l'inclinazione della *biveau* [10] formata sull'angolo della rampa *cBD*.
Ma se si vuole operare col metodo dei *panneaux* della *doële* piatta, questa proiezione è inutile; bisogna fare,in particolare, lo sviluppo di ogni superficie delle botti che si incontrano.
Per la botte di livello, bisogna rettificare l'arco di profilo $B\ 1^n 2^n$, attraverso le corde, che si riporteranno sul centro della proiezione della discesa *Mm*, cioè la corda $B\ 1^n$ in *ON*, quella dell'arco $1^n\ 2^n$ in *NQ*, e per i punti *N* e *Q*, si porteranno delle parallele a *Bb*, che taglieranno le proiezioni dei giunti di letto della discesa nei punti 1^0, 4^0, 2^0, 3^0, se si vuole tirare per questi punti dall'una all'altra parte delle rette $E\ 1^0$, $1^0\ 2^0$, eccetera si avrà il poligono *EQe*, che sarà lo sviluppo del foro, che riduce la discesa in un prisma nella botte di livello, diventato un prisma anche nelle *doëles* piatte.
Così la testa della prima *doële* della botte di livello diventerà la figura $BE\ 1^0\ v$, che servirà anche per il suo opposto uguale $e4^0$, ruotato in senso contrario; la testa della seconda *doële* sarà la figura $v\ 1^0\ 2^0\ q$, che servirà lo stesso per il quarto concio, ruotandola in senso contrario, eccetera fino a quando la chiave sarà dritta.
Per fare lo sviluppo delle *doëles* della discesa, bisogna rettificare l'arco-retto $G\ h^r\ g$, attraverso le corde delle divisioni *1*, *2*, *3*, *4*, e sistemare la retta di direzione, quando si può, sul prolungamento di una retta *cK*, perpendicolare alla rampa *Bc*; ma visto che la grandezza della tavola non lascia abbastanza spazio, ci fermeremo in $G^d\ g^d$, parallelamente a *Dd*, mettendo il suo centro in m^d, sulla proiezione del suo asse ad una distanza $O\ m^d$, dal piedritto della volta di livello, che sarà uguale a *Bc* della rampa; così per determinare gli aggetti degli angoli del suo sviluppo, si porteranno dai punti u^2, u^1, del profilo della faccia discendente *hc*, delle perpendicolari sulla retta *BL*, che la taglieranno nei punti 1^s, 2^s; dopo dal punto *B* come centro, si tracceranno a partire da questi punti degli archi di cerchio che taglieranno il prolungamento di *AB* nei punti r^1, r^2, per i quali si manderanno le parallele indefinite alla direttrice $G^d\ g^d$.
Poi si farà lo stesso per il lato della lunetta, dai punti $1^n\ 2^n$, si porteranno delle perpendicolari alla rampa *Bc*, che la taglieranno nei punti $x^1\ x^2$, che li porterà anche su *BD*, attraverso gli archi che le intersecheranno in dei punti, da cui si tracceranno delle parallele a *Bb* o e^xe^d, poi dai punti V^1, V^2, V^3, V^4, $G^d\ g^d$, che sono quelli delle divisioni dell'arco-retto rettificato attraverso le corde, si manderanno delle parallele alla direzione *MO*, della discesa, le quali incontreranno le parallele a $e^x\ e^d$ della lunetta nei punti N^1, N^2, N^3, N^4, *e* e^d, dove saranno gli angoli di curvatura dei *panneaux* della *doële* piatta, inscritti nello spigolo della lunetta.

Le stesse parallele alla direzione della discesa toccheranno anche attraverso le loro intersezioni con le parallele alla faccia *Gg*, i punti 1^d, 2^d, 3^d, 4^d, G^d g^d, dove saranno gli angoli degli aggetti delle teste dei *panneaux* della *doële* piatta, fino alla faccia della discesa.
Se attraverso questi punti trovati, tanto nello sviluppo dello spigolo della lunetta, che in quello della discesa, si tracciano delle rette, che avranno tutte le inclinazioni delle teste delle *doëles* piatte sugli spigoli dei letti, e se invece di rette si traccia con un curvilinee una linea curva, che passa in questi stessi punti, si avranno i contorni degli estremi delle botti di livello e discendente, dove si forma lo spigolo della lunetta; i quali sebbene estremamente differenti, come $E\ 1^0\ 2\ ^0\ 3\ ^0\ 4\ ^0\ e$ della botte di livello, che si trova tutta nelle rientranze, e $e^x\ N^1\ N^2\ N^3\ N^4\ e^d$, che formano due angoli rientranti in N^1 ed N^4, e due sporgenti in N^2 N^3, si raccorderanno tuttavia esattamente l'uno all'altro, allorchè si piegheranno sulle superfici cilindriche delle due differenti botti di livello e discendente, perchè lo spigolo che devono formare attraverso la loro collaborazione, è una curva a doppia curvatura, che noi abbiamo chiamato *Ellipsimbre*.
I due sviluppi che generano i *panneaux* della *doële* piatta, basteranno per l'esecuzione del *trait*, senza che sia necessario tracciare i piani dei letti, se si collega la botte di livello, con quella discendente attraverso l'intersezione, cioè con i conci a due braccia, di cui l'uno tra la botte di livello, l'altro tra la botte discendente.
Ma se si vogliono fare, secondo il metodo degli autori, tutte unite senza angolo, facendo arrivare i letti della discesa nella *doële* della botte di livello, si dovranno cercare le curve delle teste di questi letti, che sono visibilmente degli archi ellittici, che si raddrizzano dalla chiave, dove il giunto sarà circolare, se ce ne sarà uno, come $N^x\ f$, che si confonde con l'arco-retto, che abbiamo supposto rotondo, fino all'imposta *E*, dove diventano completamente linee dritte, perchè questo giunto diventa parallelo all'asse della botte.
Si tratta dunque di allungare gli archi nel profilo compresi tra le rette $1^n\ 1$ e $5^n\ 5$, $6^n\ 6$, $2^n\ 2$, tracciate parallelamente alla discesa per i punti *2* e *6*, dell'arco-retto, cioè alla *doële* in *2*, e per il punto dell'estradosso *6*; se ciò si farà allo stesso modo, di cui abbiamo detto per tutte le teste dell'apertura, si porterà per esempio per il secondo giunto una linea $2^n\ P^{11}$, perpendicolare a $2^n\ 2$, che intersecherà l'estradosso $6^n\ 6$ al punto P^{11}, si dividerà $P\ ^{11}2^n$ in tre parti nei punti *a* e *b*, da cui si tracceranno delle parallele a $2^n\ 2$, che taglieranno l'arco $6^n\ 2^n$ nei punti *xy*.
Poi si traccerà in una figura a parte, come nella 46, una linea $P\ 2^n$, uguale a $P\ ^{11}\ 2^n$ del profilo, che essendo divisa ugualmente in tre nei punti *a* e *b*, si faranno passare dai punti *P*,*a* e *b* delle perpendicolari, che si faranno uguali a quelli del profilo, cioè, $P\ 6^n\ P\ ^{11}\ 6^n$, del profilo *aX* uguale a *ax*, *bY* uguale a *by*; e per i punti $6^n\ ^{12}\ X\ Y\ 2^n$, si traccerà l'arco ellittico, che diventerà la testa del *panneau* del secondo letto, che passa attraverso la botte di livello.
Si troverà nella stessa maniera la curva del primo letto sul prolungamento dell'arco $5^n\ 1^n$, dove la curvatura è più sensibile, perchè questo arco è marcato vicino al punto di contatto della perpendicolare alla rampa, che toccherebbe il semicerchio *AHB*, perchè la linea del letto $1, 1^n$, parallela a questa rampa passi vicino al centro *C*, dell'arco-retto della botte di livello.
Da ciò ne segue attraverso un ragionamento opposto, che si porterà a questa rampa *cB*, prolungata verso *X*, una perpendicolare $Tz\ ^{0\ 13}$, che passa dal centro $C\ ^{14}$, essa intersecherà l'arco-retto nel punto *T*, dove terminerà il giunto di testa più grande dell'estradosso della discesa, o meglio l'ultimo punto dove si possa prolungare la chiave della lunetta; in quel caso il *trait* degli autori diventa impossibile; si deve allora ritornare all'intersezione dei conci, per accordare le due volte.
Non diciamo niente delle teste dei *panneaux* del letto di fronte alla discesa, perchè se ne è sufficientemente parlato nel Probl. XII del tomo precedente, quando abbiamo trattato delle discese semplici.

Si troverà nella stessa maniera la curva del primo letto sul prolungamento dell'arco $5^n\ 1^n$, dove la curvatura è più sensibile, perchè questo arco è marcato vicino al punto di contatto della perpendicolare alla rampa, che toccherebbe il semicerchio *AHB*, perchè la linea del letto $1, 1^n$, parallela a questa rampa passi vicino al centro *C*, dell'arco-retto della botte di livello.
Da ciò ne segue attraverso un ragionamento opposto, che si porterà a questa rampa *cB*, prolungata verso *X*, una perpendicolare $Tz\ ^{0\ 13}$, che passa dal centro $C\ ^{14}$, essa intersecherà l'arco-retto nel punto *T*, dove terminerà il giunto di testa più grande dell'estradosso della discesa, o meglio l'ultimo punto dove si possa prolungare la chiave della lunetta; in quel caso il *trait* degli autori diventa impossibile; si deve allora ritornare all'intersezione dei conci, per accordare le due volte.
Non diciamo niente delle teste dei *panneaux* del letto di fronte alla discesa, perchè se ne è sufficientemente parlato nel Probl. XII del tomo precedente, quando abbiamo trattato delle discese semplici.

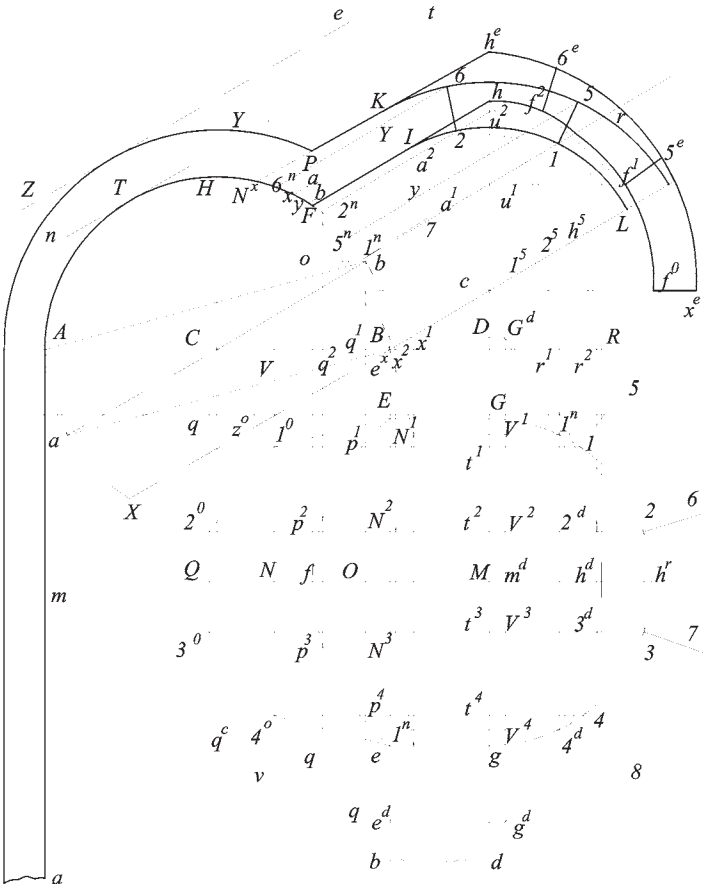
APPLICAZIONE DEL TRAIT SULLA PIETRA

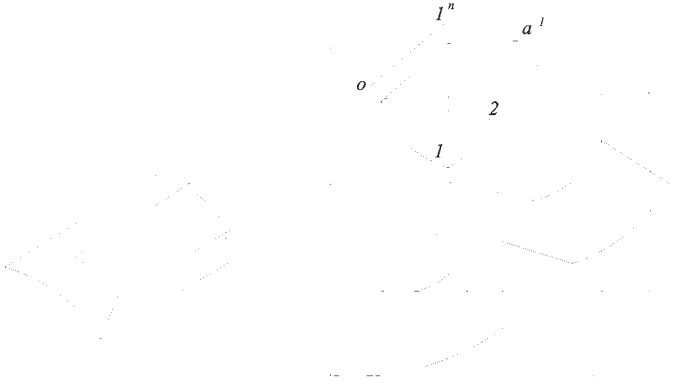
Supponendo che si faccia il raccordo di due volte attraverso l'intersezione, si potrà cominciare da uno dei due bracci del concio, che si vorrà fare più lungo; oppure, se essi sono uguali, si comincerà dal braccio, che entra nella botte di livello, per esempio al secondo concio, la cui proiezione orizzontale è lo *Gnomone* $q^2\ p^2\ t^2\ t^1\ p^1\ q^1$.
Avendo alzato una superficie di sostegno orizzontale, per piazzarci lo spigolo del letto di sopra alla *doële* $p^1\ q^1$, si traccerà su questa linea una perpendicolare $p^1\ t\ ^{1\ 15}$, su cui si poggerà un lato della *biveau*, aperto sull'angolo $o1^n a^1$ (***Fig. 45***), dove *CBc* del profilo è quello che la rampa forma con l'orizzonte; seguendo quest'angolo si estrarrà la pietra nella stessa direzione, per ottenere anche lo spigolo del letto di sopra della discesa delineata nel profilo $1^n\ a^1$, e nel piano orizzontale $p^2\ t^2$; avendo poi aperto la *biveau* sull'angolo $a^1\ 1\ 5$ del profilo, si poserà uno di questi lati sulla prima linea $q^1\ p^1$, l'altro assumerà l'inclinazione della *doële* piatta della discesa, attraverso lo spigolo del suo lato $p^1\ t^1$.
Si appoggerà su questa nuova superficie il *panneau* della *doële* piatta, che corrisponde al secondo concio, collocato nello sviluppo $N^1\ 1^d\ 2^d\ N^2$, poggiando il lato $N^1\ 1^d$ su $1^n\ u^1$, e il punto N^1 del pannello sul punto 1^n, nello spigolo d'incontro tra il letto inferiore della botte di livello con quello della botte discendente; da questa proiezione, si traccerà sulla nuova superficie, il contorno del *panneau* $N^1\ 1^d\ 2^d\ N^2$, per avere la posizione degli angoli N^2 della lunetta del letto inferiore, e 2^d della faccia della discesa allo stesso livello.
Siano dunque tre punti della *doële* piatta della botte di livello, cioè, due nel letto inferiore $q^1\ p^1$, e l'altro nell'angolo del letto inferiore, rappresentato dal piano orizzontale passante per p^2; così si può formare (grazie al Probl. I del quarto libro) la *doële* piatta del braccio della botte di livello.
Tracciate le *doëles* piatte, è molto facile completare il concio formando i letti inferiore e superiore, con la *biveau* della *doële* piatta e di testa, cioè, con l'angolo *2 1 5*, per il letto inferiore della discesa, *1 2 6*, per quello

superiore; si considera l'angolo *2ⁿ 1ⁿ 7* per il letto inferiore della botte di livello, e lo stesso per il letto superiore, se è circolare; così i due bracci del concio termineranno a squadra negli spigoli dei letti nella botte di livello, e lo stesso in quello della botte discendente.
Per formare la discesa dei conci semplici, senza spigolo, non c'è nessuna difficoltà, avendo i *panneaux* della *doële* piatta e quelli dei letti di cui le teste sono concave; si avrà quindi la parte della botte di livello che forma la testa.

NOTA
Qualunque cosa sia quest'ultima costruzione di P.Deran, adottate dal de la Ruë, è chiaro che questa non conviene mai tranne che alla solidità dello spigolo, perchè i conci tendono a scivolare sulla botte di livello, non essendo trattenuti per l'attrito dei loro letti.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA
E' chiaro (per il Teorema XX del primo libro) che la sezione formata dall'incontro delle superfici dei due cilindri a botte, che si incrociano nell'angolo retto, come nel caso presente, senza che gli assi si incontrino, è un'*Ellipsimbre*, in qualunque posizione si trovino queste botti con le linee dell'orizzonte; così è chiaro che qualunque linea si prenda per orizzontale, come *XBc*, con qualsiasi inclinazione con l'orizzontale, per farci la proiezione di questa curva, non risulterà alcun cambiamento di costruzione della lunetta di livello in una botte di livello, di cui abbiamo parlato dinanzi; la sola differenza è che la botte raccordata *XAHB*, sarà più grande di una botte ordinaria, di cui i punti iniziali devono sempre essere sul diametro *ab*, anzichè essere questo su una corda *XB*, le parti *aX*, *bB* diventeranno in *talud*.
E' seguendo questa ipotesi, che abbiamo fatto la proiezione della discesa, per avere le lunghezze degli spigoli dei letti, e i loro aggetti gli uni sugli altri; ma per evitare la confusione delle linee del disegno, le abbiamo trasportate tramite degli archi di cerchio su una orizzontale reale *AB*, prolungata per fare la proiezione, e lo sviluppo della botte di livello; ciò non cambia niente alle dimensioni, poichè le prime lunghezze trovate sono state portate su *BR*, parte del prolungamento di *AB*.
L'applicazione del *trait* sulla pietra sarà facile da concepire, se si fà attenzione; abbiamo cominciato facendo passare una superficie orizzontale, dagli spigoli dei letti di sotto per riportarci l'inclinazione della discesa, da una direzione perpendicolare alla intesezione comune del piano orizzontale con la *doële* piatta, e di quello verticale passante parallelamente alla direzione della discesa con la verticale, così le *biveaux* sono ben applicate per i conci nei bracci.
Riguardo alla costruzione del raccordo delle due superfici con i conci semplici, è evidente che le superfici piane dei letti della discesa, tagliando obliquamente la *doële* cilindrica della botte di livello, tracceranno delle porzioni dell'ellisse, di cui le ordinate sono uguali a quelle della botte di livello, e gli attacchi sono dentro quelle come le larghezze dei letti *1 5*, *2 6*, secondo le loro proiezioni verticali all'arco-retto $a^1 y$, a^2Y, secondo il primo teorema del secondo libro.





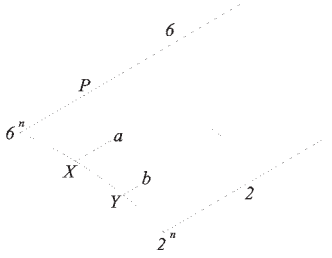


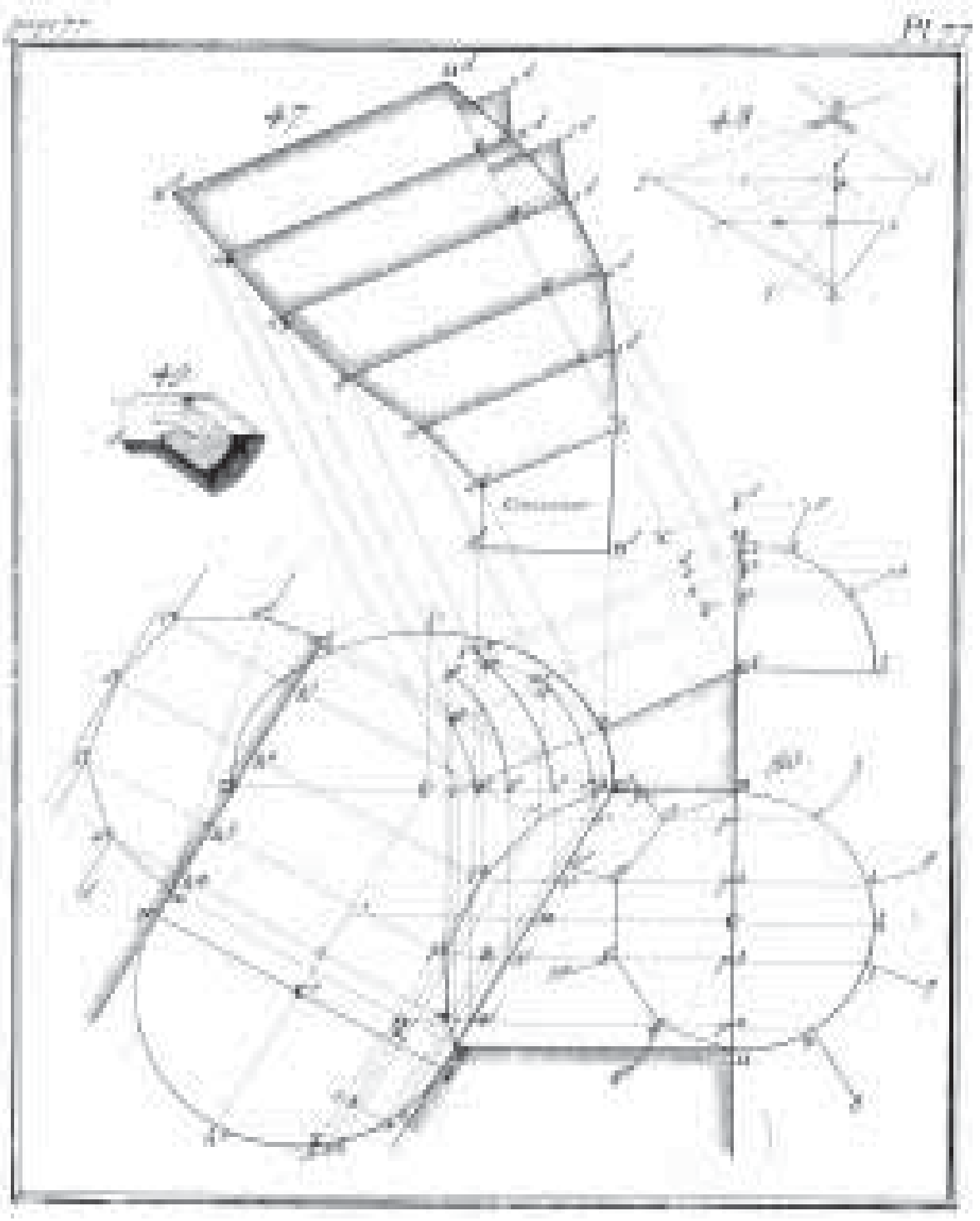
Fig. 43 Il disegno rappresenta il processo di costruzione di una volta composta, formata da due volte a botte collegate da una lunetta rampante, richiamata nel testo anche come discesa dritta.Ciò è raffigurato attraverso la sezione della volta e il suo sviluppo in pianta.
L'attenzione viene focalizzata soprattutto nel concio di unione tra la volta a botte e la discesa, questo perchè il concio assume importanza a livelllo statico e di soluzione estetica.
Nella tavola compaiono rette e lettere che non vengono richiamate nel testo, ma sono state raffigurate per una fedeltà al *trait* originale.

Fig. 44 Il disegno rappresenta come devono essere tagliate le superfici di un concio qualsiasi delle botti.

Fig. 45 Il disegno rappresenta un particolare della fig. 43, nello specifico il concio di unione tra la discesa e la botte di livello. Mostra come posizionare il *biveau* nella pietra e tagliare le facce secondo il suo angolo.

Fig. 46 Il disegno rappresenta un particolare della fig. 43, nello specifico il concio di unione tra la discesa e la botte di livello. Mostra la realizzazione dell' intradosso dalla parte della botte, a squadra o curvo.

[1] Trait: indica tutti i disegni che servono per definire una volta, sia pianta, prospetto, sezione, sviluppo; a scala sia naturale che ridotta.
[2] Philibert Delorme fece costruire una "Trompè ondée" e rampante al Castello di Anet, della quale propose trait nel suo "Livre d'Architecture".
Deran, ponendo il suo metodo come alternativa a quello di P. Delorme, opera per sottrazione, poichè racchiude la "Trompe ondée" in una più grande rampante e "droite" sul fronte, dalla quale sottrae in seguito ciò che sporge oltre la faccia della "Trompe ondée". Il punto di partenza è un piano di taglio posto tangente alla parte più esterna dello sbalzo.
[3] De la Ruë nota, nei passi descrittivi dedicati alla "Trompe" di Anet di Delorme, che questa in realtà può essere vista come una "Trompe droite" e rampante: se il piano verticale di taglio del fronte "droite" è posto alla radice dello sbalzo, pere ottenere la versione finale si dovrà aggiungere una parte, appunto quella a sbalzo e ondulata in pianta.
De la Ruë , dopo aver esaminato i metodi di Deran e Delorme, propone di racchiudere, come Deran, la "Trompe ondée" in una "Trompe" rampante "droite" e di operare quindi come Delorme per trovare le lunghezze pannelli "de doële", di giunzione, eccetera.
[4] Doële: così si chiama il paramento interno di una volta o di un concio incavato. La superficie piana che passa per la corda dell'arco di una doële si chiama doële plate, è una fase di preparazione per la definizione di una doële concava.
[5] Nel testo originale è riportato AnY.
[6] Talud: linea inclinata, un berceau orizzontale en talud e ad asse orizzontale con la faccia non verticale, ma inclinato verso l'interno.
[7] Retombée: intervallo orizzontale tra il piedritto di un arco e l'appiombo abbassato nel suo culmine superiore.
[8] Panneaux: sagome di una superficie di un concio, tagliate in legno o in cartone che saranno applicate sulla pietra per tracciare i contorni di un letto di una doële.
[9] Nel testo originale è riportato q^{e}.[1]
[10] Biveau: sagoma dell'apertura di un angolo qualunque.
[11] Nel testo originale è riportato p.
[12] Nel testo originale è riportato b ^{n}.
[13] Nel testo originale è riportato z.
[14] Nel testo originale è riportato Cd.
[15] Nel testo originale è riportato i.



Secondo caso

DISCESA DRITTA SUL DIAMETRO DELLA FACCIA, CHE RACCORDA UNA BOTTE DI LIVELLO OBLIQUAMENTE.

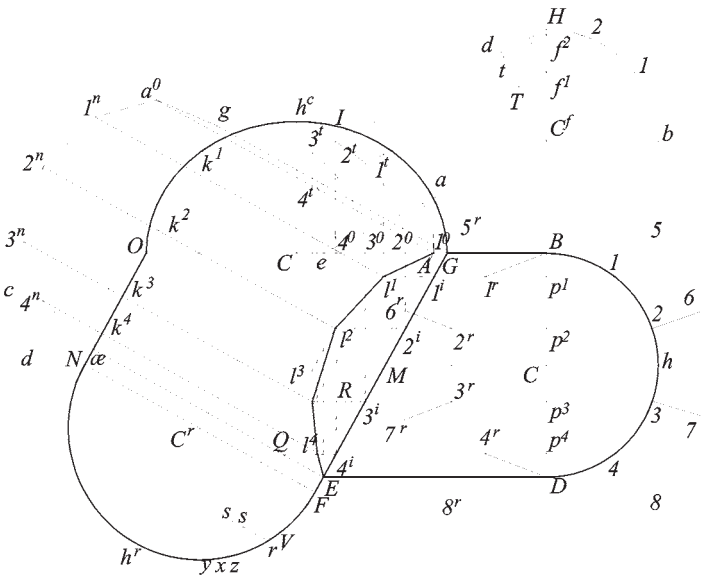


Fig. 50 Il disegno rappresenta la proiezione orizzontale dell'incontro di due volte a botte,una discendente e l'altra di livello, in cui il poligono Al^2E è la proiezione della lunetta generata dall'incontro di queste due volte .

Sia il rettangolo *eBDE* (Fig. 50) la proiezione del piano inclinato della discesa, passante per le imposte di livello *B* e *D*, del centro della faccia in discesa *BhD*, il piano inclinato è espresso di profilo, attraverso la sua retta C^fe, elevata in C^f, sull'orizzontale *OAB* , dell'altezza data C^fB.
Sia anche il rettangolo *gGFN*, il piano orizzontale di una botte di livello, di cui la direzione espressa dal lato *GE*, crea gli angoli obliqui con la proiezione *CM* del centro della discesa, cioè, uno acuto *GMC*, di un lato, ed uno ottuso *FMC* dell' altro; di modo che la parte triangolare *eGE* della discesa, si trovi compresa tra la botte di livello, e tra un'altra parte triangolare *AGE*, come spieghiamo di seguito.
Su *BD*, proiezione del diametro della faccia della discesa, avente descritto il centro *BhD*, di un arco circolare o ellittico, come si vedrà, diviso dai suoi conci nei punti *1, 2, 3, 4*, si tracceranno per questi punti delle parallele alla sua direzione indefinita $1l^1\ 2l^2\ 3l^3\ 4l^4$, che taglieranno il lato *GE*, della botte nei punti $1^i, 2^i, 3^i, 4^i$.
Poi si riporteranno le altezze delle imposte $1p^1, 2p^2\ hC$, sul profilo in $C^f f^1$, $C^f f^2$, $C^f H$; da dove si tracceranno delle parallele indefinite alla rampa $C^f E$, come HI, $f^2\ 2^t$ [1], $f^1 1^t$ [2].
Il diametro dell'arco dritto *FN* sarà perpendicolare al lato *GF*, della botte di livello, dato che si suppone l'arco Fh^rN a tutto sesto.
Poi avendo prolungato la retta *BG*, fino al lato *gN*, che lo taglierà in *O*, si traccerà su *OG* come diametro, la semi ellisse Oh^cG, di cui l'asse minore sarà il diametro dell'arco dritto *FN*, e la sua metà h^cC [3], uguale all'altezza dell'arco dritto C^rh^r , questa semi ellisse intersecherà il profilo del piano della discesa C^fe nel punto *a*, da cui si abbasserà su *OG*, la perpendicolare *aA*, che incontrerà *OG* nel punto *A*, per il quale si tirerà la retta *AE*, passante per *E*, e che sarà la proiezione del diametro rampante *ea*.
Per i punti $1^i, 2^i, 3^i, 4^i$, si eleveranno delle perpendicolari sul diametro *OG*, che lo intersecheranno nei punti 1^0 [4], 2^0, 3^0, 4^0, dai quali si tracceranno degli archi ellittici uguali al primo Gah^c , e a questo paralleli, che nella pratica sono molto facili da delineare, poggiando un pannello a partire dalla linea *OG*, e spostando il punto *G* successivamente sui punti 1^0, 2^0, ecc. e tracciando il profilo di questi cerchi da ogni posizione, si avrà così l'intersezione di questi archi di ellisse tra loro paralleli, con i profili dei giunti del letto ai punti $a\ 1^t\ 2^t\ 3^t\ 4^t\ e$, che determineranno le lunghezze di questi giunti di letto; se si traccerà da questi punti la curva *aIe*, si avrà la proiezione verticale della lunetta, che fa la botte in discesa dentro quella di livello nello spigolo di raccordo.
Ora, se si abbassano da questi punti $1^t\ 2^t$ ecc. delle perpendicolari sulle proiezioni dei giunti dei letti corrispondenti, prolungati $1l^1, 2l^2, 3l^3, 4l^4$, si avranno attraverso le loro intersezioni i punti l^1, l^2, l^3, l^4, proiezioni orizzontali degli angoli della stessa lunetta, formata per l'incontro delle *doëles* [5] piatte; così si tireranno dall'una all'altra proiezione delle rette che formeranno il poligono Al^2 [6] *E*, ottenuto così attraverso la proiezione orizzontale della lunetta.
Così da queste due proiezioni della lunetta, noi possiamo disegnare facilmente e direttamente i *panneaux* [7] della *doële* piatta nello sviluppo, dopo che si avrà tracciato l'arco dritto.
Si tracci C^fd perpendicolare sul profilo della rampa eC^f, che intersecherà i profili dei giunti di letto ai punti T e t; si riporterà la lunghezza C^fT in $p^1 1^r$ e $p^4 4^r$, C^ft in $p^2 2^r$, $p^3 3^r$, e dai punti B, 1^r, 2^r, 3^r, 4^r, D, si tracceranno delle rette, che saranno le vere larghezze delle *doëles* piatte.
Per fare lo sviluppo, si riporteranno le lunghezze in successione sulla retta C^fd, prolungata fino a D^d, a cominciare da un punto preso a caso come L, in 1, 2, 3, 4, D^d (Fig. 47).
Si porterann da tutti questi punti L, 1, 2, 3, 4, D^d, delle perpendicolari alla retta dD^d indefinita da una parte e dall'altra, di cui le lunghezze saranno determinate da tutte le parallele a questa retta, che saranno tracciate dai punti trovati nella sezione della lunetta a $1^t\ 2^t\ 3^t\ 4^t$ e, le quali le taglieranno ai punti $a^d\ n^1\ n^2\ n^3\ n^4\ E^d$ dal lato della lunetta.

[1] Nel testo originale è riportato t^2.
[2] Nel testo originale è riportato t^1.
[3] Nel testo originale è riportato C_c.
[4] Nel testo originale è riportato 1_0.
[5] Doële:così si chiama il paramento interno di una volta o di un concio incavato. La superficie piana che passa per la corda dell'arco di una doële si chiama doële plate, è una fase di preparazione per la definizione di una doële concava.
[6] Nel testo originale è riportato l_2.
[7] Panneaux: sagome di una delle superfici di un concio, tagliate in legno o in cartone che saranno applicate sulla pietra per tracciare i contorni del letto di una doële.

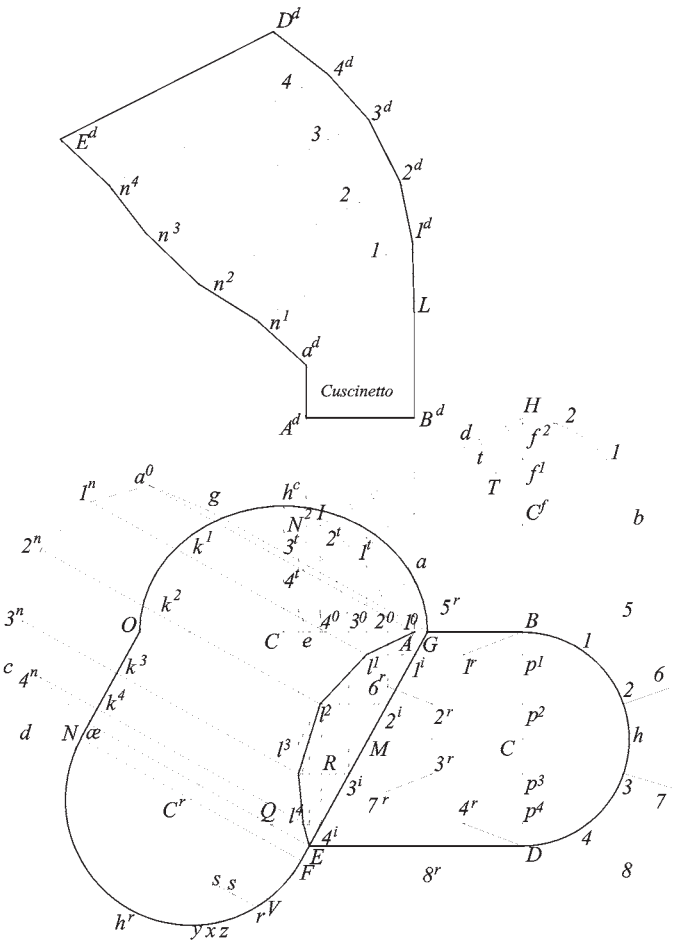


Fig. 47 Il poligono $A^dB^dD^dE^d$ rappresenta lo sviluppo della proiezione orizzontale della lunetta che nasce dall'incontro delle due volte a botte.

Per lo sviluppo della faccia discendente, si tracceranno delle parallele a $C^f D^d$ per i punti f^1 f^2 H, che taglieranno le trasversali nei punti 1^d 2^d 3^d ecc. si uniranno tutti questi punti con le terminazioni delle rette, che formeranno il poligono $a^d E^d D^d L$, che è lo sviluppo della *doële* della discesa, elevata al di sopra dell'imposta della botte di livello del lato più corto *AB*, di tutto l'intervallo del cuscinetto, a cui è aggiunto $a^d LB^d A^d$.
Ora si può determinare lo sviluppo della botte di livello, dalla parte che è attraversata da quella discendente, da cui si traccerà da una distanza presa a caso un asse di direttrice *gN*, parallelo a *GE*, poi da tutti i punti GAl^1 l^2 l^3 l^4 *E*, della proiezione orizzontale della lunetta, si tireranno a partire da quest'asse delle perpendicolari indefinite su ciascuna delle quali si riporterà lo sviluppo delle corde, porzioni dell'arco dritto della botte di livello, che la lunetta sottende.
Per questo dagli stessi punti l^1 l^2 ecc. si portano delle parallele a *GE*, che taglieranno l'arco dritto Fh^rN ai punti *r*, *z*, *x*, *y*.

Dunque si porterà sulla retta l^4 4^n, il raddrizzamento delle corde dell'arco *Fr* preso poi l'imposta inferiore *F* fino all'altezza *r*, che corrisponde al punto l^4, a cominciare dal punto k^4 [8], dell'asse dello sviluppo fino a 4^n, dove arriva la corda di quest'arco; ugualmente si aggiungerà la corda dell'arco *rx*, che corrisponde al punto l^3, poi k^3 [9] dell'asse fino a 3^n, e così di seguito, la lunghezza *xy* in k^2 2^n ecc. se si tireranno dai punti trovati æ4^n 2^n ecc. delle rette, si avrà il poligono æ 2^n a^0g, che è lo sviluppo delle *doëles* piatte della botte di livello nel loro punto di incontro con la botte discendente, di cui il diametro rampante è la linea æa^0, e il resto nel triangolo a^0gæ, è una parte dello sviluppo della botte al di sotto del diametro della lunetta.
Si tratta di trovare la biveau [10], ossia, l'angolo che queste superfici piane devono fare tra loro, come ora diremo;per determinare gli angoli di testa dei *panneaux* della *doële* piatta, che devono descriversi agli spigoli prima trovati.
Prendiamo per esempio il concio al lato dello spigolo di un secondo filare, come 3, 4, basterà prendere la proiezione di una parte di ciascuna delle *doëles* piatte di livello e della discesa comprese nel parallelogramma l^3R l^4Q.
Si trasporterà questa proiezione in una figura a parte (Fig. 48), come 3r4q, da cui si prolungherà la diagonale 4, 3, indefinitivamente verso X, lo stesso il lato 4r verso i, si eleverà al punto 3 la perpendicolare 3x, che sarà uguale all'altezza sx della figura 50 , che è la differenza di altezza dei punti l^3 e l^4 della lunetta.
Si traccerà x4, sulla quale si farà una perpendicolare xP che incontrerà 4X in P, da cui si traccerà dalla stessa 4X una perpendicolare yi, che taglierà il prolungamento del lato 4r in i.
Si eleverà dopo sul lato 3r la perpendicolare 3d uguale a 3x; sarà l'angolo 3de uguale a quello della discesa BC^fa, da cui il lato de taglierà r3e in x [11], dai punti 4 ed e, si tirerà una retta 4y, che taglierà la perpendicolare Py, al punto y; infine si riporterà la lunghezza Px in PX sul prolungamento della diagonale 4 3; si uniscano al punto X i punti y e i, che si cercano, per determinare i *panneaux* delle *doëles* piatte che nascono dall'incontro delle botti discendente, e di livello.
Si osserva che da questo trait [12], non più che nel precedente,per il nostro metodo, non abbiamo parlato dei *panneaux* di letto, perché non sono necessari per i conci dello spigolo; sono necessari solamente per le teste delle discese, delle quali abbiamo sufficientemente parlato nel tomo precedente, sulle volte semplici; è inutile riportare la costruzione; sarà necessario ricorrere a questo caso solo quando siamo obbligati a farlo.
In quanto all'intervallo di questo letto dentro la testa dell'entrata, e quella della lunetta, bisogna dire che deve essere inclinato nella *doële*, essendo il taglio del letto e della *doële* preso nell'arco dritto, secondo la linea generale per tutti i casi della botte.

[8] Nel testo originale è riportato k_4.
[9] Nel testo originale è riportato k_3.
[10] Biveau: sagoma dell'apertura di un angolo qualunque.
[11] Nel testo originale è riportato e.
[12] Trait:indica tutti i disegni che servono per definire una volta, sia pianta, prospetto, sezione, svilupppo; in scala ridotta e naturale.

APPLICAZIONE DEL TRAIT SULLA PIETRA

Avendo preparato una superficie di aiuto dalla *doële* piatta della discesa, dove dalla botte di livello, secondo la convenienza dell'apparato, si applicherà il panneau dall'una e dall'altra parte della botte, come è mostrato nel disegno, e prendendo per esempio il secondo filare della discesa l^3 p^3 p^4 l^4, di cui il panneau è rappresentato nella fig. 47, dal trapezio n^4 4^d 3^d n^3, si traccerà il contorno sulla superficie poi con la biveau si trovi yXi, della fig. 48, si tagli la pietra lungo il lato 3 4 della figura 49, per avere una nuova faccia 4cd3, sulla quale si applicherà il *panneau* della *doële* piatta della botte di livello, che si deve descrivere, rappresentato (nella Figura 51) c3 n4 nd, e di cui si traccerà il contorno; infine con i biveaux dei letti e della *doële*, presi nell'arco dritto della discesa,7 3r4 r, attraverso il letto di discesa e84r3r, per quello di sotto; si taglierà la pietra per formare i letti, seguendo i lati tracciati secondo il modo del *panneau* della *doële*, si userà lo stesso per i letti della botte di livello, di cui i tagli si prenderanno sull'arco dritto Nhr F.

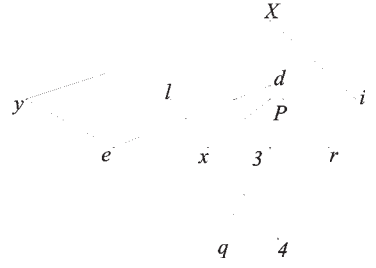


Fig. 48 Il disegno rappresenta in particolare il triangolo, delle figure precedenti, *CfBe*, proiezione orizzontale del concio unico che si deve inserire nel punto in cui si incontrano le due volte a botte.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA

La conformità di questo trait con il precedente, fa sensibilmente scorgere le ragioni della costruzione, in quel che concerne la maniera di trovare i *panneaux* della *doële* piatta, dati dallo sviluppo delle due superfici, una della botte in discesa, di cui le lunghezze dei giunti del letto sono presi sul profilo della rampa, perché nella proiezione orizzontale sono in scorcio, dato che non gli è parallela.

L'altro sviluppo è quello della botte di livello, che si forma sulla proiezione orizzontale della lunetta, che dà già l'esatta misura degli intervalli degli angoli di incontro delle *doëles* piatte dell'una e dell'altra botte; e l'arco dritto Fh^rN, che forma la lunetta in discesa nella botte di livello sviluppato, cioè rettificato , a partire dagli allontanamenti k^n dell'intervallo visto, in conformità con la costruzione precedente.

Serve spiegare solamente ciò che è particolare, ovvero il modo di assemblare questi diversi *panneaux* della *doële* piatta, per dargli l'inclinazione, che devono avere tra di loro, visto che il modo di assemblarli non è così facile come nel precedente caso, supponendo l'angolo del piano orizzontale della direzione della discesa obliquo rispetto a quello della botte orizzontale; o prendendo sempre gli angoli dei piani su delle perpendicolari alla loro intersezione comune.

Ciò è dimostrato al Problema XIV che è l'ultimo del terzo libro, se i due piani di cui le proiezioni sono i triangoli 3q4, 3r4, sono ugualmente inclinati in verticale, di cui la proiezione è la linea 3 4, le loro intersezioni con il piano orizzontale, saranno le linee 4i 4I, equidistanti dal centro P, e che la costruzione di questo Prob. l'angolo IXi, sarà quello dell'intersezione reciproca di questi piani.

Dal caso precedente questi piani non sono ugualmente inclinati in orizzontale, il che è espresso dalla retta er, passante per il punto 3, cioè, la *doële* piatta che è nella botte di livello secondo l'altezza sx della figura 50, uguale a d3 della fig. 48, e la retombée [13] sr , che corrisponde sulle stesse parallele a l^3 R, uguale a 3r della figura 48, di conseguenza la retta dr esprime la sua inclinazione riguardo alla verticale 3d, secondo la direzione della discesa.

Ora, bisogna trovare successivamente la stessa direzione della pendenza della *doële* in discesa, dato che non conosciamo che l'altezza del punto d, l'angolo dritto e3d, l'angolo della rampa Gea della figura 50, e non la retombée dove esista, come nel piano precedente; questo perché facciamo l'angolo 3de, uguale al complementare di Gea, che diamo attraverso l'intersezione del suo lato de il valore e3 di questa retombée , il cui angolo edr esprime nel profilo l'inclinazione dei due piani, e come la retta er non è, o non può essere perpendicolare alla diagonale 4 3, qualunque cosa essa sia nel piano orizzontale che la linea yi anche l'orizzontale, l'angolo non deve essere misurato che secondo il piano, che passa da questa linea, e il punto X [14] in alto, rappresentato dalla costruzione in yXi, che deve essere supposto capovolto dall'alto in basso, e girato da destra a sinistra, per trovarsi nella situazione naturale, che è sporgente, formante lo spigolo della lunetta, e non un angolo rientrante; ma si sa che l'angolo di una biveau deve essere il contrario di quello che si vuole formare.

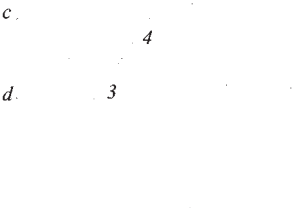
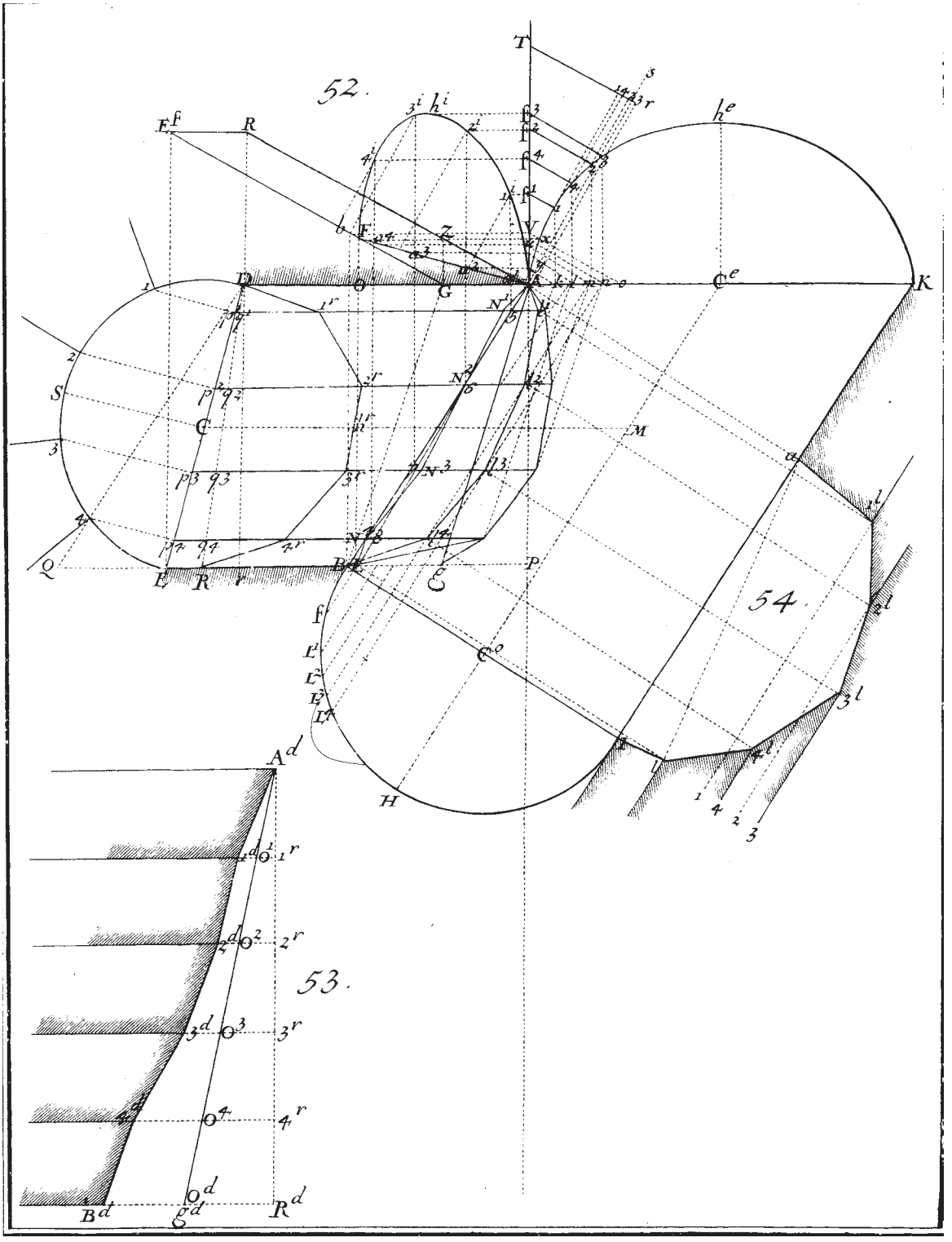


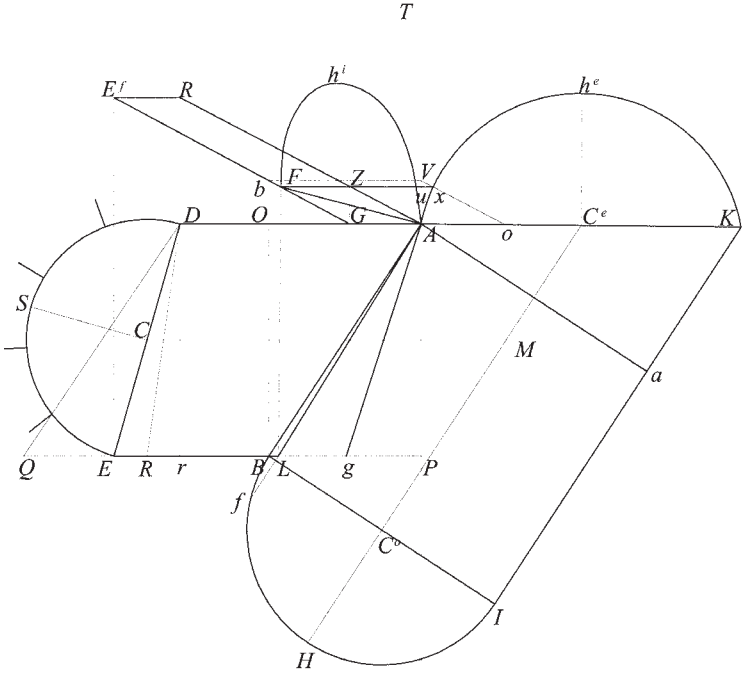
Fig. 49 Esempio di concio che raccorda il piano orizzontale della botte di livello e quello obliquo della botte discendente.

[13] Retombée: intervallo orizzontale tra il piedritto di un arco e l'appiombo abbassato dal suo culmine superiore.
[14] Nel testo originale è riportato X.


52.
54.
53.

TERZO CASO
DISCESA DISTORTA CON LA SUA ENTRATA DI LIVELLO, CHE SI UNISCE CON UNA VOLTA DI LIVELLO OBLIQUAMENTE.

Negli esempi dei due casi precedenti, abbiamo supposto che il piano di discesa, che passa per le imposte della volta inclinata all'orizzonte, cioè, il piano di pendenza, era perpendicolare ai piani verticali, paralleli al suo asse, da cui risultava che il profilo o la linea diritta, e che il diametro dell'arco-diritto, e quello di faccia erano espressi con un solo punto, perché queste due curve avevano un diametro orizzontale comune.
Ora supponiamo che la faccia di discesa *DE*, sia obliqua alla direzione *CM*, e per conseguenza la sua curva *DE* sia di livello, da qui segue che il piano di rampa diventa inclinato sul piano verticale, passante per la direzione *CM*, e di conseguenza l'arco a tutto sesto diventa rampante, come abbiamo detto nel problema XII parlando delle volte semplici, pag.171; così questo piano di rampa ha due inclinazioni, una secondo la direzione, l'altra da un imposta all'altra, come a dire trasversalmente, secondo i suoi lati.
E' così che il profilo di questo piano non può essere disegnato mediante una sola linea sullo stesso spazio, ne mediante un parallelogramma, come nelle volta semplici, ma con un trapezio *RAFE*^{f} che occorre trovare, come diremo.



Sia *AKIB*(***Fig.52.a***) il piano orizzontale di una volta di livello, e *DAgE*, la proiezione di una discesa storta, fra cui il piano di pendenza incontra quello di livello, secondo la linea *Ag*, di modo che entri nella volta di livello della parte triangolare *BAg*, perché taglia l'intradosso della volta di livello, secondo una linea curva ellittica, che avanza in *L* davanti a **B**, ad una lunghezza *BL*, uguale alla ripercussione dell'altezza fL, dell'arco della volta di livello, dove il lato Eg della discesa taglia quello della volta di livello.
Così avendo fatto sul lato *DA* l'angolo *DAR*, uguale a quello di pendenza, gli faremo in *D* la perpendicolare *DR*, che taglierà la linea di pendenza in *R*, dal quale si condurrà l'orizzontale *RE*^{f}, uguale alla obliquità *Er* della faccia *DE*, sulla perpendicolare *Dr* alla direzione *CM*.
Dal punto *E*^{f} si condurrà *E*^{f}*G*, parallela a *RA*, il rettangolo *AGE*^{f}*R* sarà il profilo del piano di pendenza, prolungato dall'orizzontale *DK*; ma a causa del fatto che questo piano incontra l'intradosso della volta orizzontale *AKIB* occorre cercare la parte triangolare *FAG* di questo piano, che è detratto incontrandosi con l'intradosso della volta a botte orizzontale.
Avendo mandato *BI* perpendicolare a *BA*, si descriverà l'arco a tutto sesto *BHI*, della volta di livello circolare o ellittico, e sopra **DA** prolungata in *K* alla riunione del suo lato *IK*, si descriverà un ellisse *Ah*^{e}*K*, con i due assi dati, conosciuti, *AK* per il grande, e *BI* per il piccolo asse.
Con lo stesso punto *B*, si condurrà un perpendicolare a *DA*, che taglierà *E*^{f}*G*, (essendo prolungata) in *b*, la linea *bA* sarà il diametro della proiezione verticale della sezione piana su *BA*, sul punto *A* si alzerà un *AT* verticale.
Si tirerà in seguito per *b* una parallela a *DA*, che taglierà *AT* in *V*, da dove si condurrà *Vo* parallelo a *RA*, che taglierà l'arco *Axh*^{e} al punto *x*, da cui si tirerà una parallela a *DA*, che taglierà *E*^{f}*G* nel punto *F*, e la linea *AT* al punto *u*; si porterà *xu* da *B* in *L* sopra *EB* prolungata, il punto *L* sarà la proiezione della riunione dell'imposte dell'arco in discesa, con l'intradosso della volte a botte in piano, la quale imposta è rappresentata dal profilo mediante la linea *E*^{f}*G*, dove questa stessa sezione è rappresentata dal punto *F*; di modo che se lo si trae da ciascuno di questi punti delle linee allo stesso punto *A*, il triangolo misto *BLA*, di cui *LA* è ellittica, rappresenta in proiezione orizzontale, quello che il piano di pendenza taglia dall'intradosso della volta a botte orizzontale, che è anche rappresentata nel profilo dal triangolo misto *OFA*.
Ora, se si suppone un piano verticale, che passa per i punti *L* ed *A*, egli taglierà l'intradosso della volta a botte in discesa, secondo un arco rampante, disegnato in profilo mediante *Fh*^{i}*A*, di cui possiamo, fare uso per trovare la proiezione orizzontale del profilo di incontro delle due volte ed anche una proiezione inclinata sul piano di pendenza, come diremo.

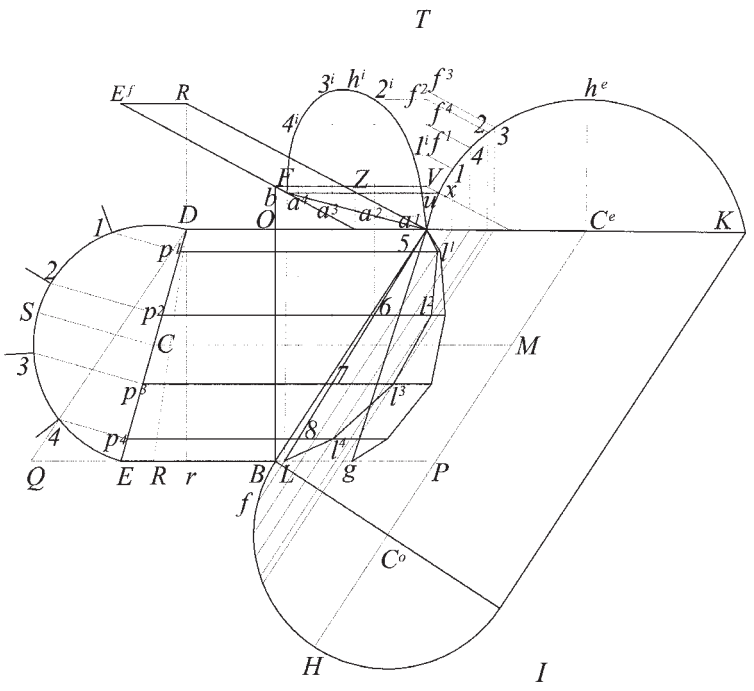


Fig.52.b *ricerca della proiezione orizzontale del profilo di incontro delle due volte*

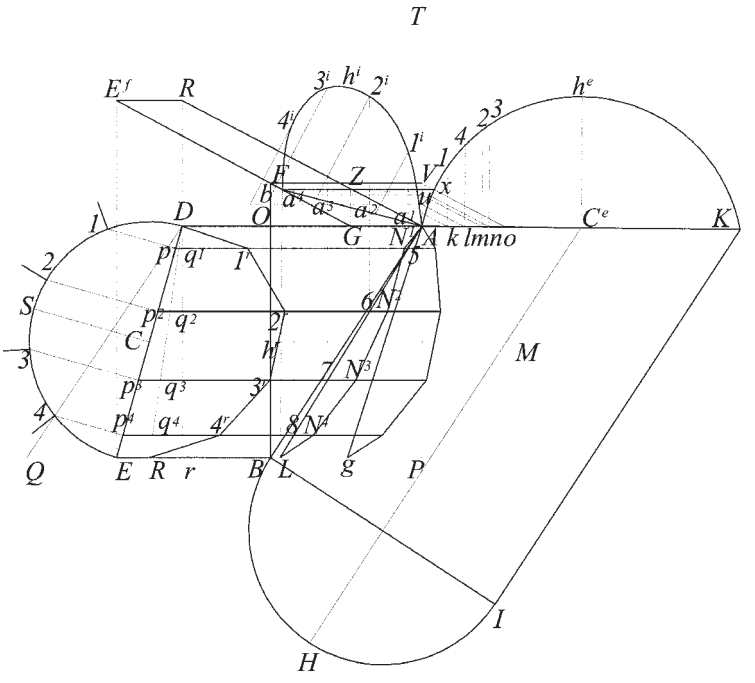


Fig.52.c *ricerca delle larghezze dei pannelli per fare lo sviluppo*

(***Fig.52.b***). Avendo fatto sul diametro d'entrata di discesa *DE*, il semicerchio(curva primitiva) *DSE*, le sue divisioni in conci ai punti *1,2,3,4*, e le proiezioni dei suoi punti sul letto, secondo la direzione della volta come sempre, $p^1 5$, $p^2 6$ ecc., prolungate indefinitamente, che taglieranno la linea *LA* ai punti *5,6,7,8*, si condurrà per questi punti le perpendicolari su *DA*, anch'esse prolungate indefinitamente, che taglieranno la linea *FA* ai punti a^1, a^2, a^3, a^4, sui quali si porteranno le altezze trovate sull'arco a tutto sesto corrispondenti, conoscendo $1\ p^1$ in $a^1\ 1^i$, ed a^4, 4^i, $2\ p^2$ in $a^2\ 2^i$ ed $a^3\ 3^i$, e con i punti $F4^i3^i$, 2^i1^iA, si traccerà l'arco Fh^iA.
Mediante tutti i punti trovati i, si condurranno delle parallele a *DA*, che taglieranno la verticale *AT* nei punti f^1, f^2, f^3, f^4, dai quali si condurranno delle parallele alla pendenza *RA*, che taglieranno l'arco Axh^e, ai punti *3,2,4,1*, ed in un punto al sotto di *x*, che proviene dal punto *u*, che non è segnato per evitare la confusione della figura, che è già fortemente caricata in questo posto di linee e di lettere.
Per i punti *3,2,4,1*, dell'arco *AK*, si abbasseranno perpendicolari sul diametro *AK*, che lo taglieranno ai punti *k, l, m, n*, mediante i quali si conducono delle parallele ad *AB*, le loro intersezioni con le proiezioni dei punti di letto, daranno i punti l^1 , l^2 , l^3 , l^4, dove faranno gli angoli di riunione degli intradossi piatti delle volte in discesa e di livello, che egli faceva in primo luogo trovare.

(***Fig.52.c***)Se anziché tracciare da questi stessi punti *3,2,4,1*, delle perpendicolari alla orizzontale *AK*, se ne tracciano altre alla linea di pendenza *RA*, prolungate fino alle proiezioni corrispondenti dei punti di letto, si avrà una spazio di proiezione inclinata sul piano di pendenza *A*, N^1 , N^2 , N^3 , N^4 , *B*, di cui si può fare uso per la traccia, purché si prenda bene considerazione di distinguere le ipotesi di piano orizzontale, e di piano di pendenza cambiato in orizzontale; poiché la parte *Bg* uguale a *GA*, che rappresenta, deve essere prolungata, secondo la distanza *zA*, ma siccome questa proiezione è inclinata, non potrà servire che per trovare le teste dei pannelli dell'intradosso piatto della discesa all'infossamento, noi li potremmo fornire con il metodo dello sviluppo.
Occorre prima supporre l'arco a tutto sesto, formato dai mezzi che abbiamo dal volume precedente, parlando delle discese semplici, pagina 181, il quale arco è rampante, o per non rinviare la lettura, si può cercarlo con il metodo del profilo, che facciamo per l'arco Fh^iA.
Da tutti i punti 1^i , 2^i , 3^i , 4^i, si abbasseranno perpendicolari su questa linea *AR*, e da tutti i punti a^1a^2 delle parallele alla stesso *AR*, che taglieranno le perpendicolari precedenti prolungate in dei punti che determineranno le ordinate dell'arco retto rampante Dh^rR^o, che si porterà sul diametro DR^o trovato, come abbiamo detto, per le volte semplici.
Essendo l'arco retto tracciato, si avranno tutte le larghezze degli intradossi piatti, necessari per fare lo sviluppo.

Si metterà a piacimento una direttrice A^dR^d (***Fig53***) sulla quale si porteranno di seguito le larghezze disuguali $D1^r$, $1^r\ 2^r$, $2^r\ 3^r$, ecc. della

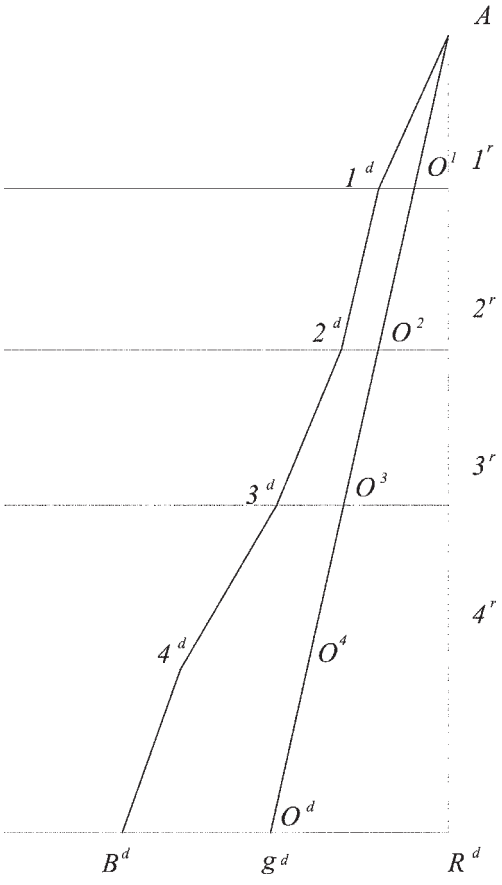


Fig.53 *sviluppo degli intradossi*

Fig. 52.c in A^d, 1^r , 2^r , 3^r , 4^r, R^d (della ***Fig. 53***) e si traccerà da tutti questi punti A^d ecc. delle perpendicolari alla direttrice, che formeranno lo sviluppo di una volta diritta; ma siccome è tagliato obliquamente dalla riunione di quello di livello, occorre cercare i disavanzi di sciancratura.

Per gli altri si traccerà mediante i punti a^1 a^2 a^3 a^4 del profilo, delle parallele all'orizzonte, che taglieranno la verticale *AT*, in punti che non si possono disegnare con lettere nella figura, perché sono troppo attaccati gli uni agli altri, dai quali si condurranno parallele alla pendenza *RA*, fino alla orizzontale *AK*,come *xo*, *ym*, ecc. che saranno tagliati da perpendicolari alla pendenza, che proviene dai punti trovati sull'arco Ah^e in *3,2,4,1* che sono quelli di riunione della discesa con l'arco retto ad ogni punto di letto; gli intervalli di queste parallele alla pendenza, che restano nell'orizzontale *AK*, e le loro sezioni con i corrispondenti orizzontali, che provengono dai punti a^1 a^2 a^3 a^4 della linea *FA*, saranno gli avanzi, che occorre portare dalla seconda direttrice g^d A^d in poi della ***Fig.53***, sui punti di letto dello sviluppo in 1^d 2^d 3^d 4^d ecc. per esempio, supponendo che la perpendicolare *3y*, taglia la linea *ym*, che proviene dal punto a^3, mediante l'orizzontale mandata da a^3, fino alla verticale *AT*, che taglierà in un punto al di sotto di *u*, dove è tracciata la linea *um*, parallela alla pendenza *RA*, l'intervallo *ym* sarà portato allo sviluppo del punto a^3 in 3^d , cosi per gli altri.

Si può osservare che i punti 3,2,4,1 dell'arco Ah avanzano o arretrano verso T, o verso r, di una linea Tr parallela alla linea RA, che abbiamo allungato per non far finire gli avanzi sul prolungamento di RA, dove le linee moltiplicate, avrebbero causato troppa confusione; da qui segue che le teste dell'intradosso piatte 1^d , 2^d , 2^d , 3^d , si arretra diversamente delle linee diritte, che sono servite da direttrici allo sviluppo.

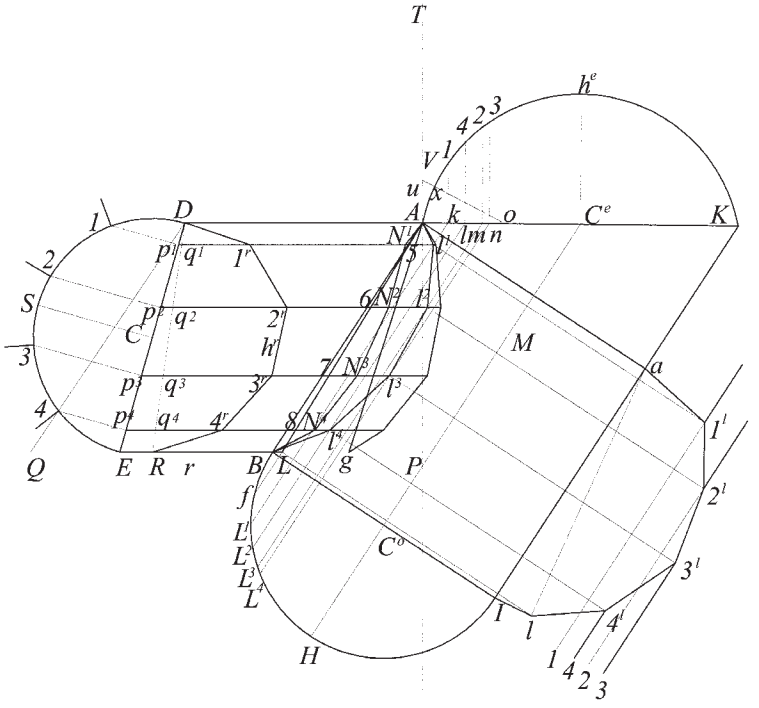


Fig.54 *sviluppo dell'incrocio che la volta in pendenzza fa penetrando*

Non è necessario parlare qui dello sviluppo della ***Fig.54*** che è quello dell'incrocio, che la volta in discesa fa con la sua penetrazione alla superficie di quella che è di livello, perché non differisce da quelli di cui abbiamo parlato nelle due tipologie precedenti, che in questo è rampante sul suo diametro al, di cui la posizione si trova portando la corda *Ax* della ***Fig52.a*** in *Il* della ***Fig54***, sull'inclinazione, dove il punto *I* proviene da *B*, e *l* dal punto *L*, come la figura lo mostra.

Il resto del caso riguardante i *biveaux*[1] di letto e di intradosso piatti di discesa con il corrispondente di livello, sarà realizzato nello stesso modo

biveau(x)[1]: squadra(e) a braccia mobili per misurare gli angoli o tracciare linee per i tagli delle pietre

della caratteristica precedente.
L'applicazione delle tracce sulla pietra sarà così esattamente la stessa.

Noi non parliamo affatto qui dei pannelli di letto, perché secondo il nostro metodo sono inutili per i conci d'intersezione, e per la faccia di discesa, sono stati date nelle tracce delle volte semplici in discesa al problema. XII al quale si potrà avere ricorso. È visibile che se l'arco di faccia obliqua, il cui diametro è stato supposto di livello sia rampante, e l'arco retto di livello, questa traccia diventerebbe molto più semplici e facili, perché il piano di una pendenza non avrebbe che una inclinazione; da qui seguirebbe che la sua sezione con l'orizzonte sarebbe una linea diritta *RA*.

OSSERVAZIONE

Occorre osservare, che supponendo il diametro della curva della faccia di livello, più si avvicinerà al parallelismo col lato *AB*, della volta di livello, meno l'arco d'intersezione sarà rampante; in modo che se *DE* fosse più obliquo, come in *DQ*, che è parallelo a *AB*, le imposte della volta diventerebbero completamente a livello, ed al contrario la differenza sarà tanto più grande, se la faccia si avvicinerà alla perpendicolare *Dr*.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA.

Abbiamo dato ragione al Probl. XII del volume precedono pagina 178, perché l'obliquità della faccia di discesa in relazione alla direzione orizzontale causava un doppia obliquità nel piano di pendenza; ci rimane da dimostrare il modo impiegato per trovare le proiezioni orizzontali ed inclinate dell'unione delle due volte.
Supponiamo un piano verticale, che passa per le nascite *A* e *L* dell'arco, al bordo della congiunzione, e perché questo bordo è a doppia curvatura, essa avanza in strapiombo al di là della linea diritta *AL* secondo distanze orizzontali, che si sarebbero potute misurare con perpendicolari su *AL*, con le ripercussioni dell'arco diritto della volta di livello *BHI*; ma a causa del fatto che questi avanzi devono prendersi dalle lunghezze di unione di letto, che gli sono obliqui, si descrive la curva di sezione obliqua parallela a questi letti, che è il metà-ellisse Ah^eK, che rappresenta sola tutte le sue uguali, che taglierebbero i piani verticali, passanti mediante le proiezioni dei punti di letto $p^1\,l^1$, $p^2\,l^2$, $p^3\,l^3$, $p^4\,l^4$, prolungate trasversalmente alla volta di livello.
Considerando così un piano verticale sulla linea *DK*, la linea verticale *TA* rappresenterà la sezione del piano verticale su *LA*, con questo primo, e visto che abbiamo fatto la proiezione verticale della sezione all'arco rampante Fh^iA, e trasportato tutte le altezze della sua divisione su *TA*, è visibile che tutte le linee condotte da queste altezze $f^3\,f^2\,f^4\,f^1$, parallelamente alla pendenza *RA*, rappresenteranno esattamente i punti di letto della discesa; quindi anche la loro sezione con l'arco verticale Ah^e, della volta di livello ai punti *3,2,4,1*, i quali punti erano trasportati mediante la proiezione sull'orizzontale *AK*, segneranno esattamente gli anticipi del cannocchiale sul lato *AB*, della volta di livello, e perché questa linea *AK*, rappresenta tutte le estensioni delle proiezione dei punti di letto, è visibile che trasportando i punti di anticipo trovati su ogni giunto in particolare, con il mezzo dei paralleli al lato *AB*, si arrangeranno ciascuno al loro posto; quindi la proiezione orizzontale del cannocchiale è ben fatta.

Quanto per la proiezione inclinata sul piano di pendenza, è visibile che se si traccia dal punto *A*, il più avanzato della rampa una linea *As* , perpendicolare ad *AR*, essa potrà essere considerata, come la proiezione verticale di un piano perpendicolare a quello di pendenza, che taglia tutti i letti della discesa all'interno, o all'esterno del bordo di unione; in questa traccia questo bordo è parte all'interno; come da *x* a *2*, e parte all'esterno come il punto segnato *3*, e come la sezione del piano di pendenza, con quello delle imposte della volta di livello, è dato in *Ag*, sul piano orizzontale da una linea diritta parallela ha *DE*, la faremo fungere da direttrice dello sviluppo, perché la direttrice all'angolo retto sulla direzione orizzontale della discesa cade sotto dell'orizzonte in *AP*, a causa della obliquità trasversale del piano di pendenza, cosa che non succederebbe se questo piano non avesse un'altra pendenza che quella della discesa, secondo la sua direzione.

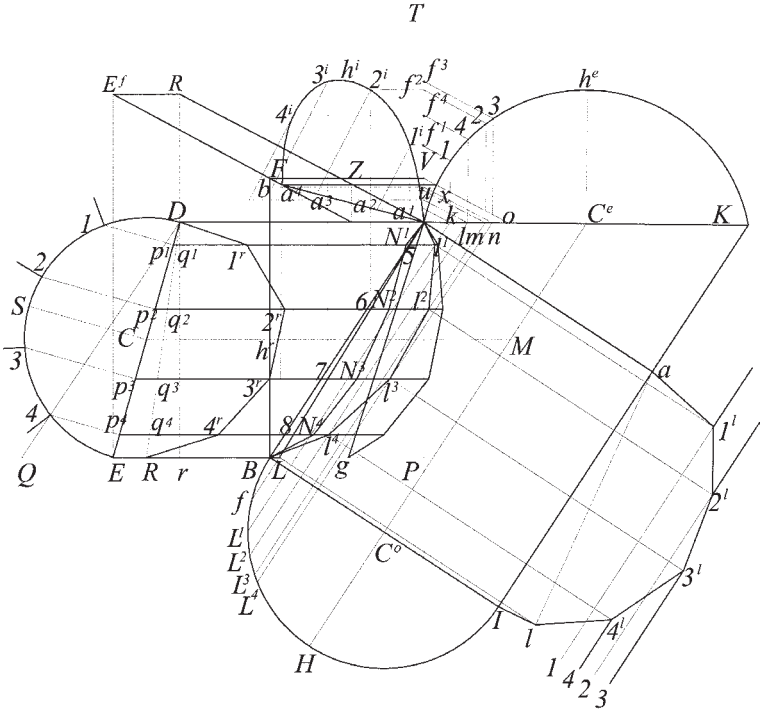
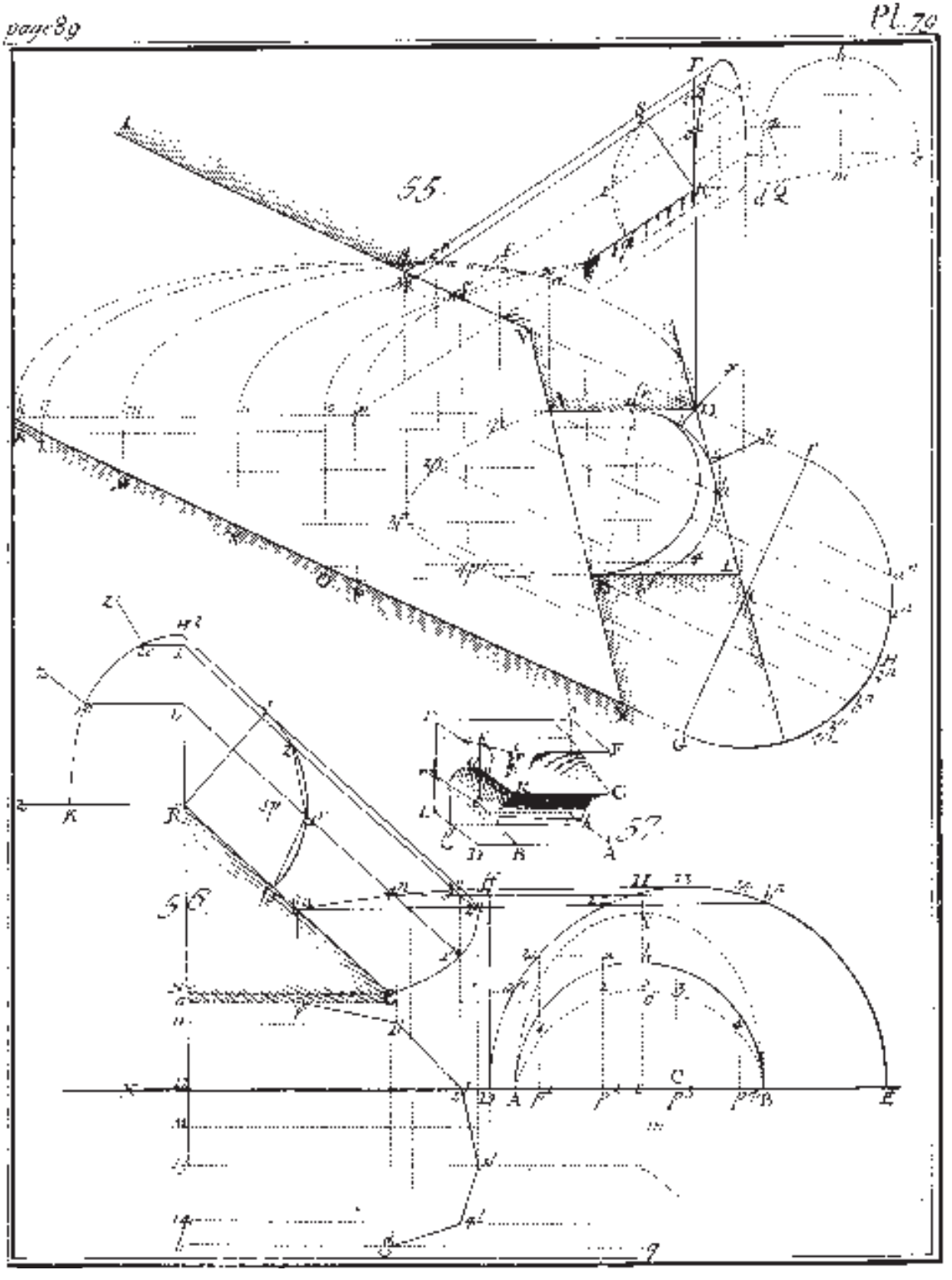


Fig.52e54 *figura intera dei successivi passaggi*


page 89
Pl. 79
55.
57.
56.

IV CASO

LUNETTA RAMPANTE INCLINATA, FATTA PER UNA VOLTA A BOTTE INCLINATA IN DESCENTE , ALLA QUALE SI RICONDUCE UN'ALTRA ALL'ESTREMITA' .

Si puo' dire che il "Traits" , del quale si parla è, lo stesso che i due precedenti con qualche particolare differente ; l'uno che la volta è discendente e si raccorda a livello della sua imposta, o ai suoi piedi destri (piedroits); ma al di sopra dello stesso arco; l'altro che l'inclinazione è supposta così grande che la direzione orizzontale della discendente fa un angolo molto obliquo con quello della volta a botte (berceau) di livello.Su questo esposto sembra inutile dare un esempio; ma siccome le P. Deran si è bruciato più del suo Graveur, di cui il suo "plaint", che il signor De la Rue non ha niente da dire, io ho creduto giusto di non fare lo stesso, senza pertanto attaccarmi a correggere il "Trait" di P. Deran; perchè avendo seguito un metodo differente dal suo nella descente, non devo discostarmi da qui; ma devo far vedere al lettore tutte le sorti del caso e le facilità.

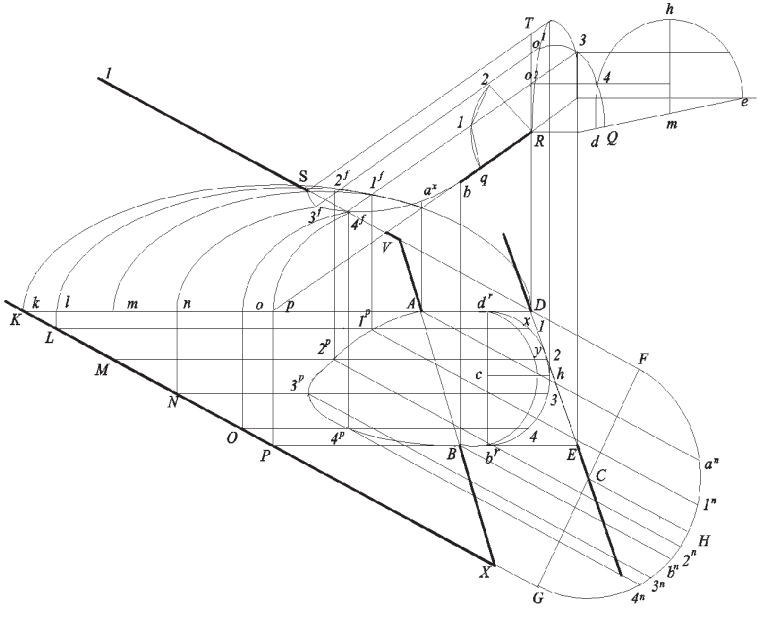


Fig.55 Costruzione in P.O. dell'incrocio della volta a botte sbiega e con la lunetta sbiega e in descente.

Ossia (Fig.55) ABED, il piano orizzontale della lunetta, aperta in un muro, che termina obliquamente e in discendente, o se lo si vede perpendicolarmente una volta di livello 1VXK, nella quale la lunetta sia aperta obliquamente, in modo che la direzione orizzontale DK, divide l'angolo fortemente acuto AD1, oppure fortemente ottuso FDK, con quello la volta a botte di livello (du berceau de niveau).

Bisogna qui, come per tutto si può avere più archi a tutto sesto, se determinati a scelta del primitivo, facendo attenzione ai cambiamenti, che causa il centro di faccia, dato a livello rampante; perchè se è a livello dell'arco destro sarà rampante, e il piano dell' "Abajour" inclinato al piano verticale, e come questa inclinazione è sgradevole alla vista dall'interno, noi supponiamo il diametro dell'arco destro a livello circolare, o se lo si vuole ellittico, di cui uno degli assi sia di livello.
Sia dunque dhb^r, l'arco destro della descente diviso nei suoi conci a punti I,2,3,4, per i quali si traccerà tante parallele alla direzione orizzontale, che rincontreranno il punto KX, dell'arco di livello ai punti LMNOP, per i quali si eleveranno delle perpendicolari alla punta della descente di DA, prolungato in K che taglieranno questa punta ai punti l,m,n,o,p.
Sia anche il mezzo cerchio FHG, l'arco destro della volta a botte di livello fa sicuro una linea FG, perpendicolare alle vette 1V, KX, prolungate in F e G.
Si farà , una ellisse KaD[1], che farà la sezione obliqua di un piano verticale, passando per la direzione di DA prolungato, la quale ellisse fissata potrà formare un pannello (faccia di pietra da taglio) o cerchio, per ripetere il contorno, tracciando ad ogni giunto delle ellissi eguali, come qui di seguito spiegheremo.
Si farà di seguito il profilo della descente su' la linea KD, prendendo la linea DR per l'altezza data fino all'imposta la più bassa dall'arco di faccia, che sarà rampante seguendo la nostra supposizione data dell'arco destro, e l'angolo DRp, uguale o complementare a quello della descente, che si suppone anche dato, o preso a piacere.
Del punto R per centro , e del livello ca^r , dell'arco destro, supposto circolare, si descriverà un quartodi circolo q12S, terminando per RS, perpendicolare su pR, e diviso ugualmente asse ai punti j,2,S, come l'arco destro ai punti 1,2,h, e per i punti 1,2,S, si tracceranno delle parallelle alla linea della rampa pR, prolungate in modo indefinitivo, come S,2 3, 14, per le basi, e spinte verso l'alto fino alla linea DT, le quali linee faranno le proiezioni verticali delle giunture delle rocce equivalenti ciascuno a coppia; sapere, al giuntodella destra, e di sinistra della volta, perchè si suppone la pianta della rampa pR, perpendicolare al piano verticale, e le basi di destra e di sinistra di eguali altezze, per conseguenza che uno stesso piano passa per i giunti delle rocce, parallele al piano della rampa.
Questo supposto.
Avendo posato il pezzo del pannello (panneau), o del cerchio, fate l'ellisse KSD, si marcherà il punto a , dove il suo contorno taglia la linea della rampa pR, per la nascita la più bassa dello spigolo della lunetta, di cui il punto A è la proiazione.
Si farà di seguito evidenziare il pannelo (panneau) o il cerchio sopra l'asse orizzontale KD; in modo che il punto K sia avanzato in l, dove la perpendicolare Ll taglia l'asse KD, in modo che il contorno di questo cerchio taglierà la proiezione verticale del primo giunto 11^f al punto 1^f.
Si farà lo stesso colore lo stesso pannello su KD; in modo che la sua estremità K sia posata in m, e si traccerà (marcherà) il punto 2^f, dove il suo contorno taglia la linea seconda, che è la proiezione verticale del giunto 22^f , la si spingerà in seguito in n, per tracciare il suo incontro con il terzo 33^f, al punto 3^f , si continuerà a evidenziare in o, per marcare l'intersezione della stessa linea al punto 4^f; in fine lo si

[1] L'ellisse KaD,ha come asse maggiore la retta KD e CG o CH per asse minore, tale tale operazione si farà per ogni giunto.

spingerà in p, per avere l'intersezione con la linea di rampa in b, che farà la nascita alta della lunetta, di cui B è la proiezione.
Per tutti i punti trovati, si tirerà delle linee destre, che faranno le corde "de doele plates" a spigolo (enfourchement), e se si traccia una linea curva smussata dall'una all'altra, si avrà la curva a $1^f\ 2^f\ 3^f 4^f$b, che si incrocia in x, quel che segnato (qu'en cet endroit), ci sono due punti opposti che fanno da livello, perchè questa curva è la proiezione verticale del colmo dello spigolo della lunetta.
Per la metà di questa curva (corbe), si farà la proiezione orizzontale, abbassando di tutti questi punti delle perpendicolari,che reincontreranno le proiezioni orizzontali delle rocce corrispondenti, dove si trova una delle cifre, saper aA, stabilirà il punto A per l'imposta AD; $1^f 1^p$, stabilirà il 1p per la proiezione 1L, la linea 2^f2p, stabilirà il punto 2^p per 2m, $3^f 3^p$, &c.
E per tutti i punti trovati A,1^p, 2^p,3,4,B, si traccerà la proiezione orizzontale del colmo dello spigolo della lunetta, e il piano di costruzione sarà fatto.
I pannelli (panneaux) "de doele plate" della descente avranno la loro lunghezza data dal profilo, e la loro larghezza sull'arco destro; così si conterà da una parte e dall'altra della linea RS, che è la proiezione verticale dell'arco destro le lunghezze Ra,Rb, la lunghezza $o1^f$ sarà la seconda punta del primo concio, di cui la larghezza sarà la corda q1 oppure d1, al piano d^r h b^r , continuando a contare dall'arco destro, si avrà la lunghezza $o1^f$ e $o2^f$, per il secondo concio con la corda dell'arco destro 1 2 per la larghezza, e così degli altri che si prende e disporre di seguito lo sviluppo[2].
"Les panneaux de doele plate" della volta di livello si troveranno per la metà dello sviluppo della proiezione orizzontale, seguendo il suo arco destro FGH, il quale darà l'intervallo delle linee Aa^n, 1 $^p1^n$, misurati per la corda a^n1^n; l'intervallo delle linee $1^p\,1^n\,2^p\,2^n$, per la corda $1^n\,2^n$, e così delle altre direzioni della volta a botte di livello fino al suo arco destro[3]. E infine "le biveaux de doele[4] & de lit" si troveranno sull'arco destro agli angoli 31x, 12y, questo che basta per tagiare tutte le facce dei conci.

COROLLARIO

Di questa costruzione segue la maniera di fare le "abajours" in lunette aperte (fentieres), oppure a modo di pozzi (puits) inclinati, tali che sono quelli delle "Tours Bastionnees" de Landau; non si tratta altro che di fare i profili e le proiezioni verticali e orizzontali della volta a botte in discendente dentro un doppio contorno al posto che qui essi non sono che la metà, supponendo il centro di faccia, come alle sopra citate torri (Tours), l'arco destro diviene una ellisse così sottoribassata a causa della rigidità della linea di rampa, che darà molto poco di giorno (luce); questo rapporto dell'arco di faccia e dell'arco destro è stato sufficientemente spiegato al Problema XII del Tomo precedente, e trattando di volte semplici e discendenti.

QUINTO CASO

" LUNETTE" OPPURE "BERCEAU" IN DISCENDENTE, CHE IN "RACHETE" UNO DEI LIVELLI PER IL PEZZO ,
SEGUENDO LA STESSA DIREZIONE.

Noi abbiamo supposto che nel caso precedente, che le direzioni orizzontali della descente, e della volta di livello si incrociano, qui supponiamo che qualunque cosa l'asse della descente taglia un angolo con l'orizzonte, questo angolo è su un piano verticale parallelo alla direzione della volta di livello; questa differenza non cambia la natura della curva di colmo di rincontro "des doeles", che è sempre una ellisse, per il Theor. XIX. del primo Libro, ma cambia un po'la costruzione del tratto (Trait).

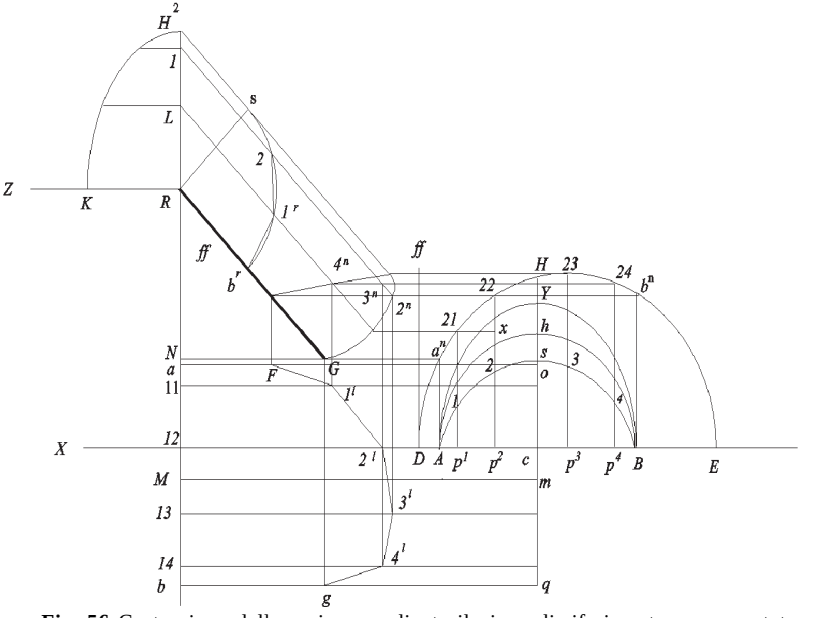


Fig. 56 Costruzione della sezione mediante il piano di riferimento rappresentato dall'assedella volta e il ribaltamento della volta stessa.

Sia la Fig.56, XC l'asse della volta a botte di livello, e Mm, la proiezione orizzontale di quello in discesa, che quello è parallelo (per la supposizione) per la distanza data cm.Sia DE, il diametro della volta a botte di livello, di cui la metà C, si porterà la distanza cm di C in c, dove sarà il mezzo del diametro di volta in descente vista dal limite.Dal punto C per centro, si descriverà l'arco destro della volta a botte di livello, che noi supponiamo un mezzo circolo, oppure una mezza ellisse AHE, e del punto si descriverà il centro primitivo AhB, di volta in discendente, quello che sia, circolare o ellittico, preso all'arco destro, o all'arco destro, o all'arco di faccia destro, il quale sarà diviso nei suoi conci al punto1, 2, 3, 4, per i quali si traccerà delle verticali Aa^n, 12^1, 22^232^3, 42^4,Bb^n, che taglieranno il centro di volta a botte di livello ai punti 2^1,2^2,2^3,2^4, per i quali si traccerà delle parallele a DE infinite.Sull'orizzontale Na^n si fa l'angolo di rampa dato NGR, di cui la sommità G sarà a volontà, e per il punto R di altezza data, si abbasserà la verticale Rb.
Del punto R per centro, si dividerà il quarto del cerchio o l'ellissi Sb^r, tale che dia in essere l'arco destro della descente, seguendo il

[2] Frezier per la costruzione dicedi guardare la planche 78 fig. 52.

[3] Frezier evidenzia che per tale costruzione, "di cui non è altro che una ripetizione" guardare per avere maggior chiarimenti i tre trattati precedenti.

[4] "Le biveaux de doele & de lit" allo spigolo si troveranno , dice il frezier , nella stessa maniera che al problema quattordicesimo del tredicesimo libro ed anche a pag. 72 del tomo III.

centro primitivo dato, e per le divisioni 1^r2, si condurranno delle parallele alla rampa che taglieranno le corrispondenti orizzontali per i punti a^n, 2^1, 2^2,2^3,2^4,b^n, e nella supposizione che il diametro dell'arco destro sia a livello, ciascuna di queste inclinazioni risponderà a due delle orizzontali, di cui parliamo; così la linea di rampa RG taglierà l'orizzontale procedendo dal punto a^n in G, e quella che proviene dal punto b^n in f; così di punti f e G sono i profili di nascita dello spigolo di rincontro delle "doeles" delle due volte; dello stesso l'inclinata passando per i punti 1, taglierà le due orizzontali provenienti dai punti 2^1 e 2^4 ai punti 1^n , 4^n, e l'inclinata (incline) passante per i punti 2^r, darà le intersezioni dell'orizzontale proveniente dai punti 2^2 e 2^3 in 2^n3^n , la curva $f4^n3^n2^nI^nG$ sarà il profilo dello spigolo di rincontro delle volte.
Sarà facile fare anche la proiezione orizzontale dello stesso spigolo, per metà degli stessi punti del profilo.Avendo fatto la proiezione orizzontale della volta in descente al solito, per la metà delle sue imposte A p^1p^2c, &c.sistemate parallelamente alla linea di base della rampa NG, come in aoqb, si abbasserà per tutti i punti del profilo $f4^n3^n2^n1^nG$, delle perpendicolari, che taglieranno quelle della proiezione orizzontale ai punti F,I^1,2^1,3^l,4^l,g, per i quali si traccerà la proiezione orizzontale del colmo dello spigolo (de arete d'enfourchement).
Noi abbiamo supposto che l'arco destro era di livello, ma non lo era e che il piano di rampa fosse inclinato, come alle descenti inclinate (biaifes), di cui la faccia di destra è a livello, il "faudroit" occorrerebbe fare il profilo del piano di rampa come noi l'abbiamo fatto al terzo caso di questo Problema, questo non cambia niente al "Trait"; ma che lo rende soltanto più completo.
Le proiezioni verticali, e orizzontali dello spigolo della lunetta erano date, è chiaro che abbiamo tutto quello che è necessario per formare i "panneaux"[5]; perchè le lunghezze delle sommità, e la differenza degli avanzamenti e indietreggiamenti delle loro teste sono date dal profilo, e l'intervallo di queste sommità, sarebbe a dire, la lunghezza dei "panneaux" è data dall'ordinaria all'arco destro.
I "biveaux de lit e de doele" sono anche stabiliti allo stesso arco destro, e i "biveaux"[6] di rincontro "des doeles plates" a "l'enfourchement" si troveranno nella stessa maniera[7].
L'applicazione del "Trait" sulla pietra per i "panneaux" sarà anche la stessa che tutti i casi precedenti; ma per abbreviare si può farlo più semplicemente mediante la vista della squadratura (voye de l'équarriffement).

DIVERSAMENTE PER LE SQUADRATURE.

Il grafico in scala naturale (l'epure)[8] essendo tracciato come noi lo spiegheremo, e la pietra destinata al concio che si vuol fare sarà scelta di grandezza conveniente, e qui si farà due paramenti a squadra l'uno all'altra, sapere che l'uno serve di supposizione orizzontale LDA, l'altro di conseguenza come supposizione verticale EFAD, passando per il colmo di giuntura "de lit" della volta a botte di livello.

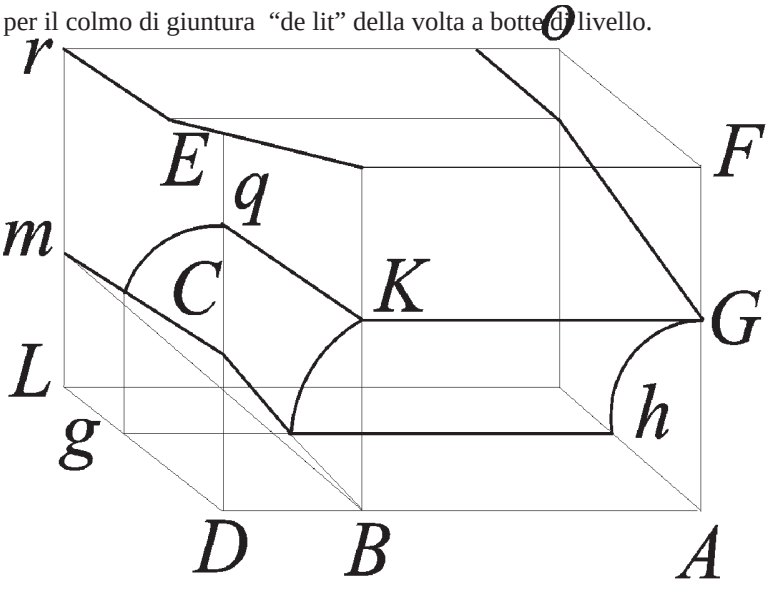


Fig.57 Costruzione dei pannelli per poter tagliare la pietra destinata al concio

Supponendo, per esempio, che si voglia fare un concio di secondo ordine, si prenderà la ricaduta 2^1x, che porterà perpendicolarmente allo spigolo AD, nei letti orizzontali, per qui tracciare una parallela gl a questo spigolo.
Si prenderà di solito l'altezza 2^2x di questa ricaduta, che si porterà al piano verticale su DA in BK, per qui tracciare anche una parallela KG; queste due parallele saranno gli spigoli dei giunti dei letti del soprae del sotto.
In seguito si prenderà con la salterella (fauterelle)[9], il supplementare dell'angolo della descente che è l'angolo ottuso $2^l1^n1^r$, per tracciarlo sul paramento verticale in ABC, e per il punto C, si traccerà Cm parallelo a DL, sul paramento verticale, dove terminerà il concio, e lo abbasserà la peitra chiaramente, seguendo la linea inclinata BC, e questa parallela Cm; dopo che si porterà sullo spigiolo Cm, la lunghezza 2^lx della ricaduta, e sullo spigolo CE, quella della sua altezza 2^2x, trasportando su questi paramenti le loro lunghezze parallelamente oppure questo è la stessa cosa, loro conducendo delle parallele che marcheranno gli spigoli di intradosso, e dei letti del di sopra e del di sotto, e il loro incontro con quelle che avevamo traccianto sul letto orizzontale gh, e sul letto verticale rq, e si abbasserà la pietra per la grande volta a botte, seguendo la circonferenza dell'arco 2^12^2, e per quello della descente, seguendo la circonferenza dell'arco 12.Il rincontro degli intradossi formerà il colmo dello spigolo (l'arete d'enfourchement), come per azzardo senza che si conosca la curva (courbe).Non resta più che da formare

[5] "sagoma delle superfici di un concio, fatta in legno, cartone o altro materiale sottile, poi applicata sulla pietra per tracciare i contorni di un lit,doele e di una testa...." , definizione tratta dal libro I pag.403 del Frezier.

[6]Sagoma dell'apertura di un angolo, che sia curvilineo, rettilineo o misto. Se le superfici sono piane ci si serve di una "sauterelle" a stecche mobili , se è un angolo misto il biveau è uno strumento in legno fisso fatto appositamente per quell'angolo; definizione tratta da Frezier libro Ipag.392.
[7]come per il caso precedente si deve far riferimento alla costruzione di pag. 72 del Tomo III.

[8] "Epure": Grafico a scala naturale, eseguito di norma su una superficie orizzontale o verticale, con funzione di riferimento per il taglio e la dislocazione dei conci di pietra di un arco, volta, finestra o colonna.
[9]Salterella: "fauterelle", falsa squadra.

i “lits”, seguendo le “biveaux” miste di “lit” e di “doele”, presi sugli archi destri delle due volte.Per ciò cheriguarda la faccia la si farà come noi l’abbiamo detto per la volta semplice, al Problema XII del dodicesimo Tomo, al quale noi ci dimandiamo anche per la situazione dei giunti di intradosso e di testa (de doele & de Tete).

ESPLICAZIONE DIMOSTRATIVA

Questo problema e il precedente sono fondati sul nostro metodo generale, che è di tagliare tra di loro le volte con dei piani paralleli. Al precedente abbiamo tagliato la volta in discendente, con dei piani verticali paralleli al suo asse, che hanno dato su questa volta cilindrica inclinata all’orizzontale dei parallelogrammi, e sulla volta orizzontale delle ellissi.Qui, come direzione orizzontale delle due volte che si incontrano è la stessa, la sezione fatta per un piano verticale passando per l’asse o parallelamente all’asse della descente, è anche parallela alla sezione per l’asse di volta di livello; così che sui profili delle giunture dei letti , non rincontra che delle linee destre, che sono le punte delle sezioni nei parallelogrammi, di cui l’intersezione dei punti di contorno “dell’arete d’enfourchement” che è un ellisse. Bisogna solamente rimarcare per l’intelligenza del grafico naturale, che vi è di tre sorti di disegno raccolti .

I°. La proiezione orizzontale della lunetta Flg.

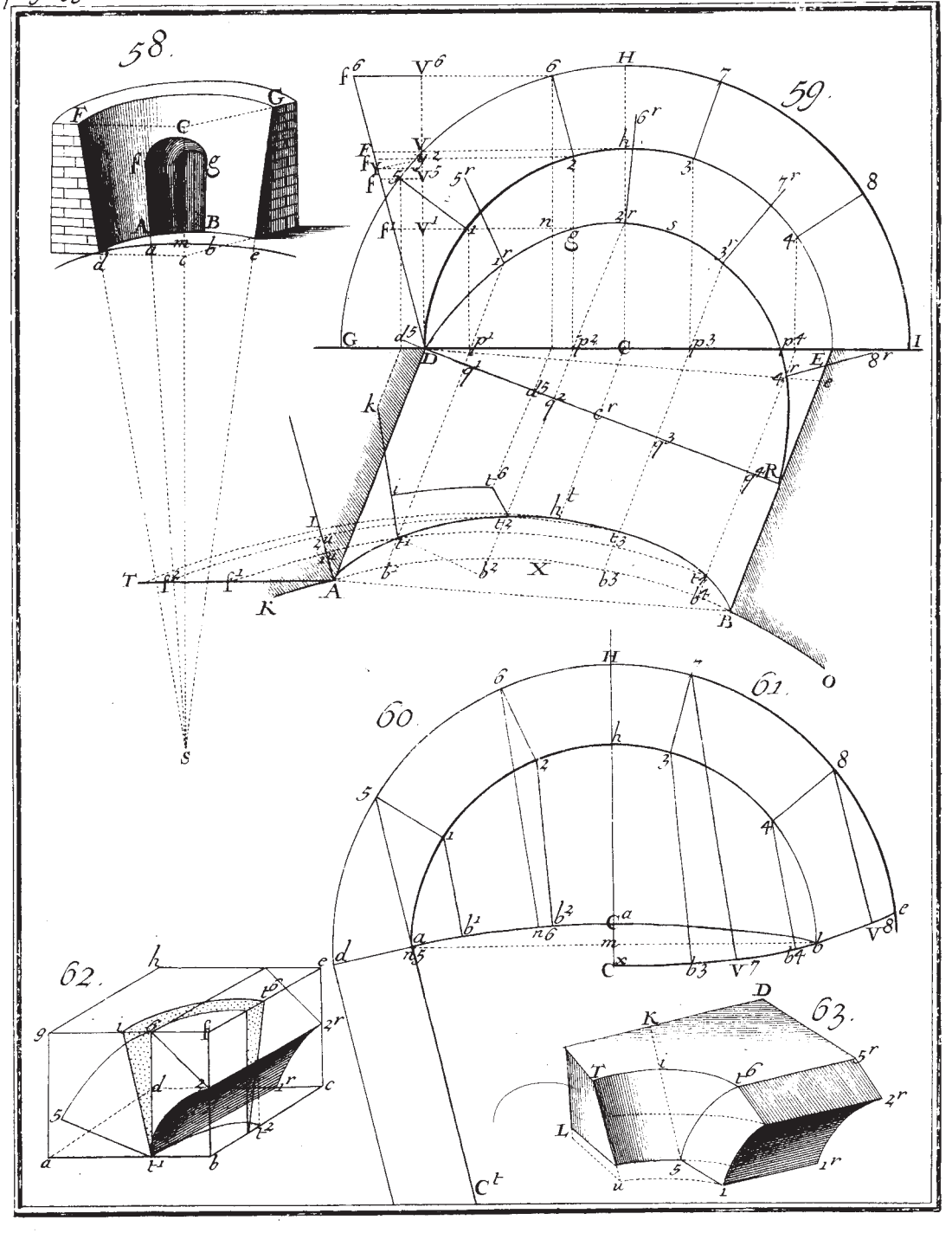
2°. La verticale del profilo $G1^n2^n3^n4^nf$, fatta su un piano verticale parallelo alla direzione Mm della descente.

3°. L’elevazione DHE e AsB, fatta su un piano verticale AYB parallelo all’arco destro, rappresentato al piano orizzontale per la linea ab e AYB, al profilo per la linea H^2R, la quale elevazione deve ritenersi girata perpendicolarmente alla direzione delle due volte; sia rappresentata in profilo per la linea ffD.

Bisogna ancora rimarcare che questa elevazione non è fatta che per trovare dei punti corrispondenti del centro primitivo AhB, nel centro dell’arco destro di volta di livello DHE, senza riguardo alle altezze rispettive dei loro diametri, che sono raccolti sulla stessa linea DE, qualunque cosa essi siano allontanati (se si vuole) di tutta la distanza dei punti D e R , che non trattandosi che della posizione del centro C, preso su una perpendicolare alla direzione orizzontale della descente. Infine, il centro AhD che si incastra all’arco destro, non è nella sua siruazione naturale in questa situasione, dove dovrà essere inclinato seguendo la linea RS del profilo; ma come lo si suppone poggiato all’angolo destro sulla linea DE, e che il diametro AB e comune al diametro della facciata, è indifferente che esso sia riaccorciato per la proiezione in ASB, poichè la linea che era inclinata, o meglio verticale dello stesso che tutte le sue parallele 12^l, 22^2,32^3,42^4,A^nBb^n, dunque i piani verticali passano per queste linee, daranno sempre gli stessi punti a^n,2^2,2^3,2^4,b^n,nell’arco destro DHE, della volta a botte di livello, dello stesso che nel centro della faccia sormontata, che rappresentata dalla metà dell’ellisse AYB, di cui il piccolo asse AB è comune all’arco destro, per conseguenza gli archi 2^1,2^22^3,&c. del centro primitivo compreso tra le sezioni dei piani paralleli, che passano per i giunti

page 95.

Pl 80.



CAPITOLO SECONDO

LE INTERSEZIONI DELLE VOLTE CILINDRICHE E CONICHE

Le volte coniche a semi-coni completi, che sono solo i pennacchi, non sono comuni, ma le volte e i muri a porzione di coni tronchi, sono molto frequenti nell'architettura militare, come le strombature, i fianchi concavi (parti di bastioni di fortificazione tra la cortina e la faccia), gli orecchioni (elementi di architettura militare) convessi, le torri, le controscarpe (architetture militari) arrotondate sul davanti di angoli aggettanti, ecc., nelle quali sono aperte porte o strombature; percorreremo tutti i casi di intersezione di coni con i cilindri.

Problema III

Fare il costolone di intersezione di una volta a botte qualsiasi con un muro o una volta conica.

Si può considerare una volta a botte orizzontale o inclinata che raccorda una torre a scarpa, o che è raccordata da una lunetta o da una volta conica; nel primo caso il cilindro penetra nel cono, nel secondo, il cono penetra nel cilindro.

Primo caso

Porta diritta (ad angolo retto) o sbieca in una porta rotonda, o cava e a scarpa.Sia (***Fig.59***) l'arco di cerchio o di ellisse *KXO*, la base orizzontale di una porzione di torre cava a scarpa, come un arrotondamento di controscarpa nella quale è aperta una porta a volta a botte, la cui proiezione è *ADEB*, retta o sbieca, cioè, il cui arco *CX* passa per il centro C^t della torre, che è in basso nella tavola, o non ci passa; qui scegliamo per esempio la porta sbieca, perché è un po' più difficile di quella retta e perché serve per le due specie di porte.

Cominceremo scegliendo il centro primitivo (profilo interno alla porta) che può essere preso in quattro o cinque posti e situazioni diverse, come si è detto per le porte di torre rotonda senza scarpa.

1) Su un piano verticale o a scarpa (obliquo), passante per la corda *AB*,
2) Sull'arco *AXB* rettificato,
3) Sulla stessa evoluta di base dello sviluppo del cono,
4) Sull'arco retto.

P. Deran e, dopo di lui, M. De La Rue prendono per centro primitivo l'arco di sviluppo della base del cono, per poter fare le teste dei conci esattamente uguali.

Nelle fortificazioni si prende ordinariamente l'arco retto per centro primitivo, perché si vuole che le volte siano interiormente a tutto sesto.

Qui prendiamo questo centro sulla corda *AB*, in posizione verticale, o inclinata a scarpa, perché di solito le disuguaglianze che risultano nelle teste dei conci, se sono di numero inferiore a cinque, non meritano che ci si faccia attenzione, perché il diametro della porta è poco considerevole rispetto alla circonferenza della torre, cosa che succede normalmente, e si può dire che l'operazione per fare delle teste uguali che seguono i disegni degli autori, è una finezza superflua.

Da un punto *D* preso a piacere su uno dei piedritti *AD*, si condurrà *DE* parallela ed uguale ad *AB*, che non c'è nella figura[1], ma che bisogna supporre, sulla quale si traccerà il centro primitivo *DhE*, circolare o ellittico, poi, avendolo diviso nei suoi conci nei punti *1,2,3,4*, e avendo tirato le perpendicolari al suo diametro, si condurranno dalle loro proiezioni p^1,p^2,p^3,p^4, le parallele alla direzione della volta che serviranno per trovare l'arco retto *DsR*, e la proiezione del costolone a doppia curvatura della faccia della porta in *Ah* ^{t}*B*, come segue.

Dopo aver tirato su *ED* prolungata, una verticale *DV*, da un punto *D* a scelta, si farà l'angolo di complemento della scarpa *VDE*, poi si condurranno da tutti i punti delle divisioni del centro primitivo *1,2,3,4*, delle orizzontali, che intersecheranno la linea *VD* nei punti v^1,v^2 [2] e il profilo della scarpa *FD*, nei punti f^1 f^2 *F*, che daranno gli arretramenti, sapendo *VF* per il centro della chiave di volta, v^2f^2 per il letto di posa dei secondi e dei quarti conci (file di conci?) e v^1 f^1 per i primi ed i quinti, e nello stesso modo f^5 ed f^6 per l'estradosso.

Bisogna sottolineare che le lunghezze di questi arretramenti (rientri?) diminuiranno,se il centro primitivo sarà stato preso su un piano inclinato a scarpa, al posto del piano verticale che abbiamo supposto; perché allora bisognerà portare la lunghezza *DV* in *DY*, su *FD*, e tirare *Yy* parallela ad *FV*, si vede che l'arretramento della metà *FV* è più grande che lo stesso preso in *Yy*, così per gli altri arretramenti corrispondenti alle divisioni *1,2,3,4*, dei giunti di testa, come è stato detto nel tomo II, parlando delle volte semplici con faccia a scarpa.

Si riporteranno in seguito tutti questi arretramenti della scarpa su una linea *AL*, che faremo perpendicolare all'arco *AXB*, che è una porzione della base della torre,concava, sapendo che questa linea *AL*, prolungandola, passa per il centro C^t della torre, se questa è circolare, o che questa

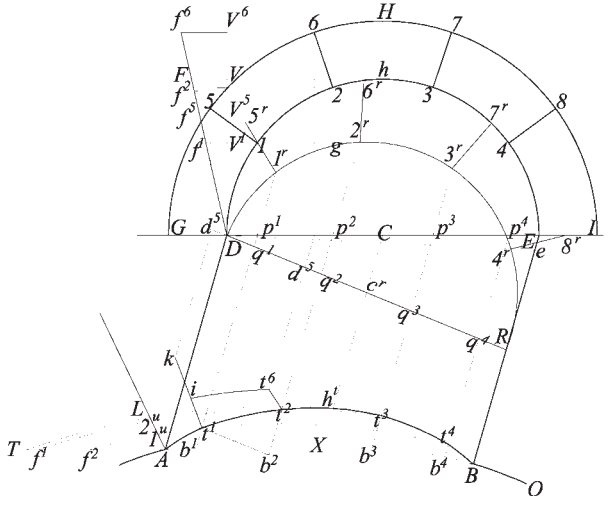


Fig.59 Proiezione sbieca *ADEB* di una porta a volta a botte su una base orizzontale di una porzione di torre cava a scarpa.

[1] *DE*, parallela ed uguale ad *AB* è invece tracciata nella ***Fig.59***

[2] Nel testo si legge del punto v^2 che in figura va cercato come l'intersezione tra il tratto f^2 e il segmento DV^6.

linea è perpendicolare alla tangente in *A*, se questa base è ellittica, così si porterà *VF* in *AL*, V^2 f^2 in $A2^u$, V^1 f^1 in $A1^u$, e per questi punti 1^u 2^u *L*, si tracceranno gli archi concentrici all'arco *AXB*, che taglieranno (intersecheranno) le proiezioni dei punti t^1, t^2, t^3, t^4, per i quali si traccerà a mano la curva *A h* ^{t}*B*, che sarà la proiezione orizzontale del costolone d'incontro del muro a scarpa con l'intradosso della volta a botte che stiamo cercando, la cui proiezione è sufficiente per ricavare la porta per squadramento (ad angolo retto), che è più conveniente e più comodo.[3]
Possiamo anche operare dalla metà delle sagome flessibili, ma senza altro vantaggio se non quello di poter fare le teste esattamente uguali in opera, perché occorra che la superficie conica concava, o convessa della parte della torre che comprende ciascun concio, sia fatta a squadra, prima che possa applicarsi la sagoma pieghevole di cui si deve tracciare il contorno.
Altrove si è sottolineato che il metodo di padre Deran, e dopo di lui di Mr. De La Rue, per formare la base dello sviluppo del cono non era conveniente nella pratica, perché l'estrema lunghezza del raggio dell'arco di cerchio, che deve esprimere questo sviluppo, la rende di esecuzione ingombrante, e solitamente difettosa, nel qual caso bisogna ricorrere al nostro problema ottavo, al terzo libro.
Si tratta di trovare il contorno dme ***(Fig.58)*** meno concavo che *KXO*, della base della torre cava, ma che ne sia lo sviluppo, sul quale arco bisogna prendere la parte *amb*, uguale al contorno dell'arco *AB*, della base della Porta; per questo effetto si deve fare *CF* perpendicolare su *CS*, e uguale al raggio *C* ^{t}*A*, della base della torre, al quale si aggiungerà il più grande arretramento f^6 V^6 dell'estradosso della ***Fig.59***, poi facendo l'angolo *CF d* uguale a quello della scarpa data, si prolungherà la scarpa *FD* o *Fd*, fin che non incontra l'asse *CS* in *S*, o sarà il centro degli archi di sviluppo, che devono passare da tutte le altezze delle divisioni della porta, così l'arco *dme* sarà quello del piede della torre,sul quale prenderà in piccole parti una lunghezza *amb*, uguale all'arco *AXB*, del piede (base) della torre; sono i disegni degli autori citati.
Per mostrare l'inconveniente, la difficoltà e la poca importanza di questa operazione.
Supponiamo un caso molto ordinario, che è quello di un arrotondamento di una controscarpa di dieci tese di raggio, e un sesto della scarpa, il raggio del settore di sviluppo sarà circa 61 tese, cioè 366 piedi, con la cui lunghezza si deve fare una randa per tracciare l'arco richiesto per la base della porta, che è di solito molto piccola, nel caso di cui stiamo parlando, ma che non sarà ancora niente quando la supporremo della grandezza di un portone; supponendo che ci si voglia assoggettare alla minuzia di questo sviluppo, si troverà che un arco la cui corda non è più di otto piedi, non differisce sensibilmente dalla corda.
In questo caso non si ha niente di meglio da fare che cercare tre punti di questo arco con il problema VIII del terzo libro, e poi tracciarlo senza l'aiuto del centro dal problema 1 del secondo libro; ma bisogna riconoscere che a meno che la torre non abbia un diametro molto piccolo e che la porta, rispetto a questa, non ne abbia uno molto grande, sarà un "gioco da ragazzi".

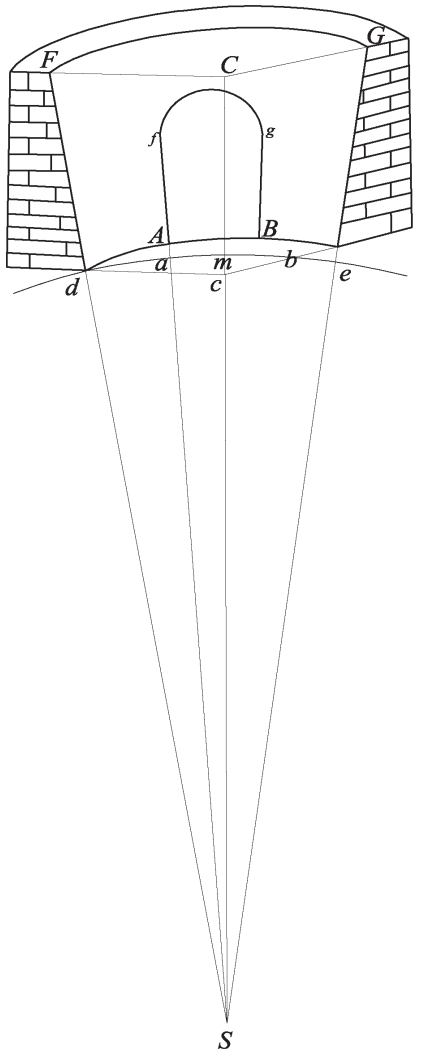


Fig.58 Caso di arrotondamento di controscarpa.

il centro primitivo *a h b*, che descriveremo nei suoi conci nei punti *1,2,3,4*, ma da questi punti non abbasseremo delle perpendicolari seguendo il consueto uso,bensì si condurranno le linee al centro dell'arco di sviluppo, come $1b^1$ $2b^2$ ecc., che saranno convergenti; si farà nello stesso modo nei punti di estradosso *5°*,*6°*,ecc., le cui linee restringeranno anche questa specie di proiezioni nella torre cava, e l'allargheranno nella torre

Questo arco della base sviluppata, sarà un pò concavo nella torre come la metà *d a* $C^{u\,4}$, della ***Fig.60***, e convesso nella torre rotonda, come nella metà $C^x b$ e della ***Fig.61***.Dalla metà di quest'arco si descriverà

[3]I punti: d^5,*G, I, H,5,6,7,8* non vengono mai richiamati nel testo.

rotonda, come si vede nelle ***Fig.60*** e ***61*** e anche il centro,dove bisogna tracciare queste linee, sarà senza dubbio fuori dal posto dove si tracciarà la costruzione;bisognerà ricorrere al problema I del primo libro,così si attuano operazioni senza alcun vantaggio,(che una regolarità di divisione dei conci in opera, che si trovano vicino alla squadratura).[5]
Fatta questa proiezione spiegata sopra, si traccerà dal centro C^t della torre, una linea *AL*, con la quale si farà l'angolo della scarpa *Tl* , e si porteranno sulla linea *AT* le lunghezze delle linee $1b^1$, $2b^2$,ecc., nei punti Af^1, Af^2, e dai punti f^1 e f^2 si tireranno le perpendicolari su *AL*, che la intersecheranno nei punti *u1*, *u2*, per i quali si tracceranno gli archi concentrici della torre, che intersecheranno le false proiezioni tirate dai
punti b^1,b^2,C^a,ecc.della ***Fig.60***,come si è fatto nella ***Fig.59***,e supponendo
il centro primitivo della ***Fig.60*** o ***61***,disponete in *DhE* della ***Fig.59***, e la costruzione sarà terminata.

APPLICAZIONE DEL DISEGNO SULLA PIETRA DI SQUADRATURA

Avendo tracciato un paramento *a b c d*, ***Fig.62***,supposto orizzontale, per esempio, per formare il concio del secondo corso, che passa per i punti *1,2,* del centro primitivo, se ne traccerà un secondo a squadra del primo, che sarà appunto supposto a piombo come *b c e f*, e se ne farà un terzo *e f g h*, calibrato all'altezza 6n. Poi si traccerà un "panneau" (sagoma del concio) sulla proiezione $q^2\ t^2\ t^1\ k\ d^5\ q^2$, si applicherà sul primo letto di posa orizzontale per tracciarne il contorno, che sarà un pentagono irregolare e misto.
Si prenderà poi la ricadente *1g* ***(Fig.59)***, che riporteremo al primo letto di posa chiaramente sul costolone *b c*,in $t^1\ 1^r$,(***Fig.62***), e l'altezza 2g, della solita ricadente, al di sopra dello stesso costolone *b c* in $2\ 2^r$, per tracciare la linea $2\ 2^r$; poi si sbozzerà la pietra entro queste due linee t^1 1^r e $2\ 2^r$ nella porzione di estradosso cavo cilindrico, per mezzo di un cerchio formato sull'arco $1^r\ 2^r$ dell'arco retto della ***Fig.59***.
In seguito porteremo il "panneaux" dal letto di posa inferiore al letto di posa superiore per tracciarci l'arco $t\ t^2\ 6$, dalla porzione del costolone della porta, e per mezzo di un altro panneau si traccerà l'arco circolare i t^6, che non è parallelo a $t^1\ t^2$.
Sbozzeremo la pietra a squadra, seguendo l'arco $t^1\ t^2$ tracciato nel letto di posa superiore, e da questa operazione formeremo una porzione cilindrica verticale, che intersecherà l'orizzontale che abbiamo fatto dopo il costolone inclinato che corrisponde a quell'arco *1,2* della proiezione; in questo stato la testa del concio sarà fatta, se la faccia non avesse la scarpa, ma come ce ne sono seguenti l'arco circolare tracciato dal letto di posa superiore $i\ t^6$ bisogna sbozzare la pietra a squadra entro questo arco $i\ t^6$ e il costolone già fatto per formare la superficie conica a scarpa, infine con i "biveaux" (sagome di aperture angolari) misti di posa, e di intradosso $1^r\ 2^r\ 6^r$, presi ad angolo retto per la posa superiore, e facendo il giunto $t^1\ K$ a piombo, seguendo la linea del panneau, che è stata tracciata dal centro C^t della torre, la pietra sarà ultimata come è stata rappresentata nella ***Fig.63***.

Qui sono sceso in un grande dettaglio di taglio, e applicazione del disegno, perché si tratta di un'opera che è molto frequente nelle fortificazioni, dove le porte delle gallerie delle mine sono solitamente ricavate negli

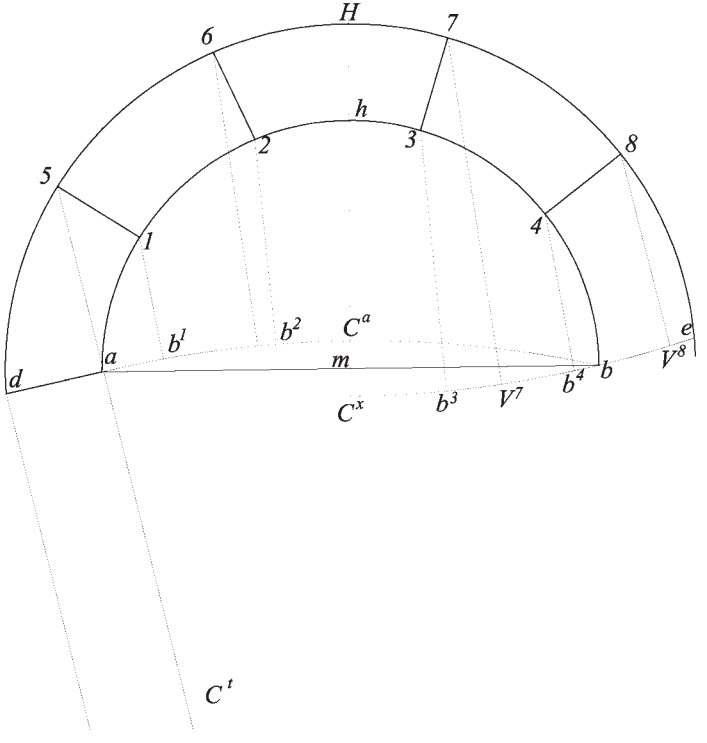


Fig.60 Arco concavo nella torre cava daC^u .
Fig.61 Arco convesso nella torre rotonda C^xbe.

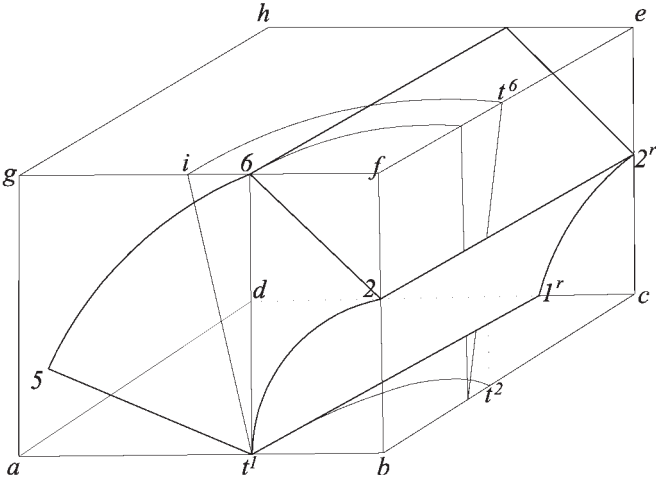


Fig.62 Costruzione del concio.

arrotondamenti delle controscarpe, dove conviene che abbiano una direzione sbieca per deviare la galleria da sotto il capitale, contrariamente a ciò che hanno fatto certi direttori, poco degni d'esserlo, che hanno seguito fin che hanno potuto la direzione del capitale; so bene che le persone che non conoscono il taglio delle pietre, e che non sono rare, si sono trovate in grande difficoltà per l'esecuzione di queste porte, e ne sono venute a capo tracciando i conci sui centri, e facendoli scendere e salire a più riprese, per presentarle e rifinirle, lavoro inutile e lungo che ci risparmiamo quando lo si sa fare; succede anche spesso che durante questi tentativi si tagli, cioè si sprechi, la pietra inutilmente. Così se ne deve prendere un'altra e ricominciare; allora ci sembra che un ingegnere debba conoscere il taglio delle pietre.

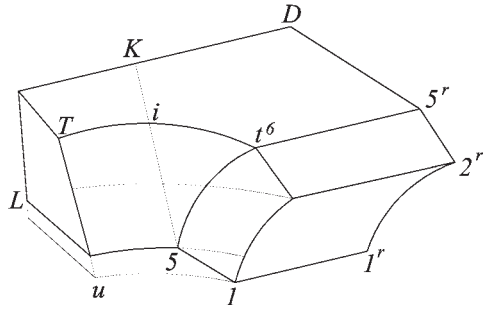


Fig.63 Pietra a taglio ultimato.

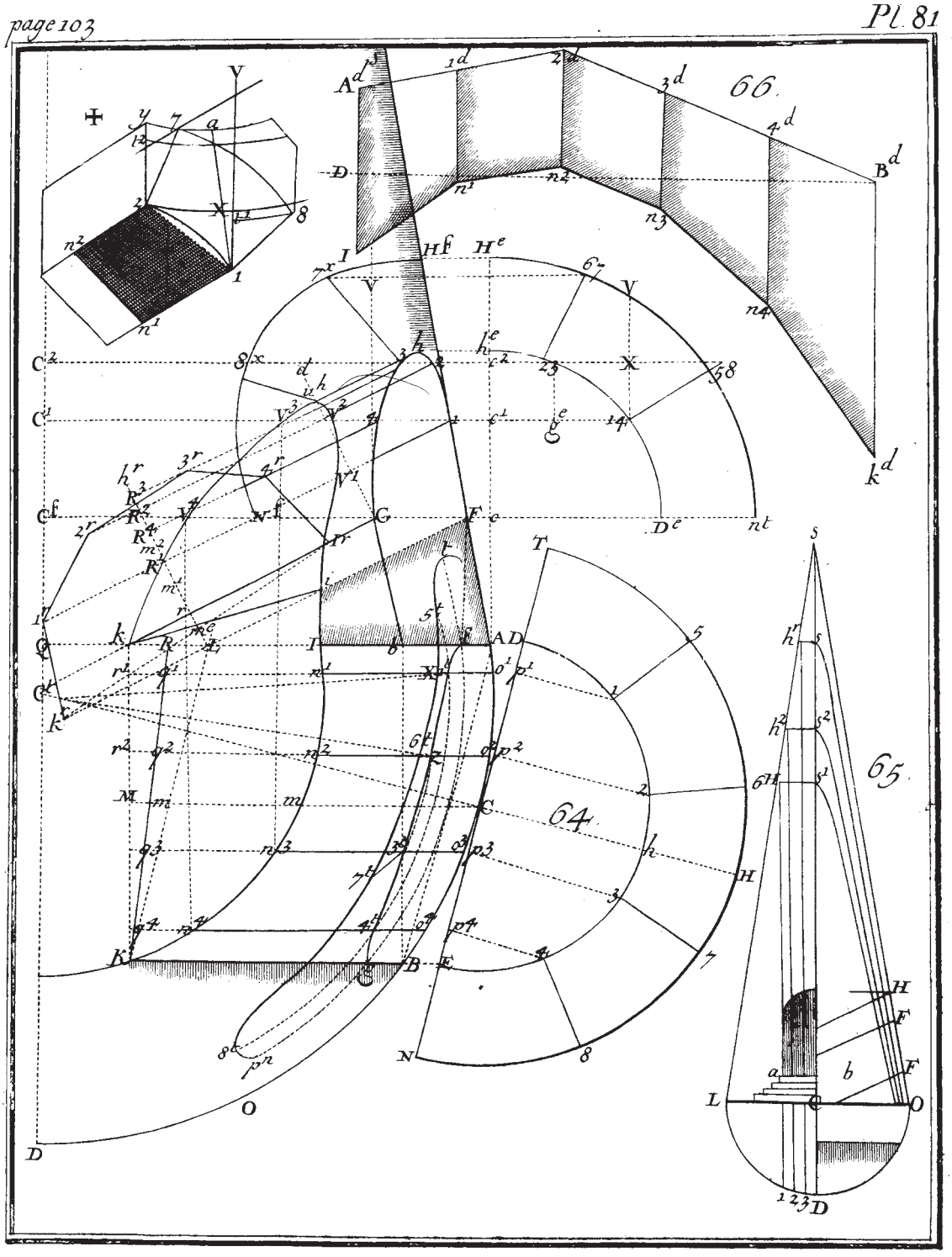
[4] La parte di arco che nel testo è chiamata *d aC*^{u}, nel disegno è invece *d a C*^{a}.

[5] Poca chiarezza nella traduzione del testo.

[6] L'arco *t t*^{2} chiamato nel testo, nel disegno è invece l'arco *t*^{1}*t*^{2}.

page 103

Pl. 81



SECONDA SITUAZIONE DELLA VOLTA A RIGUARDO DEL CONO, QUANDO LA VOLTA E' INCLINATA ALL' ORIZZONTE.

IN TERMINI DELL'ARTE

RETTA DISCENDENTE OVVERO OBLIQUA AD UNA TORRE ROTONDA.

Nel Trattato precedente abbiamo scelto la torre cava ,adesso noi sceglirermo la torre rotonda e la porta obliqua.
E' chiaro perchè una volta abbiamo detto che si può prendere un arco a tutto sesto primitivo in sei punti differenti 1°.Su un piano verticale situato in due modi o perpendicolare alla direzione verticale della obliqua 2°. In cui la obliqua a questa direzione , secondo l' oblicuità della corda AB , dell' arco orizzontale della Torre che comprende la Base della Porta .3° Anche in un piano inclinato situato in due modi o all' arco destro che quì è perpendicolare al piano della rampa della discendente conseguentemente inclinato all' orizzonte .4° Man mano la corda AB in un piano inclinato fuoriuscente dalla cavità della Torre 5° Si potrà una quinthe a csarà un piano perpendicolare alla direzione orizzontale per la sua base ma inclinato secondo la cavità della Torre .6° Infine si può formare la curvatura primitiva sulla superficie del cono sviluppato su una superficie piana, per poter fare la divisione delle curvature esattamente uguali , come è stato detto nel Trattato precedente.
Qui sceglieremo la più semplice e la più conveniente per la pratica per fare la curvatura primitiva sulla corda AB che ritorna lo stesso sulla tangente TN , che le è parallela ed uguale a DE su un piano verticale .

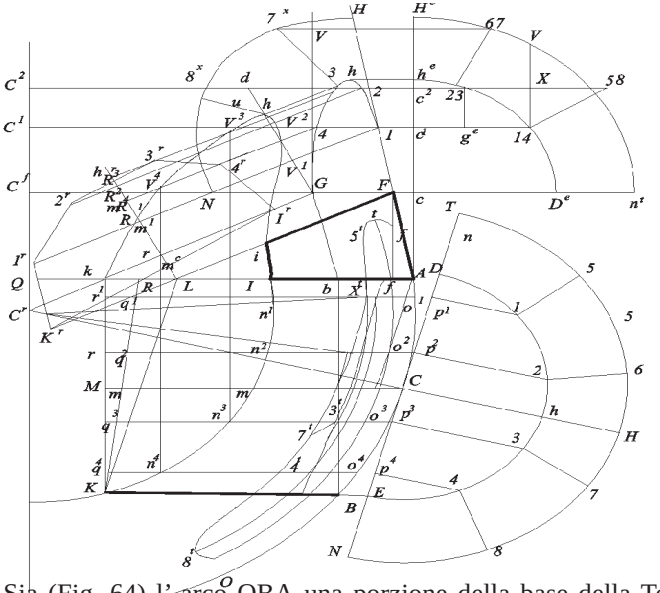


Fig.64 Costruzione della porta della Torre

Sia (Fig. 64) l' arco OBA una porzione della base della Torre ed il quadrilatero misto IABK , la proiezione orizzontale della discendente della Torre, la cui Porta è a questo punto obliqua, perchè la direzione della sua metà CM non passa per il centro C della Torre .
Esso ne è a questo punto come alle oblique semplici , si può fare l' arco della faccia del livello ossia rampante; supponendo ciò dal livello ,si conduce dal punto K del piedritto , in cui avanti una linea KL parallela ad AB in cui taglia il piedritto AI , prolungato in L.
Infine si farà il profilo della Torre e della rampa , per quello della Torre si farà l' angolo LAS , ugale a quello della cavità determinata come un quinto o un sesto dell' altezza , e per quello della rampa , si farà l' angolo ALF ugale a quello del complementare della discendente ,di cui il lato LF ,taglierà il lato AS della Torre in F , da dove si condurrà un orizzontale FG, per la posizione dell' imposta della faccia dell' arco , in cui bisogna trovare il punto G dell' imposta che corrisponde al punto B del primo orizzontale .
Dal punto K si condurrà una perpendicolare , prolungata su AL che taglierà in K, da dove si condurrà KG parallelo ad LF che darà sull' orizzontale Fg il punto G d' intersezione dove sarà l' imposta che corrisponde a B.
Si farà in seguito su AB , la sua pari DE come diametro , l' arco di faccia DhE e il suo estradosso THN ; che ha diviso le sue curvature ai punti 1,2,3,4 ;si abbasserà su questo diametro le perpendicolari $1p^1$ $2p^2$,&c.in seguito si faranno le proiezioni dei giunti del letto p^1q^1, che taglieranno l' arco aBC, ai punti o^1 ,o^2, o^3,o^4 per i quali si condurranno delle perpendicolarisu LA , che taglieranno questa linea nei punti che Frenzier non ha potuto marcare nella figura per evitare la confusione ,.ma solamente il punto b proveniente da B, chiamerò gli altri b^1b^2 & c. dai quali si condurranno delle linee alla cima del cono che è all' incontro dlla linea AS, appiombo con quella che passa per il centro C , come la vediamo nella fig. 65 , in S.
Ma come questa cima del cono s èpuò essere molto distante secondo la larghezza della Torre , e la ripidezza della cavità sarà fortemente scomodo di andare a cercare fuori dal luogo dove si traccia il disegno , allora bisogna aver ricorso al Problema 1 del terzo libro, pag. 286.
Supponiamo queste linee, chiamate bS tese sul profilo, si descriverà su GF prolungate per base la metà del cono primitivo CDh in $C^1D^1h^1$con le sue divisioni $14,2^3$ dalle quali si condurranno delle parallele a FG , qui taglieranno ogni due linee corrispondenti bsS, b^1S ,b^2S ai punti 1, 2 , 3, 4 del profilo dai quali si traccerà man mano la curva F 12h34G che farà la proiezione verticale della faccia della discendente sulla Torre tonda .
Bisogna fare il profilo della stessa discendente all' interno della Torre cava , la quale sarà molto più facile perchè qui si suppone punto della cavità fra l' interno cavo.
Avendo tirato le proiezioni del letto all' ordinarie p^1q^1, p^2q^2, &c. che taglieranno l' arco concavo ImK ai punti $n^1n^2n^3n^4$si condurranno da questi punti delle verticali , dai punti del profilo dell' arco di faccia delle parallele inclinate alla rampa LF , che taglieranno queste verticali ai punti i, $v^1v^2v^3v^4$ k da dove si condurrà mano a mano una curva che sarà la proiezione verticale dell' arco della faccia concava , la quale sarà rampante dell' altezza Ii ,
L' intervallo di due proiezioni di faccia rotonda, cioè convessa e della faccia cava , cioè concava, darà le lunghezze dei giunti di pietra , che non si possono trovare sul piano orizzontale dove esse sono accorciate dalla proiezione [1].

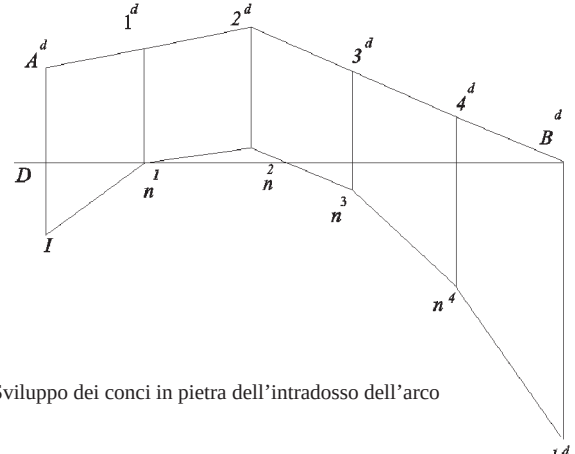


Fig.66 Sviluppo dei conci in pietra dell'intradosso dell'arco

La proiezione dell' arco della faccia curva all'interno è data dall' arco Imk, perchè è sovraposta senza cavità.
Per fare quella dell' arco della faccia esterna bisogna prendere per raggio la lunghezza C^iF, che è la distanza dall' asse accanto al cono su una orizzontale e dal centro C della Torre , tracciare un arco di cerchio che taglierà il piedritto IA in F, ed il piedritto KB in G.dove saranno gli spostamenti indietro Af, Bg che danno l' altezza F della discendente sulla base della Torre , dalla stessa, con la lunghezza C^iI per raggio, e dal centro C^i, si traccerà un arco che taglierà le proiezioni p^1q^1 ,p^4q^4, le lunghezze 1^t4^t invece del resto.
Non resta altro che tracciare l' arco destro alla maniera che è stata spiegata , al Tomo precedente parlando delle volte a botte semplici in discesa [2].
Da un punto L , preso a piacere sulla linea della rampa LF , si tirerà una perpendicolare Lh , che taglierà l' altra linea Gk in r e le proiezioni nei profili dei giunti di pietra I, In ,2,2^n prolungati ai punti $R^1R^4R^2R^3$ i mezzi m^c, m^1,m^2 questi punti saranno quelli delle ascisse del semi diametro dell' arco destro, di cui le ordinate si prenderanno su una stessa linea tracciata sul piano orizzontale .
Avendo portato la differenza Lr delle imposte in kR , si traccerà KR che taglierà le proiezioni orizzontali dei giunti di pietra ai punti q^1,q^2,m, q^3,q^4 , le lunghezze mq^2,mq^1 , mR sranno le ordinate che si cercano , le quali, a causa dell' arco destro rampante , non dovranno essere ad angolo destro con il semi diametro m^ch^c, inclinato, che intanto è in un piano verticale , ma si avrà solamente , l' angolo che esse devono fare con Lh.
Dal punto m^c metà di Lr per il centro , e dell' intervallo mR o mK per raggio, si faranno da entrambe le parti degli archi di cerchio Kg in L&FL , prolungati in K^r, la linea K^rL sarà il diametro rampante al quale altre ordinate passando da m^1m^2 parallele ed ugauli ad mq^1,mq^2 e l' arco destro sarà fatto passando da $k^rh^rL^r$.

[1] Per questo non abbiamo cominciato facendo la proiezione degli spigoli degli archi di facciata interna ed esterna.
[2]Dai trattati delle volte semplici , abbiamo dato la maniera di tracciare le centine di livello, qui noi non facciamo lo stesso perchè queste facce sono a doppia curvatura , una proiezione verticale non darebbe il vero contorno , ma sarebbe al contrario inutile per la pratica.

Dai trattati delle volte semplici Frenzier ha dato la maniera di tracciare le centine di livelli e rampanti delle facce della discendente e delle salite, perchè non le ha supposte ai piani , qui viene fatto lo stesso , perchè queste facce erano a doppia curavatura , una proiezione verticale non marcherebbe il vero contorno, invece esse devierebbero inutilmente dalla pratica.
L' arco destro , le proiezioni orizzontali e verticali erano tracciate , si ottiene tutto ciò che è necessario per formare i pannelli se si opera dalla loro metà o applicare il trattato sulla pietra per squadratura , come abbiamo fatto nel trattato precedente in cui questo differisce dalla volta che è discendente .
Se si opera dai pannelli si può trovare tutte le misure del profilo e dell' arco destro.
Quelli che saranno dei trapezi misti avranno per distanza dei loro angoli paralleli la lunghezza della corda dell' arco destro , e per le ampiezze degli angoli , quelle dei giunti di pietra compresi da due profili delle facce , ma per avere dei punti delle curvature convesse alla testa della discendente , e concave alla testa dell' ascesa , bisognerà cercarli suddividendone l' arco delle teste della curva primitiva 12,23, &c.[3]
I pannelli della pietra faranno lo stesso dei trapezi misti componendo di giunti della pietra presi al profilo e all' intervallo dell' intradosso, in cui i vantaggi delle teste sono date allo stesso profilo come quelle dei giunti.

APPLICAZIONE SUL TRATTATO DELLA PIETRA.

Per tagliare le curavature di questa volta alla faccia della discendente , con facilità ed esattezza , bisogna operare partendo dal pannello di "doel", e partendo dalla squadratura della testa , perchè alla testa dello spigolo di. "doel"e della faccia è una curva a doppia curvatura e che quelle dei gunti ci fanno delle curve piane di sezioni coniche le cui curve si formano esattamente senza congiungerci ai mezzi della squadratura .
Per arrivarci occorre una preparazione nelle proiezione orizzontale ,che è da tirare nel punto dell' arco dello spigolo inferiore con il punto della curvatura che si propone di fare una linea destra al centro della Torre C^t, la quale taglierà l' arco circolare che passa dall' angolo dello stesso spigolo come il letto superiore .
Supponendo per esempio che si voglia fare la seconda "Vouffoir" , si tirerà dal punto 2^t, che taglierà l' arco del cerchio passando dai punti I^t& 4^tal punto z , o qualsiasi punto più conveniente.
Si tirerà per il punto I^tla linea I^tC^t che taglierà l' arco a cerchio concentrico , passando dai punti 2^t3^t al punto X, la linea I^tX o 2^tz servirà per la costruzione successiva .
Si farà ancora una piccola preparazione all' elevazione che è da tirare dall' angolo 2^3 il più alto un orizzontale 2^3X ed una verticale dal più basso I^4V che taglierà l' orizzontale al punto X.
Avendo eretto un parametro per servire la ... di piatto , si applicherà il pannello $1^d2^dn^2n^1$ fatto come i precedenti dal mezzo delle lunghezze degli angoli donate al profilo , e la loro posizione uguale ad una direttrice DB^dpresa al profilo in Gd o altrove , non importa .
Essendo il contorno del pannello tracciato , si avranno i quattro angoli della "Vouffoir"ma non le curve della testa.

[3] Frenzier specifica che questa operazione non è stata fatta nella costruzione "per non imbrogliare troppo"

Si prenderanno con la squadra l' angolo della rampa ed apiombo kGV , poi dal punto 2^3per il centro e dell' intervallo 2^tX preso al piano orizzontale , si disegnerà un arco sulla cima delineata , poi con il bivio kGV si abbatterà la pietra per farci una arco che farà un angolo di cilindro , dentro la quale ,e all' altezza data dall' elevazione 1^4X. Si farà un buco di un pollice di profondità per piazzarci la larghezze della lima piccola 1^tX come si vede alla figura Y all' altezza dell' asse 81, visto che il punto 1° sia sempre distante dal punto 2 dell' intervallo di cui si è parlato al punto 2^tX.
Da questo mezzo si avranno tre punti della superfice conica della Torre , di cui i due 11° sono su un angolo dove non si può applicare la riga e prolungare questo angolo tranto quanto si vuole.
Secondamente si hanno i due punti 2&X su una sezione piana parellela alla base del cono, di conseguenza se la si prende sull' angolo IX prolungando a volontà un punto come a ,ci potremmo trovare un secondo y prendendo lo spostamento della cavità dietro a T, sull' angolo cilindrico donato dal."Biveau"in t^1Ydel piano orizzontale , sulla destra y^tc^te tirando dal punto y una parallela a $X2^t$ che taglierà la linea 2^tc^t al punto y.

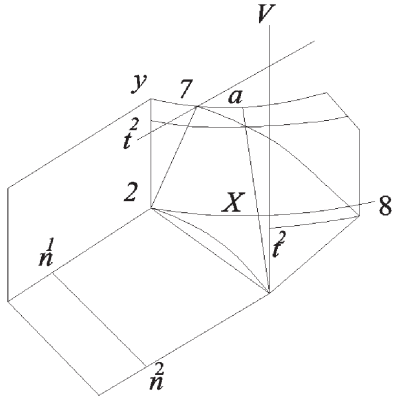


Fig. +Rappresentazione grafica dei pannelli per i punti dati x2 &y del Prob. I del tomo secondo ,

Se si scelgono i quattro punti dati x2 &y dal Prob. I del tomo secondo , si avrà la posizione del punto y sull' angolo del cono tronco della Torre e di conseguenza si potrà formare esattamente la superficie , come è stato detto, per le proporzioni del cono all' inizio dello stesso tomo; applicando la riga sui punti 2 &y ,che sono sull' angolo del cono , e portando l' arco dato da 2^t3^t del piano orizzontale sui punti 2, X della fig.+, e il cerchio di arco y dato sul piano orizzontale da un arco a cerchio concentrico al precedente 2X , invece si formerà esattamente la superficie conica di tale grandezza che si vorrà tanto in altezza che in larghezza.
La formazione di questa superficie darà già uno dei contorni dello spigolo di "doel"e della cima che è conica ,e la formazione dell' arco cilindrico che si approfondirà all' ordinaria per la"doel"della "berceau" in discesa determinerà e formerà come dallo spigolo a doppia curva che viene proposto di fare.
Avendo formato la "doel",sarà utile formare le curve dei giunti di curva I°8 2° 7 , alla stessa superficie conica della Torre , perchè battendo la pietra all' ordinaria con i "biveaux" del letto e della "doel"si formerà lo stesso di questi giunti di cima alla curva I°8 2° 7 , da una specie di "hazard", senza meravigliarsi se essi sono ellettici ,parabolici o iperboloidi , e perciò da un operazione che è molto esatta alla stessa.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA
Se si sovrappongono più piani verticali passanti per i giunti del letto della discesa , è chiaro che le loro sezioni alle superfici della torre in., che è un vero cono di tronco , saranno tutte degli iperbolici i cui vertici sono detrminati ai punti h^1,h^2, h^m della fig. 65, dove questi piani verticali , che non sono rappresentati in elevazione altro che da delle linee destre , che tagliano l' angolo della Torre L prolungato in S.

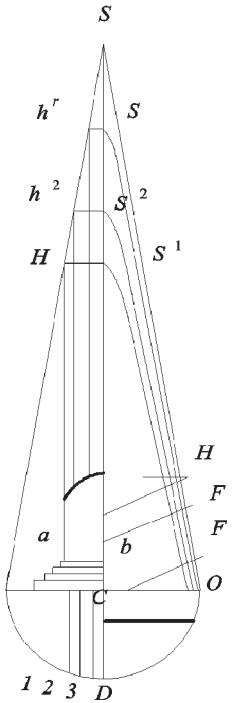
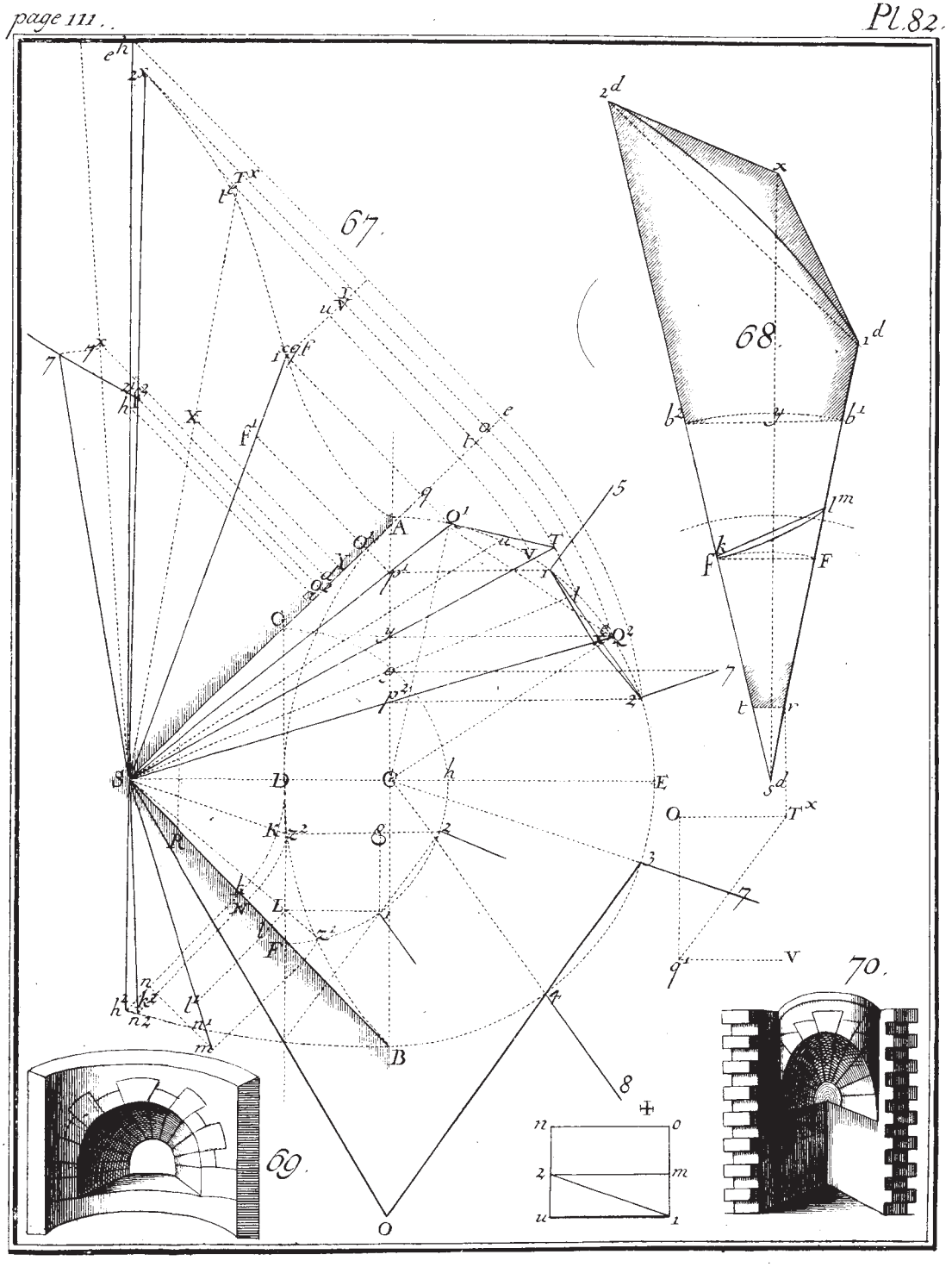


Fig.65 Sezioni dei piani verticali di cerchio per avere la base della sezione

In seguito si descrive l' arco di cerchio LD che è la base della Torre ,e che si prolungano le stesse linee che rappresentano i piani, la cui taglieranno questa base ai punti1, 2 ,3 &c . che determinano l' ampiezza di ogni iperbole .
Si hanno dunque due punti dati per descrivere ogni iperbole che non sono sufficienti in gnerale , ma qui lo sono , poichè il cono è dato e di conseguenza atraverso il centro si riuscirà a determinarle.
A questa supposizione , se si esamina la nostra costruzione , si rionoscerà che è la stessa che noi abbiamo dato al secondo Libro pagina 236. , perchè le divisioni dei... nei profili 1^4 2^3&c. doneranno le altezze di piani orizzontali che taglieranno l' asse del cono in C^1 C^2 &c. e l' angolo dl cono AS in f^+ f^2 7°,di conseguenza determineranno i raggi dei cerchi di differenti sezioni parallele alla base f g 1^t ,4^t ,2^t ,3^t.
Oppure il contorno dell' iperbole formato dal piano verticale corrispondente alla divisione di ogni "doel", taglia questo cerchio in un punto che è comunque alle due sezioni , di cui questo sarà i punti I^t 2^t&c. provocando delle divisioni 1°2del sesto primitivo ,occore


page 111.
Pl. 82.
67.
68.
69.
70.
S
O
A
B
C
D
E
F
G
K
L
N
O
Q
T

PROBLEMA IV.
Fare una Volta conica in una torre a piombo.

La torre può essere rotonda o cava, e la volta orizzontale attraverso il suo asse e attraverso il suo diametro del suo sesto frontale che è a doppia curvatura.

PRIMA SPECIE,
in cui le imposte sono di livello.

CANONIERA ,
o Tromba in Torre cava.

Sia (Fig. 67) l'angolo rientrante ASB nel quale si voglia costruire una volta conica,di cui i piedritti AS, BS, sono eguali e di livello, sia ADB l'arco concavo che è la proiezione della torre cava, la cui superficie ritaglia, intersecandola, la parte BDAB del cono dritto, e forma per l'interruzione di faccia una curva a doppia curvatura.

Per pervenire alla sua costruzione si può operare come l'avevamo detto al III libro [1], per addizione o per sottrazione, ovvero, vale a dire che si può prendere il sesto primitivo della tromba sulla base esterna del cono AB che è tutta fuori da questa volta e, dopo averla supposta piena, sottrarne la parte del vuoto, oppure supporla tagliata da un piano verticale perpendicolare al suo asse come in GF, e aggiungere a questo cono dritto la parte mista restante per raggiungere la torre cava GADBFD (vedi Fig.67a).

Sceglieremo quindi la via dell'addizione come la più semplice.

Si tirerà per il punto D, dove l'arco della Torre ADB taglia l'asse SC, una perpendicolare GF a questo stesso asse, sulla quale come diametro compreso entro i piedritti SA, SB, si descriverà un semicerchio GhF per sesto originario, che si dividerà nei suoi conci ai punti 1 2 e C [2]. da dove si caleranno delle perpendicolari che individueranno attraverso la loro intersezione con questo diametro i punti K ed L, per i quali si tireranno dalla sommità S delle rette che taglieranno l'arco ADB dalla proiezione della torre ai punti z^1, z^2, le linee Sz^1, Sz^2 saranno le proiezioni dei giunti di posa all'intradosso, di cui bisogna cercare il valore per dei profili, perché essi sono scorciati da questa rappresentazione (vedi Fig.67b).

Si prenderà se si vuole per base di questi profili la linea SB , sulla quale si porterà la lunghezza SK e Sk , SL in Sl per alzare sui punti k e l delle perpendicolari kk^2 ll^1 che si faranno uguali alle normali 2K 1L; dai punti k^2 l^1 e dal vertice S si tireranno le rette indefinite Sn^1 Sn^2, delle quali bisogna ricercare la lunghezza; si porterà la proiezione Sz^2 in SN

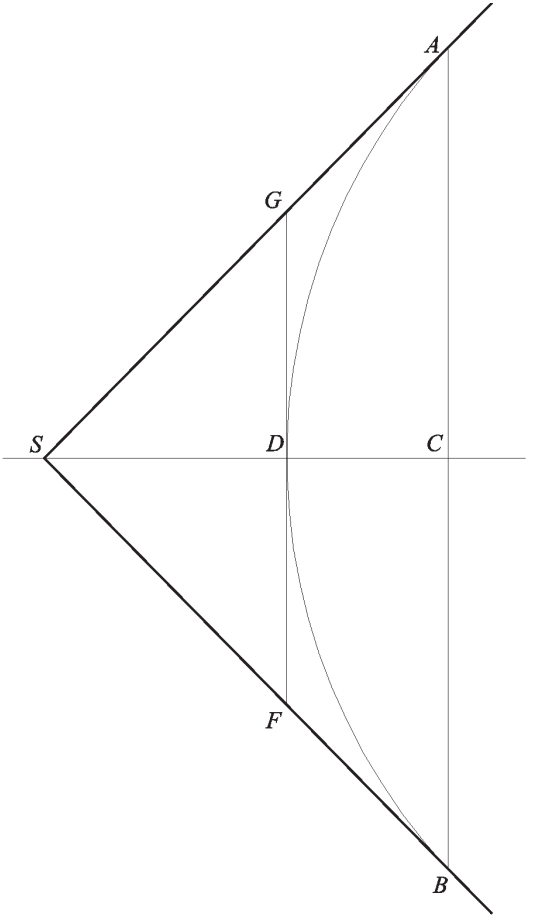


Fig. 67a - Volta conica in torre cava. Sviluppo delle superfici flessibili per il taglio dei

e Sz^1 in LM sulla base di profilo SB, poi dai punti N ed M si alzeranno delle perpendicolari che taglieranno le linee Sk^2 Sl^1, prolungate fino ai punti n ed m, le linee Sn e Sm saranno i valori delle proiezioni dei giunti di posa che si ricercavano [3] (vedi Fig.67c).

Ora sarà agevole fare il quadro dell'intradosso piatto cominciando da quello dei conci del pennacchio a tromba dritta che è il cono inscritto SGF , per esempio per il secondo 1 2.

Avendo tirato a parte (Fig.68) una linea S^d F uguale a SF della Fig.67, si descriverà dal punto S^d come centro, e con la stessa SF come raggio,

[1] TomoIII.

[2] I punti a cui si fa riferimento sono ottenuti dalla divisione del semicerchio GhF in cinque parti.

[3] Le Sn e Sm rappresentano le vere grandezze, mentre Sz^1 e Sz^2 sono i giunti di posa.

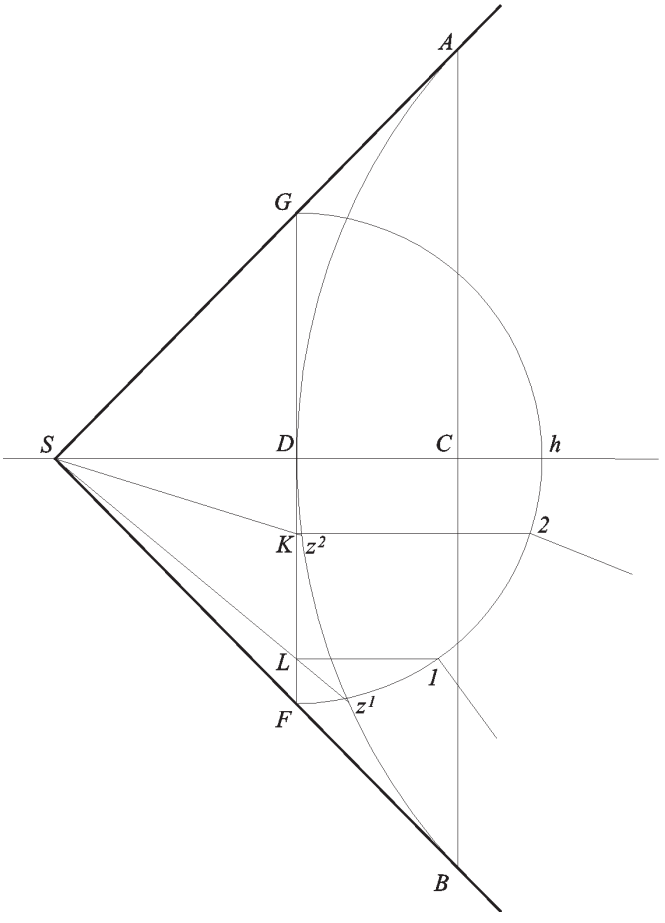


Fig. 67b - Volta conica in torre cava. Sviluppo delle superfici flessibili per il taglio dei

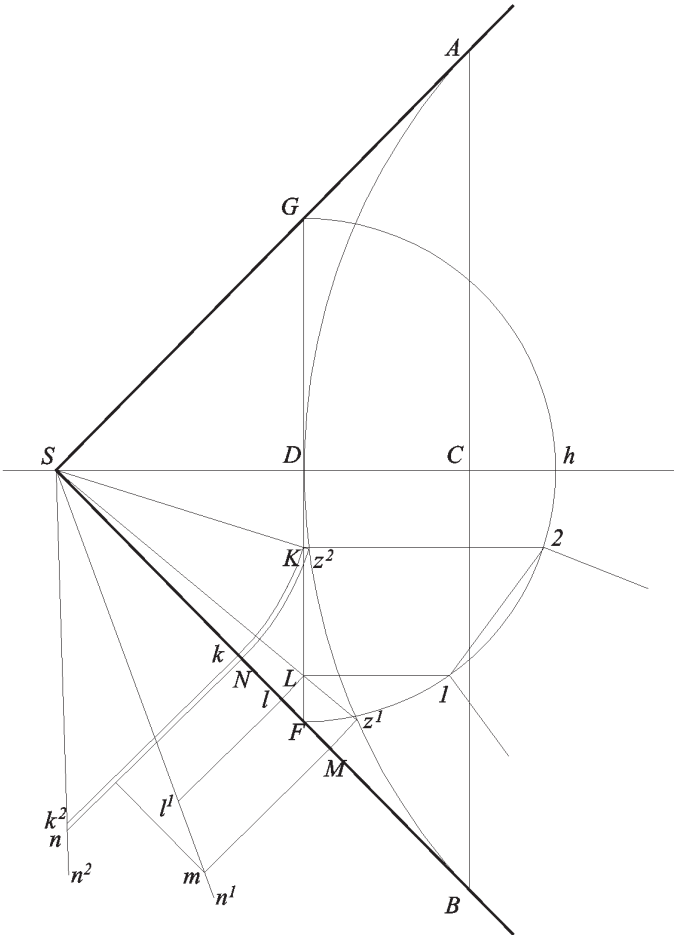


Fig. 67c - Volta conica in torre cava. Sviluppo delle superfici flessibili per il taglio dei conci.

l'arco Ff dentro il quale si inscriverà la corda 1 2 del sesto originario GhF, la quale individuerà il punto f, per il quale, a partire da S^d si tirerà la linea indefinita S^d, sulla quale si porterà la lunghezza S^dk della Fig.67 allo stesso modo sul lato S^dF prolungato, si porterà la lunghezza Sm in $S^d l^m$, la linea $k^n l^m$ sarà la corda della testa dell'intradosso piatto S^d k l, della quale ritagliamo la punta t S^d r per lo spazio dato che occupa la mensolina STR, il trapezoide t k l r sarà il pannello dell'intradosso piatto che si cerca, il quale eccede l'incavo della torre di un segmento d'ellisse k^n o l^m, proveniente dal segmento di cerchio della proiezione z^2 o z^1, che si taglierà come sarà detto nell'applicazione del tratto sulla pietra [4].

Non proponiamo di cercare i piani di posa di questa volta di cui la testa è una curva in arco d'ellisse, che si potrebbe trovare come avevamo detto parlando della porta in torre cava perché noi possiamo farne a meno passando da una via di squadratura per la quale si formano, senza che sia necessario conoscerli.

Resta solo da trovare la falsa squadra di posa e di intradosso e quello di intradosso e di testa, nella stessa maniera in cui l'abbiamo descritto

[4] Le k^n e l^m sono lo sviluppo delle proiezioni in piano, z^1 e z^2, dei conci per i cartoni preparatori.

nel secondo tomo, trattando della tromba dritta e della tromba piatta.

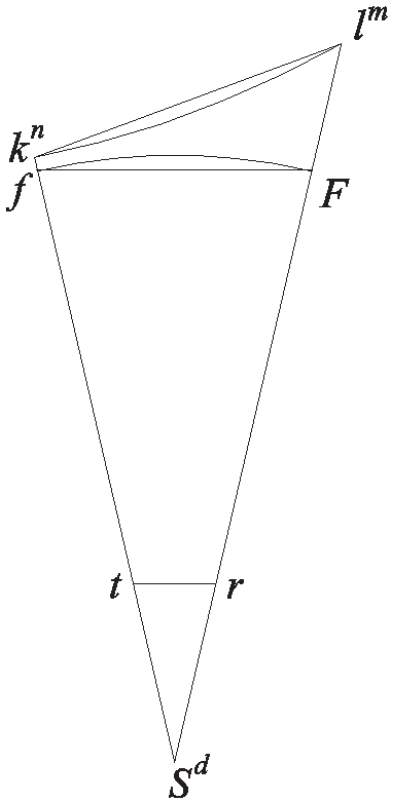


Fig. 68a - Volta conica in torre cava. Sviluppo delle superfici flessibili per il taglio dei

Applicazione del tratto sulla pietra.

Dopo aver formato un paramento per servire da intradosso piatto, si applicherà la faccia di quella del concio che si propone di fare per tracciare il contorno, per esempio, quello che è dentro una parte della Fig. 68, t k^n l^m r.

Poi con la zappa da taglio di intradosso e di testa, si abbasserà la pietra a formare una seconda superficie piana che sarà un pezzo della torre cava, che si suppone inizialmente circoscritto a un prisma a più lati.

Successivamente si farà a parte (Fig. +) un triangolo rettangolo 1 u 2, con tre linee date, ovvero, la corda della proiezione della testa z2 z1; la differenza delle altezze delle estremità dei giunti presa di profilo, che sarà u n2 che si avrà tracciando dal punto più basso m1, una parallela alla base BS e la terza che sarà l'ipotenusa di questo triangolo sarà uguale alla linea k^n l^m.

Fatta questa preparazione, si prenderà con la falsa squadra l'angolo 1 2 n e si poserà uno dei suoi rami sullo spigolo della testa piatta 1 2, l'altro darà una linea a piombo n 2 sul paramento della testa piatta; allo stesso modo con l'apertura dell'angolo 2 1 m supplementare del precedente, si traccerà una seconda linea a piombo n 2, sulla quale si porterà l'altezza 2 u in 1 m per tirare la linea 2 m, a cui si tirerà una parallela n o all'altezza 2 n, presa a piacere, tuttavia la più lontana che la pietra potrà permettere.

Si innalzerà poi una sagoma convessa sull'arco concavo B z^1 z^2,

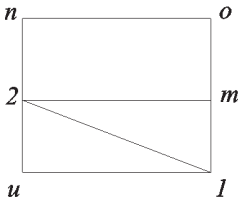


Fig. 1 - Sviluppo delle superfici flessibili per il taglio dei conci

seguendo la quale si scaveranno due spelature sulle linee 2m, no, per mezzo delle quali si formerà un paramento cavo con la riga, come è stato detto per ogni segmento di cilindro e doele di volta a botte, il quale paramento sarà quello della torre cava.

Adesso si tratta soltanto di abbattere i letti con le zappe di posa e di doele, come delle volte coniche ordinarie a riga, la sezione della superficie piana del letto con questo paramento formerà una testa di giunto di letto in arco ellittico, senza che se ne sia conosciuta prima la curvatura, ed il concio sarà completato alla testa superiore: l'inferiore dal lato della mensolina si farà come per tutte le trombe .

Si è disegnato nella Fig. 69 un vano in un fianco concavo, la cui costruzione è la stessa di quella della tromba in torre cava.

SECONDA SPECIE
Della tromba in torre rotonda ed in particolare della tromba di Montpellier.

La costruzione della tromba in torre cava di cui abbiamo appena parlato conduce facilmente attraverso un'operazione inversa a quella della tromba in torre tonda, e poiché quella di Montpellier è la più convessa che sia possibile fare (come si può vedere nella Fig. 70 dove è rappresentata in prospettiva): ne daremo una traccia come esempio.

Sia (Fig. 67) l'angolo BSA quello dei piedritti, sui quali si vuol fare una tromba, che noi supponiamo uguali; avendo tirato dalle loro estremità A, B, una linea diritta, la quale servirà da diametro a un semicerchio AEB, che si traccerà per due scopi, uno per definire la frattura della torre rotonda di cui è la proiezione, l'altro per servire da sesto originario alla costruzione della tromba, del quale rappresenta la sezione verticale del cono dritto tagliato dalla linea AB.

Avendo suddiviso questo semicerchio nei suoi conci ai punti 1, 2, 3, 4, si abbasseranno al solito le perpendicolari $1p^1$, $2p^2$, etc. sul diametro AB, per avere la proiezione di queste divisioni ai punti p^1 p^2, dai quali e dal vertice S della tromba, si tireranno delle linee che taglieranno lo stesso arco BEA, considerato come proiezione della torre ai punti Q^1 Q^2, le linee SQ^1, SQ^2 saranno le proiezioni dei giunti di posa.

Adesso, bisogna cercare il valore di queste proiezioni, nello stesso modo con cui abbiamo fatto per la torre cava, per mezzo di un profilo per ciascuna, del quale si prenderà la base su SA prolungata per comodità.

Si trasporranno le proiezioni dei giunti di posa comprese solo nel cono dritto su una base presa a piacere per esempio SA portando Sp^1 in So^1

, Sp^2 in So^2 e SC in Sa poi si eleveranno su tutti i punti a, o^2, o^1, delle perpendicolari su SA, che si faranno uguali alle altezze delle imposte del sesto originario, ovvero ah=CE, $o^2\ f^2 = 2\ p^2$, $o^1\ f^1 = 1\ p^1$, e per i punti

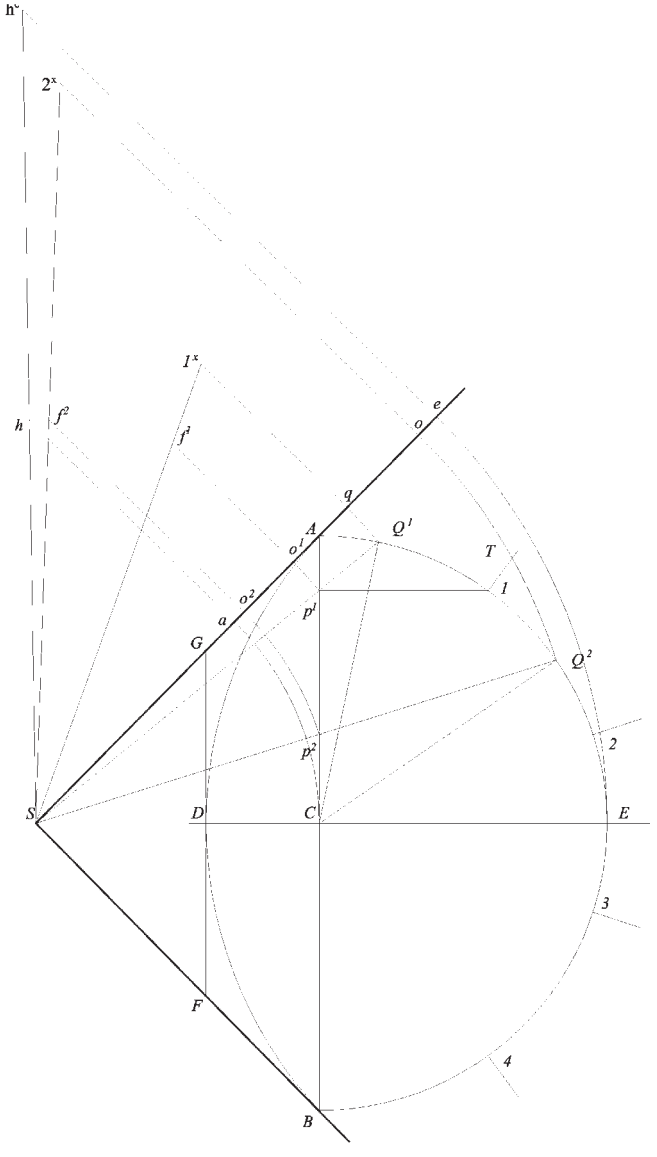


Fig. 67d - Volta conica in torre rotonda. Sviluppo delle superfici flessibili per il taglio dei conci.

h, f^2, f^1, e il vertice S, si tireranno delle linee indefinite S h^c [5], S 2^x, S 1^x, di cui bisogna trovare le terminazioni ai punti h^c 2^x 1^x.

Si porteranno le proiezioni totali dei giunti di posa SQ^1, SQ^2, SE in Sq, So, Se [6]e dai punti q, o, e [7], si eleveranno sulla base Se delle perpendicolari che taglieranno i profili dei giunti di letto nei punti richiesti hc, 2^x,1^x, le linee Shc, S2^x ,S1^x saranno i valori dei giunti di posa all'intradosso (vedi Fig.67d).

Con tali lunghezze dei giunti, si può fare, come alla traccia precedente, una faccia di intradosso piatto triangolare Sd 2^d 1^d come riportato nella Fig. 68b , che sarà il valore di quello della proiezione S Q^1 Q^2, della Fig.67e, ma poichè rimane ancora fuori un segmento di cerchio Q^1, 1, Q^2, che è la proiezione di una parte della torre tonda, bisogna aggiungerne il valore alla faccia triangolare della Fig. 68b e ciò si può fare in due modi.

In primo luogo cambiano l'arco di cerchio Q^1, 1, Q^2 in arco ellittico del quale si troveranno molti punti attraverso il Problema IX del 2° Libro pagina 147 [8].

In secondo luogo, in un'altra maniera che facilita l'esecuzione; si inscriverà questo segmento di cerchio dentro un angolo formato da due tangenti, per cambiare la faccia della torre tonda cilindrica in prismatica a svariati lati.

Si traccerà dal centro C ai punti Q^1, Q^2 dei raggi CQ^1, CQ^2 ai quali si tireranno delle perpendicolari Q^1T, Q^2T che si intersecheranno [9] in T e saranno delle tangenti del segmento Q^1, 1, Q^2.

Se il sesto originario AEB è circolare, queste linee saranno uguali fra loro; ma se esso fosse sopraelevato o sottoelevato esse sarebbero disuguali nel rapporto dei diametri coniugati e non sarebbero più perpendicolari alle linee CQ^1 CQ^2; in questo caso per tirare queste tangenti bisogna fare ricorso al Problema III del Tomo secondo [10].

Per trovare il valore di queste tangenti, bisogna cercare quello della linea ST che individuerà il punto x della loro intersezione alla Fig. 68b, poiché questa linea taglia il diametro AB in y alla Fig. 67e le si eleverà una perpendicolare yx^c, che taglierà la corda 1, 2 al punto xc.

Si porterà in seguito la lunghezza Sy in SY sulla base SA dei profili, e le si farà una perpendicolare YX uguale all'altezza yx^c, dai punti S e X. Si tirerà l'indefinita St, che sarà terminata al punto T^x da una verticale tT^x, proveniente dal punto T della proiezione orizzontale ST portata in St; la linea ST^x sarà il valore della linea ST che si cerca.

Per collocare questa linea nella faccia della Fig. 68 si traccerà la corda b^2 b^1, sulla quale si porterà dal punto b^2 la lunghezza x^e 2 del sesto originario in b^2y; si tirerà dai punti Sd e y la linea S^d x uguale a ST^x della Fig. 67e che darà il punto x della Fig. 68b; se si tirano da questo punto le linee x 1^d, x 2^d, il trapezoide S^d, 1^d, x, 2^d sarà la faccia dell'intradosso piatto che si cerca, dal quale si ritaglierà per la mensolina il triangolo t S^d r , seguendo la lunghezza data S T^n della Fig. 67e.

Adesso bisogna, come per la tromba precedente cercare le zappe di

[5] La lettera h^c del testo, non corrisponde alla c^hdella Pl.82; si adotterà h^c.

[6] La SE del testo, non corrisponde alla Se della Pl.82; si adotterà Se.

[7] La lettera Q del testo, non corrisponde alla q della Pl.82; si adotterà q.

[8] Problema IX Tomo II

[9] In questo punto è omessa la Q^2T perpendicolare a CQ^2 quale altra tangente dell'arco Q^11Q^2.

[10] Problema III Tomo II

intradosso e di testa, per dare a questo intradosso piatto l'inclinazione che deve avere, con i piani della torre circoscritti alla superficie della torre tonda che ci si propone di fare, e poiché ce ne sono due per una sola testa di concio, seguendo le linee di proiezione Q^1T, Q^2T, servono anche due zappe differenti, che si troveranno nella stessa maniera che è stata detta per la tromba piatta pag. 80 e per la tromba dritta pag. 210 Tomo II [11].

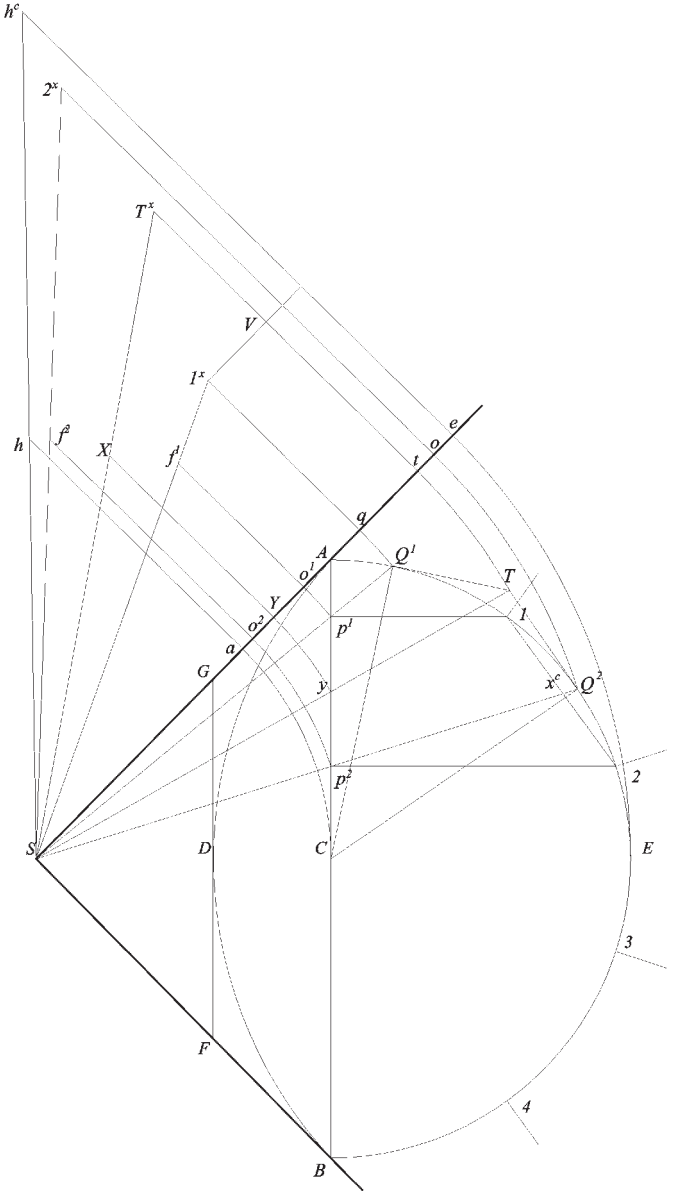


Fig. 67e - Volta conica in torre rotonda. Sviluppo delle superfici flessibili per il taglio dei conci.

Applicazione del tratto sulla pietra.

Ciò che abbiamo detto dell'applicazione del tratto della tromba precedente in torre cava, sulla pietra, può servire qui per la torre tonda,

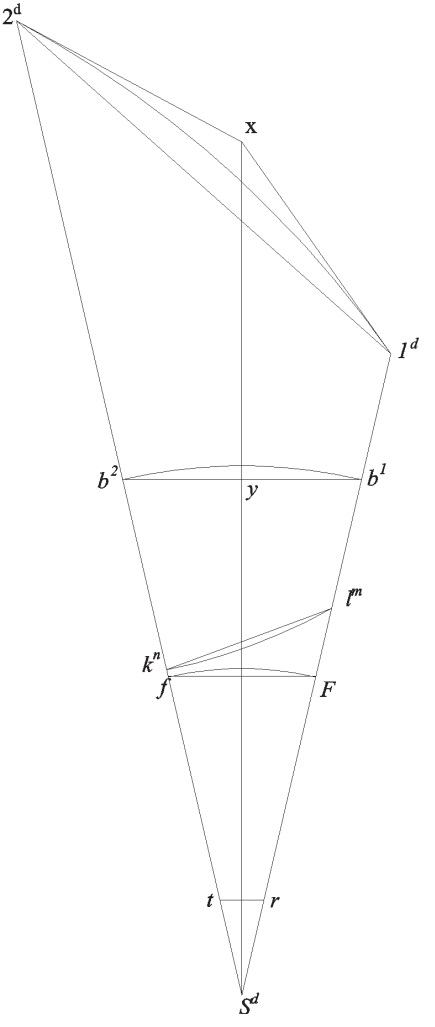


Fig. 68b - Volta conica in torre rotonda. Sviluppo delle superfici flessibili per il taglio dei conci.

[11] Tomo II pag. 80 pag. 210

con la differenza che qui essendo ogni concio concluso in testa con due superfici, bisogna raddoppiare l'operazione prendendone per ogni falda un'altezza V T^x o T^x q^2, che sia la differenza degli angoli della testa del concio, per formarne il lato verticale di un triangolo rettangolo q^1 V T^x, che darà gli angoli della zappa squadrata della testa del concio 1^d x o x 2^d con lo spigolo delle falde, il quale è rappresentato in proiezione dal punto T, come l'angolo ottuso q1 T^x r della Fig. 70 o il suo supplementare a due dritti T^x q^1 O, per tracciare su ciascuna falda una orizzontale OT, come si è fatto nel tratto precedente, per avere 2 m, o n o alla Fig. +, sulle quali orizzontali si poggerà la sagoma concava formata sull'arco convesso AE, che deve servire a formare la superficie convessa della torre tonda allo stesso modo con cui si è formata la concava della torre cava, dove si vede che noi supponiamo che si sono formate le superfici delle falde per mezzo delle zappe di taglio di intradosso e di testa.

Formata la porzione di superficie convessa della torre che deve occupare la testa del concio, si abbatterà la pietra con le zappe di posa e di intradosso per formare i letti, le cui sezioni formeranno con questa superficie cilindrica dei giunti di testa in archi ellittici, senza il soccorso

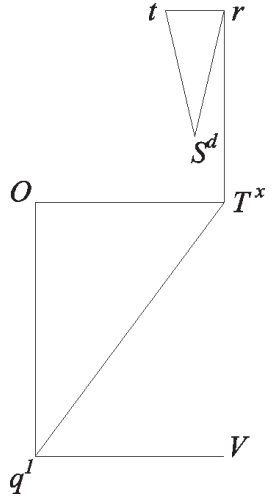


Fig. 70 - Sviluppo delle superfici flessibili per il taglio dei conci.

delle facce di posa, e tuttavia molto esattamente, sebbene per una sorta di caso senza conoscere questi archi.

Adesso non resta più che da scavare la doele con le sagome convesse formate sugli archi di testa dal lato della mensolina e su uno più grande alla testa superiore; ma poiché questa testa non è piana non vi si può tracciarei un arco di cerchio o di ellisse come sulle trombe a faccia piana, perciò daremo un modo di porvi una falsa squadra mista, in una situazione che sia verticale quando il concio sarà posizionato; di conseguenza il cui arco all'intradosso potrà essere preso sul sesto originario AEB.

Avendo tirato il giunto di testa 2 7 si prenderà in questo giunto un punto 7 a piacere dal quale si abbasserà una perpendicolare 7 9 sul diametro AB; si porterà la lunghezza S 9 in S d su SA, e da d si eleverà sulla medesima una verticale d 7^x uguale a 9 7, e dai punti S e 7^x, si tirerà la linea S 7^x.

Si formerà poi un triangolo S 7 f^2 con le tre linee date S 7^x , S f^2 e 2 7; l'angolo S f^2 7 sarà quello della falsa squadra che si cerca, del quale si porrà uno dei bracci sullo spigolo del letto e di doele , l'altro individuerà sul letto una linea f^2 7, che sarà verticale in opera seguendo la quale si poserà il ramo dritto della falsa squadra mista 1 2 7, che sarà stato formato al sesto originario sull'arco 1 2, per il ramo curvo, e il giunto 2 7 per il ramo dritto.

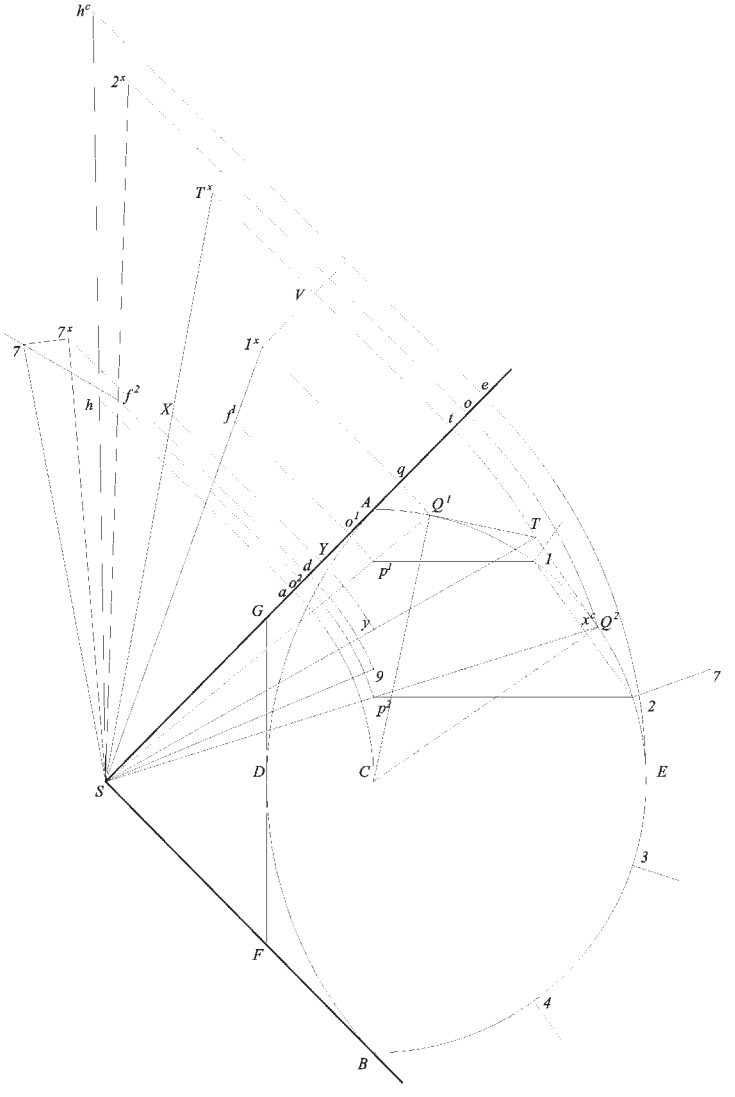


Fig. 67f - Volta conica in torre rotonda. Sviluppo delle superfici flessibili per il taglio dei conci.

Bisogna ancora osservare che il ramo curvo deve essere diretto verso

lo spigolo opposto, in modo che formi degli angoli uguali con quello del letto di sopra e quello del letto di sotto, e ciò si può fare senza sforzo quando il ramo convesso della falsa squadra è esattamente uguale all'arco 1 2, perché, allora, non resta che fare in modo che l'angolo di un lato e l'estremità dell'altro siano posti sui lati opposti della doele.

Per mezzo della spennatura che si farà con questa falsa squadra (scalpello) e l'arco di testa della mensolina, si formerà l'intradosso conico a riga, come abbiamo detto all'inizio del Tomo IV [12], e dato che questa superficie incontra quella della torre tonda che essa penetra, formerà la curva a doppia curvatura dello spigolo di faccia, senza che sia necessario svilupparla per formarne una faccia flessibile, come fanno gli autori dei libri del taglio della pietra, ciò che non è né meno esatto né meno veloce e più comodo.

Il vantaggio che si ha inoltre in questa costruzione è che questa può sempre fungere da una qualche curvatura ellittica, sopra o sottoelevato che possa essere il sesto originario.

Esplicazione dimostrativa

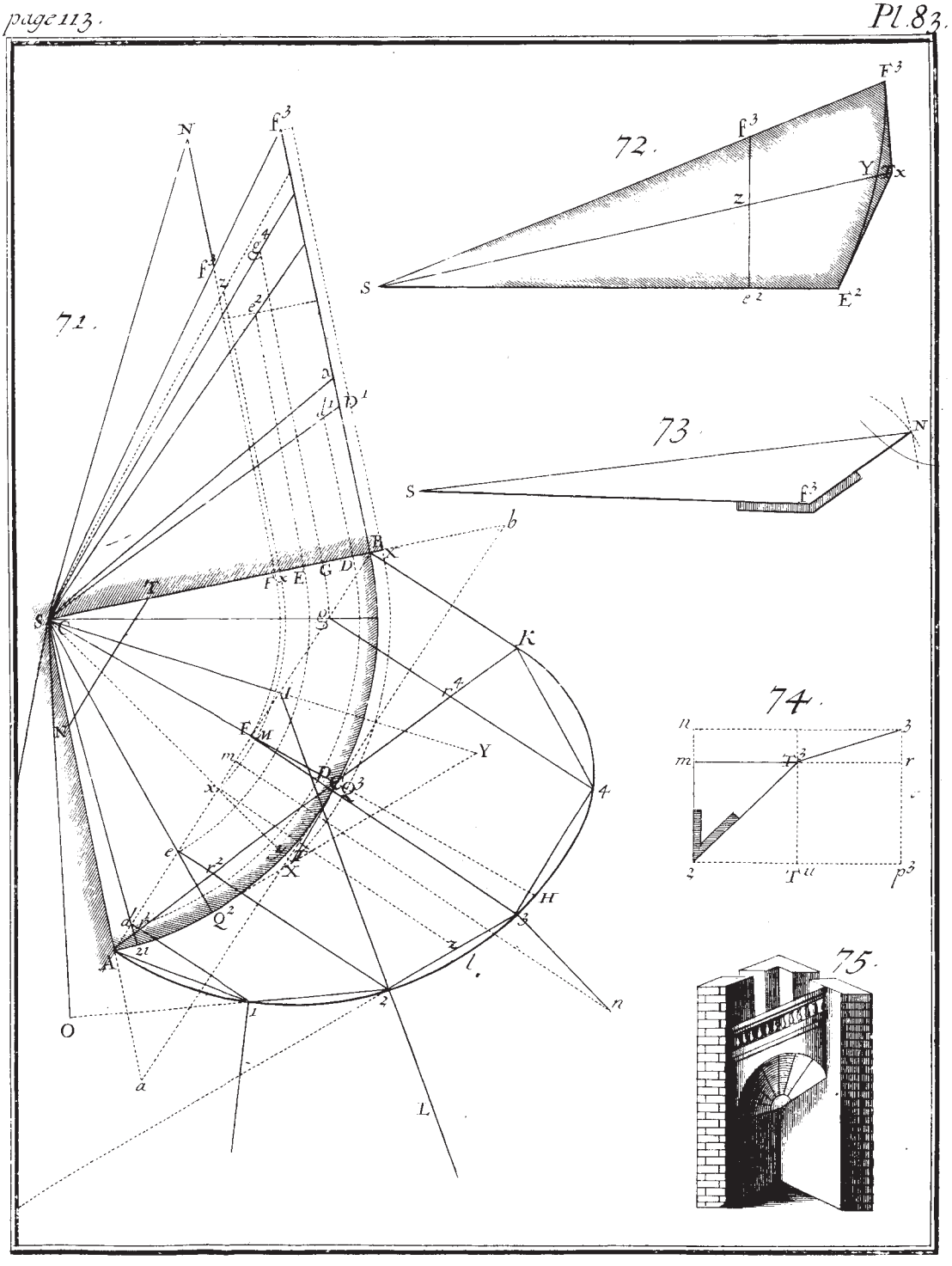
Per ridurre la volta di cui stiamo trattando alla regolarità di un cono retto, propriamente detto, quando il sesto originario è circolare o dritto, su una base ellittica quando esso è sopra o sottoelevato: abbiamo descritto questo sesto su un piano supposto perpendicolare al triangolo attraverso l'asse del cono ASB, che deve essere supposto in situazione verticale, ed abbiamo supposto altri piani verticali che passano attraverso le divisioni dei giunti di posa, come per le volte coniche ordinarie alle quali abbiamo aggiunto l'eccesso compreso nel segmento AEB, che rappresenta una porzione di cilindro, seguendo i principi che abbiamo dato nel Tomo III pag. 306 [13] per la formazione delle figure irregolari, attraverso l'inscrizione o la circoscrizione delle regolari.

Per far sentire il vantaggio dell'inscrizione piuttosto che della circoscrizione non c'è che da sottolineare che in questo modo abbiamo trovato nelle pose un mezzo per collocare il ramo della falsa squadra mista che serve a scavare l'intradosso, cosa che non si sarebbe potuta fare dopo che la superficie della torre tonda fosse stata formata, poiché in quel caso lo spazio del sesto originario sarebbe stato tolto.

Si vede che in questo tratto noi abbiamo alzato due false squadre in più che nelle trombe coniche ordinaria, dove non si ha bisogno che di false squadre di letto e di doele, e di testa e di doele .

Qui ne abbiamo formata una terza per la posizione della falsa squadra mista, per supplire all'arco che si descrive sulle teste piane, perché queste sono curve.

Ed infine una quarta falsa squadra per tracciare una linea orizzontale su ogni lembo della torre tonda inscritta in un prisma, per poterci servire dell'arco orizzontale della proiezione o base della torre.


page 113.
Pl. 83.
71.
72.
73.
74.
75.

SECONDO CASO.

Della torre conica rampante, in torre tonda o cava

La differenza tra questa traccia e la precedente consiste : 1° nel fatto che le imposte della trompe non sono in uno stesso piano orizzontale come nella precedente ma una è orizzontale come nella precedente e l'altra è inclinata all'orizzonte; 2° che il suo asse è inclinato all'orizzonte, da cui segue che il diametro di tutte le sezioni verticali attraverso piani perpendicolari alla direzione orizzontale di quest'asse sono ugualmente inclinati all'orizzonte; così la curva dello spigolo della doele, con la faccia della traccia precedente è l'incontro di un cono dritto il cui asse è orizzontale con un cilindro verticale e questo è l'incontro di un cono scaleno di base ellittica con un cilindro verticale, la qual cosa causa così poco cambiamento alla costruzione,che avremmo potuto rinviare i dettagli alla precedente, se l'una non servisse di chiarimento per l'altra ; poichè bisogna confessare che questa sorta di tracce sono sovente composte per mettere in imbarazzo il lettore e richiedere una grande concentrazione mentale a coloro che non siano ancora ben aggiornati.

Sia dunque (Fig. 71), ASB l'angolo rientrante nel quale si deve costruire una Trompe rampante in torre tonda, come è rappresentata in prospettiva alla Fig. 75.

Avendo diviso ugualmente in due l'angolo ASB tramite la linea SH che taglierà la proiezione del diametro AB in due in M si prenderà su questa linea SM prolungata al bisogno il centro della torre verso S se essa è convessa, o tutto al più fino ad M, come nella Trompe di Montpellier rampante verso H se essa è concava a seconda che l'arco ADB sia grande o piccolo o che sia dato dalla freccia DM; si è supposto qui il centro della torre in S per maggior semplicità della costruzione.

La linea SD sarà la direzione orizzontale dell'asse della Trompe e la sua proiezione ,da cui segue che essa sarà più corta di questo asse che è inclinato all'orizzonte.

Su AB come base dell'elevazione della faccia che sarà rappresentata rovesciata per comodità del disegno, si eleverà in B la perpendicolare BR uguale all'altezza del punto B dell'imposta rampante SB sopra il punto A dell'altra imposta di livello , e si tirerà la linea AR[1] , che sarà la linea di monta dell'arco di faccia rappresentata nel piano orizzontale dalla linea AB.

Si prenderà poi su sc prolungata la lunghezza cH uguale a MA , o più o meno grande per mezzo diametro coniugato ad AR, e dai punti AHR si descriverà la semiellisse AHR che sarà il sesto primitivo; la si dividerà nei suoi conci ai punti 1, 2, 3 e 4, di modo che la chiave cioè la corda H4[2] sia il più possibile di livello.

Fatta questa preparazione che è particolare per la Trompe rampante, il resto si farà nello stesso modo che abbiamo detto nel trait precedente con la sola differenza che invece che prendere le altezze delle divisioni del sesto primitivo sul suo diametro rampante AR, le si prenderà più in basso sulla proiezione orizzontale AB , alle perpendicolari d1, e2, F3, g4, che comprendono oltre le ordinate al diametro $4r^4$, $3r^3$, $2r^2$, le altezze dei punti r^1, r^2 ecc.,sull'orizzontale BA, in modo che si debba considerare la figura mista AHRB come il sesto primitivo composto da una semiellisse AHR, e dal triangolo di monta ARB.

Poiché le lettere della figura della proiezione orizzontale sono relative a quelle dei profili, sarà facile riconoscere la costruzione della traccia precedente senza che sia necessario ripeterla.

Si è tracciato alla Fig. 72 un pannello di doele piatta del terzo concio la cui proiezione orizzontale è il triangolo misto sQ^zyQ^3 inscritto nel trapezoide sQ^2 TQ^3, dove la linea sT^x è il valore della linea ST della Fig 71.

Si è anche tracciato alla Fig.73 il triangolo sN f^3 , che dà l'angolo sf^3N per posizionare il braccio diritto della falsa squadra mista di letto e di doele formata al sesto primitivo sull'angolo misto n3l2, come si è fatto alla Fig. 67 in $sf^{2}7^{0}$.

Infine si è espresso alla Fig. 74 il modo di tracciare delle orizzontali sui lembi 2u e un 3 , come si è fatto alla traccia precedente sopra alla Fig. 70 e più in basso alla Fig. + per lo stesso argomento. Si sottolineerà qui solamente che a causa della differenza della monta i lembi allo spigolo della doele piatta sono inclinati in maniera molto diseguale, cosa che non succede a quella della Trompe precedente.

Osservazioni su questa costruzione.

Seguendo il metodo della riduzione dei corpi tondi in poliedri non ci si occupa dei pannelli di sviluppo dei quali si servono il P. Deran e M. de la Rue, i quali pannelli possono servire solo a verificare in parte ciò che è stato già fatto , poiché dal momento che sono stati fatti su dei materiali flessibili come cartone , lamine di piombo ecc., per poter essere applicati su delle superfici curve si suppongono già fatti , la qual cosa è tuttavia una parte della questione, poiché si cerca in primo luogo il mezzo difarli, per tracciarvi lo spigolo d'incontro della volta conica.

[1].Nella figura71 del testo originale c'è una K al posto della R.

[2]. Nel testo originale h è minuscolo.

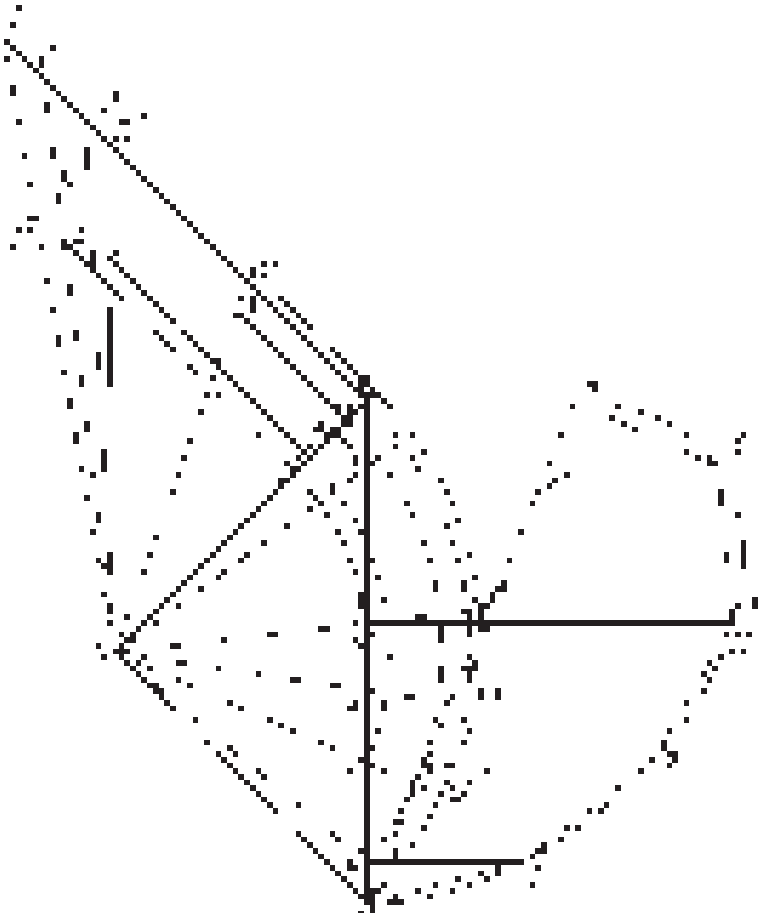


Fig.71a. Costruzione della trompe conica in torre tonda.

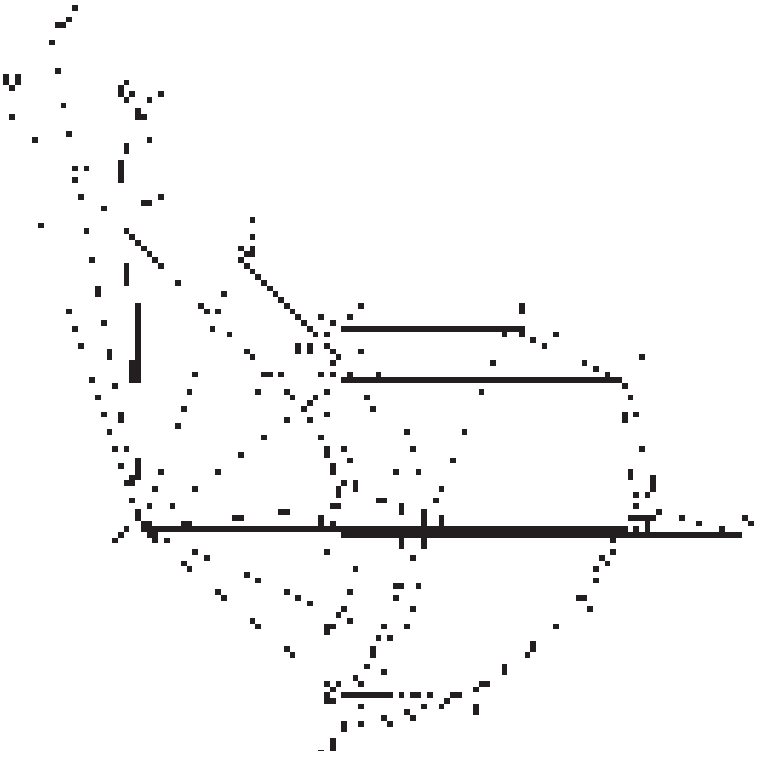


Fig.71 b.Costruzione della curvatura dei conci.

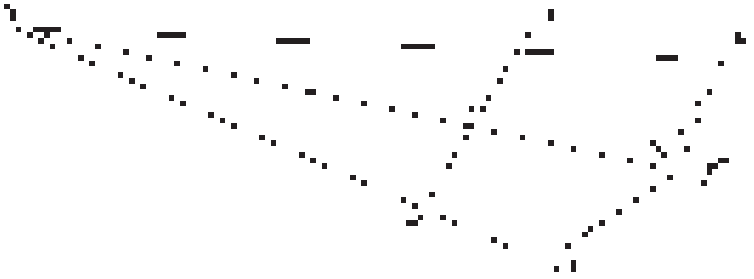


Fig.72. Pannello piatto di doele relativo al terzo concio della *fig 71*.



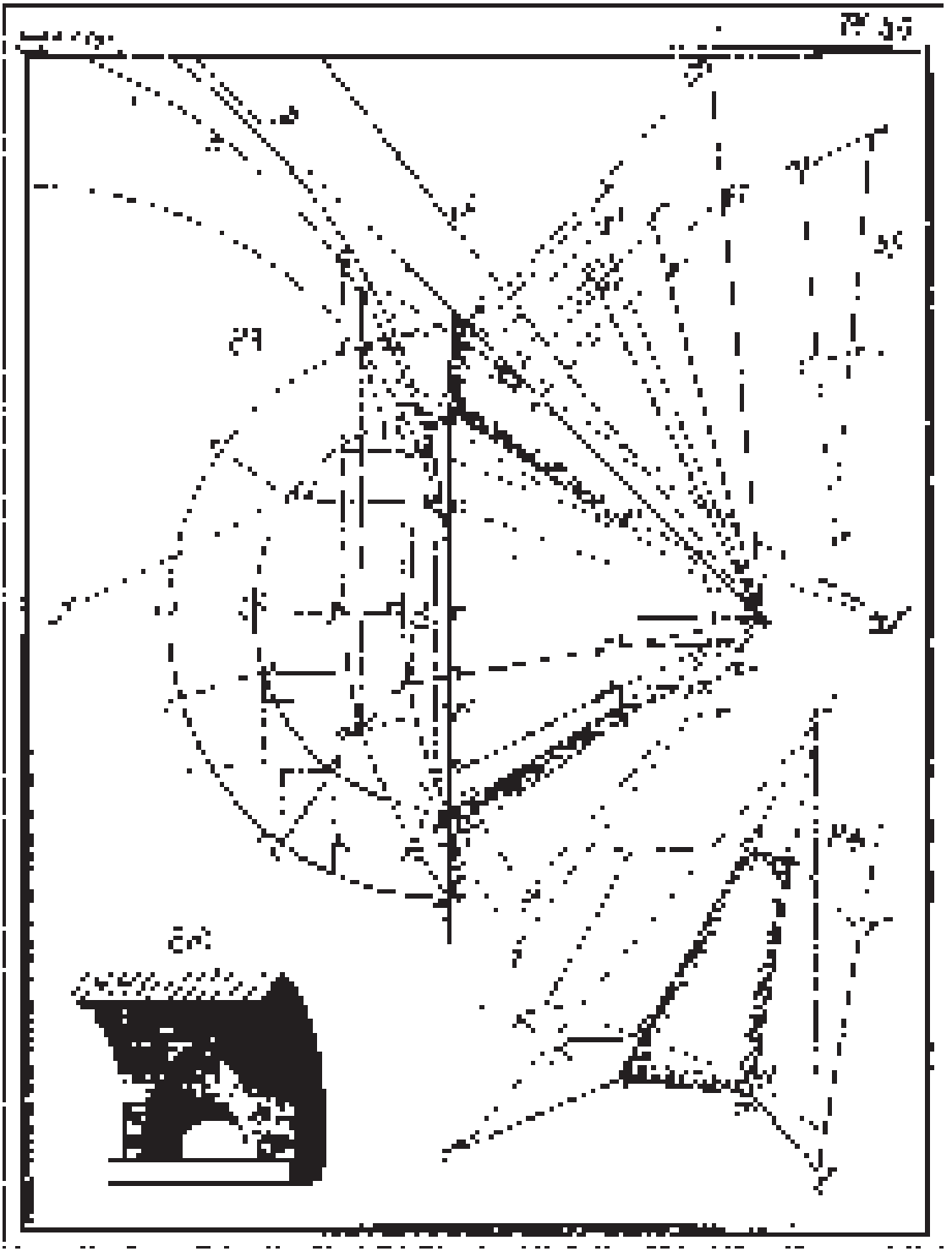
Fig.73. Tracciamento del triangolo per posizionare il braccio dritto della falsa squadra mista di letto e di doele.[3]



Fig.74. Metodo di tracciamento delle orizzontali ai lembi *2u* e *un*[3]. [4]

[3] Vedi Planche 82, fig 67.

[4] Vedi Planche 82, *fig.70* e *fig. +*.



Terza situazione delle Volte Coniche, rispetto alle Cilindriche, quando gli assi delle due Volte sono orizzontali.

ESEMPIO

Lunetta strombata, Pennacchio o Tramoggia che collega una Volta a botte.

SIA, ***fig. 83***, l'angolo rientrante *ASB*, la base orizzontale di una Volta conica che collega una volta a botte, il cui arco verticale *CR* è una parte dell'arco dritto. Su *AB*, come diametro, si descriverà, ordinariamente un mezzo cerchio che serve come arco primitivo; noi mostreremo qui solo la metà *Bh* per non confondere il Tratto, perché supponendo l'asse del cono *SC* Dritto sulla base *AB*, una metà della base circolare o Ellittica sarà uguale all'altra.

AVENDO divisi il quarto di cerchio circolare *Bh* nei suoi Conci come qui in due & mezzo per cinque Conci, ai punti *3*, *4*, & avendo abbassato sulla base *AB* delle perpendicolari che la taglieranno nei punti *TV*, si tracceranno da questi punti & dal vertice S, delle linee *ST*, *SV*, prolungate oltre *T* & *V* all'infinito; queste linee saranno la proiezione orizzontale dei giunti, di cui si determinerà la lunghezza per mezzo della traccia che si farà come segue.

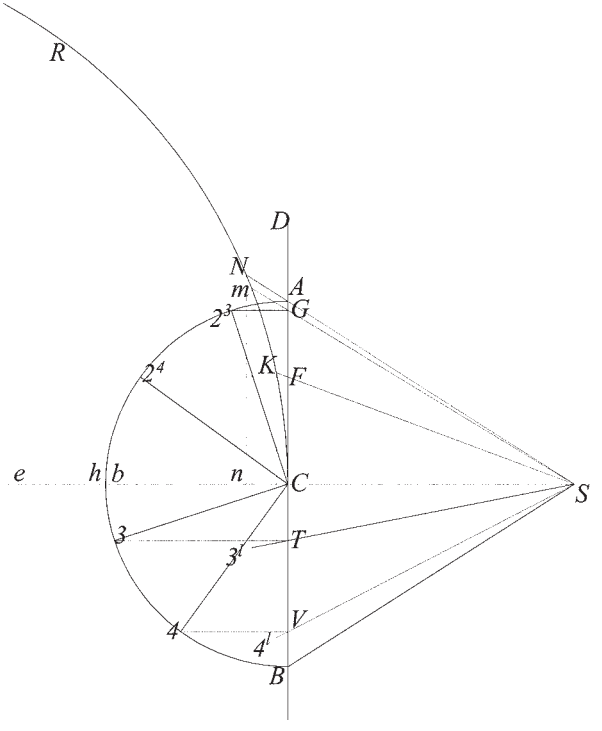


Fig. 83a

AVENDO prolungato l'asse *SC* all'infinito verso *e*, si prenderà su queste linee a scelta un punto *C*, come centro & per raggio *CA* o *CB*. Si ripeterà una metà del sesto iniziale in *bH*, effettuando le divisioni *B*, *4 3* in *b* 2^4&2^4 2^3, attraverso le quali si condurranno le parallele alla base *eC* fino all'incontro della perpendicolare *CD*, che la divideranno in *F* & in *G*; in seguito dal vertice *S* & dai punti *F* &*G* si condurranno delle linee *SG*, *SF*, prolungate fino all'incontro dell'arco di volta *CR*, una in *K*, & l'altra in *m*. Si prolungherà così *SA* in *N*; le linee *SK*, *Sm* costituiranno le proiezioni verticali dei giunti delle divisioni *3*, *4*, del sesto iniziale, & delle loro corrispondenti & uguali, che serviranno a determinare le lunghezze delle proiezioni orizzontali; perché se dai punti *K* & *m* si conducono delle parallele ad *AB*, come $K4^l$, $m3^l$, esse taglieranno le proiezioni orizzontali degli stessi giunti ai punti, come se *S* è la proiezione orizzontale, di cui *Sm* è la verticale, & $S4^l$ è quella dello stesso giunto di cui *SK* è la verticale; ora né l'una né l'altra di queste proiezioni è uguale al vero giunto, ma esse servono a trovarli in un secondo profilo, come abbiamo spiegato parlando dei pennacchi.

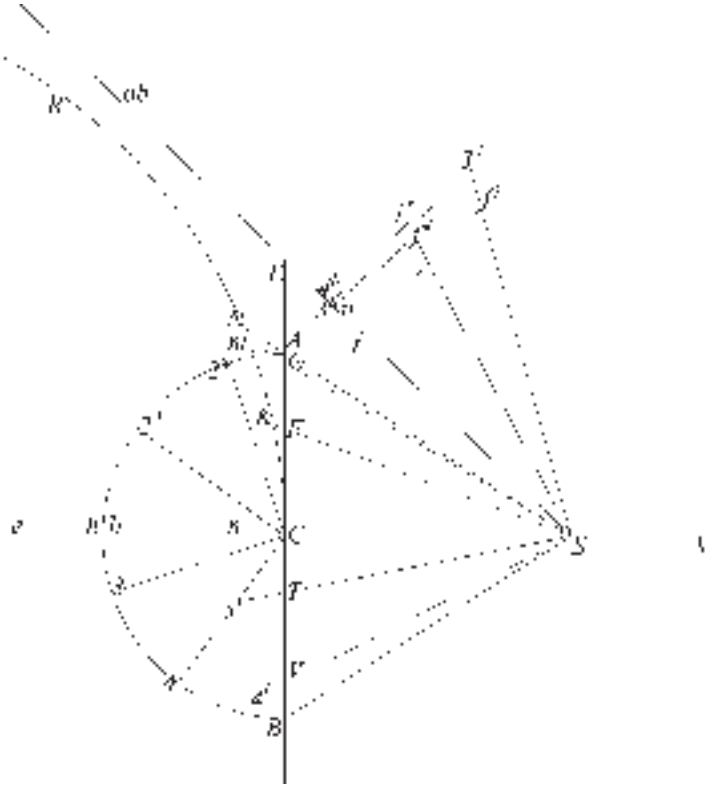


Fig. 83b

SIA una linea dritta presa a scelta SO^b presa per base del secondo profilo, si porterà su questa base la lunghezza *ST* in *St* & $S3^l$ in $S3^b$, allo stesso modo *SV* in *Su*, & $S4^l$ in $S4^b$, & attraverso i punti *t*, *u*,3^b,4^b, si eleveranno

delle perpendicolari, sulle quali si porteranno le altezze corrispondenti a questi punti, cioè *T3* in tf^3, *V4* in uf^4, & per i punti *s*, f^3, si traccerà la linea $sf^3 3^x$, che taglierà la perpendicolare $3^b 3^x$ al punto; la lunghezza $S3^x$ sarà quella del vero giunto, come $S4^b$ prolungata darà $S4^x$ per i veri giunti di letto, la cui proiezione è $S4^l$.

TUTTI i giunti che noi abbiamo cercato fino ad ora fanno soltanto l'intradosso & bastano per fare i modelli di intradosso piatto; ma per formare il modello per il taglio della pietra che danno anche i giunti di testa, bisogna fare un estradosso *E 8 7 D*, e cercare le proiezioni dei giunti che devono passare per i punti *7&8*, come abbiamo fatto per l'intradosso *Bh*, e non lo ripeteremo perché la figura & la quantità degli esempi dati sembra bastare.

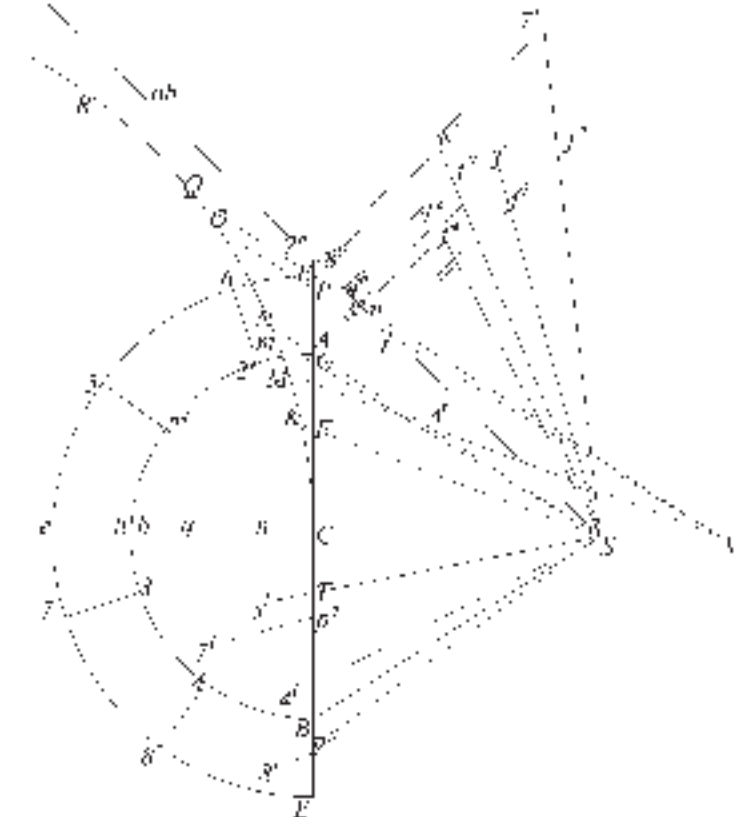


Fig. 83c

AVENDO trovato le proiezioni Xf^7, Xf^8, che danno per proiezioni delle superfici di letto i trapezi Sf^3f^7X & Sf^4f^8X, non si cercheranno le lunghezze dei lati Xf^7, Xf^8, ma delle diagonali Sf^7, Sf^8, perciò si porteranno sulla base del secondo profilo SO^b in $S7^b$, $S8^b$ & avendo portato la loro altezza prima sul profilo in, *Oo*, *Ll* sulle perpendicolari $7^b\ 7^x$ & $8^b\ 8^x$, si avranno i punti $7^x 8^x$, le linee $S7^x$, $S8^x$ saranno le diagonali cercate.

CON le tre linee date per i pannelli per il taglio della pietra, cioè i due giunti & la corda di una divisione del sesto iniziale, si giungerà a formare l'intradosso piatto & con le altre tre per i pannelli del taglio della pietra, farà un giunto di letto, una distanza formata dal pennacchio all'estremità della testa dell'estradosso, & l'intervallo dall'intradosso all'estradosso del sesto iniziale, si giungerà a formare il modello della pietra.

INIZIALMENTE, per i *modelli di intradosso* per esempio, per un secondo Mattone al di sopra dell'imposta indicata con *4 3*, si prenderà nel profilo la lunghezza Sf^3, o comunque nel pennacchio Destro Sf^4, con questo per raggio & da un punto s^d (***fig.84***), per centro si farà un arco, nel quale si inscriverà la corda 3 4 del sesto primitivo, & si tracceranno le linee $S3^f$, $S4^f$, sul cui prolungamento si tracceranno le lunghezze $S3^x$, $S4^x$ del profilo in $s^d 3^x$ $s^d 4^x$, la linea $3^x 4^x$ sarà la testa di smussamento dell'intradosso piatto.

PER trovare quest'intradosso non resta che sistemargli la testa $3^n\ 4^n$ della mensolina di volta, o della sezione di un muro se si tratta di una Lunetta, come dalla ***fig. 86*** si passa alla ***fig. 83*** in $3^n\ 4^n$, per sezionare il triangolo isoscele $s^d 3^n 4^n$, facendo un arco con il lato SA^t per raggio, che taglierà i lati $s^d 3^x s^d 4^n$ e, il trapezoide $3^n 3^x 4^x 4^n$ farà il modello che si cerca.



Fig. 84

ORA, per aggiungere *i modelli per il taglio della pietra* in sviluppo, si prenderà la parte della distanza del vertice *S* all'estradosso nel cono Dritto inscritto che è Sf^7 nel profilo, o Sf^8 con questa per raggio & dal punto s^d della ***fig.84*** per centro, si farà un arco in *f g*, e dell'intervallo *3 7* del sesto iniziale per raggio, & dal punto 3^f per centro, si descriverà un arco che taglierà il precedente al punto *f*, attraverso questo & attraverso il punto s^d si condurrà la direttrice $s^d 7^x$, che dovrà essere uguale al $S7^x$ del disegno & per i punti 7^x & 3^x si traccerà una linea che farà la corda dell'Arco Ellittico, che è la sezione del piano di letto del pennacchio

nella volta che collega, & se si trova la linea $7^x\,7^n$, parallela a 3^x3^n, & 7^n3^n parallela a $f3^f$, si avrà il trapezio $7^x\,7^n\,3^x\,3^n$, che sarà modello per il taglio della pietra che si cerca.

CON lo stesso modo si troverà quello del piano di sotto $4^n\,8^n\,8^x\,4^x$ com'è facile concepire grazie alle linee relative a quelle del profilo.

Applicazione del Disegno sulla pietra

SI potrebbe realizzare questo Disegno attraverso dei Conci, come abbiamo fatto quello all'incontro di una volta in discesa come una volta a botte; sarà facile scorgere la possibilità paragonando quello che abbiamo detto a pagina 63 come il disegno complessivo.

I fianchi della Volta sarebbero appoggiati meglio & meglio legati al pennacchio; ma per variare un pò le istruzioni, noi ne presenteremo qui una dove, non è necessario cercare la falsa squadra di inclinazione dei

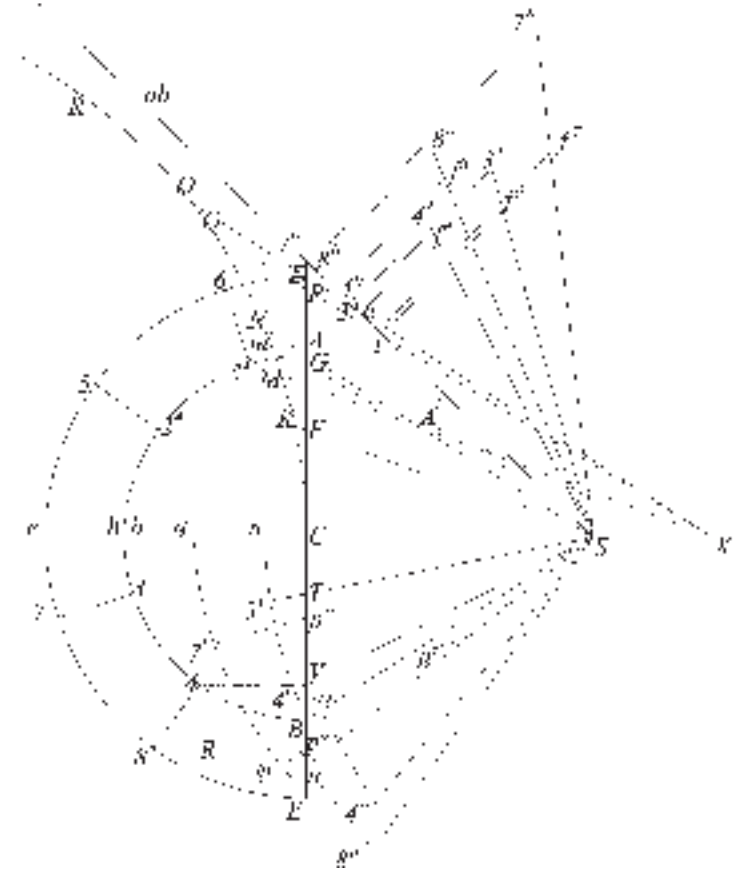


Fig. 83d
due intradossi sullo spigolo come nel Disegno citato.

CHE formerà un modello di falso taglio inclinato all'orizzonte, ma perpendicolare al piano verticale, passante per l'asse del pennacchio *SC*, che avrà la sua testa di volta, per poter applicare le false squadre dei giunti di letto in profilo, con l'arco-Dritto di volta.

PER esempio, per formare quello del secondo concio *3 4*, che è designato per una testa *4R* parallela ad *AB*, & compresa tra gli appiombi Dell'intradosso *4V*, & di estradosso *8u*.

SE il cono iscritto è Dritto, questo modello sarà un triangolo che potrà sempre avere per uno dei suoi lati la lunghezza dell'imposta *SA* o *SB*; se il cono non è dritto circolare, ma il sesto primitivo è Ellittico, si cercherà il valore delle proiezioni con delle linee che avendo portato *SV* in *So*, si farà la perpendicolare $o4^o$ uguale a *4V*, la linea $S4^o$ sarà il valore cercato.

ALLO stesso modo sopra *Su* proiezione dell'estradosso 8, si innalzerà una perpendicolare $u\ 8^o$ uguale alla precedente *4V* oppure *Ru* con queste due lunghezze, & l'intervallo orizzontale *4R* oppure *Vu*, si farà un triangolo $s^o\,4^u\,8^u$ di cui si farà uso, come spiegheremo.

AVENDO steso un rivestimento per sistemarvi il pannello di intradosso piatto $3^n\,3^x\,4^x\,4^n$ si traccerà il contorno & i punti di riferimento della testa del cono Dritto inscritto $3^f\,4^f$.

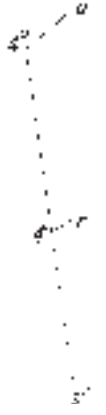


Fig.85
SI formerà in seguito il piano di sopra con la falsa squadra di letto & di intradosso trovato come è stato detto nel Tomo precedente, nel Tratto del pennacchio destro a pagina 209.

SI applicherà su questo secondo rivestimento il pannello di sopra $7^x\,7^n$ $3^x\,3^n$, con i punti di riferimento del cono Dritto iscritto $f3^f$, per tracciare il contorno & segnarvi questi punti.

IN SEGUITO invece di formare il vero letto di sotto, si formerà il falso piano, abbattendo la pietra con una falsa squadra *3 4R*, di cui una delle nervature sarà posata su punti di riferimento 3^f 4^f e l'altra sarà d'allineamento con questi due punti & il punto di riferimento del piano di sopra *f*; così si formerà un terzo rivestimento, sul quale si applicherà il pannello 4^u *u* s^o della figura 85 usando il punto 4^u sullo spigolo, & la linea 4^u s^o lungo lo stesso spigolo per tracciare la linea *u* 4^u alla quale si condurrà attraverso il punto 4^x del pannello dell'intradosso piatto, una parallela che servirà alla posizione della falsa squadra mista *SkQ* del primo profilo, che è l'angolo del giunto di letto s*k*, con l'arco-Dritto della volta *KQ*.

GRAZIE a questa falsa squadra che si poserà ad angolo retto su questa linea che è in orizzontale, si formerà l'intradosso concavo della volta, scavando, seguendo la nervatura curva convessa, una spennatura al punto 4^x che è il più basso, & se si vuole una seconda a lato, tirando verso l'estradosso, il che darà un secondo arco parallelo al primo; in seguito si abbatterà la pietra seguendo queste spennature, con la riga posata a squadra, che si farà scivolare sui punti, come si ha abitudine di fare nei segmenti cilindrici, e la testa sarà formata dal di sopra senza averne conosciuto la curva.

SI abbatterà in seguito il falso piano con la falsa squadra di letto del piano inferiore & dell'intradosso, che taglierà questa superficie cilindrica seguendo un arco Ellittico che si formerà senza averlo conosciuto.

SI sarebbe tuttavia potuto tracciarli, come si è fatto per le volte in discesa, che collegano un livello a pagina 64 ma si può farne a meno come si vede, & operare esattamente.

INFINE con la falsa squadra mista *3 4 8* o *4 3 7* prese di fronte al sesto primitivo, & la falsa squadra z^3 3^n 4^n, o z^4 4^n 3^n presi sull'arco A^t *h* B^t della mensolina di volta; si scaveranno le due teste di intradosso conico sotto l'intradosso piatto, osservando esattamente di posare queste squadre, l'una sui tre punti di riferimento *f* 3^f 4^f, l'altra sulle linee 7^n 3^n 4^n, per farvi delle piumate vuote, sulle quali si farà scivolare la riga per formare la superficie conica, com'è stato detto all'inizio del secondo Tomo, per la formazione di questa specie di superfici.

Spiegazione Dimostrativa

LA formazione della Volta conica è visibilmente la stessa di quelle semplici, di cui si è parlato nel Tomo precedente, grazie a una piramide inscritta nel cono; ma come la testa o crinale di questa Volta è a doppia curvatura abbiamo inscritto all'interno il cono Dritto, al di là del quale è una parte tagliata che è ben determinata dalla proiezione verticale fatta su un piano parallelo all'asse del cono; ma non le lunghezze dei giunti che vi sono comprese, perché la loro direzione è inclinata all'asse da dove esse traggono la loro origine alla sommità del cono, questa proiezione non basta per determinarne le lunghezze, ecco perché si è obbligati a fare un secondo disegno, che dà valore dei giunti fino al crinale da dove tagliando la parte del cono Dritto inscritto, il resto è l'eccesso della Volta sul pennacchio Destro semplice.

U S O.

Nonostante questo Disegno non sia messo in pratica per i pennacchi, è molto frequente per le Lunette che si fanno spesso strombate per dare o ricevere più luce, come nelle navate delle chiese o dentro le vetrate. Se ne vedono simili anche nelle fortificazioni come nei noccioli delle torri bastionate del Nuovo Brifach, o i magazzini, che sono praticati, e illuminati da una lunetta conica ribassata, che collega la volta del sotterraneo che gira grazie a un pannello attorno al nocciolo.

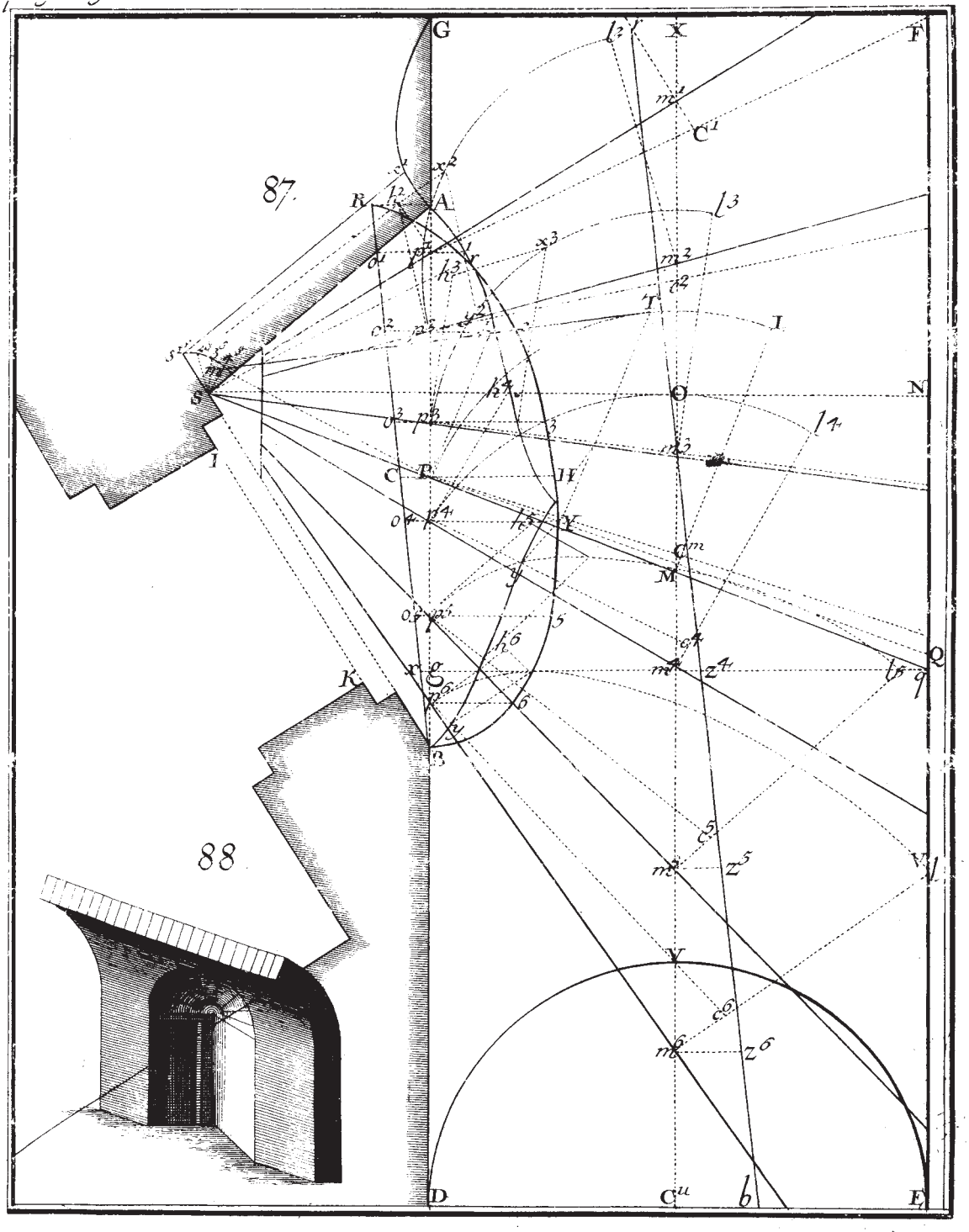
Noi dobbiamo aggiungere qui un'osservazione su un cambiamento che deve sopraggiungere allorché la Volta conica è in situazione contraria a quella del Disegno precedente, cioè allorché la sommità del cono, che era al di fuori della volta in *S*, è all'interno, per esempio in *S*; allora la strombatura che si faceva dal di fuori all'interno, si fa al contrario dall'esterno all'interno come fanno a volte le tramogge.

Risulta da questa differenza di posizione del cono, che supponendo tutte queste cose uguali, bisogna che la proiezione dello spigolo & di conseguenza lo spigolo stesso sia fatto in senso contrario, girando in concavo quello che era convesso, perché mentre la chiave di volta era allungata della quantità *AN*, si trova qui accorciata dalla quantità *A*, la cui proiezione *gC* è minore di *Cn*, nonostante si supponga il cono uguale; in questo caso sembra conveniente operare per circoscrizione, facendo passare il cono Dritto dalle imposte *AB*, che sono più lunghe della chiave di volta.

Se si fa attenzione al Disegno di cui si tratta, tanto nell'uno che nell'altro caso, si riconoscerà che è stato già dato qui anticipatamente, & sotto un altro nome, quando noi abbiamo parlato dell'incontro dei coni con i cilindri verticali; perché se invece di considerare la volta come orizzontale, la si suppone in una situazione verticale, si riconoscerà che l'arco *CQt*, che era un profilo, diventa senza alcun cambiamento intrinseco, il piano orizzontale, & che il punto *N* che è qui il profilo del mezzo della chiave di volta, diventa una delle imposte, in modo che, il primo caso in cui la chiave era convessa al suo crinale diventa il secondo di cui noi abbiamo appena parlato, in cui lo stesso spigolo è concavo.

page 129

Pl. 86



Capitolo II

SULLE VOLTE COMPOSTE

QUARTO CASO

DALLE VOLTE CONICHE VERSO LE CILINDRICHE QUANDO GLI ASSI SONO INCLINATI ALL'ORIZZONTE

Esempio:
Pennacchio a tromba conica in un angolo ottuso, rampante per una imposta e da un livello all'altro raccordando una volta a botte in discesa.

Sembra dall'enunciato di questo trattato che le immagini di bizzarra difficoltà non possano essere di nessun utilizzo nella pratica, tuttavia io ho avuto occasione di eseguirle in una piccola lunetta, dove la discesa sotterranea è estremamente obliqua alla direzione dell'entrata di un piccolo magazzino, praticato in uno spessore di un arco rampante (o dello spiovente) come è esattamente illustrato nella ***Fig. 88****.*
Io ho detto di aver avuto occasione di mettere questo trattato in opera e non che io lo abbia fatto, perché io ho fatto le volte in laterizio invece che in pietra da taglio, che avrebbe causato una spesa inutile in un punto così poco frequentato, ma poiché il laterizio non è così comune ovunque, si può verificare che si abbia bisogno di pietra da taglio almeno per lo spigolo.
*Sia l'angolo (****Fig. 87a****) ottuso ASB, di cui ineguali AS, BS terminato in A e B attraverso la spalla GD, di una botte che scende da D verso G.*
Si tratta di coprire con volta il rinforzamento triangolare ASB in modo che la volta funga da appoggio per la volta a botte, ciò non si può far meglio che attraverso un pennacchio a tromba smussato, di cui l'imposta SA deve essere rampante da S verso A di tutta la quantità Ar=Ar che fanno nel piano di carta, muovendosi intorno al loro lato SA e BA finché non gli siano perpendicolari, i punti R e r si riuniranno in A e le linee Ar e AR non ne faranno più che un appiombo.
Ho detto che sarebbe necessario che la sola imposta SA fosse rampante, perché conviene che l'imposta SB, che deve servire da architrave alla porta IK, sia a livello.
Avendo dunque tracciato dal punto A, che si suppone a livello con B, una perpendicolare ad AR uguale alla differenza di livello data dalla discesa di B verso A; si tirerà RA che rappresenterà l'imposta della discesa della volta a botte, la quale RA deve essere presa per il diametro del sesto primitivo del pennacchio a tromba il quale deve rampare come l'imposta della volta a botte.
E' necessario arcare il netto diametro verticale CH di questo sesto per dargli la più grande altezza che sia possibile, al fine di appoggiare solidamente i fianchi della volta.
Si dividerà AB in due parti uguali in P e si tirerà PC perpendicolare su AB, che taglierà RB ugualmente in due nel punto C.
Dai punti S e P si tirerà la retta Sq , che taglierà le imposte della botte in discesa, l'una in P, l'altra in q.
La parte Pq sarà il diametro di una sezione ellittica della volta a botte se sarà a livello ma come sale da A verso B, se si tira qg perpendicolare su AB, si riconoscerà che il punto q deve essere al disopra di P, in maniera proporzionale alla distanza da P a g.
AR:: Pg . gx, così avendo fatto la linea qQ uguale a gx e perpendicolare su Pq ; si tirerà PQ, che sarà il diametro rampante della sezione della volta a botte, tagliato da un piano passante dalla sommità S del pennacchio a tromba e il centro della chiave.
Se si suppone la volta a botte in un pieno sesto DVE alla sua sezione verticale, la metà del diametro C^uV darà così quello dell'ellisse per PQ, così con i due diametri uniti Pq e C^uV trasportati in C^mL, e l'angolo PC^mL che fa il diametro rampante PQ con la verticale ML; si descriverà la metà ellittica PLQ presa dal probl.8 del secondo libro (1).

Sia dunque PTL il quarto di questa ellisse, si alzerà su SP, al punto S, una perpendicolare Sm uguale a CP e dal probl.III dello stesso libro, si tirerà da questo punto m una tangente al quarto dell'ellisse PTL che lo toccherà al punto T, da dove si abbasserà una perpendicolare su Sq, che la taglierà al punto x.
(1) Vedi la costruzione delle ellissi del problema 8 del secondo libro

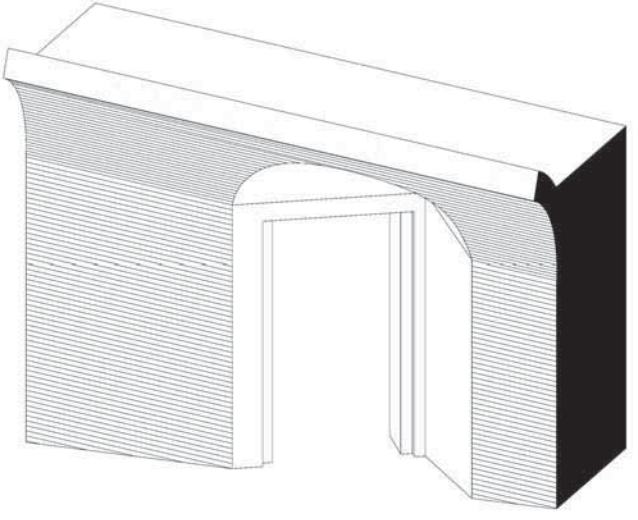


Fig. 88
Assonometria della volta descritta nel trattato.

La lunghezza PY esprimerà la più grande profondità della lunetta nella volta a botte seguente la chiave del pennacchio a tromba.

E se dal punto P si alza una perpendicolare su Pq, fin quando incontri la linee mT e H, la linea Ph sarà il semi-diametro verticale del sesto primitivo della volta che si cerca.

Con il grande diametro rampante RB ***(Fig. 87b)****, il semi-diametro verticale CH, che deve essere uguale a Ph e l'angolo della discesa R con*

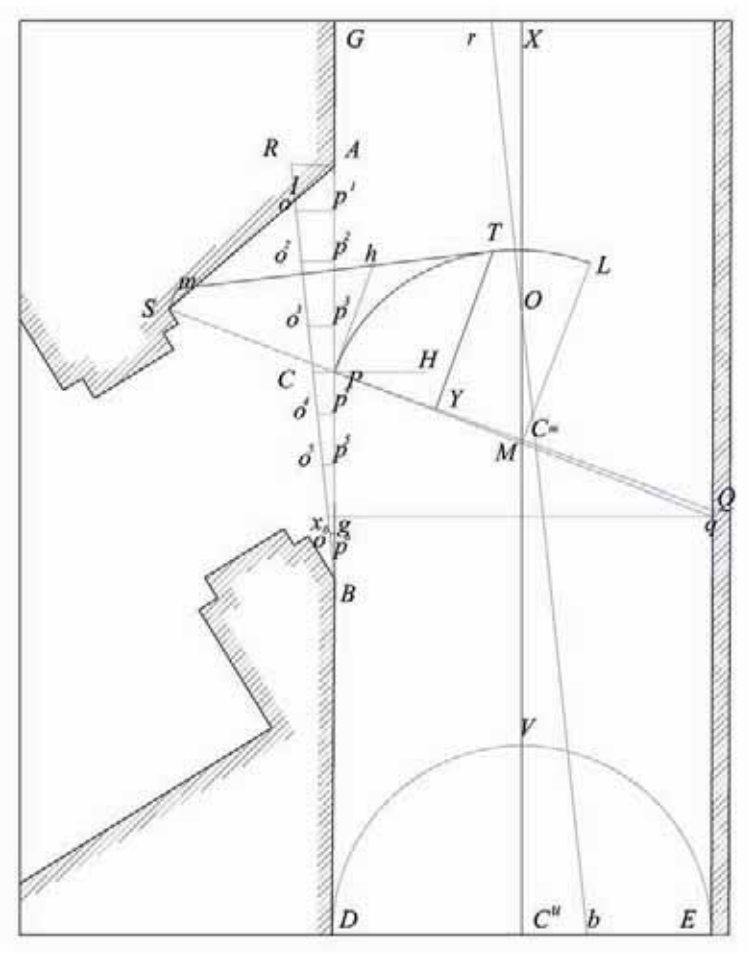


Fig. 87a
Costruzione della sezione centrale della volta.

l'appiombo Ch, si descriverà; dal problema 8 (1) del secondo libro; la semi-ellisse RHB, che sarà il sesto primitivo del pennacchio a tromba.

Avendola divisa in conci, per esempio in sette, dai punti 1,2,3,4,5,6, si tireranno delle perpendicolari su AB, le quali essendo prolungate, taglieranno il diametro rampante ai punti o^1, o^2, o^3,etc. e l'orizzontale AB ai punti p^1, p^2, p^3,etc.dai quali, insieme, dal punto S si tireranno tante linee fino all'incontro dell'imposta opposta della volta FE.
Per avere tanti diametri di sezione di volta per quante giunture ci sono, i quali diametri devono essere tutti rampanti, gli uni salendo, gli altri scendendo, ciò che è semplice vedere tirando dal punto S, parte più alta del pennacchio a tromba; una linea SN perpendicolare ai lati della volta a botte; le sezioni oblique fatte dal pennacchio a tromba, saranno in discesa da O verso X e in salita da O verso C.

Per trovare facilmente la lunghezza di ciascuna di queste ellissi rampanti, si tirerà dal punto O una linea rOb parallela ad RB e da tutti i punti m^1, m^2, m^3,etc. dove le proiezioni dei giunti prolungati tagliano la linea al centro XC^u , si tireranno delle perpendicolari che taglieranno la linea di rampa rOb ai punti z^1, z^2, z^3,etc.Da tutti i punti m si tireranno delle perpendicolari ml , alle proiezioni prolungate Sm, su tali Sm si porteranno le m^1, z^1, m^2, z^2,etc. in su da o verso C^u in giù da O verso X, le quali linee daranno i punti c^1, c^2, c^3,etc. , che saranno i centri di diverse ellissi che è necessario tracciare e di cui il diametro verticale C^1L^1, C^2L^2 è sempre uguale a C^uV.

I semi-diametri rampanti e verticali di tutte le semi-ellissi, essendo dati i loro angoli di coniugazione li descriveremo come dal problema 8 (1)del secondo libro, come li si vede dalla figura.
Non resterà altro che trovare l'incontro dei giunti del pennacchio a tromba con ciascuno dei quarti dell'ellisse.

Stereotomia

Su ciascuno dei giunti in proiezione, si alzerà una piccola perpendicolare al punto S, che si costruirà uguale alla distanza della linea AB del livello con il diametro RB rampante e una seconda perpendicolare su AB, al punto dove questa proiezione del giunto taglia la linea AB.
Così, per esempio, per il secondo giunto, Sp^2 , si eleverà al punto p^2 la perpendicolare p^2h^2 , che si farà uguale all'altezza di 2 o^2 del sesto primitivo RHB ; Infine dal punto S si traccerà la piccola perpendicolare S^2
uguale a p^2o^2 e dai punti 2 e h^2 si tirerà la retta $2x^2$, che taglierà il quarto dell'ellisse $p^2x^2l^2$ al punto x, da dove si abbasserà sull'orizzontale Sm^2 la perpendicolare x^2y^2 , che darà il punto y^2 della proiezione dell'incontro del giunto con la fermata della lunetta alla sua intersezione con la superficie della volta a botte, che si ricerca.
Si ricercano ugualmente tutti i punti x per avere le vere lunghezze dei giunti in Sx, e nei punti y per avere la curva RyYyBy della proiezione della fermata dell'incontro degli intradossi del pennacchio a tromba e della volta a botte.
Data questa proiezione e le lunghezze dei giunti, è visibile da tutti gli esempi dei trattati precedenti, per cui si ha tutto il necessario per formare i piani dell'intradosso , e cercare biveaux; e infine per tracciare le volte se lo si vuole, facendo un piano di posa orizzontale passante per AB o parallelamente ad AB al disopra dei conci che si avvicinano alla chiave e al disopra per i conci in R e rapportando a questo piano di supposizione tutte le altezze che cadono dal sesto primitivo sull'orizzontale, passando dal punto più basso del concio , tutto ciò è facile da concepire e da seguire, se si è compreso ciò che è stato detto in tutta questa seconda

parte sulle volte composte.

Esplicazione Dimostrativa

*Se si suppongono dei piani verticali **(Fig. 87c)** passanti dai giunti del pennacchio a tromba prolungate, è evidente che formeranno due sezioni, l'una triangolare nel cono, perché passano dalla sua sommità, l'altra ellittica nel cilindro, perché lo tagliano tutte obliquamente al suo asse, di conseguenza l'intersezione di tutte le ellissi che fanno negli stessi piani verticali, darà la forma di incontro delle due superfici da tutti questi punti*

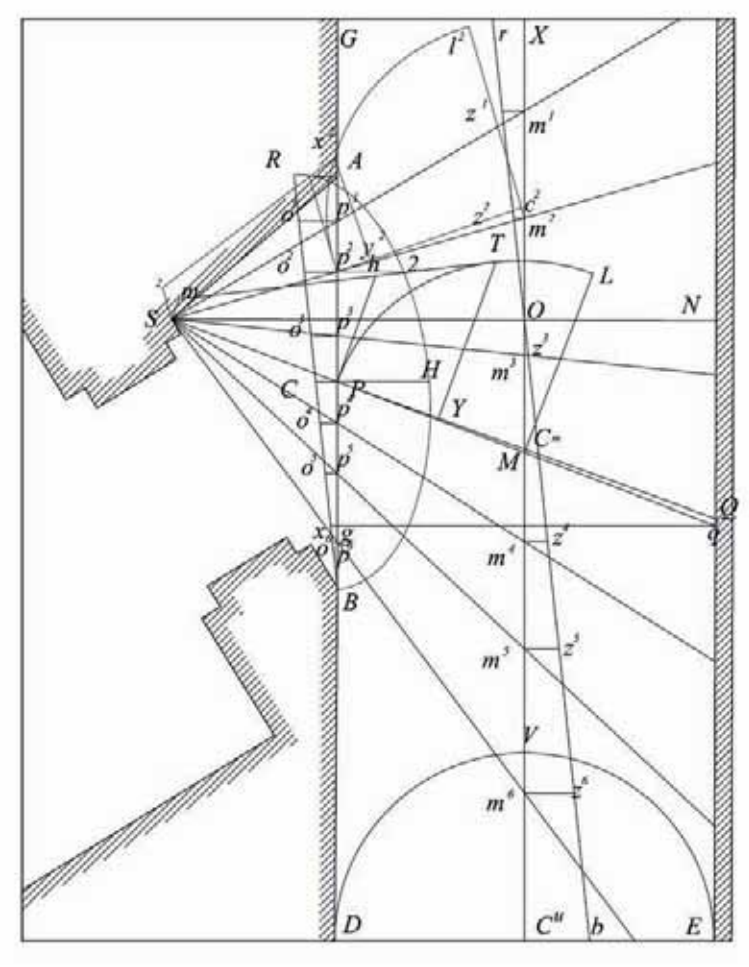


Fig 87b
Esempio di costruzione di una sezione della volta diversa dalla centrale.

di intersezione si tirino linee verticali xy, si avrà sul piano orizzontale, la proiezione di questa forma che è curva a doppia curvatura.
Ma poiché la volta a botte è supposta essere in discesa, ed il punto s a livello con il punto B, si ha che il piano del triangolo passa dall'asse, sarà inclinato sull'orizzonte secondo la linea AB, che si suppone a livello con B, che ciascuno di questi punti p si avvicinerà a B, dove S e B, sono a livello, questo perché noi abbiamo portato sul punto S le altezze op, op, che sottolineano quanto l'imposta sia al disopra del livello di S e di B. Dove si rimarcare che queste altezze anche intorno ad S danno dei raggi di una spirale $S_{1\ 2\ 3}^{1\ 1\ 1}$, *etc.*

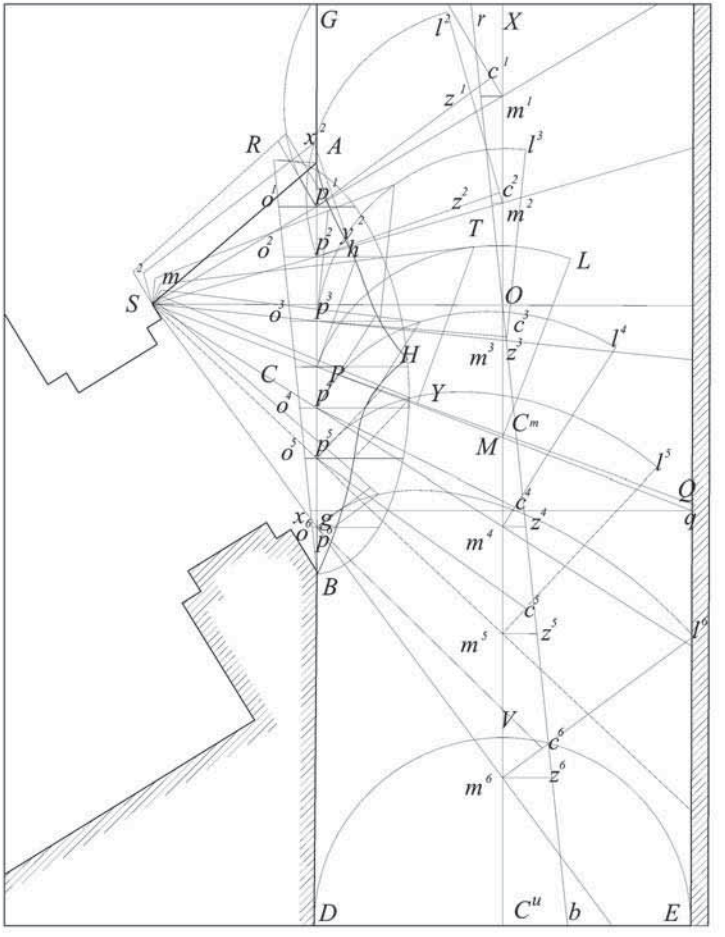
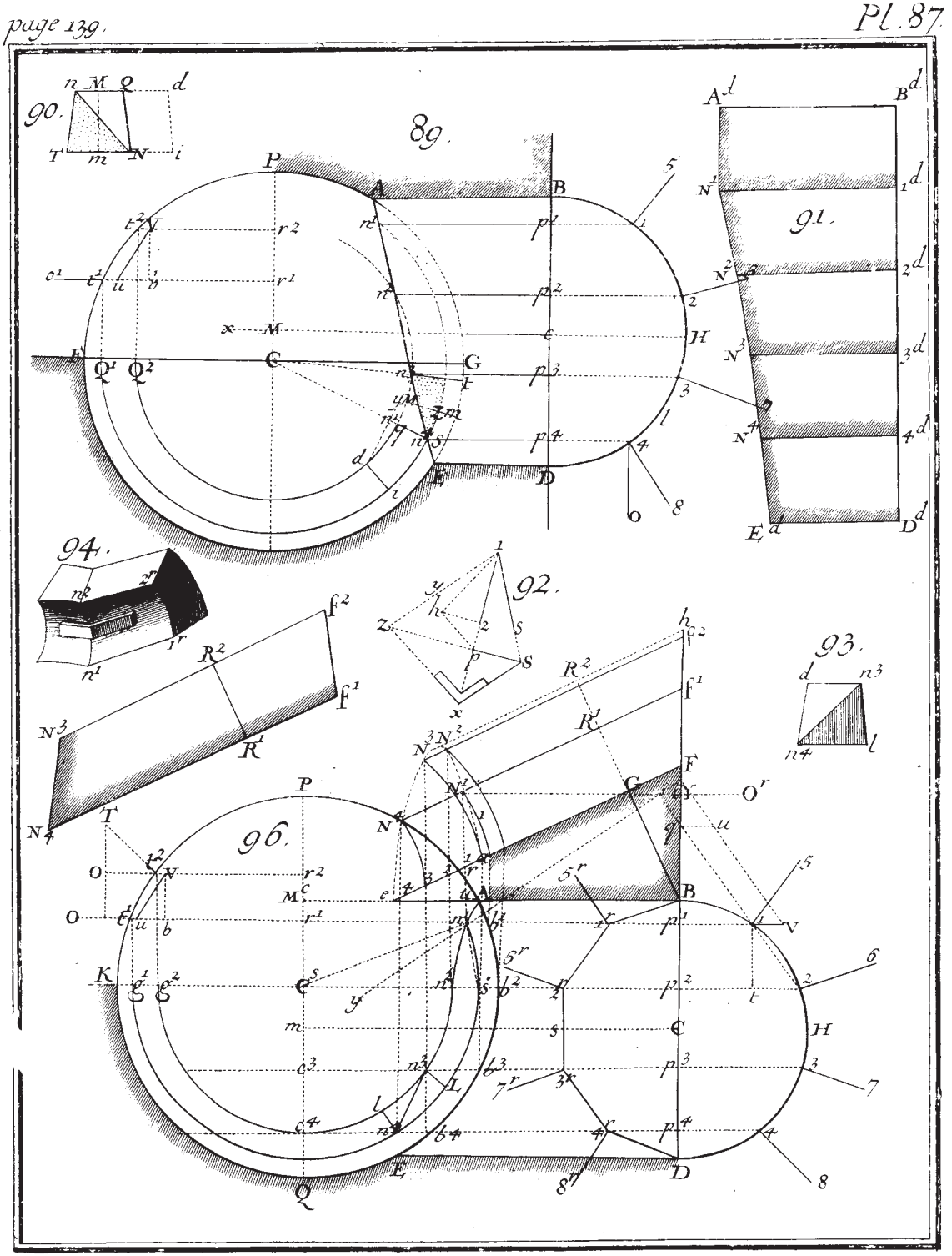


Fig. 87c
Costruzine finale della volta .

page 139.

Pl. 87



CAPITOLO TREDICESIMO

INTERSEZIONI DELLE VOLTE A BOTTE CON LE VOLTE SFERICHE

L'uniformità della sfera non offre molte combinazioni se si parla di intersezioni con le volte a botte. Non ce ne sono che due: è importante sapere se l'asse della volta a botte passa o non passa per il centro della sfera; ma se si fa attenzione alla disposizione dei suoi letti e alla posizione della volta riguardo l'orizzonte, si potrà moltiplicare i casi di queste intersezioni: quando la volta è verticale come una torre (2), quando è orizzontale (3), quando è inclinata in discesa. Andiamo quindi a trattare questi casi in particolare.

Problema V

ESEGUIRE UNA VOLTA A BOTTE IN UNA QUALSIASI POSIZIONE CHE LA COLLEGHI ALLA VOLTA SFERICA

Primo caso
VOLTA A BOTTE DRITTA O OBLIQUA CHE COLLEGA UN CU-DE-FOUR POSTO SULLO STESSO PIANO

Sia (***Fig. 89***) il trapezio ABDE, il piano orizzontale di una volta a botte posto sullo stesso piano, di cui il semi-cerchio BHD è l'arco e la linea cx il suo asse prolungato che non passa per il centro della circonferenza FPAE. Abbiamo considerato questo caso perché si presenta più difficile rispetto a quello secondo cui l'asse cx passa per il centro C della circonferenza. Nel primo caso infatti i conci di rinforzo sono uguali da una parte e dall'altra, in quello considerato invece sono tutti differenti.

Avendo diviso la nicchia (l'arco BHD) secondo i conci numerati 1,2,3,4, si traccia da questi punti le parallele ad AB fino ad incontrare la corda AE nei punti n^1,n^2,n^3,n^4.

Si disegni una sezione della circonferenza sul diametro FG parallelo alla direzione della volta a botte; nel punto medio eleviamo una perpendicolare CP sulla quale riportiamo le altezze della volta a botte $1p^1$, $2p^2$, chiamandole Cr^1, Cr^2 da dove si tireranno le orizzontali che taglieranno l'arco FP in t^1, t^2. da questi punti si tirano le perpendicolari sul diametro FG che lo tagliano nei punti Q^1 e Q^2.

Dal punto C, centro della circonferenza si tracceranno delle circonferenze concentriche che taglieranno le proiezioni di letto corrispondenti della volta a botte; l'arco inferiore che parte da Q^1 taglia la proiezione p^1 nel punto n^1 e il suo corrispondente proveniente dal punto p^4, che si suppone della stessa altezza di 1, nel punto n^4. L'arco passante per Q^2 taglia nello stesso modo le due proiezioni dei giunti di letto accanto alla chiave nei punti n^2, n^3.

Per i punti trovati A, n^1, n^2, n^3, n^4, E si tracci una curva che sarà la proiezione dello spigolo di rinforzo della volte a botte e della circonferenza, la cui curva è un ellisse. Invece di questa curva, sarà sufficiente condurre delle linee dritte, da un punto all'altro, che ne saranno le corde.

Non aggiungiamo la sezione della curva dello spigolo di rinforzo perché è inutile al fine di trovare le lunghezze dei giunti di letto già stati dati alla proiezione nel caso in cui la nicchia sia supposta sullo stesso piano. Non si tratta dello stesso caso se la volta a botte è in discesa, come vedremo nella parte successiva.

Dalla metà delle lunghezze dei giunti di letto AB, n^1p^1, n^2p^2, n^3p^3, n^4p^4, si costruiscono i pannelli dell'intradosso piatto della volta secondo il modo ordinario; per esempio per il quarto concio, avendo costruito a parte la corda 3 4, in 3^d 4^d (***Fig 91***) e avendo tirato delle perpendicolari dalle sue estremità 3^d, 4^d, si riporta su di una la lunghezza p^4 n^4, e sull'altra la lunghezza della proiezione p^3, n^3 ; il trapezio p^3, n^3, n^4, p^4, sarà il pannello che stiamo cercando. Tutti gli altri sono tracciati di seguito alla ***Fig. 91***.

Adesso, occorre fare il pannello dell'intradosso piatto di una parte della volta sferica che comprende il concio di spigolo di volta, la cui proiezione orizzontale è il triangolo n^3qn^4, compreso dall'arco n^3q, il segmento qn^4, proveniente dal centro C, e la corda n^3n^4, il segmento qn^4, comune ai due intradossi della volta a botte e della volta sferica.

Si unisce il centro C con le due estremità del segmento n^3, n^4 e dal loro punto medio si fa partire un segmento Mm, che si troverà all'interno delle due proiezioni di letto superiore e inferiore come n^3t, qn^4. si costruiscono poi le corde n^3q e tn^4 che taglieranno il punto medio Mm, prolungato in y e Z.

Questa costruzione è stata fatta sul piano orizzontale; adesso ne faremo un'altra sulla sezione: si porterà la freccia di volta, il segmento My in t^2V, e zm in t^1u sull'orizzonte t^1r^1 e t^2r^2 e infine si unirà v e u costruendo il segmento vu.

Si determinerà poi la lunghezza del concio della volta sferica che può estendersi oltre il segmento che costituisce lo spigolo di volta, naturalmente in modo proporzionale alla grandezza della pietra che si vuole impiegare e alla lunghezza qd; per rendere più facile l'esempio, comprendiamo soltanto la parte dello spigolo di volta n^3q.

Si disegnerà a parte la corda tn^4 e si chiami NT (***Fig .90***); dal punto medio di questo segmento mandiamo una perpendicolare Mm della stessa misura di Vu e dall'estremità M trovata tiriamo una parallela a TN e prendiamo su di essa la lunghezza MQ uguale a mq, della figura 89 e Mn uguale a Mn^3. Il trapezio QnNT sarà quello dell'intradosso piatto di un concio della volta sferica, dal quale occorre togliere il triangolo TnN ottenuto dalla diagonale nN, per ricavare la volta a botte posta sullo stesso piano.

Se il concio fosse più lungo, si potrebbe aumentare le lunghezze qd e n^4i determinata sul piano orizzontale in fig. 90 e chiamarle Qd e Ni; in tal caso dovrebbe costruire le corde dn^3 e it, che allungherebbe le frecce di volta e modificare anche il segmento Vu della sezione che diventerà più lungo di t^2, t^1. Il pannello sarebbe comunque costruito.

APPLICAZIONE DEL TRATTATO SULLA PIETRA

Avendo eretto un paramento ipotizzato orizzontale, vi si tracceranno gli angoli retti qn^3p3, uno formato dalla corda qn3 con n3, proiezione del giunto di letto della volta a botte, l'altro n^3qs formato dalla stessa corda con il giunto della volta sferica sulla quale si riporta la proiezione bu che servirà per condurre una parallela a questa corda. Seguendo la corda Vu si abbatterà la pietra con il calandrino dell'intradosso piano e dall'orizzonte VuO^1 per formare l'intradosso piano della volta sferica. Su questa si applicherà il pannello che è stato fatto alla fig. 90 per tracciarne il contorno e formare il concio in sezione della volta sferica con i suoi letti, come è stato detto parlando delle volte semplici, tomo 2 pg. 325.
Nello stesso modo se la volta non venisse intersecata da una volta a botte à la riserva di letto di sotto che non occorre ancora fare, perché il piano supposto orizzontale, che è il primo paramento che si costruisce, deve servire per la formazione degli intradossi.
Per mezzo di questo paramento si formerà la parte della volta a botte che termina all'intradosso sferico nel modo in cui si è appena spiegato.
Cioè con il calandrino dell'intradosso e dell'orizzonte O43 ma con questa differenza: non sarà necessario fare una preparazione dell'intradosso piano; si formerà questo calandrino misto immediatamente, avendo un braccio diritto O4 e uno curvo 4l3.
Mandando il braccio curvo sul paramento supposto orizzontale, perpendicolarmente alla linea n^4p^4, tracciata dal punto n^4 e parallela a n^3p^3, si abbatte la pietra seguendo l'esigenza del braccio curvo 4l3 che deve essere sempre perpendicolare alla stessa linea.
I due intradossi cavi sono stati trovati, adesso si prenderanno i calandrini misti dell'intradosso e del letto di sotto e seguendo i quali, si abbatterà la pietra per formare il letto piano della volta a botte e il letto conico convesso della volta sferica; Dalla loro intersezione si otterrà lo spigolo di collegamento dei due letti e il concio sarà completato.

NOTA

Si vede che da questo metodo non si ha bisogno né di pannelli dell'intradosso della volta a botte, né di pannello di letto di una e dell'altra volta; ciò rende l'operazione molto semplice e più comoda rispetto a quella che si trova nei libri che trattano il taglio della pietra.

VOLTE COMPOSTE

Primo caso
VOLTE A BOTTE IN DISCESA DRITTA O A SBIECO CHE INCONTRA UNA VOLTA SFERICA

Sia ABDE (***Fig. 96)*** la proiezione orizzontale della volte a botte e il cerchio KPAE la base orizzontale della volta sferica. Su BD, diametro del centro primitivo C, si descriva il semi-cerchio BHD e la semi-ellisse BSD, uno rappresenta la curvatura di faccia, l'altro l'arco dritto. Dividendo la figura per i suoi conci otteniamo i punti 1, 2, 3, 4; si conduca da questi punti o dalle loro proiezioni p^1, p^2, p^3, p^4 (se BD fosse obliquo), le parallele alla direzione della discesa che taglieranno il diametro PQ della circonferenza (perpendicolare a questa direzione) nei punti C^1, C^2, C^3, C^4 e la circonferenza stessa nei punti b^1, b^2, b^3, b^4.

Si farà in seguito il disegno della discesa sul lato BA prolungato fino a M, punto di incontro con il diametro QP. Dal punto E si manderà una perpendicolare al segmento MB che lo taglierà nel punto e. Da e partirà l'angolo di rampa BeF formato dal lato eF che taglia DB prolungato fino a F. La faccia di discesa si suppone perpendicolare alla direzione orizzontale; se non fosse così occorrerebbe riportare sempre BF perpendicolare su eB.
Per terminare questo disegno si porterà su BF prolungato, le altezze dei segmenti $1p^1$, $2p^2$ e li chiameremo fF^1, Ff^2 da dove si traccerà le parallele alla linea di rampa F^1, N^4, F^2, N^3 prolungate in modo indefinito.
Se l'arco diritto BSD, lo si è considerato curvatura primitiva, si dovevano riportare le altezze $1p^1$ e $2p^2$ su una perpendicolare alla rampa in GR^1 e GR^2 e poi si avrebbe continuato nello stesso modo. In seguito, dal punto M, punto in cui la base Be taglia il diametro della sfera PQ, e da tutte le distanze cb, si tracci degli archi di cerchio che tagliano le sezioni dei giunti della discesa nei punti che daranno in anticipo le coordinate dei costoloni della volta.
Così dal punto Mc con raggio c^1b^1, si descriverà l'arco N^11che taglierà il primo giunto f^1N^4 nel punto N^1. Dallo stesso centro Mc con raggio di lunghezza c^2b^2 si descriverà un secondo arco che taglierà il secondo giunto di letto f^2N^3 nel punto N^2, dallo stesso centro e dal segmento c3b3, si traccerà un arco che taglierà il secondo segmento e che serve anche per il terzo giunto in N^3. La stessa cosa dallo stesso centro con C^4 e B^4 come raggio.
Per avere gli stessi punti di sezione in posizione orizzontale, si deve abbassare delle perpendicolari fino ad incontrare i giunti di letto p^1n^1, p^2n^2 che taglieranno i punti n^1, n^2, n^3, n^4, dai quali si condurranno delle linee diritte che saranno le proiezioni di collegamento degli intradossi piani della volta a botte con quelli della volta sferica.
Se invece di queste linee diritte si traccia dagli stessi punti una linea curva, questa sarà la proiezione orizzontale dell'ellissoide che si forma dall'intersezione delle superfici di questi due corpi. La curva così è spiovente all'altezza del segmento Aa, che è anche la differenza di livello di imposta dell'arco e e a.
Le proiezioni verticali e orizzontali sono state disegnate, occorre adesso formare l'arco BSD per mezzo di una perpendicolare GR^2 alla rampa eF, costruendo le lunghezze GR^1 e GR^2 uguali a p^11^r, p^22^r etc.
Adesso si ha tutto ciò che è necessario per formare i pannelli degli intradossi piani delle due volte; quello della volta sferica si eseguirà come nel caso precedente, quello della discesa del concio che comprende lo spigolo di volta si eseguirà per mezzo delle lunghezze e degli aggetti dei giunti di letto, dati alla sezione, e del loro intervallo sull'arco-diritto, come abbiamo più volte ripetuto.
Non ci resta che cercare il calandrino necessario per dare a questi intradossi, l'inclinazione che devono avere per formare l'intersezione del collegamento delle due volte.

Supponiamo, per esempio, che si cerchi il calandrino dei due intradossi del secondo concio segnato nel centro d'inizio. 1,2.
Si porterà l'altezza N^1u della sezione in p^1V al della proiezione P^1V ; poi si prolungherà la corda 21 fino ad incontrare il diametro DB nel suo prolungamento nel punto q. Dal punto V si conduca VY parallela a 1q che taglierà il segmento BF in Y. Da Y si tirerà la linea Yy passante per il punto n^1, proiezione orizzontale dello spigolo di volta del primo letto, che sarà l'intersezione del secondo intradosso piano della volta a botte con l'orizzonte.
L'intersezione dell' intradosso piano della volta sferica è attribuita alla proiezione orizzontale in n^1 e in s, dalla corda passante per questi due punti, perché se la volta sferica non fosse scavata dalla volta a botte, i suoi letti sarebbero proseguiti sullo stesso piano.
Le sezioni degli intradossi piani della volta a botte in discesa e della volta sferica poste sullo stesso piano orizzontale, sono state costruite con la proiezione n^1, n^2 del loro spigolo di collegamento, quindi sarà facile trovare l'angolo della loro varia inclinazione dal problema 12 del III libro; per non rinviare il lettore , faremo a parte questa applicazione (Fig.92) per non confondere il disegno nella fig. 96.
FIG 92
Avendo trasportato in un'altra figura gli angoli ottenuti dai segmenti yn^1n^2 e n^2n^1s con lunghezza pari a n^1n^2 (***Fig. 96***) li abbiamo chiamati Z12 e 21s e la lunghezza 12. Da questo segmento 12 si traccerà una perpendicolare 2h che sarà uguale all'altezza t^2 del secondo concio. Dal punto h, avendo tracciato la linea h1, si disegnerà una perpendicolare, hp dove P giace sul prolungamento di 12. Da questo punto P si traccerà perpendicolarmente a 12 un segmento ZS che taglierà a sua volta le linee date d'intersezione dei due intradossi con l'orizzonte nei punti Z e S sul lato 1p prolungato; si porterà la lunghezza ph in px. Se da questo punto x si tirano delle linee fino a Z e S, l'angolo ZxS sarà quello che noi cerchiamo per assemblare gli intradossi piani che si suppongono costruiti, con le medesime lettere del piano orizzontale, come ho già detto precedentemente e ripresentato in ***Fig. 93*** e ***91***.

APPLICAZIONE DEL TRATTATO SULLA PIETRA

Se non si cercasse di aver cura della pietra, si potrebbe applicare questo trattato nello stesso modo del caso precedente, quindi supponendo un paramento orizzontale; ma come l'inclinazione della discesa lascerebbe un gran vuoto al di sopra, anche in questo modo si provocherebbe troppa perdita di materiale; è per questo che usiamo lo stesso metodo sia per gli spigoli di collegamento delle volte in discesa che per quelli che stanno sullo stesso piano.
Avendo innalzato un piano destinato per una dei due intradossi piani, per esempio per quella del secondo concio della volta a botte in discesa, vi si applicherà il pannello della fig. 91, con riguardo al concio che verrà studiato. Si traccerà il contorno, poi con il calandrino dei due intradossi trovati, come è stato detto in riferimento alla fig. 92, posato a squadra sullo spigolo comune, si abbatterà la pietra seguendo l'angolo ZxS per formare un secondo piano sul quale si applicherà il pannello della fig. 93 dell' intradosso piano della volta sferica.
Una volta che le due facce degli intradossi si congiungono e gli spigoli dei giunti di letto sono dati, è evidente che non si può che abbattere la pietra con i calandrini di letto e con l'intradosso piano, dati agli archi-dritti delle due volte; per esempio $2^r1^r5^r$ per il letto al di sotto del braccio della discesa, e per quello al di sopra.
Quanto alla parte dell' intradosso sferico, se il concio non comprende un braccio, ma solamente una faccia di estremità della linea della discesa, non dovrò fare altro che il letto al di sopra, seguendo l'angolo Kt^2T della sezione, quello al di sotto viene individuato nel punto in cui incontra la volta a botte; ma se il concio comprende un braccio, come di solito si ha nelle buone costruzioni, esso avrà due letti di lunghezza diversa, quello al di sopra avrà lunghezza pari al braccio sferico e larghezza pari al braccio che entra nella volta a botte, quello al di sotto sarà uguale alla lunghezza del braccio.
E' noto che oltre ai calandrini di letto e di intradosso, occorre ancora servirsi di quelli di intradosso e di faccia; ma siccome questi non hanno niente di particolare nell'intersezione delle volte, non ne parliamo perché si riconducono al caso della volta semplice.
L'angolo della parte sferica sarà sempre costruito con la corda e il raggio della sfera, per esempio l'angolo n^3dn^4 che cambia ampiezza a seconda che la lunghezza della corda del concio sia più o meno grande.
Riguardo il concio di testa della discesa, se questo non raggiunge l'apertura sarà dritto ad angolo di squadra per la continuazione della volta, se la raggiunge si dovrà cercare l'ampiezza dell'angolo come si è già detto e inutile ripetere, nel tomo precedente, parlando della volta semplice, a seconda che sia a piombo o in pendenza.
Non aggiungiamo niente in questo paragrafo sulla differenza del caso in cui la discesa è obliqua, ne abbiamo abbastanza parlato nel tomo precedente trattando le volte semplici. Questa differenza non influisce molto nello spigolo di volta e non influisce neanche nel modo di fare le proiezioni.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA DEI DUE TRATTATI PRECEDENTI

Per trovare le intersezioni delle facce dei diversi corpi, secondo il metodo generale, supponendo che la volta sferica e la volta a botte in discesa siano tagliate da dei piani verticali passanti dalle proiezioni dei giunti di letto della volta a botte, si avranno due casi, uno sullo stesso piano come nel paragrafo precedente, l'altro in discesa come in questo.
Dalle sezioni dei piani verticali, si otterranno dei parallelogrammi nella volta a botte e dei cerchi nella volta sferica. La sola differenza che troveremo nei diversi casi della volta a botte, sarà che questi parallelogrammi saranno rettangoli, se la volta a botte si trova sullo stesso piano e faccia a piombo, saranno angoli obliqui se la si suppone in discesa. Le altezze verticali però essendo all'interno delle stesse parallele saranno uguali alle altezze delle divisioni della curvatura di faccia, che si suppone verticale, sia nell'uno che nell'altro caso.
Si possono dunque applicare le altezze di questo centro nel raggio della sfera, come se la volta a botte fosse sullo stesso piano.
E' chiaro che tutti i piani verticali se si suppongono passanti dai giunti di letto della volta a botte, sono, per la loro sezione, dei cerchi ineguali costruiti nella volta sferica, che passano più vicino o più lontano dal centro, e i loro raggi sono le lunghezze c^1b^1, c^2b^2, etc., condotti dal diametro PQ fino alla circonferenza della base della volta sferica.
Dunque, come nella proiezione verticale, il diametro PQ non è rappresentato che da un solo punto M; è evidente che tutti i centri C^1, C^2, C^3, C^4 che erano su questo diametro, sono riuniti in questo punto M che è servito per costruire tutti gli archi di cerchio che a loro volta hanno determinato i punti di intersezione dei giunti di letto della volta a botte con lo spigolo di volta.
La costruzione dei pannelli degli intradossi piani, non ha bisogno di spiegazione, è evidente che le inclinazioni dei piani della volta a botte e della volta sferica, essendo diverse si compenetrano secondo un angolo la cui ampiezza è da trovare.
Per trovare questo angolo abbiamo cercato, seguendo il nostro metodo generale del problema XII del III libro, la sezione di ognuno di questi due piani degli intradossi piani con l'orizzonte; quella della volta sferica si trova senza difficoltà dalla corda della base del concio ma per quella della volta a botte, occorre un po' più di attenzione.
Se si esamina ciò che abbiamo fatto, si riconoscerà che abbiamo immaginato un segmento orizzontale N^1O^r passando dal punto più basso del concio 12 che posso considerare come piano orizzontale passante da questo punto e dal secondo letto della volta sferica; adesso, questo piano

è più basso del punto F, che è la proiezione verticale del diametro BD, di partenza della discesa, dell'altezza della linea ru del centro primitivo, che è una parte della perpendicolare N^1u, composto da N^1r uguale a $1p^1$, e f^1F della sezione. Di conseguenza p^1V sarà uguale a $f^1F + Fi = N^1r + ru = p^1 1 + 1V$.
Dunque, il piano della corda 21 prolungato e trasportato in VY incontrerà il piano orizzontale, di cui parliamo, ad una distanza BY dal punto B, passante dal punto n^1, proiezione del punto N^1 sulla sezione; quindi il segmento Yn1y, è la sezione dell' intradosso della discesa con l'orizzonte che dobbiamo trovare.
Questa sezione Yy, intradosso con l'orizzonte, la sezione n^1S dell'altro intradosso e la proiezione della loro intersezione n^1n^2 sono state portate a termine, il resto dell'operazione è dimostrato nel problema XII del III libro.

Corollario
INCONTRO DELLE VOLTE A BOTTE CON "CUP-DE-FOUR" RIALZATE O ABBASSATE

Dalla costruzione delle linee di collegamento della volte sferiche con quelle cilindriche, si può facilmente tracciare quelle di intersezione delle sferoidi con i cilindri; perché dallo stesso metodo delle sezioni dei piani verticali passanti dai giunti di letto delle volte a botte, ne risultano delle semi-ellissi nella sferoide e dei semi-cerchi nella sfera che avranno sempre in sezione lo stesso punto Mc come centro: per metà di uno dei loro assi, le ordinate di PQ dell'ellisse PAEQ se il piano fosse ellittico e posto su un piano orizzontale, per l'altra metà, le ordinate dello stesso diametro, posto su un piano verticale, formando un'ellisse o un semi-cerchio PKQ a seconda se lo sferoide sarà allungato o appiattito.
Con i due assi ottenuti, si descriveranno degli archi ellittici di centro Mc, al posto di quarti di cerchi che si sono descritti per avere la terminazione dei giunti di letto, chiamati N^1, N^2 etc, che si trovano allo spigolo di collegamento delle due volte.
Se la volta in "Cup de Four" fosse una di queste figure ellissoidali di cui abbiamo parlato già al II tomo, non si può costruire dalla metà dell' intradosso piano, occorre partire dalla squadratura, come se la volta non fosse compenetrata da una volta a botte, poi costruire la volta, che deve passare dai punti di intersezione delle ellissi sulla sezione (costruita nello stesso modo dell'intersezione della volta sferoidale), ma pur avendo entrambe lo stesso centro Mc.
E' chiaro che da queste sezioni si otterranno i due punti di collegamento di ogni intradosso piano e cavità, dei conci della volta a botte in discesa; gli altri due si troveranno sulla pietra, dalla metà del paramento supposto orizzontale che sarà servito per fare la superficie concava dell'ellissoide e della squadratura; si abbatterà la pietra con il calandrino posto sullo stesso piano. Dalla rampa M e F si può tracciare in questo nuovo letto inclinato, lo spigolo del letto inferiore della discesa in diversi modi: dalla metà della linea d'imposta del concio, dalla metà del calandrino di letto e dell' intradosso piano e cavo, o dal pannello dell' intradosso piano.

Abbiamo parlato troppo di tutti questi mezzi e ne abbiamo dato anche gli esempi per cui non è necessario ripeterne ancora l'applicazione

Seconda specie
INTERSEZIONI DELLE VOLTE CILINDRICHE CON QUELLE SFERICHE, IN CUI I POLI SONO SUL PIANO DI IMPOSTA

Abbiamo fissato la costruzione degli spigoli di volta della volte a botte con le volte sferiche i cui poli sono sulla sommità delle loro altezze, ciò significa nel mezzo della chiave e i giunti di letto sono parallele all'orizzonte; in questo paragrafo parliamo della volte sferiche i cui giunti di letto sono inclinati e i loro poli sono sul piano d'imposta, opzione che può dare adito a due casi: uno con una sfera e una volta a botte orizzontale e l'altro con una sfera e una volta a botte verticale, come una volta semplice o cava.
Non consideriamo un terzo caso riguardante una volta inclinata, perché non ricorre spesso nella pratica. In questa circostanza si deve dare alla volta sferica, "l'arangement" dei giunti del caso precedente.

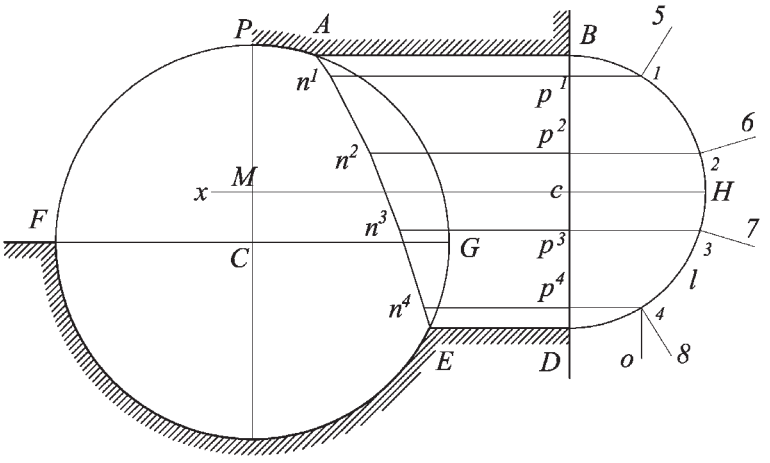


Fig. 89a *Proiezione dello spigolo di volta*

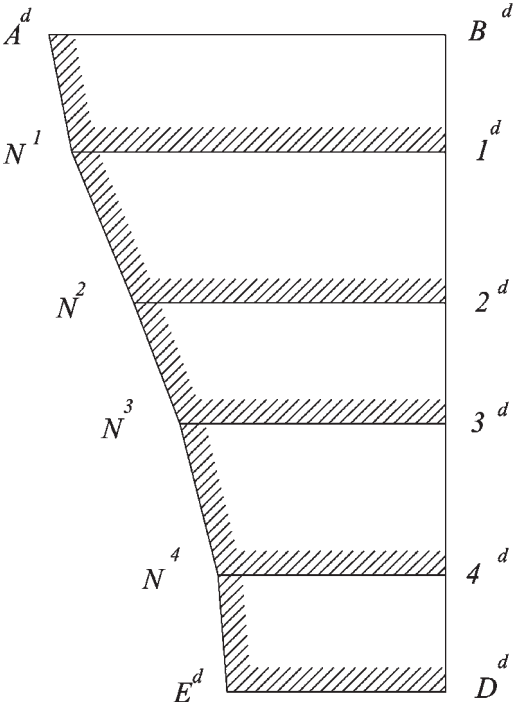


Fig. 91 *Pannello dell'intradosso piatto*

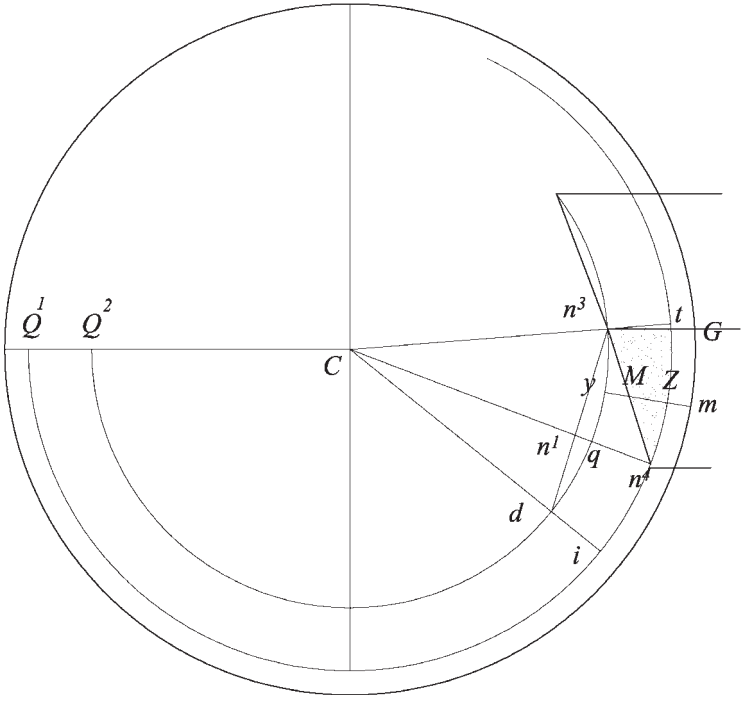


Fig.89b *Ingrandimento della Fig.89*

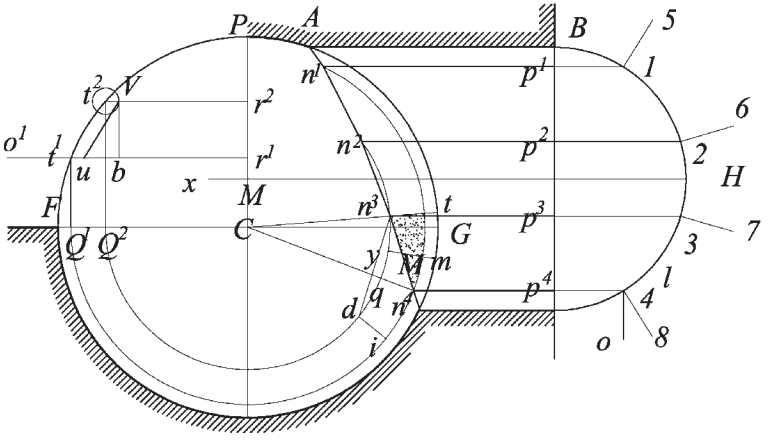


Fig.89

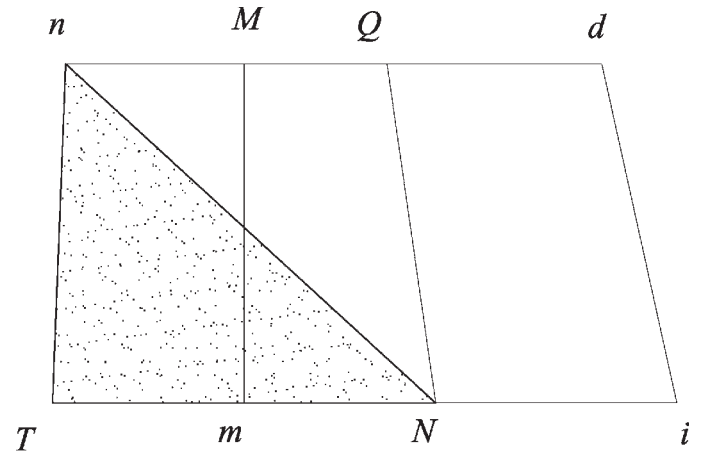


Fig.90 *Rappresentazione del concio della volta sferica*

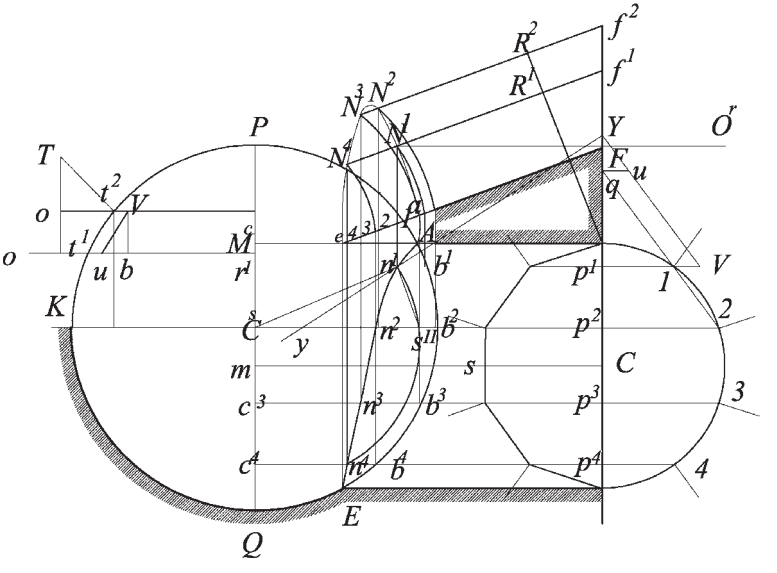


Fig.96

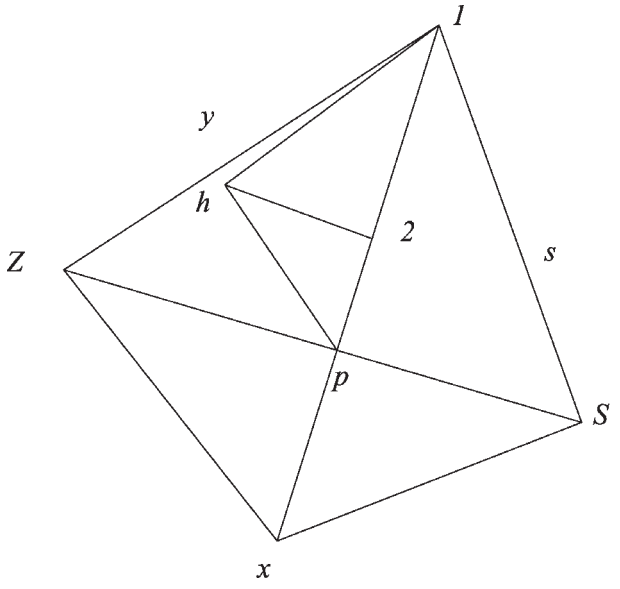


Fig. 92 *Rappresentazione dell'angolo ZxS trovato per assemblare gli intradossi piani*

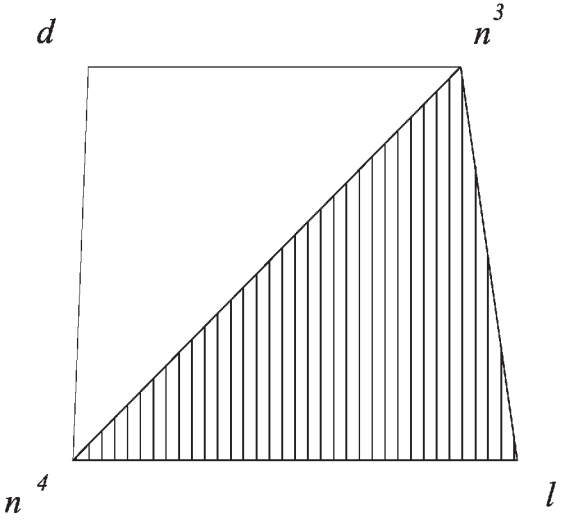
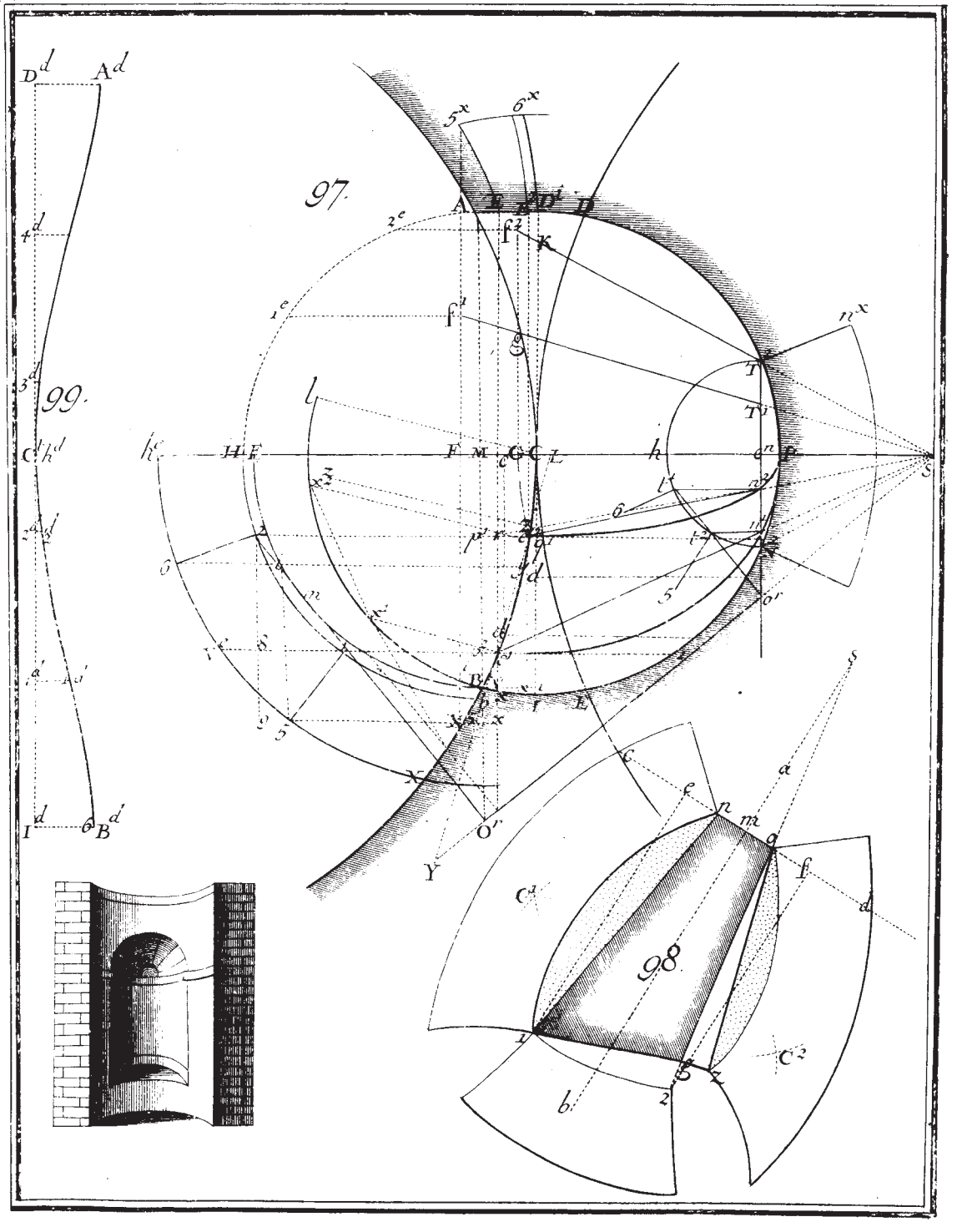


Fig. 93 *Intradosso piano*

page 149.

Pl. 88.



PRIMA COMBINAZIONE
VOLTA SFERICA, O NICCHIA IN TORRE ROTODA O CAVA.

(***Fig. 97***)Dato l'arco di cerchio concavo *ACB*, o l'arco convesso *ECD*, una parte della base di una torre cava o di una rotonda, nella quale si vuole creare una nicchia, il cui piano orizzontale, che passa per le imposte, è l'arco di cerchio *APB*, uguale, più grande o più piccolo del semi cerchio, che dipende dalla posizione arbitraria del centro *C* della nicchia, o sulla corda *AB*, dell'arco della torre vuota, o dentro, o fuori, a seconda della profondità che l'architetto vuole dare alla nicchia.
Se ci si propone di fare teste di concio perfettamente uguali tra di loro, bisogna prendere per curvatura interna originaria quelle che sarebbe lo sviluppo della porzione cilindrica, che taglia la sfera della torre, con la penetrazione della torre, la quale curvatura è della porta nella torre rotonda, una semi ovale meccanica, che ha per diametro la rettificazione dell'arco *AB*, e per ordinate, le verticali tracciate su questo arco, che terminano all'angolo sporgente di incontro della doele[1] della sfera e delle torre. Questo angolo saliente è una di queste curve a doppia curvatura che abbiamo chiamato ellisimbro.
Si può vedere ciò che è stato detto della porta a torre rotonda a teste uguali.
Il modo di fare, questa curvatura di fronte sviluppata è di dividere l'arco *AB* della torre in tanta parti uguali che si vorranno ottenere dai punti del semi ovale, e di tirare per tutti questi punti *d,d,* delle perpendicolari all'asse *MP*, che lo taglieranno nei punti *e, e*, e la circonferenza della nicchia *APB* nei punti *x, x*. Per tutti i punti *d,d*, si tracceranno delle parallele indefinite all'asse *MP* della sfera, e dei punti *c, c*, per centro, e con le lunghezze *cx, cx*; per raggi si descriveranno degli archi, che daranno le altezze delle ordinate dell'ovale che si vuole tracciare, che sarà ribassato perché l'arco *ACB* o solamente la metà *C d B* rettificata che ne è un semi asse, sarà più grande del semi diametro della sfera *CI*, che è l'asse verticale di questo ovale *H i b*.
Tracciato il contorno di curvatura lo si dividerà in tanti conci nei punti *1,2,* e *c*. da dove si tireranno delle perpendicolari che taglieranno il diametro nei punti p^1, p^2.
Si porteranno gli intervalli di fuga piegati sull'arco *ACB* per farci passare le proiezioni dei giunti di letto che fanno delle porzioni di ellisse che devono passare tutte per questi punti e per il polo *P* della sfera.
Se non si vuole realizzare una divisione delle teste dei conci in parti esattamente uguali si renderà l'operazione più semplice come in
(Fig. 97a) avendo tirato dal punto *C* la linea *DI*, parallela alla corda *AB*, e tirata su questa corda la perpendicolare *MP*, si dividerà il semi cerchio *DPI* in tante parti uguali che si vorranno ottenere dai conci nei punti *1,2,3,4,* da dove si abbasseranno le perpendicolari che taglieranno *DI* nei punti

[1]Doele: è così chiamato il paramento interno di una volta o di un concio incavato.
La superficie pia na che passa per la corda dell'arco di una doele si chiama doele piatta, è una fase di preparazione per la definizione di una doele concava.

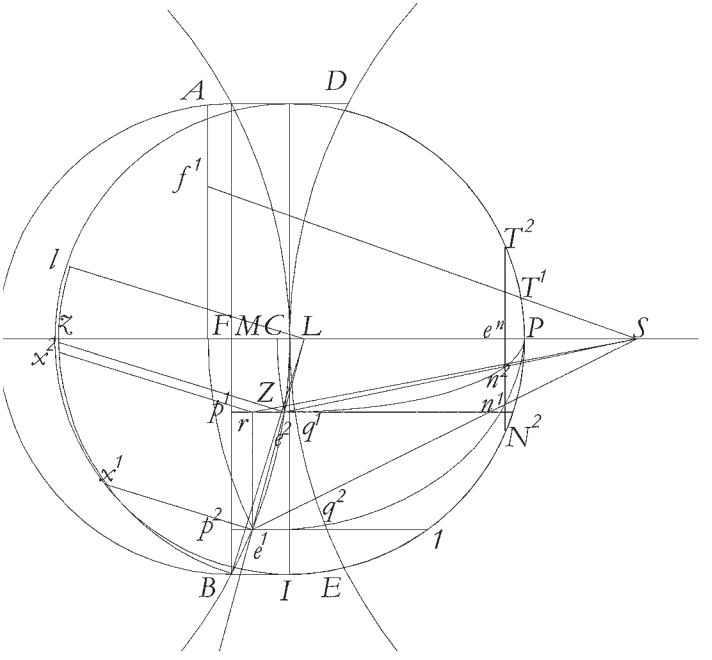


Fig.97a. Il disegno rappresenta il processo di costruzione della base di una torre cava.

q^1,q^2, che determineranno i semi assi di più ellissi che devono passare per questi punti e per il polo *P* per esprimere sul piano orizzontale la proiezione dei giunti di letto della nicchia.
Cosi avendo in comune i semi assi dell'ellisse e la metà del grande asse *CP*, sarà facile tracciarle con il problema VII del secondo lib.
Questi archi di ellissi prolungati incontreranno l'arco *ACB* della torre cava in alcuni punti e^1,e^2, che daranno le proiezioni dei conci al lato cavo.
Con queste due proiezioni orizzontali *ACB* dell'angolo sporgente dell'angolo di incontro della doele della nicchia con il paramento della torre e dei giunti di letto si potrà formare la nicchia proposta con il metodo della squadratura ; ma siccome vi sarebbe una perdita considerevole della pietra vi consigliamo, l'inscrizione di una piramide nella sfera nella quale essa darà delle doeles piatte i cui angoli toccheranno tre punti della superficie sferica e forniranno il mezzo per trovare il quarto nello stesso modo che abbiamo esposto nel trattato precedente parlando della tromba sferica sull'angolo pag. 368.
Si comincerà col determinare la posizione della testa della mensolina tirando una linea *TN* perpendicolare all'asse *MP* che taglierà le proiezioni ellittiche dei giunti del letto nei punti n^1,n^2, *c*. Per i quali e per i punti trovati e^1, e^2, si tireranno delle linee diritte che incontreranno l'asse *MP* prolungato al punto *S* dove sarà la sommità della piramide tronca che devono formare le doeles piatte dalla faccia fino allo mensolina.
Supponiamo per esempio, che si voglia fare la doele piatta del secondo concio della nicchia la cui proiezione deve passare per i *4* punti e^2, 2^n, 1^n,

e¹. si traccerà, per il punto più avanzato *e¹* una parallela *e¹ r* alla corda *AB* fino alla perpendicolare *2 e²* prolungato in *r* per il quale si tirerà alla vetta *S*, la linea *r S*, che taglierà l'arco *CB* in *Z* e la corda *TN* della mensolina vicino a *n²* che prenderemo come punto di intersezione, perché non si può mettere un carattere vicino senza creare confusione.
Si tirerà quindi sulle proiezione *e¹,e²*, una linea diritta *LB* che taglierà l'asse *MP* nel punto *L* e la circonferenza dell'imposta *APB* vicino a *B* in un punto che io chiamo per lo stesso motivo precedente.
Su *LB*, come raggio si descriverà il quarto di cerchio *B x² l*, al quale si tireranno per i punti *e¹,e²* le ordinate che lo taglieranno nei punti *x¹,x²*,e attraverso il punto *z* una parallela alle ordinate *z Z* di cui bisogna trovare la lunghezza attraverso il profilo come si dirà più avanti cercando i valori delle linee che devono costituire i lati del pannello delle doele piatta, di cui abbiamo appena fatta la proiezione orizzontale. Supponendo che si voglia usare la linea *HS* come base dei profili si porterà la lunghezza *S e¹* su questa linea in *SF* dove traccerà una perpendicolare *F f¹* uguale all'altezza del primo ricasco *i p¹*, poi si tirerà *f¹ S* che taglierà *N T* in *T¹* la linea *f¹, T¹* sarà il valore della proiezione *e¹, n¹*, che è uno dei lati della doele piatta e lo stesso sarà il valore di un altro lato di supposizione la cui proiezione era *rn2*.
Per trovare la vera lunghezza del secondo lato, si porterà la lunghezza *S e²* in *SG* sulla linea di base del profilo e vi si eleverà *G g*, che taglierà la linea *T¹, f¹* in *g*; la linea *g T¹* sarà il valore di questo lato del pannello nel giunto di letto di sopra.
I valori dei lati dello stesso pannello che segnano le teste, sono le corde *I 2* delle divisioni della curvatura formate sul raggio *u V* che passa per il punto e¹ parallelamente alla corda *AB* dell'arco della torre, e la corda *t¹,t²* dell'arco della mensolina *T b N* ; cosi si hanno i quattro lati di una doele piatta che si formerà come segue:
Avendo tracciato in un posto a parte ***(fig. 98)*** due linee indefinite *ab, cd* perpendicolare fra di loro che si incroceranno nel punto *m*, si prenderà la meta della corda *I, 2* dell'arco *VE* e la si porterà alla ***(fig. 98)*** di *m* in e in *f* da dove si tireranno le linee *e¹, f²*, parallele ad *ab*. Si prenderà pure la metà della corda *t¹, t²*, dell'arco della mensolina *T h N* che si porterà da *m* in *n* e in *o*; poi dai punti *n* e *o* come centro, e per raggio la lunghezza *T¹, f¹* del profilo si faranno degli archi che taglieranno le parallele *e 1, f 2*, nei punti *1* e *2* dove si tireranno le linee *n 1* e *2* che saranno i lati di una doele piatta di piramide diritta inscritta alla sfera.
Ma siccome la parte della torre compresa tra la corda *er, e²*, è obliqua all'asse bisogna togliere la parte *fi g*, data al profilo ; cosi, portando la lunghezza *T¹G* da *o* in *g* si avrà per lunghezza del lato che risponde al letto sopra al concio la linea *og*; in fine avendo tirato la linea *i g*, il trapezoide *n 1 g o* sarà il pannello della doele piatta, che tocca comunque la doele sferica in tre dei suoi angoli *n, o, 1;* ma non in *g* per il motivo che abbiamo dato nel tomo II pag. 370
Bisogna dunque cercare la distanza da cui il punto *g* è lontano dalla superficie sferica della doele della nicchia ; perciò si porterà la lunghezza *T¹ g*, del profilo, sulla linea *zZ* dell'elevazione della ***(fig. 97)*** dove darà il punto *z* da cui si tirerà la linea *x² z*, o poi dal punto o come centro della ***(fig. 98)***. e con la lunghezza *og*, per raggio si farà un arco verso *z*, e dal punto *g* come centro e *x¹ z* per raggio si farà un'altro arco che taglierà il precedente nel punto *z*, essendo il triangolo *o g z* aggiunto alla doele piatta, il punto *z* toccherà la doele sferica che si cerca.

STEREOTOMIA

Formati i pannelli della doele piatta si formeranno quelli del letto i cui giunti alla doele fanno un tutt'uno come contorno che daranno luogo a tutti gli archi di un unico cerchio passante per l'asse *MP*. Essi saranno un poco diversi nella lunghezza perché si accorciano man mano dall'imposta *APB* fino alla chiave.
Anche le loro teste dal lato della mensolina sono tutte uguali secondo l'angolo misto *AT n*[x]; ma se le teste dal lato della torre sono degli archi di ellissi diverse perché, sebbene le loro corde siano alla distanza dell'angolo di doele a quello dell'estradosso, sono sempre meno bucate man mano che si allontanano dall'imposta *BX*, dove la prima testa del letto è uguale alla cavità dell'arco *BX* delle base della torre che ella comprende e la sua inclinazione riguardo alla doele, è l'angolo curvilineo *XBN*, che è anche il più ottuso di tutti quelli delle teste superiori che si richiudono man mano che si avvicinano alla chiave, in mezzo alla quale questo angolo diventa misto e uguale a quello della mensolina *AT nx*.
Per trovare la curvatura degli archi della testa non c è altro che allungare gli archi circolari della proiezione orizzontale, come si è detto parlando delle teste nella torre cava. Gli archi circolari *X e¹* che da la proiezione del primo letto *1*[2] *5*, all'arco *e² y*, che da quella del secondo letto *2*[3] *6*, che non possiamo spiegare chiaramente qui a causa della limitatezza della figura.
Si tirerà la corda da ognuno di questi archi, e si dividerà in tanti parti uguali che si vorranno avere dai punti della curva basta dividerla in *due* o *tre* pari per comodità, e da queste divisioni si tireranno delle perpendicolari alla corda che finiranno sull'arco del cerchio.
Si prenderà, quindi, la corda del giunto delle testa 5[4] 1 oppure 6[5] 2 che si dividerà nello stesso numero di parti che saranno uguali tra di loro ma più grandi della corda dell'arco del cerchio. Si porteranno su queste divisioni le perpendicolari. Dell'arco di cerchio che daranno i punti dell'arco ellittico che si cerca.
Per quanto riguarda l'apertura dell'angolo curvilineo che deve fare quest'arco di testa con il giunto di doele, è facile trovarlo. Per i punti *e¹* e *X*, dove la proiezione dei punti *1*[2] e *5* taglia la base della torre, si tracceranno delle verticali *e¹ E¹*, e *X 5*[x], sulle quali si poserà la corda *1*[2] *5*, alla fine della quale si farà una perpendicolare. Che taglierà la linea *X 5*[x] nel punto *5*[x]. Si farà lo stesso per i punti *e² y* della proiezione che daranno i punti *E² 6*[6] del profilo. Gli angoli curvilinei *5*[x] *ET*, e *6*[6] *E² T* saranno quelli che si cercano.
Adesso non resta che cercare le la squadra al livello del letto di doele, di testa di doele seguendo i nostri principi generali.
Innanzitutto per la squadra di doele e letto, per esempio per il secondo concio si prolungherà la corda *2 1* dell'arco *EV* finché incontri la linea *u r V*, prolungata in *O*[r] da dove si tirerà al punto *S*, la linea *O*[r] *S* che sarà la sezione della doele con l'orizzonte; siccome tutti i piani del letto taglieranno all'asse *MP*, questo asse sarà la seconda sezione che, con

[2]Nel testo originale è riportato 1° ma nella planche è riportato 1
[3]Nel testo originale è riportato 2° ma nella planche è riportato 2
[4]Nel testo originale è riportato 5° ma nella planche è riportato 5
[5]Nel testo originale è riportato 6° ma nella planche è riportato 6
[6]Nel testo originale è riportato 6[y] ma nella planche è riportato 6

l'altezza del ricasco,darà il mezzo per trovare l'angolo dei piani del letto e della doele piatta come è stato spiegato nel problema XII del terzo tomo. E come l'abbiamo riottenuto nei tratti delle volte coniche.

Ugualmente, e con lo stesso problema, si troverà la squadra di testa piatta *L e¹, e² B* che si prolungherà fino alla sezione della doele con l'orizzonte in *Y*. Si avrà cosi la sezione della testa con l'orizzonte *LY*, quella dell'orizzonte *YS* e l'altezza del ricasco *x² e²* ; si troverà cosi l'angolo di testa e di doele, come si è fatto alla tromba piatta pag. 80 del II tomo e alla tromba diritta pag. 209 dello stesso volume.

APPLICAZIONE DEL TRATTATO SULLA PIETRA

Avendo definito un parametro per servire da doele piatta di supposizione, che io chiamo cosi, perché il pannello di questa di doele non può toccare la superficie sferica che si propone di fare che con tre dei suoi angoli, vi si applicherà questo pannello per tracciarne il contorno. Poi con la squadra a livello del letto e doele piatta, si abbatterà la pietra per formare i due letti.

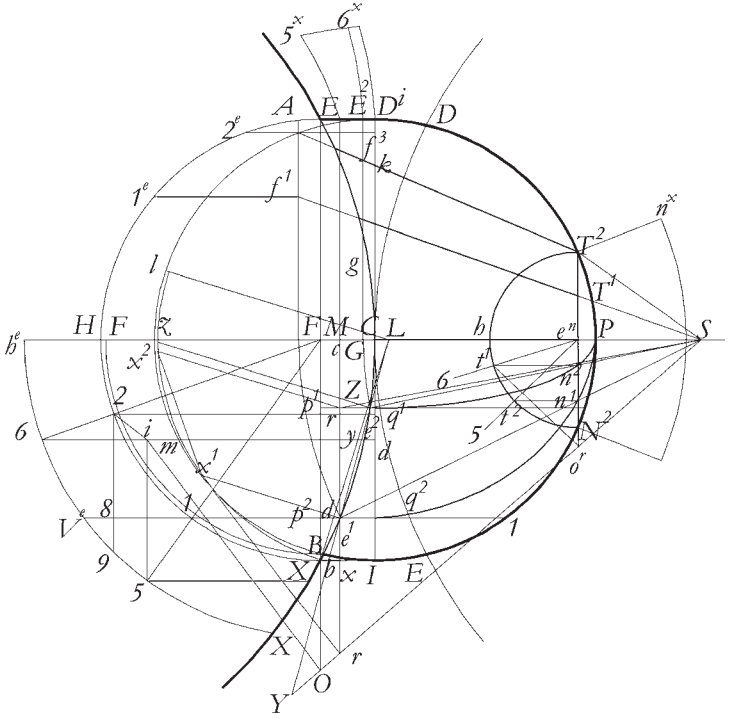


Fig.97b Il disegno rappresenta il processo di costruzione della base di una torre cava nella quale si vuole creare una nicchia, il cui sviluppo della porzione cilindrica taglia la torre.

Fatto ciò si applicherà il secondo pannello triangolare piccolo *o g z*, della ***(fig. 98)*** per avere il punto *z* della superficie sferica che l'angolo *g* del pannello della doele piatta non poteva toccare.

Su questi stessi letti si applicherà un pannello o un cerche formato sull'arco *AB* di un cerchio maggiore della sfera che si farà passare al letto di sotto, attraverso i punti *1* e *n* della doele piatta disegnata e al letto di sopra attraverso i punti *o* e *2*. Poi con la squadra mista di taglio e di doele preso dove si vorrà, per esempio in *TPS* si vuoterà la doele sferica come è stato detto nel cap. VII pag. 368 del tomo precedente.

Comunque, prima di vuotarla, bisognerà rompere la pietra con la squadra di testa piatta e di doele se non si ha l'intenzione di servirsi di pannelli di letto.

In questo caso, con una falsa squadra, si prenderà l'angolo *6⁵ 2³ 9*, che fa il punto di testa *6⁵ 2* con una orizzontale *2³* 9, parallela ad *AB*, seguendo la quale si farà una plumèe[7] cava nella quale si applicherà un cerche[8] convesso, formato sull'arco *ACB*; ma siccome il punto *9* non è determinato di posizione bisogna cercare un secondo punto di appoggio alla cerche in *8*, per mezzo di una seconda squadra prendendo l'angolo *Ve 1² 5*, che fa una verticale *Ve I*, con il giunto di testa *1² 5* Secondariamente, facendo una parallela *6 i* a la linea *Ve 1*, e posando due righe sui punti *i* e *6* che si piazzeranno seguendo queste direzioni e che si raddrizzeranno toccando le plumee sulla testa, l'una in alto l'altra in basso. La plumèe[7] *Ve 1* darà il punto *8* di intersezione dell'orizzontale *2³ 9* che si cerca per determinare la posizione cerche convesso che deve servire la testa nella torre cava facendo scorrere questa cerche parallelamente a se stessa, sulle plumee verticali *6 i* e *Ve 1*. In questo modo si formerà il cavo dei giunti di testa in posizione dell'ellisse, come devono essere quasi per un caso l'intersezione della superficie piana con il cavo cilindrico della torre.

Se ci si serve di pannelli di letto essi daranno le curve delle teste di letto al paramento vuoto della torre ma non sarà sufficiente per forarlo ma bisognerà usare altri mezzi.

Ci si può servire di quello dato da P. Deran[9], sebbene non sia perfetto, che consiste nello sviluppare l'angolo est. della nicchia alla superficie della torre correggendo l'angolo *HB* con le divisioni come è stato fatto a ***(fig.. 97***) in *c b c t*, portando le restanti B a, e¹ a, e² *a* della torre cava a riguardo di una linea *C1* tangente dell'arco ACB, in *bi, 1d, 2d, 2c* della ***(fig. 99)*** che daranno i punti *c, 2, 1, 6*, attraverso i quali si traccerà la curva ondulata che è lo sviluppo dell'angolo a doppia curvatura dell'incontro della superficie sferica della nicchia con quella cilindrica della torre.

Non esponiamo qui il trattato di P. Deran.

[7]Plumee: tratto disegnato a mano.

[8]Cerche: sagoma di un contorno curvo che sta a indicare il rilievo o la convessità di una pietra da scavare.

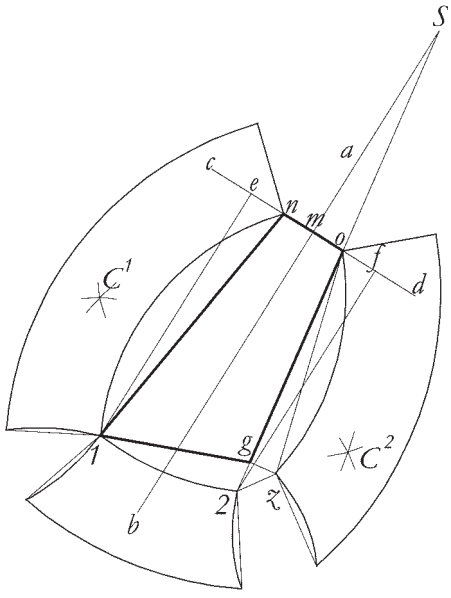


Fig.98. Rettifica della superficie interna del concio.

A rigore si vede che questo sviluppo suppone un cilindro orizzontale al posto della superficie sferica della nicchia perché si prendono distanze orizzontali. Ma la differenza è così minima che non merita attenzione della pratica perché l'inclinazione delle corde della porzione di sfera compresa tra il cerchio maggiore che passa per *DI*, e l'arco *ACB* della torre è cosi poco considerevole che non può alterare il contorno in modo sensibile, nell'operazione più esatta.

Tracciando questo sviluppo su un corpo flessibile come un cartone, si applicherà sulla superficie della sfera, tra i punti dati *1* e *2* premendo per farlo piegare in modo che esso la tocchi per tutta la sua lunghezza.

In questa situazione si traccerà l'angolo della doele con la torre e si avranno tre linee curve per formare la testa cava ma ciò non è abbastanza per formarla correttamente, bisogna rifarsi ancora al mezzo che abbiamo appena esposto per applicarvi un cerchee formato sull'arco orizzontale *ACB* e posto orizzontalmente per mezzo di un angolo $6^5\ 2^3\ 9$.

La differenza che c'è, è che questo cerche troverà due appoggi dati l'uno sul giunto di testa del letto di sotto, l'altro sull'angolo di doele delle nicchia alla superficie della torre nei punti $5^4\ 7$. Al di sotto ciò che fornisce il modo di trovare la posizione della verticale $1\ V^e$, che servirà torre.

[9]L'autore cita il trattato di P.Deran che pone come metodo alternativo a quello di P. Delorme, la sottrazione della parte che sporge oltre la facciata, dando come punto di partenza un piano di taglio posto tangente alla parte più estrema dello sbalzo.

d'appoggio alla cerche da un lato e l'altro appoggio viene dato dal giunto di testa del letto di sopra *6 2*.

Si potrà così, senza fare sviluppi,fare la cerche allungata dell'arco $e^1\ e^2$

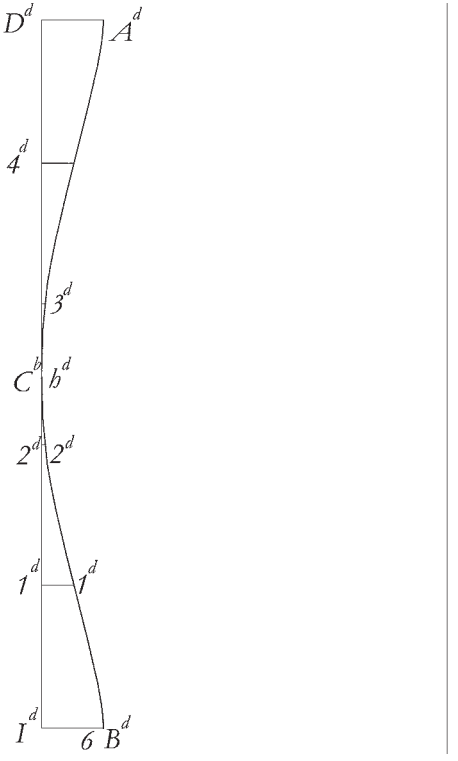


Fig.99 Il disegno rappresenta la traccia della curvatura ondulata della superficia sferica della nicchia con quella cilindrica della torre.

della torre sulla corda $x'\ x''$ che gli corrisponde, siccome abbiamo allungato gli archi dei giunti di testa e fatto scorrere questa cerche inclinata parallelamente alla corda $I^2\ 2$, premendo sugli archi di giunti di testa dati dai pannelli che sono stati ricavati. Questo è il modo più semplice. Ed esatto nel suo principio.

Fatta la testa del concio alla superficie della torre non resta che fare l'altro dal lato della mensolina allo stesso modo che abbiamo esposto parlando delle volte sferiche semplici nella nicchia al cap. VII del tomo precedente. Pag. 368.

Ciò che abbiamo detto sulla nicchia in torre cava, servirà per la nicchia in torre rotonda rovesciando i pannelli di letto da destra a sinistra. La differenza che c'è per il tratto è:

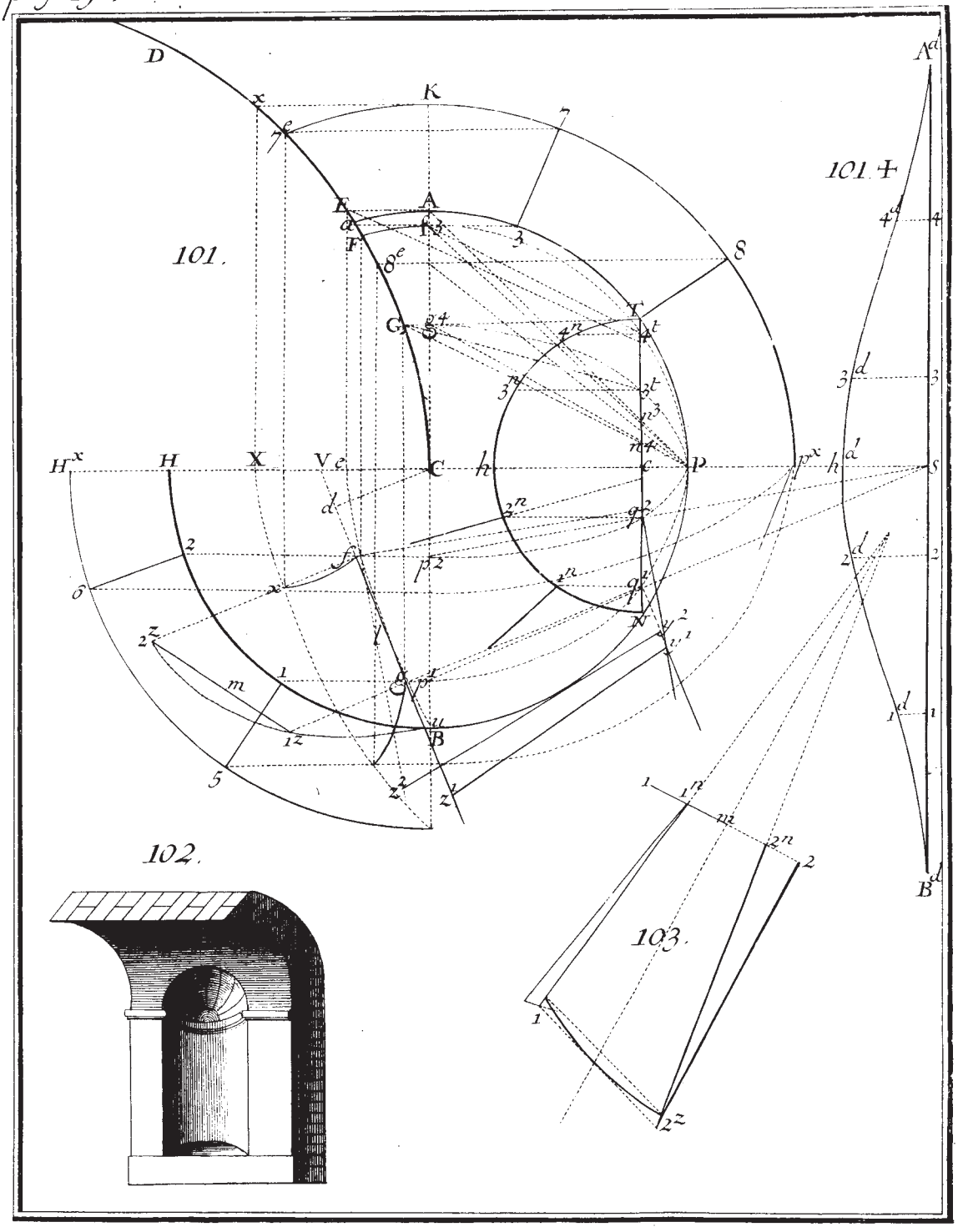
che se si regolano le profondità della nicchia alla chiave al posto di aumentare nella torre cava verso le imposte e diminuirà nella torre rotonda.

che al posto di prendere la corda dell'arco della torre che comprende la proiezioni delle teste dei conci, bisogna prendere la tangente di questo arco per ridurre la torre rotonda in poliedro di cui ogni piano

o faccia forma una testa piana al concio, la quale testa serve di preparazione alla formazione della testa rotonda che sarà uguale alla cava, ma in senso contrario con un cerche concavo al posto di uno convesso sarà comunque formato sullo stesso arco *ACB* considerato al di fuori nella sua convessità.

page 151.

Pl. 89



SECONDA COMBINAZIONE DELLE VOLTE SFERICHE CON LE CILINDRICHE ALLORQUANDO LA BOTTE RACCORDATA CON UNA VOLTA A QUARTO DI SFERA ORIZZONTALE.

ESEMPIO

NICCHIA SFERICA DA UNA BOTTE DI LIVELLO

A ben considerare il trattato fatto, non c'è altra cosa che un cambiare la posizione della volta sferica in torre cava di cui si è precedentemente parlato; da ciò, l'avanzamento della giunzione di incontro di queste due volte, diminuita dalle imposte alla chiave, qui al contrario essa comincia alle imposte e finisce alla chiave.

(***Fig. 99 e 101+***) Per percepire tale differenza con un colpo d'occhio, bisogna porre attenzione allo sviluppo di questo arresto di faccia, alla fig. 99 della plance 88 e alla fig. 101+ della plance 89 e si vedrà che se si giungono le due metà della prima per la loro estremità, che è all' imposte, si avrà una figura uguale a quella dello sviluppo della figura 101+.

Si può infine concepire che lo sviluppo dell'arresto di faccia della fig. 101 è precisamente il medesimo di quello della nicchia in torre tonda, cioè convesso, per il quale noi abbiamo appena dato un esempio,contando che può servire per l'uno e per l'altro.

Prima di entrare in materia, bisogna osservare che si può fare una nicchia che raccorda una copertura in due maniere, o mediatamente o immediatamente.

Essa raccorda la volta a botte immediatamente nel caso in cui la calotta sferica incontra la cilindrica della botte alla chiave, che ricade al di sotto del livello di *A* in *a*.

Essa la raccorda mediatamente nel caso in cui la calotta sferica *PA* essendo montata nella sua massima altezza sotto la mezzeria della chiave in *A*, questa chiave è condotta dal livello in *a*, al luogo di ricadere al di sotto di *E* per l' arco *A a*, come lo praticano normalmente gli architetti; inoltre la volta sferica raccorda un piccolo semicilindro dello stesso diametro ed il cui asse *eC* , conseguente al prolungamento dell' asse della sfera *PC*, dà l' intersezione comune, che è un semicerchio come nel teorema VIII del I^{er} Libro, il cui raggio verticale è la linea *AC*.

Di conseguenza, questo stesso semicilindro raccorda la grande volta *CED*, alla quale la calotta della sfera non si congiunge che per questa mediazione. Allora questo tratto diventa il medesimo di quello di una lunetta diritta nella volta di cui si è parlato a pag. 6 di questo III^{e} tomo.

Noi consideriamo qui la giunzione immediata delle superfici della sfera e della grande botte per non ricadere nelle cose già dette.

Sia la linea *CP* (***fig. 101 a***) la profondità di una nicchia circolare alla sua imposta, il piano circolare di questa nicchia non sarà che un semicerchio *APB*, ma il suo profilo sarà più grande del quarto di cerchio *PA* di un intervallo di arco *A a*, compreso tra la massima altezza A della volta della nicchia e l' arco della volta di livello il cui profilo è l' arco *DEaC*.

Facendo proseguire dal centro primitivo il quarto di cerchio *AP*, si dividerà nei suoi conci come una metà di cerchio della faccia, per esempio, qui, in due e mezzo per cinque conci ai punti 3 e 4, per i quali si manderà delle parallele alla orizzontale *CP*, che taglieranno la verticale *AC* ai punti f^3 g^4 , le linee C f^3 C g^4 saranno i semiassi verticali di due ellissi che avranno ciascuno la stessa linea *CP*, come semiasse orizzontale.

Per la metà di queste assi date, si descriveranno, attraverso il problema VII del II^{e} Libro, degli archi di ellisse *P* f^3 *F*, *P* g^4 *G* che taglieranno l' arco del profilo della botte *DEC*, nei punti *F* e *G*.

Esattamente allo stesso modo (***fig. 101 b***) si farà la proiezione orizzontale,

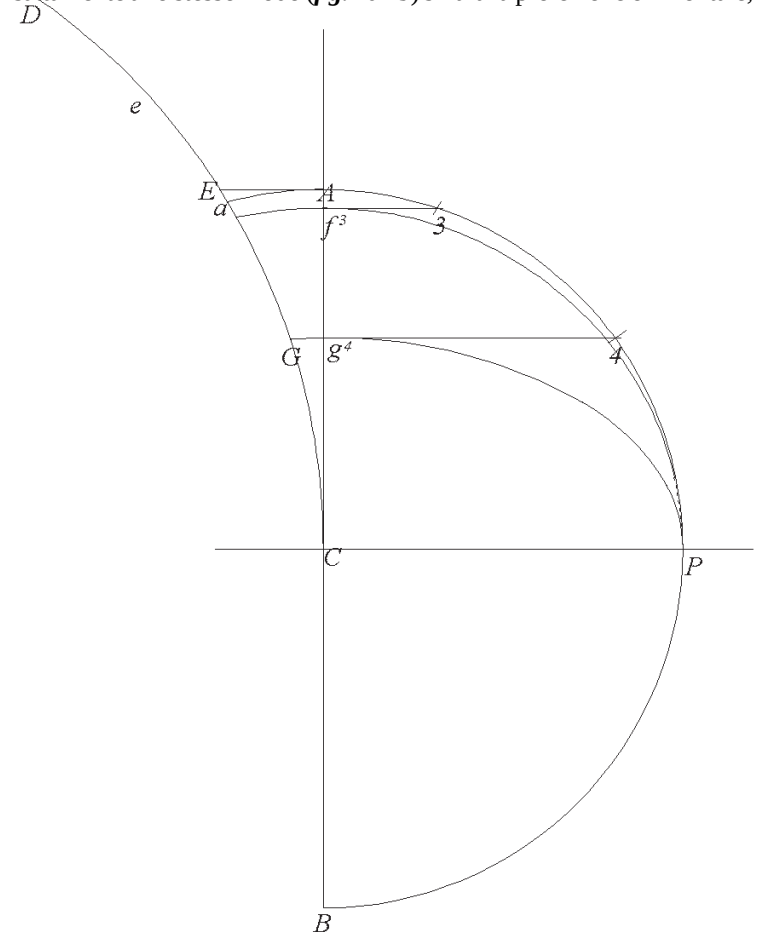


Fig.101 a Immagine di profilo della nicchia a porzione di sfera nel suo incontro con la volta a botte

ripetendo il quarto di cerchio *PA* in *BH* sul biametro *BA*, il quale sarà diviso esattamente negli stessi conci nei punti 1 e 2, dai quali tracciando delle perpendicolari su *BC* si otterranno come loro proiezione i punti p^1 e p^2 , da questi punti e dal polo *P* si faranno passare, come si è fatto precedentemente, degli archi di ellisse che si faranno proseguire indefinitamente al di fuori della linea *CB*.

Per i punti *F* e *G* (sul profilo della botte) si tracceranno delle perpendicolari su *HP* le quali prolungate incontreranno le prosecuzioni degli archi di ellisse rispettivamente nei punti *f* e *g*. Se si traccia anche per il punto *E* una perpendicolare ad *HC*, che incontra *HC* nel punto *e*, si potrà tracciare a mano libera un arco *efgB* che sarà la proiezione orizzontale della linea di raccordo tra la superficie della sfera e quella del cilindro.

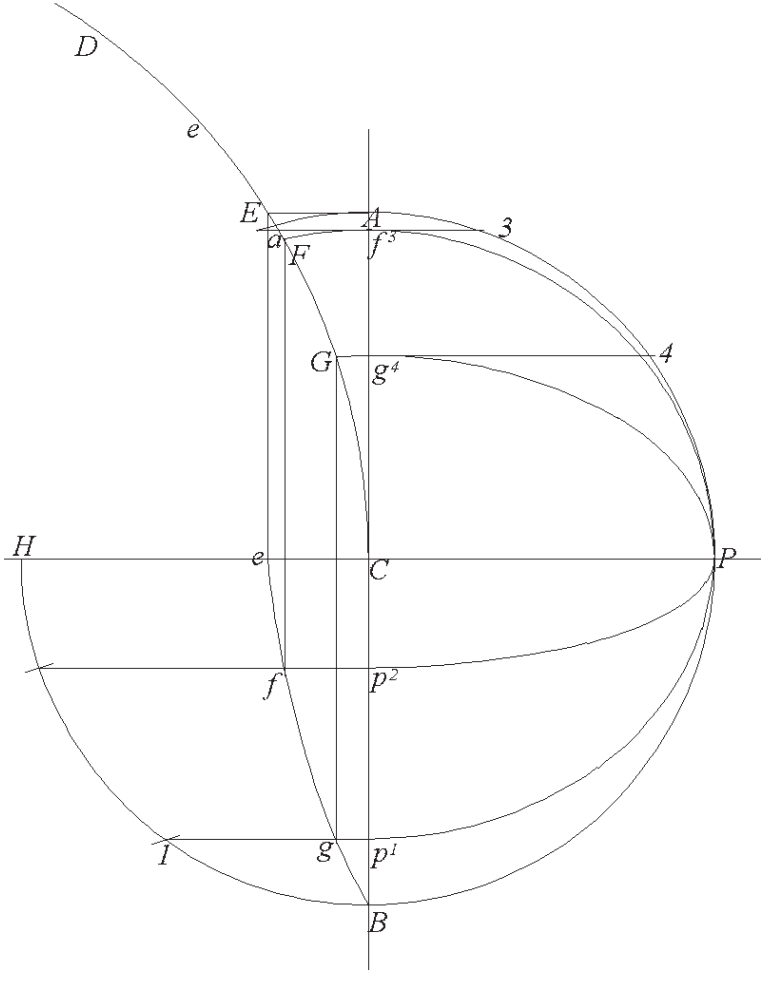


Fig. 101 b Costruzione della proiezione orizzontale della giunzione (*E f g*) della nicchia con la volta a botte

Si potrà fare anche la proiezione della linea di estradosso nella medesima maniera (***fig. 101 c***), portando per i punti *K* 7 8 delle orizzontali, ma si può passarci con il nostro metodo.

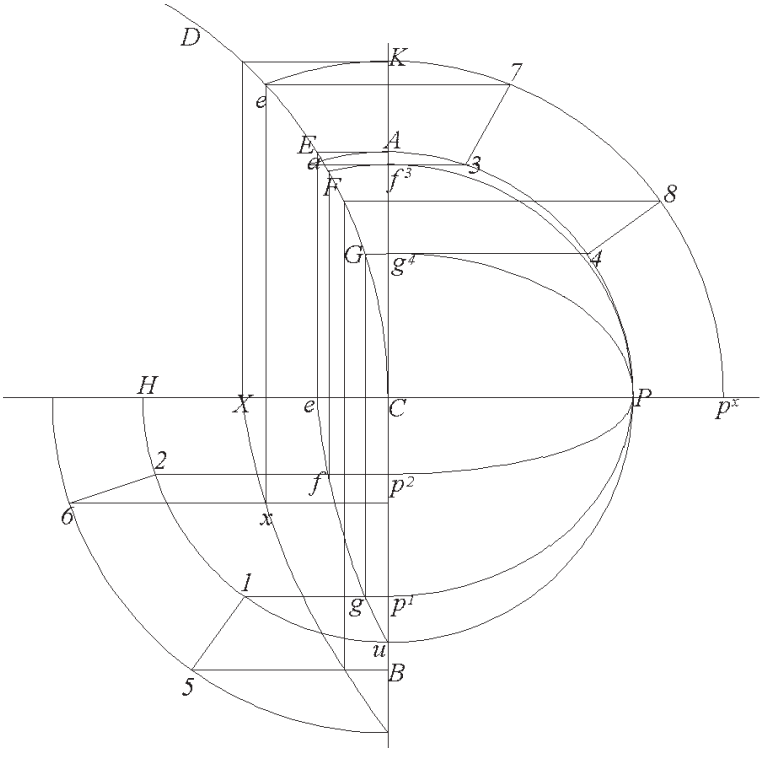


Fig.101 c Costruzione della proiezione del secondo arco di giunzione (*X x*) della nicchia con la volta a botte

Al presente bisogna determinare la grandezza della sezione che deve essere mezzo segmento di sfera, che ha per centro il punto *P*. Si traccerà, seguendo la grandezza della pietra che vi si destina, una linea *TN* perpendicolare a *CP*, che taglierà gli archi ellittici delle proiezioni dei punti di congiunzione nei punti q^1 e q^2, dai quali si tracceranno delle perpendicolari a *TN* che incontreranno il semicerchio fatto sul diametro *TN*, nei punti I^n 2^n, che saranno le divisioni dei conci all' intradosso che si appoggia sulla sezione.

Se per una operazione inversa avessimo fatto il sesto della sezione con le sue divisioni dopo aver fatto le proiezioni del centro primitivo, avremmo trovato, sulla linea *TN*, dei punti di ellissi, delle proiezioni verticali e orizzontali dei punti di congiunzione, prima i punti 3^t e 4^t e dopo i punti q^1 e q^2.

Fatte le proiezioni dei punti di congiunzione (***fig. 101 d***), sia sul profilo che sul piano orizzontale si faranno i piani della calotta piatta nello stesso modo del tratto precedente, con alcune differenze, che al posto di una corda portata per le proiezioni delle divisioni del profilo della

faccia concava prolungata per descrivere un arco di cerchio, come si è fatto alla figura 97, sulla linea *LB*; si manderà qui una tangente *Vu*, alla curva convessa delle proiezioni *f, l, g*, tracciando la corda *fg* alla quale si tirerà una parallela che sia tangente alla curva *flg* ed il cui punto di tangenza chiameremo *l.*

Per avere il raggio del diametro del cerchio che bisogna descrivere su questa tangente gli si costruirà per il centro *C* della sfera una perpendicolare *Cd*, che la taglierà nel punto d dove sarà il centro del cerchio di raggio *du* sarà il raggio che darà un cerchio minore della sfera il cui quarto è l' arco *dLu*; questo raggio *du* taglierà il prolungamento delle ellissi delle proiezioni delle congiunzioni nei punti *zz*, che saranno al piede delle perpendicolari ad *fg* dai quali si alzeranno delle perpendicolari su *du*, che taglieranno l' arco *B*e nei penti t^1 e t^2.

Dati tutti questi punti si opererà per fare i piani della base della nicchia come al tratto precedente o per rimontare più lontano come al tratto della *sezione della nicchia sull'angolo*, visto alla pag. 368 del tomo precedente e del quale rinviamo alla lettura per non fare troppe ripetizioni, la fig. 103 ne mostrerà l' applicazione.

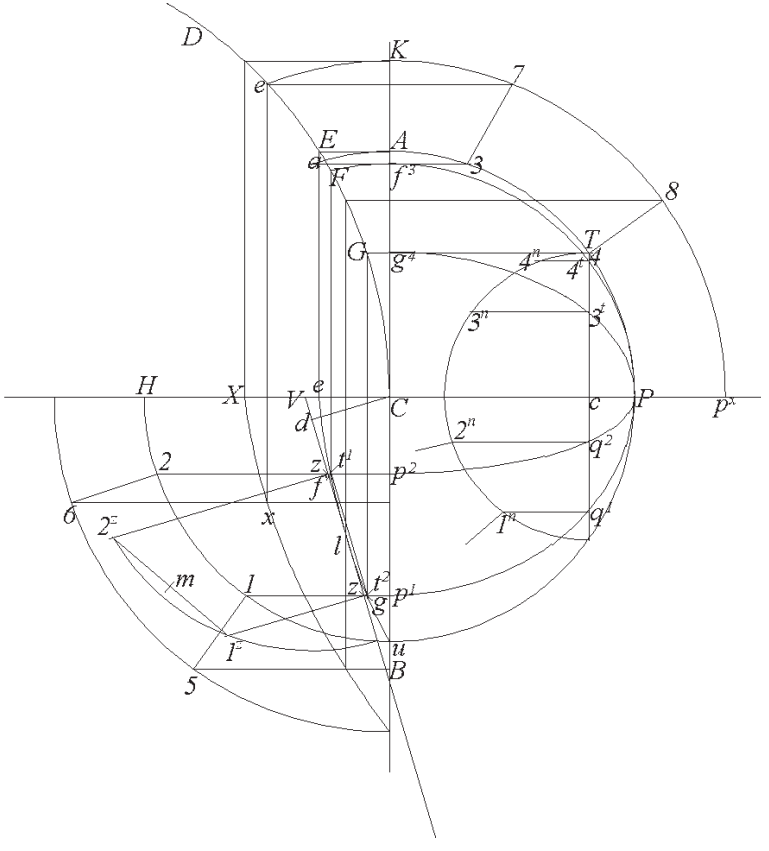


Fig. 101 d Costruzione delle divisioni dei conci di cui I^n e 2^n sono le proiezioni orizzontali attraverso il ribaltamento dell'arco di giunzione passante per il punto 4

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA

Si può comparare l'incontro delle nicchie con le botti di livello o di estremità, a quello di una nicchia sull' angolo di cui si è parlato a pag. 368 al tomo precedente, perché le tangenti della curva convessa della proiezione cadente, dove le corde delle divisioni dei conci nella proiezione rientrante, all'orquando la curva dell'incontro a doppia curvatura è concava, presa orizzontalmente, possono essere considerati come dei piani di muro verticali che formano un angolo cadente dove , un angolo rientrante i quali ritagliano qualche parte di quarto di sfera, oppure comprendono più del suo quarto giacchè gli angoli di questi piani verticali sono cadenti o rientranti, e che i loro incontri si avvicinino o si allontanino dal polo della sfera che è nel mezzo dell'imposta della nicchia.

Supposto ciò la spiegazione del trattato della sezione in nicchia sull'angolo, è conveniente in tutto a ciò di cui si tratta qui, per esempio, che le proiezioni dei giunti di letto, devono essere degli archi di ellisse, perché le sezioni dei piani dei letti che passano per l'asse della nicchia, e per le divisioni del cerchio primitivo, formando dei cerchi alla calotta della sfera, i quali sono inclinati rispetto al piano orizzontale, le loro proiezioni devono essere una ellisse per il II teorema del II Libro alla pag. 209.

Per quanto riguarda il metodo per la scavazione della sfera, è chiaro che noi cominciamo con l'inserimento delle piramidi tronche, dove le superfici delle loro lati, non potranno toccare quattro angoli della porzione sferica che il concio deve comprendere; se gli angoli dell'incontro della botte con la sfera, a ogni divisione dell'arresto dell'incontro a doppia curvatura, non sono situati gli uni di fronte agli altri, seguendo le condizioni che abbiamo spiegato all'inizio del II Tomo a pag. 4; e per questo che la calotta piatta che è una delle superfici delle piramidi tronche, inscritta nella sfera, non toccherà la calotta sferica che in tre punti, si è obbligati a cercare la posizione del quarto angolo del concio che essa non tocca, formando un secondo pannello dietro alla calotta piatta.

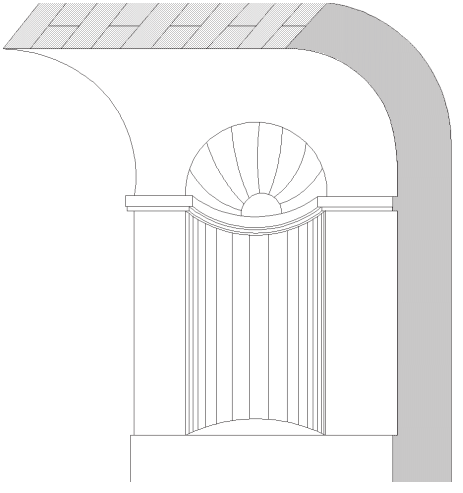


Fig. 102 Incontro di una volta sferica con una volta cilindrica

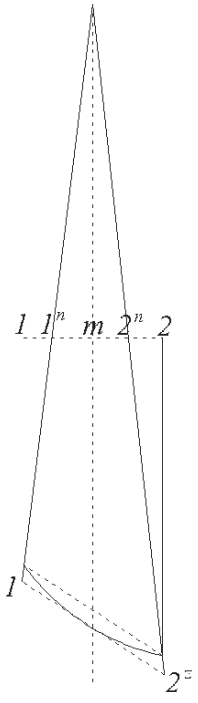


Fig. 103 Pannello della calotta piana

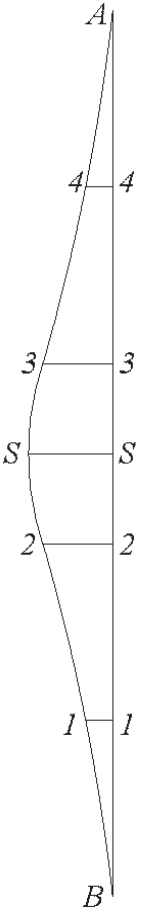
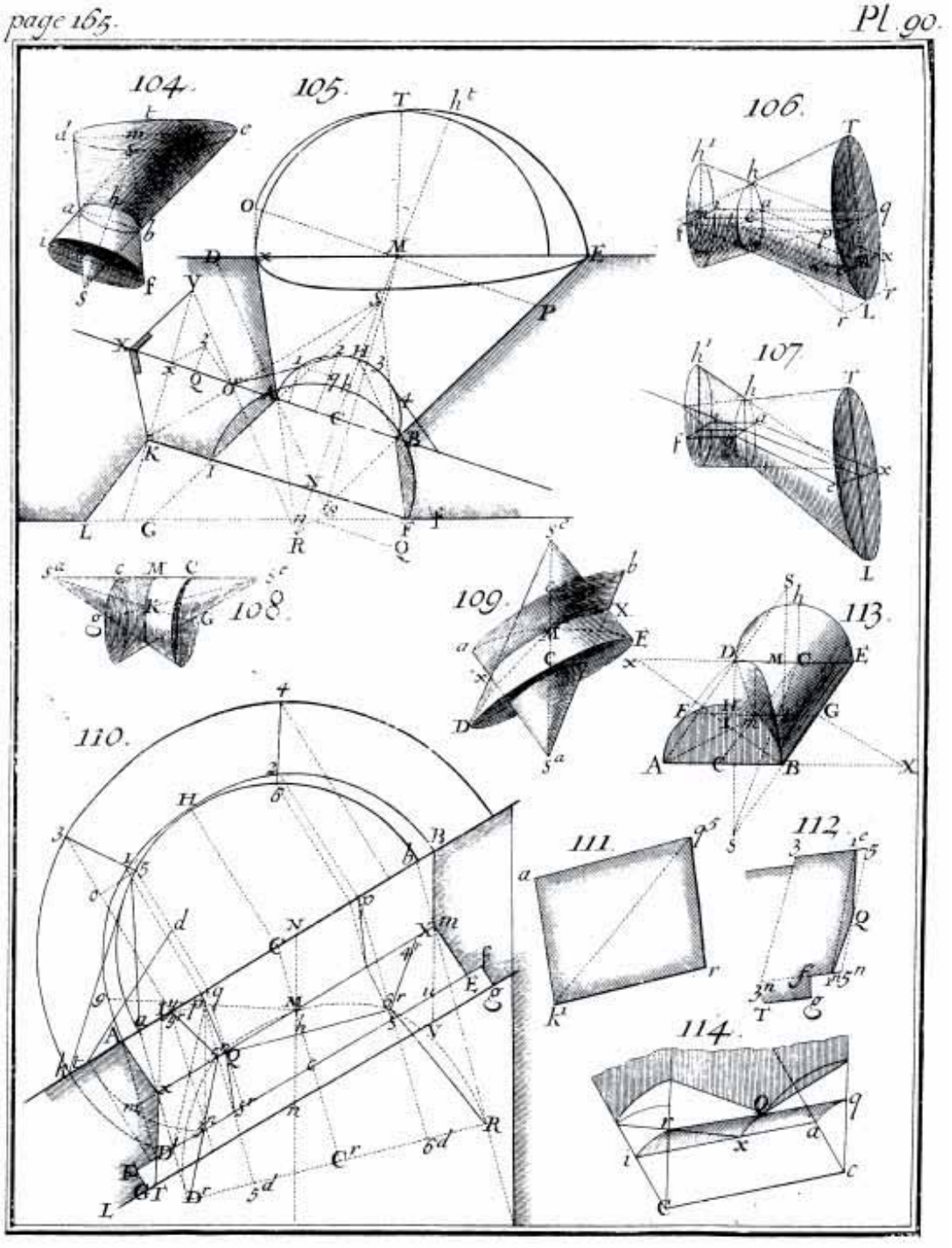


Fig. 101+ Sviluppo dell'arresto di faccia della nicchia all'incontro con la botte


page 165.
Pl. 90.
104.
105.
106.
107.
108.
109.
110.
111.
112.
113.
114.

CAPITOLO QUARTO

SULL'INTERSEZIONE DI VOLTE

Coniche tra loro

Noi dobbiamo considerare i corpi Conici, come le Volte a botte seguono le loro differenti situazioni rispetto all'orizzonte, ci si offrono tre diverse combinazioni di parti di Volte composte da porzioni Coniche. La prima, quando i loro assi sono orizzontali. 2ª Quando l'uno è orizzontale e l'altro verticale. 3ª Quando l'uno è verticale e l'altro inclinato. 4ª Quando entranbi sono inclinati.

PROBLEMA IV

Fare la giunzione di due Volte qualunque, o Corpi Conici nella nostra situazione

Prima situazione, dove gli assi delle porzioni Coniche sono comuni, in una stessa direzione orizzontale o inclinata.

Nella costruzione di Fortificazioni, abbiamo spesso occasione di fare opere di questo tipo, di queste una è di queste aperture che al giorno d'oggi chiamiamo Embrasures, e anticamente Cannonieres, perché servono a collocarci i cannoni.

La seconda, è un modo di costruire certe Porte straordinariamente angolate (di sbieco, biaises).

Per l'una e per l'altra apertura, la giunzione delle due porzioni di Volte coniche che la compongono non deve fare un costolone (spigolo, arete) a doppia curvatura; e non è indifferente il fatto che siano coniche arbitrarie, perché abbiamo visto nel Primo Libro(1), quando abbiamo parlato dell'intersezione dei coni tra di loro, che ci sono più circostanze in cui l'incontro delle loro superfici, formi una curva a doppia curvatura, piuttosto di quelle (circostanze) in cui formi una curva piana.

PRIMO CASO

Cannoniere ou Embrasure adibite alla posa del cannone, su un muro a scarpa (en talud) o a piombo.

Trattando delle Volte coniche semplici, nel tomo precedente(2), abbiamo fornito la maniera di fare ciascuna delle due porzioni di coni tronchi, che compongono l'Embrasure, l'una dal paramento (imposta, parement) esterno, che generalmente è a scarpa, fino al Collet, l'altra dal paramento interno, che generalmente è a piombo, fino alla testa dello stesso collet, che fa per l'una, una Trompe conica a scarpa, e per l'altra, una Trompe conica senza scarpa.

Ciascuna di queste parti può anche essere retta o sbieca, sulla direzione che deve essere comune, comunque girata in senso contrario dalla base dell'una al vertice dell'altra.

Per venire alla trattazione che riguarda il taglio delle pietre di un'Embrasure voltata, potrei supporre quella (la trattazione) sulla disposizione, e sulla direzione delle parti sul piano orizzontale; insomma siccome il modo solito di disegnare un'Embrasure, quando è sbieca, ci mette in difficoltà, per la costruzione della Volta, per la quale (costruzione) gli stessi mastri muratori e gli ingegneri, che le devono costruire, sono in difficoltà; si propone di far osservare da dove quelle hanno origine, per fornire il mezzo per evitare (le difficoltà).

Sia (Fig.105) DEFG una parte di muro nella quale vogliamo costruire un'Embrasure voltata, della quale la superficie interna GF è a piombo, e l'esterna DE è a scarpa.

Cominceremo nel dare la linea di mezzo MN, la direzione opportuna per il cannone, che dobbiamo collocarci, perché colpisca nel punto più necessario da difendere, che proporrei qui obliquo al muro LGF.

Determineremo in seguito la profondità NC, dal Collet dell'Embrasure AB, dal di dentro dell'imposta interna, la quale è di solito tra 15 e 18 pollici, quando non c'è punto di sbieco, ma quando c'è inclinazione nella linea di mezzo, bisogna fare attenzione, aggiungendoci la lunghezza QF, che è data da una linea NQ perpendicolare(a squadra) alla direzione NM, che sia il più vicina (possibile) alla metà della larghezza interna dell'Embrasure.

La profondità NC, del Collet AB, è stata determinata, ne determineremo anche la semi-larghezza AC e CB chiaramente sulla linea di mezzo MN, che segue la grossezza (diametro,dimensione) del pezzo di cannone che ci dobbiamo posare, di cui non dobbiamo considerare il calibro, ma il metallo di cui esso è fatto.

Nelle Batterie dei Porti di mare, dove i cannoni sono di ferro e di grosso calibro, spesso di 48, non diamo molto meno di tre piedi di Collet; in quelle di terra, dove l'Artiglieria è di ghisa e di piccolo calibro, qualche volta non ne diamo che la metà (di tre piedi, 1,5piedi?).

Nota 1: Nel Primo Libro, dove vengono trattate le intersezioni fra due coni, si possono vedere i casi in cui tale intersezione sia una linea curva ma piana oppure una linea a doppia curvatura

Nota 2:Per individuare le due porzioni di tronchi di cono, costituenti l'intradosso di un'Embrasure, vedi, nel Tomo secondo, le trattazioni sulle Volte coniche semplici.

I punti A e B, sono determinati (di posizione, posizionati), bisogna regolare l'apertura della strombatura DE, seguendo lo spessore del muro FM; vale a dire, che più il muro sarà spesso, più anche la strombatura deve aumentare, perché il fiato del cannone fa un vortice d'aria, che si allarga all'auscita della bocca di fuoco, con un impeto così forte, che fa tremare lo spessore del muro(jouees) delle Embrasures, se non si allargano abbastanza mano a mano che si allontanano dal Collet.

La maniera solita di disegnare una strombatura, è portando la metà del centro *M* sulla faccia, da una parte e dall'altra, in *MD* ed *ME*; tirare dai punti *D* ed *E*, per i punti *A* e *B* del Collet, lo spessore esterno *DA* ed *EB*, e tramite queste (rette) per gli stessi (punti) *A* e *B*, portiamo delle parallele *AG* e *BF*, che formano lo spessore interno.

Questo modo è valido, quando l'Embrasure è retta, e lo stesso sufficiente quando questa è sbieca, e quando essa deve restare aperta verso l'alto. Ma

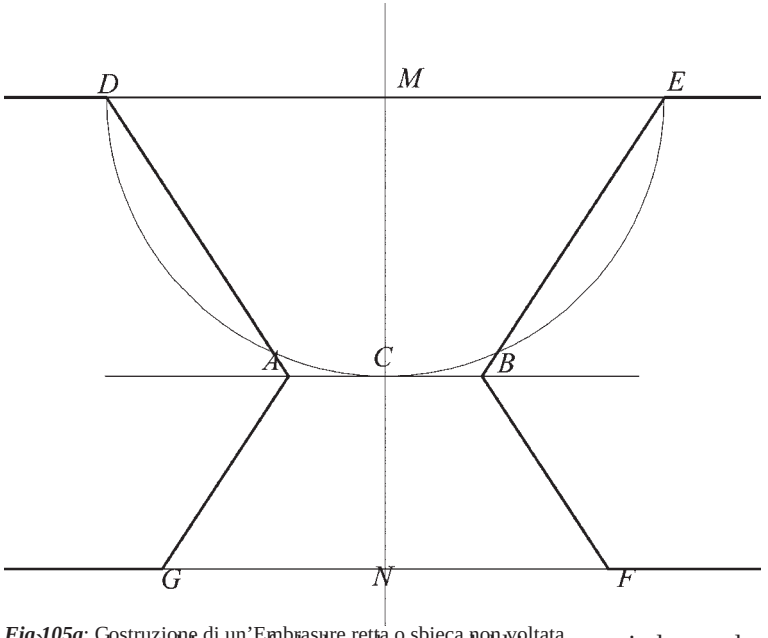


Fig.105a: Costruzione di un'Embrasure retta o sbieca non voltata

se è angolata, è bisogna farle la volta, non dobbiamo tracciarla uguale, per due ragioni; la prima, è che prolungando gli spessori, si formano due sezioni di coni diverse, DSE e GsF, delle quali gli assi SM e sn non sono più sulla direzione data NM; di conseguenza non avranno gli assi comuni, lo spigolo di intersezione delle Volte, interna ed esterna, non potrà essere né un cerchio, né un'ellisse, ma una curva a doppia curvatura[3].

La seconda, è che non si possono fare gli spessori interni paralleli a quelli esterni opposti, senza creare dell'irregolarità sulle Volte coniche, interna ed esterna, perché la direzione della linea di mezzo MN, deve essere loro comune, e di conseguenza l'asse dei due coni girati in senso contrario, che devono avere per sezione piana, (così comune) l'arco a tutto sesto del Collet AHB. Ora, questa sezione AB, non è nella metà di MN, né parallela alle basi DE e FG, né lo stesso al contrario, perché è perpendicolare all'asse; ecco perché i due coni non possono avere i loro lati opposti paralleli, perché non sono assemblabili, e nel caso si vogliano fare parallele, la Volta diviene una composizione di quattro quarti di coni diversi, che sarebbero di angolo rientrante alla chiave della faccia interna ed esterna, quando la stessa sezione AB, sarà loro comune per supposizione, fatto che bisognerà evitare.

Per dimostrarlo, bisogna prolungare tutti gli spessori, sino alla linea di mezzo data *MN*, e si avrà che tutti quelli devono toccare questa linea in punti diversi; osserva, *DA* in *N*, e *EB* in *R*.

Lo stesso riguardo alla strombatura interna, GA tocca NM, nel punto s, e fB in H, perché gli angoli alterni DNH e fHN, devono essere uguali, e così gli angoli GsR, MRE, e l'angolo DNM , è più grande di MRE, di conseguenza le metà di triangoli diversi, apparterranno a coni differenti.

Dunque bisogna tracciare l'Embrasure che deve essere voltata diversamente da quella che non lo deve essere (voltata).

Avendo determinato il Collet, come detto, in AB, perpendicolarmente alla direzione data, che taglia il paramento esterno del muro in M, si porterà per questo punto la linea OP, parallela ad AB. Poi avendo fissato in MP la metà della strombatura, di un'Embrasure retta, si avranno i punti P ed O, per i quali si disegneranno gli spessori AO, e BP, che, (saranno) prolungati quanto necessario, toccheranno la faccia (superficie) esterna del muro in x ed in E; e poi dai punti A e B, si tireranno le parallele AG, BF agli spessori esterni, e l'Embrasure sarà tracciata.

Qualora l'inclinazione sia troppo grande, da far allungare (aumentare) lo spessore AG, tanto di più rispetto al suo opposto BF, siamo obbligati a fare un dente (tacca, gradino, cran) di rientranza del muro, come si vede in LKF, così da togliere la parte sporgente in G, che impedirebbe che si possa ragionevolmente avvicinare il cannone alla batteria, perché la ruota dell'affusto sul lato di G, potrebbe avanzare meno dell'altra, che deve essere poggiata proprio in F.

Il piano orizzontale (pianta) dell'Embrasure è stato tracciato, bisogna regolare il prospetto. Generalmente costruiamo l'apui mC orizzontale,e la plongée CM, più o meno inclinata, poi la posizione dell'oggetto dal quale dobbiamo mirare, considerando che la Volta e la plongée, siano distanziati (lontani) dalla bocca del cannone, perché l'impeto del suo fiato non possa far tremare le pietre o i mattoni, come ho visto in qualche posto di mare; perché bisogna osservare che il fiato sortisce più effetti sulle Embrasures di muratura, che su quelle di fascine (mannocchi, fascines) e di faucissons (?? Faucillons??), le quali per loro caratteristica cedono un po'.

Nota 3:Attenzione perchè nel disegno non viene indicato uno dei due coni "sbagliati", con l'asse non in comune, infatti questi sarebbero: *DSE*, come detto e disegnato, e poi *GsF*, che invece risulta solo nello scritto mentre nel disegno è quello giusto con l'asse su *MN*.

L'Embrasure è stata tracciata in tutte le sue parti, e le altezze delle chiavi degli archi a tutto sesto, relativamente a quelle del Collet che prendiamo come originaria (primitiva), perché è la parte più importante:si avrà come oggetto di costruzione due porzioni di coni tronchi come quelle di due pennacchi (trompes) diversi, fino alle loro mensoline (trompillons), le quali sono unite per l'arco a tutto sesto comune del Collet, che abbiamo preso come originario, si determinerà il contorno delle altre due di prospetto esterno a scarpa (en talud) e interno a piombo, come ho detto nel secondo Tomo pag.222[4]. Non si fa più che la giunzione delle due Volte per i Conci, che facevano parte dell'una e dell'altra doele, ce qui se sera par le moyen des biveaux de doele plate, nello stesso modo che abbiamo indicato, per l'intersezione delle Volte a botte e delle Volte sferiche, seguendo il nostro metodo generale, sul quale eccovi l'applicazione al caso presente, della Fig.105.

Avendo fatto la proiezione dei joins de lit (fughe di terra) in modo ordinario, e quella dell'intersezione delle due doeles plates, fuori e dentro il Collet, per esempio, al secondo corso di conci, sotto l'imposta in 3-4,

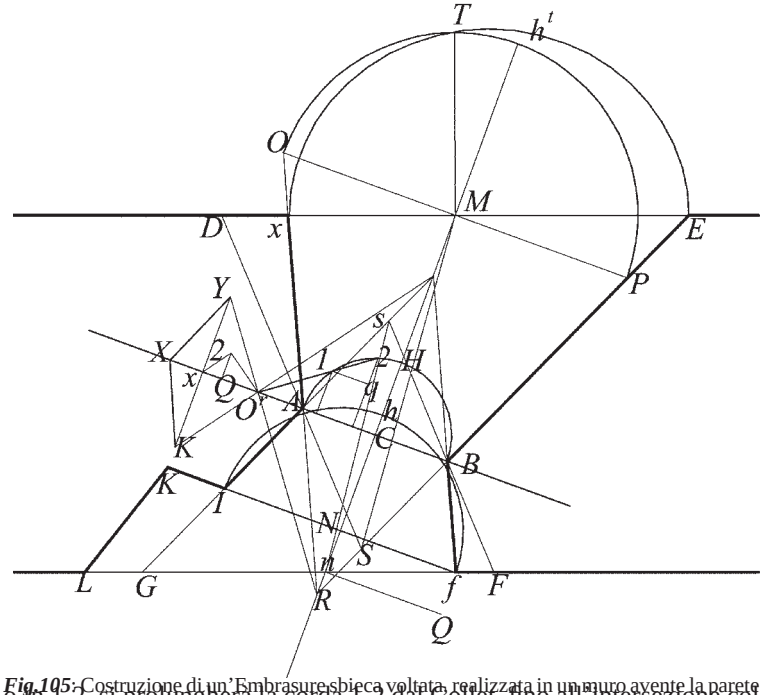


Fig.105: Costruzione di un'Embrasure sbieca voltata, realizzata in un muro avente la parete esterna a scarpa e quella interna a piombo.

0 in 1-2, si prolungherà la corda 1-2 dal Collet, fino all'intersezione col diametro AB, che questa incontrerà in O^r, per il quale e per i vertici dei coni s, R, si tracceranno delle linee sO^{r}K, RO^{r}V, che saranno le sezioni delle due doeles con l'orizzonte.

Per mezzo di queste due sezioni di doeles plates con l'orizzonte, si troveranno facilmente gli angoli (les biveaux) della loro intersezione; quello che andiamo a fare fuori dalla figura , per non riempirla di troppe linee e segni.

Su AB, prolungata oltre il punto O^r, si porterà la proiezione verticale(retombée) 1q in O^{r}Q, da dove si alzerà una perpendicolare Q2 con la stessa altezza della proiezione q2. Su O^{r}2, si traccerà per il punto 2, una perpendicolare 2x, che taglierà O^{r}Q, prolungata, in x, per dove si traccerà nello stesso modo da Ox, una perpendicolare che taglierà la sezione dell'orizzonte SK in K e RV in V [5]. Su O^{r}x prolungata, si riporterà la lunghezza 2x, da x in X, da dove si tireranno le rette XK, XV, l'angolo KXV, sarà quello che stiamo cercando per assemblare le due doeles plates della strombatura esterna con quella interna, le quali daranno la posizione di quattro angoli, di ciascuna delle doeles coniche, che si dovranno poi scavare come solito, come è stato detto per questo tipo di superfici; per mezzo di questo angolo (biveau), e di quelli de lit et de doele di ciascuna delle Volte coniche in particolare, si taglierà il concio di chiave di volta nello stesso modo che si era detto, per tutte le Trattazioni precedenti sulle Volte composte[6].

C'è una seconda maniera di fare le Volte strombate, pressappoco come il Corne di Vache et le biais passé, che è quella di sbozzare i conci come se si trattasse porzioni di Volte a botte; è ciò che applicheremo nella Trattazione seguente.

SECONDO CASO

Porta sbieca e Corne de Vache doppio addossato, di cui la doele è a gomito con un angolo sporgente, che si apre sempre di più dall'imposta alla chiave, di cui la mezzeria (la metà, le milieu) è una linea retta

In questa Trattazione precedente, tutti les lits saranno tagliati con un angolo sporgente e rientrante, e la doele piegata a gomito al Collet, e ugualmente o di poco diversa da un'imposta all'altra; qui noi vogliamo che les lits siano piani, senza interruzioni (brisure), e che la doele sia piegata a gomito diversamente, dall'imposta alla chiave, che si vuole in linea retta al suo centro, per non diminuire niente all'altezza del passaggio, e per altre ragioni di costruzione che spiegherò.

Qualche volta si trovano dei passaggi così obliqui, nelle Opere di

Nota 4: Per la costruzione dei due tronchi di cono, profili esterno ed interno dell'Embrasure, vedi il Tomo Secondo, pag.222.

Nota 5: C'è un errore nello scritto: non c'è nessuna linea *SK* che abbia pertinenza con la trattazione, la retta di cui si parla è sK; si noti, infatti, che *S* è il vertice del cono precedentemente tracciato e non avente l'asse su *MN*.

Nota 6: Per come tagliare il concio di chiave di volta di questa Embrasure, vedi tutte le Trattazioni precedenti riguradanti Volte composte.

Fortificazione, che non ci si possono fare le Porte abbastanza sbieche, da seguirne la direzione, e questo per due ragioni.

La prima, perché uno degli spigoli del piedritto diventa così acuto, che non ha alcuna forza; sicuro (de forte) che questo può essere facilmente danneggiato sia nella fase di taglio sia in quella di posa, e ciò che è peggio, può anche essere danneggiato dai minimi urti delle cose che ci vengono fatte passare.

L'altra, perché se si da ai conci della Porta, la direzione obliqua senza correzione, potrebbero au vuide d'un cote, come si può vedere dall'esempio della Fig.110, dove la perpendicolare M9, nel centro della direzione della chiave Nn, spinge au vuide in 9; sicuro che l'arcata potrebbe cadere, se la chiave non fosse stata appoggiata par une longue queue Mn. (per la maggior parte sulla "scia" coda Mn)

Per rimediare a questo inconveniente, conviene smussare gli angoli acuti, uno dentro e uno fuori, e cambiare la direzione dei joins de lit (giunti, fughe di terra), per renderla meno obliqua, e conservare il livello dei joins de tete (fughe di testa) sul davanti e sul dietro.

Sia il parallelogramma *IBVT* (***Fig.110***), la pianta (il piano orizzontale) di un'apertura di Porta sbieca, che segue la direzione della sua mezzeria *Nn*, che fa con la faccia *AB* da una parte l'angolo acuto *ANn*, e dall'altra l'angolo ottuso *nNB*.

Avendo determinato lo spessore del piedritto, e la posizione della battuta *DFG*, dove si deve inserire il cardine della porta ad angolo retto, divideremo lo spessore *Dt* o *ID*, del quadro (tableau) in due, ugualmente in *m*, da dove si condurrà la linea *mm*, parallela ad *AB*, che taglierà i quadri in *xX*, dal quale si tracceranno le linee *xA* e *XE*, perpendicolari alle facce *AB* aul davanti, e *fF* sul retro, che daranno i punti *A* ed *E*, e per il piano orizzontale di ciascun piedritto, una superficie piegata a gomito *AxD*, *BXE*, al posto dei quadri retti *ID* e *Bu*. Per i punti *A* e *D*, si traccerà la linea *AD*, e per il punto *B*, la parallela (ad *AD*) *BE*, che si prenderanno per le direzioni dei piedritti, senza considerare l'angolo sporgente del loro quadro.

Per i punti *xX*, si tracceranno le parallele a *DA* e *BE*, che taglieranno la faccia *AB*, in *a* e *b*.

Su *ab* preso come diametro, descriveremo il semicerchio *aHb*, e con *AB* come asse maggiore, e *CH* come metà dell'asse minore, si descriverà la semi-ellisse *AHB*. Poi avendo diviso il sesto nei suoi conci, per esempio, qui, in tre nei punti *1* e *2*, e avendo tracciato i suoi joins de tete (giunti di testa) *1-3* e *2-4*, che taglieranno il semicerchio *aHb*, nei punti *5* e *6*, tireremo giù le perpendicolari di queste divisioni su *AB*, che (queste)la taglieranno nei punti $P^{(7)}$ e *p*, da dove si tirerà la direzione dei joins de lit (fughe di terra) *PS* e *ps*, paralleli a *AD* e *BE*.

Avendo prolungato queste direzioni, faremo loro una perpendicolare D^rR, che le taglierà nei punti D^r5^d, 6^dR, che saranno le proiezioni del diametro dell'arco a tutto sesto D^rhR, formato come nelle Volte a botte sbieche, per avere l'angolo di terra e di doele $R6^r4^r$, o $D^r5^r3^r$.

Si tirerà giù dal punto *5*, una perpendicolare *5q*,su *AB*, che la taglierà nel punto *q*, da dove si traccerà *qQ* parallela ad *AD*, che taglierà la linea *mm* al punto *Q*, l'angolo $PQs^{(8)}$, sarà la proiezione del join de lit (fuga

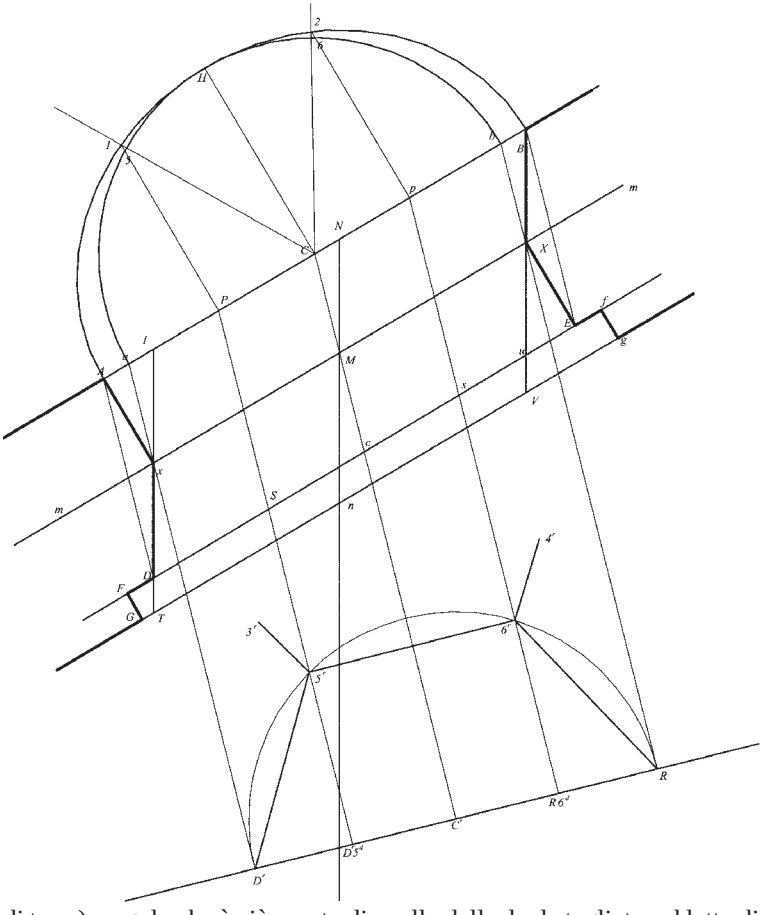


Fig.110a. Costruzione di una porta sbieca e Corne de Vache, doppio addossato, individuazione dei join de doele AxD e, e degli angoli di terra e di doele R6 4

di terra), angolo che è più aperto di quello della doele tagliata nel letto di posa inferiore *AxD*, e sarà più saldo di quello del letto di posa superiore, se ce n'è uno, perché si apre sempre di più avvicinandosi alla chiave, o sparisce nel centro *Cc*, che è una linea retta.

Ci resta da tracciare les panneaux di lit e quelle di doele.

Nota 7: nella figura le proiezioni perpendicolari di *5* e *6* su *AB* sono indicate con le lettere, rispettivamente,*p* e *q*

Il panneau della doele plate, deve essere fatto, come per un concio di Volta a botte, semplicemente sbieco, di cui la proiezione è il parallelogramma *aqri*. Avendo tracciato la diagonale *qi*, la porteremo in *qk* su *AB*, e si traccerà *k5*, che sarà il valore di questa diagonale, per mezzo della quale

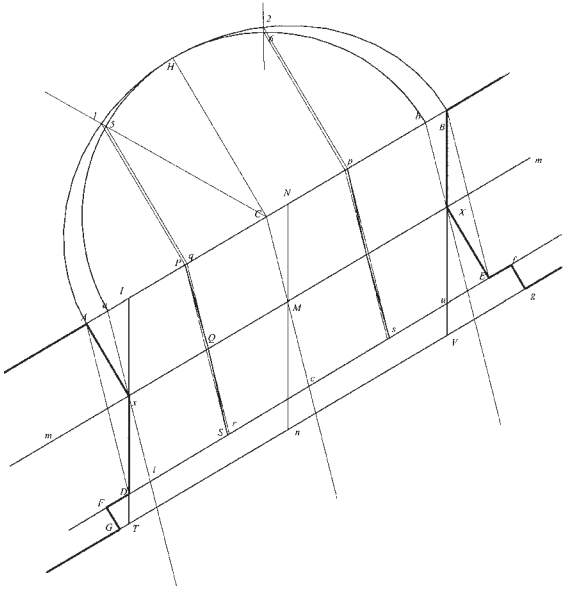


Fig.110b: Costruzione del join de lit *PQs* di un porta sbieca

si formerà il panneau di doele (***Fig.111***) come è stato detto nel secondo Libro, pag.357[9], facendo due triangoli uguali, su questa base comune, con la corda di testa *a5*, e la proiezione di un join de lit *qr*, o *ai*, tali sono

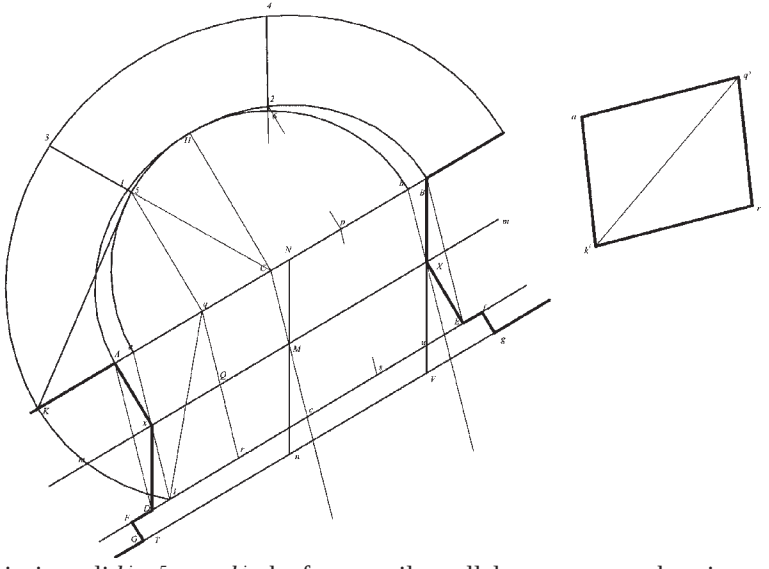
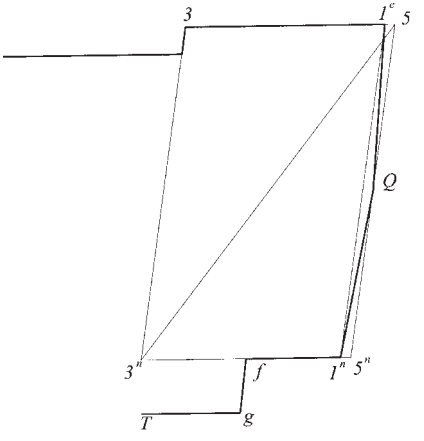


Fig.111: Costruzione del panneau di doele plate

i triangoli *1kr* e *5rk*, che formano il parallelogramma *ar*, che stiamo cercando.

Formeremo nello stesso modo il panneau de lit, tirando giù dal punto *3* dell'estradosso una perpendicolare su *AB*, che taglia qui questa linea in *y*, se si traccia $y3^n$, parallela a *qr*, si avrà il parallelogramma $yqr3^n$, che sarà la proiezione du lit, che si formerà nello stesso modo di quello della doele plate, per mezzo di una diagonale $q3^n$, che porteremo su *AB*, da *q* a *t*, e la differenza delle altezze dei punti *5* e *3*, che è *o3*, sarà riportata in *qd*, la linea *dt*, sarà il valore della diagonale $q3^n$, per mezzo della quale formeremo come sopra, il parallelogramma $3\text{-}5\text{-}5^n\text{-}3^n$, della ***Fig.112***, i cui lati $3\text{-}3^n$ e $5\text{-}5^n$, sono uguali alla proiezione *qr*, e i lati *3-5* e $3^n\text{-}5^n$, sono uguali al giunto di testa *3-5*, nell'alzato della faccia nella ***Fig.110***.

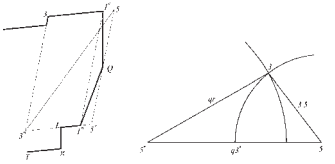
Per finire di formare questo panneau de lit, bisogna portare la lunghezza *5-1*, dall'alzato in $5\text{-}1^e$, del panneau sul davanti, e 5^n1^n, sulla soglia (seuillure); dal centro *Q*, della linea $5\text{-}5^n$, si tracceranno le linee $Q1^e$, $Q1^n$, che formeranno l'angolo 1^eQ1^n, che è il join de lit che stiamo cercando, per determinare l'inclinazione reciproca delle due parti della doele plate, che si stromba dal di fuori e dal di dentro.



APPLICAZIONE DELLA TRATTAZIONE SULLA PIETRA

Avendo eretto una parete per sostenere la doele plate, ci applicheremo il panneau per tracciarne il contorno. Poi con il biveau de lit e di doele preso l'arc-droit $R6^r4^r$, si batterà la pietra per formare i corsi, sui quali si applicheranno i panneaux che gli si confanno; trova, *kaiFGL*, per il corso (lit) inferiore, e $3\text{-}5\text{-}5^nfgT$ per quello superiore della ***Fig.112***, posando i punti $5\text{-}5^n$, q^rq5 della doele, e gli angoli *a* ed *i* del corso (lit) inferiore, e *k* e *1* della doele.

Nota 8: C'è un errore nello scritto: indica l'angolo *PQs* ma in realtà è *PQS*.
Nota 9: Per una costruzione più dettagliata del panneau di doele vedi il Libro Secondo, pag.357.



Dopo aver così formato le teste, ci applicheremo il panneau dell'arco del sesto originario *a5*, seguendo il quale si scaverà la doele, come se si trattasse di una semplice Volta a botte sbieca.

Essendo stata così scavata questa doele, si condurrà una curva, parallela allo spigolo esterno, trascinandoci la lunghezza ax, chiaramente nel mezzo. In più si prenderà il panneau di testa *3-1*, *Ak*, che riporteremo al lit (corso, letto) inferiore, della lunghezza *1-5*, e a quello inferiore della lunghezza *Aa*, e in questa situazione tracceremo l'arco *1A* sul davanti, entro la quale ed entro la linea curva tracciata di traverso nella doele, come abbiamo appena detto, si batterà la pietra appoggiandola a squadra, chiaramente su questi due archi; nota, *A1* allo spigolo esterno, e *a5* nel mezzo della doele, e la strombatura esterna sarà formata.

Se ne faranno di uguali per l'interno, se non ci sono soglie (point de seuillure) da rispettare, ma se ce n'è una come in questo esempio, bisognerà tracciarla parallelamente all'arco *1A*, e chiaramente seguendo la profondità, dopodichè si formerà la strombatura interna, come abbiamo detto.

USO

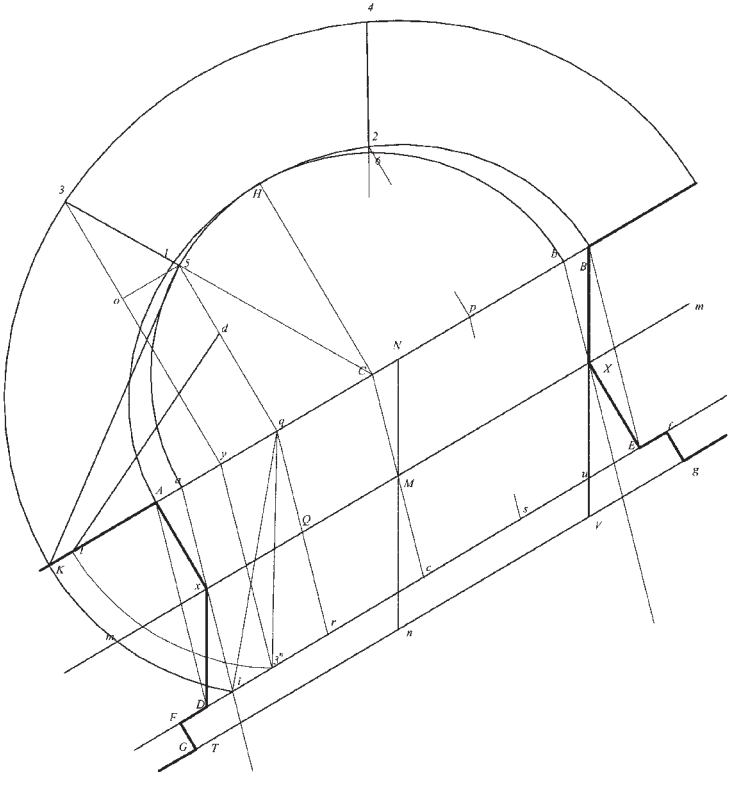


Fig.110d. Costruzione della strombatura esterna della porta sbieca.

Ho fatto eseguire due di queste porte rientranti in delle strettoie nelle Piazze d'Armi (reduits rentrants, guardiole), dove il passaggio del sotterraneo è obliquo così come lo si vede in ***Fig. 110*** perché l'angolo del fianco (flanque) e quello della scanalatura (gola), sono estremanente ottusi.

Nell'una ho fatto i giunti di terra ad angolo sporgente e rientrante come in *PQS*, per maggior solidità, al fine che la spinta del concio, alla metà del suo spessore, sia pressochè diretta (normale, perpendicolare).

Nell'altra, ho messo in opera la Trattazione, come l'ho data qui, per redere l'operazione più semplice, ma non potendo vegliare di continuo sull'esecuzione, non è stata ben fatta, perché, per sbaglio del muratore, sono stato obbligato a trattare con un cattivo scalpellino (tagliatore di pietre), che girava indifferentemente il panneau di sesto ellittico come se fosse stato circolare; allora per questo bisogna avere tanta attenzione; perché gli operai non capiscono a fondo ciò che gli si fa fare, sebbene essi sovente parlino bene si se stessi, e spesso per vanità; (questo è) ciò (che) mi ha spinto a disegnare io stesso la terza che ho fatto eseguire.

Per rendere l'idea dell'applicazione di questa Trattazione per la formazione di una Embrasure ho disegnato in prospettiva, nella ***Fig. 114*** un concio sbozzato a Volta a botte, e terminato in due porzioni di coni diversi.

IDEA PER UN NUOVO CORNE DE VACHE DOPPIO

Si chiama in modo non appropriato Corne de Vache doppio, una Volta cilindrica chiamata anche Biais passé, quando invece il Corne de Vache semplice è una Volta conica; per questo il (Corne de Vache) doppio deve essere l'unione di due Volte coniche, che abbiano le imposte parallele tra loro, come la Biais passé, e che abbiano come sezione, per l'asse e sull'imposta, due triangoli rettangoli *ABS*, e *DEs* come il Corne de Vache; tale è la Volta disegnata in ***Fig.113*** dove si vede che

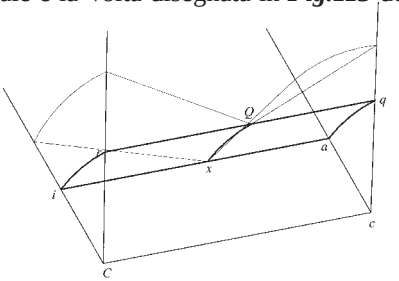


Fig.114: Vista prospettica di un concio sbozzato a volta a botte

le due superfici di quelle Volte si incontrano formando un'emi-ellisse, disegnata in prospettiva in *DMB*; si è detto nel primo Libro, pag.104 ***Fig.79***[(10)] perché questo spigolo curvo è piano ed ellittico, ma non è a doppia curvatura.

L'asse maggiore di quest'ellisse è dato dalla diagonale *DB* sul piano orizzontale, e si otterrà la metà dell'asse minore tirando, dalla metà *M* di questa diagonale, una linea *FG*, parallala ad *AB*, che taglierà il lato *Ds* di uno dei coni in *I*, e l'altro *BS* in *L*; il medio proporzionale tra *Im* e *Gm*, sarà la metà dell'asse minore che stiamo cercando, che abbiamo indicato (messo) in *Mm*.

Non vedo l'interesse di entrare qui nel dettaglio di costruzione di una Volta simile, di cui non vedo la possibile applicazione, tranne nel caso in cui si debba voltare un passaggio sbieco fra due profili a tutto sesto uguali, tra i quali si trovi un qualche ostacolo alla prosecuzione della chiave di volta (orizzontale) da una faccia all'altra.

C O R O L L A R I O

VOLTA A SPIGOLO (COSTOLONE) CONICO

In questa composizione di due Volte coniche, si può tracciare una delle quattro porzioni di coni, che si chiamerà Volta di spigolo conico, di cui gli Autori non hanno mai parlato, benchè sia possibile e anzi consigliabile in una circostanza come quella di cui ho parlato, supponendo che la figura *ADEB* (appartenente) sul piano orizzontale sia un rombo perfetto, e non un romboide; perché se ci fosse differenza fra i lati, non sarà fattibile, in quanto i coni diventerebbero diversi fra loro, e quindi i costoloni sarebbero delle curve a doppia curvatura, cosa che discorda con le Volte a costoloni, che devono invece puntare in linea retta da un'imposta all'altra.

Non mi soffermerei oltre sulla costruzione di questa Volta, il cui uso non può capitare se non in casi straordinari, cosa che è d'altronde più soible che una Volta a costoloni cilindrici, in quanto la chiave della crociera è più bassa di quelle dei formerets; da dove segue che riceve una parte del loro carico.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA

Per ben capire i due pezzi dell'Embrasure e del Corne de Vache doppio, che sono delle compenetrazioni tra semiconi scaleni, bisogna immaginarsi dei coni interi, incastrati l'un l'altro, come si vede in Fig.104, 106, 107, 108 e 109, e dato che si tratta di coni scaleni, una sola raffigurazione non basta a mostrare le diverse porzioni delle loro parti; ecco perché per esprimere l'origine dell'Embrasure, considerata sul piano orizzontale, si è disegnata in prospettiva la poriezione orizzontale nella Fig.104, dove si vede un piccolo cono isf, che interseca un cono più grande deS^{e}, girato in senso opposto; ora dato che questi due coni sono di diverso tipo, il piccolo retto ed il grande scaleno, la curva d'intersezione ahb sarà a doppia curvatura; se questa curva fosse stata tracciata come un'arco di cerchio, il cono grande sarebbe in tutto e per tutto uguale al piccolo; poiché, benchè sembri scaleno a causa della base dte, storta rispetto all'asse xS^{e}, la sezione ahb perpendicolare all'asse, risulterebbe un cerchio, e quindi la base dte non può che essere un'ellisse.

Le due rappresentazioni delle sezioni verticali messe in prospettiva, fanno vedere che benchè la proiezione orizzontale della Fig.104 resti la stessa, i coni che si compenetrano possono tuttavia essere in differenti posizioni.

Nota 10: Per conoscere genesi e costruzione di questo tipo di intersezione di coni, che genera un'emi-ellisse e non una curva a doppia curvatura, si veda Libro Primo, pag.104, ***Fig.79***.

Per prima cosa l'asse comune s^{e}C può essere orizzontale, come quando si prenda l'origine della Volta dalla strombatura esterna su una linea orizzontale a livello della genoulliere; e dalla strombatura interna; in questo caso i due coni sono per forza retti e l'esterno è tagliato obliquamente dal talud del muro in TL.

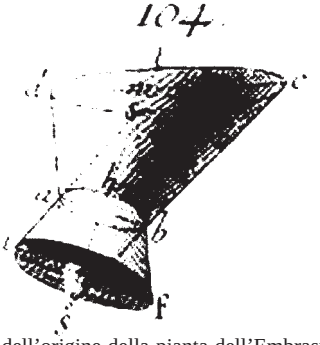


Fig.104: Vista prospettica dell'origine della pianta dell'Embrasure, intersezione di due coni apparentemente scaleni, in realtà retti con asse comune.

In questa costruzione, i piedritti o spessori del muro (jouees) dell'Embrasure al di sotto di questo livello, sono delle superfici piane, triangolari, verticali e tangenti al cono Pqr, perché il piano rampante della plongee taglia il cono al di sotto del suo asse orizzontale; e quindi lo spigolo della faccia esterna dell'Embrasure rientrerebbe su se stesso, perché sarebbe più grande di un'emi-ellisse, cosa che scomoderebbe alla mira, perché il cannone non deve stare sempre in mezzo all'Embrasure, ma si deve poterlo girare a destra e a sinistra quando lo si giudichi necessario; non ho visto Embrasures rotonde se non nelle fortificazioni vecchie (on ne voit d'Embrasures rondes que dans les vieilles fortifications): si può vedere nella Fig.116 della tavola seguente[11] i differenti spazi di varco di Embrasure, la rotonda in alto e la mista in basso.

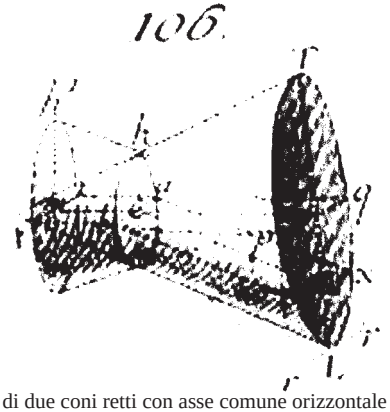


Fig.106: Intersezione di due coni retti con asse comune orizzontale

Seconda cosa: l'asse comune può essere inclinato rispetto all'orizzonte, come in Fig.107 e allora, supponendo sempre la curva di intersezione ahb piana e circolare, i due coni sono ancora resi dalla costruzione intrinsecamente della stessa specie, in quanto sono entrambi scaleni, essendo i loro assi ugualmente inclinati rispetto alla loro sezione circolare comune.

In questa costruzione, la Volta della strombatura prende direttamente origine sul piano della plongee, senza che sia necessario aggiungerci due parti piane tangenti al cono.

Per tornare adesso alla nostra spiegazione del Corne de Vache doppio, bisogna notare che si differenzia dalla figura delle Embrasures, in quanto i coni, di cui la doele comprende due parti, non hanno come nell'Embrasures gli assi in comune, cioè sulla stessa linea retta, benchè sembrino averli nella proiezione orizzontale messa in prospettiva nella ***Fig.109***, dove gli assi S^aC, e S^ec hanno una parte in comune Cc; ma invece gli assi sono inclinati fra loro come si vede nel prospetto messo in prospettiva nella ***Fig.108*** dove sono rappresentati dalle linee s^aG e s^eg, che si incrociano in K.

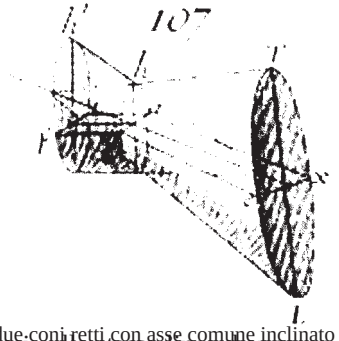


Fig.107: Intersezione di due coni retti con asse comune inclinato

Invece di avere gli assi sulla stessa linea, hanno un lato in comune Cc sotto il mezzo della chiave, nella linea s^as^e, che si suppone retta, cosa che mostra la necessità di una rappresentazione di piano e una di profilo per restituire bene la posizione dei due coni scaleni.



Fig.108:Intersezione tra due coni scaleni aventi assi diversi e una generatrice comune

Quanto alla nostra invenzione di un nuovo Corne de Vache doppio, raffigurato in ***Fig.113***, si può vedere la figura della posizione rispettiva dei coni nel Primo Tomo, pag 104 ***Fig.79*** della Tavola 7[12], cosa che basta per averne un'idea.

Nota 11:Nella ***Fig.116*** della tavola seguente (pl.91), è possibile vedere la costruzione dei due tipi di Embrasures citati, rotonda e mista.

Nota 12:per una descrizione più precisa di quasto nuovo Corne de Vache doppio vedere nel Primo tomo, pag.104, ***Fig.79*** della Tavola 7.

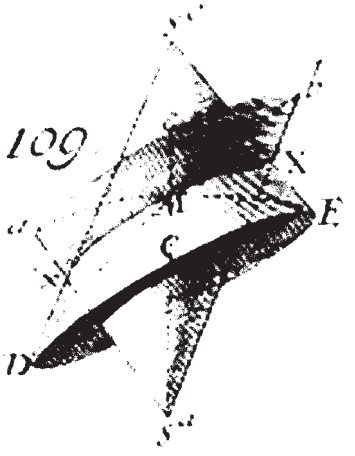


Fig.109:Vista prospettica dell'intersezione tra due coni scaleni aventi assi diversi e una

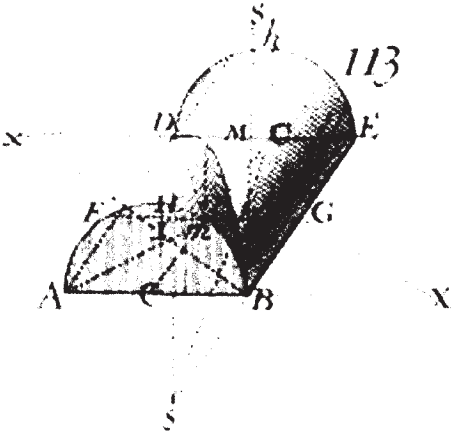
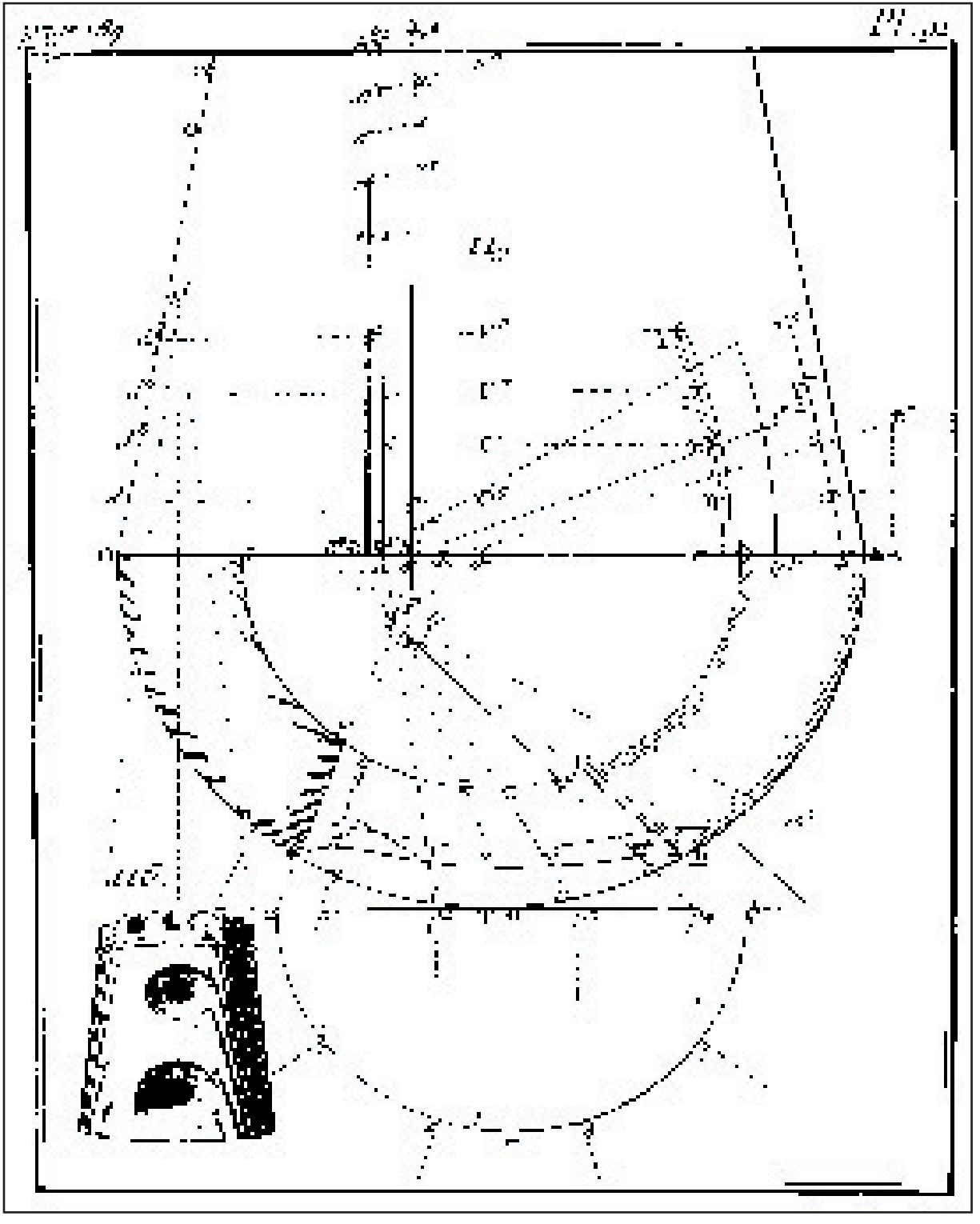


Fig.113:Vista prospettica di un Corne de Vache doppio o di ina Volta biaise passé



SECONDA SITUAZIONE, DOVE GLI ASSI DEI CONI HANNO DELLE DIREZIONI DIVERSE, PER ESEMPIO, UNA VERTICALE E L'ALTRA ORIZZONTALE .

PORTA CON STROMBATURA , TROMPE, O FERITOIA IN UNA TORRE ROTONDA

O INCAVATURA IN SCARPATA.

Nella tipologia precedente abbiamo considerato il giunto dei montanti conici nel collo del vano porta o in quello della apertura a Corno Doppio di Mucca(Fig.109): qui noi cerchiamo la curva dello spigolo di un solo giunto montante con il paramento conico di una torre rotonda o incavata, la quale e' una porzione di tronco di cono verticale (Fig.116).

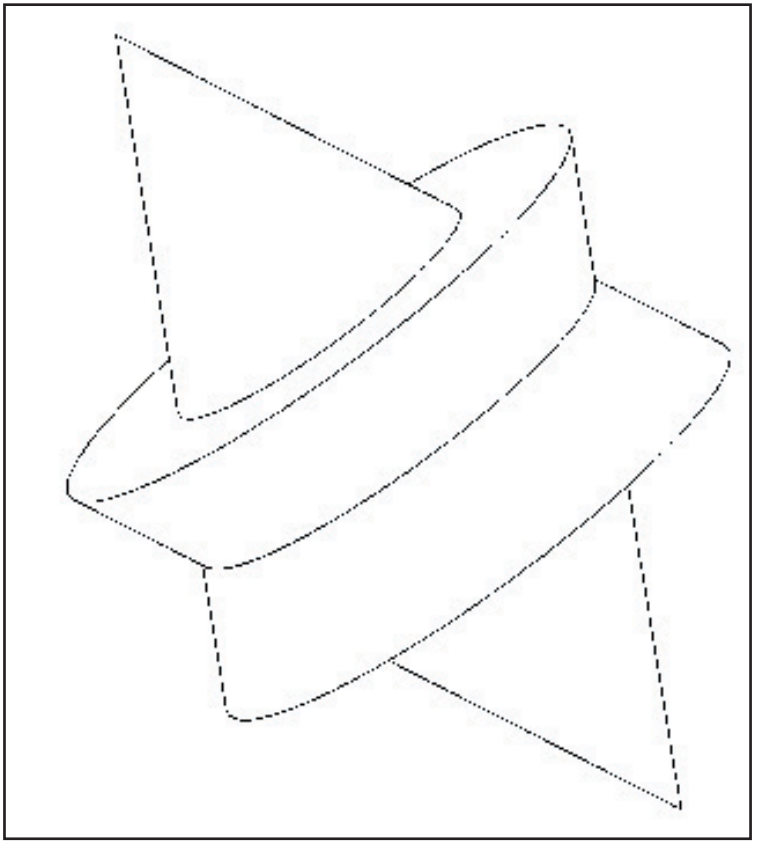


Fig.109 L'aperture a Doppio Corno di Mucca è generata dalla compenetrazione di due coni.

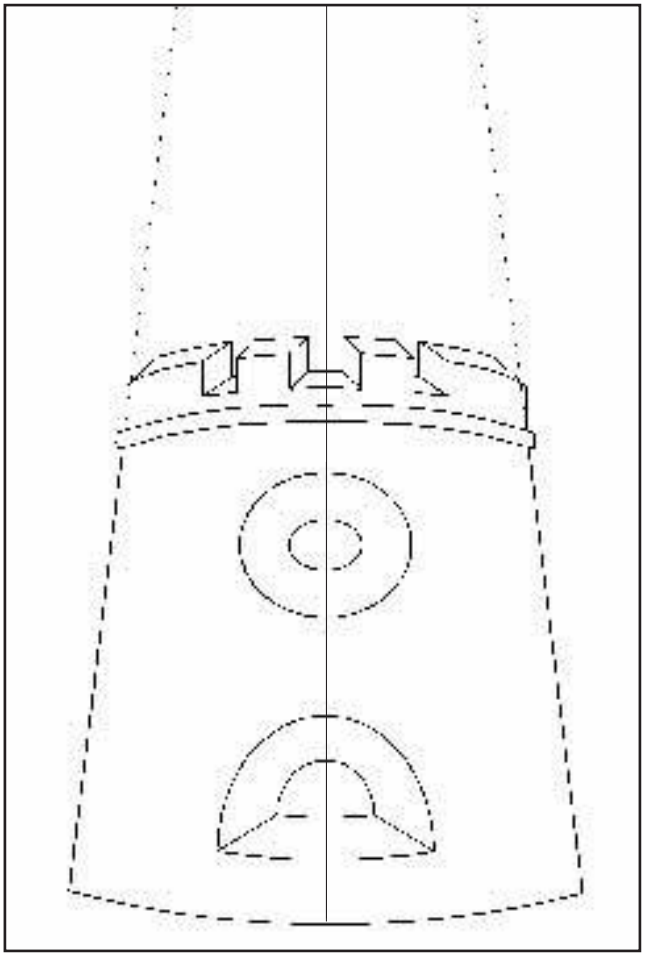


Fig.116 Torre di vedetta con due feritoie, generate dalla compenetrazione di un cono e di un semicono con un tronco di cono (ovvero la torre).

Sia, (Fig.115a), la semicorona di cerchio DTE KLI, la faccia di una torre in scarpata all'esterno, la quale è forata da una apertura strombata ABGF, che bisognerà voltare.
Avendo tirato la corda AB, si traccerà una parallela ab, tangente al cerchio DTE , che lo toccherà in T, poi si prolungherà da entrambe le parti e da entrambe le direzioni dei piedritti AF e BG, fino a quando esse concorreranno in S , dove formerà il vertice del cono orizzontale del vano, e al di fuori in a e b per avere il diametro della sua base ab, sul quale si disegnerà il semicerchio a t b come sesto generatore, che si dividerà in conci nei punti nei punti 1,2,3,4, dai quali si condurranno le perpendicolari 1 p^1, 2 p^2,etc .
Con le proiezioni delle divisioni p^1, p^2, etc, si tracceranno delle rette sino all'apice S, p^1 S, p^2 S, p^3S,etc, che si prolungheranno all'infinito, al di la di S , le quali taglieranno l'arco FG in q, r, u, v.

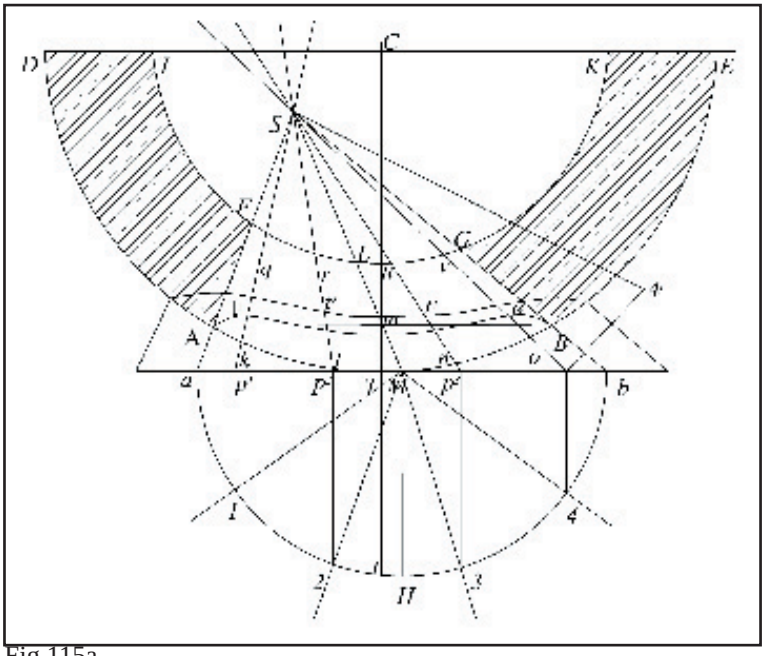


Fig.115a

Dal punto C, che è il centro della base della torre si tireranno delle perpendicolari su ciascuna proiezione di letto p^1 S, p^2S,…che si intersecheranno nei punti 1^r,2^r,3^r,4^r. (Fig.115b)
Si porteranno tutte le lunghezze C 1^r, C 2^r, C 3^r, C 4^r, in R^1, R^2, R^3, R^4, sulla base DE, dalla quale si tireranno le verticali R^1 V, R^2 V,…
Si farà di seguito il profilo della torre seguendo l'inclinazione della scarpata CDO, e avendo portato l'altezza MH del sesto primario in C C_8, si dividerà questa altezza negli altrettanti punti che si vorrà avere negli archi di iperbole per cercare le proiezioni dello spigolo esterno della torre e del vano; supponiamo solamente quattro nei punti C_5, C_6, C_7, C_8.
Si faranno passare per questi punti delle parallele alla base DE, che incontreranno il lato della torre DO nei punti d^5, d^6, d^7, d^8, e le verticali R^1 V, R^2 V,…ai punti 5,6,7,8.
Dai punti C_5, C_6… come centri, e dalla lunghezza di ogni orizzontale C_5d_5, C_6 d^6,…per raggi, si tracceranno degli archi di cerchio al di sopra e al di sotto, che intersecheranno le verticali 1, 2, 3, 4, ai punti R^1 V, R^2 V,e ognuna in dei punti x^6, x^7, x^8.
Ora bisogna tracciare gli archi delle quattro iperbole che formeranno sulla superficie della torre, dei piani verticali, passando dalle proiezioni dei giunti di letto della volta p^1 S, p^2 S,….le quali incontrando questi giunti di letto nella volta, ci determinano altrettanti punti di nervatura di incontro dei montanti della volta con il paramento della torre.
Basterà cercare uno di questi punti, per esempio, quello che corrisponde al punto 4 del sesto generatore.
Si prenderà la lunghezza 5 x^5, che si porterà nell'orizzontale in 5 Y^5, poi
6 x^6 in 6 Y^6, 7 x^7 in 7 Y^7,…per i punti Y^5 , Y^6, Y^7, si traccerà a mano una curva che costituirà un arco dell' iperbole che noi cerchiamo.
Bisogna ora fare il profilo del giunto di letto che deve intersecarla.
Si prenderà la lunghezza 4^r p^4, che si porterà da R^4 a P^4, sull'orizzontale DE. Si traccerà dal punto P^4una verticale P^4V^4, che sarà uguale all'altezza della ricaduta p^4 4 della curvatura primitiva.
Si porterà poi la lunghezza 4^rS da R in N, e si terrà l'inclinazione N V^4, che formerà il profilò del giunto di letto il quale toglierà l'arco di iperbole che si è appena creato nel punto y, che è quello che cerchiamo; dal quale se si tira una perpendicolare su DE che la intersecherà in t, si avrà con questo la proiezione di questo punto, che si porterà alla proiezione della volta di p^4 in $t_4$sulla linea S p^4.

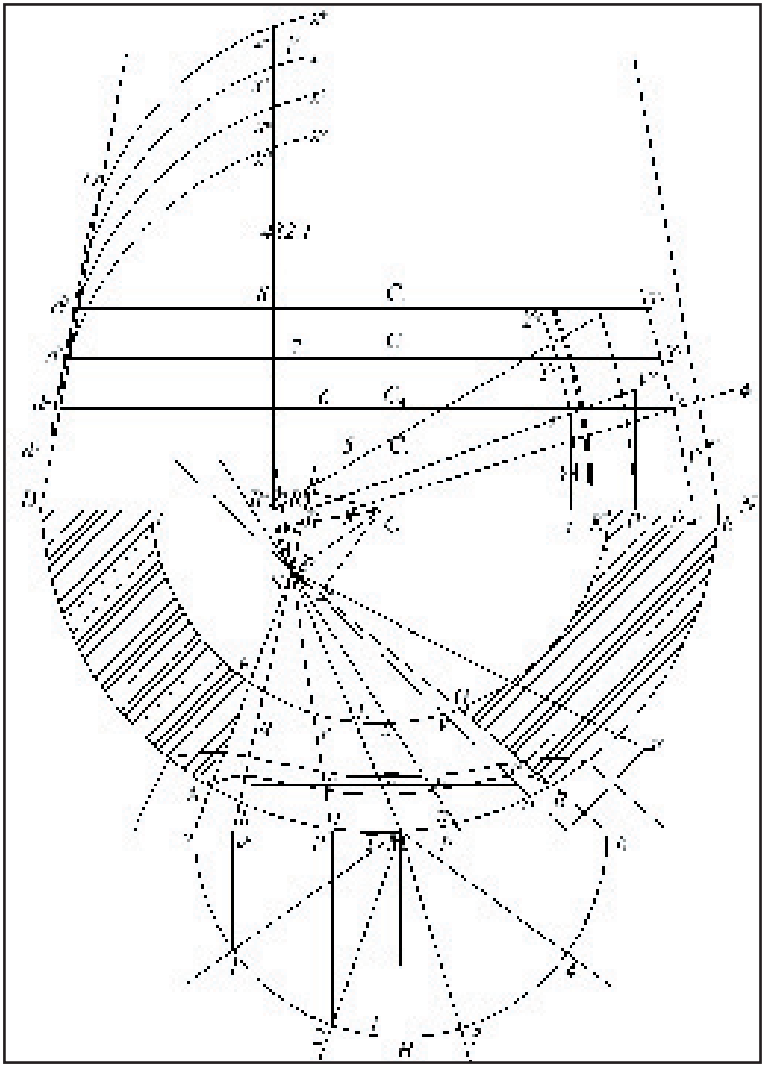


Fig.115b

Con lo stesso metodo si cercheranno gli altri punti t^3, t^2, t^1, per tracciare per mezzo di questi punti la proiezione della curvatura dello spigolo della

torre AmB, tramite la quale si potrà tracciare ogni concio squadrato o se si vuole sagomato, come tutte le volte coniche di cui si ha la proiezione dell'arco di facciata a doppia curvatura; cercando le diagonali delle superfici lisce dei piani, come è stato detto nel 3° libro e in diversi trattati precedenti, particolarmente in quello della strombatura, o feritoia in torre rotonda o cava a piombo. (Figg.115c,d)

Si può infatti sbozzare la testa del concio come se fosse a piombo su di una parte del contorno della curva di proiezione trovata, AmB, poi indietreggiare della quantità che la scarpata genera attraverso una seconda curva, che bisogna cercare per mezzo di un estradosso, oppure per maggior facilità, fare al posto dell'estradosso, una porzione di letto orizzontale, sul quale si traccerà l'arco di cerchio indietreggiato, in base all'altezza che c'è dal punto più alto del montante all'estradosso.

Questo metodo ha il merito di evitare di fare piani di letto, perché dopo aver formato la testa e il montante piatto, o il letto orizzontale delle ricadute di cui si fa uso per operare mediante squadratura, basta formare o con il filo a piombo o con la livella, riducendo la pietra per formare il letto, la sua testa al paramento della torre si forma, come per caso, in una porzione di arco ellittico, che è la sezione del letto nella torre conica.

Si può anche operare al contrario facendo il montante e il paramento a piombo, con la livella e il filo a piombo, sul quale si applicherà un pannello tagliato sull'arco iperbolico che è servito a tracciare il disegno per trovare il punto dello spigolo del letto di sopra; questo arco darà l'indietreggiata della testa all'estradosso e di conseguenza il mezzo di posare sul letto superiore orizzontale l'arco di cerchio che ne da l'indietreggiata di livello; tutto ciò suppone un po' di intelligenza per mettere un tratto a piombo a questo pannello, che deve servire alla posa per mezzo di un giunto di letto e a piombo.

L'idietreggiata dell'estradosso sullo spigolo del giunto di letto o di sotto non si può trovare con un pannello tagliato sull'arco iperbolico, ma con un cerchio che si immetterà anche lui in piombo per posarlo fuori, avendo cura di raddrizzarlo a secondo dello spigolo di letto e di montante.

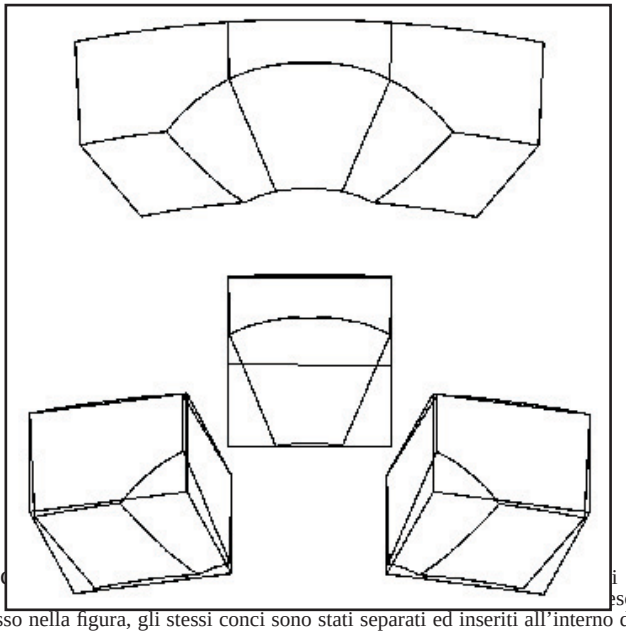


Fig.115c i conci sagomati, escritta. Più in basso nella figura, gli stessi conci sono stati separati ed inseriti all'interno di due ipotetici elementi in pietra regolari da cui sono stati sagomati.

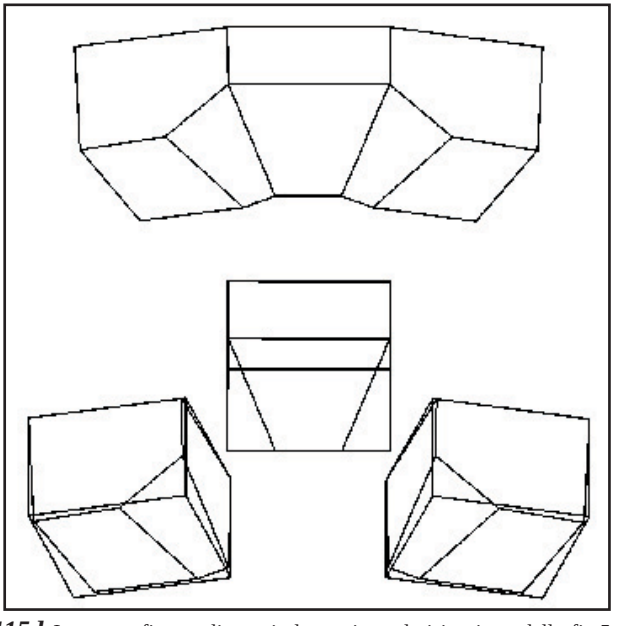


Fig.115d In questa figura gli stessi elementi regolari in pietra della fig.5 sono stati sbozzati, invece che sagomati. Notare come le linee curvilinee della figura precedente si sono tradotte in spezzate rettilinee (sicuramente di più facile realizzazione).

ANNOTAZIONE SULL'ERRORE DELL'ANTICA TIPOLOGIA.

Benché questa tipologia sia molto usuale nella costruzione militare, il signor de La Ruë non ne parla, e il P. Deran da una misera spiegazione, sotto il termine di scarpata o di torre rotonda o di scarpata; lui stesso riconosce che non osserva rigorosamente delle operazioni geometriche, per non renderlo troppo difficile, perché dice che ci sarebbe un grande imbarazzo di discorsi e di linee, per arrivare a quella che potrebbe essere considerata come la verità; si accontenta, aggiunge, del necessario per la pratica, lasciando la curiosità a quelli che avranno un'intenzione più ampia, di quella che lui si è proposto, vale a dire, a me che non sono d'accordo, che si debba dare una spiegazione falsa per renderla facile.
Se si vuole sapere in cosa consiste la falsità della sua spiegazione, bisogna notare che non prende le indietreggiate della scarpata su dei piani che passano per l'asse della torre, il che ovviamente le aumenta in modo evidente, perché allora la sezione della torre non è più una linea retta, ma una curva iperbolica, perché sappiamo che non c'è nessuna sezione dritta, o retta, se non quella che passa dall'apice; quindi le linee di indietreggiata non passandoci non sono delle linee rette.
Del resto mi sembra che la spiegazione che ha appena dato per operare giustamente non è più complessa ne piena di discorsi ne di linee, di quella di P. Deran per dire il falso, forse è più semplice, perché consiste solo nell'intersezione di un triangolo che bisogna necessariamente fare per trovare il valore del giunto di letto, in qualsiasi modo si operi, e di un arco iperbolico, la cui costruzione è delle più facili.
Quanto al metodo che P. Deran usa per fare delle teste uguali rettificando il contorno della base della torre per fare il suo sesto generatore dello sviluppo; non è di nessuna importanza per il compimento dell'opera, perché la regolarità della figura del montante che risulta dal sesto generatore di superficie piana, preso alla base del cono è preferibile alla piccola imperfezione che produce sulle teste, invece il sesto generatore supposto in sviluppo dal cono, produce un'imperfezione nel contorno del montante.
Se si volesse assolutamente delle teste uguali, bisognerebbe operare con lo stesso sesto generatore della base, dopo aver fatto lo sviluppo del cono, si dovrebbe tracciare lo sviluppo dello spigolo con la proiezione, trovato come stato detto al Problema 14 del 3° Libro e in su questo sviluppo, si dovrebbe rifare delle nuove divisioni delle teste dei conci così uguali quanto si desidererebbe.

SPIGAZIONE DIMOSTRATIVA

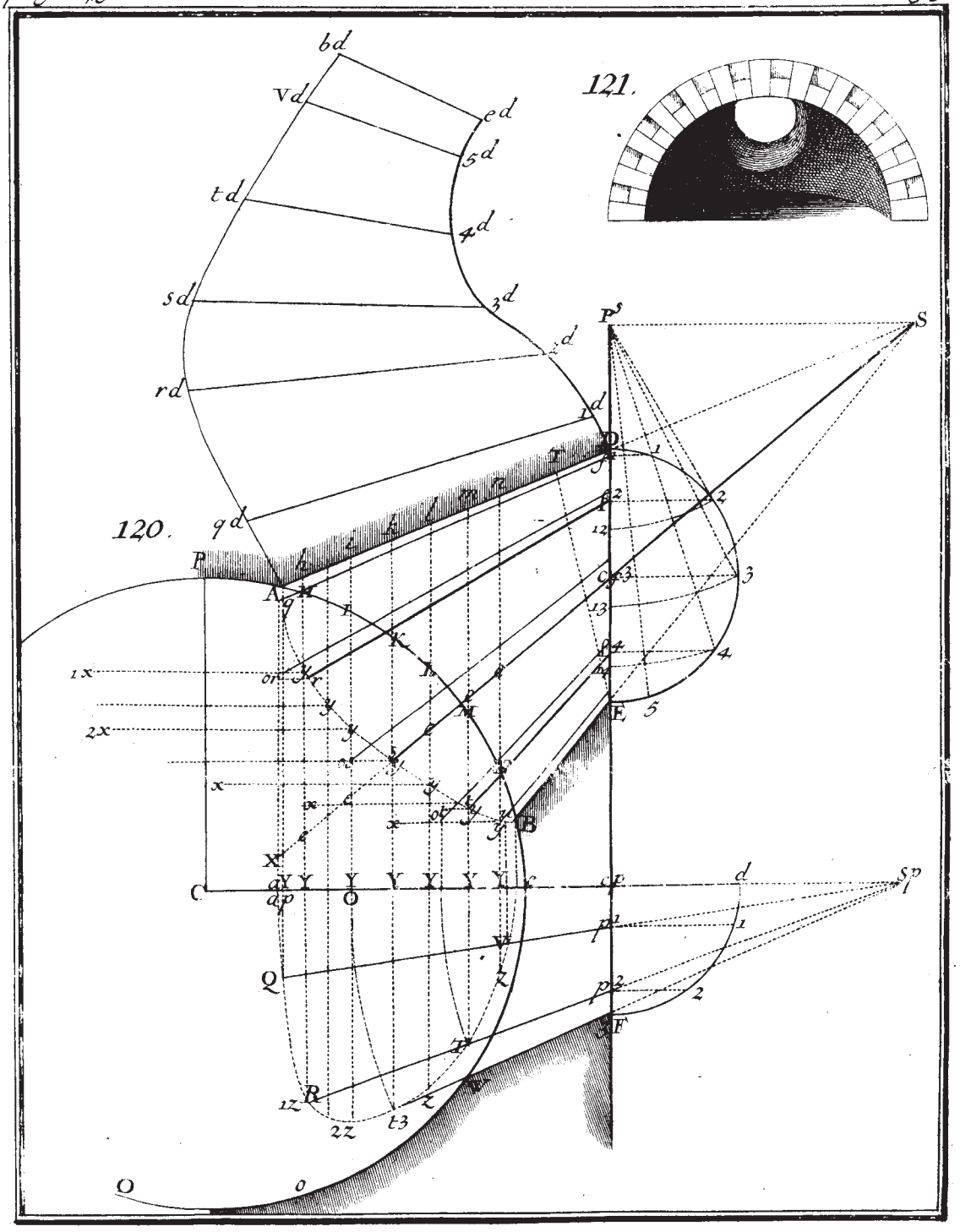
Se si suppongono dei piani verticali che passano dalla proiezione dei giunti di letto della volta, è chiaro che tutti quelli che non passeranno dall'asse della torre, essendo prolungati se occorre, non faranno alla sua superficie delle sezioni rettilinee, ma delle iperbole, di conseguenza lo spigolo di incontro della superficie del montante e di quello della torre, formerà sempre l'intersezione di un triangolo che è la sezione del piano verticale, passando dall'apice S della volta conica e di un iperbole che forma sulla superficie della torre; dunque è ovvio che per avere l'allontanamento del piano di questa iperbole dall'asse del cono verticale, bisogna tracciare una perpendicolare di quest'asse nel piano di intersezione, come l'abbiamo fatto in C_1, C_2,… che partendo da questa distanza sulla base orizzontale DE ha distanza uguale dal centro C, e R^1V, R^2V,… ognuna di queste parallele rappresenterà l'asse dell'iperbole nel cono, le cui ordinate saranno uguali a delle medie proporzionali tra i segmenti DR e RE alla base, così come alla sezioni parallele a questa base, tra i segmenti $d^5$5 e 5 e , così come degli altri, il che è stato fatto tramite degli archi e che è esatto, come è stato dimostrato al Problema 37 del 2° Libro.

Chapitre

V.

page 179.

Pl. 93.



SECONDO ESEMPIO

LUNOTTO DI SBIECO ABBASSATO E RAMPANTE, CADENTE IN UNA VOLTA SFERICA.

Questo taglio non è che l' inverso del precedente, come si è visto nel primo caso, lo strombo era diretto dal di dentro al di fuori, qui invece girando il cono si è ottenuto che lo strombo risulta dall'interno verso l'esterno.
La seconda differenza è che qui il contorno del cono è intero attorno al suo asse mentre nel trattato precedente ciò non era che una metà; ma come queste differenze non portano ad alcuna conseguenza, esso è tuttavia, a proposito del parlare di questo trattato di cui P. Deran [1] non ha detto nulla, non più complesso del precedente: io sto trattando in una nuova maniera, che la si potrà se lo si vuole, applicare solo al precedente; essa sembrerà più facile.
Sia il cerchio o la porzione di cerchio PBO, Fig. 120a, il piano orizzontale di una volta sferica il cui centro è C; per non estendere troppo la figura, noi faremo servire l'arco eo per la proiezione e l'arco Pe per la verticale, e poiché si tratta principalmente dell'inclinazione del cono del lunotto, noi cominceremo a regolare il profilo.
Avendo tracciato a caso le due linee AD e BE, l'una per la chiave superiore l'altra per la chiave inferiore, partendo da due punti D, E, date per intervallo del diametro dell'apertura esterna del lunotto; si prolungheranno queste linee fino a quando esse si incontrano in S, il quale sarà il vertice del cono.
Su DE come diametro si descriverà la curvatura primaria dove solamente una metà D3E, e ciò che basta perché l'altro sia uguale e avendola divisa nei suoi conci [2], in modo che ce ne siano metà in D1, e un'altra in E5, per metà delle chiavi; si condurranno delle perpendicolari al diametro DE, che si intersecano nei punti f^1, f^2, f^3, f^4 e da tutti quei punti il vertice S, si

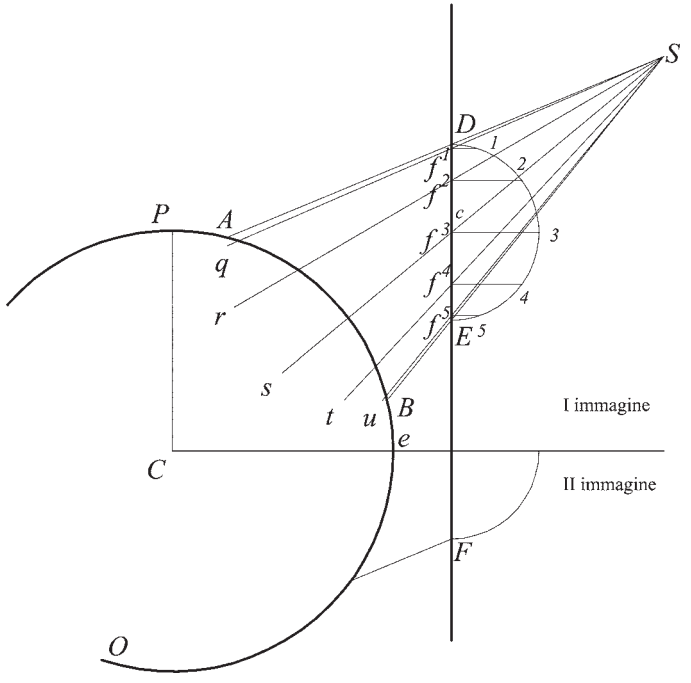


Fig.120a. Determinazione posizione lunotto e individuazione dei giunti di concio.

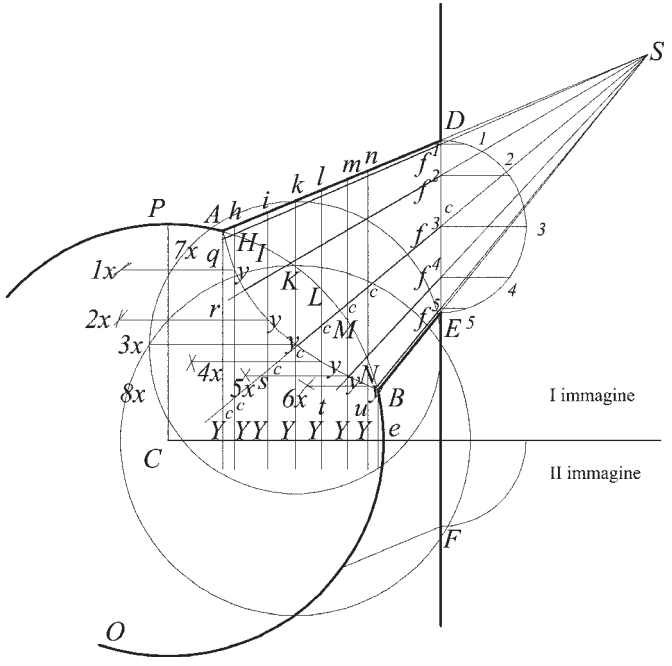
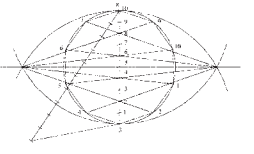


Fig.120b. Determinazione della proiezione verticale dello spigolo interno superiore di intersezione tra lunotto e volta sferica.

[1] L'autore cita il trattato di P.Deran

[2] Per la divisione in conci si dovrà dividere la circonferenza dell'oculo esterno nel numero di parti necessario, nel nostro caso dieci, come di fianco esemplificato.



condurranno delle linee indefinite Sq, Sr, Ss, St, Su, che saranno le proiezioni perpendicolari dei giunti di base di una metà del lunotto di cui bisogna trovare le vere lunghezze, visto che quelle di questo profilo non erano ancora quelle reali, ma anch'esse sono necessarie per trovare le vere grandezze, come si vedrà qui appresso.

Per i punti h, i, k, l, m, n, Fig.120b, presi a caso sulla retta AD, si traccino altrettante rette parallele a DE come h_z, i_z, k_z, m_z, n_z, che taglieranno il raggio Ce della sfera, a sua volta perpendicolare a DE [3], nei punti H, I, K, L, M, N.
Da tutti i punti c, con c come centro, e per raggi le parti di queste parallele che sono nel cono cn, cm, &c., si descrivano degli archi di cerchio da tutti i punti Y,Y, per centro e per raggi le parti di queste parallele interne alla sfera YH, YK, &c. e si traccino altri raggi di cerchio che taglino i precedenti nei punti x,x, dai quali si tracceranno le perpendicolari ad

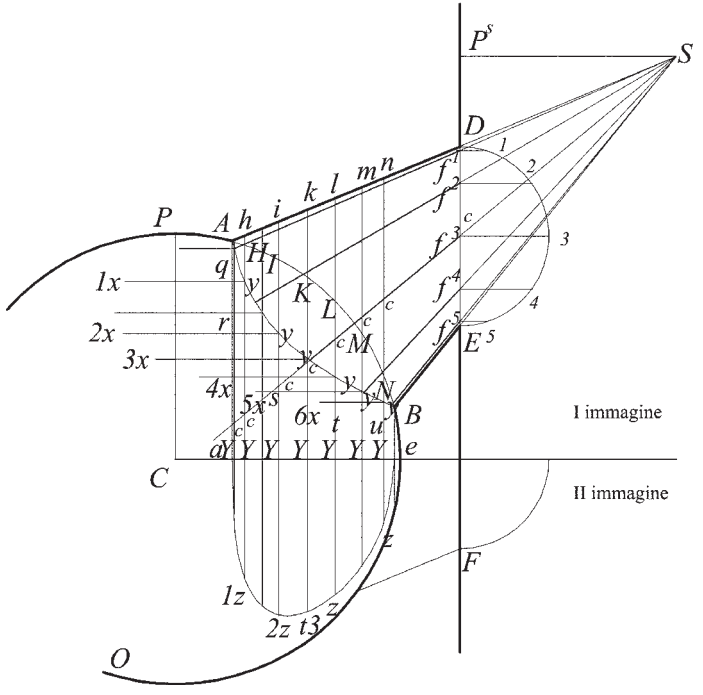


Fig.120c. Determinazione della proiezione orizzontale dello spigolo superiore interno del lunotto.

ogni parallela, dove si sono presi i centri che hanno originato i punti x,x, i quali li tagliano nei punti y,y; per esempio sulla linea YK, dal punto c per centro, e ck per raggio, si descrive un arco di cerchio 7x, e sulla stessa linea Yk, dal punto Y per centro, e per raggio la lunghezza YK si tracci un altro arco di cerchio 8x, che tagli il precedente al punto x, attraverso cui si porterà su YK, una perpendicolare xy, che taglierà YK al punto y, che è una delle proiezioni verticali[4].
Si troveranno allo stesso modo tutti gli altri punti y,y, attraverso i quali si traccerà a mano una curva Ayyy, &c. fino a B, che taglierà le proiezioni verticali dei giunti di base Sq, Sr, Ss, St, Su, ai punti q, r, s, t, u.

Osservando la Fig. 120c, le lunghezze delle perpendicolari xy, xy, serviranno in seguito a trovare la proiezione orizzontale dello stesso punto d'incontro delle volte coniche e sferiche, in cui la curva AyyB è la proiezione verticale; non resta che prolungare tutte queste xy,xy, sulle linee yz che gli appartengono, alle quali esse si chiudono, a cominciare dal raggio Ce; per esempio sulla linea qY, prolungata oltre Ce, si tracci la lunghezza y1x [5] dalla perpendicolare, su Y1z [6], che determinerà il punto 1z; lo stesso la perpendicolare 2xy in $Y2^z$, che determinerà questo punto 2z, così per gli altri di seguito; e per tutti i punti a, proiezioni del punto A su Ce, e i seguenti 1z, 2z, z, z, z &c. si traccerà a mano una linea curva, che sarà la proiezione orizzontale dello spigolo di volta delle due volte, la quale, proiezione orizzontale, servirà a rappresentare le lunghezze delle proiezioni orizzontali dei giunti di base, di cui si ha bisogno per farne le basi dei secondi profili, che ne determinano le reali lunghezze.[7]

Passando alla Fig. 120d dal punto S, avendo tracciato la perpendicolare a ED in P^s, si porterà la lunghezza SP^s in cp S^p, sul raggio Ce, prolungato al di là di DF, esso taglia perpendicolarmente in cp, e sarà il centro di un quarto di arco originario Fd, che gli si rifletterà con le sue divisioni F 2, 21, e la metà 1d, che riprenderà quelle del profilo superiore D1 attraverso i punti 1 e 2, avendo abbassato delle perpendicolari su cpF, che taglieranno questo raggio nei punti p^1 p^2; si porterà per questi punti p^1 p^2, e per il vertice S^p, le linee S^p Q, S^pR, S^pW, che taglieranno la curva di proiezione orizzontale dello spigolo di volta ai punti Q, R, T, U le lunghezze S^pR, S^p t^3, S^p T e S^p U, saranno le proiezioni orizzontali della metà dei giunti di base del lunotto che serviranno a trovarne le effettive lunghezze, come di seguito.
Per i punti q, r, s, t, u della proiezione verticale, si condurranno delle parallele indefinite a Ce come r or, s os, t ot, u ou; in seguito avendo preso la linea S^p C per base di tutti i profili, si porterà la lunghezza S^pQ in S^p ap, e per il punto ap, si leverà una perpendicolare a questa base, che taglierà la parallela passando per il punto q in un punto che non è segnato, perché esso cade così vicino a q, che non lo si può distinguere.
Si traccerà lo stesso, la lunghezza S^p R in ap, cioè molto vicino, perché si

[3] Nel testo originale vi è un incongruenza tra la lettera citata nella descrizione DF e quella corrisponde nella Planche DE.

[4] Si veda per ulteriori chiarimenti il problema XLV Libro secondo.

[5] Nel testo originale vi è un incongruenza tra la lettera citata nella descrizione $y1^x$ e quella corrisponde nella Planche y1x.

[6] Nel testo originale vi è un incongruenza tra la lettera citata nella descrizione $Y1^z$ e quella corrisponde nella Planche y1z.

[7] Nel testo originale vi è incongruenza tra le lettere citate nella descrizione indicate con gli apici (Es. 1^z) e quelle corrispondenti nella Planche (Es. 1z).

utilizza il simbolo ap per tre punti differenti che cadono così vicini che non si ha lo spazio per disegnarli con diversi caratteri ed avendo elevato una perpendicolare alla base, che taglierà la parallela, passando per il punto r, al punto or; la lunghezza or S, sarà la vera lunghezza di giunto di base che formerà in un cono intero, ma siccome esso è tagliato da un piano DE, si traccerà la linea oS, che taglierà DE nel punto n; la vera lunghezza da questo giunto di base alla superficie dell'intradosso del lunotto sarà or n; si troverà allo stesso modo la vera lunghezza dei giunti, di cui p^1U e p^2T sono le proiezioni orizzontali; ma siccome il punto t3 di contatto del giunto con il lato rappresentato dal primo profilo della retta Sc, non è ben determinato; bisognerà tracciare dal punto s, dove questo giunto taglia la curva, AyyB, la retta st3, che taglierà S^pF prolungata in t3 dove è il punto di contatto; così portando la lunghezza S^pt3 in S^po, come lo segna l'arco di cerchio t3 o; si innalzerà da questo punto o, la perpendicolare o os, che taglierà la parallela sy os nel punto os, da dove tracciando una linea al vertice S, la lunghezza os, n sarà quella del giunto di base sc, che sarà raccorciato dalla proiezione verticale, così per gli altri.

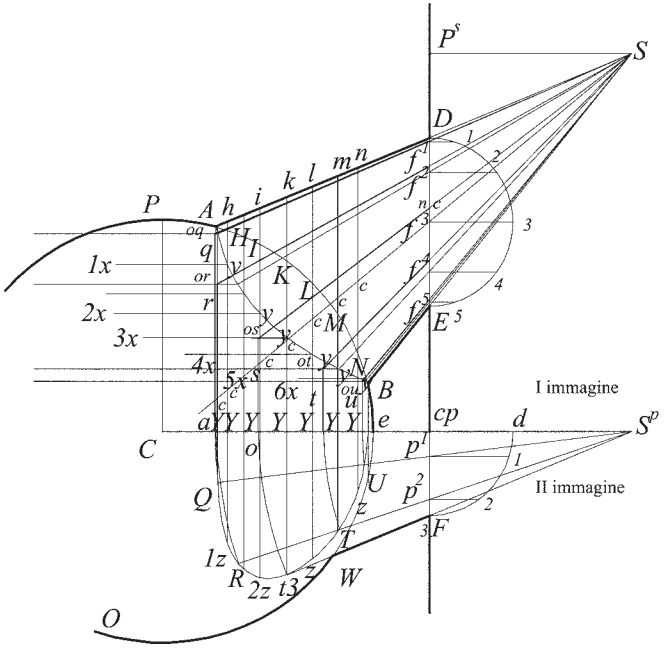


Fig.120d. Determinazione della vera lunghezza dei giunti dei conci inferiori del lunotto.

In Fig. 120e, dopo aver trovato le vere lunghezze dei giunti di base del lunotto, non sarà difficile rappresentare i pannelli d'intradosso dei conci, sia in proiezione, sia in forma di sviluppo come si è fatto qui per una metà di destra o di sinistra del lunotto.
In primo luogo, per il problema 14 del 3° libro [8] si farà lo sviluppo delle corde della base del cono scaleno D 3E, che formerà la curva $D\ 3^d e^d$, per mezzo dei punti trovate $1^d\ 2^d\ 3^d$, e così via.
Supponendo che si cominci lo sviluppo dal punto D, sebbene non debba essere preso nel mezzo di un intradosso, perché la corda D1 non è all'interno della porzione di piano passante per la corda dell'intradosso

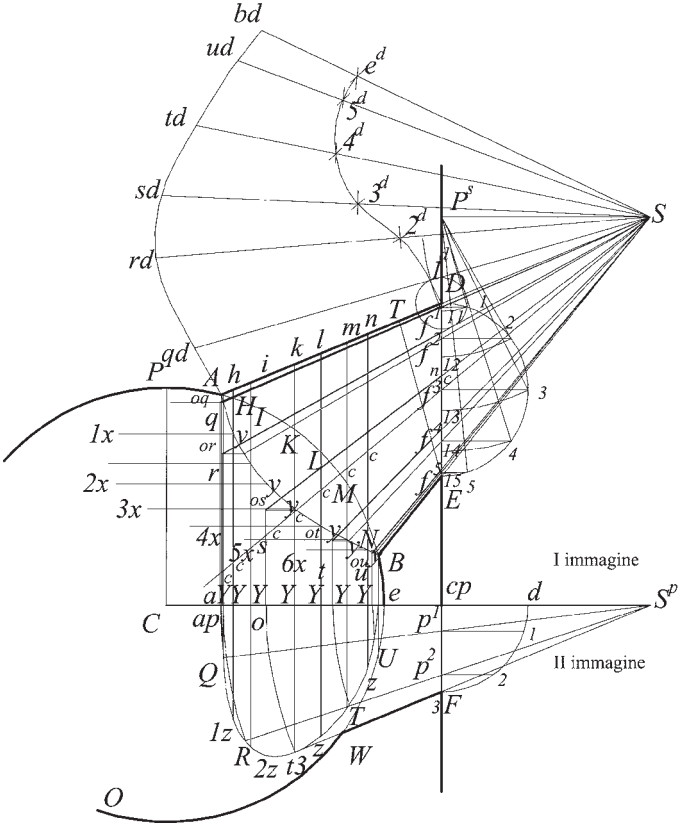


Fig.120e. Rettifica della superficie interna del lunotto.

[8] L'autore fa riferimenti al problema 14 del terzo Libro.

del concio di chiave f[1], ma non importa, non si tratta che di mostrare una pratica che si applica dove si vuole, per il fine che ci si propone.
Avendo portato la lunghezza P[s]1 su P[s]E in P[s]11, come lo segna l'arco di cerchio 1 11[9].
Si prenda la distanza 11S per raggio e dal punto S per centro, si descriverà un arco verso 1[d], e prendendo la lunghezza della corda D1 per raggio, dal punto D per centro, si descriverà un arco che taglierà il precedente al punto 1[d], e poi portando l'intervallo P[s]2 in P[s]12, come lo segna l'arco di cerchio 2 12, si prenda la distanza dal punto 12 al vertice S del cono come raggio, e dal punto S per centro, si descriva un arco verso 2[d], poi prendendo la corda 1[d]2 per raggio, dal punto 1[d] per centro si descriva un arco verso 2[d] che taglierà il precedente 2[d], così per gli altri **[10]**; e per i punti 1[d], 2[d], 3[d], si conducano delle linee dai punti che si prolungheranno, sui quali si porteranno le lunghezze dei punti di base del lunotto, come n o[r] in 2[d] rd , n os in 3[d] sd, n ot in 4[d] td, così gli altri; ciò che darà i punti qd, rd, sd, td, ud, bd, per i quali si tracceranno delle linee dritte, che completeranno i trapezi dei pannelli d'intradosso del concio. Se ci si vuol servire del pannello di base bisognerà fare un estradosso e trovare le curve di proiezione verticale e orizzontale, allo steso modo in cui si è fatto per quelle dello spigolo dell'intradosso alla faccia e all'attaccatura e trovare ancora dei punti tra l'intradosso e l'estradosso ai giunti di testa attraverso una supposizione di un centro medio tra l'intradosso e l'estradosso, che è lungo e ingombrante.
Ma si possono passare dei pannelli, trovando, spesso la maniera generale del problema 14 del 3° Libro **[11]** il calandrino dell'intradosso piatto e di base, e quello dell'intradosso e del piano di testa DE, e infine per il collegamento nella volta sferica, seguendo il metodo di quelli delle discese che raccordano una volta sferica, problema di questo Libro, dove gli si è data la maniera di trovare il calandrino dell'intradosso piatto dell'una e dell'altra volta nella loro intersezione.[12]

COROLLARIO I

Si trovi il modo di fare il lunotto a scarpa; perché se si supponesse una linea ET, che sia il profilo di un muro a scarpa anziché perpendicolare come DE, questa nuova linea verrà presa come diametro primitivo, non ci sarà alcun cambiamento nella costruzione che di rendere il cono scaleno SDE meno obliquo sulla sua base, e arrotondare di più l'interno del lunotto; ma allora le linee di sezione siano parallele alla scarpa della faccia perché esse formino dei cerchi; così le linee hY, iY, kY, &c. non saranno più allora delle verticali, ma delle inclinate all'orizzonte parallelamente alla scarpa TE.

COROLLARIO II

Esso esula dalla stessa costruzione che si possa fare un lunotto in O sormontato o ribassato, sia che la sua faccia sia a piombo come DE, o a scarpa come TE, ma allora le linee hc, ic, kc, &c. non saranno più dei raggi di cerchio, ma dei semiassi d'ellissi simili a quelle del centro originario da cui l'altro semiasse orizzontale sarà ricavato cercandone un quarto proporzionale a Dc, nc, o mc, o 1c &c. e c3, ciò è chiaro e facile da capire; quando la costruzione diventerà più complessa, ma non cambierà nel suo principio.

COROLLARIO III

In fine per mezzo della stessa costruzione, si potrà fare il lunotto in O obliquo, con o senza scarpa; ma quando la metà della proiezione orizzontale non basterà, perché l'altra non gli è simile e la proiezione verticale della corda dello spigolo di volta A q r s t u B, non rappresenterà più i due lati della chiave a destra e a sinistra ciò sarà indicato da una perpendicolare alla proiezione dell'asse S[p], ap, e in questo caso bisogna cominciare col cercare la corda della proiezione orizzontale dello spigolo di volta, tagliandone il piano orizzontale del lunotto e della volta sferica da delle parallele, alla proiezione della faccia d'entrata del lunotto, e dopo aver trovato questa curva, ci si serva delle linee xy, come delle ordinate nell'asse del cono, cioè dal lunotto che si disporrà sulle parallele prolungate, poi il piano orizzontale al profilo della proiezione verticale; in seguito attraverso dei profili particolari si cercheranno le lunghezze dei giunti di base i calandrini &c. com'è stato eseguito per le volte coniche, che quindi non ha bisogno di una più ampia spiegazione.
Ciò nonostante questo trattato sembrasse composto dalla molteplicità delle linee e delle operazioni per trovare i valori dei profili, è un buon valido aiuto al lettore per trovare le ragioni della costruzione, affinché lo intenda e lo esegua più facilmente.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA

Abbiamo dato nel secondo libro **[13]** i principi generali per trovare le intersezioni dei corpi che si intersecano, bisogna supporli tagliati da numerosi piani paralleli tra essi, di cui la posizione, riguardo ai corpi tagliati, che le sezioni in ognuno di loro divengono una di queste curve che sono le più facili da riconoscere e da descrivere, come sarebbe preferibile il cerchio, in seguito l'ellisse, poi la parabola, e in fine l'iperbole nel cono, poiché l'intersezione delle due curve che si incrociano danno facilmente i punti di intersezione tra le superfici della sfera e del cono nel caso presente.
Su questo principio di comodità abbiamo tagliato il cono del lunotto con piani paralleli alla faccia verticale, espressa con il profilo DE, perché questa linea DE essendo il diametro del centro primitivo, dato in cerchio o in ellisse, tutte le sezioni dei piani verticali saranno dei cerchi, o se essa è ellittica, esse daranno delle ellissi simili a quelle del centro primitivo dato o preso ad arbitrio, di conseguenza tutte le parallele, il cui profilo dà un asse verticale, saranno facili da descrivere.
In secondo luogo, poiché tutte le sezioni della sfera sono dei cerchi i

[9] Nel testo originale vi è incongruenza tra le lettere citate nella descrizione indicate con gli apici (Es. 1[1]) e quelle corrispondenti nella Planche (Es. 11).

[10] Il disegno dell'intradosso dei conci seguendo il testo originale porta ad un altro risultato grafico.

[11] L'autore fa riferimenti al problema 14 del terzo Libro.

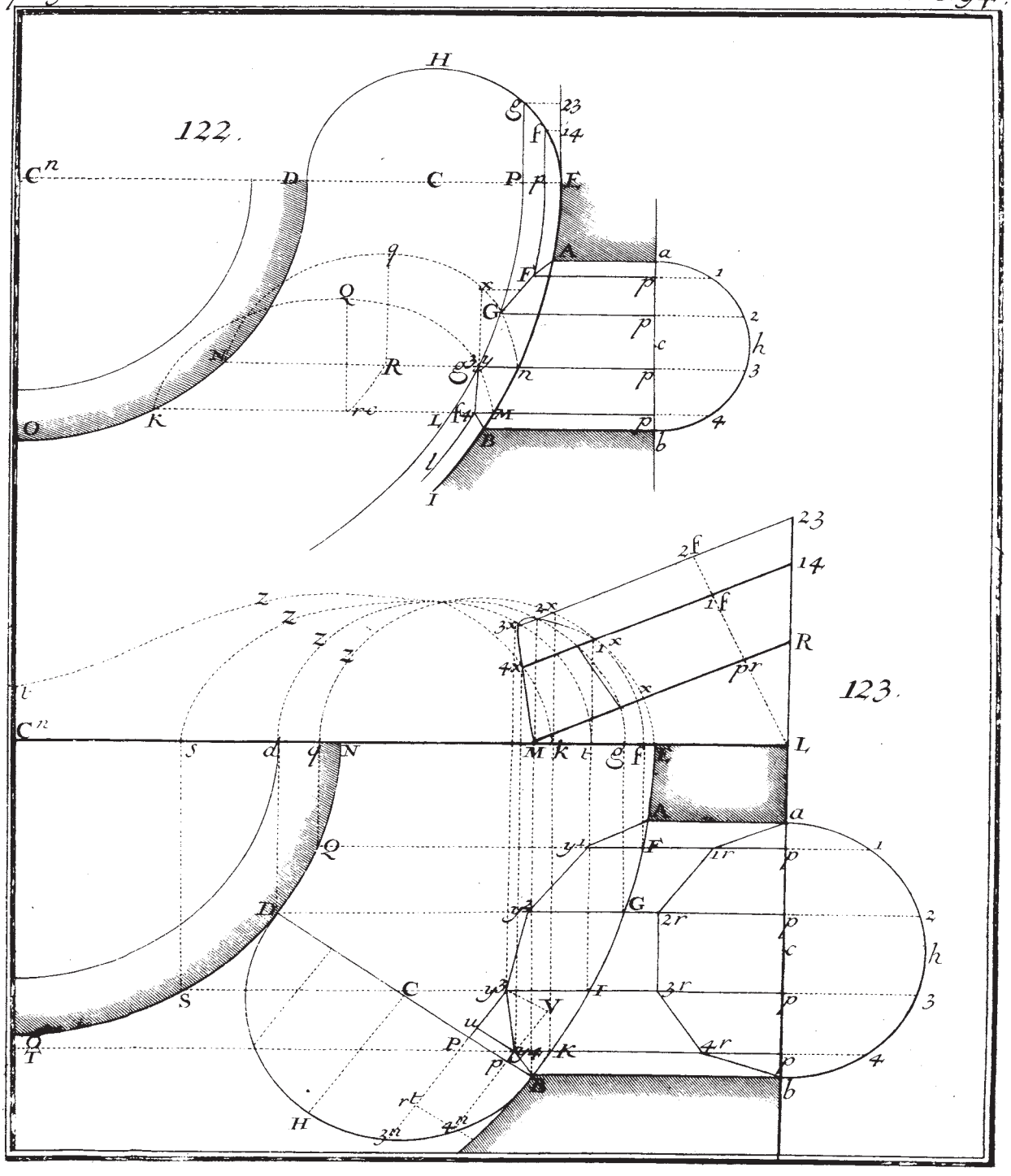
[12] Nel testo originale la lettera "U", quando maiuscola, viene indicata con la lettera Romana "V".

[13] Il testo si riferisce alla Planche 18.

cui raggi sono dati dai profili dei piani verticali, che la tagliano KY, LY, MY, &c. è chiaro che bisogna trovare l'intersezione del cerchio del cono scaleno con il cerchio della sfera, o dell'ellisse dello stesso cono scaleno e di un cerchio della sfera; ma poiché questi giunti sono nell'area situata perpendicolarmente al piano verticale del profilo, si sono trasportai al punto x, cambiando la situazione del piano verticale su quella della carta, questo non cambia in nulla la posizione dell'intersezione delle linee curve trovate, che restano nello stesso rapporto di distanza e di grandezza.
Infine, poiché abbiamo supposto il cono del lunotto tagliato del suo vertice S, e per mezzo dei punti di divisione 1, 2, 3, 4, dal primitivo centro, che si trovano a diverse distanze dal primo piano verticale passante per l'asse del cono; questi piani saranno per sezioni delle linee dritte, la cui rappresentazione sul piano verticale è raccorciata, poiché questi piani sono inclinati tra loro; per questo siamo stati obbligati a cercare il valore di queste sezioni destre, che sono le lunghezze dei giunti di base messi in opera.

page 185.

Pl. 94.



CAPITOLO SESTO

INCONTRO DELLE VOLTE

Cilindriche, Coniche e Sferiche Con le Anulari

Prima combinazione delle volte a botte con le volte sul noyau

PROBLEMA VIII

FARE L'INTERSEZIONE DI UNA VOLTA A BOTTE IN SITUAZIONE QUALSIASI, NEI RIGUARDI DI UNA VOLTA SUL NOYAU

Una volta a botte può essere considerata in diverse situazioni nei riguardi di una volta sul noyau. I°. Può essere a punta, in situazione verticale come una torre, e allora non si può fare l'intersezione alla giunzione della volta sul noyau con la torre che la penetra nella parte concava della chiave, perché le curvature spingerebbero a vuoto; tuttavia si formerà un angolo rientrato, la cui sommità delle superfici formerà una curva a doppia curvatura, che sarà facile da tracciare, perché la base della Torre ne è la proiezione che abbiamo ritrovato, e le altezze dei suoi punti saranno date sulla superficie cilindrica, attraverso la ricaduta degli archi dal centro sulla volta sul noyau. Essendo questo raro nella pratica e di facile esecuzione, non crediamo necessario fare un esercizio.

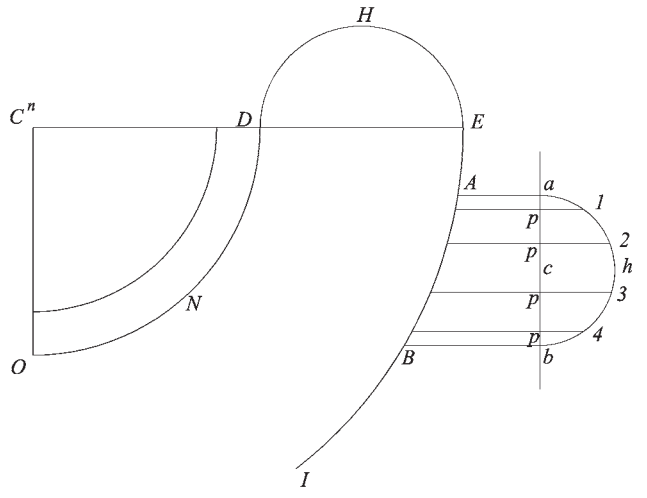


Fig. *122 a* Prima costruzione della volta a botte che interseca una volta anulare

Si alzerà in seguito dal punto *E*, una perpendicolare a *DE* come *E* 2^3, che sarà la tangente all'arco dritto e sulla quale si porterà le altezze p^1 e p^2, delle divisioni della volta a botte *E* I^4 e *E* 2^3, da dove si traccerà le parallele a *ED*, 2^3 *g* I^4 *f* che tagliano l'arco *HE* nei punti *g* e *f* dai quali si abbasseranno delle perpendicolari su *DE*, che la taglieranno nei punti *P* e *p*.

SECONDO CASO

VOLTA A BOTTE ORIZZONTALE CHE FA LUNETTA DESTRA IN UNA VOLTA SUL NOYAU

Siano (**Fig. *122 a***. Pl. 94.) due archi concentrici, *DNO* convesso, ed *EABI* concavo, le proiezioni dei piedritti o imposte di una volta sul noyau, e le rette *Aa, Bb*, quelle di una volta a botte orizzontale che le penetra.
Avendo tirato dal centro *Cn* del noyau *DNO*, la linea *DE*, come diametro dell'arco dritto della volta anulare, descriveremo su questa linea il centro di questa volta circolare o ellittica, rialzata o riabbassata come *DHE*.
Si tracci allo stesso modo l'arco dritto *a h b* per la volta a botte a livello, che andrà a dividere sulla curvatura nei punti *1, 2, 3, 4*, per i quali si abbasseranno delle perpendicolari su *a b* e si prolungano indefinitamente.

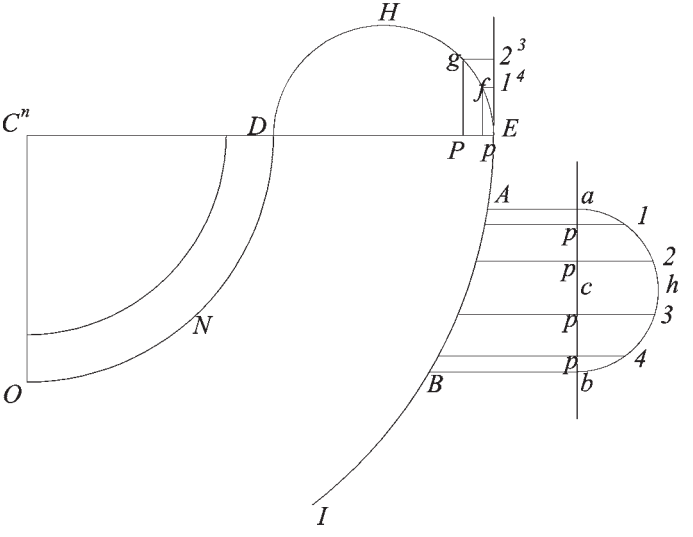
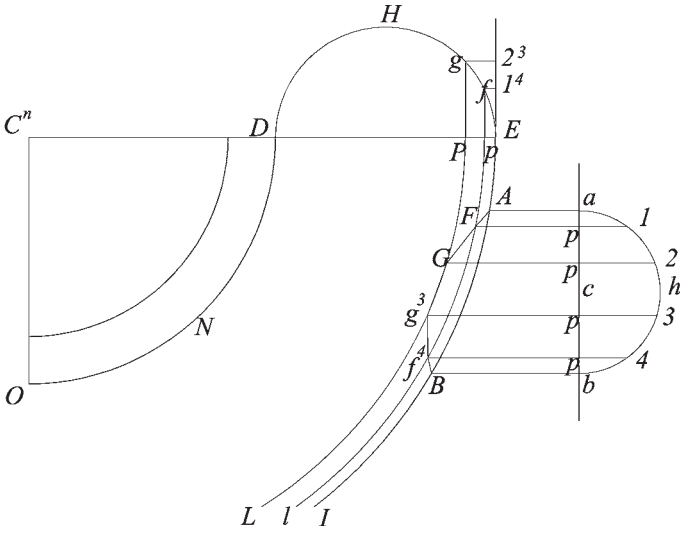


Fig. *122 b* Costruzione di 2 perpendicolari sul diametro della volta anulare

Dal centro C^n, attraverso i punti *P* e *p* della linea *DE*, si tracceranno degli archi di cerchi concentrici *PL*, *pl* che taglieranno le proiezioni delle

divisioni longitudinali dell'intradosso della volta a botte ai punti *FG* g^3 f^4, per i quali tracceranno delle linee dritte che daranno come proiezione degli intradossi piatti all'arresto dell'intersezione. Il contorno *AFG* g^3 f^4 *B*, ci servirà per formare la lunetta alla stessa maniera che abbiamo fatto al Problema V di pag. 129 per l'incontro delle volte a botte con le volte sferiche, senza nessuna differenza. In ogni caso noi rinviamo il Lettore a questo per evitare le ripetizioni.

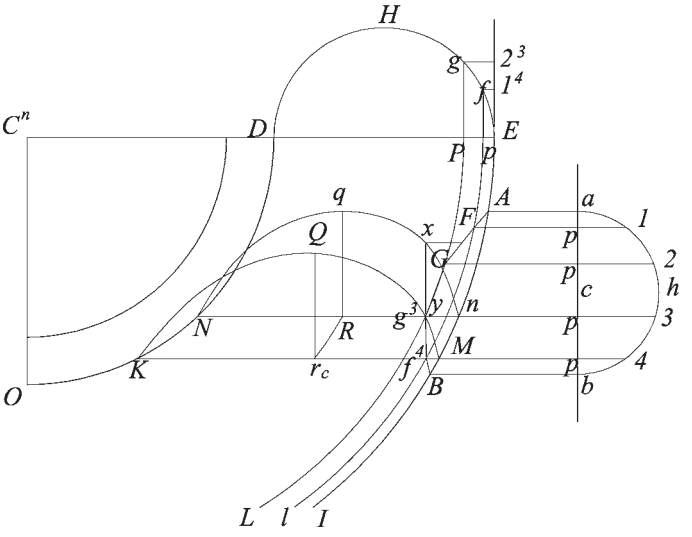
Fig. ***122 c*** Costzione completa dell'intersezione della volta a botte con la volta anulare



Dimostrazione

Se supponiamo dei piani verticali che passino per le proiezioni *p K p N*, delle divisioni longitudinali dell'intradosso della volta a botte prolungate, è chiaro che faranno per sezione della volta a botte dei parallelogrammi la cui altezza sarà p^1, p^2, uguale per costruzione a *E* I^4 *E* 2^3 o *g p*, *f p*, e nella Volta sul noyau faranno per sezione degli ovali del quart'ordine, dei quali abbiamo parlato nel primo libro, come *KQM*, *Nqn*, etc. che taglieranno i parallelogrammi della volta nei punti *x* e *y*, i quali saranno comuni alle due volte: ora questi punti saranno evidentemente, e per costruzione, alla stessa altezza dei punti *3* e *4* o *g* e *f*, e la loro proiezione sarà nell'intersezione di archi di cerchio *PL*, *pl*; la cui proiezione delle divisioni dell'arresto dell'intersezione delle due volte è ben trovata, ed è parte essenziale del trattato.

Fig. ***122 d*** Verifica della costruzione attraverso piani verticali



Secondo caso. Per fare l'intersezione dell'incontro di una torre con una volta sul noyau; è chiaro che la proiezione di quest'intersezione sarà data dall'arco di cerchio, che sarà la base della torre compresa nell'intervallo dall'incontro delle due volte, e quindi non ci sono difficoltà ed è per questo che non abbiamo la figura.

Non sarà difficile farne la proiezione verticale perché sarà la stessa della precedente in posizione differente. Non si tratta altro che supporre in piano verticale quello che è stato sul piano orizzontale; perché è chiaro che i piani verticali saranno sempre per sezione nella Volta sul noyau degli ovali del quart'ordine, e dei parallelogrammi all'inizio della torre, saranno invece al contrario del caso precedente sdraiate orizzontalmente.

TERZO CASO

L'INTERSEZIONE DI UNA VOLTA A BOTTE INCLINATA CHE INCONTRA UNA VOLTA SUL NOYAU

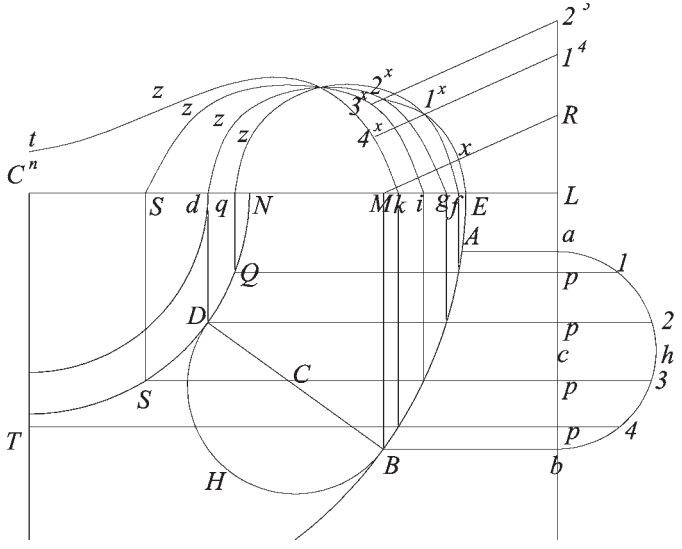
Dato (**Fig.** ***123***) il trapezio misto *NEBD*, il piano orizzontale di una porzione di volte sul noyau, il cui centro del noyau è in C^n, ai quali sono diretti i diametri *EN BD*, data anche *Aa Bb* la proiezione orizzontale di una volta a botte in discesa che penetra la volta sul noyau, secondo l'inclinazione dell'angolo della rampa data *RML*.

Su *a b* diametro della volta a botte, si descriverà il profilo arrotondato della parte interna della volta presa in un punto preciso *a h b*, che si dividerà nella sua curvatura ai punti *1*,*2*,*3*,*4*, attraverso i quali si tireranno delle perpendicolari ad *a b*, che prolungheremo indefinitamente, i quali taglieranno il piedritto della volta sul noyau nei punti *F*, *G*, *I K*, e per i quali si eleveranno delle perpendicolari alle proiezioni delle divisioni longitudinali dell'intradosso fino all'incontro del diametro *NE*, che prenderà per base del profilo; queste perpendicolari taglieranno questa base nei punti *M k i g*, *f*, *E*.

Prolungheremo in seguito la linea di facciata *b a*, che taglierà la rampa *MR* al punto *R*, al di sopra del quale si riporterà l'altezza p^1, p^2, del profilo arrotondato della parte interna della volta presa in un punto preciso di $R1^4$, $R\ 2^3$, per questi punti 1^4 e 2^3, si tireranno le parallele alla linea di rampa *MR* prolungate indefinitamente.

Si traccerà in seguito attraverso il problema 16 del secondo libro pag. 162, le curve ovali del quarto ordine di *QF*, *DG*, *SI*, *TK*, che si trasporteranno attraverso le perpendicolari *q Q d D*, etc. sulla base del profilo C^n *L*, attraverso le altezze dell'arco dritto *DHB* della volta sul noyau; non sarà neanche necessario tracciare questi ovali interi, ma soltanto nella parte concava *A B*, dove avviene l'incontro delle due volte: queste curve taglieranno le proiezioni verticali dei giunti di base della volta a botte in dei punti che saranno all'intersezione delle due volte, dai quali si abbasseranno delle perpendicolari sulle proiezioni corrispondenti delle divisioni longitudinali dell'intradosso della volta a botte, per avere la proiezione orizzontale degli stessi punti; così l'ovale *q z* 1^x *f* taglierà la proiezione verticale del primo e quarto giunto $1^4\ 4^x$ al punto *1x*; l'ovale *d z* 2^x *g* taglierà la proiezione verticale $2^3\ 3^x$, del 2° e 3° giunto al punto 2^x, l'ovale *S z* 3^x *i* taglierà la proiezione nel punto 3^x e infine la porzione dell'ovale *t z* 4^x *k* taglierà la proiezione del giunto $1^4\ 4^x$ al punto 4^x.
Riguardo al primo punto dell'imposta *x*, sarà dato dall'intersezione del profilo circolare sul diametro *NE* o *BD*, e dalla linea di rampa *MR*, che mostra nella sua discesa che raggiunge la volta a botte, la nascita dell'incrocio che è più alta dalla parte in *x* che dall'altra in *M*, come noi l'abbiamo detto prima, parlando dell'incontro della volta a botte tra loro.

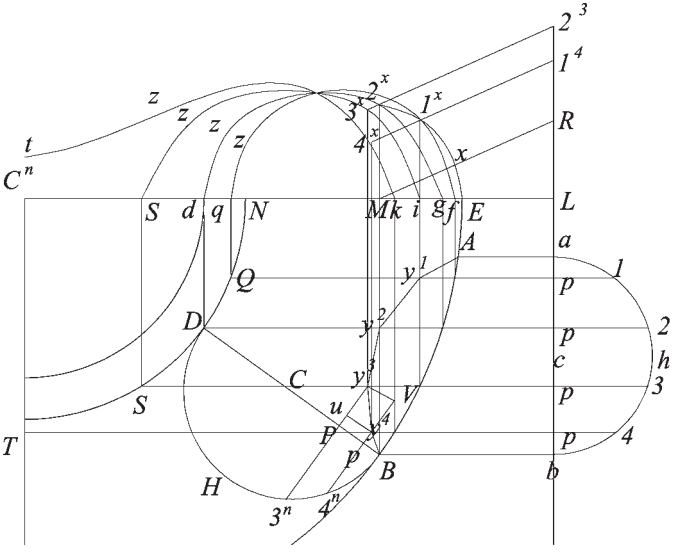
Fig. ***123 a*** Prima costruzione di una volta a botte inclinata che interseca una volta anulare



Se per i punti *x* 1^x, 2^x, 3^x, 4^x, abbassando delle perpendicolari sulle proiezioni della base della volta a botte *Qp*, *Dp*, *Sp*, *Tp*, i punti della loro intersezione y^1, y^2, y^3, y^4, danno la proiezione di queste sull'intersezione che provengono dalle divisioni *1*,*2*,*3*,*4*, del profilo arrotondato della parte interna della volta presa in un punto preciso *a h b*; e se si tracciano delle linee dritte alle corde dall'uno all'altro, avremo per proiezione dell'incontro dell'intradosso piatto delle due volte il contorno *A* y^1 y^2 *y3* y^4 *B*, di cui si farà lo stesso uso per formare la curvatura che ha descritto all'incrocio della volta a botte in discesa con la volta sferica; non c'è alcun cambio di costruzione, questo è il motivo che rinviamo il lettore al problema V del terzo tomo a pag. 133.

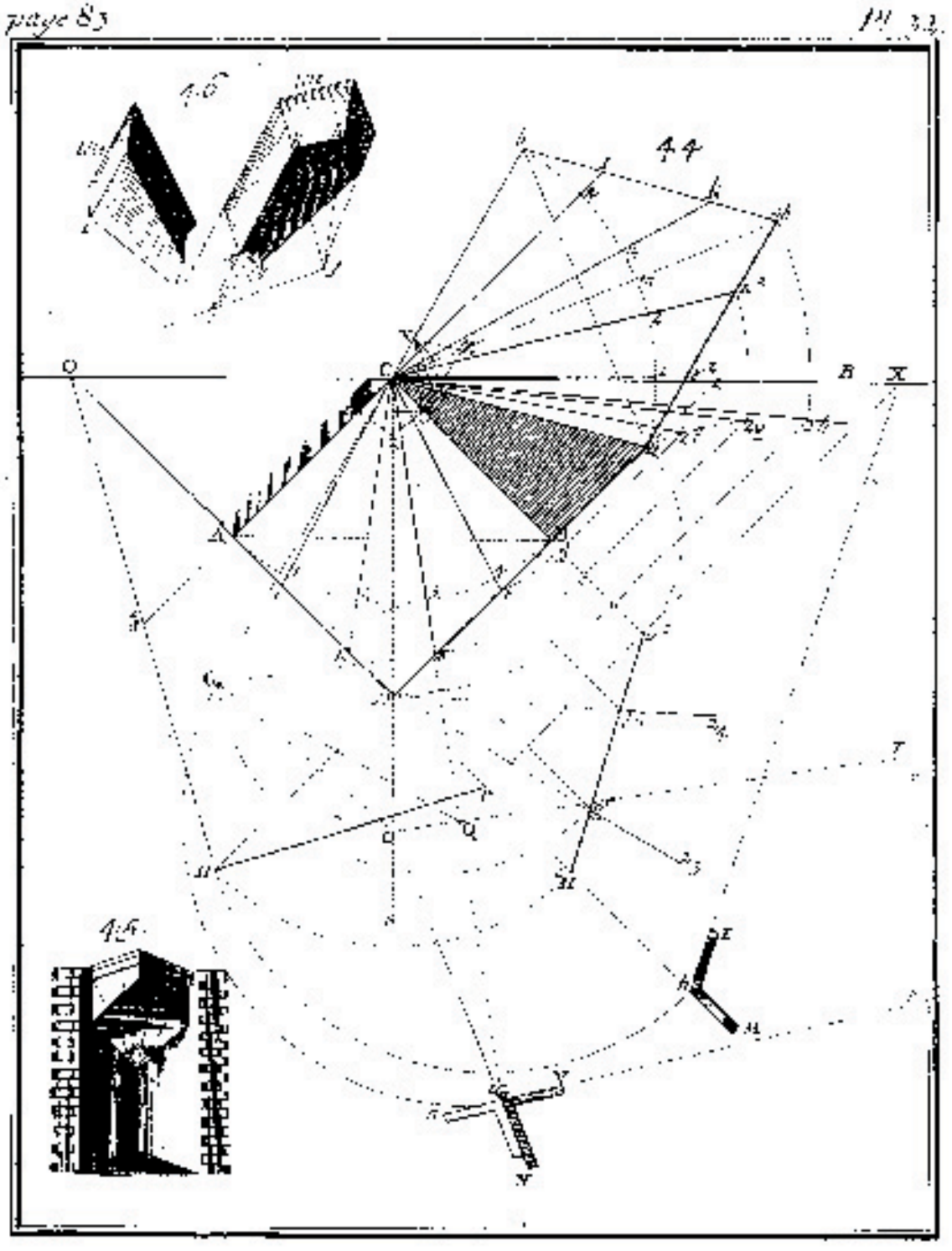
Per esempio per la curvatura *3 4* si farà la proiezione y^3 *u* y^4 *V*, di cui la parte *V* y^3 *e* y^4 *u* saranno diretti al centro del noyau C^n passante per i punti $y^3\ y^4$, e le parti y^3 *u e* y^4 *V*, saranno le corde di archi concentrici *AB* passanti per i punti y^3 e y^4 e interrotti alla linea tendente al centro *Cn*, che sono i giunti di testa della volta sferica sul noyau; gli stessi archi terminati in *P* e *p* al diametro *DB* dell'arco dritto *DHB* della volta sul noyau, saranno la posizione delle perpendicolari del muro 3^n *P*, 4^n *p* delle altezze delle divisioni longitudinali dell'intradosso circolare all'intradosso della menzionata volta, di quale si farà uso, come si è detto al problema citato.

Fig. ***123 b*** Costruzione finale dell'inersezione delle due volte



USO

L'esecuzione di questo trattato si fa assai frequente nelle chiese, di cui gli *chevet* girano a bassa quota, sotto le quali si faranno soventemente delle cappelle sotterranee, che ricevono la luce del giorno attraverso degli abbaini delle volte discendenti.


Planche 83
44
46

Problema X

Fare UNA TROMPE IN TORRE ROTONDA, eretta SU UNA LINEA RETTA.

Sappiamo che le Trompe coniche sono di solito erette, cioè elevate su una base composta da due linee Rette, che formano un angolo rientrante e le sferiche su una base in linea curva.
Si propone qui, di farne uno su una Linea Retta, di modo che esso non possa essere nè conico nè sferico, ma esso deve essere Cilindrico,come la Punta di un Flauto all'indietro, o Sferoide di una superficie convessa, simile quasi alle Conchiglie del Mare, che sono chiamate St.Jacques, il cui lato della loro cerniera e' retto, dove essa si piega in una concavità sferoidale scanalata; ma qui non è questione di scanalatura. M. de laRue dà la costruzione della prima figura in forma Cilindrica, e il Professore Deran dà quella della seconda in forma Sferoidale: noi daremo l'una e l'altra con delle modifiche e dei supplementi considerevoli; per primo M. de la Rue indica che la doele diventa piana,quando la sua altezza e' uguale alla sporgenza della Torre che essa porta, ciò genera una difformità alla congiunzione della doele con il muro, che formano un angolo molto sensibile. 2 m, perche' esso non dice nulla dello spigolo della sommità della Trompe.

Prima specie di questo Trompe, dove la doele è Cilindrica o Cilindroide.
Sia (Fig. 126) un segmento del cerchio ABD, minore in rapporto al semicerchio, il quale è la proiezione orizzontale della sporgenza della Torre, che la Trompe deve sostenere in aria. Prendiamo questo segmento minore in rapporto al semicerchio, qualsiasi cosa si possa pensare, esso non puo' essere che la metà del cerchio, ma niente di più, perchè i suoi Conci spingerebbero troppo al vuoto dai lati .
Per rendere questa Trompe perfetta, ci sono due cose da concilare; per prima cosa la solidità, che esige che l'altezza della doele sia maggiore della sporgenza della Torre; l'altra è la decorazione che esige, primo che la transizione della superficie piana del muro e quella della doele siano insensibili; secondo che la curva del contorno della doele si avvicini il più possibile ad un cerchio o ad un'ellisse.
Primariamente. Se si conosce la sporgenza del centro della Torre, che è uguale all'altezza della chiave della doele, si vede che la massa porta al falso su un angolo di 45 gradi, di conseguenza sara' difficile assicurarne la connessione, nel caso che la Trompe sia grande, perchè

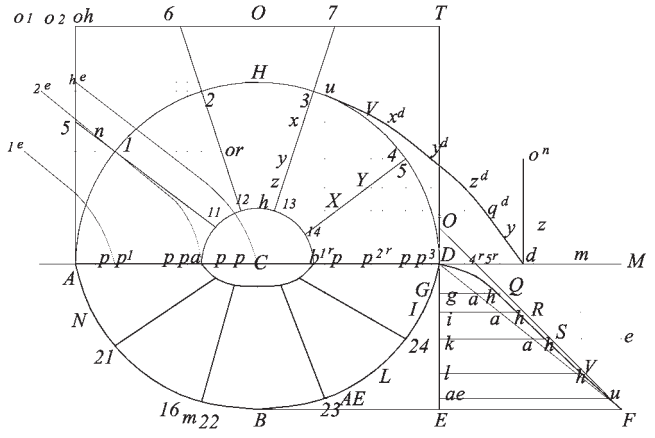
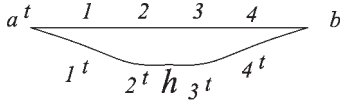


Fig. 126 L'arco AB sembrerebbe diviso in conci di uguale misura, questo porterebbe a un disegno diverso dei giunti di letto in facciata da quello presentato nella Fig.45

a tutto sesto che sarà ellittica in elevazione verticale, e se sappiamo che la doele è piana, lo spigolo della Torre con la doele sarà anch'esso evidentemente un'Ellisse, perchè è la sezione piana di un Cilindro fatta obliquamente al suo asse.
Secondariamente. Se la sporgenza deve essere assolutamente uguale all'altezza della Trompe, e sia che si voglia fare la doele Cilindrica o Cilindroide, qualunque curva convessa senza inflessione che si scelga per base verticale del Cilindro orizzontale, o piuttosto (in parole d'Arte) per suo arco retto, essa non puo' dare una arco a sesto di faccia, per il quale l'elevazione o proiezione verticale sia un cerchio; ma una curva che si allargherà più o meno verso i lati, secondo se questo arco retto renderà la doele più o meno convessa; così il quarto del cerchio lo renderebbe diverso dal cerchio e più simile al quadrato rispetto alla parabola o all'iperbole, che sono le due curve che meglio si adattano ai solidi ; poichè l'iperbole può dare, per proiezione verticale dello spigolo di intersezione della doele dela Trompe con la Torre, un cerchio o una curva somigliante al cerchio, quando la sporgenza orizzontale della Torre è minore dell'altezza dela Trompe: facciamo una costruzione generale che servirà per tutti i tipi di archi retti che si possono scegliere, per la doele Cilindrica della Trompe e le curve di proiezione verticale di elevazione degli spigoli di intersezione che ne risultano con la Torre rotonda.

[1] L'altezza scelta dal Frezier é pari al lato del quadrato da Lui assegnato alla proiezione ortogonale ABCD dell'intradosso, questo fa si che il punto P, piede della retta HP, coincida col punto di intersezione della retta a^2X con la retta AD.



Sia (Fig. 126) il segmento del cerchio ABD, minore del semicerchio, la proiezione orizzontale della Torre, il cui centro è il centro della corda ovvero il punto C, sul quale, avendo elevato la perpendicolare CB, si traccerà dal punto B, dove essa taglia l'arco di cerchio, la linea BF parallela ad AD, sulla quale, avendo preso BE uguale a CD, si traccerà la linea ED, la quale sarà l'asse di un' iperbole; poi, portando CD in EF, per l'ampiezza o per la più grande ordinata dell'iperbole, si porterà CD in EO su ED prolungata per avere il punto O. Si unisce a destra O con F e poi il punto D, preso per vertice, con il punto F. Si tracceranno, in un secondo tempo, altrettante perpendicolari all'asse DE quante si vorranno avere dai punti delle curve dell'arco retto e dello spigolo di intersezione; queste perpendicolari taglieranno la linea DF nei punti a, a, a, e la linea OF nei punti Q, R, S. E si cercheranno dei medi proporzionali tra g a e g Q, i a e i r, k a e k S, portando g a in Q e, i a in R e, e k a in S e; poi si eleveranno delle perpendicolari a queste linee nei punti a, e dal centro delle linee g e, i e, k e, come i centri, si descriveranno degli archi che taglieranno queste perpendicolari nei punti x, y, z; si porteranno le lunghezze a x, a y, a z in g h, i h, k h per avere i punti h, h, h che saranno sul perimetro dell' iperbole Dh, h, hF, che sarà l'arco retto della doele della Trompe.

A questo punto, per trovare la proiezione verticale di intersezione della doele con la superficie della Torre rotonda, si tracceranno delle parallele a DE o CB, dai punti I, G, 24, L AE, dove le perpendicolari all'asse ED tagliano l'arco DB, su le quali si porteranno g h, i h, k h, l h, ae u, EF, sopra la corda AD; così si porterà g h in p q dove essa darà su G q il punto q; i h su p r, dove essa darà il punto r, k h su p s, l h su p v, ae h su p v, e EF su CH, e dai punti H v, V f, r q D, si traccerà una curva che sarà la proiezione verticale di quella doppia curva, che si forma all'intersezione della doele della Torre rotonda, per il quale la proiezione verticale è il rettangolo ADTt, che è una sezione del cilindro con un piano parallelo al suo asse.

Questa curva AHD è qui un semicerchio, potrà essere presa, se si vuole, per arco a sesto primitivo, sul quale si farà la divisione dei Conci in parti uguali, come ai punti 1, 2, 3, 4; ma esse diventano profondamente diverse nell'esecuzione a causa della proiezione verticale che accorcia la curva a doppia curvatura in maniera diversa; e se si vuole che le teste dei Conci siano uguali, occorre cercare un'altra curva che sia lo sviluppo di quella dello spigolo esteso su una superficie piana. A tal fine occorre rettificare l'arco di cerchio BD sulla Retta CD, portando di seguito tutte le sue parti; per esempio BAE su C 1^r, AEL su 1^r 2^r, L 24 su 2^r 3^r, 24 I su 3^r 4^r, IG su 4^r 5^r, e GD su 5^r d, e dai punti 1^r, 2^r, 3^r, 4^r, 5^r, si eleveranno delle perpendicolari uguali alle loro parallele corrispondenti, che daranno i punti di questa curva; così facendo 5^r q^d uguale a p q, si avra' il punto q^d; 4^r z^d, uguale a p r, darà il punto z^d; 3^r y^d uguale a p 2^r x^d uguale a p v, darà il punto x^d, e con questi casi di uguaglianza si trovano facilmente dalle parallele a CD, come q q^d, r z^d, e dai punti t t, x^d, y^d, z^d, q^r, d, si porterà una curva che sarà lo sviluppo dello spigolo esteso su una superficie piana.

Questa curva avrà, se si vuole, due usi, l' uno per fare la divisione dei due Conci; se si vuole che le loro teste siano tutte uguali in opera, occorrre utilizzarla come arco a sesto primitivo e rinviare da una linea parallela a CD, la divisione di questa curva su quella della proiezione verticale AHD; per esempio se la divisione del primo o del secondo Concio cade sul punto z^d, la trasporterà sull' arco H r d, dalla parallela z^d r, che darà una divisione r molto più bassa di quella del punto 4, che è stata trovata dividendo l'arco a sesto HD, nelllo stesso numero di parti uguali, che sono qui in cinque Conci.

In secondo luogo, essa servirà per formare dei pannelli flessibili, i quali serviranno per tracciare lo spigolo sulle teste cilindriche dei Conci, considerati sulla superficie della Torre .

Abbiamo già trovato per questo tratto, tre curve diverse, 1° D h h F, che è quella dell' arco retto della doele. 2° HVD, quella della proiezione verticale dello spigolo di intersezione della doele e della Torre. 3° H x^d d, che è quella dello sviluppo della stessa curva. Ci resta di trovare le curve delle sezioni piane delle facce con la doele, che sono ancora delle iperboli, e quelle delle stesse superfici piane di faccia con la Torre che sono delle ellissi.

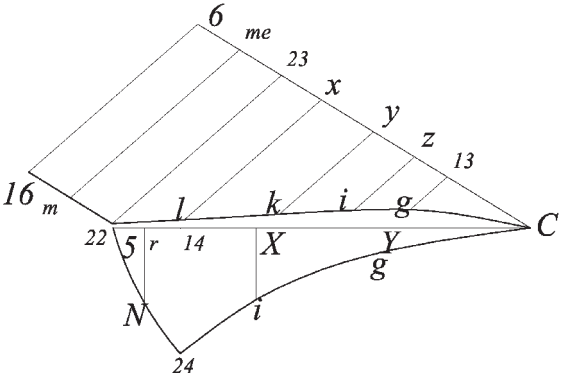


Fig. 128 L'arco AB sembrerebbe diviso in conci di uguale misura, questo porterebbe a un disegno diverso dei giunti di letto in facciata da quello presentato nella Fig.45

[2] I piani di letto dovendo appartenere al fascio di piani passante per CD intersecano comunque il piano di faccia secondo rette uscenti sempre dal punto D, quindi non é possibile scegliere un centro diverso a meno che non si abbiano piani non passanti per CD.
[3] La diversa ampiezza degli angoli dei giunti di intradosso determinerebbe una diversa disposizione dei giunti di testa e quindi l

Poi, si sposterà da parte, come alla figura 128, la lunghezza C3 in C23, con tutte le sue divisioni x, z, 13 dalle quali si tracceranno altrettante perpendicolari a C23 sulle quali si tracceranno le ascisse dell' asse DE, secondo l'ordine al quale queste divisioni rispondono; così si traccerà l'ascissa g D della figura 126. (in 13 g , della figura 128) i D in z i, k D in y k, l D in x l; (si lascia ae D, perchè non abbiamo portato la parellala di V, vicino al punto 3) ed infine ED in 23 22.

Nello stesso modo, avendo spostato C4 della figura 126 in C 14 della figura 128. Con le sue divisioni X e Y, ed elevato sulle sue divisioni delle perpendicolari; si tracceranno le ascisse corrispondenti g D in Y g, i D in X i, e k D in 14 21, supponendo che il punto 4 cade sul punto s della linea s p 24, che risponde al punto k dell'asse DE, e dagli stessi punti troverete 22, l, k, i, g C, e 21 i g C, si tracceranno delle curve che saranno quelle degli spigoli dei giunti di letto, del secondo e primo Conci della retta, che sarebbero anche per quelli della sinistra, che saranno uguali fra loro le quali serviranno a formare i pannelli di letto; ma per finirli occorrre aggiungere a loro le sezioni di questi piani con la Torre per avere i giunti di testa .

Si prolungherà la linea C23, della figura 128. (della quantità 2' 6, del giunto di testa della figura 126.) con la sua divisione al punto me, e si tracceranno da questi punti delle parallele a 23, 22 sulle quali si porteranno le lunghezze p 6, p m, comprese nel segmento di proiezione orizzontale della Torre ABD, e portate dai punti 6 e me, perpendicolarmente ad AD. Avendo anche abbassato su AD delle perpendicolari 5 A, n N, 1 21, si porterà su C 5 della figura 128, la lunghezza p N, e dai punti 5, N, 21 si traccerà un arco ellittico, che sarà il giunto di testa della faccia di sopra del primo Concio, e di quella di sotto del secondo, come 16, m, 22, lo sarà del secondo e del terzo; e il taglio sarà trovato.

Rimane una settima curva da trovare, che è lo sviluppo dello spigolo della Trompillon su una superficie piana, per formare un pannello flessibile adatto ad essere applicato sulla superficie cilindrica del suo letto, per tracciare e regolare il perimetro della doele. Si potrebbe fare anche lo sviluppo dellla stessa curva considerata nella doele, che è adatta ad essere sviluppata, perchè è curva soltanto in un senso come i Cilindri; ma a causa della regolarità della figura, la curva del letto del Trompillon, che è un cilindro circolare, crediamo sia meglio farne il pannello di sviluppo. Avendo rettificato il semicechio a h b della proiezione verticale, o di elevazione della Trompillon, dal problema V del 3° libro, si porterà la lunghezza a^t b, figura + sopra la figura 126, con le sue divisioni in cinque parti uguali ai punti 1, 2, 3, 4, e si porteranno le altezze p 11 , p 12, C h di queste divisioni, sulla linea D m.In questi punti che non ci sono indicati con nessuna lettera, a causa della piccolezza della figura, a cominciare dal punto D; e da questi punti si porteranno delle perpendicolari a questa stessa linea D M, che taglieranno l'iperbole nei suoi punti le cui distanze dalla linea D M, saranno le faillies dello spigolo del Trompillon, al di là della retta at b, base del suo sviluppo alla figura +, si porteranno le faillies su ogni divisione della linea a^t b sviluppata, e dai punti delle loro estremità, si traccerà la curva a 1^t, 2^t, h^t, 3^t, 4^t, b, che darà lo sviluppo richiesto per farne un pannello flessibile, adatto ad essere applicato attorno al letto del Cilindro del Trompillon e darci il contorno del suo spigolo di intersezione con la doele.

Si tracceranno le curve dei giunti della doele dei letti superiori ed inferiori, delle pietre che avranno pochissima altezza o lunghezza per raggiungere il sopra del Trompillon, fino alla superficie della Torre, come le pietre poste nel muro, che conviene mescolare nei Conci di questi tipi di opere che portano a falso.

APPLICAZIONE DEL TAGLIO

SULLA PIETRA

Abbiamo determinato a piacere, e secondo il fabbisogno, lo spessore della pietra che deve entrrare nel muro, per portare e controbilanciare il carico della sporgenza del Trompillon ad ogni Concio; per esempio per il primo, figura 129 si aggiungerà lo spessore 5 d, aldilà della linea 5, 11, la quale è quella dell' allineamento del muro Retto sul quale si regolerà per il loro spessore e per posare il lato retto dei pannelli di letto inferiore e superiore, affinchè la faillie non a piombo dei Conci p 2^1, a 2^2 resti al di fuori di questo spessore.

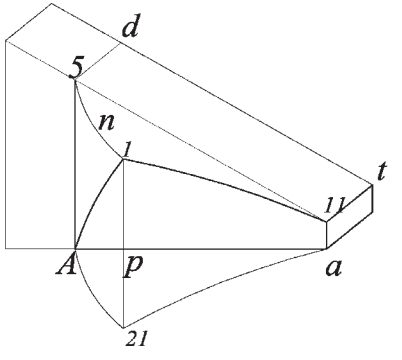


Fig. 129 L'arco AB sembrerebbe diviso in conci di uguale misura, questo porterebbe a un disegno diverso dei giunti di letto in facciata da quello presentato nella Fig.45

Si farà in seguito un paramento di sovrapposizione verticale sul quale si applicherà il pannello, pari allo spazio che occupa ogni Concio nella sua elevazione; per esempio per il primo, la figura quadrilatera A 5, 11 a, e per il secondo, la figura a cinque lati 5 t, 6, 12, 11, e per la chiave il quadrilatero 6, 12, 13, 7, e avendo tracciato su questo paramento il contorno del pannello si abbaterà la pietra con lo squadro di tutti i lati per formare un solido, simile ad un angolo la cui punta è smussata.

Sul letto di sotto all' imposta indicata con A a , si applicherà il pannello del piano orizzontale A a, 1^t, 21, con il quale si traccerà l' arco A N, 21 e la Retta A a senza confondersi con il contorno dei lati a 1^t, 1^t 21. Piazzando soltanto la Retta A a, parallelamente allo spigolo del letto e del paramento p r, e il punto 21 su questo spigolo. Si useranno le medesime attenzioni per piazzare il pannello 5, 21 C, della figura 128; sulla faccia 5, 11 dopo aver fatto un ritorno di squadra sullo spigolo p r, il punto 21, e tracciata la linea 21, 1, per piazzare sul punto 1 il punto 21 del pannello 5 21 C, del quale si toglierà sul lato 5' 1, il raggio del Trompillon C 11, preso all'elevazione. I contorni dei due pannelli dei letti superiore ed inferiore sono tracciati, adesso si abbatterà la pietra con lo squadro, sempre parallelamente alla linea 1 21, tracciata sul paramento, e dopo aver tracciato la porzione della Torre rotonda 5 1, 2t A, si applicherà un pannello flessibile formato dall'elevazione sulla curva d q^d y^d, un triangolo rettangolo d o^x y^d, applicando la Retta d o^h nell'angolo misto in A 5 e in questo modo si traccerà la curva dello spigolo d'intersezione della doele e della Torre A 1; e la curva 1 11, si abbatterà la pietra alla regola, che sarà sempre tenuta parallela alla linea dell'imposta A a, e per la testa del Trompillon, avendo tirato 11t con lo squadro con 5 11, si scaverà questa parte con un beuveau preso su 1, 11 a, all'elevazione per applicarci il pannello flessibile dello sviluppo del suo spigolo 11 a segnato alla figura + at 1, 1t, posando il lato 11t, della figura 129;

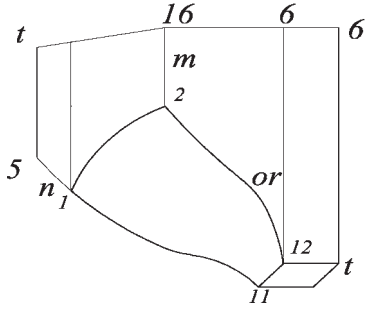


Fig. 129 L'arco AB sembrerebbe diviso in conci di uguale misura, questo porterebbe a un disegno diverso dei giunti di letto in facciata da quello presentato nella Fig.45

e il punto 1t sul punto 11, per tracciarvi la curva a^t 1^t, sulla quale si poserà un pezzo della retta, e l'altro su AI, parallelamente alla Retta A a, per finire di scavare la doele A1, 11 a. Si farà la stessa cosa per tracciare e tagliare il secondo Concio, il quale essendo stato trovato, sarà rappresentato in tale modo sulla figura 130; occorrerà solamente osservare che, non avendo la linea orrizzontale segnata come A a al primo Concio, bisognerà indicarne una sul disegno, 1 or, che si traccerà sul paramento, per segnare sullo spigolo del letto inferiore un punto o^r, dal quale si traccerà una linea con lo squadro a questo spigolo fino all'incontro della curva, che indica lo spigolo del giunto di letto e della doele, che abbiamo tracciato con il pannello 6, 16, 22, C, (figura 128) e da questo punto o^r, e l' angolo 1 di letto inferiore allo spigolo 1 2 si traccerà una linea orizzzontale 1 o, che servirà a condurre la retta sempre parallelamente a se stessa, e a questa linea, per scavare la doele spingendola, e facendola scorrere sulle linee trovate e tracciate 1' 2, 2 o^r 12, 12 1, e 11 1', che servono per tracciare la linea di testa verso il Trompillon del pannello flessibile 1 1^t, 2^t 2 della figura più al di sopra della figura 126.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA

La superficie della doele che serve da cù-de-lamp alla Trompe, deve soddisfare due condizioni, che sono state osservate in questo Trattato; l'una è quella di essere retto secondo la direzione orizzontale per adeguarsi al muro retto, dal quale esso prende spicco; l'altra di essere tangente a questo muro, di modo che sia impercettibile il suo spicco; queste due condizioni sono ben seguite dalla superficie del Cilindroide parabolico o iperbolico; ma per la solidità, la superficie iperbolica conviene di più perchè è meno concava della parabolica. Per dimostrare che la curva che abbiamo descritto deve servire da arco retto alla doele del Trompillon, bisogna considerare che i due triangoli EDF, EOF, siano tagliati dalle parallele alla base comune EF, ed essi daranno le seguenti analogie: EF. k S : : EO. k O, e nel triangolo EDF, EF . k a : : ED . k D, le quali, essendo moltiplicate l'una per l'altra si avrà EF^2 . k S x k a : : EO x ED . k O x k D, ma dalla costruzione k S x k a = k h^2 , la cui EF^2. k h^2 : : OED _ O k D, ciò che occorreva dimostrare; poichè si sà che una delle prime proprietà dell'iperbole è che i quadrati delle ordinate sono fra loro come dei rettangoli fatti di linee composte dalla prima ascissa e da un asse.

Notate che questa dimostrazione servirà per rettificare alcuni errori, non di costruzione, ma di spiegazione, che sono rimasti alla pagina 451,dove abbiamo fatto la costruzione dell'iperbole; e a quella della figura 246, dove le c^1 c^2, sono piazzate in modo sbagliato e anche le linee tirate da questi punti, che devono partire dal centro degli intervalli C^1 S, C^2 S; solo per la spiegazione, perchè la costruzione è buona e corretta.Questa

curva d'arco retto (in opposizione all'arco obliquo) essendo data per conosciuta, è chiaro che essa è tangente al muro rappresentato da DM o da DT, perchè il suo asse ED è perpendicolare a DM, di conseguenza essa tocca DM in D.Adesso se si pensa che questa curva D h F, che è il profilo della doele, si muova attorno al suo asse orizzontale ED, fino a che si trova nella posizione verticale; allora essa sarà sullo stesso piano della linea DT.Nella situazione presente, immaginiamo due piani verticali, che passano dalle perpendicolari all'asse ED, e parallelamente al piano del muro, come g Q, i R, e c., essi taglieranno la base della Torre ABD, nei punti B, L, 24, r, G, e la superficie, secondo le altezze EF, l h, k , h, ih, gh, che sono le ordinate dell'iperbole sul piano verticale AHD, saranno le linee CH, pv, ps, pr, pq, le quali sono state dalla costruzione ugualmente a quelle dell'iperbole; la cui curva AHD che passa dalle estremità di tutte queste linee alla superficie iperbolica della doele della Trompe e nello stesso tempo alla superficie del Cilindro circolare della Torre, poichè esse sono collocate attorno alla base ABD; ai punti B, AE, L, 24, I, G, perpendicolarmente al suo piano ABD.
Atttualmente, se si considera la curva AHD, sul piano del muro, e se si immagina dei piani verticali passanti dalle divisioni dei giunti di testa dei Conci, ai punti 1, 2, 3, 4, perpendicolarmente al piano AHD; è chiaro che essi saranno due sezioni, l'una nella doele, che sarà una porzione dell'iperbole, l'altra una linea retta nella Torre, che sarà una porzione del parallelogramma, figure che abbiamo indicato nella figura 126. Dai profili C h^e o^h, a 2^e, o^z pi, 1^e, o^i, le cui sporgenze orizzontali H h^e, 2 2^e, 1 1^e, sono uguali alle sezioni di questi piani con quello della base ABD; dobbiamo sapere che H h^e, uguale a CB 2 2^t = a22, 1 1^e uguale a d^t 2^t; anche alle altre.

Abbiamo già dimostrato che l'arco retto della doele è tangente al muro, e che la proiezione dello spigolo d'intersezione della doele con la Torre è ben tracciato ci resta da far vedere che le curve dei giunti di letto delle figura 126 e 128 22 K C e 21 g C convengono anche alla superficie della doele tagliata dai piani inclinati C3, C4 .

Dal teorema 3 del primo libro, le sezioni dei Cilindroidi di base parabolica o iperbolica, sono anche delle iperboli proporzionali a quella della base del Cilindro; ora è chiaro, a causa delle parallele x v, y s, z r, 1^3 q, che tagliano C3, che queste divisioni sono proporzionali a queste ordinate considerate nella tangente DT o DM della base del Cilindro, e che esse danno la vera posizione delle ordinate della tangente nel giunto C3, che saranno uguali alle circonferenze; per esempio MF che è uguale a DE e mh = LD; anche le altre, dunque le curve degli spigoli dei giunti di letto saranno ben tracciate.

Per quanto riguarda le due curve H x^d d, dello spigolo, e a^t h b, dello spigolo del Trompillon in figura +, dobbiamo sapere che esse sono dello stesso tipo in modo inverso: l'una è lo sviluppo dello spigolo d'intersezione del Cilindro iperbolico orizzontale, con un Cilindro verticale; l'altro dello stesso Cilindro iperbolico con un cerchio orizzontale, che gli è perpendicolare; la costruzione ne fà vedere l'esattezza; dopo tante pratiche simili, sembra inutile indicarla di nuovo.

COROLLARIO I

Segue questa pratica, che se la curva D h F non è un'iperbole la cui distanza dal punto E al suo centro c^y non è uguale alla più grande ordinata EF, la curva di proiezione AHD, dello spigolo d'intersezione della doele e della Torre non sarà circolare, come nel caso presente ma diventerà un'ellissoide irregolare allungata verso il vertice H o spianata, a seconda che la curva D h F sia più o meno diversa da questa iperbole .

COROLLARIO II

Secondariamente, se l'architetto vuole destinare la figura circolare a questa proiezione, egli può iniziare il tratto dal semicerchio AHD, e continuare con un modo inverso a quello che abbiamo descritto, egli troverà le stesse curve d'arco retto (in opposizione all'arco obliquo) della doele e dei giunti di letto; ma se la sporgenza della Torre CB diventa uguale all'altezza CH, del suo arco a sesto di elevazione dello spigolo della Trompe, la sua doele non sarà cava là al suo spicco sull'imposta, ma formerà un angolo di 135 gradi, che sarà sgradevole alla vista.

COROLLARIO III E NOTA

Segue in terzo luogo, che adoperando la costruzione che inizia dall'arco a sesto circolare AHD, come essa è indicata da M. De la Rue che dà una costruzione inversa alla nostra, si sacrifica una bellezza (con poche conseguenze), alla solidità della Trompe; poichè per aumentare la forza di ancoraggio, occorre prendere lo spicco cosìcchè la faille della costruzione non a piombo aumenta; ora, in quest'ultima costruzione succede tutto il contrario; poichè supponendo la faille uguale al semidiametro della Torre, l'altezza diventerà uguale anch'essa; poichè CB sarà uguale a CH ciò che si vede meglio dal profilo C h^e H, o h^e H sarà uguale a HC nella supposizione, e non nella figura attuale; e se la sporgenza CB è minore del terzo lato della corda AD, come nell'esempio di M. de la Rue, l'altezza diventa più grande di questa sporgenza, nel rapporto di quasi cinque a tre; così quando il bisogno di solidità diminuisce, aumenta quella da questa costruzione, e quando si dovrebbe aumentare la solidità la si diminuisce, poichè l'altezza della doele della Trompe non aumenta nello stesso modo rispetto alla faille;;così si deve concludere che non si deve pensare alla figura circolare come ad un arco a sesto di elevazione

nel profilo AHD, dato che questa figura non è quella dello spigolo, nel quale è una curva a doppia curvatura .

COROLLARIO IV

Segue ancora che quando la faille della Trompe è uguale al raggio della Torre, conviene per solidità, che si rialzi l'arco a sesto di elevazione AHD; ma se lo facciamo ellittico, l'arco retto della doele Cilindroide della Trompe, quello che risulterà non sarà più una curva convessa ma concavo-convessa, cioè in parte concava in parte convessa dallo stesso lato, quasi come la sezione verticale di una campana. E se si segue il metodo che abbiamo indicato, facendo un arco retto iperbolico, nel quale l'ampiezza e la distanza dal centro dell'iperbole alla più grande ordinata siano uguali alll'altezza della doele; ne risulterà un arco a sesto d'elevazione di letto, che sarà un'ellissoide diverso dell'ellissi, più allargata di due lati, e quasi circolare verso il suo maggiore asse, simile a questi ellissoidi che si imitano dagli archi di cerchi ordinati, il cui effetto non deve essere sgradevole alla vista, per l'effetto che essa produce allo spigolo d'intersezione della superficie della doele della Trompe con quella della Torre rotonda .

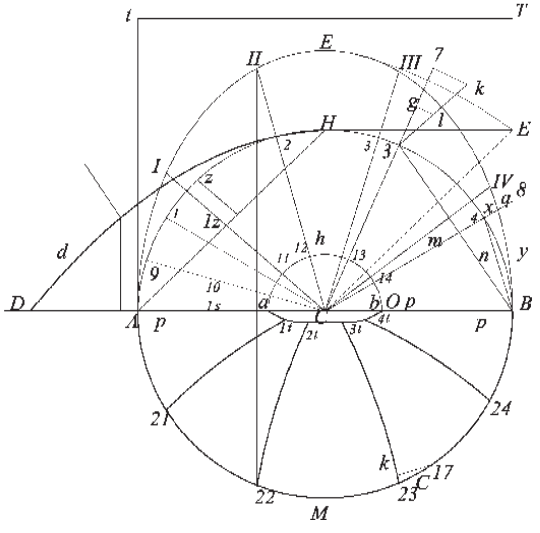


Fig. 129 L'arco AB sembrerebbe diviso in conci di uguale misura, questo porterebbe a un disegno diverso dei giunti di letto in facciata da quello presentato nella Fig.45

SECONDO TIPO DI TROMPE IN TORRE ROTONDA, eretto su UN MURO DRITTO.

E DI CUI LA DOELE è vuota, di una concavità di uno SFEROIDE IRREGOLARE .

Per avere un'idea della concavità della doele che ci proponiamo, occorre ricordare quella della parte posteriore del Concio di St.Antonio, la quale nasce su una linea retta, dove si piega con una concavità di uno Sferoide irregolare, ma il cui spigolo d'intersezione con la Torre è nel piano inclinato poichè essa è generata dalla sezione di un piano che taglia una Torre Cilindrica, segue che questo spigolo è necessariamente ellittico e non una curva a doppia curvatura come quella della Trompe della doele Cilindrico o Cilindroide del quale abbiamo parlato.

L'asse minore di questi ellissi è AB di figura 131, diametro della Torre, e l'altezza inclinata dell'asse maggiore è arbitraria.

Se si prendesse, come il Prof. Deran, per arco a sesto primitivo, il semicerchio AHB, che è la proiezione verticale o l'elevazione dello spigolo d'intersezione della Torre, si potrebbe prendere, per metà dell'asse maggiore, la corda AH della metà di questo arco a sesto; ma poichè, la sua inclinazione ci sembra troppo grande per una buona solidità, crediamo che occorra rialzarlo come abbiamo detto prima, quando la sporgenza della Trompe è uguale al semidiametro della Torre o vi si avvicina.

In qualunnque maniera si faccia, non prendiamo questa proiezione verticale, circolare o ellittica per un arco a sesto primitivo ma l'Ellisse AEB, formata dagli assi dati AB e AH che è la vera sezione della Torre, poichè essa dà il vero contorno dello spigolo d'intersezione della Torre e della doele sulla quale si può fare una divisione uguale delle teste dei Conci, cosa che non si può fare come abbiamo detto, sul contorno della proiezione verticale AHB.

Questa circonferenza AEB, che si trova nella giusta estensione, e la curva che si trova nel suo stato naturale, non ci dispensa tuttavia di fare uno sviluppo della proiezione verticale o dell'elevazione AHB, non per regolare la divisione delle teste del Concio, come abbiamo fatto precedentemente con la Trompe, ma solamente per formarne i pannelli flessibili necessari per tracciare il contorno dello spigolo della doele e della Torre.

Sulle divisioni dell'arco a sesto primitivo AEB si tracceranno delle perpendicolari su AB, che si prolungheranno fino al contorno AMB, che è la proiezione orizzontale della Torre; tali sono I 21, II 22, III 23, IV 24.

Si farà lo stesso per le divisioni del semicerchio a h b, dell'arco a sesto del Trompillon; ma non si potranno determinare le loro proiezioni orizzontali benchè abbiamo tracciato le curve dei giunti di faccia da una parte in un profilo.

Per tracciare i pannelli dei giunti di faccia , inizieremo con il formare dei triangoli rettangoli, i cui lati sono indicati sul disegno; dobbiamo sapere, 1° l'altezza del giunto dello spigolo 1 p, 2 p. 2° il raggio della proiezione orizzontale 21 C, 22 C che forma con l'altezza del giunto un angolo retto, e l'ipotenusa che è la lunghezza dei semidiametri dell'Ellisse C I, C II, CIII, C IV. Se abbiamo bisogno del pannello del centro della chiave, si dovrebbe fare un triangolo rettangolo con la linea orizzontale CM, la verticale CH, e l'inclinata CE.Si tratta di trovare gli archi di questi giunti di letto per i quali abbiamo preso solo le corde, che danno solamente due

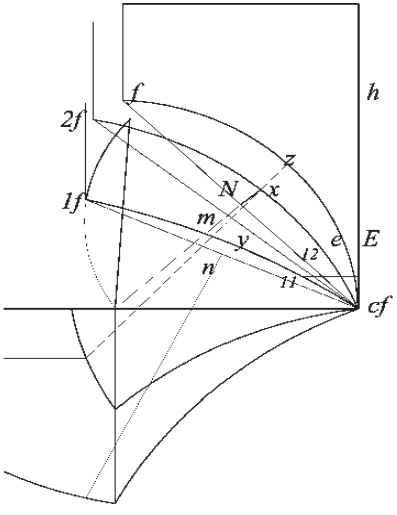


Fig. 129 L'arco AB sembrerebbe diviso in conci di uguale misura, questo porterebbe a un disegno diverso dei giunti di letto in facciata da quello presentato nella Fig.45

Per trovarne un terzo si tireranno le corde B 3, B 4 della figura 131 sul centro delle quali si eleverà una perpendicolare che darà le frecce m^x e n^y che porteremo, alla figura 132, sul centro delle corde c^f 2^f, c f 1 ^{f}, in m^x e n^y, e dai tre punti c^f x 2^f, c^f y 1^f, si faranno passare gli archi che saranno i pannelli degli spigoli dei giunti di letto, nello stesso modo per c^f z e^f, per il centro della chiave di cui N z, è uguale a N z della figura 131.Resta soltanto da finire il contorno di questi pannelli e arrivare alla curva del giunto di testa, che è una porzione di Ellisse, la cui proiezione si trova sul piano orizzontale AMB, abbassandone i punti del giunto di testa 3 g 7, dalle perpendicolari 2^3 G 1^7, e tracciando su 3 2^3, la perpendicolare 1^7 K e la sua parallela l G secondo il nostro metodo; se si tracciano delle perpendicolari su 3 ' 7 e che ci portiamo le lunghezze della proiezione orizzontale K 2^7 su 3 k , e l G su g l, la curva 7 g l k, sarà quella del giunto di testa che cerchiamo. O più semplicemente dai punti 2^3, G, 1^7 che sono la proiezione orizzontale dei punti 3, g 7 dell' elevazione, dai punti 2 4, Q, B che sono quelle dei punti 4, q, 8, si porteranno le parellele a: AB, Q u, 2^4 4^f, 17 7 f, G g f, 2^3 3^f, prolungate indefinitamente; e avendo preso un punto su AB, prolungato in c^f, si prenderà la distanza c^f 1^4, uguale al raggio C B, il quale servirà per tutti i pannelli di letto; se l'arco a sesto di elevazione AHB è circolare; in seguito si porteranno le lunghezze C q e C 8, della 1° e 4° faccia C 8, progettata su una superife verticale, e le lunghezze C g e C 7 della 2° e 3° faccia, di C^f in c^f q, c^f b, c^f v e c^f 7, e dai punti 7, v, b, q, 1^4, si tracceranno delle perpendicolari a B c^f che taglieranno le parallele precedenti ai punti 7^f, g^f, 3^f, u, e 4^f, la curva 7^f g^f 3^f, sarà quella del giunto di testa 3 ' 7, e b u 4^f, quella del giunto di testa 4 ' 8 e il contorno 7^f 3^f c^f, sarà quello del 2° pannello e di 3^e b 4^f c^f, quello della 1° e 4° faccia.

APPLICAZIONE DEL TAGLIO sulla PIETRA

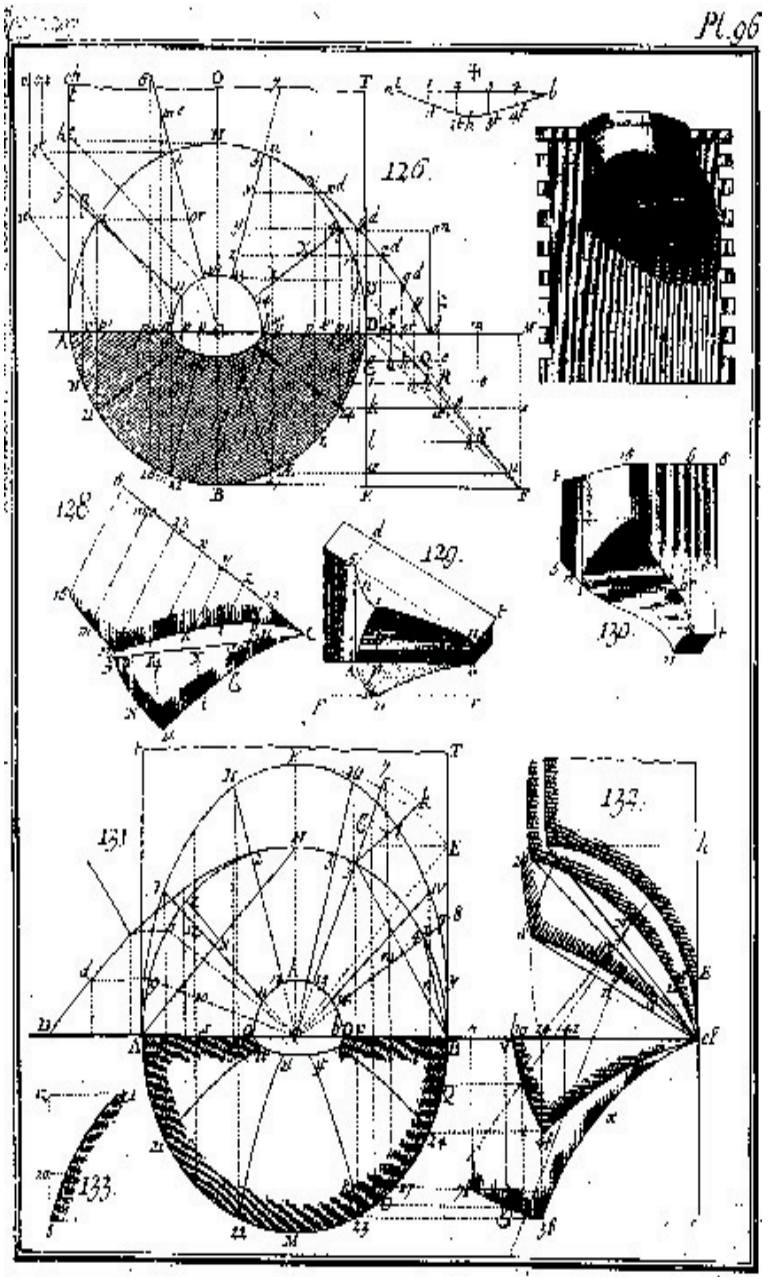
I pannelli di letto e quelli dello sviluppo della testa dei Conci nella Torre sono stati trovati, si userà quello per tagliare la pietra, quasi come è stato fatto per la Trompe alla doele cilindroide, di cui abbiamo parlato; a meno che essa, essendo concava sferoide, non possa essere fatta come quella; ma, dopo averla sbozzata, la si scaverà tramite i cerchi fatti da tali sezioni che si valuteranno a proposito della comodità, sia verticali, sia orizzontali, sia inclinati, questi ultimi saranno i più comodi, poichè mancherà solo piazzare sul centro dello spigolo di testa, e sul centro di quella del lato del Trompillon; ed esse sono facilissime da tracciare, perchè basta immaginare un giunto al centro del Concio, ad esempio 9 C, e tracciare il pannello come abbiamo fatto per i giunti di letto, per i quali si farà un cerchio convesso invece di un pannello concavo, e con i due spigoli delle facce, questo cerchio per il centro si può regolarlo alla vista

esattamente per la pratica; tuttavia, se si vuole assicurarsi molto meglio della forma di questa concavità, si potrebbe fare un cerchio della sezione verticale, presa ad esempio in f 1 0 1 2, portando su questa linea considerata come verticale ai punti 1 0 e 1 2, le sporgenze dell'arco della doele fatto su C 9 e quella di 4 1 z 1, che dà l'arco $c^f\ 4^f$, fatto sul punto C 1 del 1° e 4° giunto di letto, portandone la lunghezza C 1 z e c^f 4 1, e tirando la perpendicolare 4 1 z 1; si vede alla figura 133, dove il cerchio è la curva $S\ z^t$, il cui piano deve essere messo perpendicolarmente sulla base AC . Qui non aggiungiamo nulla, toccando la curva dello spigolo della Trompillon, e quella dei giunti della doele e della testa inferiore, quando i Conci non sono di un solo pezzo fino alla Trompillon; ciò che abbiamo detto nel modo di tracciarli e di farne buon uso nel primo tipo di questa Trompe, dove la doele è Cilindroide, si applica naturalmente a questa seconda , poichè non si tratta che di portare le distanze di questi giunti dal centro della Trompe sulla linea $c^f\ 1^4$, e queste perpendicolari taglieranno le curve dei giunti di faccia $c^f\ 3^f$, $c^f\ 4^f$, in dei punti , essi determineranno la lunghezza che occorrerà portare avanti alla linea destra dello sviluppo del contorno del Trompillon, su ciascuna di queste divisioni , come è stato fatto alla figura 132.

Non crediamo di dover aggiungere altre spiegazioni relativamente a questo tratto, che è molto simile al precedente nella disposizione delle sue parti, come si può vedere traspondando il punto c^f del profilo, al punto B; perchè la curva $c^f\ x\ 2^f$ rappresenterà la curva D h F della figura 126, la differenza che c'è è che la curva D h F è sola, l'arco retto di tutta la doele rappresenta più giunti di faccia, i quali ne hanno sempre una parte, più o meno grande; ma in questo tratto ogni giunto di faccia alla sua curva particolare che differisce dalla successiva in contorno e in lunghezza, il resto riguarda la sinistra della doele, è comune con il Concio posteriore di St. Antonio.

Nota sull'uso

Le Trompe di cui abbiamo appena parlato sono fra quelle opere che i buoni architetti devono evitare per quanto possibile, perchè essi portano Pennacchi non a piombo che tendono sempre di più alla rovina.Tuttavia ci sono certe circostanze, particolarmente nelle piazze irregolari, dove abbiamo bisogno di impiegarli per pianificare uno studio, come per esempio si vede all'ex hotel de La Feuillade, sulla piazza de Victoires a Parigi. Bisogna anche sottolineare la scelta della doele di questa Trompe, che può essere fatto, come l'abbiamo visto in due modi, o Sferoide o Cilindroide. Ma se la Trompe si presenta sul viale, dove essa era vista di fronte; allora converrebbe fare questa doele di cu-de-lamp, come una conchiglia concava, la cui figura è piacevole alla vista rispetto a quella del Cilindroide visto di faccia e più corretta per ricevere degli ornamenti scultorei e, benchè il contorno di questa doele sia nella figura piana, che fa una piega con il muro, questo difetto o piuttosto quest'imperfezione non può essere notata di fronte, ma solamente vista dai lati; così l'uno e l'altro dei tratti precedenti alla sua applicazione a diverse posizioni della Trompe. Eccone una di un altro tipo, per la quale la doele è in forma di conchiglia nell'angolo.



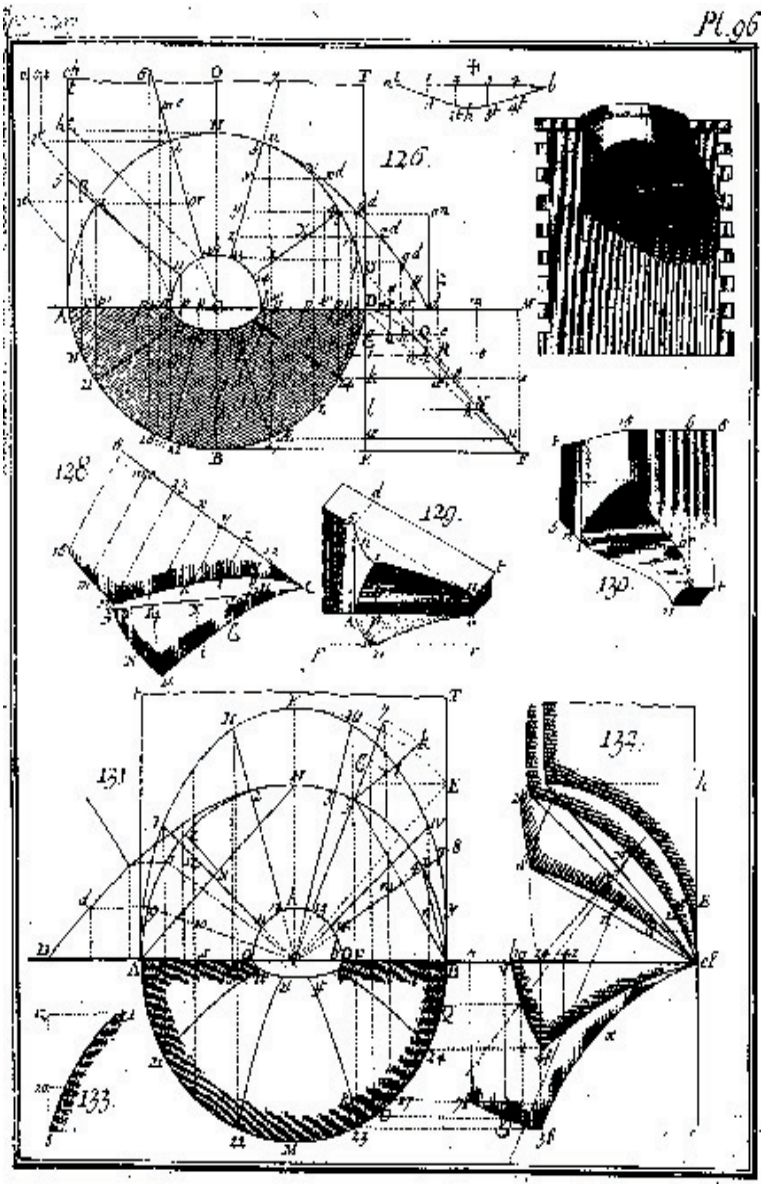
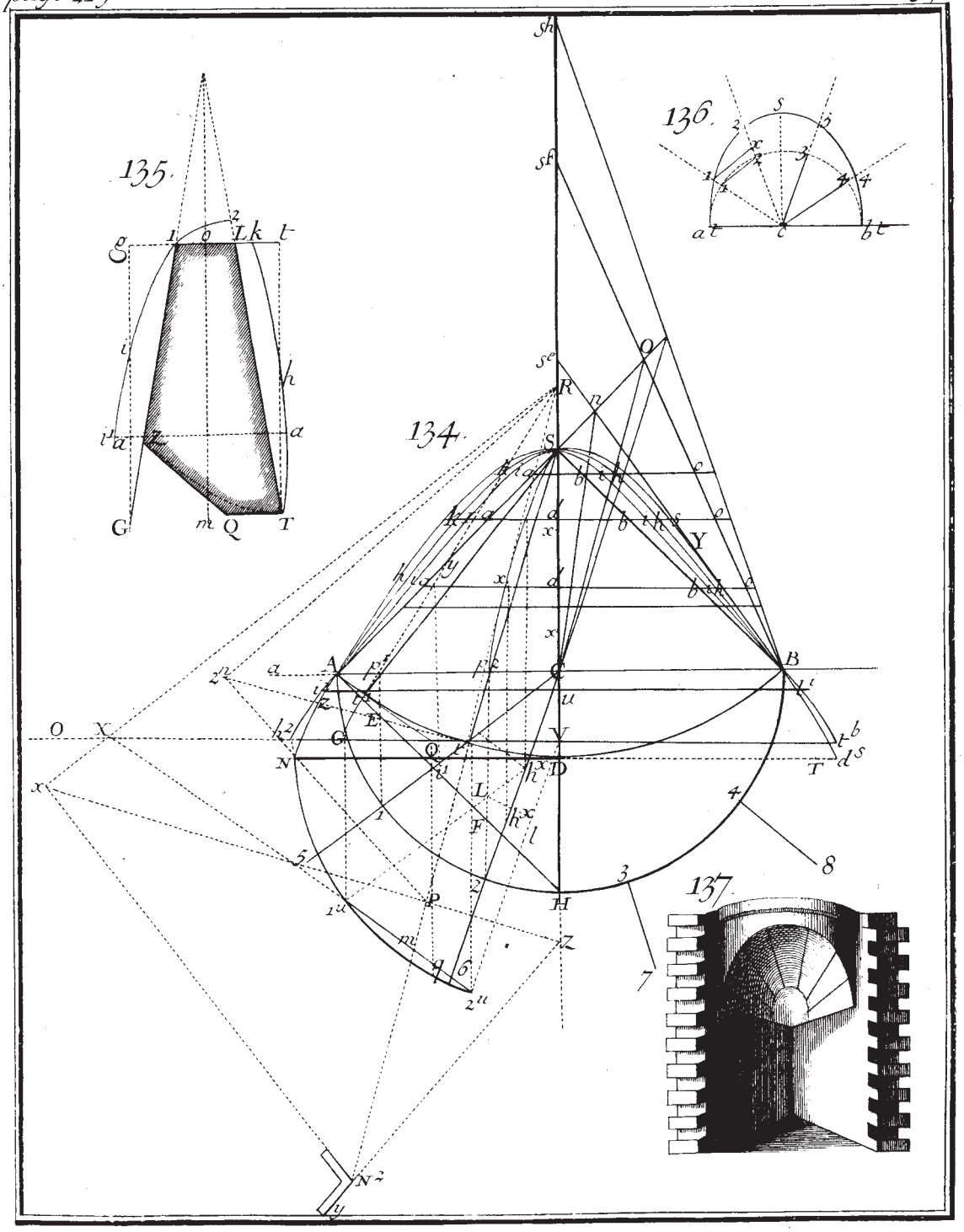


Fig.126 Tav. 96 Fig. I26~l27 Sia la Fig. 126 il segmento del cerchio ABD, minore del semicerchio, la proiezione orizzontale della Torre, di cui il centro della corda C il punto C, su cui avendo elevato la perpendicolare CB, si traccerà dal punto B, ove essa taglia l'arco del cerchio, la linea BF parallela ad AD, su cui avendo preso BE uguale a CD, si traccerà la linea ED, che sarà l'asse di un'iperbole; in seguito portando CD in EF, per l'ampiezza o la più grande ordinata dell'iperbole, si porterà la stessa CD in EO su ED prolungata per avere

page 213.

Pl. 97.



SEZIONE CONICO-SFEROIDALE.

CURVA SOTTO LA CHIAVE E RETTA SULLE IMPOSTE, RACCORDANDO UNA TORRE ROTONDA.

Noi abbiamo parlato nel tomo precedente, pag. 451 di questa specie di sezione, quando è terminata da una superficie piana e noi abbiamo dato il metodo per fare il suo intradosso e dei suoi letti.

Ora noi cercheremo come si deve fare quando invece di una faccia piana verticale, se ne sostituisce una concava o convessa; siccome la concava non sembra di grande uso, noi ci fermeremo alla convessa di una torre verticale, di cui la sezione può sostenere una parte nell'aria; è visibile che non si tratta in questo caso, che di un cambiamento sopravvenuto alle teste dei conci, gli intradossi e i giunti diletto restando gli stessi fino all'arco del sesto primitivo, che noi prendiamo quello della faccia della sezione citata e spiegata, che è qui una sezione della torre con una corda *AB*.

Avendo supposto (***fig. 134***) tutta la parte della sezione *ASB*, compresa fra

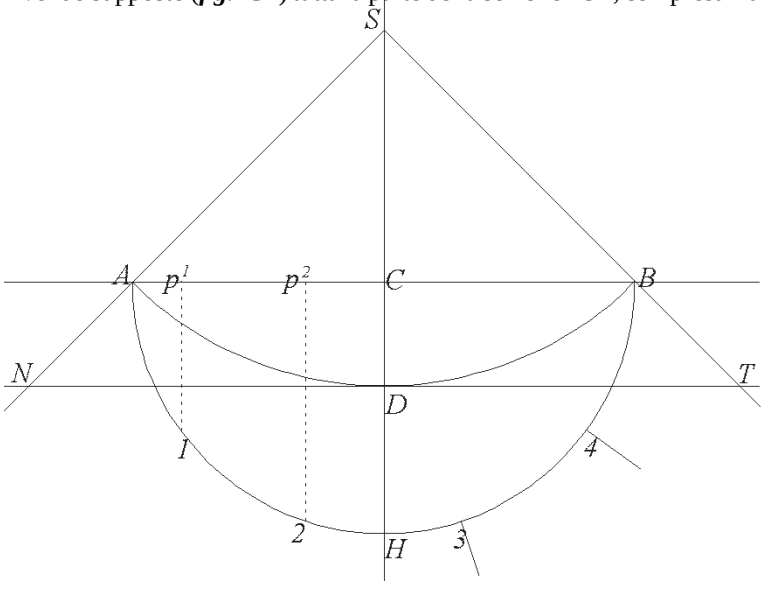


Fig.134 a Proiezione dello sbalzo (*ADB*) della torre e ribaltamento (*AHB*) della sezione di torre tagliata con un piano passante per *A* e *B*

i piedritti *AS*, *SB*, e la corda *AB*, fatta come è stato insegnato nel problema XXIV del tomo precedente; non si tratta quindi che di aggiungere la parte della torre, di cui il segmento *ADBA*, è la proiezione orizzontale.

Sia (***fig. 134a***) l'angolo rettilineo rientrante *ASB*, su cui si deve far portare nello spazio una porzione di torre rotonda *ADB*.

Sulla corda *AB* del segmento di cerchio *ADB*, che è la proiezione orizzontale di questa parte di torre, si traccerà il semicerchio *AHB* come sesto primitivo, che è una sezione verticale del conoide con un piano perpendicolare al suo asse *SC*.

Avendo diviso questo sesto nei suoi conci 1, 2, 3, 4, e abbassato come di solito le perpendicolari da ciascuno di questi punti sul diametro *AB*, come 2 p^2, 3 p^3, ecc.

Si cercheranno le proiezioni dei giunti diletto (***fig. 134b***), che dovranno passare dal vertice S, e i punti di proiezione p^2 p^3; ma siccome queste proiezioni sono delle curve iperboliche, di cui si suppone la descrizione di quelle dei veri giunti diletto con l'intradosso, occorre cominciare col descrivere, come è stato detto a pag. 451 del tomo precedente; se si opera con la descrizione del cono retto *SAB* nel conoide, ma siccome conviene meglio adoperarsi per la circoscrizione, noi tracceremo una tangente *TN*, dai punti *D*, il più aggettante della torre preso sull'asse *SCD*, e ne prolungheremo i lati *SA* e *SB*, finché essi taglino questa tangente in *T* e *N*. Tuttavia siccome non vi sono che due punti dati sulla circonferenza di ciascuna iperbole, conosciuto uno in *S*, l'altro sulla circonferenza del sesto primitivo *AHB*, che possono sempre essere rappresentati sul profilo con i punti *S* e *A*, poiché il punto *S* è comune e il punto *A* distante da *C*, ugualmente come i punti 2 e 3; noi faremo questi profili in *AS* o in *AB*, dove le iperboli passeranno per questi due punti senza confondersi, a causa della differente curvatura.

Per determinare la differenza di curvatura delle iperboli, che dovranno formare gli spigoli dei giunti diletto, si determineranno i primi assi, come noi abbiamo detto nel tomo precedente, pag. 451 tracciando una corda *AH* che taglierà gli appiombi delle divisioni del sesto primitivo 1 p^1, 2 p^2nei punti *E* e *F*; le lunghezze *E* p^1, *E* p^2 potranno essere prese sui primi assi di queste iperboli, come si e fatto per la fig. 246 del tomo precedente, con un cambiamento di tavola posteriore al discorso, che non la da che per una metà di quest'asse, si prenderà qui l'intero asse, al fine di mostrare la differenza dell'effetto di questa scelta.

Si porterà dunque per la prima iperbole, che deve passare dal punto 1, la lunghezza *E* p^1 sull'asse *CS* ; prolungata in *S* S^e e *F* p^2 in *Sf;* infine *CH* che deve servire per la mezzeria della chiave, in *S* S^h, e per mezzo di questi primi assi, e seguendo le pratiche date a pag. 451 del 2e tomo, e al trattato immediatamente precedente, si descriveranno le tre iperboli *SYB* d^s , per la mezzeria della chiave S^h t^h , per i giunti passanti dal punto 2, ed infine *S i* t^i per quella che deve servire a formare lo spigolo del primo giunto passante dal punto 1 del sesto primitivo.

Dopo aver determinato le vere curve degli spigoli dei giunti diletto, che sono in opera nei piani inclinati, occorre cercarne le proiezioni orizzontali t^2 *x S*, t^1 *y S*, che sono ancora delle iperboli, per il teorema III del primo libro, ma meno curve di quelle che le producono.

Noi abbiamo dato a pag. 451 del tomo precedente, il modo di tracciarli, col metodo delle prime; (***fig. 134c***) se ne può rivedere la pratica. Non si ha che da prendere le loro ordinate *dh*, *dh* per quella grande, che passa dal punto 2 in opera, e *d* i, *d i* per la piccola che passa dal punto 1, e portarle sui raggi *C*i *C*2, del sesto primitivo in *C* h^2 , *C* i^1 , e dai punti h^x, i^y, tracciare delle parallele all'asse *DS*, che taglieranno le ordinate *h d* e *i d*, prolungate nei punti *x*, *y*, da cui si tracceranno le curve t^2 p^2, *x S* e *t' p'* , *y S*, che formeranno le proiezioni richieste (***fig. 134b***).

Queste proiezioni orizzontali dei giunti diletto che si sono trovati, non possono servire alla formazione degli intradossi piatti, come nelle volte coniche, poiché i quatto angoli di ciascun concio, non sono su uno stesso

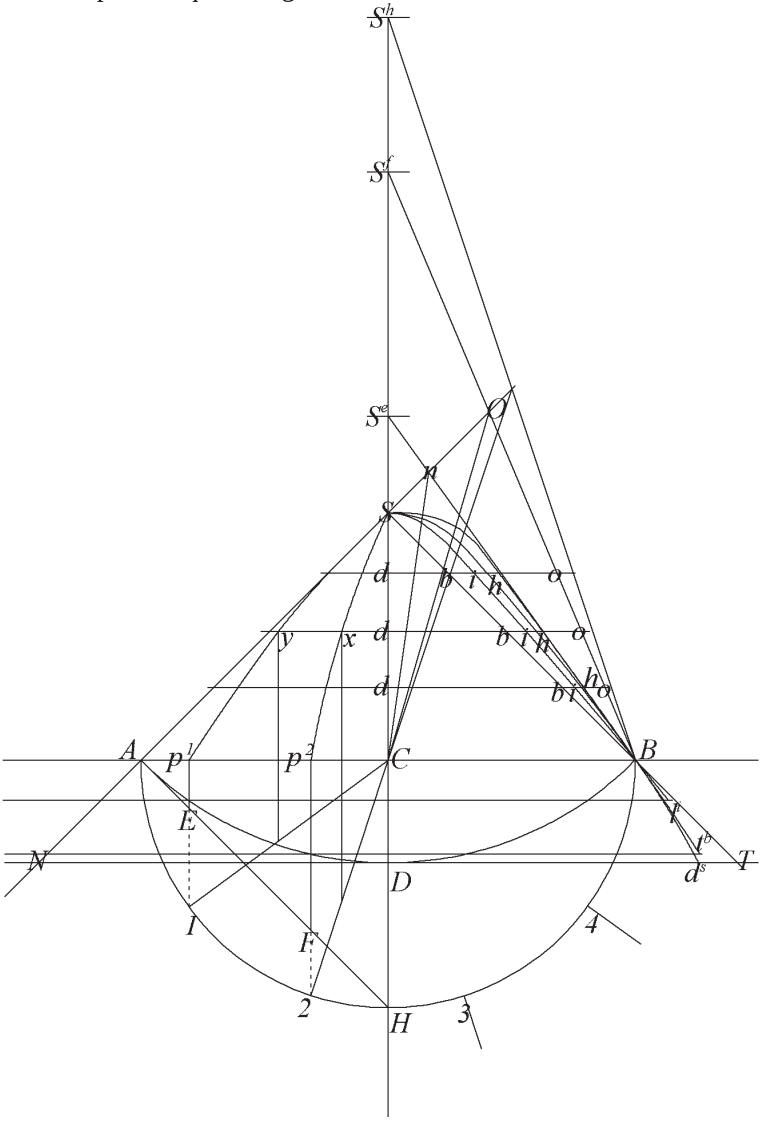


Fig.134 b Costruzione del ribaltamento delle linee di giunzione e loro proiezione orizzontale

piano, e per questo che occorre terminare questi pannelli con gli angoli più bassi del profilo, al fine di avere molta pietra per posizionare i pannelli diletto sui giunti sbozzati.

Per non ingarbugliare molto l'operazione, noi supporremo le iperboli scritte sul lato *SB* poste in *SA*; per esempio *SA i'*, per la prima che finisce nel punto 1' , con la parallela ad *AB*, tracciata dalla proiezione del giunto *t'*, sulla faccia *ADB* della torre rotonda; in seguito, la seconda h^2 *AS*, che termina in t^2, con la parallela h^2 t^2, passante per la proiezione t^2 2^e del giunto, sulla faccia della torre A t^2 *D*.

In questa ipotesi, questa parte del tracciato può servire di profilo, dove le linee h^2 *V*, *i' u*, *k d*, *I d*, possono rappresentare le altezze dei quattro angoli del concio, che non sono sullo stesso piano per i motivi che noi abbiamo dato all'inizio del 2^e tomo; è per questa cosa che si traccerà

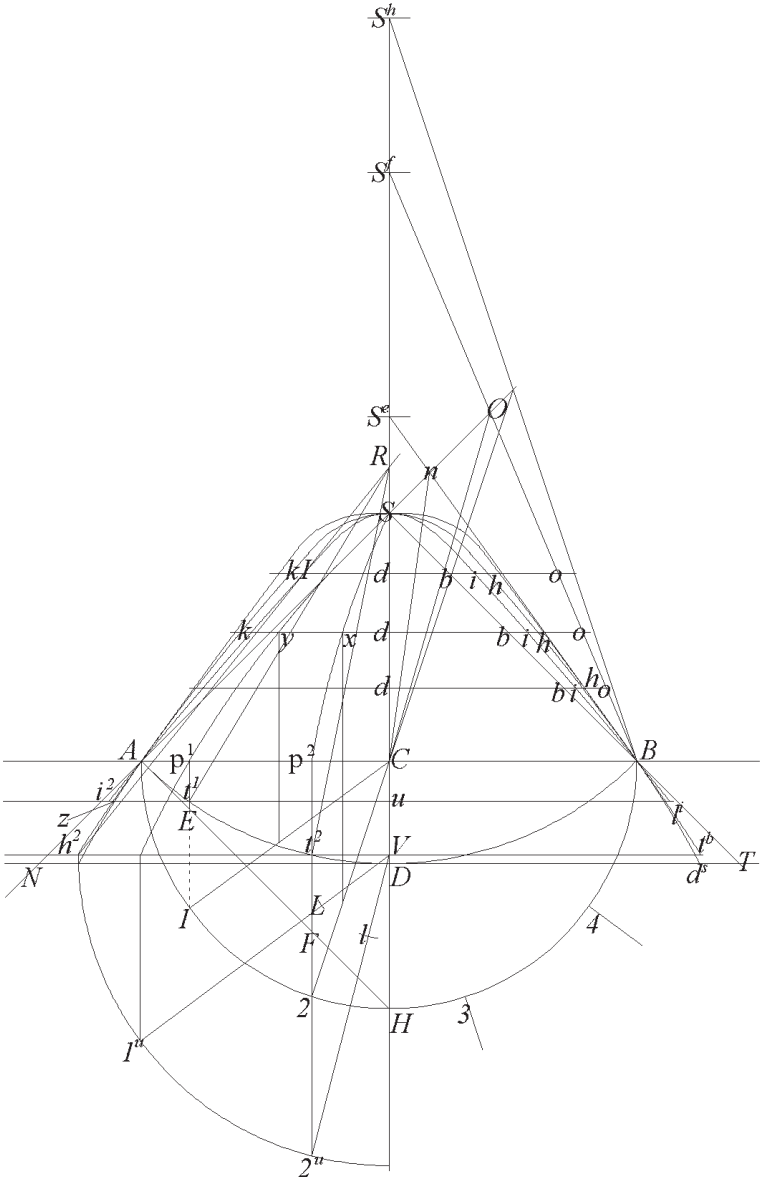


Fig.134 c Costruzione delle piramidi con facce piane dalle quali, sottraendo pietra, si ricaveranno i conci

una linea retta, dai due angoli più bassi della testa di faccia e di quella della sezione, che sono marcati su questo profilo in h^2e in I, che taglierà l' asse prolungato *C S* in *R*, da dove si tracceranno anche dai punti t^1, t^2 della faccia rotonda *ADB* delle linee rette, che daranno la proiezione *RG* t^2 *R*, che è quella di un intradosso piatto, inscritto nel conoide, come un lato della piramide, di cui il vertice sarà in *R*.

Per tracciare questo intradosso piatto nella sua estensione, e formarne un pannello per sbozzare la pietra, si descriverà dal punto *V* come centro, un arco di cerchio h^2, I^u 2^u che sarà una porzione della base del cono retto, parte inscritta, parte circoscritta al conoide, passante dal giunto di faccia t^2, nella cui porzione di base, si determineranno i punti I^u, 2^u, corrispondenti al sesto primitivo 1, 2, dove alzando delle perpendicolari *G* I^u, t^2 2^u, sui punti t^2 e *G*, o tracciando dal punto *V*, dei raggi *V* I^u, *V* 2^u, paralleli a quelli del sesto primitivo *C I*, *C 2*, che taglieranno questo arco nei punti I^u, 2^u.

Non resta altro (***fig. 134c***) per la preparazione necessaria a formare l'intradosso piatto, che determinare la grandezza della testa del lato della sezione, da cui si prenderà la distanza *d I*, dal punto *I*, il più basso della testa sulla sezione rispetto all'asse *SC*, che si porterà in *V l* e *VL* sui raggi *V* I^u, *V* 2^u, e si formerà il pannello d'intradosso piatto, come di seguito.

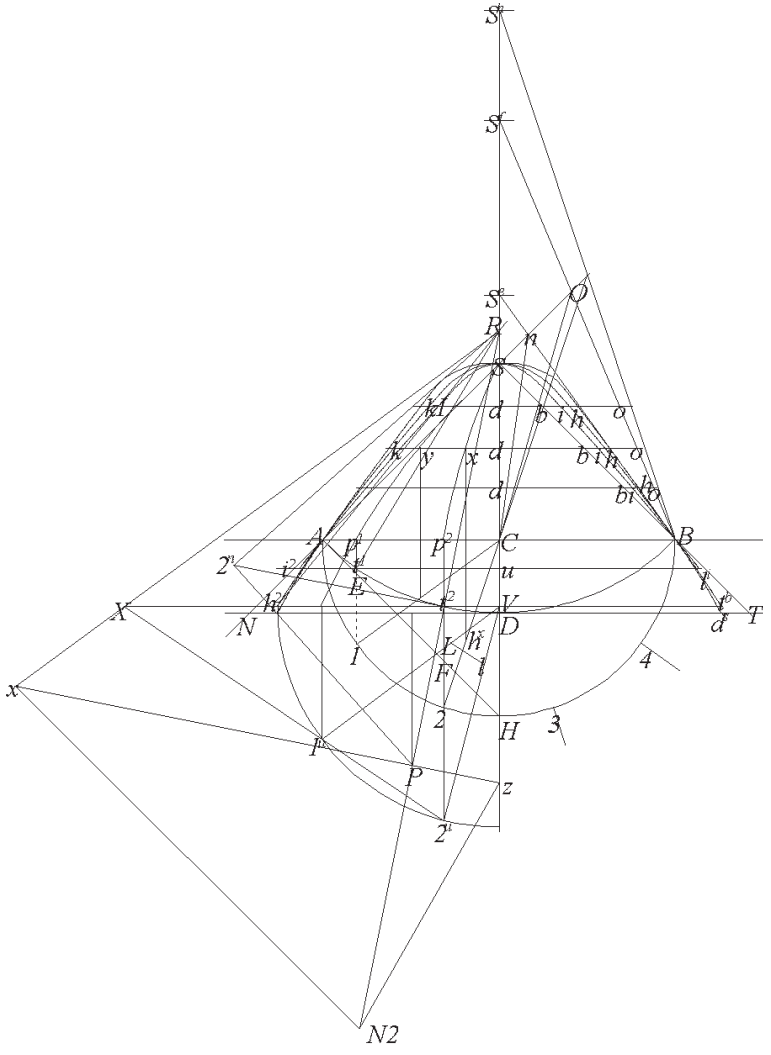


Fig.134 d Applicazioni del taglio sulla pietra

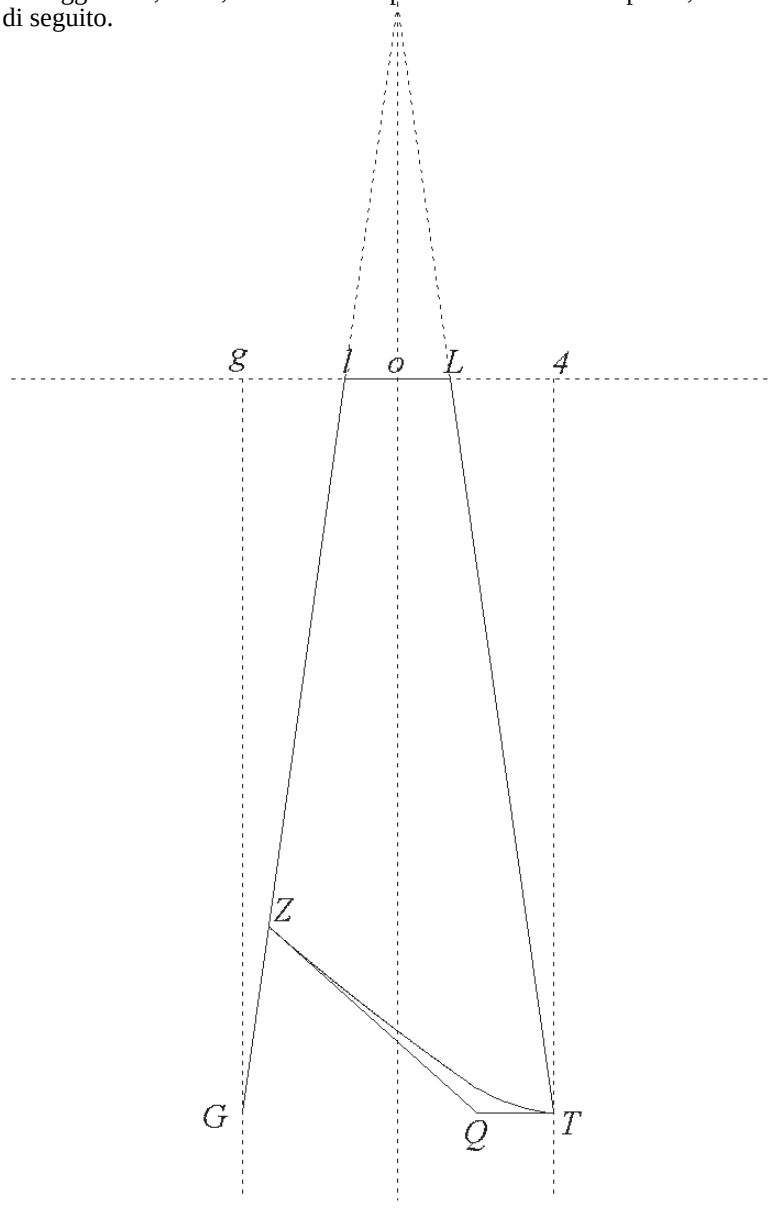


Fig. 135 Concio a piramide retta inscritto nella conoide dal quale si ricaverà , sottraendo pietra, il concio cercato

Avendo fatto un disegno a parte (***fig. 135***) due linee con la squadra *o m*, *g t* si porteranno su *g t* da una parte e dall'altra del punto *o*; le metà della lunghezza *L l* della figura 134 e le metà della lunghezza *I* ^{u}, 2 ^{u}, in *o g* e *o t* dopo si tracceranno dai punti *g* e *t* delle parallele alla linea della mezzeria *o m*.

Poi prendendo dal profilo la lunghezza *I* h^2 (***fig. 134d***), con questo intervallo come raggio, e dai punti *I* e *L* come centro, si descriveranno degli archi che taglieranno queste parallele in *G* e *T*, il trapezio *IGLT*, sarà un intradosso piatto regolare di una piramide retta inscritta nel conoide, come per formare un concio esattamente conico; ma siccome essa eccede la volta conoide, proposta da tutta la parte rappresentata sulla proiezione del triangolo misto *G* t^l t^2, che occorre ritagliare, si ridurrà la parte circolare t^l t^2, che è la proiezione dello spigolo sulla faccia in torre rotonda, nelle parti rette a piani, tracciando t^l *Q* perpendicolare a *GR*, che taglierà la corda *VG* in *Q*, da dove si eleverà *Q q* parallela a *G I* ^{u}, che taglierà la corda *I* ^{u} 2 ^{u} in *q*; si porterà la lunghezza *q* 2 ^{u} in *T Q*, della fig. 135.

In seguito (***fig. 135***) per avere il valore della linea *G* t^l, che occorre ritagliare, si traccerà t^l *z* parallela ad *AB*, che taglierà la linea del profilo h^2 *R* nel punto z, la lunghezza h^2 *z*, sarà trasportata nella figura 135 da *G* in *Z* su *G I*, dai punti *Z* e *Q*, si traccerà *ZQ*, che ritaglierà dal pannello, la parte *ZGQ*, che è rappresentata nella proiezione orizzontale, dal triangolo *G* t^l *Q*; così si riduce l'intradosso piatto a una testa a piani *ZQT*, per arrivare all'arrotondamento, come si è fatto per la sezione retta nella torre rotonda.

APPLICAZIONE DEL TAGLIO SULLA PIETRA

Avendo eretto un paramento che serva per supposizione, ad un intradosso piatto, poiché essendo sbieca la vera grandezza dell'intradosso, l'intradosso piatto non può toccare che tre angoli; vi si applicherà il pannello della fig. 135 per tracciarvene il contorno destinato al secondo concio.
In seguito, si abbatterà la pietra con la squadra *x N* ^{2} *y* di letto e di intradosso, fatto seguendo il nostro metodo come per una sezione retta, su cui noi abbiamo in effetti ridotto la prima, come io ho già detto, tracciando dal giunto t^2, il più avanzato del secondo concio, la linea h^2 *V*.

Per ricordare al lettore il modo di tracciare questa perpendicolare, lo si è tracciato nella fig. 134.

Sulla proiezione *R* t^2, avendo fatto la perpendicolare t^2 2^n, uguale a t^2 2^u, , si è tracciata la linea 2^nP, perpendicolare a 2^n *R*, che taglia la proiezione *R* t^2 prolungata in *P*, dove si è tracciato *x P z*, perpendicolare alla stessa *RP*, che taglia l'asse *SC* prolungato in *Z*, e la sezione dell'intradosso con l'orizzonte *R x* in *x*, la quale sezione è stata trovata sul prolungamento della corda 2 ^{u} *I* ^{u}, fino all'intersezione della linea *V o* in *X*, da dove si è tracciato dal vertice *R*, la linea *RX x*, la lunghezza 2^n *P*, essendo portata in N^2, sulla proiezione *RP* prolungata, se si traccia N^2 *x e* N^2 *z*, l'angolo del supplemento *x* N^2 *y*, sarà quello della squadra cercata per il letto superiore; si troverà alla stessa maniera quello inferiore.

Avendo abbattuto la pietra con la squadra diletto e di intradosso, lungo i lati del pannello dell'intradosso piatto, si eleveranno due pannelli sul profilo, per l'intervallo che deve restare fra lo spigolo retto dell'intradosso piatto, e lo spigolo curvo del vero giunto di letto, i quali pannelli saranno due triangoli misti; conosciuto *I* i^l z per il letto inferiore, di cui si poserà il punto *I*, sul punto *I* della fig. 135 e il punto *z* della fig. 134 sul punto *Z* della fig. 135 in modo che la linea retta *z I*, sia posta in *ZI*, il lato curvo iperbolico *I i* i^l del pannello, darà la traccia del vero giunto diletto sul piano del primo letto.

Nella stessa maniera si applicherà sul letto superiore il pannello triangolare misto, levato sul profilo in *k I* h^2, ponendo il lato retto *I* h^2, della fig. 134 in *l T*, della fig. 135 lungo lo spigolo dell'intradosso piatto; il lato curvo di questo pannello *k h* h^2 darà sul letto superiore il contorno *k h T*, della fig. 135 che è il vero spigolo del giunto diletto sull'intradosso conoidale.

Si eleverà anche per la testa del trompillon, il pannello triangolare misto *I x* 2, (***fig. 136***) che è stata fatta per la testa della sezione, nel modo che è stato detto a pag. 454 e tracciato nella fig. 247 tavola 65 del tomo precedente; e lo si applicherà sulla testa del lato del trompillon, passante dai tre punti dati *I l k*, della fig. 135 rappresentati in elevazione in *I l* 2, ciò che determina già tre curve di contorno dell'intradosso. Se ne troverà un quarto, portando sugli spigoli dei giunti diletto le lunghezze *k A* e *I A*, in *k a* e *I a*, della fig. 135 applicando sui punti *a* e *a*, la curva dell'arco 1, 2 del sesto primitivo posta sull'angolo acuto, con un squadra formato sull'angolo misto *CA h* o *CA i* del profilo, seguendo il quale, facendo una scanalatura, si avranno quattro curve, entro cui si svuoterà l'intradosso conoide, di cui si parla.

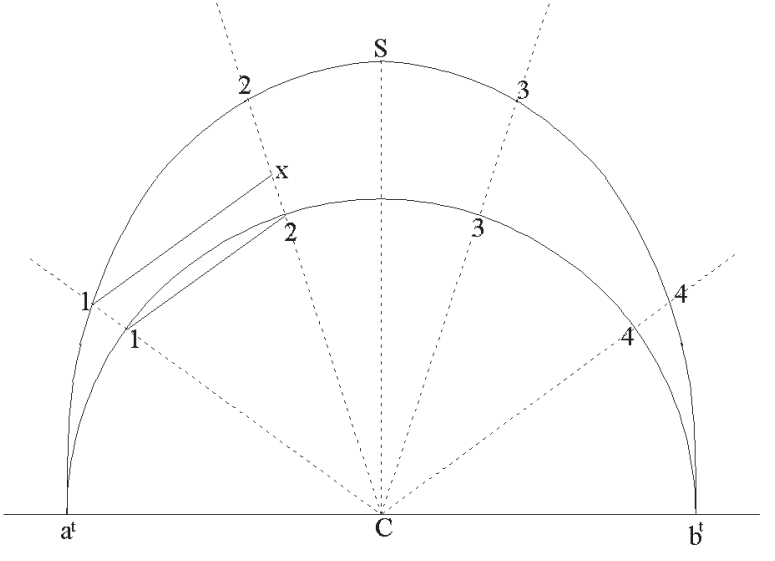


Fig. 136 Sezione piana trasversale

Infine sulla testa della faccia che e stata fatta à piani, come per la sezione nella torre rotonda, pag. I06 si traccerà l'arco di cerchio orizzontale t^1, t^2 per formare questa testa, come è stato detto nel tratto citato.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA

Noi abbiamo detto parlando della stessa sezione a faccia piana nel tomo precedente, che si arrotonderà il fondo della sezione, per diminuire

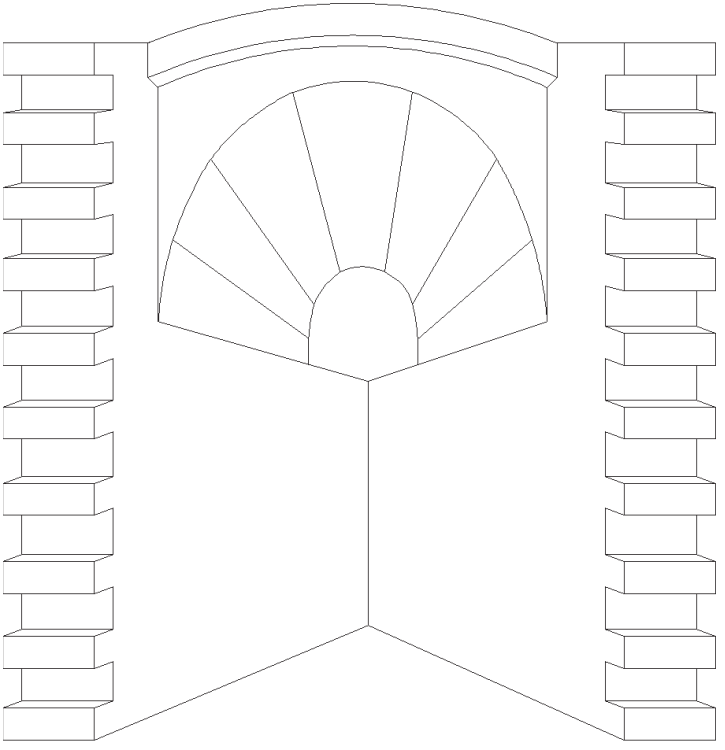
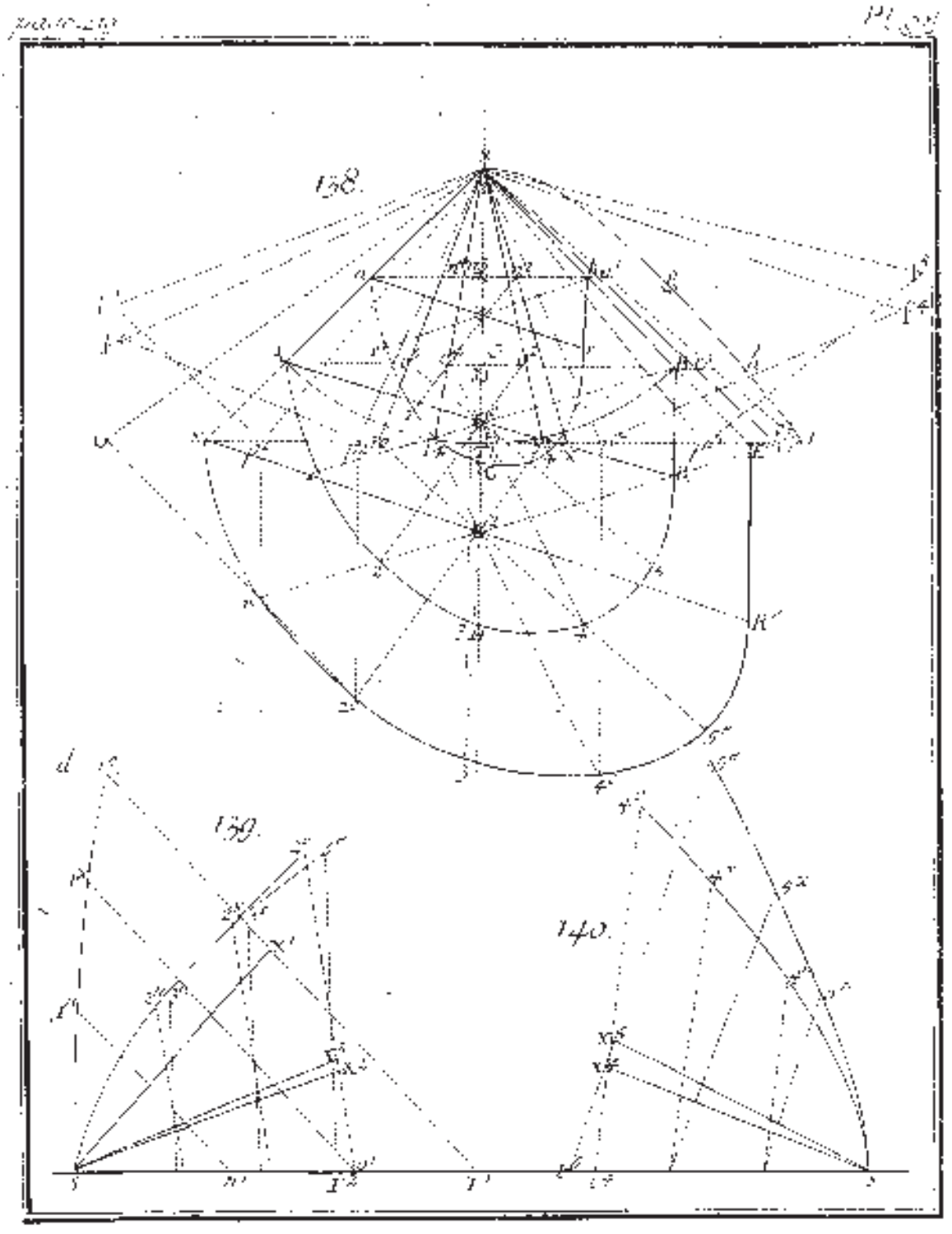


Fig. 137 Costruzione conico-sferoidale, curva alla chiave e retta sulle imposte, raccordante una torre tonda

tanto quanto è possibile l'angolo solido misto formato dai due muri di piedritti della sezione, e la parte della superficie conica delle sezione ordinarie, affinché il fondo della sezione sia più aggraziato e che questo arrotondamento non possa essere perfetto, cioè senza garretti, che sotto la mezzeria della chiave, dove la curva iperbolica è tangente dal suo vertice sulla linea verticale, che è l'intersezione delle superfici piane dei muri dei piedritti, e che infine questo arrotondamento deve diminuire dopo la chiave, fino alle imposte dove si dissolve, poiché le iperboli si raddrizzano insensibilmente su ciascun giunto di letto.

Siccome le curve delle iperboli, sono determinate dall'allungamento dei loro centri dal vertice *S* dell' asse si può diminuirle seguendo quale rapporto si vuole; nella fig. 246 della tavola 65 noi le abbiamo allungate della metà soltanto, delle linee $p^1 E$, $p^2 F$ di questa figura, poiché senza accorgercene nel discorso, noi abbiamo preso il doppio per la metà; qui noi lo abbiamo allungato di tutto questo intervallo per far vedere ciò che risulta da questo cambiamento, che è la curva di arrotondamento della testa della sezione si eleva un po' troppo in *S*, da a^t in *I*, e da b^t in *t* invece di prenderne gli intervalli $E\,p^1$, $F\,p^2$, solamente per i primi assi, l'arrotondamento è più gradevole alla vista, che prendere per la distanza del vertice *S*; al centro di ciascuna iperbole, la qual cosa raddoppia la lunghezza dei loro primi assi.


138.
139.
140.

SECONDA SPECIE DELLA "TROMPE" DESTRA SULLE IMPOSTE.
CURVA SOTTO LA CHIAVE, CONSIDERANDO UNA PORZIONE DI ARCO, FINO A CHE LA "TROMPE" È RAMPANTE.

La differenza di questa "trompe" con la precedente, consiste nel fatto che il suo sesto primitivo verticale, perpendicolare alla direzione orizzontale, non è circolare su un diametro orizzontale ma ellittico su un diametro rampante.
Da qui risulta qualche differenza nella costruzione; originariamente, gli spigoli della giuntura del letto, non facevano degli archi di iperboli regolari, come quelli della "trompe" precedente, ma irregolari, derivanti da una iperbole o da qualche altro tipo di curva, presa per arco principale della curvatura che si vuole dare verso il centro della chiave, in una sezione verticale, passando per la sommità della "trompe".
La stessa irregolarità sarà potuta convenire al tratto precedente se il sesto originario non fosse stato circolare.
La principale difficoltà di questo tratto, consiste nella formazione delle curve delle giunture del letto, noi ci soffermeremo solamente, a quella dei pannelli di intradosso piatto e delle squadre ai tratti precedenti.

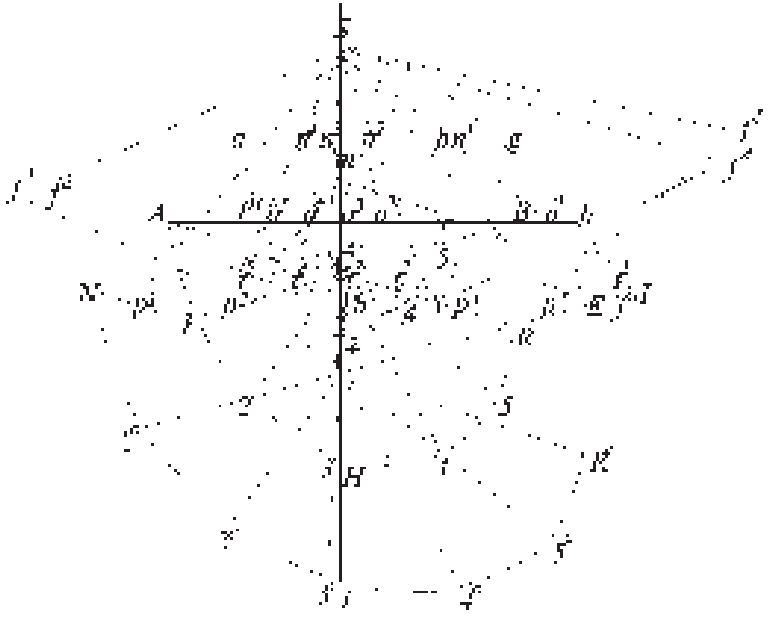


Fig. 138 Formazione delle curve delle giunture del letto dei pannelli d'intradosso piatto

Sia (***fig. 138***) l'angolo rientrante *ASB*, quello dei piedritti sui quali si debba costruire la "trompe" rampante, e l'arco *ATB*, la proiezione orizzontale della parte di volta che la debba sostenere.
Sia anche la linea *BR*, la differenza dell'altezza dei montanti *A* e *B* presa su una perpendicolare alla corda *AB*; la linea *AR*, sarà il diametro del sesto originario di cui il punto mediano *C* sarà il centro, e la linea *CH*, presa arbitrariamente su una linea *DCH* perpendicolare a *AB*, sarà il suo mezzo diametro congiunto; noi abbiamo fatto così, *CH* uguale a *DA*.
Sui diametri congiunti dati, si traccerà per il Probl. VIII, del 2°libro, la semi-ellisse *AHR* per sesto originario, che si dividerà nei suoi peducci di volta *1*, *2*, *3*, *4*, assicurando, finché sarà possibile, che i punti *3* e *4*, che sono le giunture di letto della chiave, siano a livello.
Avendo tracciato il sesto *AHR* occorre determinare a scelta la curva di profilo, verso la chiave che deve essere una parabola o un'iperbole tangente alla linea destra d'intersezione dei piedritti al punto *S*, nella quale non vi sono che due punti dati; saranno, il punto *S* dalla sua sommità, e un punto *h*, determinato da una ordinata *Dh*, che deve essere uguale all'altezza *DH*, composta dal semi diametro verticale *CH* del sesto originario, e dall'altezza *DC* dal suo centro *C*, su l'ordinata *AB*.
Poiché non vi sono che due centri dati, è chiaro che si possono far passare delle curve differenti, più o meno concave come abbiamo visto nel brano precedente, prendendo dei centri di iperbole più vicino o più lontano dalla sommità *S*.
Supponendo che questo arco principale, sia la curva presa a piacere *SgbI*; ce ne serviremo per regolare tutte le curve di giuntura del letto all'intradosso, da cui si cercheranno quanti punti si vorranno; per esempio solamente 3, uno alla piccola volta *ab*, l'altra al centro primitivo *AB*, e il terzo alla tangente *NTE*. Se lo si vorrà cercare con maggior precisione occorrerà tirare altre parallele alla linea *AB*, in così gran numero di quanti punti di ciascuna delle curve si vogliono trovare.
Si tratta preferibilmente di tracciare parecchi sesti differenti, sulle proiezioni dei diametri dati al piano orizzontale, come *ab* e *NE*, sulle quali occorre fare i profili dei diametri rampanti *ar*, NR^e, cosa che è facile; perché se per i punti *a* e *N*, si conducono delle parallele a *AR*, e per i punti *h* e *E*, altre parallele a *BR*, si avranno per mezzo delle loro intersezioni i punti *r* e R^e, e di conseguenza i diametri rampanti *ar* ,NR^e, sul centro dei quali portando le distanze *mg* e *TI* dell'asse *ST*, alla curva di profilo *SghI*, si avranno le semi-altezze *mG*, *Ti*, che determinano le estremità dei diametri *Gc*, C^2i delle nuove Ellissi, che devono essere i sesti trasversali dell'intradosso conoide, tagliato da dei piani verticali, elevati sulle linee *ab* e *NE*, le quali semi-ellissi saranno tracciate come la prima *AHR*, per il Probl.VIII del 2° libro.
Queste stesse simi-ellissi saranno facilmente divise nelle giunture di letto, corrispondenti alle divisioni del sesto primitivo, conducendo per i loro centri *c* e C^2, delle parallele ai semi-diametri C^1,C^2,C^3,C^4 del sesto originario, come mostra la figura.
Questi semi-diametri, saranno prolungati se occorre fino alle linee orizzontali delle loro basi *ab*, *AB*, *NE*, che le taglieranno nei punti o^1, o^2, o^3, o^4, alla base del sesto primitivo, e t^1, t^2, t^3, t^4,a quella della tangente *NE*, e alla Volta *ab*, ai punti n^1, n^2, n^3, n^4, le linee t^1S, t^2S, t^3S, t^4S, saranno le sezioni dei piani dei letti con l'ordinata, i quali potranno essere presi per le basi dei profili, che serviranno a descriverle, dico per le basi, e non per gli assi di queste curve; perché le loro ordinate non devono essere ad angolo retto, come ha affermato M. de la Hire nelle Lezioni; poiché io rispetto la memoria di questo grande matematico, che mi è cara, per l'attaccamento che io avevo per lui e per la moglie e i figli. Io credo di dover sottolineare questa disattenzione che potrà rendermi forse scusabile, se mi è capitato di sbagliarmi in qualche cosa giacché i grandi uomini non sono infallibili, ecco per l'esattezza, la maniera di fare questi profili, cercando gli angoli delle ordinate, con le ascisse delle curve.
Da ciascun punto di divisione del sesto esterno tangente NiR^e, si

abbasseranno delle perpendicolari sulla base orizzontale *NE*, che la taglieranno nei punti p^1, p^2, p^3, p^4, p^5, dalle quali si condurranno delle linee dal punto *S*, che serviranno da base per trovare dai profili, i valori delle corde immaginate, tracciate dai punti 1^e, 2^e, 3^e, e *c* dalla volta alla sommità *S*, dalla metà delle altezze $p^1 1^e$, $p^2 2^e$, $p^3 3^e$, *c* come si usa fare per trovare il valore delle proiezioni dei giunti di letto nella "trompe" conica; per esempio, su Sp^1, avendo elevato in p^1, la perpendicolare $p^1 f^1$, uguale a $p^1 1^e$,l'ipotenusa $f^1 S$, sarà il valore della corda che si cerca.
Avendo trovato questi valori ci sarà per ogni giuntura del letto un triangolo con tre linee date; saranno 1°. La sezione del piano di giuntura prolungata con l'ordinata. 2°. La corda della curva dello spigolo della giuntura. 3°. La lunghezza del giunto nel vuoto, dopo il giunto di testa fini all'ordinata.

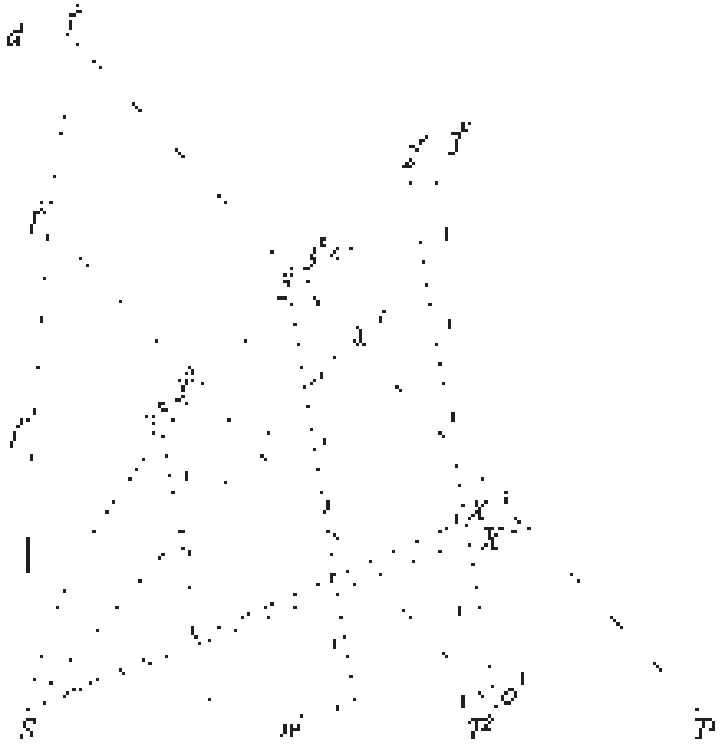


Fig. 139 Formazione del piano inclinato della prima giuntura di letto nel vuoto dell'intradosso, e il suo contorno curvo

Per esempio, per formare il piano inclinato della prima giuntura di letto nel vuoto dell'intradosso e il suo contorno curvo, che deve dare la curvatura o il fondo del letto, si traccerà a parte (***fig. 139***) la linea St^1 della sezione, con l'ordinata in ST^1 con le divisioni $o^1 n^1$, dopo con la lunghezza Sf^1 per raggio, e dal punto *S* per centro, si traccerà un arco di $d1^e$, e dal punto T^1 per centro, e dall'intervallo $1^e t_t$, della ***fig. 138*** per raggio, si descriverà un secondo arco che taglierà il primo nel punto 1^e, per tracciare la linea $T^1 1^e$, alla quale si condurranno per i punti $o^1 n^1$, le parallele $o^1 1^x$, $n^1 1^n$ infinite; per determinare le lunghezze, si prenderà alla ***fig. 138*** la linea $1o^1$, che si porterà in $o^1 1^x$, e la linea $1^n n^1$, che si porterà in $n^1 1^n$ della ***fig. 139***, dai punti $S1^n$, $1^x 1^e$, si traccerà a mano o con un regolo flessibile, una curva che sarà quella dello spigolo della giuntura del letto all'intradosso, sulla quale si formerà l'incavo del pannello del primo letto.
Alla stessa maniera, si troverà la curva $S2^x$, 2^x, 2^e della seconda giuntura del letto, prendendo per base del triangolo, che da l'inclinazione delle ordinate, la linea St^2 con le divisioni alla ***fig. 138*** che si porterà in ST^2, della ***fig. 139*** poi con le linee $f^2 S$, e $2^e t^2$, si disegnerà un triangolo $St^2 2^e$, che darà l'angolo $St^2 2^e$ della ordinata con le ascisse, le quali ordinate saranno prese alla ***fig. 138*** alle linee $2o^2$ del sesto primitivo, e $2^n n^2$ della volta.

Si vedrà alla ***fig. 140*** il resto dei profili delle curve delle giunture del



Fig. 140 Profili delle curve delle giunture del letto, dove sono state marcate le stesse lettere della ***fig.138***

letto di questa "trompe" dove sono state marcate le stesse lettere della ***fig.138*** da dove sono state prese.
Rinviamo la costruzione dei pannelli d'intradosso piatta al tratto precedente, e la formazione della testa rotonda, al tratto della "trompe" a torre rotonda, pag. 106 per formare le curve delle giunture di testa senza pannelli di letto, o se si vogliono formare dei pannelli ci si servirà del metodo che è stato dato per tutte le volte in torre rotonda, come porte discese, "trompe", ecc. che consiste nell'allungare l'arco di cerchio della

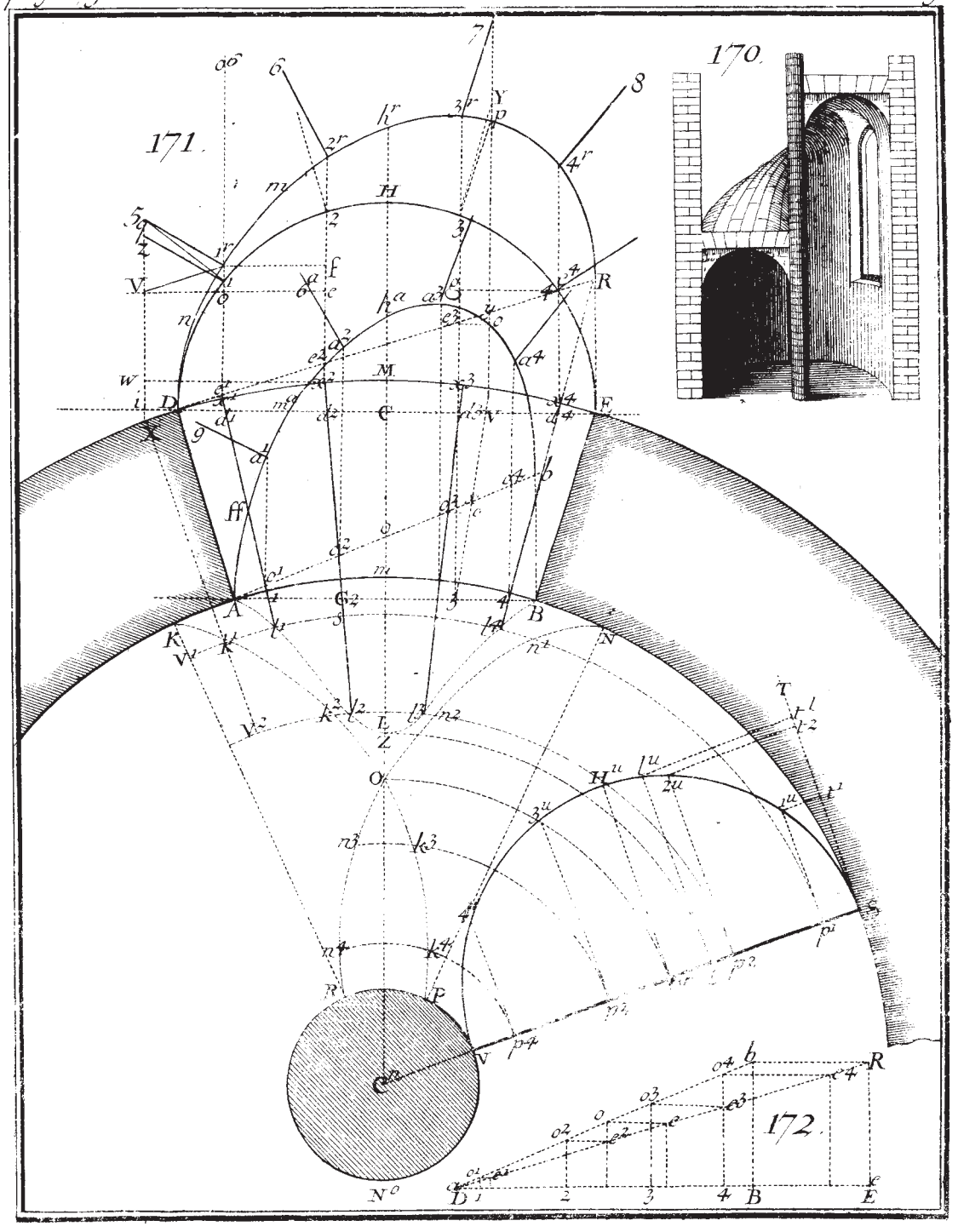
proiezione orizzontale in arco ellittico, perché tutti i letti essendo delle superfici piane, le loro sezioni dalla superficie delle torri, sono degli archi ellittici.

ESPLICAZIONE DIMOSTRATIVA

Se lo si rileva con la riflessione, le figure miste *NiR^{e}E, AHRB, abrb,* che sono situati sul piano orizzontale, in posizione verticale sulle loro basi *NE, AB, ab,* e il triangolo misto *Sg, IT* sul suo asse *ST,* ugualmente in posizione verticale, si potranno facilmente rappresentare tutte le ragioni della costruzione di questo tratto.
E in fine, se si esaminano in questa situazione le inclinazioni delle linee *1t^1, 2t^2, 3t^3,* ecc. e si immaginano dei piani passanti per queste linee e per il punto *S,* si riconosceranno facilmente tutti i profili che si vengono a trovare alle ***fig. 139-140***.
Occorre sottolineare che tutti questi piani di letto che si incrociano hanno le loro intersezioni comuni all'asse della "trompe", che è rappresentata in posizione orizzontale, con la linea *ST,* e di profilo con la linea inclinata all'orizzonte *SX,* considerando *TX=TC^e*; ma benché le loro intersezioni siano su una sola linea, essa si trova indifferentemente posizionata in tutti i piani delle giunture di letto prolungate nel vuoto, come li si vede di profilo, alle ***fig. 139-140*** in *SX^1, SX^2, SX^3, SX^4,e SX^5*,il che deriva dalla differenza delle loro inclinazioni.
Ciò è visibile nella 16° Prop., del II Libro d'Euclide, che tracciando in ciascuna delle volte trasversali delle linee *NR^{e}E, arb*, parallele ai semi-diametri delle intersezioni dei peducci di volta del sesto originario; i letti saranno delle superfici piane che passeranno per le intersezioni *1^e, 1^x, 1^n; 2^e, 2^x, 2^n,* se noi avessimo fatto loro una divisione uguale le superfici dei letti sarebbero divenute graziate, cosa che occorre evitare per le ragioni che abbiamo esposto nel 3° Libro.

page 273.

Pl. 103.



INCONTRO DELLE VOLTE ELICOIDALI CON I CONOIDI.

IN TERMINOLOGIA ARTISTICA, LUNETTA STROMBATA DENTRO UNA VITE ST. GILES ROTONDA, O VOLTA A CROCIERA TORNANTE E RAMPANTE.

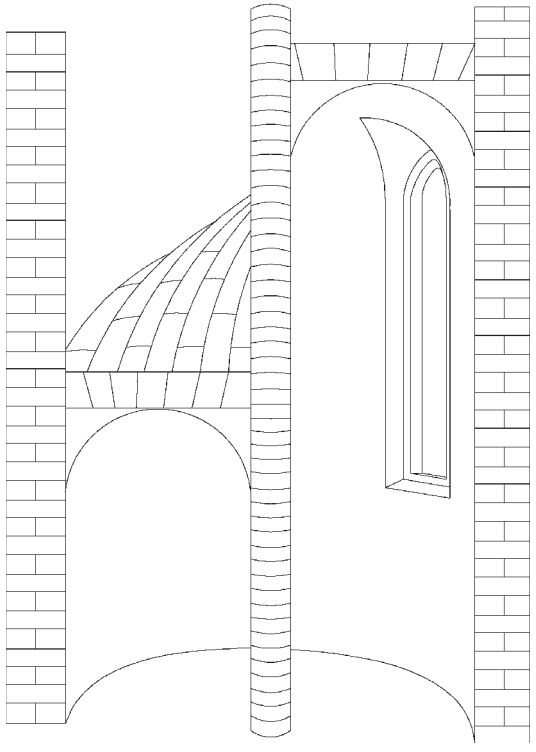


Fig. 170 Lunetta strombata dentro una vite St.Giles rotonda, o volta a crociera tornante e rampante

Siccome la volta a crociera tornante e rampante è composta da lunette disuguali girate in senso contrario, l'una più stretta dal lato del nucleo, l'altra più larga dal lato della torre o muro di gabbia;
per soddisfare a l'enunciato dei due tagli, basterà dare quello di una lunetta strombata che servirà per l'una e per l'altra.
Dato (***Fig.171***) il cerchio *RPN*°, la proiezione del nucleo della vite, e l'arco *KNS*, quella della torre o piedritto della vite; dato il semi-cerchio o semi-ellisse VH^uS, la sezione di un piano verticale passante per il centro C^n del nucleo, la quale corrisponde al sesto primitivo della vite.
Date infine le 2 linee *DA*, *EB* nello spessore del muro di gabbia, dirette al centro C^n, che formano i piedritti dell'apertura *DEBA*, sulla quale dobbiamo sistemare la lunetta predetta, il cui intradosso è una superficie conica, che con la penetrazione in quella della vite, forma, nella loro intersezione comune, uno spigolo a doppia curvatura, cui bisogna trovare la proiezione orizzontale.

Per riuscirci, bisogna prima di tutto considerare queste due volte rampanti, come se le loro imposte fossero dello stesso livello in quanto la rampa non aggiunge nulla alla sporgenza della lunetta dentro la vite.
In secondo luogo, bisogna stabilire la posizione del sesto primitivo della lunetta che si può prendere in *DE* oppure in *AB* .
Sulla corda *DE*, per esempio, essendo stato tracciato il semi-cerchio o la semi-ellisse *DHE* per sesto primitivo, verrà diviso nei suoi diversi conci nei punti *1,2,3,4*, da dove si abbasseranno delle perpendicolari che lo sezioneranno nei punti d^1, d^2, d^3, d^4, fino a raggiungere il centro C^n del nucleo con delle linee indefinite x^1l^1, x^2l^2, ecc. che termineranno sull'arco *DME* della Torre nei punti x^1, x^2, che però sono indefinite dal lato del nucleo.Per trovare le loro terminazioni da questo lato, si traccia, partendo dal punto *S*, estremità del diametro del sesto della vite *VS*, una perpendicolare *ST*, tangente all'arco H^uS, su cui si riportano le altezze delle linee d'imposte del sesto primitivo della lunetta $1d^1$, $2d^2$, in $S\,t^1$, $S\,t^2$, e quella della chiave *CH* in $S\,t^l$; poi dai punti t^1, t^2, t^l, si tracciano delle parallele al diametro *VS*, che tagliano l'arco H^uS nei punti 1^v, 2^v l^v da dove si abbassano delle perpendicolari sullo stesso diametro *VS*, che lo tagliano nei punti p^1, p^2, *l*.Da questi punti, si tracciano degli archi di cerchi concentrici al nucleo (supponendo di avere una gabbia circolare) come $V^1\,p^1$, $V^2\,p^2$, che sezionano le proiezioni dei giunti dei letti di posa corrispondenti nella lunetta ai punti l^1, l^2, *L*, l^3, l^4, dai quali si disegna manualmente la curva ondulata *ALB*, che serve da proiezione allo spigolo della lunetta nella vite che stiamo cercando.

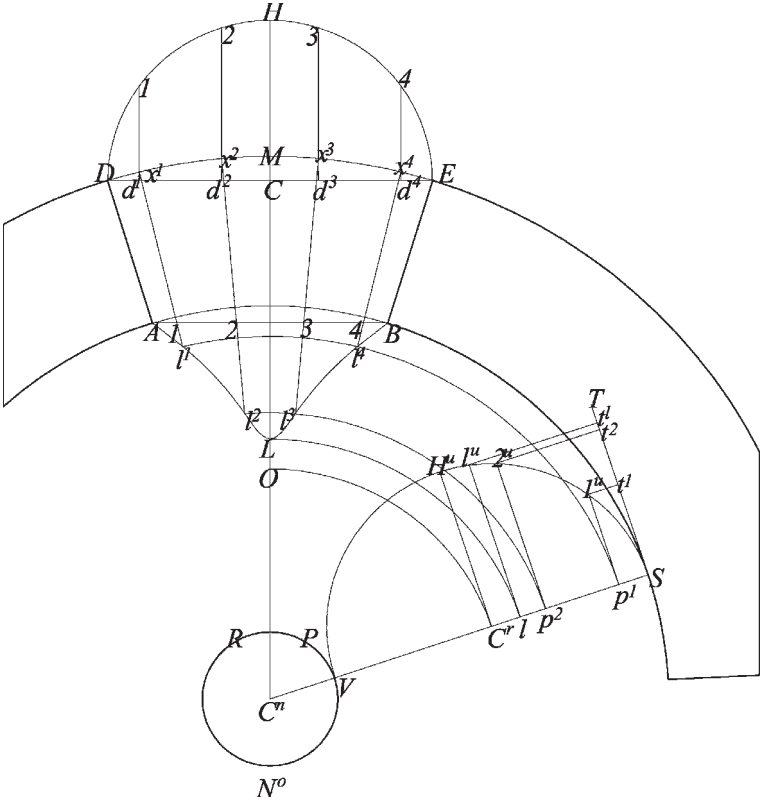
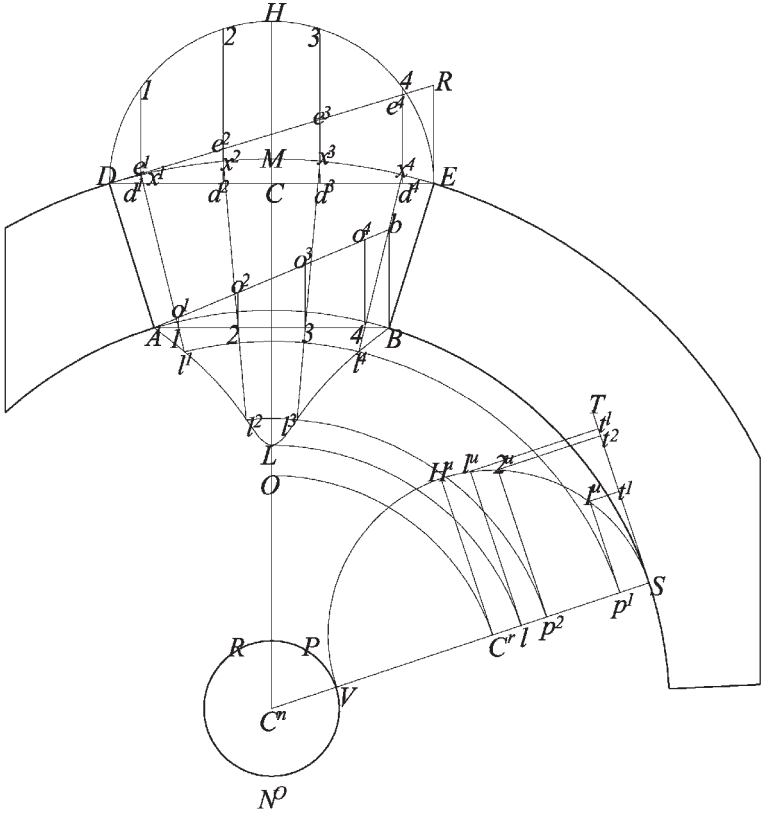


Fig. 171 Il sesto primitivo DHE viene diviso nei suoi diversi conci, le terminazioni delle proiezioni sulla corda DE dirette verso il centro C^n vengono individuate dagli archi di cerchi concentrici al nucleo, che sezionano le proiezioni nei punti l^1, l^2, *L*, l^3, l^4

Bisogna subito formare i sesti rampanti della volta della lunetta di cui si presume il punto medio della chiave di livello così come di tutti i giunti dei letti di posa, questo spiega perchè essendo le loro altezze costanti e i loro diametri *DE* e *AB* disuguali, questi sesti sono disuguali tra loro come nel passaggio strombato, già trattato nel tomo precedente pag. 437.La differenza della loro costruzione consiste nel fatto che nel passaggio strombato le imposte sono dello stesso livello, e qui invece l'una è più alta dell'altra.Per trovare la differenza di altezza, bisogna sapere di quanto sale la vite dal punto *A* al punto *B* e portare quest'altezza perpendicolarmente su *AB* da *B* a *b*, e su *DE* da *E* a *R* per tracciare le linee spioventi *Ab*, *DR*, e dai punti *1, 2, 3, 4* della linea *AB* da dove passano le proiezioni dei giunti dei letti di posa; le si alzano delle perpendicolari indefinite, che sezionano la linea spiovente *Ab* nei punti [1] o^1, o^2, o^3, o^4 ; così come dai punti d^1, d^2, ecc. si alzano su *DE* delle perpendicolari indefinite, che tagliano la linea spiovente *DR* nei punti e^1, e^2, e^3, e^4.

Fig. 171 Per trovare la differenza di altezza tra i sesti rampanti della lunetta, si procede

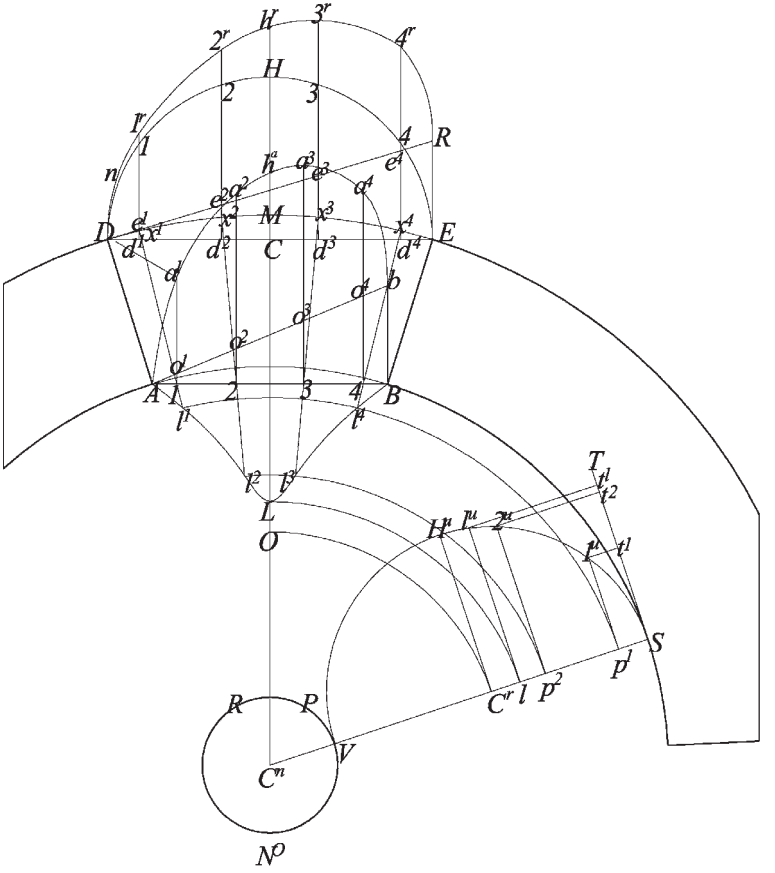


tracciando le linee spioventi Ab, DR.

[1] Nel testo questi punti sono riportati come a^1 a^2 a^3 a^4 , ma sul disegno corrispondono ai punti o^1, o^2, o^3, o^4

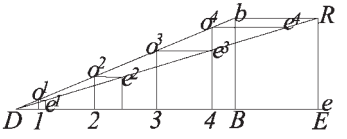
Tutti questi punti di uno dei diametri e di quell'altro sono gli stessi delle ascisse delle ellissi rampanti, sulle quali basta riportare le altezze delle linee d'imposta del sesto primitivo *DHE*, alle verticali corrispondenti; così l'altezza *1* d^1 verrà riportata in quattro punti diversi, più precisamente in e^1 1^r, e^4 4^r per il sesto su *DR*, e in o^1 a^1 e o^4 a^4 per il sesto su *A b*, così come l'altezza *2* d^2 in e^2 2^r, e^3 3^r e o^2 a^2 e o^3 a^3, e si ottengono tutti i punti del contorno del sesto *D* 1^r 2^r 3^r 4^r *R*, e *A* a^1 a^2 a^3 a^4 *b* che va trovato.
Si poteva descrivere queste due ellissi anche con il problema 8 del 2$^{\underline{do}}$ libro, in quanto abbiamo un diametro rampante, un semi diametro verticale e l'angolo che forma con la linea spiovente data; si possono così trovare tanti punti quanti se ne vuole, oppure tracciarla con un movimento continuo, come detto nel problema citato. I due sesti appena tracciati non sono altro che le sagome verticali per formare l'intradosso della lunetta, le quali servono soltanto per il luogo specifico per il quale sono state fatte, in modo tale che se venissero piazzate leggermente più in dentro o in fuori, oppure se formassero un angolo più o meno aperto con gli spigoli orizzontali dei letti di posa all'intradosso formerebbero un falso contorno in quanto l'intradosso è sghembo, e della stessa natura del conoide; pertanto nel caso in cui le pietre non sono abbastanza lunghe per occupare lo spessore del muro, bisogna tracciare nello stesso modo altri archi rampanti tra *DE* e *AB*, nei punti in cui dovremo fare dei giunti di intradosso per avere le curve delle teste di ogni concio.

Fig.171 Riportate le altezze delle linee d'imposta del sesto primitivo *DHE*, si tracciano



i due sesti cercati , che altro non sono che le sagome verticali necessarie per formare l'intradosso della lunetta

Al momento non ci rimane altro che cercare i *biveaux* delle sezioni dei letti di posa, che devono essere presi negli stessi punti degli archi rampanti delle sagome, per la stessa ragione che gli intradossi sono sghembi.
Dopo aver tracciato i giunti di testa normalmente dal centro *C* dell'arco *DHE*, che rappresenta un sesto primitivo di posizione, si nota che le sezioni degli archi rampanti che corrispondono ai suoi punti di divisione in conci, devono essere alcune più inclinate all'orizzontale , le altre meno di quelle del sesto primitivo, e queste diverse inclinazioni si troveranno più o meno come si sono trovati i punti degli archi rampanti.
Dato per esempio, il giunto di testa *1 q* tirato dal centro *C* per il punto 1 del sesto primitivo, si abbassa, sul prolungamento della linea orizzontale *ED*, una perpendicolare *q X*, che taglierà il prolungamento della linea di rampa *RDX* nel punto *X*, e l'orizzontale *ED* nel punto *i*; si prende dunque l'altezza *i q* e la si porta in *X z* sulla *X q*, si trova così il punto *z* che insieme al punto *1*, forma la linea *z 1*, che sarà la correzione dell'inclinazione del giunto di testa ed è parallela all' arco rampante $1^r\,5$. Si nota che questa testa ha un'inclinazione maggiore di quella del sesto primitivo.
Però se si cerca la sezione del giunto di testa $3^r\,7$, si vede al contrario che deve essere più inclinata rispetto a quella del sesto primitivo, il cui giunto è la linea *3 p*; infatti seguendo lo stesso metodo, e prendendo su questo giunto un punto p qualsiasi e tracciando da quel punto una perpendicolare su *DE*, che taglierà nel punto *V*, e la linea di rampa *DR* nel punto *y* ; se si prende l'altezza *V p* e si la porta sulla stessa linea prolungata in *y 7*, si trova così il punto *7* che insieme al punto 3^r formerà il giunto di testa $7\,3^r$, che risulterà più inclinato di quello *3 p* del sesto primitivo.
Per dimostrarlo, bisogna tracciare, tramite il punto e^3 dove l'appiombo [2] $3d^3$ taglia la linea di rampa, una linea parallela a *DE* che sezionerà l'appiombo *p V* nel punto *o*, la quale ci da l'eccesso di altezza della rampa *y o* che viene riportato in *p Y*, e la linea *Y 3* sarà il giunto corretto parallelo a $7\,3^r$ come è visibile nella costruzione; dunque il giunto di testa $7\,3^r$ dell'arco rampante è più inclinato all'orizzontale che il giunto di testa *3 p* del sesto primitivo, che differisce dal giunto $1^r\,5$, a sua volta meno inclinato del giunto *1 q*.
Si troverà ugualmente il giunto di testa dell'arco rampante interno $A\,h^a\,b$, dove solo per fare dei letti di posa su una superficie piana, si porterà tramite i punti di divisione a^1, a^2, a^3, ecc. delle parallele ai giunti già individuati per i punti di divisione del grande sesto 1^r, 2^r, 3^r, ecc.
Per mezzo della posizione dei giunti di testa, avremmo due *biveaux* di cui si farà un uso diverso, l'uno è il *biveau* rettilineo dell'angolo, che ogni giunto di testa forma con una linea d'appiombo, come $5\,1^r\,e^1$, $7\,3^r\,e^3$, che serve per trovare facilmente la posizione del letto di posa, uguale sia nella grande che nella piccola sagoma o profilo, perchè non si deve fare altro che portare sulle sagome il giunto di posa sopra l'imposta inferiore, questo *biveau* è l'angolo misto $5\,1^r\,n\,D$, che risulta più aperto del suo corrispondente nella sagoma o profilo interna [3] $9\,a^1\,ff\,A$: così per gli altri angoli sui quali si devono formare i "biveaux" misti.
Per tracciare una sagoma curva a doppia curvatura, oppure una faccia malleabile proprio per formare la testa convessa dei conci che possono sporgere fuori dalla torre rotonda in *DME*, bisogna rettificare l'arco *DME*, come risulta nella ***Fig. 172***, su una base orizzontale *D e*, leggermente più grande che *DE* nel rapporto della corda con l'arco, si portano tutti i punti di divisione che danno su quest'arco le proiezioni dei giunti dei letti di posa nei punti x^1 , x^2 , x^3 , x^4.



Dopo avere alzato delle perpendicolari su ognuno di questi punti di divisione, uguali a quelli della curva piana $D\,h^r R$, partendo dalle loro estremità si traccia un arco rampante un pò diverso, che sarà poi la realizzazione di quello che deve formarsi sulla superficie convessa della torre, tramite le teste dei conci della lunetta, su cui formeremo delle sagome flessibili, che verranno utilizzati a mò di porta nella torre rotonda.

COROLLARIO
DELLA VOLTA A CROCIERA TORNANTE E RAMPANTE

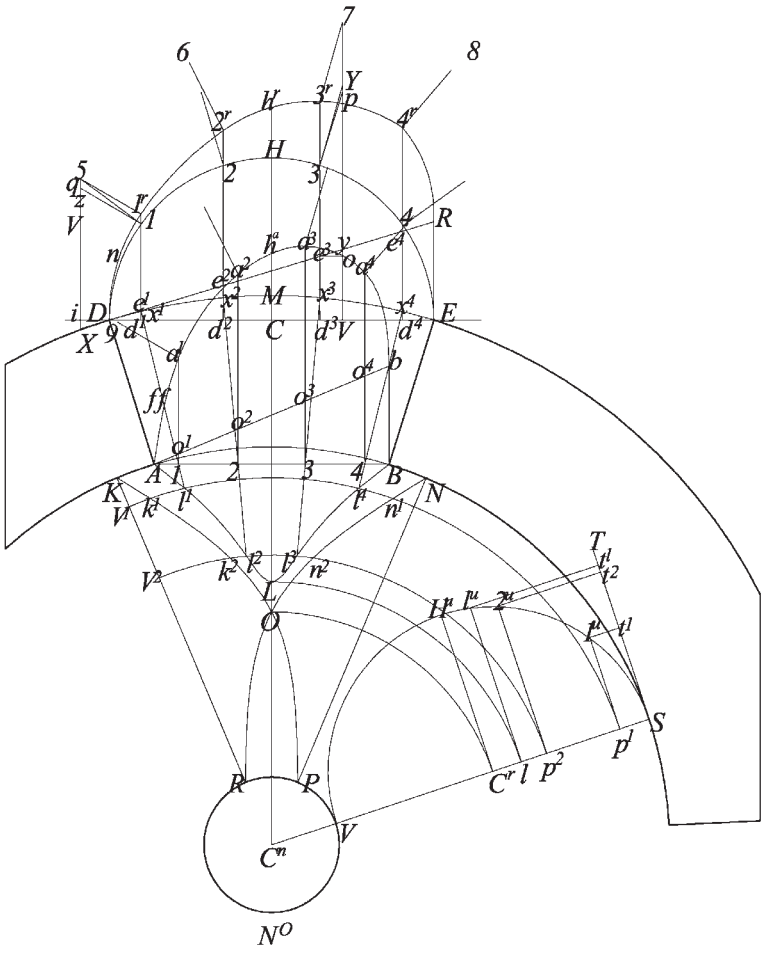
Risulta evidente che se l'altezza della chiave di una lunetta aperta nella volta della vite St. Giles è uguale a quella del sesto primitivo, che è la sezione verticale dal nucleo di questa vite, la lunetta essendo prolungata ne formerà un'altra più stretta dal lato del nucleo; per esempio, se la lunetta cominciasse dentro la torre cava sulla larghezza *KN*, si restringerebbe fino alla metà della chiave della vite nel punto *O*, dove si allargherebbe dalla parte del nucleo fino a un certo punto da una parte e dall'altra, come verso $n^4\,k^4$, poi di nuovo si restringerebbe verso il nucleo in *RP*, ciò che formerebbe una volta a crociera tornante e rampante; le cui proiezioni degli spigoli *KOP*, *NOR* che lo incrociano in *O* , sono le stesse di quelle di una volta a crociera sul nucleo, e non sono degli archi di cerchio, come vengono tracciati dal Prof. Deran e il sig. de la Ruë, ma delle curve meccaniche, come l'abbiamo già fatto notare nel capitolo VIII di questo libro.

L'altro *biveau* sarà l' angolo misto che si viene a formare tra il giunto di testa trovato con la curva di ogni sagoma o profilo, che varia da una

Fig.171 Individuati i giunti di testa dell'arco rampante interno ed esterno, si tracciano le curve della lunetta dentro la torre cava.

[2] Nel testo originale è riportato come 3ds mentre nel disegno è riferito all'appiombo $3d^3$

[3] Nel testo originale è riportato come $g\,a^1\,f\,A$, ma nella fig.171 è riferito al profilo $9\,a^1\,ff\,A$



Perciò bisogna considerare che queste specie di volte sono adatte soltanto alle volte a botte tornanti e rampanti su un nucleo a grandissimo diametro, e non a un pilone fine come nelle viti St. Giles propriamente dette, in quanto la lunetta dal lato del nucleo diventerebbe estremamente stretta ed esigua per la sua altezza, e si deformerebbe per l'innalzamento eccessivo del sesto a doppia curvatura e l'opera ne risulterebbe inutilmente difficile e anche meno solida.

APPLICAZIONE DEL TAGLIO SULLA PIETRA

Per conoscere l'altezza della pietra destinata a fare un concio che determina la lunghezza della lunetta, e porta lo spigolo nella vite; per esempio, per la seconda fila, partendo dall'angolo più basso 1^r si tira l'orizzontale $1^r f$, sotto di essa si abbassa l'appiombo $1^r o$ uguale a $e^1 d^1$; dal punto o si tira l'orizzontale o V che incontra l'appiombo $5\ X$ nel punto V, da dove partirà la linea $V 1^a$, che rappresenta la rampa del ritorno nella vite, l'altezza $6\ o$ oppure $o^6 o$ sarà quella che si cercava.

Per quanto riguarda la lunghezza, si prendono le misure sulla proiezione orizzontale in $V^2\ l^2\ x^2\ x^1\ l^1\ k^1$, che si rappresenterà su una faccia per tracciarne il contorno, sul primo paramano che si deve fare per un letto di posa, di posizione orizzontale, sul quale si individuano i punti G e d^2, considerando che la pietra deve essere più larga della faccia di lunghezza $i\ d^1$.

Si forma poi, la testa $V^2\ l^2$ e $S\ k^1$, nel concio di vite St. Giles, come se non ci fosse nessuna lunetta, come è già stato detto toccando l'argomento del taglio di questa vite, nel tomo precedente pag. 417.

Sulla linea $l^2 x^2$, si farà un paramano a piombo ad angolo retto sul letto di posa orizzontale, la cui intersecione sarà lo spigolo $l^2\ x^2$, dove si sono dovuti individuare i punti G e d^2, per tracciare da tutti questi punti le linee AG e $D\ d^2$, per mezzo degli angoli $x^2\ GA$ e $Gd^2\ D$ che si trasporterà su questo letto di posa con il calandrino o la falsa squadra.

Per mezzo di questi stessi punti G e d^2, si alzano delle perpendicolari sullo spigolo del letto di posa da sotto nel paramano a piombo, per portarci le altezze della linea d'imposta della lunetta $e\ 2^r$, tramite la cui estremità si tirerà una parallela allo spigolo del letto di posa orizzontale di posizione, che determina lo spigolo del letto di posa superiore con l'intradosso.

Per dare a questo letto di posa superiore la sua inclinazione obliqua, si prende, con la falsa squadra, l'angolo $6\ 2^r\ e$, che si forma con l'appiombo $2^r\ d^2$, mettendo uno dei suoi *branches* sulla linea verticale tracciata nel paramano a piombo, e l'altro *branche* tenuto perpendicolarmente allo spigolo del giunto del letto di posa all'intradosso.

Per mezzo di questo *biveau*, si batte la pietra per formare una superficie piana, che sarà quella del letto di posa di sopra, che a sua volta servirà d'appoggio a uno dei *branches* di ognuno dei *biveaux* misti che dobbiamo formare ad ogni sagoma, l'uno dalla parte esterna $1^r\ m^r\ 2^r\ 6$, e l'altra dall'interno della lunetta $a^1\ m^a\ a^2\ 6^a$ tenendo sempre i loro *branches* ad angolo retto allo spigolo del letto di posa di sopra.

I *biveaux* misti essendo in questa posizione, si scaverà due *plumées* all'interno delle quali si applicano esattamente i loro lati convessi per formare la concavità dell'intradosso, anch'essa cava in ognuna delle sue posizioni, in quanto sghemba; dopo di che non rimane che terminare di battere la pietra con la riga tra queste due *plumées*, per formare questa superficie, che come è stato detto per il passaggio strombato.

L'incontro di questa superficie con quella della vite che si suppone già fatta, in quanto si è iniziato da qua, formerà senza sagoma, come casualmente, lo spigolo a doppia curvatura, che corrisponde all'intersezione comune degli intradossi della lunetta e della vite, che è segnata in proiezione da una linea ondulata $l1\ l2$.

Mi chiederete perchè la proiezione totale di questa curva $A\ z\ B$ è uguale da ogni lato del punto z , e invece quella dell'incontro della lunetta fatta da una nicchia nella vite St.Giles è diversa da una parte all'altra, come già detto alle pagine 262 di questo stesso tomo.

La ragione di queste differenze di confluenze, viene dal fatto che nel taglio della nicchia si tratta di quella del cilindro con una vite, dove le direzioni dei giunti dei letti di posa della lunetta non convergono nel centro del nucleo; in modo tale che nella parte inferiore della lunetta, questo giunto che si prolunga orizzontalmente, attraversa e fuoriesce dalla volta della vite piuttosto che nella parte superiore; nella lunetta conica, le direzioni dei giunti dei letti di posa, tese tutte verso il centro del nucleo, tagliano le spirali, dei letti di posa della vite a ugual distanze dal raggio del centro $Cn\ m$.

Si vede che l'intradosso della lunetta essendo scavata, servirà a sua volta d'appoggio ai *branches* convessi dei *biveaux* dei letti di posa di sotto e dell'intradosso, che si formano a partire degli angoli misti $^4\ 5\ 1^r\ m^r\ 2^r$, e $9\ a^1\ m^a\ a^2$; essendo la larghezza dell'intradosso determinata dalle corde degli archi $2^r\ 1^r$ e $a^2\ a^1$, avremmo esattamente lo spigolo del letto di posa di sotto e dell'intradosso, sul quale verranno messe

perpendicolarmente i *branches* di questi *biveaux,* con cui si batteranno le pietre per ottenere una superficie piana, che incontrerà la curva del letto di posa di sotto in un angolo concavo, invece che il letto di posa di sopra abbia incontrato quello della vite in un angolo prominente.

SPIEGAZIONE DIMOSTRATIVA

Nel volume precedente abbiamo detto, a proposito della vite St. Giles, che i diametri di tutte le sezioni verticali, passanti per l'asse della vite, erano linee orizzontali, e parlando del passaggio strombato, abbiamo fatto notare che tutte le sezioni di questo corpo conico, che tendono verso l'asse verticale alzato fino al punto di concorso delle linee convergenti delle sue imposte, erano pure esse delle linee orizzontali; di conseguenza saranno parallele ai diametri delle sezioni verticali della vite : però come tutti i diametri si alzano mano a mano che si gira intorno al nucleo, conviene altresì che i letti di posa del passaggio strombato che determina la lunetta, siano a livelli differenti che s'innalzano quanto i sesti della vite, ciò che tramuta il passaggio strombato in una volta a botte rampante da una imposta all'altra, come la vite cambia la volta sul nucleo in volta a botte rampante : la differenza che esiste in questi modi di rampare, è che la vite rampa secondo la sua direzione curva, e poi che la lunetta che é distante, non deve rampare secondo la sua direzione che è verticale, ma secondo le sezioni trasversali.

Si poteva prendere queste sezioni trasversali secondo linee curve concentriche alla vite, il taglio ne sarebbe un pò più regolare, ne convengo, ma l'esecuzione ne sarebbe più difficile: 1°- perchè bisognerebbe sviluppare tutti i diametri curvi di queste sezioni, che sono archi di cerchi o di ellissi; 2°- perchè bisognerebbe servirsi di sagome flessibili per mettere le curve di questi sesti sulle teste convesse o concave, ciò che diventa un terzo inconveniente che si può evitare facendo dei cerchi su delle sezione piane.

D'altronde la differenza di contorno, che ne può derivare, è talmente piccola che risulta impercettibile alla vista, perciò è inutile dilungare l'operazione, in quanto non ne viene nessun vantaggio, piuttosto maggior difficoltà.

Ecco tutto ciò che volevo dire per quanto riguarda le volte; penso di non averne dimenticato nessuna di quelle di qualche uso :

ho cercato di rendermi intellegibile il più possibile, però non mi vanto di esserlo sempre stato con quelli che non hanno un pò di conoscenze nella pratica dei tagli di pietra; a loro consiglio di aiutarsi con l'immaginazione, e supplire così alle mie spiegazioni, con il lavoro

manuale, e facendo tagli con del gesso.

Per quanto le volte rappresentino le difficoltà maggiori della stereotomia, è anche vero che si trovano ancora nella costruzione di scale, dal punto di vista dei loro sostegni, longarine e chiocciole; è ciò che ci rimane da studiare.

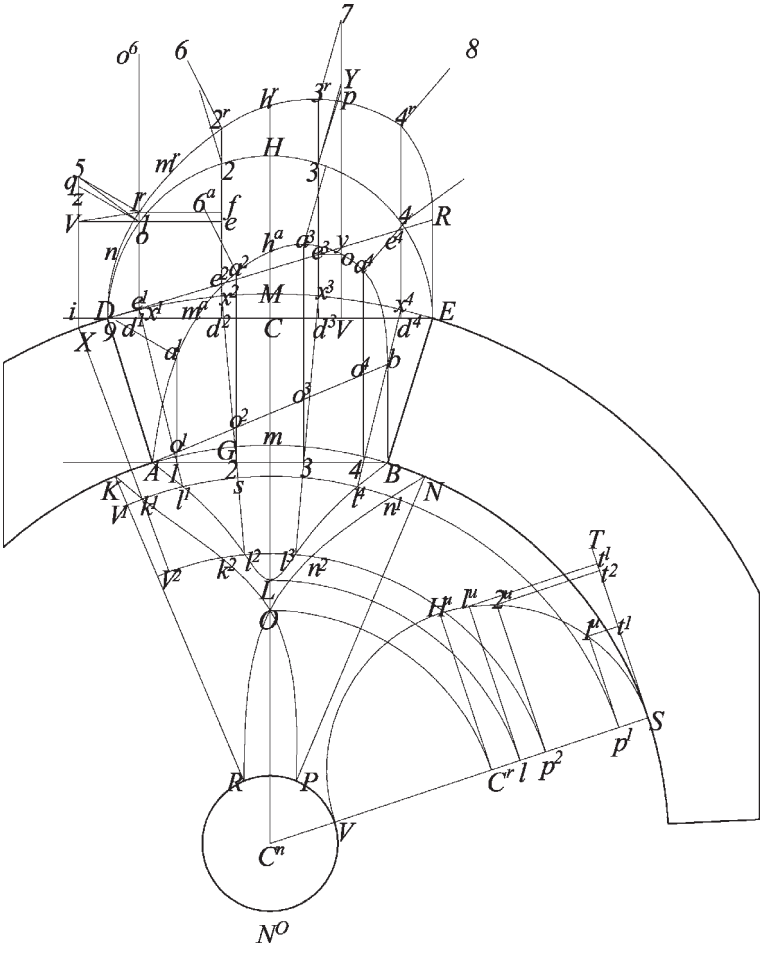
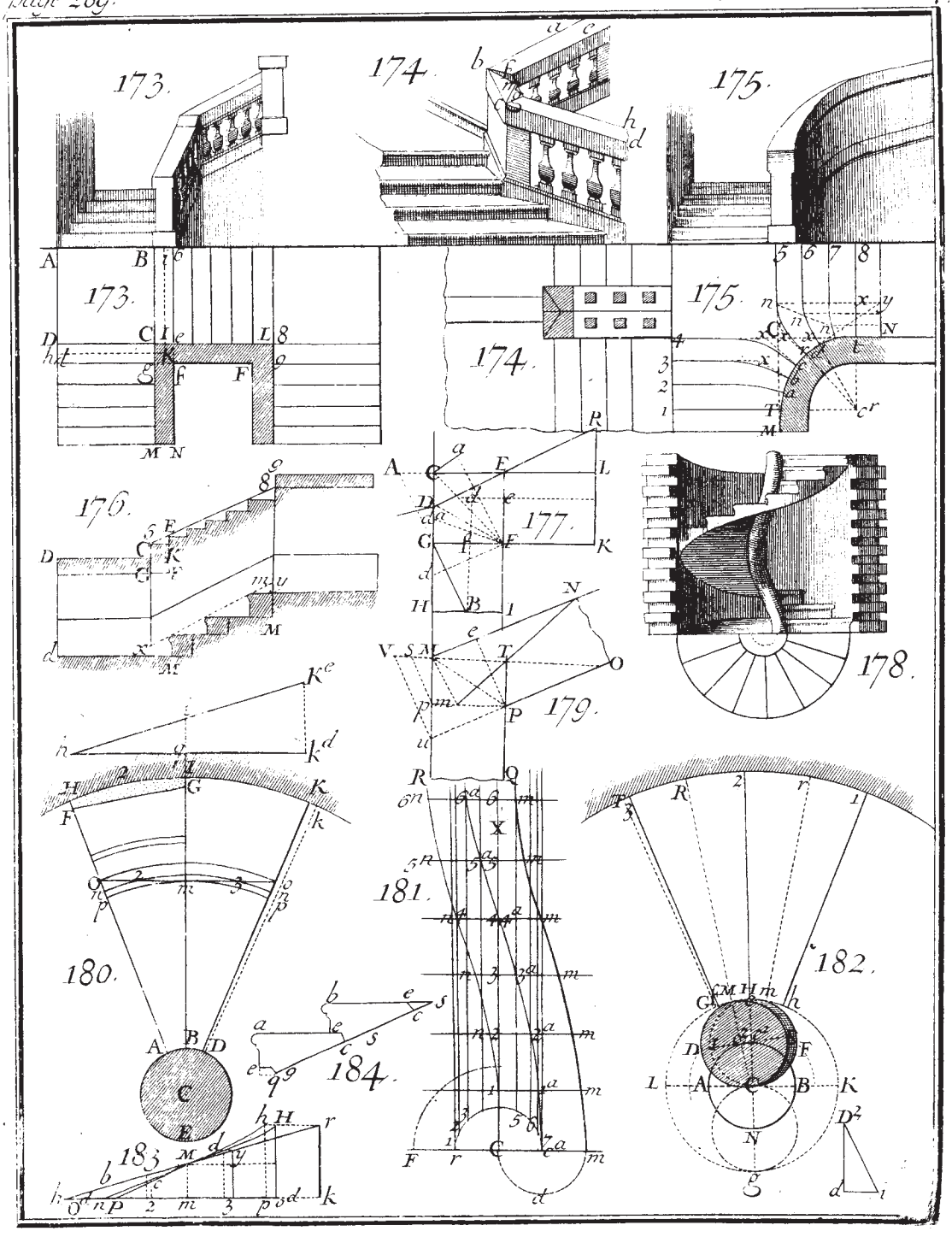


Fig.171 Disegno conclusivo della lunetta strombata dentro una volta a crociera tornante e rampante

[4] Nel testo originale è riportato come *5 x^r m^r 2^r*, mentre nel disegno corrisponde a *5 1^r m^r 2^r*

page 289.

Pl. 104.



Capitolo undicesimo

L'APPARECCHIATURA DELLE SCALE CONSIDERATE SOLAMENTE NEI LORO SOSTEGNI, MONTANTI E CONCHIGLIE.

Dopo aver trattato delle differenti specie di volte destinate a coprire le scale, come la Vis St Giles rotonda per quelle che salgono girando in una torre rotonda, la Vis St. Gile quadrata per quelle fatte nelle torri quadrate o a travatura; le volte diritte sulle imposte rampanti e bombate alla sommità con pianerottoli sospesi sostenuti da trombe (o volte coniche) (Trompes), o degli archi di chiostro (de cloitre) per le scale a rampe diritte, un quadrato o altro poligono vuoto al centro ecc.
Non ci resta che parlare delle parti essenziali delle scale quali i gradini, i montanti, i sostegni e le conchiglie, dei rivestimenti (parament) inferiori dei gradini diritti che hanno anche difficoltà per l'apparecchiatura; le minori difficoltà sono nelle rampe diritte, non è inutile però, per la pratica, farle notare.

Prima di tutto:
del raccordo dei sostegni e dei montanti delle rampe diritte agli angoli d'incontro sporgenti o rientrati, esterni o interni.

Ci sono tre superfici su ogni sostegno che meritano di essere considerati a parte.
1. Quella superiore le cui sezioni perpendicolari ai lati rampanti devono sempre essere delle linee di livello; quelle che si estendono anche ai montanti ed ai sostegni curvi.
2. La superficie interna sul lato dei gradini che fa una specie di zoccolo il cui costolone (spigolo retto) deve essere parallelo alla linea tangente agli angoli dei gradini
3. La superficie esterna nelle scale vuote nel mezzo che è ordinariamente un plinto o una piccola cornice (cimasa) (corniche) rampante parallela al costolone del lato interno, di conseguenza alla tangente degli angoli dei gradini.

Sebbene queste superfici siano relative (correlate), esse possono, però a riguardo di certe simmetrie, essere considerate come indipendenti perché i loro spigoli possono fare delle fughe negli angoli (fuites dans les retours) di un lato quand'anche esse siano interrotte dall'altro, e per trattare questo piccolo argomento a fondo, come crediamo di aver fatto fino a qui, come negli altri tratti, noi stabiliamo un lemma che ci darà una piccola conoscenza.

LEMMA

Due parallelogrammi di diversa direzione inclinati all'orizzonte seguendo uno dei loro lati, e di livello per l'altro, non si incrociano secondo la diagonale della proiezione dell'angolo che si fanno tra di sé, ma si incrociano solamente in un punto dai lati che si toccano.

O dicendo la stessa cosa in termini diversi; se due parallelogrammi inclinati all'orizzonte sono perpendicolari a due piani verticali di differenti direzioni, non si incontrato che in un solo punto che sarà sulla linea di intersezione dei due piani verticali.
Seguendo questo ultimo enunciato, la verità di questa proposizione è facile da dimostrare perché si possono considerare i due piani inclinati come proiettati sui piani verticali, e allora essi si riducono ciascuno ad una sola retta inclinata; ora due rette non possono incontrarsi che in un solo punto e, di conseguenza, questi due piani possono incontrarsi solo in un punto.
Inoltre, questi due piani, essendo inclinati all'orizzonte, non possono essere tagliati da un piano orizzontale, che seguendo due rette orizzontali inclinate tra di loro, che sono su due piani differenti: ora queste due rette non possono incontrarsi che in un solo punto; di conseguenza questi due piani non possono incrociarsi che in un solo punto orizzontalmente, supponendo sempre dei parallelogrammi e non dei piani prolungati in tutti i sensi.

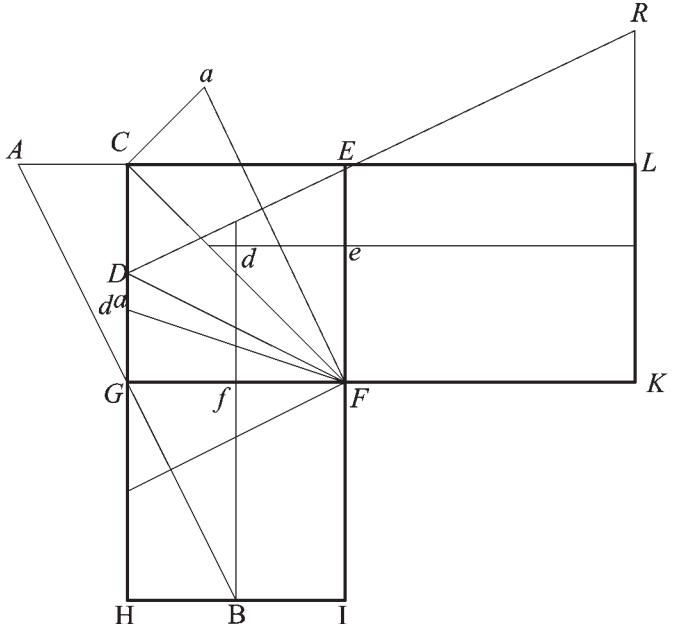


Fig.177 Costruzione di una rampa di scale con piani verticali perpendicolari tra di loro.

Se arriviamo all'applicazione specifica, possiamo considerare ciò che succede, quando le loro direzioni sono su dei piani verticali perpendicolari tra di loro, come nellaF***ig. 177*** dove i parallelogrammi *CK, HE* sono le proiezioni dei parallelogrammi che supponiamo inclinati all'orizzonte; l'uno secondo l'angolo di profilo *CED* o *REL* sono opposti al vertice, e l'altro secondo l'angolo *CGA*.
Bisogna dimostrare che se il punto *F* è quello di incontro dei lati *IE, KG*, tutte le rette che si possono tracciare da quel punto *F* nell'uno e nell'altro parallelogramma, sono divergenti, e che nessuno può essere la comune intersezione di due piani inclinati, come nella loro proiezione orizzontale.
Prima di tutto è visibile che quelle che saranno tracciate da questo punto F perpendicolarmente ai lati KG, IE, saranno divergenti quand'anche riunite nella proiezione perché FE, considerato sul piano CI è inclinato all'orizzonte per ipotesi seguendo l'angolo CGA di profilo, e che la stessa linea FE considerato nel piano CK, è orizzontale anche per ipotesi; di conseguenza queste due rette saranno inclinate tra di loro come GA

e GC, o per un altro profilo come GF e Fd discendendo, o come GF orizzontale con FD salendo, ciò fa vedere anche che le rette in FG siano ancora divergenti come GF e Fd o FD.
Non sarà più difficile fare vedere che le rette tracciate da un punto F, seguendo la diagonale FC, o tutt'altra F in ciascuno dei piani, saranno lo stesso divergenti; poiché se si rende Ca perpendicolare a CF e uguale a CA è chiaro che la retta aF rappresenterà uno dei piani che sale come IC o che scende da K in C; in forza del fatto che facendo l'angolo di questa discesa in CFd[a], l'angolo totale aFd[a] sarà il profilo della sezione dei due piani attraverso la diagonale della proiezione FC, quindi gli altri.
La stessa dimostrazione si applica senza nessuna difficoltà all'incontro dei parallelogrammi, le cui direzioni sono oblique, come nella Fig. 179.

Corollario di pratica

Da questa proposizione segue evidentemente che due tavolette di appoggio delle rampe, o due montanti paralleli alla tangente, che si deve immaginare tocchino i costoloni dei gradini di ogni rampa, non possono unirsi al loro punto d'incontro che attraverso un aggetto formato da una terza superficie a piombo, o di livello che passa dall'uno all'altro; qualsiasi precauzione si prenda non si può evitare, é inutile cercare altri espedienti, oppure di farli terminare ad un pilastro o ad un piedistallo, ecc. che ne nasconda la terminazione; poiché se si fa in modo, attraverso la disposizione delle pedate dei gradini, che i lati interni dei montanti si riuniscano nell'angolo rientrante, i lati interni non si riuniranno nell'angolo sporgente opposto; e se al contrario i lati interni dei montanti o dei sostegni si riuniranno in un angolo che è sporgente sul lato dei gradini non si incontreranno in un angolo rientrante opposto, essi vi faranno necessariamente un aggetto.
Da ciò segue che gli espedienti che Bosse[1] dà per evitare gli aggetti allo spigolo dello zoccolo dal lato dei gradini sono inutili per il lato esterno, o anche se non lo sembrano al momento in cui si copre di una balaustra, essi si vedono al sostegno superiore come si può vedere nella Fig. 174, dove se ne fanno necessariamente due, uno triangolare inclinato bfc, e uno triangolare verticale cfg, o meglio seguendo la correzione di Defargues[2], che Bosse chiama un'invenzione meravigliosa, se ne possono fare tre dividendo la metà dell'aggetto interno fg in due, in m, da dove si tracceranno due rette in b e in C, di modo che si avranno tre aggetti triangolari, cioè due verticali bcm & cgm, ed uno obliquo bmc.

1 Citazione diBosse
2 Citazione di Defaurgues

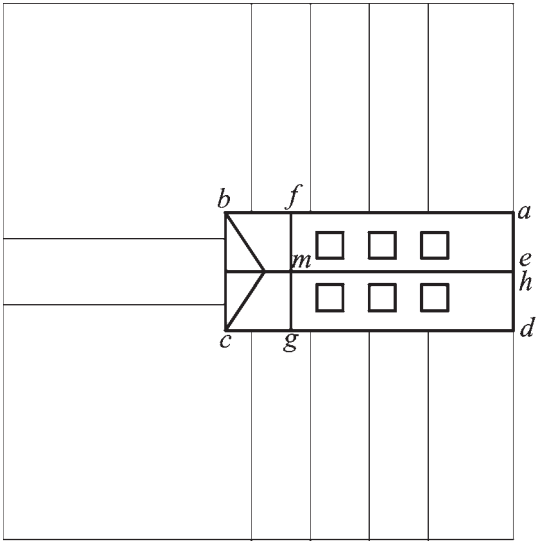


Fig.174 Espediente per evitare l'aggetto dei gradini allo spigolo

La seconda superficie che noi consideriamo sul montante o sul sostegno, è quella interna dal lato dei gradini dove l'appoggio fa un bordo di qualche pollice di altezza, che è la base interna delle balaustre, dove lo zoccolo (ressocle) dell' appoggio sul quale si mette la rampa di ferro, al quale l'arrangiamento dei gradini ai pianerottoli d'angolo causano spesso delle interruzioni, ed obbligano l'architetto di farvi un aggetto, ciò accade nel momento in cui i due gradini DC, BC (Fig. 173) che formano il pianerottolo d'angolo ABCD, sboccano all'angolo sporgente C del montante MCL, perché il punto C è il prolungamento comune a due altezze dei gradini, cioè a DC del pilastro del pianerottolo sul pedata Dg, e CB sul pianerottolo AC; questo lo si vede più distintamente alla Fig.176 alle lettere GC e C6; in modo che il costolone MC dello zoccolo della prima rampa cada al di sotto dell'altezza del costolone dello zoccolo d'angolo di rimando di tutta l'altezza di un gradino.

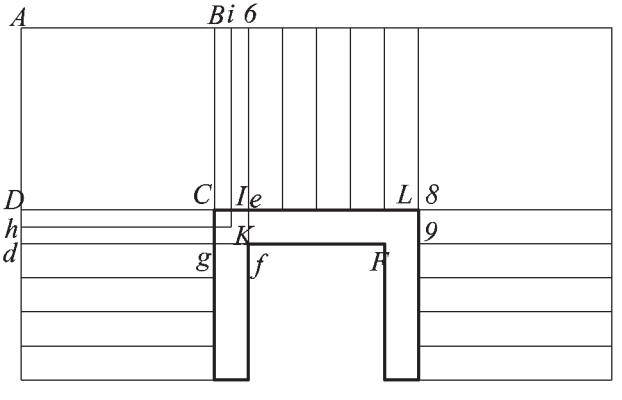


Fig.173 Lavorazione della arte interna della balaustra

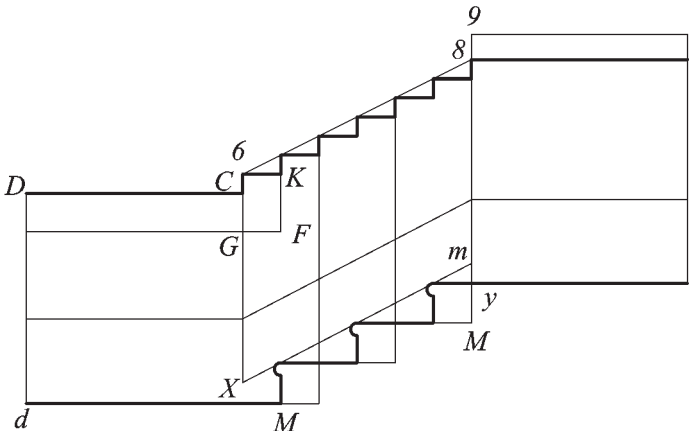


Fig. 176 Profilo della fig. 173

Per rimediarvi, si deve far entrare l'angolo C nel pianerottolo di ogni lato della metà della larghezza di un grandino, allargando il pianerottolo facendo retrocedere il costolone DC in hK, e di BC in Ii, perché allora il punto d'incontro dei costoloni dello zoccolo o delle tangenti dei gradini di ogni rampa, si troverà al di sopra del pianerottolo della metà dell'altezza di un gradino, e al di sotto del primo gradino della seconda rampa, della metà di un gradino.

Questa costruzione che riunisce i costoloni della superficie a piombo interna, anche con quella dell'aggetto della superficie superiore, che fa la tavoletta dello zoccolo la quale non può ricollegarsi nell'angolo se non attraverso una superficie triangolare a piombo sulla diagonale, che cambia secondo l'angolo di incontro delle due superfici, e se le loro direzioni orizzontali sono parallele come al momento in cui esse sono girate in senso contrario, allora quel triangolo è loxigono CeK doppio di quello del profilo di una metà di gradino; se le direzioni sono ad angolo retto, esso sarà rettangolo, avendo per una delle sue gambe (une de fes Jambes) la larghezza del montante, e per altezza la retta proporzionale alla larghezza rispetto ai gradini; se il montante avesse una larghezza pari a due volte quella di un gradino, l'aggetto sul lato esterno sarebbe uguale al doppio dell'altezza dei gradini e così via.

COROLLARIO

Ne consegue che per togliere totalmente quest'aggetto verticale, e trasformarlo in piattaforma orizzontale, cosa che sarebbe più gradevole alla vista, bisogna far retrocedere i gradini del pianerottolo d'angolo fino all'allineamento dei lati del quadrato dello spessore del montante Cefg, ciò a dire in df e bf e terminare al montante in g e e; bisogna cioè allargare il pianerottolo fino a che tutta la larghezza del montante ne sia compresa.

Cambiando questa correzione l'incontro dei montanti dell'angolo sporgente o rientrate formerà una continuazione di costoloni di plinto o di cornicione, in ritorno agli angoli rientranti, senza alcun aggetto, ed è ciò in cui consiste l'attenzione che si deve avere alla terza superficie del montante, per darne un seguito al ritorno ai suoi costoloni ed ai suoi ornamenti; se le direzioni delle rampe facessero tra di loro un angolo acuto o ottuso, bisognerebbe tracciare dall'angolo rientrante P (Fig. 179) delle perpendicolari Pp – Pe sui due lati opposti, le quali determinerebbero la direzione e le estremità del pianerottolo che si troverebbe allora meno largo, rispetto allo spessore del montante, perché la linea Me è più piccola che eP, e sarebbe al contrario più largo se l'angolo fosse acuto; ciò che è chiaro al solo esame della figura, perché l'angolo della diagonale PM con il lato MN sarebbe più o meno acuto; di conseguenza il suo complementare MPE darebbe una più grande o piccola distanza tra la perpendicolare Pe e il punto M.

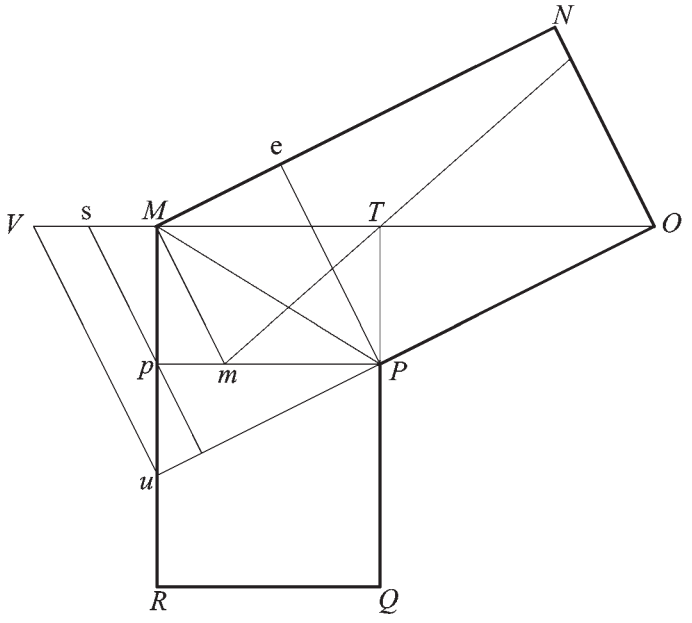


Fig. 179 Costruzione di due rampe di scale inclinarte tra di loro.

L'inconveniente che segue questo grande ampliamento, che può far perdere due o più gradini ad ogni pianerottolo, oppure il fatto di non conoscere i mezzi per eliminarlo, è la causa del fatto che si vedono parecchie scale dove i montanti formano degli aggetti sgradevoli alla vista come le grandi scale del palazzo reale e di Lussemburgo a Parigi. Gli architetti francesi moderni hanno trovato un'invenzione veramente ingegnosa, molto bella a vedersi e molto comoda per evitare la difformità degli aggetti negli angoli senza perdere spazio, ingrandendo i pianerottoli; essi inscrivono un arco di cerchio nell'angolo rientrante che aumenta lo spazio dell'angolo; e salvo ogni irregolarità ecco come bisogna tracciarlo.

Sia l'angolo rientrante MCN che contorna (ètoit) quello sporgente del montante del pianerottolo (Fig 175); avendo preso a volontà i punti di contatto T e t alla stessa distanza dal vertice C dell'angolo dato, tracceremo da questi punti le rette perpendicolari $1C^r$, $8C^r$, che in incontreranno in C^r che sarà il centro dell'arrotondamento; di seguito si dividerà l'arco Tt, come conviene per il collet dei gradini, per esempio qui in parti uguali, che approssimano la larghezza del pedata degli altri.

Si tracceranno per ognuna delle parti dell'arco suddiviso, e per il centro C^r delle rette diritte C^rx, fino all'incontro dei gradini che esse

intersecheranno in *x* e *x*, da dove si porterà sul lato del gradino, la distanza che c'è dal punto x all'arco del cerchio di arrotondamento in *xn*; attraverso il punto *n* si traccerà una perpendicolare *ny* per *n5*, e per il punto *r* un'altra perpendicolare *ry* per C*r*x, che taglierà la precedente in *y* dove formerà il centro dell'arco *rn*, e così via per gli altri, come mostra la figura.

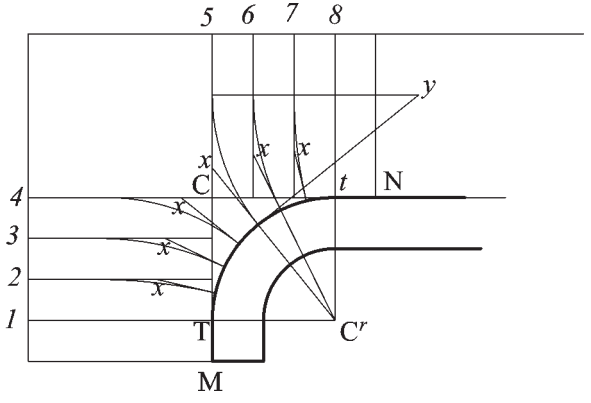


Fig. 175 Costruzione dell'arrotondamento dei gradini per evitare difformità negli aggetti. Confrontando con il disegno della plance possiamo notare una discordanza nella posizione dei centri dell'arrotondamento causati da un imprecisione della costruzione del disegno originale perchè fatti a mano.

Il sig. Hertenstein, nel suo piccolo Trattato d'Architettura civile[3], illustre in un altro modo (pag 369):
Prende da una parte all'altra dell'angolo del fistrato interno del valore di due rampe e mezzo, (egli intende apparentemente due pedate e mezzo); l'intersezione che si farà tra questi due punti darà in centro dell'arrotondamento; dal quale avendo descritto un quarto di cerchio in quell'angolo, si dividerà in otto parti ed i punti *1*, *3*, *5*, *7*, sono quelli dove devono sboccare i gradini. Questo metodo mi sembrerebbe buono al momento in cui l'arrotondamento dell'estremo dei gradini è poco considerevole, e che ce n'è un po' da arrotondare; ma nel momento in cui il numero è più grande, bisogna ritornare a quella che veniamo di descrivere che dirige questi arrotondamenti nel miglior modo possibile, e che li diminuisce fino ad annientarli.

Le scale a chiocciola.

La difficoltà di questo tipo di scale consiste nella specie di teste di gradini che sostengono il loro nocciolo o montante, e nella smussatura del paramento inferiore che chiamiamo conchiglia, che sono suscettibili di 5 variazioni.

3 Citazione del trattato d'Architettura civile, Sig. Hertenstein

1. La vite può essere sostenuta da un nocciolo pieno e a piombo, cioè un pilastro tondo portante dal suolo.
2. Da un nocciolo pieno ma rampante, come una colonna tortile.
3. Il nocciolo può essere soppresso, in modo che lo spazio rimanga vuoto, si chiama chiocciola a giorno; i gradini allora sono sostenuti solo dalla loro coda, e da una piccola parte di riempimento sulla loro lunghezza prolungata, fino alla testa senza taglio, che si chiama piano d'imposta, e che termina solamente la testa da una modanatura continuata in ellisse attorno al vuoto, che deve essere una apertura di un piccolo diametro affinché questa modanatura essendo poco inclinata sia più solida.
4. Nella stessa circostanza di nocciolo vuoto, si può lasciare un'apertura di un diametro abbastanza grande, facendo supportare ad ogni testa di gradino una porzione di montante ruotante, che abbai un buon spessore in modo che ognuna delle parti si appoggi sulla parte inferiore del piano d'imposta nel suo centro, e tagli verso i costoloni esterni ed interni di sopra e di sotto.
5. Infine i gradini possono essere supportati alla loro testa da un montante di pezzi distaccanti dai gradini, che siano capaci di sostenersi essendo trattenuti dai gradini, e di sostenere reciprocamente le teste degli stessi gradini che, vi si appoggiano tramite degli intagli.

Problema XV

COSTRUIRE UNA SCALA A CHIOCCIOLA QUALUNQUE.

Prima di tutto
la scala a chiocciola a nocciolo pieno e a piombo.

La costruzione di una scala a chiocciola e a nocciolo, pieno e a piombo è così facile che la minor parte dei tagliapietre la eseguono, quando il rivestimento di sotto dei gradini fa un aggetto ad ogni rivestimento, ma quando fa una superficie continua in conchiglia non vi arrivano se non tentennando.
Gli autori che hanno scritto sul taglio delle pietre non hanno previsto niente a questo proposito; il Signor de la Rue[4] che ne parla in quello della scala a chiocciola a giorno, dice solamente che se si smussa il sotto dei gradini conducendo il regolo (la regle) seguendo le parti curve e rampanti in modo tale che essa tenda tanto più al centro della chiocciola; ma non indica un modo di tracciare la curva sulla quale si deve applicare il regolo in una estremità, né di fare in modo che la direzione dell'altra estremità tenda al centro del nocciolo, sia che sia pieno o vuoto, sia che il centro piuttosto che l'asse della chiocciola sia invisibile nell'uno e nell'altro caso; di conseguenza non si può tracciare questa superficie regolarmente se il regolo non è guidato da due linee curve, sulle quali essa deve calarsi in una certa posizione che cambia di direzione in ogni punto di queste curve; cercheremo di sopperire.
Sia (Fig 180) una porzione di torre concava HIK, nella quale vi è una scala a chiocciola, di cui ABDE è il nocciolo circolare, attraverso il centro

4 Citazione di m. de la Rue

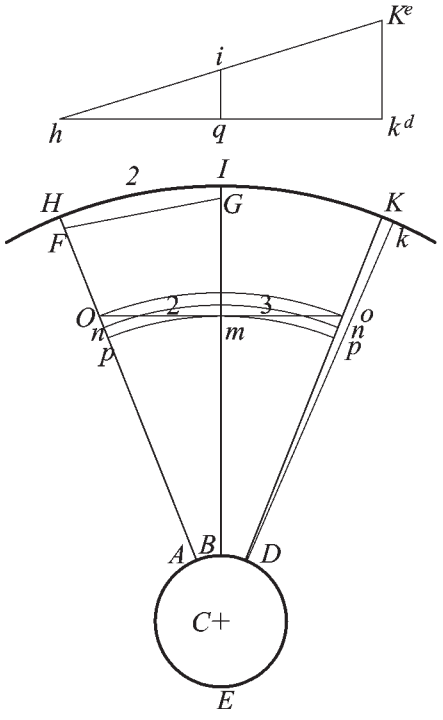


Fig.180 Costruzione di gradini per una scala a chiocciola a nocciolo pieno

C dal quale immaginiamo una retta verticale che chiamiamo l'asse della chiocciola, al quale tutte le rette dirette secondo la lunghezza dei gradini devono tendere come i raggi del cerchio al loro centro; tali sono le rette HA, IB, KD, che esprimono il piano orizzontale di due gradini.
Si tratta di fare il rivestimento del sotto di tali gradini e dei seguenti; in modo tale che esso sia continuo senza aggetto di maniera uniforme in conchiglia di questa specie che noi possiamo chiamare una superficie plano elicoidale (planoheélicoide), che differisce dall'anulare elicoidale o la scala St. Giles, poiché le rette delle sezioni di tutti i piani passanti per il suo asse fanno dei semi cerchi o delle altre curve; e che qui ci sono delle rette diritte, tuttavia le loro sezioni attraverso dei piani o delle superfici cilindriche, sono delle linee curve.
La linea dell'angolo rientrante formato dall'incontro della conchiglia con la torre, è un'elica perfetta, la quale essendo una curva a doppia curvatura, non può essere descritta su una superficie piana; dunque non può farne un cerchio su una piattaforma diritta, ma solamente su una porzione cilindrica concava, o convessa, al quale è ben facile farlo; poiché se si sviluppa in linea retta l'arco del cerchio HIK, che è il piano orizzontale della porzione della torre che supporta i gradini come in qi Fig. 180 e che si faccia alla sua estremità 4 l'altezza del gradino qh; la retta hi sarà lo sviluppo dell'ellisse.
Se si taglia un pezzo di asse di legno seguendo il segmento del cerchio FH 2 IG convesso, e che ci si applichi lo sviluppo qhi tracciato su di una superficie flessibile come la carta o il cartone; ci si traccerà la retta hi, che darà sulla superficie curva dell'asse di legno una linea curva, che farà l'ellisse che si cerca, seguendo la quale avendo tagliato il legno, si avrà l' arco di cerchio (cerche) dall' inizio dello scalino alla sua parte estrema. Si troverà allo stesso modo quella della testa, che sarà molto meno inclinata all'orizzonte, come si vede in PM (Fig. 183) dove si sono tracciate l'una e l'altra ellisse.

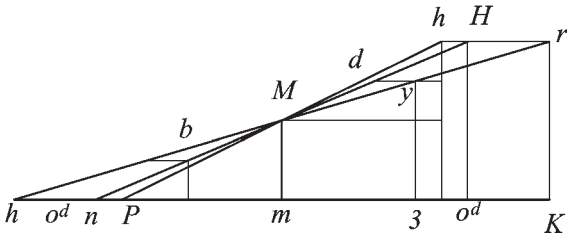
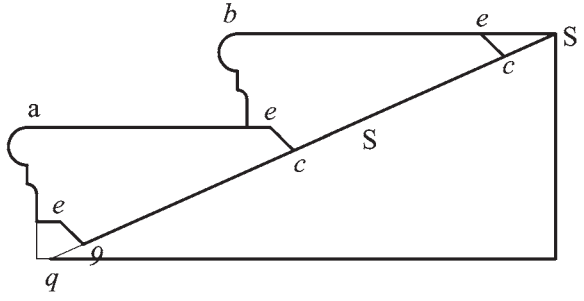


Fig. 183 Projezione dell'inclinazione della scala

Questa cerche non sarà necessaria se si scava nello scalino la porzione di torre concava che occupa al di sopra del strato orizzontale della sua estremità, poiché vi si potrà applicare il triangolo di sviluppo sulla base di livello; ma se la pietra si trova deformata, sarà necessaria per formare esattamente le due estremità della superficie in conchiglia, sulle quali deve scorrere il regolo che dirige l'operaio per abbattere la pietra che si trova tra due.
Non resta altro che applicare questo regolo su queste curve, in modo che esso tenda sempre all'asse della vite senza tentennare, non all'incirca, come dice M. de la Rue, ciò può causare grandi irregolarità, ma esattamente; ciò è molto facile; se si divide ognuna di queste porzioni di ellisse esterna ed interna nello stesso numero di parti uguali, per esempio in quattro, e se si pone il regolo della seconda divisione della grande ellisse alla seconda della piccola; dalla 3° alla 3°, e così di seguito; e che si abbatta tutta la pietra che non è in linea retta di uno da uno di questi punti all'altro, il regolo tenderà sempre all'asse della vite.
Questo metodo di formare la conchiglia è molto semplice ed esatto; di conseguenza poiché è meccanico, si possono trovare delle cerches piane, che serviranno a formarla altrettanto facilmente tra le due estremità dei gradini.
Supponendo che si voglia avere un cerche che passi per il punto O, si traccerà dal centro C un arco Oo, che donerà il punto o sull'altro bordo dello scalino, attraverso il quale si tracerà la retta oO, che si dividerà in un certo numero di parti che si vorranno, come qui in quattro ai punti 2, m, 3, per i quali faranno passare degli altri cerchi concentrici nn, pp, di cui si faranno gli sviluppi (les dévelopeens) su una retta, come si vede per la ripetizione delle stesse lettere alla figura 183. In seguito avendo portato su ciascuna la stessa altezza che è quella dei due gradini, si traccerà l'ipotenusa Ho^{d} della proiezione, che si dividerà in quattro ai punti bMd, attraverso i quali si tracceranno delle piccole parallele all'orizzontale Ok; e attraverso i punti 2, m, 3 della retta di proiezione Ob che è più corta della sviluppata (dévelopée) O^{d}o^{t}, vi si tracceranno delle verticali 2xMm3y, che daranno attraverso la loro intersezione con le orizzontali bx, dy i punti x e y; la linea curva tracciata attraverso i punti OxMyb sarà quella che cerchiamo.
Si potranno formare due cerches concavi di altrettante curve per ogni gradino, uno verso l'attacco (le collet) l'altro verso la fine (la queue), e dividerli, come si è detto dell'elisse, in parti uguali che diano la posizione

della retta sui punti corrispondenti, come della metà di uno alla metà dell'altro, ecc.
Questa specie di cerche può essere molto utile anche per rettificare la conchiglia nell'intervallo tra due gradini, che potrebbero ognuno essere ben fatto, e allo stesso tempo fare una piega o un angolo per essere stati mal posati.
C'è un'osservazione da fare al riguardo della costruzione, considerando lo spessore della pietra che si è destinata ad ogni gradino, è che essa deve essere un po' più spessa di quanto necessario all'altezza di un passo, perchè la superficie della conchiglia facendo degli angoli aS9, bsq molto acuti con quelle dei pedate aS, bs, è necessario di scalpellare lo spigolo vivo attraverso un taglio ce (Fig 184) che gli dia più solidità, e affinché il punto q sia al di sotto del livello di e, è necessario che la pietra abbia per spessore l'altezza eq in più di quella del passo ae.



E' chiaro che questo taglio è maggiormente necessario verso la fine del gradino dove l'elisse è più adagiata piuttosto che verso l'attacco, dove essa si avvicina più alla verticale, e che se si volesse fare questo taglio in tutte le righe, in modo che fosse sempre perpendicolare alla superficie sinistra della conchiglia, sarebbe necessario che anch'essa fosse sinistra; tale attenzione sarebbe necessaria se il taglio è grande, ma si farebbe normalmente così piccola, che si potrebbe tralasciare questa precisione; per il resto ci sono così poche cose difficili da osservare, che si può farlo senza vincoli; poiché se si traccia una retta dal centro della vite sul bordo del taglio, come ck alla superficie inferiore, lo scarto dal bordo dello scalino DK che si restringe verso il colstrato, dà naturalmente lo sbieco (deformazione) del taglio (le gauche del la coupe), non si tratta che di abbattere la pietra da una di queste rette all'altra, in linea retta con il regolo posato a squadra sugli spigoli.
E' anche comprensibile che il ritorno di questo taglio sotto gradino è arbitrario, e dipende dal recupero che si vuol dare ad un gradino sull'altro, il quale in questa specie di vite può essere così piccolo che si vorrà, affinché ogni gradino sia supportato da due estremità e sia sufficientemente sostenuto; non è lo stesso per la vite a giorno come diremo in seguito.

Spiegazione dimostrativa

Per concepire le ragioni dei modi di trovare le curve di questi due cerches, bisogna ricordarsi di quello che abbiamo detto al terzo livello (pag 342) che lo sviluppo di un ellisse era un triangolo rettangolo, la cui base è uguale allo sviluppo di quella del cilindro, attorno al quale si fanno le rivoluzione, sia che si consideri un tutto o una parte. E' dunque evidente che applicando tale triangolo nella situazione naturale su di una superficie cilindrica, questa ipotenusa diventerà l'ellisse stessa che si cerca.
Non è meno evidente che se si suppone la superficie della conchiglia tagliata da molti altri cilindri concentrici al nocciolo, e che queste superfici curve siano attraversate da un piano parallelo all'asse della vite, si avranno attraverso le loro proiezioni orizzontali, gli archi dei cerchi oO,nn,pp e la corda oO che li taglia nei punti 2ra3, gli dà le proiezioni delle sezioni del piano che taglia più cilindri parallelamente alla loro asse, i quali sono di conseguenza delle linee rette verticali che hanno ognuna un punto in comune con l'ellisse alla superficie della conchiglia in ogni cilindro e nel piano che li taglia tutti; ciò andava dimostrato.
Al riguardo del modo di piazzare il regolo sulle divisioni di parti proporzionali, è chiaro che ad ogni divisione l'ellisse saranno pervenute (parvenues) alla stessa altezza, di conseguenza il regolo che vi sarà sovrapposta avrà preso una situazione di livello a riguardo della vite. La prima condizione per la formazione della conchiglia. Secondariamente, che essa sia diretta all'asse, perché gli archi orizzontali della proiezione sono proporzionali. La seconda condizione essenzialmente rimanda alla vite circolare.
Se il nocciolo e la torre nella quale è la vite fossero ellittici, invece di essere circolari, ci sarebbero grosse differenze ai gironi dei gradini, se si dirigessero all'asse che passa per il centro dell'ellisse; è per questo che la loro direzione deve essere presa attraverso le parti uguali nel numero di ogni quarto d'ellisse da quella della torre a quella del nocciolo, è il solo cambiamento che ci sarebbe da fare alla costruzione.

Seconda variazione

FARE UNA SCALA A NOCCIOLO RAMPANTE

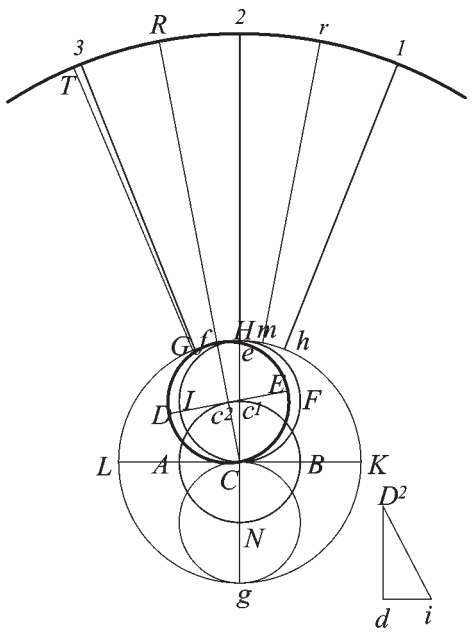


Fig. 182. Costruzione delle pietre dei gradini per una scala a chiocciola con nocciolo rampante

Sia la Fig. 182 il cerchio Ac¹B, il piano orizzontale dello spazio che occuperebbe un nocciolo pieno come la fig. 180, si farà un secondo cerchio CDE, il cui centro c¹ sarà alla circonferenza del primo, e di diametro tale che si giudicherà a proposito, poiché si può farlo più piccolo se si vuol lasciare un vuoto, ma allora diventerebbe scala a chiocciola a giorno. Avendo tirato dal centro C per il centro c¹, la retta CR per il centro di un gradino, se ne farà il piano f32 e per il girone, aggiungendo sul dietro una parte GT3f per la copertura di quella che segue, e sul davanti una piccola sporgenza in H con un degrado di un Cavet, se si vuole, e si farà un pannello della figura CDGT2HeEC, che applicheremo sulla pietra per tracciarne lo strato di sopra, dove avremo cura di lasciare un avanzo di pietra che eccede in EF; successivamente si farà per due ritorni a squadra al punto C e al punto 2 delle linee, che passano dal strato di sopra a quello di sotto, per potervi applicare lo stesso pannello, ma in una posizione differente; si poserà bene il punto C di quel pannello sul punto C del strato di sopra, ma si poserà il punto 3 sul punto 2; in modo che si sarà cambiato la prima situazione in quella del gradino inferiore C12IiFc. In questo modo si traccerà il contorno del cerchio IHFC, e si abbatterà la pietra da uno di questi cerchi all'altro, questi formeranno una porzione di cilindro scaleno, se si arrotondasse al regolo sui lati; ma poiché è una porzione di cilindro elicoidale somigliante ad una colonna tortile, bisogna trovare una cerche che possa segnare la curvatura dei lati; noi scegliamo qui DE estratto dal punto D nel centro del semicerchio CM, come il più saliente ed il più appropriato a guidare il tagliapietre.

Si porterà a parte la lunghezza dell'arco DI, che si svilupperà sulla retta di; sul punto d, vi si eleverà la perpendicolare dD², e si traccerà D²i, che sarà l'ipotenusa del triangolo rettangolo, e lo sviluppo dell'ellisse che si forma sul nocciolo in DI dalla base superiore a quella inferiore del cilindro elicoidale; così avendo arrotondato un pezzo di tavola (planche), seguendo l'arco DI, in porzione di cilindro, vi si applicherà il triangolo dD²i tracciato su una materia flessibile come il cartone, seguendo il quale si traccerà la curva che si deve applicare al centro del nocciolo, dalla quale si tracceranno due cerchi differenti, uno convesso, che si poserà tra i punti D collegati allo strato superiore, e I allo strato di sotto che sarà concavo, e l'altro concavo o scavato, che si poserà tra i punti E e F collegati, l'uno allo strato di sopra come E, l'altro allo strato di sotto F, poiché il lato è un po' convesso seguendo la direzione EF.

Come gli archi DI e EF, che sono le basi della superficie del cilindro, nel quale si trova l'ellisse che descrive il lato del nocciolo in vite, sono poco diversi dalla linea retta, succede che l'ellisse è allo stesso tempo poco diversa dalla linea retta dell'ipotenusa D²i; tanto che gli operai disprezzano questa differenza perché essa è poco sensibile all'atto pratico.

E' apparentemente per questo che P. Deran[5] non ne ha parlato, ma ha fatto sembrare, nella sua maniera di trovare la curva degli ornamenti della scala a chiocciola a giorno, di non aver ben compreso l'argomento, poiché indica un falso metodo per trovare queste cerches, come il Signor de la Rue[6] che nel quartiere delle scale a chiocciola sospese esegue seguendo lo stesso falso metodo,

Non è abbastanza di aver fatto una testa di gradino per condurre bene il nocciolo rampante, bisogna essere guidati da dei cerches a piombo per raddrizzare i piccoli errori che possono generarsi nell'esecuzione di una parte del nocciolo, è per questo che egli conviene di farne un profilo, e anche due, preso su due basi che si incontrano all'angolo retto nella proiezione orizzontale, come in Hg e LK.

Sia, per esempio, la lunghezza LK di un gran diametro di cerchio di rivoluzione trasportata in Fm alla Fig. 181 si descriverà dal centro C il semicerchio rsc[a], che si dividerà in tante parti uguali in modo tale che ci siano dei gironi di gradini nel suo contorno, per esempio in 8, e per questi punti di divisione 1, 2, 3 ecc si tracceranno delle parallele atta retta del centro CX, che rappresenteranno i cambiamenti di posizione dell'arco al centro del nocciolo rispetto ad ogni gradino.

Si porteranno di seguito su questa verticale dal centro CX, le altezze dei gradini salendo ai punti 1,2,3 ecc per i quali si tracceranno delle orizzontali nm, nm, che taglieranno le verticali che si sono appena tracciate ai punti I[a], 2[a], 3[a], ecc che saranno i centri del nocciolo, accanto ai quali se si traccia da una parte e dall'altra il suo semi diametro c[a]m; si avrà da un lato i punti m, m ai colletti dei gradini, e dall'altro i punti n, n, attraverso i quali si tracceranno con un regolo pieghevole le curve uguali mmm e Cnn che saranno le proiezioni verticali delle curve a

5 Citazione di P. Deran

doppia curvatura in ellisse, che passerebbero per i punti di contatto del nocciolo con delle perpendicolari ai diametri nm, nm.
Così facendo un cerche concavo-convesso sulle sue curve, si potrà posarla a piombo sulla retta FC, nella parte del vuoto sotto il nocciolo, e nella situazione in cui la curva deve essere per mezzo di un piombo nr; poi facendo calare una squadra orizzontalmente sui prolungamenti delle rette mn tracciati sulla cerche, si vedrà se il nocciolo pende troppo oppure non abbastanza.

Bisogna notare che questa cerche non può servire che là dove questa è stata fatta, perché la curva C6^n è concava dopo C in n^4; dove bisogna che

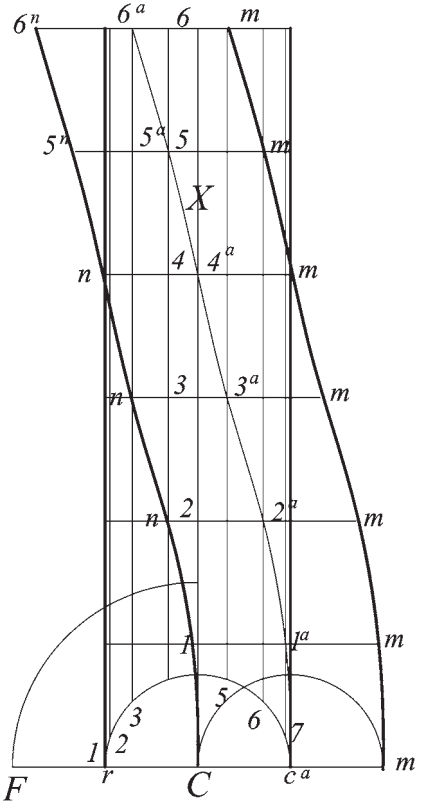


Fig. 181 Creazione del nocciolo tortile interno alla scala

la cerche sia convessa, e al di sopra dove questa curva diviene convessa la cerche al contraria deve essere concava.

Spiegazione dimostrativa

Se si suppone un'ellisse cilindrica di un diametro uguale alla retta *AB*, la cui asse è verticale sul centro *C*, la proiezione orizzontale di quest'ellisse sarà il cerchio *ABN*.
Supponendo ancora un cerchio orizzontale DMEC di un diametro uguale ad AB, e che sia infilato per il suo centro nell'ellisse come un pezzo di cartone in un tirebourre, se si fa muovere questo cerchio elevandolo tutto lungo l'ellisse, in modo che esso conservi la sua situazione orizzontale; descriverà attraverso questo movimento un elicoide che si chiama una colonna tortile, la quale serve da nocciolo alla nostra scala a chiocciola.
E' evidente per questa generazione che il corpo elicoide girando in torno al centro C della proiezione, è attraversato dall'alto in basso dalla retta destra verticale che si può supporre elevata su questo punto C senza che essa entri in questo corpo.
Ne consegue che se il raggio del cerchio generatore DHC fosse più corto di quello dell'ellisse CA o CB, il corpo elicoide lascerebbe un vuoto nel mezzo, nel quale si potrebbe introdurre un corpo cilindrico che avrebbe per asse la verticale sul punto C, e che sarebbe più o meno grosso seguendo la differenza che ci sarebbe tra il raggio cD del cerchio e CA dell'ellisse.
Se al contrario il diametro o il raggio del cerchio generatore cD fosse più grande del raggio dell'ellisse AC, il corpo elicoide sarebbe rinchiuso nel suo centro, ciò vuol dire che non vi si potrebbe introdurre nessuna retta diritta.
Ne consegue che i noccioli giranti e rampanti possono essere variati in un'infinità di modi.
1°. Attraverso l'ellisse centrale, voglio dire nella quale passa il centro del cerchio generatore, la quale può essere più o meno aperta, ciò vuol dire di uno più grande o più piccolo diametro AB nella proiezione orizzontale.
2°. In ciò che essa può essere un cilindro circolare, o un cilindro ellittico.
3°. In ciò che essa può cambiare l'apertura dal basso all'alto, come se essa fosse conica. cioè descrivibile sulla superficie di un cono.
4°. Infine nel fatto che essa possa si aprirà diversamente, come se essa fosse sferica, ciò a dire che essa potrebbe essere descritta sulla superficie di uno sferoide.
Secondariamente il corpo elicoide può variare per la grandezza del cerchio generatore, in modo che la lunghezza del suo raggio renda il corpo elicoide più o meno delicato o massiccio, più o meno aperto o chiuso nel suo centro considerato verticalmente.
Al momento, se al posto di un cerchio generatore, noi consideriamo solo il suo diametro HC, che si eleva in posizione orizzontale sull'ellisse, mantenendo sempre la sua direzione al centro o piuttosto all'asse verticale; si riconoscerà seguendo quella che è stato detto al corollario secondo alla pag. 38 del secondo volume[7], che tutti i punti di questa retta generatrice formano (girando secondo queste condizioni) tante ellissi differenti, tra le quali le più lontane dal centro C sono le più inclinate all'orizzonte, e al contrario i punti che si avvicinano di più descrivono le ellissi più diritte; in modo che quella che è formata dal punto C è infinitamente poco curva, cioè essa degenera in una linea retta verticale, che è una tangente alla rivoluzioni dei corpi elicoidi.
Ne consegue che non si possono usare dei pannelli di sviluppi per quel nocciolo, come si è fatto per la scala St. Giles, perché in quella si tratta

6 Citazione della pg. 38 del secondo volume

solo di alcune ellissi distinte e separate le une dalle altre. Qui ci sono quelle che si formano attraverso i punti di un letto circolare, in modo che non si possano fare che alcuni cerchi di proiezione verticale, come noi abbiamo fatto, i quali non sono sempre immediatamente applicabili alla superficie del nocciolo, ma solamente appropriati a dirigere dei difetti di tamburi attraverso delle perpendicolari tracciate sul contorno del cerchio.

Ciò nonostante quando il corpo elicoide è fermato nel suo centro, come lo sono ordinariamente le colonne tortili, si possono fare dei cerchi applicabili nel piano dell'asse verticale della colonna, e questa precauzione conviene molto per un esatta esecuzione.

Si vedono in Alsazia molti di questi tipi di scale a nocciolo rampante nelle vecchie case dei privati, al centro delle quali si fa pendere una corda per appoggiarvisi, perché il nocciolo è troppo grosso perché possa impugnarla, ma questa precauzione che è buona diviene inutile per le persone un po' delicate sulla proprietà, che hanno ripugnanza a portare la mano su una corda grassa e disgustosa.

COROLLARIO

Da lì si può tracciare il metodo di fare una colonna tortile, che non è altro che un nocciolo rampante e girante, le cui rivoluzioni sono un po' più serrate e frequenti che nei montanti delle scali che non sono niente più di una rivoluzione e mezzo ad ogni piano al posto, del quale una colonna tortile ne fa almeno 6 o 6 e mezzo dell'altezza di 7 o 8 dei diametri della proiezione.

Ne consegue che le rivoluzioni delle viti delle scale essendo scartate, il nocciolo diviene una colonna poco ritorta.

Quel nocciolo differisce anche dalla colonna ritorna poiché le sezioni orizzontali sono dei cerchi le cui proiezioni si toccano, come si vede i cerchi Cg e CH si toccano in C, al posto di quelli delle proiezioni delle sezioni orizzontali della colonna tortile si incrociano più spesso dei tre quarti del loro diametro.

Così si può considerare i noccioli rampanti delle viti, all'obliquità, come una pila di dame da gioco, girando attorno ad una retta a piombo; ma la stessa comparazione non conviene sempre e a tutti i tipi di colonna tortile, perché quando le rivoluzioni sono ineguali, il loro diametro cambierebbe non solamente nella proiezione ma anche nell'elevazione.

E' per questo che bisogna considerarlo come una sequenza di palle, per esempio, dei grani di coronamento infilati in una tirebourre, che si coprirebbe in seguito ad una superficie curva tangente a queste palle; ciò si vedrà più chiaramente quando parleremo delle colonne ritorte a rivoluzioni ineguali, di cui noi doneremo un esempio singolare più per curiosità che per consigliarne l'uso.

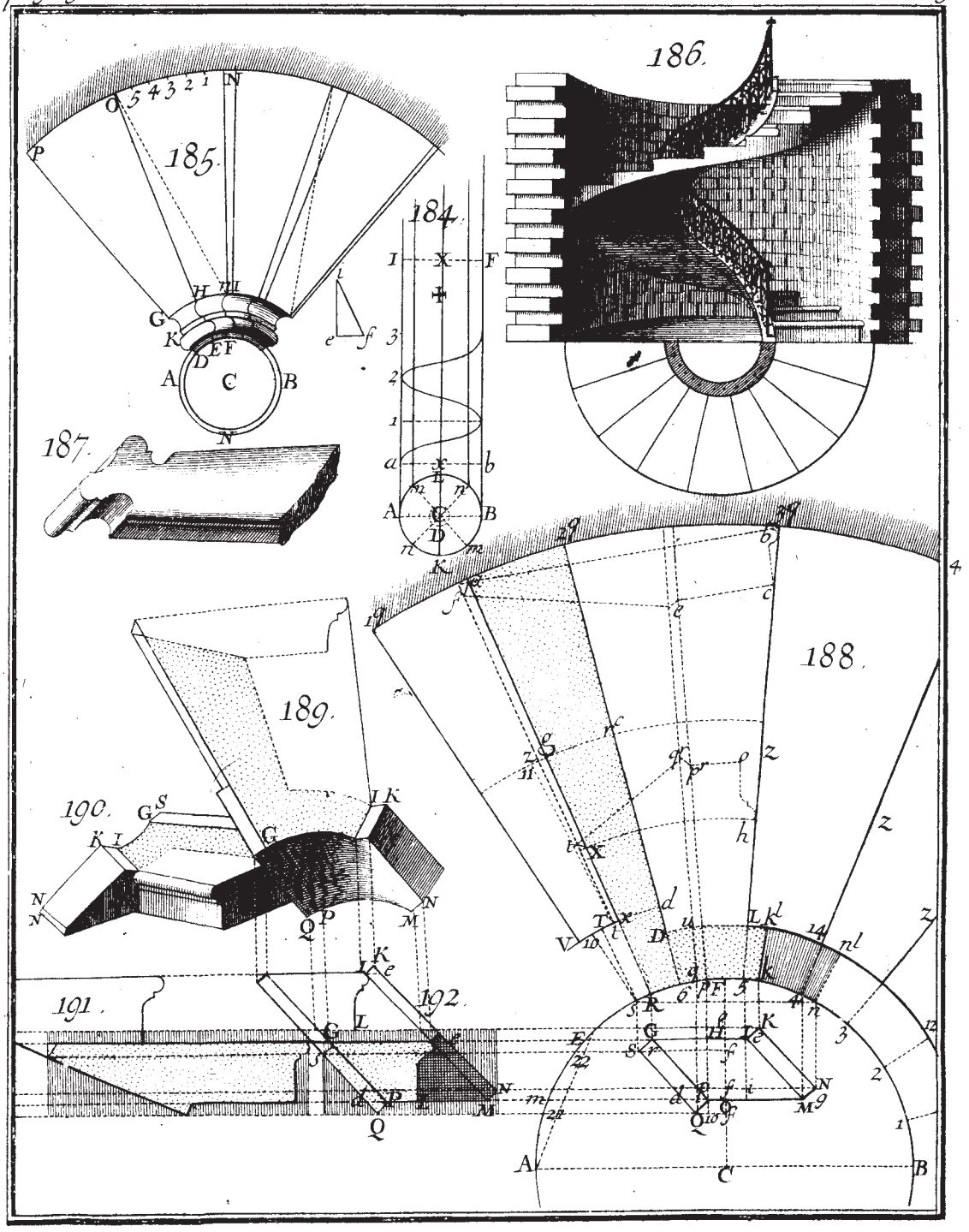
Si può ancora considerare la colonna tortile come la traccia di un movimento di un cerchio infilato in un'ellisse attraverso il suo centro, supponendo il piano di questo cerchio sempre perpendicolare alle parti infinitamente piccole di queste ellissi, al posto di quelle che noi abbiamo supposte di livello per la generazione del nostro nocciolo di vite girante e rampante.

Ne consegue che le sezioni orizzontali della colonna tortile formata per questa generazione, non sono più dei cerchi come in questo nostro nocciolo girante, ma degli ovali più o meno allungati, seguendo l'obliquità dell'ellisse a riguardo dell'orizzonte.

E' per questo che quanto si vuole fare l'elevazione di una colonna tortile dopo aver tracciato l'ellisse centrale, bisogna descrivere più cerchi uguali lungo questa ellisse; le curve tangenti tracciate attraverso le estremità dei loro diametri daranno in proiezione verticale i contorni della colonna tortile, come si vede alla figura 207.

page 301.

Pl. 105.



PRATICA DEL DISEGNO PER TUTTI I TIPI DI SPIRALE

Si comincerà a fare un corpo cilindrico, se si tratta di una spirale o di una colonna senza rastremazione, e per una colonna tortile si farà un corpo conoide come gli architetti richiedono per le colonne semplici rastremate dopo il terzo della loro altezza o rigonfiate dalla base fino a un terzo dell'altezza e rastremate superiormente, in cui il diametro sarà regolato dalla proporzione che dovrà avere con l'altezza della colonna, come ad esempio un settimo o un ottavo di tale altezza e dalla misura che si vuol dare all'allontanamento di ciascuna rivoluzione della colonna rispetto all'asse che si suppone al centro.

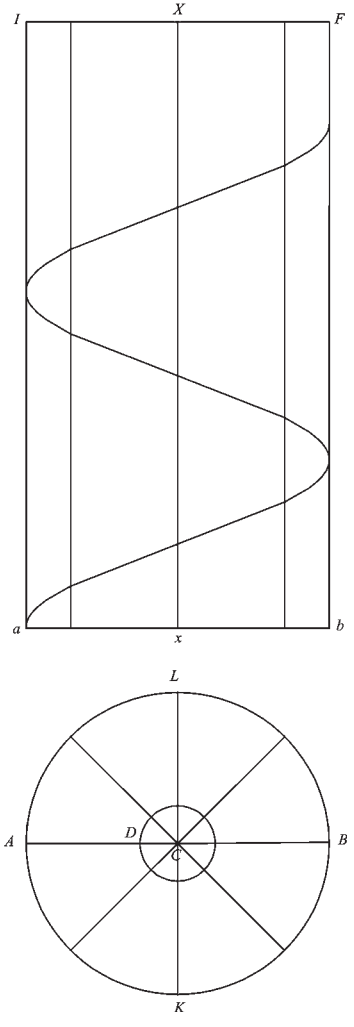


Fig. 184 Schema di costruzione della spirale realizzata dividendo in otto settori la circonferenza di base

Sia per esempio un cilindro a b I F Fig. 184 Tavola 105 in cui il piano orizzontale che lo seziona perpendicolarmente all'asse x X è il cerchio ALBK di diametro AB e centro C, si dividerà il raggio AC in tre o quattro parti per tracciare dal centro C un cerchio di raggio DC, quarta o terza parte del raggio AB, secondo che si voglia la colonna più o meno tortile.

Si divideranno questi due cerchi concentrici in un certo numero di parti a piacere, per esempio in otto con quattro diametri AB nn LK mm e con i punti A n L m B ecc., si condurranno sulla superficie cilindrica delle parallele all'asse come nel Prob. 31 del Libro secondo, pag. 215 [1]; in seguito si dividerà l'altezza AF in sei o sei parti e mezzo, per formare altrettante rivoluzioni, e, poiché il contorno della base è stato diviso in otto parti uguali, si dividerà anche l'intervallo aI in otto parti uguali, e il tutto di conseguenza in quarantotto, e, cominciando dall'asse sulla proiezione e da una parallela qualsiasi sul contorno, si riporteranno successivamente su ciascuna delle circonferenze parallele alla circonferenza di base, una di queste otto suddivisioni in più della precedente, per esempio, una sulla prima, due sulla seconda, tre sulla terza e così di seguito; e si avrà un'elica che farà sei rivoluzioni in quarantotto parti di altezza, o sei e mezzo in cinquantadue.

Si traccerà per parti questa curva con un regolo curvo, da un punto all'altro fissati sulla superficie cilindrica; e sulla proiezione verticale o profilo del disegno si traccerà l'elica, dal centro dei punti della quale, come centri di ciascuna sezione circolare, si condurranno a destra e a sinistra delle linee uguali, che rappresentano i mezzi diametri di queste sezioni, le quali daranno dalle due parti i punti della curva esterna che si traccerà a mano.

Considerando questa curva come il contorno di una sezione piana di una colonna tortile tagliata seguendo il suo asse, servirà come traccia per tagliarla nella pietra o nel legno.

Se la colonna non è rastremata, la traccia di una sola rivoluzione sarà sufficiente, ma se è rastremata o rigonfiata, questa traccia dovrà essere segnata con una incisione su tutta l'altezza della colonna, perché i contorni di ciascuna rivoluzione sono diversi tra loro, alcuni più scostati altri più vicini al loro asse; in modo che la colonna tortile degli architetti non è una superficie elicoidale propriamente detta, che è composta di eliche, ma una doppia Lumaca, in cui le rivoluzioni dal terzo dell'altezza in alto e in basso si stringono sempre più, secondo una progressione che è quella della Concoide di Nicomede, come l'ha trovata Blondel [2], seguendo la quale si formerà il corpo conoide che serve di preparazione per contornare e scavare le ondulazioni delle rivoluzioni della colonna

[1] Rif. al Tomo II del presente Trattato.
[2] Rif. a Blondel.

tortile, come si può vedere nei libri d'architettura, in particolare in quello di Daviler [3].

L'applicazione del tracciamento sul legno o sulla pietra di cui sarà costituita la colonna tortile non consiste che nel tracciare linee che non sono parallele all'asse, poiché essa è rastremata dal suo terzo in su, e spesso anche dal suo terzo in giù, se essa è rigonfia, ma che sono in una sezione per l'asse, in modo che è necessario che i diametri o raggi che terminano in queste linee nella base superiore o inferiore siano su uno stesso piano, cosa che si ottiene, come abbiamo detto nel Prob. I di questo Libro, cingendo con due regoli posti l'uno di fronte all'altro in modo che non si incrocino; dopo di che con un regolo curvo si tracciano le linee curve da una base all'altra, e, avendo fatto la traccia del contorno dell'elica seguendo queste linee, si incide il legno o la pietra, in modo che la sagoma del contorno della sezione per l'asse vi si possa applicare esattamente, tenendo sempre il piano di tale sezione passante per l'asse, cosa che si fa facilmente, poiché non c'è che da posare sulle due basi della colonna due regoli piani passanti per il centro e aggiustando la tavola dove si è tagliata la sagoma seguendo questi due regoli.

In questo modo si può evitare di fare un modello in grande per guidare i tagliatori, come esige Daviler; perché è impossibile sbagliare se sono altrettanto delle sezioni che delle parallele, cioè delle curve alla superficie della colonna che è un fusto cilindroide che sono delle sezioni passanti per l'asse, cosa che non è né molto difficile né molto scomoda, perché se se ne fanno otto, vi sono otto tavole con contorni differenti.

Il solo caso in cui il modello in grande è necessario è quando il materiale è prezioso, come il marmo, e le incisioni della colonna sono riempite di ornamenti, come tralci di vite rampanti con le loro foglie e frutti. L'esecuzione di questo tipo di colonne è abbastanza frequente in Francia, ma ancora di più in Spagna e in Portogallo, dove si vedono in tutte le chiese di queste colonne così ornate di viti mescolate a spighe di grano, per servire da simboli dell'Eucarestia.

Benché si possa decorare la casa del Signore, si può dire che la semplicità delle chiese dei primi secoli, non ammettendo tutte quelle cose che distraggono lo sguardo, sia secondo me molto più maestosa e adatta a ispirare il raccoglimento così necessario alla preghiera.

[3] Rif. a Daviler.

TERZA VARIAZIONE

SULLA SCALA CIRCOLARE A POZZO O CON L'ASSE VUOTO

Allorché si vuole eliminare la colonna centrale di una scala elicoidale, è necessario considerare qual e' la grandezza dell'apertura orizzontale che dovrà rimanere nel luogo che avrebbe occupato la colonna; e in funzione della grandezza di tale apertura, è necessario operare diversamente per supplire all'appoggio che essa avrebbe dato alla testa degli scalini.

PRIMO TIPO DI SCALA ELICOIDALE

Quando il vuoto al centro della scala è di piccolo diametro, come per esempio da quattro a otto o dieci pollici, si può supplire all'appoggio che la colonna avrebbe dato alla testa degli scalini, con un piccolo allargamento della testa che si orna di una grossa modanatura praticata nella stessa pietra in aggetto, come è rappresentato nella ***Fig. 187*** in prospettiva; in questo modo ogni scalino è appoggiato da entrambe le estremità, la coda nel muro dove è incastrata e la testa sulla modanatura che forma un "limon" [4] le cui parti aderenti al gradino sono posate le une sulle altre secondo piani di posa orizzontali, poiché l'elica che formano le modanature, essendo molto ripida, voglio dire, avvicinandosi molto alla verticale, non forma angoli troppo acuti con i letti orizzontali delle teste dei gradini, cosa che non succede quando il vuoto centrale è molto grande, perché in quel caso le eliche diventano più inclinate rispetto alla linea orizzontale e di conseguenza formano con essa angoli più acuti.

Così bisogna considerare ogni scalino come composto da due parti in un sol pezzo di pietra, il gradino composto di alzata e pedata, che devono fare continui salti, e la parte che porta la balaustra che non deve fare salti, ma una salita continua attraverso i vuoti triangolari che formano i gradini come si è supposto.

Sia il cerchio ABN, la proiezione orizzontale del vuoto che si vuole lasciare in mezzo alla scala nel luogo che dovrebbe occupare l'asse.

Si farà il pannello dello scalino con l'ornamento delle modanature che dovranno formare il "limon", nelle quali conviene praticare un grande toro rotondo, perché si possa far correre la mano se ci si vuole appoggiare salendo o scendendo, e per liberare questo toro conviene che accanto ci sia un grande guscio che segni il bordo dello scalino dove deve terminare la alzata che è anche ornata di un quarto di cerchio sull'angolo che viene a finire a questo guscio, come si può vedere nella ***Fig. 187*** in prospettiva.

Essendo fatto il pezzo come si conviene alla grandezza della gabbia della scala e al numero di scalini di ogni giro, e essendo la pietra dello spessore che esige l'altezza di ogni scalino, lo si poserà sul letto di posa superiore, vale a dire sulla pedata per tracciarvi il contorno come in POED; si farà nel contempo attraverso un ritorno ad angolo retto sul

[4] E' la parte terminale del gradino sulla quale si innesta l'eventuale balaustra.

punto E un incastro al letto di sopra, che servirà per posare il pezzo dopo

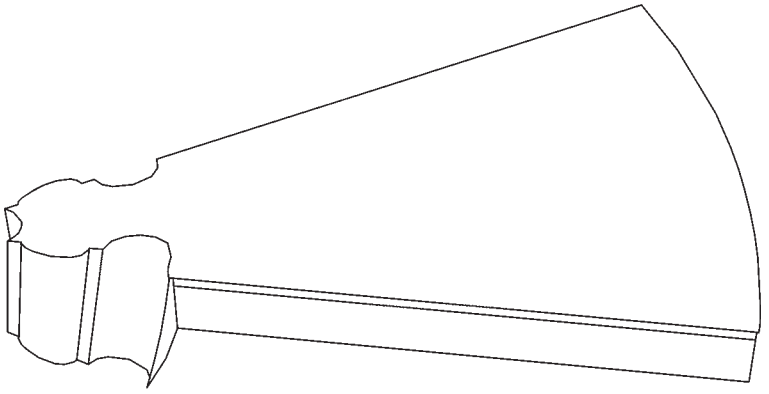


Fig. 187 Vista prospettica di un singolo gradino con la modanatura da realizzarsi in un unico pezzo di pietra.

che avremo rovesciato la pietra; lo stesso si farà nel punto O.
In questa seconda situazione si poserà il pannello in una maniera diversa dalla prima, piazzando il punto P sotto il punto O, vale a dire nel punto che sta sotto ad angolo retto, e il punto D sotto il punto E, o, che è la stessa cosa, sulla proiezione, e in questa posizione si traccerà la testa EF più avanti della prima DE dell'intervallo di uno scalino al suo bordo, e questo avanzamento lo si prende nello spazio triangolare OFE che forma il restringimento dello scalino OE.
Essendo così tracciata la pietra, si toglierà tutta la parte compresa nel triangolo OHn, per formare ad angolo retto l'alzata del gradino, e la modanatura lasciando la parte EF aggettante in quel punto in cui, unito alla precedente DE si scaverà ad angolo retto la parte concava DEF per mezzo di un cerchio formato sul semicerchio AEB.
Quindi avendo rettificato l'arco di cerchio EF lo si riporterà a parte in ef , poi avendo fatto ei perpendicolare sul punto e e uguale all'altezza di un gradino, si tirerà l'ipotenusa if che sarà lo sviluppo dell'elica che forma il "limon" dal letto di sotto a quello di sopra, così si traccerà questo triangolo su del cartone per essere piegato e applicato nello scavo cilindrico della testa affinché si possa tracciare l'elica che si forma al filo della modanatura, e in questo modo le altre eliche delle modanature parallele di sopra e di sotto, o meglio avanti e dietro.

Si vede che questa costruzione cambierebbe un po' se la proiezione orizzontale del vuoto della scala fosse ellittica anziché circolare come abbiamo supposto, poiché bisognerebbe ogni volta cambiare la testa del pannello che avrebbe diverse sporgenze, diversamente che nel caso del vuoto circolare, nel quale basta rovesciarla e avanzarla. E' un avvertimento che il P. Deran e M. de la Rue [5] hanno omesso.

Si presenta una difficoltà nel susseguirsi di queste teste allorché si fanno dei pianerottoli. La prima è la difformità delle gobbe che si formano perché essendo lo spazio occupato dalla pedata più grande degli altri, il "limon" che passa per due spigoli successivi non e' più continuo in modo uniforme, ma diventa molto più inclinato sul piano a seconda della maggiore o minore ampiezza della pedata.
A questo punto c'e' un altro inconveniente, cioè che il termine del bordo inferiore diventa troppo acuto e quindi è soggetto a rompersi.
Per rimediare alle gobbe ci si prepara da lontano a correggerla; invece di avanzare la testa che sporge davanti alla alzata solo della larghezza della pedata, la si fa avanzare un po' di più, per esempio di un sesto in più, se si vuole recuperare eccesso di ampiezza della pedata su sei gradini, tenendo sempre la testa lungo la circonferenza del vuoto centrale della

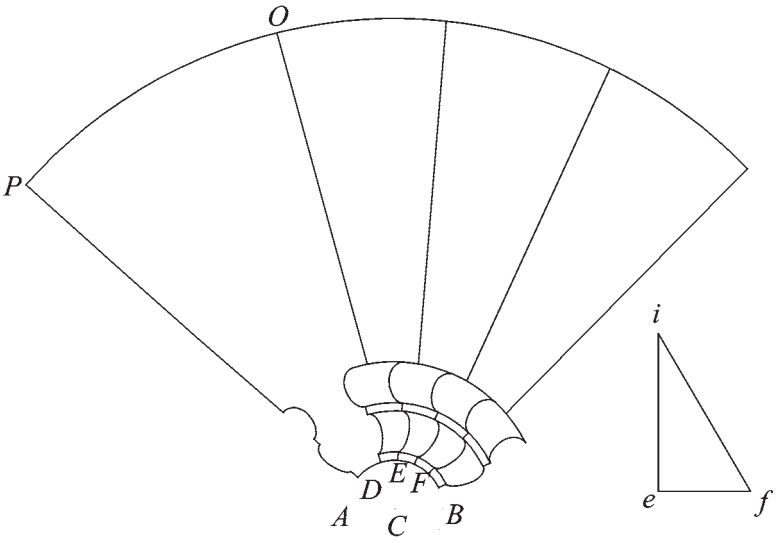


Fig. 188 Pianta di un settore di scala che mostra la sovrapposizione dei singoli conci.

scala, e per questo effetto si conducono le divisioni dalla testa alla coda per avere raggi che tendono esattamente al centro.
E' tuttavia vero che queste precauzioni non fanno altro che lenire il difetto e diminuire un po' la difformità delle gobbe che non si può eliminare totalmente. Se si ama la perfezione e l'uniformità non si devono fare pianerottoli in questo genere di scale.

OSSERVAZIONI SULL'USO DELLE SCALE CIRCOLARI A POZZO E DELLE ALTRE A NOYAUX PLEINS (OVVERO CON UNA COLONNA AL CENTRO)

Allorché si ha poco spazio per costruire una scala, si deve preferire la scala circolare a Pozzo piuttosto che le altre, perché si guadagna lo spazio che occuperebbe una colonna, il quale spazio dona una grande facilità al passaggio del corpo all'altezza dei gomiti e delle spalle; ma non conviene che il diametro del vuoto sia molto grande, perché ispira paura di caderci dentro nel caso che si faccia un passo falso.
Quelle che ho visto, delle piccole ma più perfette di questo genere di opere, sono le piccole scale di marmo che sono costruite sui pilastri della basilica di San Giovanni in Laterano Roma, che hanno per "limon" delle modanature vicine a quelle di questo profilo, sulle quali si scorre la mano per appoggiarsi.
Sebbene nel caso di assi inclinati non ci sia alcun vuoto a piombo, si è ancora meno immuni dalla paura di cadere rispetto alle scale circolari a Pozzo, perché non presentano nessuna di queste modanature per appoggio, ma un corpo rotondo e troppo grosso perché si possa usare, così hanno il difetto dell'asse vuoto senza averne la bellezza, che consiste nel vedere dall'alto in basso tutta la scala per mezzo di questa piccola apertura a forma di pozzo.

SECONDO TIPO DI SCALA ELICOIDALE

"DOVE LE TESTE DEGLI SCALINI FORMANO UN "LIMON"

[5] Rif. ai Trattati di P.Deran e M. de la Rue.

ADATTO A PORTARE UNA RINGHIERA DI FERRO”

Quando le scale circolari a pozzo sono aperte nel mezzo più che 9 o 10 pollici di diametro, e gli scalini sono più lunghi di 3 piedi, non ci si può difendere dalla paura e dal pericolo di cadere nel vuoto senza una rampa di ferro che serve da appoggio e da parapetto.
Allora al posto di fare un “limon” a toro, come nel testo precedente, bisogna farlo piatto al di sopra, per applicarci la ringhiera o la balaustra, e una testa a piombo abbastanza spessa che serva da base e da sostegno agli scalini, i quali ne hanno più bisogno di quelli di una piccola scala circolare a pozzo , perché le eliche dei “limon” sono necessariamente meno ripide, nel rapporto delle distanze dal bordo interno all’asse verticale dell’elica, avendo supposto le altezze degli scalini pressoché uguali in tutte e due le specie di scale elicoidali.

Da questa differenza d’inclinazione del “limon”, deriva che gli angoli delle loro sezioni orizzontali, cioè dei letti con la parte inclinata, diventano anche loro molto più acuti che nelle piccole scale, dove il “limon” è molto vicino all’asse verticale, supposto in mezzo al vuoto; questi angoli non avrebbero nessuna resistenza se si posassero le teste degli scalini secondo piani di posa orizzontali.
Per rimediare a questa debolezza dell’angolo acuto siamo obbligati a fare un taglio perpendicolare alla faccia superiore del “limon”, cosa che rinforza ancora la costruzione poiché questa superficie di taglio impedisce alla testa dello scalino di liberarsi scivolando in avanti o indietro nel suo letto.
Alle due differenti costruzioni di cui abbiamo parlato se ne può aggiungere una terza che consiste nel fatto che nelle piccole scale elicoidali si dà poca sovrapposizione ai gradini poiché si lasciano in vista i salti da uno scalino all’altro nel paramento inferiore che si chiama conchiglia.
Ma nelle grandi scale elicoidali, ornate di balaustre, conviene fare in modo che la superficie della conchiglia sia senza salti, come nelle due scale della Cappella di Versailles, che presenta una grande sovrapposizione dei gradini che si allargano dalla testa alla coda in ragione della distanza dal centro della scala come mostriamo in seguito.
Sia (Fig. 188) il semicerchio AFB la proiezione orizzontale del vuoto della scala circolare, la cui circonferenza è stata divisa in un certo numero di parti, per regolare la grandezza degli scalini, a cominciare da dove si ritiene opportuno, ad esempio ai punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, per i quali si tracceranno dal centro C le rette 3Z, 4Z, 5Z, 6r^{c}, ecc. fino al muro della tromba della scala che si può supporre di qualsivoglia forma, rotonda, quadrata, poligonale; noi ne segniamo qui una parte solo per indicare le direzioni che si prolungheranno nel cerchio o nel quadrato.
Si determinerà di seguito lo spessore che si vuol dare al “limon” come 6D per segnare il lato interno, attraverso un arco di cerchio DL 12 concentrico al cerchio AFB, i quali archi comprenderanno la sua parte superiore sulla quale si deve posare la balaustra o parapetto; ma, come conviene, fare la parte inferiore del “limon” più larga per conferirgli più solidità, se ne determinerà la larghezza con un arco concentrico più ampio dal centro C come dxTV, sul quale si determinerà la sovrapposizione di uno scalino sull’altro tale che si giudicherà conveniente, osservando che questa contribuirà ancora di più alla solidità della scala che sarà grande perché si allargherà la coda che è incastrata nel muro e il “limon” alla testa del gradino.
Supponendo la sovrapposizione determinata da circa metà dell’arco 1 2 fino al punto x, si traccerà dal centro C la retta Rxg che sarà il bordo superiore della parte posteriore di questa sovrapposizione.
Si tratta ora di fare la sagoma della testa del “limon” che comprende due gradini e la sovrapposizione di un pezzo sull’altro, vale a dire gli archi FR e F4, che qui si suppongono uguali, prendendo il punto F in mezzo.
Avendo preso a piacere il punto H sulla linea CF vi si traccerà una perpendicolare indefinita GHI , e, avendo portato da H a O l’altezza di uno scalino, si condurrà una parallela PM dal punto O, e poi si svilupperà[6] l’arco FR sulla retta HG che si farà uguale e che si riporterà da O in M; allo stesso modo l’arco F5 da H in I e da O in P; il romboide GPMI sarà lo sviluppo [7] della superficie concava della testa del gradino che porta il “limon”, dall’angolo vivo del passo inferiore 5 3^{q}, fino a quello del passo superiore 6 d r^{c}. Ma, giacché si vuole, per aumentare la solidità e la bellezza, che questo “limon” superi l’arresto dello scalino e faccia un

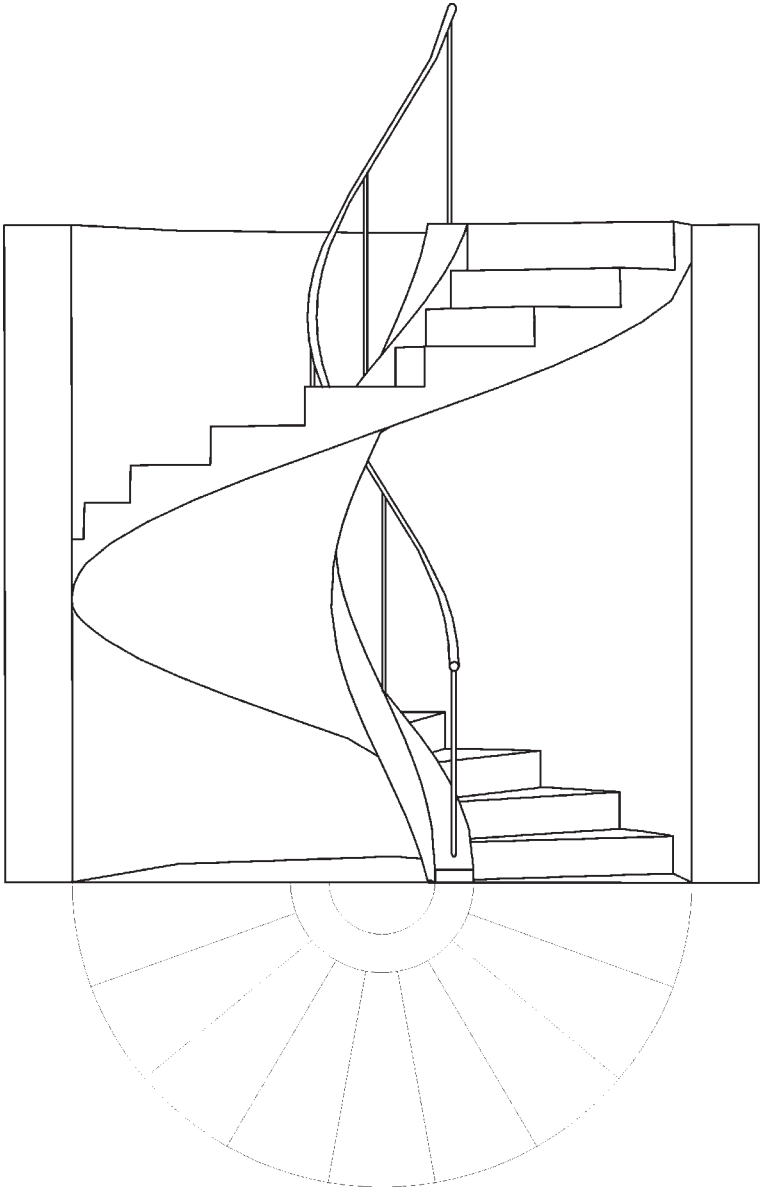


Fig. 186 Vista prospettica del secondo caso di scala elicoidale con ringhiera

dente di sopra e uno di sotto, si aggiunge una lunghezza di taglio nella sezione perpendicolare al “limon” in IK sopra e in GS sotto, attraverso l’estremità della quale lunghezza si tracciano delle parallele KN e SQ, che formano, per l’una e per l’altra, i rettangoli MK e QG.
Dal punto G si abbasserà una perpendicolare su Sf o su GI sua parallela, che intersecherà la linea Sf in r; si porterà Sr in Rs e in pq, e lo stesso in 5k e in 4n [8], se si fa il dente superiore uguale all’inferiore, e per i

punti s, q, k, n, si condurrà la linea sT parallela a Rg, qu parallela a pp^{r}, kk^{l} parallela a 53^{q}, e nn^{l} parallela a 4z e si avranno tutti i punti ai quali deve adattarsi il pannello di testa ritagliato in un materiale flessibile e applicato alla superficie concava del "limon".
Bisogna osservare che, poiché il dente SGPQ sporge al di sotto della superficie dei gradini che forma la conchiglia di una certa quantità a piacere come Tt, metà di Tx [9], si condurrà dal punto t la linea tz parallela a xg che segnerà la larghezza del taglio che si deve fare al di sotto del gradino per eliminare l'angolo troppo acuto che formerebbe l'incontro della "conchiglia" con la direzione orizzontale della pedata.
Si farà lo stesso per il dente che forma la "conchiglia" con il taglio del gradino successivo, che si e' segnato qui con q^{r} p^{r} su un profilo del gradino capovolto in tXhop^{r}q^{r}t , che è messo là senza bisogno di segnarvi la destinazione delle linee del disegno.
Da un'altra sezione della coda dello scalino raddrizzata in abcdefa [10] si può vedere il rapporto e l'uso delle rette della proiezione che si può comparare alle sezioni delle Figure della testa 192 e della coda 191, di due scalini posti uno sull'altro.
Bisogna ancora sottolineare che abbiamo fatto tutte le linee di proiezione parallele tra loro per non farle storte, per esempio abbiamo fatto sT parallela a Rx, e tz parallela a xg; sebbene seguendo le buone regole, esse dovevano essere tracciate tutt' e due dal centro C perché gli intervalli 10x e sR essendo diversi e servendo di base a due altezze uguali a Gr nell'alzato della sezione della testa, la superficie che passerebbe per queste linee sarebbe elicoidale e non piana nei modi che sono stati spiegati all'inizio del Tomo II p. 37 [11].
Si farà lo stesso del piccolo spigolo xt, che si allargherebbe vicino alla coda come si vede in 11g e anche in KL [12], nI^{4}qu [13] e pp^{r}; niente vieta che comunque si possano fare non parallele; le giunture saranno più regolari, l'esecuzione sarà un po' meno facile, per il resto si devono regolare le giuste linee di proiezione sugli spigoli di testa in vista.

TAGLIO DELLA PIETRA

Prima di regolare lo spessore della pietra che dovrà servire da scalino bisogna considerare che, dato che vogliamo che la testa che porta il "limon" sia della stesso pezzo del resto, saremo obbligati a farla più alta di quanto sarebbe necessario se la testa fosse un pezzo distinto, poiché le parti del "limon" IK, SG, QP, MN, che sono spigoli, sporgono dai letti superiore e inferiore dello scalino, cosa che obbliga il tagliatore a fare degli avanzi di preparazione che sono più alti dei veri letti di sopra e di sotto dell'altezza Ke [14] per il letto di sopra e 7Q [15] per quello di sotto, che bisognerà tagliare nell'esecuzione ad eccezione dei piccoli prismi triangolari il cui profilo è il triangolo IKe per il letto superiore (Figg. 188 e 192) e il triangolo dQP per il letto inferiore.
Si comincerà quindi a fare un unico pezzo di tutto lo scalino che comprende la testa LnnFstz [16] con la coda che non abbiamo segnato qui e il ritorno ZL e, avendo tracciato i letti superiore e inferiore di questo pannello paralleli, si eliminerà parallelamente tutta la pietra che va al di fuori del tracciato e si applicherà al paramento concavo della testa del "limon" il pannello SGIKNMPQ tracciato su cartone per applicarlo a questa superficie cilindrica facendo pressione per farlo aderire alla cavità; in questo modo se ne traccerà il contorno, seguendo il quale si taglierà la pietra secondo il piano perpendicolare, tenendo sempre uno dei bracci della squadra parallelo alla linea media OH e con l'altro seguendo il profilo mistilineo 3 4 7 [17].
Si potrebbe per maggior sicurezza fare il pannello dell'interno del "limon" sviluppando l'arco k^{l}n^{l} per farne la base di un triangolo rettangolo che avrebbe per altezza quella dello scalino più il la lunghezza dello spigolo Ke; l'ipotenusa di questo triangolo fatto di cartone applicato e piegato sulla testa dello scalino formerebbe il profilo dell'elica. Le Figg. 189, 190, 191 e 192 servono da supplemento a questa spiegazione.

La figura 189 fa vedere la testa di uno scalino dal di fuori con la parte di "limon"che esso porta, in prospettiva, con i piccoli spigoli IK e SG [18] sul letto superiore e QP e MN sul letto inferiore.
La figura 190, segnata con le stesse lettere, mostra la stessa testa dello scalino vista dall'interno pure in prospettiva.
La figura 191 mostra in sezione come gli scalini vengono messi uno sull'altro verso la coda, dove si è differenziato con un tratteggio la parte di pietra che deve essere tolta alla prima sbozzatura e con un puntinato la sezione della parte che resta.

La Fig. 192 mostra in sezione la sovrapposizione di uno scalino sull'altro alla testa che è molto più piccola della coda, e la sporgenza triangolare KLN [19] del "limon" che chiude l'angolo concavo tra i gradini, la quale è segnata da un tratteggio incrociato; questa parte è stata anche rappresentata nella Fig. 190. Le parti a forma di parallelogramma IN [20] e GQ rappresentano i denti che sporgono al di sopra dei letti degli scalini e al di sotto del paramento inferiore della conchiglia.

OSSERVAZIONE SULLA TEORIA DI M. DE LA RUE

Penso di dover far notare qui un errore del trattato di M. de la Rue [21], il qule può non avere grosse conseguenze se gli scalini sono in gran numero ad ogni giro della scala e se il vuoto al centro è di grande diametro, ma che è ancora meglio non commettere.
Questo autore traccia il pannello della testa dello scalino per mezzo di una proiezione; ora è evidente che il pannello flessibile formato su tale proiezione, una volta applicato alla superficie cilindrica concava del vuoto della scala, sarà troppo corto della differenza tra la corda sn e l'arco sFn, che si può vedere in questo esempio.
In secondo luogo è chiaro che la proiezione di una superficie piana su un arco, o di un arco su una superficie piana, non dà su questa superficie parti proporzionali alle suddivisioni dell'arco, poiché le parti di questo arco sono tutte diversamente inclinate rispetto alla superficie o alla linea che serve da base, di conseguenza le une si accorceranno di più, le altre meno nella proiezione; si può per esempio vedere che l'arco S6 si accorcerà di più dell'arco uguale 65 che è quasi parallelo a GI.
Infine se si suppone la cavità verticale sFn sezionata da un piano inclinato all'orizzonte come KN, che sia perpendicolare al piano verticale passante per AB, la sezione di questo piano sarà un'ellisse, e per la natura della scala, lo spigolo del "limon" deve essere un'elica.
Di conseguenza la pratica del trattato di M. de la Rue è falsa in tutti i

[6] L'operazione descritta è in realtà la proiezione dell'arco FR sulla retta HG.

[7] Il quadrilatero GPMI così ottenuto è in realtà la proiezione su un piano della testa del gradino.

[8] In generale la perpendicolare condotta dal punto M non passa per il punto 4. Nel disegno la nuova intersezione si è chiamata 4'.

[9] Come mostra il disegno, questa relazione metrica in generale non sussiste.

[10] Nella Fig. 188 si è aggiunta la lettera d mancante.

punti.
Quanto alla giustezza di ciò che vengo scrivendo, essa è chiara per la costruzione, e per l'esposizione di ciò che bisogna fare, attraverso la quale abbiamo cominciato a dare ragione degli sviluppi dei letti orizzontali circolari, dei piccoli tagli perpendicolari e delle eliche che forma il profilo del "limon"; non sembrerebbe necessario aggiungere altre dimostrazioni.

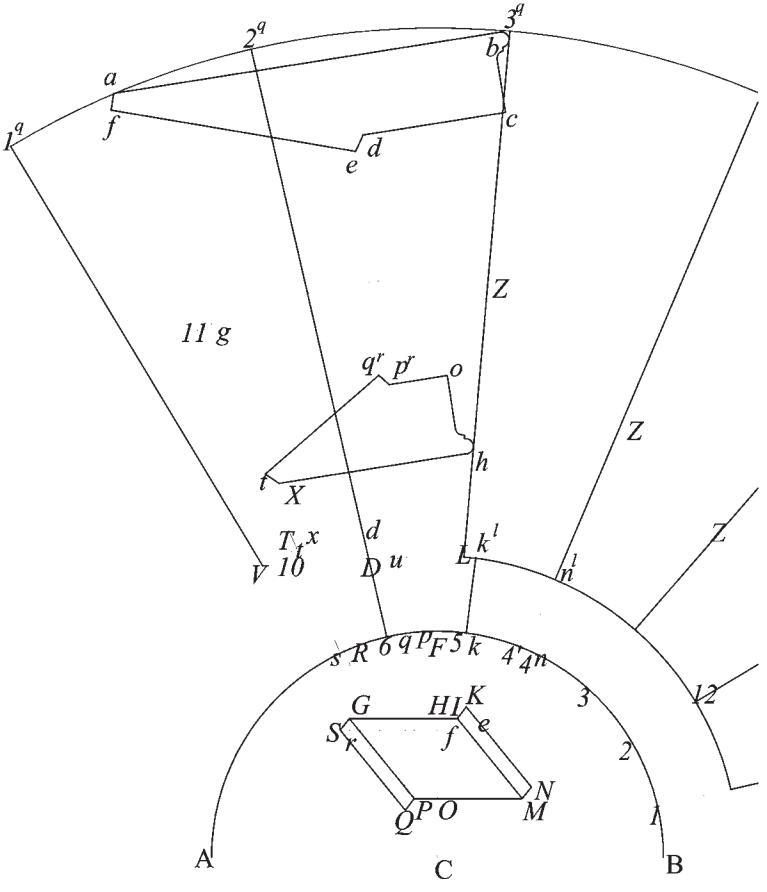


Fig. 188 Pianta di un settore di scala con sezioni del gradino e proiezione della testa del concio.

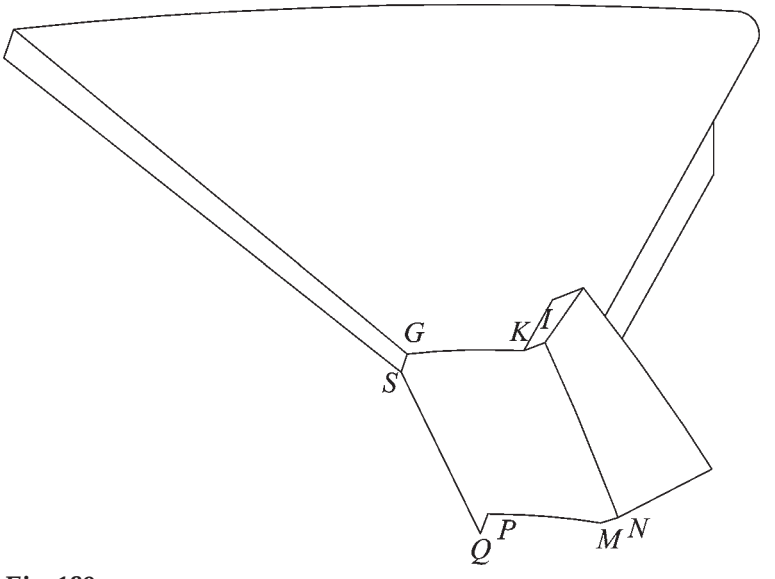
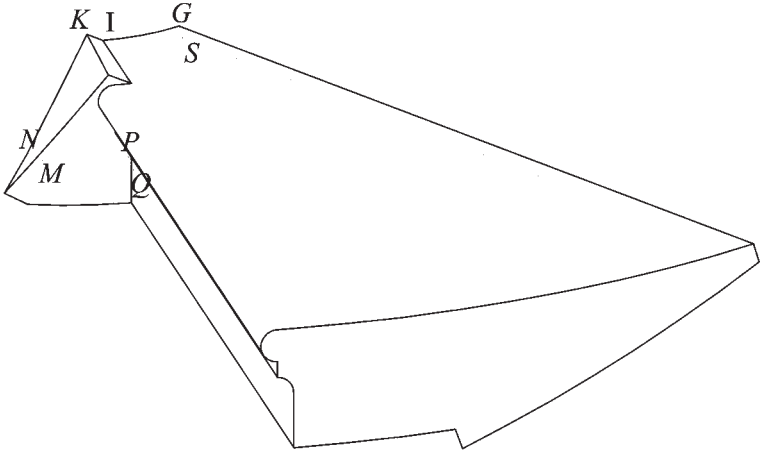


Fig. 189 Un singolo concio visto dalla parte interna della scala.

[11] Rif. al Tomo II del presente Trattato.
[12] Il segmento KL non esiste nella figura, si tratta in realtà del segmento kk[1].
[13] Il segmento nI[4]qu non esiste nella figura, si tratta in realtà del segmento nn[1].
[14] Nella Fig. 188 si è aggiunta la lettera e mancante.
[15] Ciò che viene indicato con il numero 7 è in realtà il punto d della Fig. 192.
[16] Si tratta della testa del gradino, definita dai punti SGIKNMPQ.



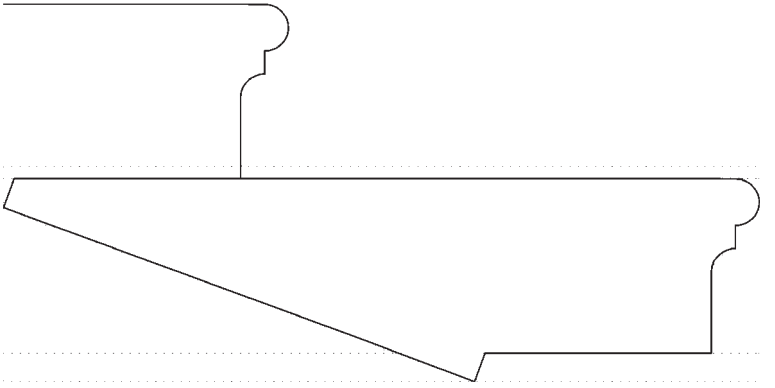


Fig. 191 Sezione in prossimità dell'incastro, che mostra la sovrapposizione di due conci e la parte di pietra da asportare dal pannello di partenza evidenziata dalla rigatura verticale.

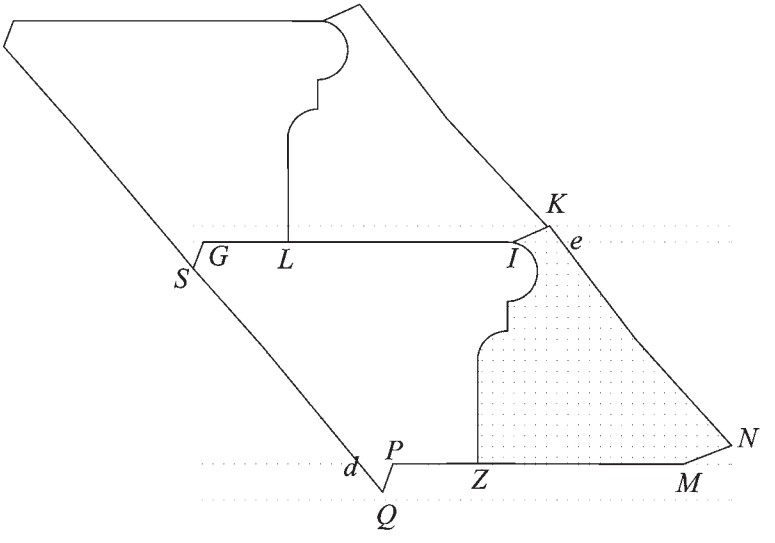


Fig. 192 Sezione in prossimità della testa, che mostra la sovrapposizione di due conci,

[17] Non sono individuabili i punti 347. Il profilo in questione e' la linea spezzata SGIK ovvero QPMN.

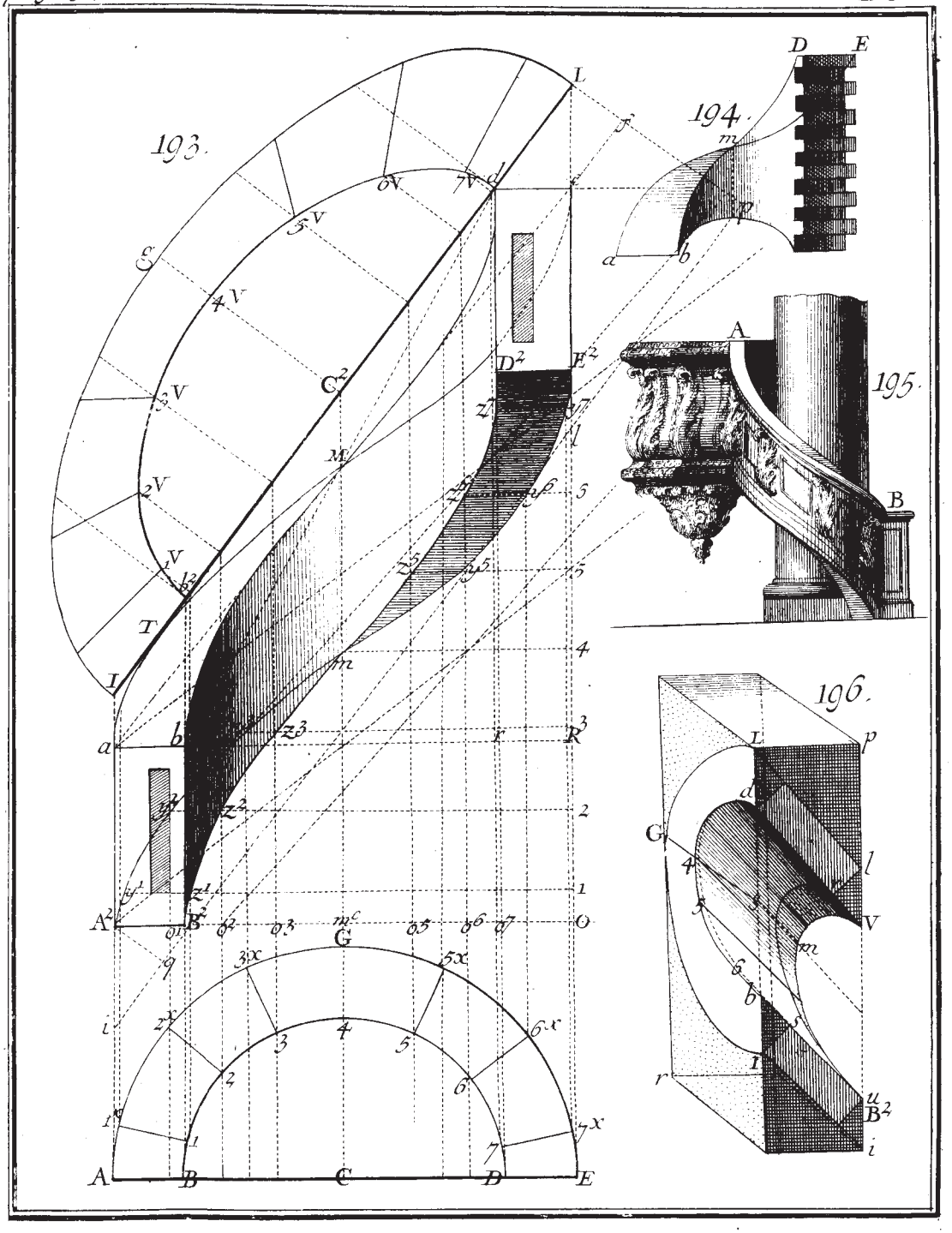
[18] Nella Fig. 189 si è aggiunta la lettera S mancante.

[19] Nella Fig. 192 si è aggiunta la lettera K mancante.

[20] Nella Fig. 192 si è aggiunta la lettera I mancante.
[21] Rif. op. cit.

page 307.

Pl. 106.



Terzo tipo di scala circolare

Dove le staffe sono staccate dai gradini e si allargano su più teste

In termini d'arte trattazione sulla scala a chiocciola in primo luogo, secondo la circolare in uso nella carpenteria e nella falegnameria.
Nel trattato precedente ogni testa di gradino portava la sua staffa di uno stesso pezzo; in questo, la staffa è un'opera a parte nella quale si fanno degli intagli o listarelle, in ossatura o armatura, delle mortase, per stabilirvi numerose teste di collari, di gradini che girano cioè, qui si tratta di fare di una grande opera le parti di una staffa come si facevano da numerosi strati di basso spessore, uguale a quello dei gradini ai quali essi erano aderenti. Ciò da motivo ad una modifica del sistema di costruzione.
Sia la parte dell'arco di cerchio AGED 4 B il piano orizzontale di un muro che sostiene la scala circolare, portando dal basso come in a b m DE della fig,194 dove la proiezione orizzontale di una staffa sospesa nell'aria a sbalzo come il convesso AB della fig.195, che è ¼ della scala sospesa o infine la proiezione di una staffa concava come A B d e della fig.193. Per tutti i punti A B C D E del diametro A E, partiranno delle perpendicolari indefinite come AI, CM, EL, ecc. poi si dividerà il semicerchio B 4 D in tante parti uguali quanti saranno i gradini di questa parte di scala.

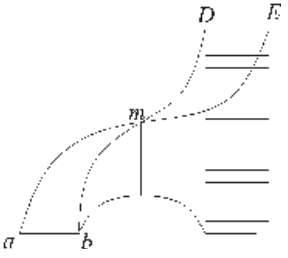


Fig. 194 Proiezione orizzontale della staffa

Supponiamo, in questo esempio che ce ne siano 7, 6 collari di gradini interi tra i punti 1 e 7 e 2 metà di collari tra i punti B 1 & D 7, supponendo le loro altre metà in una rampa destra, o continuando il moto di rivoluzione per un altro mezzo giro. Per tutti i punti delle divisioni dei gradini 1,2,3,4,5,6,7 si tireranno dal centro C delle linee 11x, 22x, 77x, 66x, ecc.. che divideranno il lato convesso della staffa AGE nei punti 7x, 6x, ecc., per tutte le estremità di queste linee 11x, 22x, 77x, 66x, ecc. si tracceranno delle verticali parallele alla linea AI.
In seguito si prenderà una base di elevazione sulla linea A 2-O parallela alla linea AE ad una distanza tale che individueremo da tale linea, che A^2O taglierà tutte le perpendicolari provenienti dai punti A, C, E, e dirette ai punti o^1, o^2, o^3, m, ecc.
Successivamente si porterà sopra il punto o 1 le altezze date ai gradini ai punti 2,3,4,5,6,7 e le ultime altezze di semi collari B1, D7, l'una sotto di o1 in z1, l'altra sopra la più alta di 7 in e 2, e per tutti questi punti O, 1, 2, 3, ecc. si tracceranno tante parallele alla linea AE che taglieranno le verticali alzate su tutti i punti A, 1^x, 2^x, ecc. che sono al contorno convesso AGB nei punti y^1, y^2, y^3, y^4, ecc .per i quali si traccerà la linea A^2y my E^2, che rappresenterà in proiezione verticale l'elica che si forma all'angolo

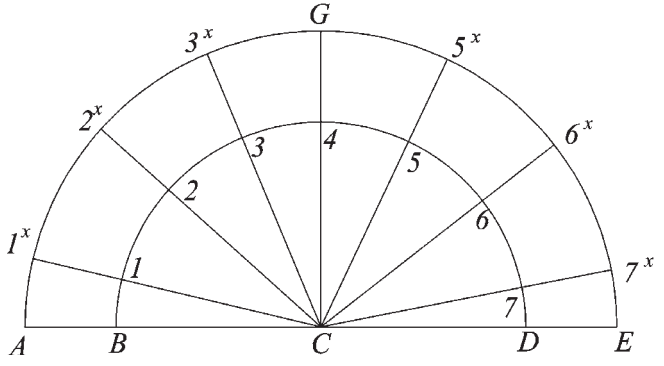
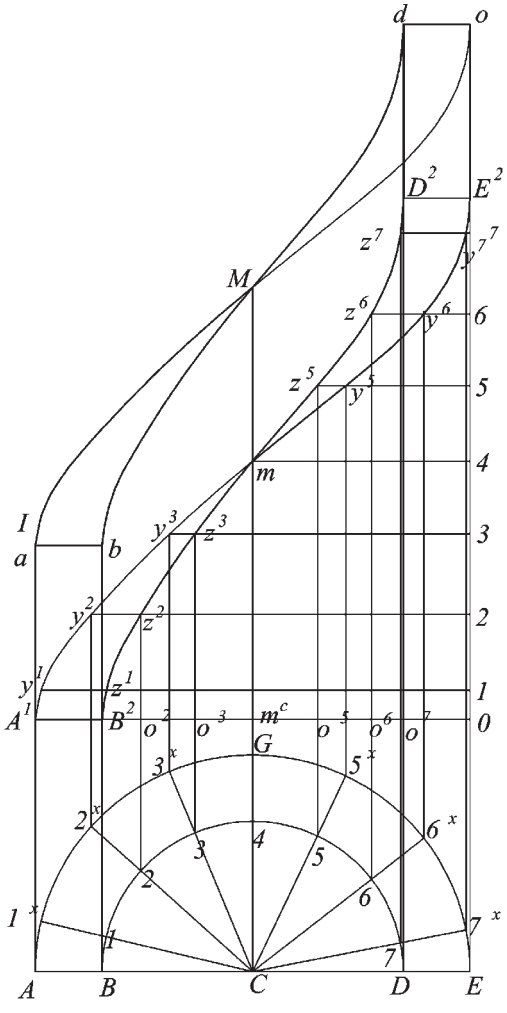


Fig. 193-a Visualizzazione in pianta della staffa AB4DEG

convesso disotto della staffa che passa per gli angoli disotto di ogni gradino dal lato della scala.
Le stesse linee orizzontali passanti per i punti 1,2,3,4,ecc.. della verticale EL taglieranno le verticali provenienti dai punti 1,2,3,4, ecc..secondo l'arco B4D nei punti z^1, z^2, z^3, z^4, ecc. per i quali si traccerà la curva B^2 z m z D^2, che sarà la proiezione verticale della curva dall'angolo concavo della staffa dalla parte dell'armatura vuota, la quale curva incrocerà la precedente A^2 m E^2 nel punto m che rappresenta i 2 punti della proiezione orizzontale 4 & G, del centro della staffa tra i punti A & E verso i gradini & B & D verso il vuoto.
Risultando tracciate queste 2 curve si prenderà l'altezza che si vuole dare alla staffa, che deve eccedere quella dei gradini al disopra e da sotto di una certa quantità che è arbitraria, come di 3 o 4 pollici per molte ragioni. 1-Perché questa staffa serva da sostegno per alloggiarci le teste dei collari dei gradini. 2-Per darle più solidità 3- Per sporgere i risalti che gli angoli dei gradini sono dall'una all'altra, l'una di queste altezze al disopra si chiama lo zoccolo della staffa, l'altra disotto il controzoccolo.
Lo sviluppo verticale della staffa risulta determinata per esempio A 2-a la si porterà su tutte le verticali al disopra dei punti y di fuga per avere

la curva convessa sui gradini a M e & allo stesso modo su tutti i punti z per avere la curva concava verso il vuoto b M d la quale incrocerà la precedente in M come quella disotto in m.
Essendo tracciate le 4 curve degli angoli della staffa come si vede nella figura si condurranno loro delle tangenti a vista solo di sopra & di sotto,



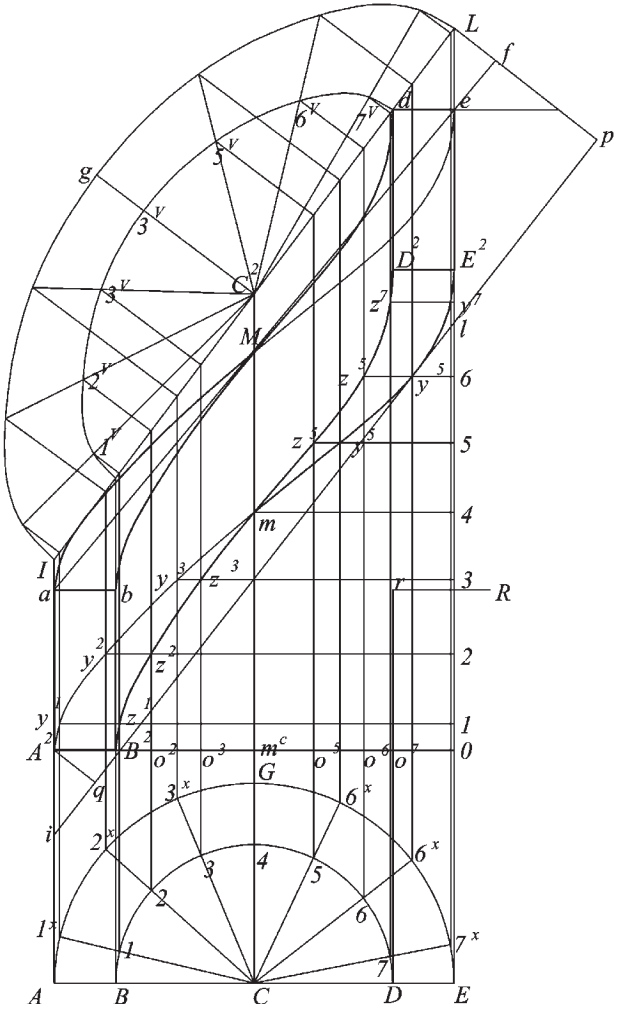
per esempio, al disopra attraverso l'angolo d, che è il più avanzato, & all'incirca verso T dove la curva si alza di più, si traccerà la linea LI alla quale si condurrà, al di sotto per il punto B^2 una parallela i l.
In questo modo tutta la proiezione verticale della staffa si troverà compresa nel romboide IL li, che indica quale deve essere lo spessore e la lunghezza della pietra o del pezzo di legno che si deve tagliare per farne la taffa come rappresentato dalla fig. 196, dalle stesse lettere IL li.
Allo stato attuale bisogna tracciare le curve b^2 g d &, I 4 L, che individueranno le sezioni piane della cavità cilindrica dell'armatura vuota B4 D e del tondo convesso dal lato dei gradini A G E, le quali curve che formano delle ellisse comprendono uno spazio I 4 L d g b^2 da cui bisogna togliere un elemento.
Sara facile tracciare ognuna di queste ellissi per le Prob VII del 2° libro pag. 135 o per le Prob IX pag. 145 della stesso libro capitolo primo perché sono dati i grandi assi I-L del convesso & b^2 d del concavo e la metà dei loro piccoli assi C^2 4 e C^2 g, sono anch'essi dati sul piano verticale in CG & C4 cosi si potranno tracciare queste mezze ellissi con un movimento continuo o per più punti.
Noi abbiamo supposto che la staffa facesse una mezza rivoluzione B 4 D alla fig. 193 ma se ne facesse meno, come per esempio meno di ¼ in A n B fig.198, la costruzione sarebbe ancora la stessa fig.198, avendo tracciato dal centro C dell'arco A n B le linee CD, CE, CN, si tratterà di cambiare gli archi di cerchi A n B e DNE in archi di ellissi della stessa pèrofondità e sulle corde date che saranno quelle che daranno le altezze dei gradini comprese nell'intervallo D N E, per esempio, in questa figura queste corde saranno le linee di rampa a b^2, dE^2, che si incroceranno in M, con le quali si faranno delle ellissi nel corollario III del prob IX del II libro pag.147, ma poiché noi dobbiamo parlare più a lungo di questa costruzione, quando noi parleremo delle staffe giranti composte da più parti noi passeremo alla pratica del taglio della pietra o del legno come riportato dalla fig. 193.

APPLICAZIONE DEL TRATTATO SULLA PIETRA O AL LEGNO

Per trovare la lunghezza della pietra fig 193 o del pezzo di legno, che si deve impiegare per fare la staffa in un pezzo si traccerà per il punto L che è il più lontano una perpendicolare L p sulla linea i l, prolungata in p la distanza i p sarà la lunghezza che bisogna dare alla pietra o al pezzo di legno, sebbene a rigore essa possa essere più corta dell'intervallo e f nella parte superiore & i q nella parte inferiore, ma allora la curva convessa non sarebbe tutta tracciata sulla parte piana della pietra dove deve essere applicato l'elemento a destra verso L da sopra & da sinistra verso i e alla parte inclinata da sotto per questo conviene, sia per comodità che esattezza l'esecuzione di una pietra più lunga.

Fig. 193-c Visualizzazione della pianta, dell'alzato e della proiezione dal basso della staffa. l'autore individua il quadrilatero LPlI che rappresenta la pietra (o il legno) necessario per costruire la staffa partendo dal pieno.

Lo spessore della pietra o del legno sarà data dalla linea L p e la sua larghezza dalla linea CG del piano orizzontale, così con queste 3



dimensioni si formeranno in pietra o in legno, secondo il materiale di cui si deve fare la scala, il parallelepipedo P r della fig. 196 la quale non è corrispondente per grandezza alla fig. 193 per mancanza di spazio
In seguito si prenderà la lunghezza L d della fig.193 che si condurrà in L d della fig. 196, poi aprendo la squadra sull'angolo ottuso L-d-D si condurrà questo angolo sulla pietra in L d V della fig.196 per tracciarvi la linea d V che deve essere messa in opera a piombo come d D della fig.193, si prenderà in seguito l'intervallo d b^2 che si condurrà in d b sullo spigolo I L della fig.196 per tracciare su questo punto b una linea b u parallela a d V in 4 punti b d V & u serviranno a posare l'elemento I G L d 4 b^2 sui rivestimenti da sopra e da sotto del pezzo di legno come rappresentato alla fig. 196.
Il contorno di questo elemento è sempre tracciato tanto sopra quanto sotto, si diminuirà la pietra da una curva all'altra con la riga che si terrà sempre parallela alla linea d V o b n, in questo modo si formerà una superficie cilindrica b 4 d V n u che sarà l'ornamento infossato visto dalla parte del vuoto.
Allo stesso modo si diminuirà la pietra che eccede il contorno convesso I G L per formare l'ornamento rotondo del lato dei gradini nel quale si devono alloggiare attraverso degli intagli le tese dei loro collari.
Ecco già formati due superfici verticali della staffa delle quali occorrerà togliere le parti che eccedono troppo il sopra & il sotto dei gradini da cui gli angoli si alzano gli uni al di sopra degli altri riguardo le curve in eliche alle quali gli angoli dello zoccolo & del controzoccolo della staffa devono essere paralleli.
Bisogna dunque tracciare queste curve sulle superfici cilindriche, concave e convesse ognuna in 2 punti parallelamente tra di esse l'una di sopra per il punto dello zoccolo l'altra di sotto per il punto del controzoccolo, che forma con la sua compagna la volta o piuttosto una parte di volta a mezza calotta uguale alla superficie dello spessore superiore, ciò si può fare in 3 modi diversi.
La prima, attraverso gli elementi flessibili, che siano gli sviluppi delle porzioni di superfici cilindriche di cui una è concava e l'altra è convessa seguendo quanto è insegnato nel trattato della vita di San Giles pag. 419 e fig. 230 del capitolo precedente che ripeteremo in 2 parole per non rinviarvi il lettore.
Si farà, per esempio, per il vuoto della staffa un triangolo rettangolo che avrà: 1-Una base orizzontale, per base orizzontale l'arco B 4 D sviluppato, cioè rettificato in linea dritta; 2-Per altezza a piombo la linea r-d della fig. 193, che è quella del punto d, su una linea di livello di b-r, l'ipotenusa di questo triangolo rettangolo ultimerà l'elemento che si traccerà su dei cartoni.
Se si applica il lato d-r sullo spigolo d V della fig. 196, che si appoggia sul cartone per farlo piegare ed unire esattamente nella superficie concava b SV il lato dell'elemento che ne è l'ipotenusa, segnerà esattamente il contorno dell'elica concava che è segnata in proiezione verticale alla fig. 193 in b M d.
Sarà facile tracciare l'elica parallela al di sopra o al di sotto facendo il parallelogramma obliquo, che avrà per lati maggiori, l'ipotenusa trovata e per i due lati più corti l'altezza verticale della staffa a A^2.

Fig. 196 Visualizzazione assonomertica della pietra o del legno da sbozzare per ricavarne

la staffa che costituirà la parte portante della scala

Con lo stesso metodo si farà un elemento flessibile per tracciare l'elica convessa che è dal lato dei gradini, rettificando l'arco A G E del piano orizzontale per fare la base del triangolo rettangolo & servendosi della stessa altezza d r, che è stata presa per l'elica concava perché essa è uguale ad e R per la convessa si è rappresentato due pannelli simili alla

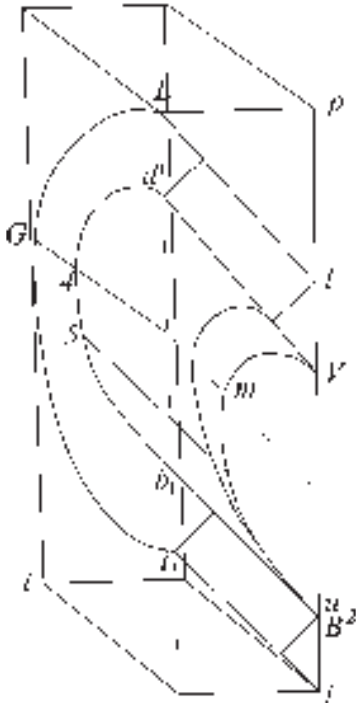


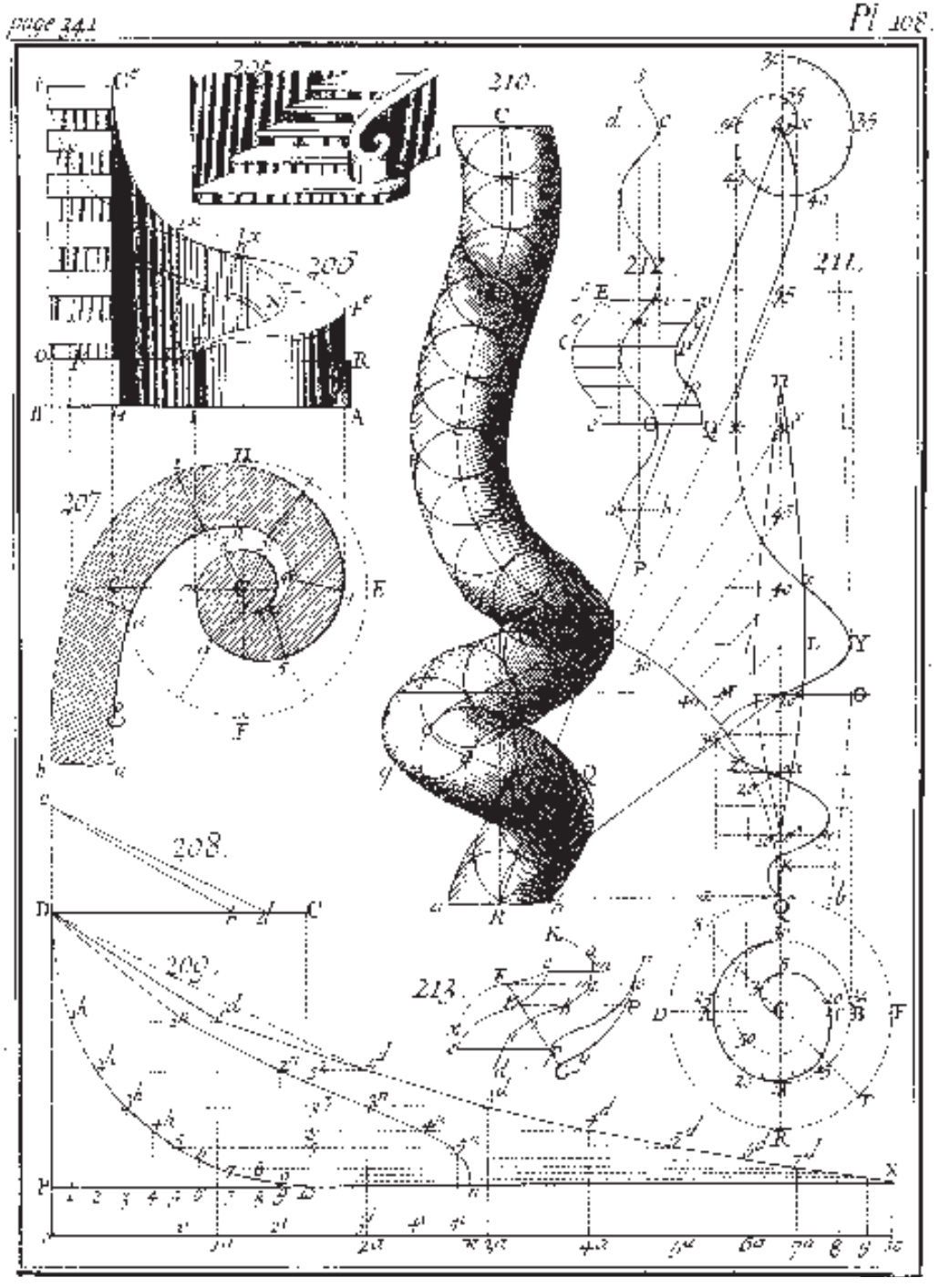
fig.199 che non sono corrispondenti alla fig. 193 ma che sono sufficienti per quanto è stato detto.
Il secondo modo di tracciare le eliche dagli angoli superiori ed inferiori della staffa sulle loro superfici concave e convesse è un po meno semplice, c'è da tracciare nella superficie concava e sulla superficie convessa cilindrica altrettante linee parallele all'asse o ciò, che è la stessa cosa gli angoli d V b B^2 della fig. 196 che si tracciano delle perpendicolari al disegno tridimensionale della fig. 193 sul piano orizzontale, cioè, in questo esempio fisso all'interno e altrettanto all'esterno seguendo le distanze prese ed in modo esatto uguali a quelle del piano orizzontale B 1, 1 2, 2 3, ecc. per il fondo & A 1^x, 1^x 2^y, 2^y 3^y, per il tondo convesso del lato dei gradini. In seguito si prenderanno successivamente tutte le altezze di queste linee sulla base orizzontale A^2 O se la staffa poggia sul fondo come nella fig. 194, ma se è sospeso, come nella fig. 193 non si possono prendere queste altezze per appoggiarle sulla pietra abbozzata alla fig.196, perché è vuota al di sotto dell'angolo B^2 V allora bisogna prendere ogni altezza & poggiarla successivamente al disopra della linea del livello che dava l'altezza precedente, come 4 o, 5 o, 6 o, sulle quali si condurranno le differenze delle altezze o-m, o-z^5, o-z^6, ecc. della fig. 193 che daranno i punti 5, 6 d ecc. per i quali si traccerà a mano libera o con una riga pieghevole, l'elica concava che la si cerchia e la parallela, al disotto, allo stesso modo la convessa e la sua parallela al di sotto per il soffitto della staffa.
Il terzo modo è quello di cui si serve messieu de la Rue, che è ancora più composta & poco corretta nell'esecuzione e richiede un altro disegno rispetto a quello della fig. 193, occorre fare 2 ellissi sulle linee diritte a e & b d che non sono state tracciate per evitare confusione, ma che è di semplice esecuzione, perché se la staffa fa una mezza rivoluzione completa sono 2 mezze ellissi a descrivere sugli assi dati vedere allo stesso modo per la concava, il grande asse b d & il semi asse piccolo C 4 del piano orizzontale e per la convessa si ha il grande asse a e & per metà del piccolo asse la linea CG del piano orizzontale & se la staffa non fa una mezza rivoluzione completa come nella fig. 198 si potranno formare questi cerchi su delle corde date in a e, d b & con le guglie date al piano orizzontale m-n, M-N si cambieranno i segmenti dei cerchi dati in segmenti di ellissi con il corollario III del prob. IX del II libro a pag. 147.
Questo metodo non è adatto a grandi parte della staffa che sono molto convesse, perché solo 2 i punti dati alle estremità dei cerchi, per sistemare le loro posizioni ciò non è più sufficiente, perché per questi 2 punti essi daranno un falso contorno ciò non può accadere servendosi di un elemento per formare le superfici cilindriche, concave e convesse, per le quali si ha bisogno di elementi o di cerchi. L'uso di questi cerchi è di appoggiarli sulle estremità delle linee diritte date, che ne sono le corde e di fare dei pennacchi incavati in canaletti verso il vuoto e in canaletto convesso dal lato dei gradini, in seguito si diminuisce la pietra, tra i due pennacchi con la riga posata dall'una all'atra su parti corrispondenti e così si formeranno i vuoti e i tondi dei rivestimenti, che devono essere a piombo, si tratta di una porzione poco concava o convessa, si potranno tracciare le eliche degli angoli su queste superfici senza altro strumento ne preparazione del trattato che una riga pieghevole che verrà posata sull'estremità dell'angolo e che sarà unita alla superficie curva la traccia formata lungo la riga così piegata, darà un elica ad ogni posizione quelle che saranno tracciate sulla stessa superficie, per situazioni di righe parallele saranno simili, ma se per poco esse saranno più o meno inclinate, esse non lo saranno più, quando i giunti della staffa sono a piombo, come è

d'abitudine fare in carpenteria, si hanno per ogni rivestimento vuoto 2 eliche simili ed uguali a tracciare all'intervallo dell'altezza della staffa, ma, quando le staffe sono fatte da più pezzi di cui i letti sono in coppia si hanno delle eliche simili da fare ma non uguali perché quelle al disotto della staffa sono più corte di quelle ad di sopra, supponendo infine che le eliche degli angoli siano tracciati sui rivestimenti curvi cilindrici, concavi e convessi per uno dei tre modi di cui abbiamo parlato, non si tratta più di smussare la pietra con la riga dall'una all'altra dal di dentro dal di fuori, facendo attenzione a tenere la riga verso l'asse del cilindro, come abbiamo detto all'inizio del II libro, ma poiché questo asse è immaginario per chi è nel fondo della colonna, bisogna cercare qualche mezzo che possa guidarla in questa posizione, lo si può quasi fare tenendola a vista ad angolo retto alle superfici curve, cioè perpendicolarmente alle tangenti, ma per essere più sicuri bisogna dividere le eliche compagne in parti uguali tra esse in ognuna, e poggiare la riga sulle parti corrispondenti come dal III della convessa al III della concava, dal IV al IV ecc.. in questo modo si formerà una superficie che chiamerò planoelicoide perché è composto ad un'infinità di eliche diverse, che sono, nonostante le loro riproduzioni dello stesso tempo attorno all'asse del cilindro dal quale sono tutte equidistanti ed inoltre, dato che è attraversato da un infinità di linee diritte verso questo asse comune nella quale io lo distinguo dal cilindro elicoide di cui abbiamo parlato della Vis Saint. Giles e degli assi e modanature rampanti delle scale precedenti.

Quarto tipo di scala circolare

Quando il vuoto è su una base circolare ellittica

Noi abbiamo dimostrato al teorema IV del I° libro che la sezione obliqua di un cilindro cavo di uguale spessore era una corona ellittica, compresa tra due ellissi simili, ma che non erano equidistanti, quanto è stato appena visto guardando la sezione I g L della fig.193 da qui si deve trarre la conseguenza che se il fondo dell'asse è ellittica lo spessore della staffa dovrebbe essere disuguale orizzontalmente, sia che il lato dei gradini fosse segnato da un ellisse, simile a quella del fondo perché le distanze degli ellissi asintotiche sono uguali solo sui diametri uguali, e se sono inuguali da un diametro all'altro che non gli è uguale.
La dimostrazione è molto semplice. Fig.199, siano le linee a c, b c le metà di due grandi assi dati & e e, c d le metà dei due piccoli assi coniugati ai grandi delle due ellissi simili concentriche, che si chiamano asintotiche, si avrà, per la supposizione & per la definizione degli asintotici a c. b c :: e c. d c, & dividendo a c-e c = a b. e c-d c = e d :: a c. e c :: b c. d c oppure a c metà del grande asse è più grande di e c dunque a b è più grande di e d; questo è quello che si voleva dimostrare.
E' la stessa cosa per gli altri diametri coniugati che non sono uguali, dunque le ellissi asintotiche non possono avere le loro circonferenze equidistanti perché h a b è uguale ad e d, a c sarà uguale a c e & b c = d c allora le curve sono dei cerchi e non sono delle ellissi.
Da qui ne consegue che se la circonferenza del vuoto della colonna è ellittica l'angolo della staffa che si vuole fare di uguale spessore non può essere un ellisse, ma una epicicloide che bisogna descrivere, come è stato detto al 2° libro pag. 141 prendendo al contorno dell'ellisse data, più punti per servire dal centro ad altrettanti archi che si faranno sulla misura dello spessore della staffa data per raggio, la linea curva tangente a tutti questi piccoli archi sarà l'epicicloide richiesto, che non essendo simile all'ellisse data farà necessariamente delle gobbe all'estremità dell'asse principale come lo mostra la fig.117 del 2° libro e questa gobba sarà tanto più sensibile e scioccante quanto lo spessore della staffa sarà grande nei confronti dei diametri dell'ellisse data perché i raggi dei piccoli archi di cerchi che formano l'epicicloide si incontrano verso l'asse principale in cui fanno un angolo rientrante.
La seconda ragione di fare una staffa di uguale spessore, quando uno dei suoi spigoli è ellittico anche per imitazione come quando lo spazio ellittico è cambiato in ovale per una commettitura di archi e di cerchi è dimostrata al II° tomo alla pag. 390 ed alla fig. 305, dove si fa vedere che gli archi concentrici sono impossibili quando la distanza dell'arco interno con quello esterno è maggiore di quella dal centro che è stato preso come dimora sull'asse principale, perché allora la figura non avendo più quattro centri come la grande ovale e le seguenti, fino alla dimora, ella non è più un ovale, ma una figura di fusello compresa tra due archi di cerchi uguali che si incontrano sugli assi principali ciò che l'incisore ha espresso male alla fig. 205 dove ha creduto, malgrado il modello del mio disegno che doveva arrotondare i punti F & f, è un errore da correggere sulla stampa 59.
Le irregolarità sono dunque inevitabili alle staffe che si vogliono fare di uguale spessore su un contorno ellittico o ovale ad uno dei suoi angoli dall'interno o dall'esterno così non stupisce che il maestro Blanchard si sia accorto di qualche gobba verso l'estremità dei grandi assi della curva rampante su una ovale, quest'ossrvazione dimostra che lavora con precisione, che ha gusto in quello che fa, che ha scoperto, senza l'aiuto della geometria, un'imperfezione poco sensibile che era sfuggita agli artisti che l'hanno preceduta; ma il rimedio che ha voluto apportare dimostra che avrebbe avuto bisogno di questa scienza e che egli avrebbe avuto bisogno anche di un poco di studio per poter scrivere.


page 341
Pl 108.
206.
210.
205.
211.
207.
208.
209.
213.

Delle Volute composte CAPITOLO XI

Quarta Specie di Viti

Quando la base è una Spirale, e la Chiocciola a vite di Archimede

In termini dell'Arte

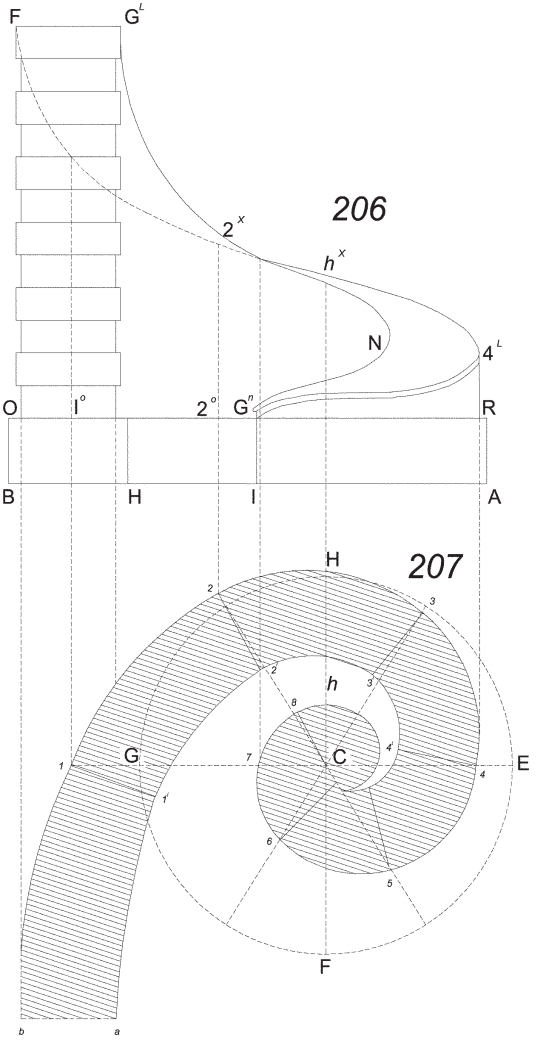
Volute, Chiocciole e Colonne ritorte in spirale.

Tutte le Chiocciole, di cui abbiamo fin qui parlato, fanno la loro rivoluzioni su superfici cilindriche di base circolare o ellittica; quelle di cui si tratta adesso fanno la loro rivoluzione su superfici coniche sferoidi o cilindroidi di basi a spirale tali sono le volute in qualsiasi situazione. Noi qui prendiamo in considerazione particolarmente quella che gli operai chiamano *Chiocciole* d'Echiffres che si eseguono ordinariamente nella parte inferiore delle scale, tanto per ornarne l'ingresso che forma una specie di Colonna che rende stabili le ringhiere di ferro di cui si formano gli appoggi alzati sopra la Lumaca.

Avendo scelto e tracciata la specie di spirale di cui si vuole fare la base della chioccola, come per esempio alla *fig. 207* la spirale circolare *a2, 4C*, le si traccerà una compagna equidistante alla distanza che si vorrà, seguendo lo spessore che si da alla lumaca, e se ne farà l'alzamento seguendo le regole ordinarie spiegate nel 2° Libro *pag.267* e nel 3° Libro *pag.205* alzando perpendicolari sulla base che terminerà seguendo la progressione che si giudicherà opportuna, osservando d'accordare per quanto sarà possibile senza incavi la pendenza della Lumaca retta con la nascita di quella della Chiocciola, e da questa congiunzione si verrà decrescendo sempre meno fino all'occhio della Chiocciola, affinché non si interni finendo improvvisamente in un buco.

La serie che si deve osservare in questa diminuzione o aumento di altezza delle perpendicolari alzate sulla base è abbastanza arbitraria e a scelta dell'Architetto che deve regolarla sul numero della rivoluzioni della spirale del suo piano orizzontale : proporremmo qui il modo più semplice, e che è d'un bel effetto.

Sia (*fig.207*) la spirale doppia o voluta *a H 5 C 2 b* , il piano orizzontale della Chiocciola, si dividerà il cerchio di rivoluzione *GHEF* in altrettante parti uguali che si vorrà, per esempio in 6 con cui si tirerà dal centro *C* raggi prolungati, che taglieranno la spirale convessa ai punti *1, 2, 3, 4, 5* etc. con cui si tireranno con il problema *XXIX* del *2°* Libro *pag. 199* perpendicolari alla spirale 11^{i}, 22^{i}, 33^{i}, etc. che daranno le direzioni dei tagli e delle giunture , se si fa la Chiocciola di più parti, ma che serviranno in modo particolare a formare l'elevazione della parte concava proporzionalmente alla superficie convessa.

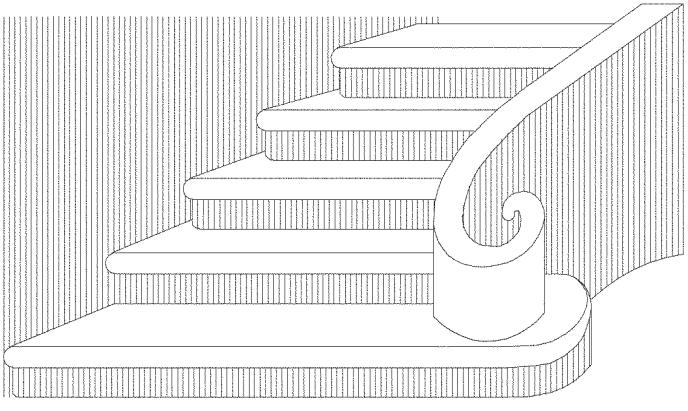


Si farà in seguito l'innalzamento della Chiocciola prendendo una linea di base *BA*, o quella di uno zoccoletto al di sopra *OR*, a cui si tracceranno perpendicolari indefinite che vengono dai punti segnati con speciali punti di riferimento nel piano orizzontale come *bF, gG*^{e}, *7K, 44*^{e}, etc. su cui si riporteranno le differenti altezze che devono avere i punti del contorno dei bordi della Chiocciola, secondo la progressione dell'inclinazione che ci si propone di dare al margine della scala che porta la balaustrata che gira e che s'arrampica.

Questa progressione di pendenza è arbitraria, si può variarla in un infinità di modi facendo discendere bruscamente la Voluta nel suo occhio, oppure rialzando l'occhio al disotto della voluta: noi qui proporremmo un modo che mi sembra uno dei più convenienti.

Supponendo, per esempio, che la Chiocciola termini tre scalini, come la si è rappresentata in *fig. 205*, si prenderà la somma dell'altezza di questi tre scalini che suppongo uguali a *FO* della *fig. 206* per farne il raggio di ¼ di cerchio *CD 10*, che si traccerà a parte (*fig. 209*) che si inserirà in un quadrato *DC 10 P*, di cui si dividerà il lato *P 10* in *10* parti uguali, su cui si alzeranno parallele a *DP*, che taglieranno il quarto di cerchio ai punti *1*^{h}, *2*^{h}, *3*^{h} , ecc. le linee *1*^{h} *1, 2*^{h} *2, 3*^{h} *3*, ecc. faranno le altezze decrescenti della Chiocciola.

205



Per rapportare queste altezze all'innalzamento *206* bisogna dividere il contorno della spirale della base *207* in dieci parti non uguali fra di loro, ma disuguali seguendo la progressione della spirale che si restringe a mano a mano che si avvicina al suo centro, ciò che è facile da fare dividendo il Contorno del suo cerchio di rivoluzione *G H E F* in parti uguali, come qui in sei, i cui diametri prolungati daranno i punti *1, 2, 3, 4, 5*, ecc. al contorno esterno della spirale.

Relativamente alle divisioni del contorno interno *g h 10*, saranno date dalle perpendicolari portate alla spirale esterna come *1 1*^{i} , *2 2*^{i}, *3 3*^{i} , ecc. che potranno essere tracciate a vista d'occhio, o più esattamente col Problema *XXIX* del *2°* Libro *pag. 199* queste perpendicolari daranno i punti *1*^{i} , *2*^{i} , *3*^{i} , ecc..

Si tireranno dunque tutti i punti della spirale *1, 2, 3, 4*, ecc. *1*^{i}, *2*^{i}, *3*^{i} , ecc. perpendicolari alla linea *OR*, su cui si porteranno le altezze corrispondenti della *fig. 209* cioè l'altezza *1*^{h} *1* in *1*^{o} *1*^{x} della *fig. 206* l'altezza *2*^{h} *2* della *fig. 209* in *2*^{o} *2*^{x} in *2* ^{o} *2* ^{x} della *fig. 206* così del restante, e per tutti i punti trovati tanto nel contorno esterno *F 1*^{x} *2*^{x} *4*^{e}, ecc. si traccerà a mano una curva come quella che si vede punteggiata dopo *F* in *h*^{x}, perché è supposta dietro l'oggetto apparente, e continuata con una linea seguita dopo *h*^{x} e fino in *K*.

Si troverà similmente la curva del bordo interno G^{e} h^{x} N n, e si avrà la proiezione verticale della Chiocciola, di cui si può far uso per sbozzare la pietra.

Ma per tracciare questi bordi con più precisione e comodità, conviene fare lo sviluppo delle due superfici esterna e interna della Chiocciola.

Si rettificherà il contorno della base esterna *b H 4*˚*7 10*, che si porterà per particelle di seguito su una orizzontale *O 10* della *fig. 209* facendo la lunghezza *O 1*^{a} uguale all'arco *b 1* della fig. *207 1*^{a} *2*^{a} uguale all'arco *1*˚*2* della spirale *207. 2*^{a} *3*^{a} uguale all'arco *2*˚*3*, ecc. e per tutti i punti *1*^{a} , *2*^{a} , *3*^{a} , ecc. avendo innalzato verticali indefinite, le si finiranno con orizzontali dirette dai punti *1*^{h}, *2*^{h}, *3*^{h}, ecc. che daranno con le loro intersezioni con quelle verticali i punti *1*^{d}, *2*^{d}, *3*^{d}, *4*^{d}, ecc. la curva diretta da tutti questi punti a mano o con una riga pieghevole farà quella dello sviluppo del bordo esterno del margine della scala

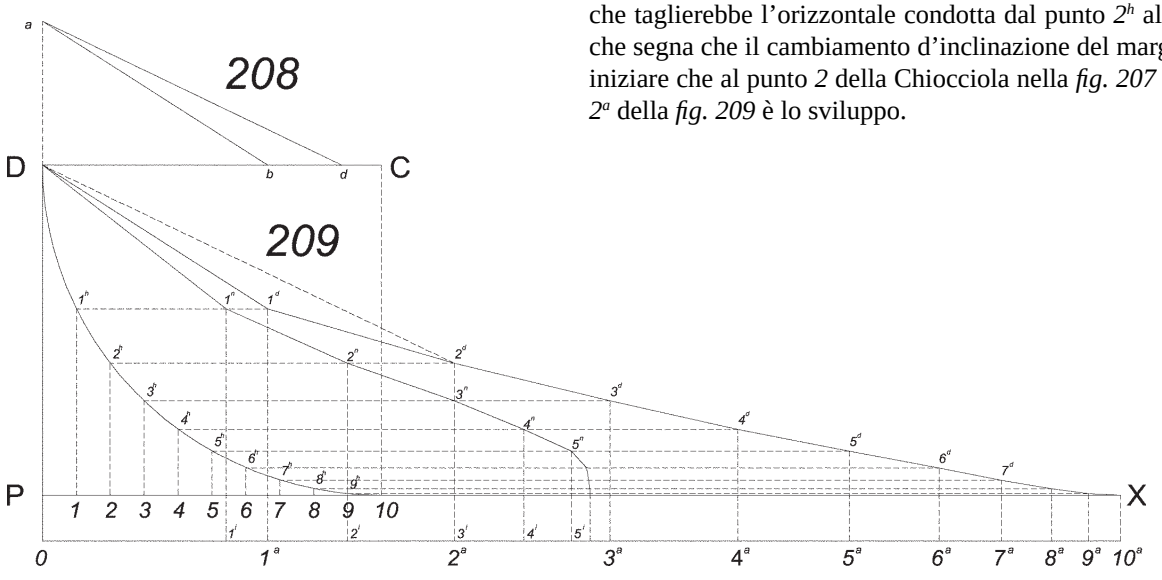
Nello stesso modo, avendo sviluppato il contorno interno della spirale *g h 10* del punto *O* al punto *N* alla *fig. 209* con le divisioni 1^i, 2^i, 3^i, ecc. si avrà per sviluppo del bordo interno la curva *D* 1^n 2^n 3^n, di cui tutti i punti 1^n 2^n ecc., sono sulle stesse orizzontali dei punti 1^d 2^d del contorno esterno, affinché questa curva sia sempre equidistante orizzontalmente alla sua compagna, sebbene sia così diversa nello sviluppo.

Questi sviluppi serviranno a fare pannelli flessibili su cartone, latta, o lamina di piombo, che si applicheranno sulle superfici cilindroidi, che avranno per base le spirali della *fig. 207*.

E' visibile che tale progressione di linee crescenti o decrescenti tirate dal cerchio secondo una progressione di seni versi $+"^2\ 10$, $+"^3\ 10$, possono essere cambiate in un'altra di seni dritti $+"^2\ 2h$, $+"^3 3h$, ecc., ciò che avrebbe dato una curva d'inclinazione diversa al margine della scala che porta la balaustra della Chiocciola.

E' ancora visibile che se invece del quarto di cerchio *D 10*, si avesse preso un quarto d'ellisse sul grande o sul piccolo asse, si avrebbe avuto una curva differente d'inclinazione, e che se si volesse fare risaltare l'occhio della voluta, invece di un quarto di cerchio si sarebbe dovuto prendere un più grande arco, che sarebbe risalito al di sopra della linea *PX*, che è lo zoccolo dove vogliamo che si fermi la voluta.

Una delle principali attenzioni che si deve avere nella scelta della curva d'inclinazione del bordo della Chiocciola è di fare in modo che il bordo destro che termina gli scalini superiori non faccia da incavo con il margine della scala che sostiene la balaustra girante della Chiocciola alla linea orizzontale della loro unione, è perché bisogna fare il profilo del margine destro al primo scalino sotto la Chiocciola, per esempio in *a b fig. 208* verso una orizzontale *DC*; poi avendo portato la lunghezza *b1* del piano rettificata in *O* 1^a della *fig. 209* s'innalzerà la verticale 1^a 1^d, che si finirà con l'orizzontale 1^h 1^d, e si traccerà la linea *D* 1^d, di cui si comparerà l'inclinazione con quella del profilo del margine destro *a b* della *fig. 208*.
Se queste linee sono parallele, è un segno che il margine destro e la sua continuazione alla Chiocciola girando non faranno incavo, se invece il profilo del margine destro fosse più inclinato, come in a d della *fig. 208*, bisognerebbe tirargli una parallela dal punto *D*, che taglierebbe l'orizzontale condotta dal punto 2^h al punto 2^d, ciò che segna che il cambiamento d'inclinazione del margine non deve iniziare che al punto *2* della Chiocciola nella *fig. 207* la cui linea *O* 2^a della *fig. 209* è lo sviluppo.



Applicazioni della Linea sulla pietra

Avendo messo dritto la faccia esterna per servire da faccia orizzontale, vi si applicherà il pannello dalla parte della Chiocciola che la grandezza e altezza della pietra può comprendere, per esempio *2 H 4°7°2*, di cui si traccerà il contorno, e i segni delle divisioni *2, 3, 4, 5, 6*, ecc. poi si atterra la pietra, seguendo questo contorno, con la squadra nella faccia della parte inferiore, e si vedrà similmente, per quanto sarà possibile, l'intervallo che resta fra circonvoluzioni per formarne un cilindroide simile ad un rotolo di cartone dello spessore del margine.

Essendo così formato questo corpo, si innalzeranno perpendicolari sulla faccia inferire con i punti segnati nel suo contorno *2, 3, 4*, ecc. che si faranno uguali a quelle che corrispondono a questi numeri nel quarto di cerchio della *fig. 209* e con i punti delle loro altezze, si traccerà con la mano o con la bacchetta rotonda, dritta e flessibile il contorno del bordo esterno, l'interno si traccerà allo stesso modo; poi con la riga posta di livello sopra i punti corrispondenti dalla superficie concava alla superficie convessa, si atterrerà la pietra, come è stato detto per la curva inclinata su una base ellittica, cioè tenendo sempre la riga ad angolo retto sulla tangente della superfice, con questa differenza che nel margine ellittico la riga dev' essere diretta al centro sulle assi dell'ellissi, e che qui non deve mai essere diretta (rivolta) al centro della spirale, ma sempre un po' a lato (a fianco), come lo si vede nella *fig. 207* dalle direzioni *1 1^i, 2 2^i , 3 3^i*, ma deve sempre essere tenuta di livello.

Invece di affaticarsi a tracciare le curve con punti sulle due superfici concave e convesse della bozza della Chiocciola, si può subito tracciarne i bordi per mezzo di un pannello flessibile tracciato e contornato sul disegno dello sviluppo della *fig. 209*, cioè *D o 10X* per la faccia esterna convessa, e *D o N n 4^n D* per la faccia cava, in cui si applicherà il pannello di cartone o di lamina di piombo che si farà piegare, in maniera che unisca esattamente nella superfice concava, e che il suo lato destro *ON* sia posato sul bordo della superficie inferiore; in questa situazione si traccerà nettamente il bordo del margine, si farà la stessa cosa per il lato convesso.

Seconda Specie di Lumache Cilindroidi

In termini dell'Arte

Colonne Ritorte in spirale di qualsiasi tipo

Il Vignola, a ciò che dice Daviler, è il primo che abbia dato regole per tracciare le colonne tortili (ritorte a spirale) e tutti gli Architetti hanno seguito il suo Trattato, tuttavia si può dire che non vale niente, se si ha l'intenzione di fare un corpo regolare nella sua specie, perché gli ha dato senz'accorgersene spessori disuguali a ogni circonvoluzione come lo dimostreremo qui di seguito.

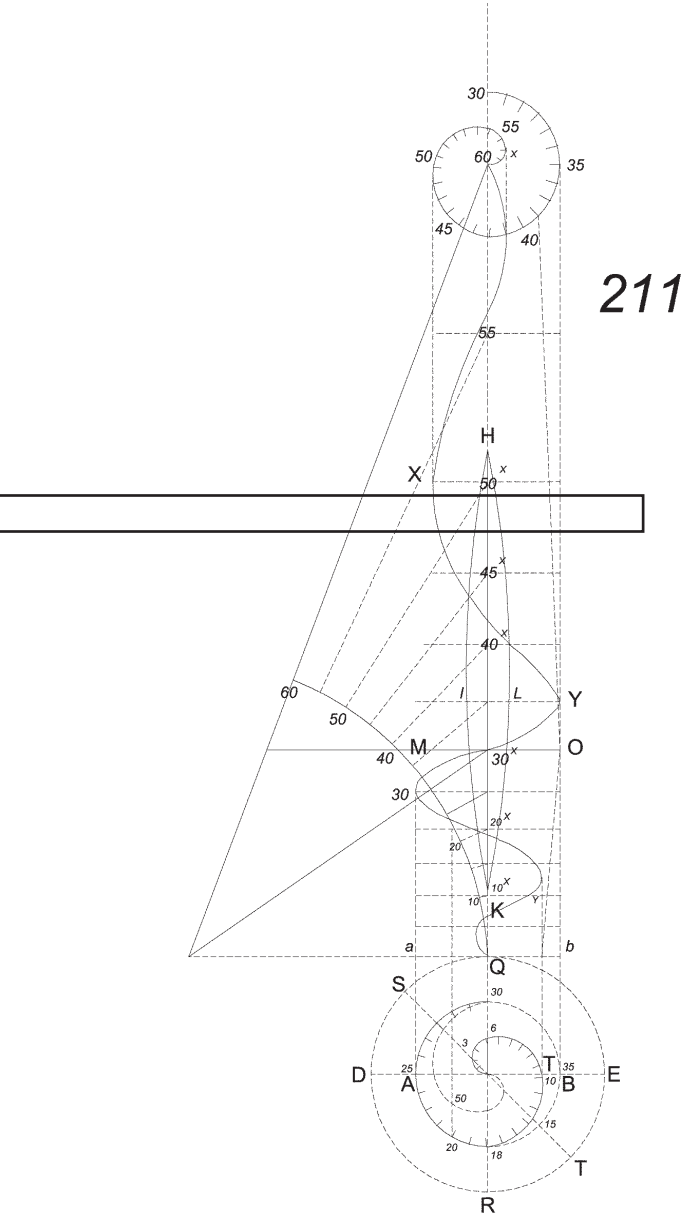
Questa specie di Colonna è un composto di tre chiocciole (tre scale a Chiocciola); cioè *1°* di una mezza a vite di Archimede che si apre dalla metà della base fino alla dodicesima parte dell'altezza ; *2°* di una Chiocciola cilindrica in continuazione che comprende 5 circonvoluzioni uguali, e infine di una seconda vite di Archimede, uguale alla 1a, ma volta in senso contrario, che va chiudendosi dopo l'undicesima parte della Colonna fino alla sua vetta (vertice) dov'essa termina nell'asse destro che gli Architetti chiamano *Cachette*.
Abbiamo detto che la seconda Chiocciola era cilindrica, perché il Vignola non dà nessuna enfasi alla Colonna ritorta in spirale nella sua formazione.

Per dare al Trattato della Colonna ritorta in spirale tutta la generalità delle variazioni di cui è suscettibile, la formeremo di due lumache disuguali girate in continuazione in senso contrario, i cui intervalli delle circonvoluzioni saranno disuguali contro l'uso ordinario, affinché il lettore si renda padrone di questa piccola materia.

Dopo di che esamineremo la Colonna tortile del Vignola, che è la sola usata da molto tempo.

Sia (*fig. 211*) il cerchio *A 30 B 18* la proiezione orizzontale della più grande ampiezza che si vuole dare all'asse tortuoso elicoide della Colonna, che deve essere composto da una doppia lumaca, la

cui prima s'innalza dalla metà della base aprendosi fino a una certa altezza, e la seconda riprende in continuazione a questa altezza e risale al vertice dove viene richiudendosi per finire in mezzo del coronamento nello stesso asse destro e *Cachette*, al di sotto di cui la lumaca aveva preso origine.



Da dove segue che se l'intervallo del diametro AB è più grande dei due semi spessori del corpo cilindroide piegato in Colonna tortile; resterà nel mezzo un vuoto come nelle viti a giorno, con questa differenza, che non sarà cilindrico, né continuo dall'alto al basso, ma a forma di fuso come *HLK l*, che si chiude in *H* e in *K*, e la cui parte più gonfia non è in mezzo, supposto che le lumache siano di altezza disuguale.

Siccome le due lumache devono unirsi per continuazione, devono avere per ampiezza comune il diametro *AB*, e come si vuole che facciano ciascuna uno stesso numero di circonvoluzioni su altezze disuguali, bisogna determinare le disuguaglianze crescenti o decrescenti dei loro intervalli, ciò che si può fare in modi differenti e seguendo rapporti differenti: ci fermeremo al più comodo, che è quello del rapporto delle tangenti.

Sulla base della Colonna *b* a prolungata, si prenderà un punto *R* a distanza arbitraria del nascondiglio - *Cachette* 60^x Q , per esempio, di due volte la lunghezza del diametro *AB* più o meno secondo l'altezza della Colonna, e la più o meno ineguaglianza che si vorrà dare alle circonvoluzioni, poiché è chiaro che saranno tanto meno diverse quanto il punto R sarà lontano, e invece tanto più diverse di quanto V sarà vicino.

Da questo punto R per centro, e da un raggio preso a piacere, si descriverà un arco di cerchio *Q 60*, che sarà determinato nel punto *60* dalla linea $R60^x$ tirata al vertice della Cachette; si dividerà tale arco in tal numero di parti che si vorrà, che qui sono sessanta, che non sono gradi, cominciando col dividerlo in *6*, e ogni sesto in dieci.

Con tutte queste divisioni *10, 20, 30*, ecc., e con il punto *R*, si tireranno linee dritte che taglieranno la Cachette 60^xQ in 60 parti disuguali, da ciascuna delle quali si tireranno delle orizzontali indefinite parallele alla base *a b*, e perpendicolari alla Cachette che si contrassegneranno con gli stessi numeri delle divisioni primitive come 10^x, 20^x, 30^x, ecc.

Bisogna presentemente fare le proiezioni delle Lumache superiori e inferiori della Colonna, che devono essere la stessa girata (vòlta) in senso contrario, perchè l'inferiore si allarga salendo, e la superiore si restringe.

Queste proiezioni devono essere spirali che si possono descrivere, come la spirale di Archimede, di cui abbiamo parlato al *2° Libro pag. 165* del *1° Volume*. Ma siccome due spirali di questa natura volte in senso contrario, benchè su uno stesso centro, non si toccano, ma si incrociano in angolo il cui vertice è al di fuori della loro intersezione, ci si può rilassare dalla descrizione di questa curva, e accontentarsi di una imitazione imperfetta con archi di circonferenza, affinchè la congiunzione delle viti di Archimede inferiori e superiori si faccia senza sporgenza, o al meno se ci si serve della spirale di Archimede rigirata, bisogna cancellare l'angolo della proiezione con un arco di circonferenza tangente all'una e all'altra: opereremo con poca delicatezza per più facilità.

Sia il raggio C 30^b diviso in due ugualmente al punto *6*, si descriverà su *C 6* come diametro, il semicerchi *C3°6*; poi avendo diviso l'intervallo *6 18*, che è il resto del diametro della proiezione, in due ugualmente, si descriverà il semicerchio *6 10 18*, che toccherà il precedente al punto *6*, e il semicerchio di proiezione 18 A 30^h al punto *18*; la spirale *C 6 18 A* 30^b farà la proiezione de l'asse tortuoso della vite di Archimede inferiore, che si estende fino al punto di altezza 30x al di sotto di *Q*.

La stessa spirale sarà ripetuta alla sommità della Colonna in senso contrario, cioè la parte della diritta posta a sinistra per servire di proiezione d'una maniera rovesciata dall'alto in basso all'asse della vite superiore che la rinchiude salendo.

Bisogna con preferenza riportare le parti di quelle spirali di proiezione alle divisioni dell'asse destro o cateto, con cui si sono tirate orizzontali indefinite; è perché bisogna che il contorno della spirale sia diviso in uno stesso numero di parti diverse che l'asse lo è stato con le secanti provenienti dal punto R; così siccome abbiamo diviso questo asse in *60* parti, bisogna che anche la spirale sia divisa in *60* parti altrettanto disuguali, la progressione di questa disuguaglianza dovrebbe essere la stessa delle tangenti, se la cosa valesse la pena di essere fatta con grande precisione; ma in una casa di poco uso ci accontenteremo dei pressapochismi fatti a vista d'occhio.

Anzitutto, poiché le tangenti, dalla base fino alla divisione 10_x, si sorpassano con un eccesso quasi uguale, si potra dividere egualmente il piccolo semicerchi *C 3°6* in sei pareti uguali, e il secondo semicerchio *6 10, 18* in dodici parti; poi il terzo semicerchio *18, A* 30^b in altre dodici, non uguali, ma un po' allargate a misura che ci si allontana dal centro *C*, regolandosi a vista sul rapporto degli intervalli dell'asse 10^x, 20^x, 30^x, ecc. Si farà la stessa cosa nella spirale superiore in senso contrario, cioè allargandosi verso il centro.

Se si volesse operare con più precisione, bisognerebbe rettificare il contorno della spirale e dividerlo proporzionalmente nelle parti dell'asse, a cui corrisponde, ciò che è molto facile; osservando, per esempio, che questa spirale taglia tre volte il diametro 30^h, *18*; cioè, nel punto *6*, nel punto *18*, e nel punto 30^b. Così poiché l'altezza totale *Q* 30^x è divisa in *30* parti, ogni semirivoluzione completa ne deve contenere *12*, che fanno insieme *24* parti, aggiungendo a ciò il quarto di rivoluzione, che deve contenerne *6*, si avranno *30* parti in circonferenza di spirale, come se ne hanno trenta in altezza data sulla base per la prima vite di Archimede, che sale aprendosi.

Per la stessa ragione la superficie, che sale richiudendosi, deve essere divisa nello stesso numero di parti, perché tutta l'altezza è stata divisa arbitrariamente in sessanta.

Attualmente, poiché le parti della spirale sono relative a quelle delle altezze delle linee orizzontali, condotte dalle divisioni dell'asse diritta, è chiaro che dirigendo delle parallele a questa asse con le divisioni della spirale, corrispondenti a quelle dell'altezza, si avranno dall'intersezione di queste linee i punti di proiezione verticale dell'asse curva della Colonna tortile; così la verticale condotta dal punto *10* della spirale, tagliando l'orizzontale diretta dal punto 10^x dell'asse, darà il punto *y* dell'asse curva; l'intersezione della verticale *20z* con l'orizzontale z 20^x condotta dal punto 20^x all'asse dritto, darà il punto *z* della proiezione verticale dell'asse curva della Colonna tortile, così per le altre.

La stessa cosa la verticale abbassata della spirale superiore dal punto *35* della sua divisione, che è fatta in continuazione di quella della spirale della base, darà a causa della sua intersezione con l'orizzontale 35^x *Y*, il punto *Y* dell'asse curva in proiezione verticale, quella che viene dalla divisione *50*, tagliando l'orizzontale 50^x *X*, darà il punto *X* dello stesso asse, così del resto.

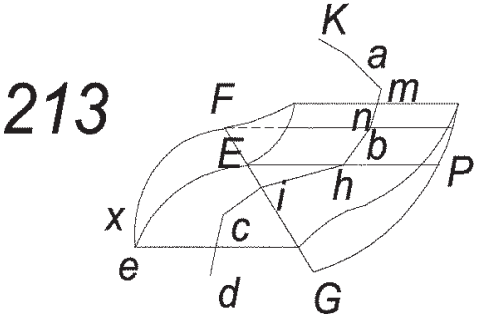
La proiezione verticale dell'asse essendo tracciata da più punti, come la si vede nella *fig. 211*, la si ripeterà a parte, come nella *fig. 210*, poi con il raggio dato *DA* per il semi spessore della Colonna, e altrettanti punti quanti si vorranno prendere sull'asse curvo, come in *c, c, c*, vicino e a volontà, si descriveranno cerchi, a cui si condurrà una curva a mano, che li tocca senza intersecarli, tanto da una parte quanto dall'altra, e si avrà l'elevazione della Colonna.

Presentemente, se si vuol fare una Colonna in spirale regolare un po' rigonfia verso il terzo dell'altezza sua, è visibile che invece degli intervalli differenti delle circonvoluzioni, si deve dividere la *Cachette* in tante parti uguali che si vuole di circonvoluzioni, così l'operazione diventa più semplice, perché si deve sopprimere quella che dipende dal settore di cerchio *Q 30 R*: del resto si farà l'elevazione dell'asse curvo nello stesso modo, e i contorni della Colonna come l'abbiamo appena detto, e non seguendo questo Trattato del Vignola: egli divide il cerchio della base della Colonna in otto parti uguali, e l'altezza in quarantotto, da ciascuna d'esse traccia parallele alla base come *Ep, eq, CP*, che gli servono a trovare l'asse curvo della Colonna allo stesso modo con cui abbiamo fatto avanti, che supponiamo qui la curva P a n m c S; poi avendo determinato il suo spessore, ne porta una metà da una parte e dall'altra dell'asse curvo, come in *m E*, e *m p, n e* e *n q, o E* e *o Q*, ecc. poi con i punti trova E, e, E; p, q, Q, egli traccia i contorni della sua Colonna, che sono perfettamente simili a quelli dell'asse curvo, ciò che non conviene all'uniformità dello spessore della Colonna, come si vedrà.

Dimostrazione dell'irregolarità dell'antico Trattato della Colonna in spirale del Vignola

E' senza dubbio nella regolarità della Colonna ritorta che sia fatta da un corpo rotondo di spessore uniforme in tutte le sue parti; ora la Colonna tracciata secondo la costruzione del Vignola cambia continuamente di spessore da una circonvoluzione all'altra, dunque non è regolare, né formata da un corpo esattamente rotondo in tutte le sezioni perpendicolari alle tangenti dell'asse curvo.

Fig. 213. Per trovare la minore, sia una porzione d'asse curvo *K a b c* d considerata come composta da un'infinità di piccole linee dritte inclinate differentemente all'orizzonte, come lo sono in effetti tutte le piccole corde di una spirale proiettata su un piano verticale, così la parte *a b* può essere considerata come verticale, la parte *b c* come inclinata all'orizzonte, per esempio, di *30* gradi, e la parte *c* d di *60* più o meno.



Supposto ciò è chiaro che il vero spessore della Colonna nella parte dell'asse a b verticale, sarà lo spessore orizzontale *e m* e *m p*, e sull'inclinato *b c*; lo spessore dev' essere preso sull'inclinato *FG* perpendicolare *a b c*, e uguale a *e p*; ma con la costruzione del Vignola questo spessore è preso in *E h* e *h P* parallelamente a *e p*, dunque il punto *E* è dentro lo spessore uniforme della Colonna della quantità *FE*; ora supponendo l'angolo *E h c* di 30 gradi, la lunghezza *E i* non sarà che la metà di *E h*, la cui ipotenusa *E h* è uguale per ipotesi a *F i*, dunque in questo caso la Colonna si trova ristretta in *E p* di una metà dello spessore che le si è dato in *e p*; di conseguenza se il corpo della Colonna è rotondo, cioè se la sezione in *e p* è circolare, la sezione in *E p* sarà ovale, e se la sezione in *e p* non è circolare, la Colonna non sarà esattamente rotonda, *ciò che si doveva dimostrare*.

E' dunque visibile alla sola ispezione della *fig. 213* che l'antico Trattato che dà il contorno *e E e* da una parte e *p P p* dall'altra, si allontana considerevolmente dai veri contorni e *F x e*, e *p y G*, che fanno la Colonna in spirale di spessore uniforme. Da cui segue che le curve elicoidi, cilindriche o a vite di Archimede dai lati opposti della proiezione verticale della Colonna non devono essere simili alla curva del suo asse, contro la pratica del Trattato del Vignola, ciò che abbiamo già dimostrato altrove in altre occasioni, quando abbiamo parlato della vite di San Gille rotonda, dove abbiamo mostrato che le chiocciole compagne, benché equidistanti fra esse, non sono per questo simili, perché quella che si avvicina all'asse destro (dritto) verticale è più ripida (erta) di quella che se ne allontana di più, che è più sdraiata, e così via.

Da dove ne consegue ancora che l'asse curvo non divide in due ugualmente tutte le sezioni orizzontali della Colonna, poiché supponendo, ciò che è possibile, i punti *n* e *b* della *fig. 213* riuniti in uno solo, è chiaro che *F n* è più grande di *E h*, che è la costruzione uguale a *n o*, dunque *F n* è più grande di *n o*, di conseguenza il Trattato del Vignola, che porta parti uguali da una parte all'altra dal punto dell'asse n non può dare che un falso contorno, *ciò che si doveva dimostrare*.

Dunque per correggere il Trattato del Vignola, essendo tracciato l'asse curvo, bisogna venirne al nostro, tracciando una grande quantità di cerchi e d'archi a destra e a sinistra di questo asse, per tracciare per le loro estremità una curva tangente, che è epicicliode diverso da ogni lato.

Si potrebbe anche me sembra fare ancora una piccola riforma del Trattato del Vignola, che sarebbe di fare le due viti del basso e dell'alto un pò più oltre, facendogli fare una circonvoluzione completa invece d'una metà a ciascuna; la mia ragione è che essendo così più allungate, si unirebbero più insensibilmente alla Chiocciola cilindrica che fa il corpo della Colonna.

Infine, se si vuol darle ènfasi, ne dobbiamo venire al nostro primo Trattato, senza tuttavia rialzare né riabbassare gli intervalli delle circonvoluzioni che di una quantità poco sensibile alla vista, ciò che si può fare allontanando molto il punto R dell'asse dritto destro Q 60^{x}.

Applicazione del Trattato sulla Pietra o sul Legno

Se la Colonna ritorta è cilindrica, come quella del Vignola, si comincerà dal formare una voluta del diametro e della lunghezza della Colonna, o dell'altezza che la pietra potrà portare se è fatta di tamburi, e avendo diviso il cerchio della base in otto parti uguali con quattro diametri, si metterà una riga su uno dei diametri ove la si farà tenere da qualcuno, poi se ne poserà un'altra all'altro capo della Colonna sul centro della base opposta, che sarà quella del vertice se la prima è la superficie sottostante, che si spianerà limitandola con la prima riga, facendola girare sul centro, in modo che l'una copra l'altra senza incrociarla, a vista si segneranno i due punti in cui questa seconda riga taglia la circonferenza della superficie superiore, e la si dividerà come quella della superficie inferiore in 8 parti, con cui e con quelle del letto di sotto, si tireranno righe dritte sulla superficie della voluta cilindrica, che saranno delle parallele all'asse retto oppure *Cachette*.

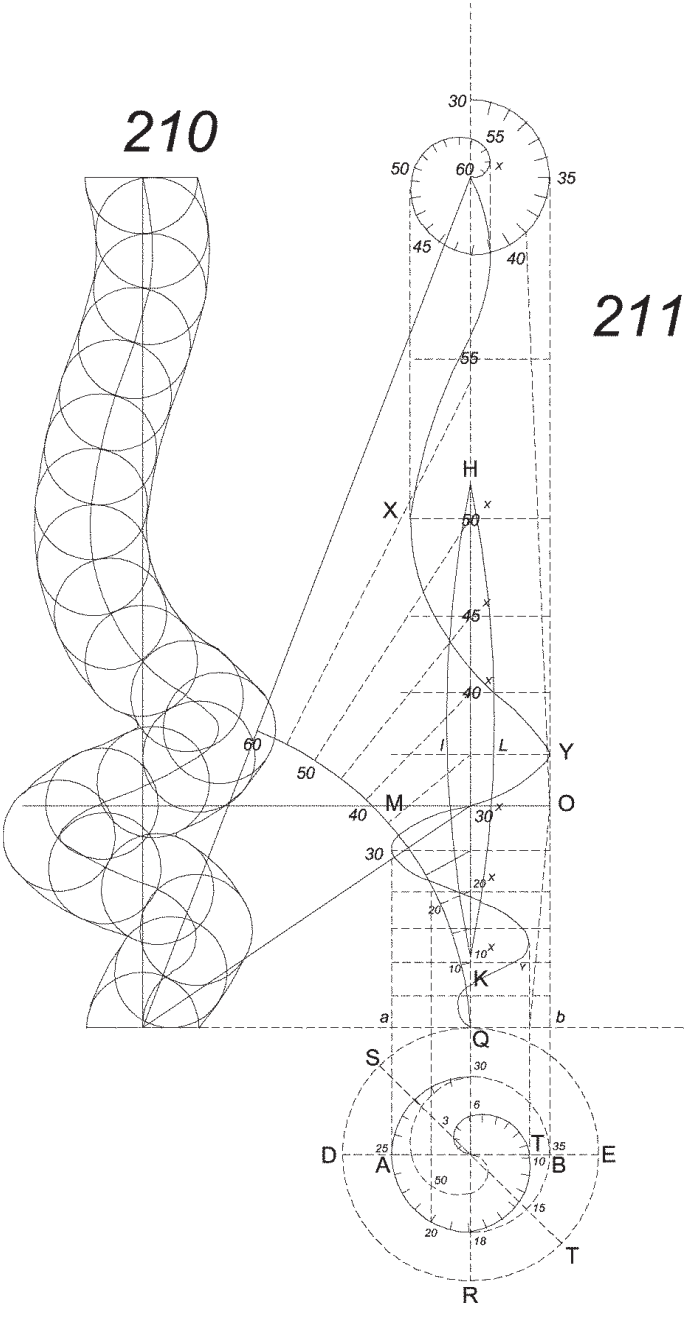
Si dividerà ciascuna di tali linee in 48 parti uguali, e si condurrà dall'una all'altra, salendo da una parte, la linea curva che segnerà la parte più sporgente di ogni circonvoluzione della chiocciola.

Per poi ricavarla, si tracceranno due circonferenze opposte sull'elevazione che è stata fatta dalla Colonna ritorta, con cui si scaveranno incisioni che daranno il contorno ondeggiato verticale dei lati opposti, avendo cura di tenere il piano, io intendo la superficie piana, di queste circonferenze non il loro centro dirette all'asse retto

piana, di queste circonferenze non il loro centro dirette all'asse retto della Colonna, senza la qual cosa daranno false incisioni; i centri di questi stessi cerchi un pò risaliti o riabbassati secondo i punti dati alla superficie della voluta, serviranno a fare altre incisioni sulle otto parallele dell'asse retto, e in questo modo si abbatterà la pietra d'incisione in incisione abbastanza vicino per non sbagliarsi.

Quando dico che i centri di questi cerchi serviranno, essendo posti un po' più in alto o più in basso, per fare nuove incisioni, intendo soltanto parlare della parte cilindrica, che è compresa tra le due mezze circonvoluzioni che fanno una Chiocciola alla base e l'altra al vertice, perché i contorni di queste due estremità sono diversi da quelli del fusto cilindrico fra di loro. Al presente, se invece della Colonna a spirale ordinaria se ne vuol fare una a circonvoluzioni disuguali e a chiocciole, bisognerà iniziare col fare un corpo rotondo a fuso smussato, con le due estremità simile al fuso del nodo *H L K l*, o per darne un'idea più netta, si farà una Colonna a èntasi, su cui si tireranno, come nella precedente cilindrica, linee curve che non saranno parallele all'asse retto, ma che saranno nello stesso piano della sezione con questo asse.

Si divideranno poi queste linee in parti disuguali, tali che li dà la *fig. 211* che prendiamo per esempio, e si traccerà da una divisione all'altra ..... le linee elicoidali delle parti aventi rilievo della Colonna. Si innalzeranno poi cerchi dai contorni opposti, seguendo cui si faranno due incisioni, ma a causa delle diversità delle circonvoluzioni, si faranno fare parecchie elevazioni, per esempio, quella della fig. 210, che è stata fatta sul diametro D E della fig. 211, non potrà servire che per questa posizione, occorrerà farne un'altra sul diametro Q R che sarà diversa; poi un'altra sul diametro *S T*, e così via per quanto lo si giudicherà a proposito; per fare nuove incisioni sempre dirette all'asse retto e dall'una all'altra, si abbatterà (lavorerà; mettere in opera; mettere a terra) la pietra o il legno come le incisioni l'indicheranno, il che richiede abilità, e attenzione per vuotare bene la Colonna senza incavi.



CAPITOLO DODICESIMO

APPENDICE CONCERNENTE LE DISPOSIZIONI ALLA COSTRUZIONE DELLE VOLTE

Le disposizioni alla costruzione di una volta consistono in due operazioni.
L'una a regolare lo spessore dei piedritti, che è necessaria per dar loro una forza capace di resistere alla spinta, allo sforzo che ella fa per allargarli, per aprirsi.
L'altra a regolare le curvature della struttura, che devono sostenere i conci mentre viene costruita, finché non si mette la chiave, affinché possano sostenere tutto il peso senza essere schiacciati.

I
DELLA SPINTA DELLE VOLTE

Benché il dettaglio della costruzione delle volte non sia il soggetto di quest'opera, le misure che dobbiamo prendere per stabilirne saldamente i supporti, ci appaiono così annessi, che gli Autori che hanno trattato del taglio delle pietre, hanno pensato di dare delle regole per determinare lo spessore dei piedritti, affinché non siano rovesciati dallo sforzo che fanno per aprirsi; ma sfortunatamente ne hanno fatto solo una pessima, che ha sicuramente creato molti di quei brutti incidenti di cascate premature, che hanno coperto gli Architetti, che si erano fidati di quella regola, di una vergogna che non meritavano, perché doveva servir loro come scusa, prima che dei matematici competenti ne dimostrassero la falsità e la migliorassero.

Questa regola di cui vi parlo è quella di P. Deran, che Blondel e P. Dechalles, che erano dei matematici, hanno seguito senza esame, ed in ultimo il signor De la Rue, che ha apparentemente ignorato che il signor De la Hire ne aveva dimostrata un'altra sedici anni prima che avesse pubblicato il suo Libro.

Signor Ispettore e Direttore del Genio Civile, che è venuto a conoscenza di questa regola, l'ha rifiutata per trovarne una migliore senza capirne né la costruzione né la dimostrazione, come lei confessa nella sua Dissertazione sulle pile dei ponti (pag. 4) il signor De la Hire, dice, questo scienziato del secolo pretende di aver dimostrato la spinta delle volte.

All'inizio ci aspettiamo che scopra qualche errore. Niente affatto, ci trova soltanto da ridire (pag. 6), conseguenza che questa regola sia al di sopra della portata degli operai quindi è inutile a loro. Finché i nostri pensieri non saranno facili da fare penetrare a quelli che saranno meno scienziati, non saranno istruttivi e quindi diventeranno inutili per i posteri. Ma con il permesso, non basta che noi ne sforzo della spinta, dove avrebbe concluso che la nuova regola che aveva immaginato non c'entrava niente né con l'una né con l'altra di queste considerazioni, non doveva essere migliore di quelli di P. Deran che ha gli stessi difetti, e che quello che lui prendeva per una dimostrazione della presente regola era solo un'illusione.

Potrà dirmi che chiedo più circospezione di quel che è necessario, visto che in un estratto dalla assemblea dell'Accademia di Montpellier dell'anno 1732 troviamo una nuova regola per determinare lo spessore dei piedritti delle volte, nel quale viene espressamente detto che non ci dobbiamo preoccupare dell'altezza che dovrebbero avere.

Sarebbe dare torto a questa illustre Accademia, credendo che questo discorso sia stato indotto senza correzione.

Lo scienziato accademico da questa regola ci dice che non la dava come spiegazione geometrica ma soltanto per la comodità degli operai, e che aggiungeva molto allo spessore necessario al solo equilibrio, perché la differenza delle altezze ordinarie nella pratica non aumentano gli spessori al di là di quella che lui ha giudicato necessaria, si può con questa precauzione evitare di fare attenzione all'altezza dei piedritti, ma non allo spessore e alla carica della volta alla quale P. Deran, i suoi seguaci e Gautier non hanno alcun riguardo. Ritorneremo qui con un problema che il signor Danisy mi ha fatto l'onore di spedirmi le differenze di aumento dello spessore dei piedritti che producono le loro differenze di altezza, prova che non contano queste differenze per niente.

Delle differenti ipotesi che sono servite alla ricerca della spinta delle volte

I

Il primo matematico che ha lavorato per determinare lo spessore che i piedritti delle volte dovevano avere per resistere allo sforzo della loro spinta, è stato il signor De la Hire dell'Accademia delle scienze che ha aggiunto ad una profonda teoria una grande conoscenza delle arti e particolarmente dell'Architettura.

Avendo notato che la maggior parte delle volte, di cui i piedritti erano stati troppo deboli per sostenerne la spinta, si erano spaccati nel mezzo dei fianchi tra l'imposta e la chiave, ha considerato la parte della cima compresa tra queste due spaccature come un solo concio, in forma di angolo, e i piedritti giunti al quarto della volta compreso tra l'imposta e la spaccatura di ogni lato, come se facesse un sol corpo con questa parte; di modo che considera in una sola Volta a Culla circolare tre solidi differenti, l'uno in mezzo che è la metà della volta e le altre due che ne fanno dei quarti come se fossero giunti ai piedritti e su questa ipotesi calcola lo sforzo che l'angolo centrale fa per allargare i suoi due appoggi laterali.

II

Sebbene questa prima ipotesi fornisca una soluzione molto sicura per la pratica, il signor Couplet della stessa Accademia ha giudicato che si poteva trovare con più decisione lo sforzo della spinta delle volte,

considerando in particolare ogni concio come un angolo che faceva sforzo per allargare i suoi collaterali, e perché questi angoli possano essere considerati come dei corpi levigati, o come dei corpi granulosi e scabrosi, ha esaminato il risultato di ognuna di queste soluzioni per determinare lo spessore dei piedritti.

III

Il signor Danisy dell'Accademia di Montepellier, per liberarsi della necessità di questa ipotesi, ha consultato l'esperienza facendo fare dei modelli di volte di diverse curvature che ha caricato sulla chiave o ha diminuito la forza degli appoggi dei loro piedritti al punto dove cominciano ad aprirsi per vedere quello che succedeva al momento della loro distruzione per tirarne delle conseguenze proprie a determinare lo spessore dei piedritti, ma anche se ha dato una regola per gli operai, non ha reso ancora pubblica quella che ha promesso nell'estratto dell'assemblea dell'Accademia di Montpellier del 1732. Parleremo di ciascuna soluzione di questo problema.

Problema I

DATI LO SPESSORE DI UNA VOLTA CILINDRICA, LA SUA CARICA, E L'ALTEZZA DEI SUOI PIEDRITTI, TROVARE LO SPESSORE PER SOSTENERNE LA SPINTA.

Questo problema può essere risolto in diverse maniere come abbiamo già detto.

Prima soluzione per la prima ipotesi di un solo angolo, comprendente il quarto di volta verso la chiave.

Seguendo la stessa ipotesi si può trovare lo spessore dei piedritti richiesta in due maniere, o per calcolo, o per costruzione geometrica.

Quanto alla prima non ho nulla da aggiungere a quella data dal signor Belidor nel libro intitolato La scienza degli ingegneri, dove ha trovato una equazione di cui ha fatto un'applicazione pratica col calcolo in una maniera molto chiara e facile per tutte le volte cilindriche semplice e per le piattabande.

Per la seconda via, la costruzione senza calcolo, con il righello ed il compasso che è più comodo e più alla portata degli operai, daremo quella del signor De la Hire, che il signor Gautier ha guardato come incomprensibile e si vedrà che non è di una esecuzione più difficile di un gran numero di Trattati del taglio delle pietre che troviamo nei Libri di P. Duran e del signor De la Rue, di cui i seguaci fanno uso tutti i giorni.

Per dare un esempio interessante a proposito di questo soggetto, e sostenere quello che abbiamo da dire con l'esperienza, proporrei qui una polveriera di una grandezza superiore dell'ordinario e le stesse misure di quello che fu fatto nel 1732 in una città della frontiera, il

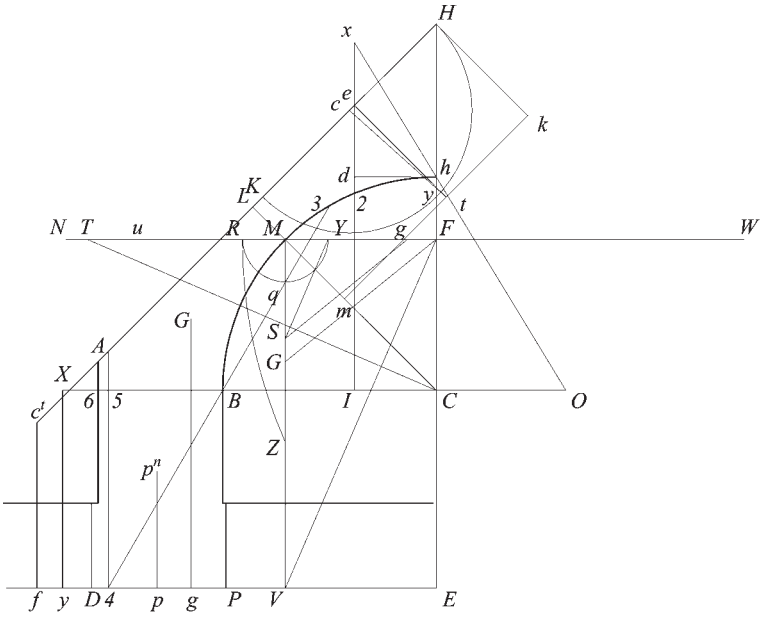


Fig. 214 Metà del profilo di un palazzo voltato a "culla".

quale a causa della debolezza dei piedritti crollò ancor prima di essere totalmente disarmato.

Sia (Fig. 214) la figura AHED la metà del profilo di un palazzo voltato a culla di cui la metà della curvatura in doele è il quarto del cerchio BMh, e di cui l'estradosso è una fogna colma in linea retta HA, passando alla distanza LM dalla doele dov'è il minimo spessore.

Sai anche l'altezza data BP dal punto B di imposta della volta al di sopra del pian terreno PE, dobbiamo trovare una linea BX che determina lo spessore del piedritto XBPy di forza sufficiente per controbilanciare lo sforzo della volta che tende ad allargare il punto B, che lei spinge per aprirsi e cadere.

Dal centro C della mezza curvatura BMh che si suppone circolare, avendo elevato la verticale CH parallela al piedritto BP, divideremo l'arco Bh in due uguali in M, da dove porteremo una seconda verticale MV e l'orizzontale indefinita NW, che taglierà CH in F. Tireremo dal centro C passando da M, la linea CL, che taglierà AH in L.

Poi misureremo la superficie quadrilatera LHhM, compresa dall'arco Mh della doele e le tre linee diritte LH, Hh, LM, prendendo tutto il triangolo LHC di cui ritaglieremo il settore del cerchio MhC, quello che possiamo fare senza calcolo con righello e compasso come lo insegneremo agli operai.

Avendo diviso la linea LC in due uguali per m, porteremo dal punto m la linea mh parallela al lato LH, e dal punto H un'altra Hk parallela ad LC che taglierà la precedente nel punto k; il rettangolo Lk sarà uguale al triangolo rettangolo CLH, da cui bisognerà ritagliare un settore del

cerchio CMh.
Divideremo l'arco Mh in due uguali nel punto 2, rettificheremo l'arco h2 che porteremo in hd perpendicolarmente a CH, il rettangolo Cd sarà uguale al settore CMh.

Bisognerà adesso ritagliare il rettangolo Cd dal rettangolo Hm, quello che si farà riducendo Cd alla stessa altezza o larghezza che il parallelogramma Hm su BC prolungata, prenderemo Co uguale a Cm e tireremo dai punti o e h la linea ox, che taglierà id prolungata in x; taglieremo la lunghezza dx in L e sopra LH e tireremo et parallela a Lm; il rettangolo Ht sarà il valore della superficie quadrilinea mista LmhH che cerchiamo.

Prenderemo la radice quadrata di questa superficie portando il lato et in eK; poi avendo diviso KH in due segmenti uguali in c, dal punto c per il centro, cK o cH per il raggio, faremo un arco che taglierà et in y; la linea ey sarà la radice quadrata che cerchiamo.

Ora porteremo questa radice quadrata dal punto M in g sull'orizzontale MF, e dallo stesso punto M in G sulla verticale MV; dai punti GF, porteremo GF, e dal punto g la parallela gS, che taglierà MV in S.

Tireremo dal punto V, dove la verticale MV taglia la linea orizzontale del piano terreno, la linea VF, e dal punto S, porteremo una parallela SY, che taglierà MF in Y.

Dal punto C, tireremo CT perpendicolare a VF che taglierà FMN nel punto T; poi prenderemo la metà di MY che porteremo da T in N, poi indietro porteremo la distanza PV da N in u; la lunghezza Fu sarà portata dall'altro alto in FW per avere il punto W.

Dal punto M per il centro e con raggio MY, descriveremo il semicerchio YqR, che taglierà MV in q ed MN in R; dal punto W per centro e con raggio l'intervallo WR, descriveremo l'arco RZ che taglierà MV in Z; la lunghezza Zq è quella che cerchiamo per determinare lo spessore del piedritto in BX o Py, poiché lo supponiamo in piombo senza scarpa.

Risultato secondo le misure date

Supponendo delle misure a questo edificio così come sono marcate dalla scala sotto la figura 214 troveremo che il raggio o il semidiametro BC della Volta a Culla essendo dato da 30 piedi, il minimo spessore LM ai reni di 3 piedi, quella in chiave Hh di 10, e l'altezza del piedritto di 13 piedi e mezzo; lo spessore cercato per questo stesso piedritto è stato trovata dalla costruzione di 11 piedi.

Osservazione sull'esperienza

L'esperienza ha fatto vedere che un edificio costruito sulle misure che abbiamo appena dettagliato per l'altezza dei piedritti, la larghezza della curvatura e la carica del suo spessore ai differenti punti della volta, ma di cui i piedritti avevano solo 9 piedi di spessore, non ha potuto resistere, anche sorrette da contrafforti di 4 piedi di coda, e di 6 piedi di spessore spaziati di 3 in 3 tese [antica misura francese, equivalente a circa 1,949 metri; n.d.t.] , poiché la spinta della volta ha fatto allargare i piedritti all'imposta; sdraiandoli a scarpa, in modo che la volta si è anche aperta ed affossata; è certo che se questi piedritti avessero avuto 2 piedi di spessore in più, come lo richiede l'operazione fondata sull'ipotesi del signor De la Hire, l'incidente non sarebbe successo, poiché nello stato in cui erano le cose era visibile che le potenze della spinta della volta e della resistenza dei piedritti si allontanavano già molto dall'equilibrio, visto che le parti disarmate nella più grande lunghezza della volta hanno resistito qualche ora prima che crollassero, 2 piedi di spessore in più avrebbero fortificato i piedritti al di là del necessario; però seguendo queste misure sarebbero state ancora in stato di equilibrio, al quale non è prudente all'architetto di fissarsi; conviene aggiungere qualche spessore in più a dei contrafforti.

Si può concludere con questa esperienza che le regole del calcolo e dell'operazione, fondate sull'ipotesi del signor De la Hire, sono molto sicure per lo stato d'equilibrio tra la spinta della volta e la resistenza dei piedritti, e che se si aggiunge qualche rinforzo ci mettiamo fuori pericolo per la frattura della volta.

non dico nulla dello spessore della muratura che possiamo risparmiare per mezzo dei contrafforti. Il signor Belidor ne ha dato il calcolo; questa costruzione espone l'edificio a delle fratture, se le loro code non sono un po' più spesse e poggiate su un fondo molto solido, costruito con una pietra di grandezza e solidità come lui stesso ha osservato, poiché sono degli appoggi dove avviene lo sforzo della spinta e si conficcano più facilmente nel suolo, dato che sono stretti e spostati al di sopra del muro.

Della spinta delle volte a

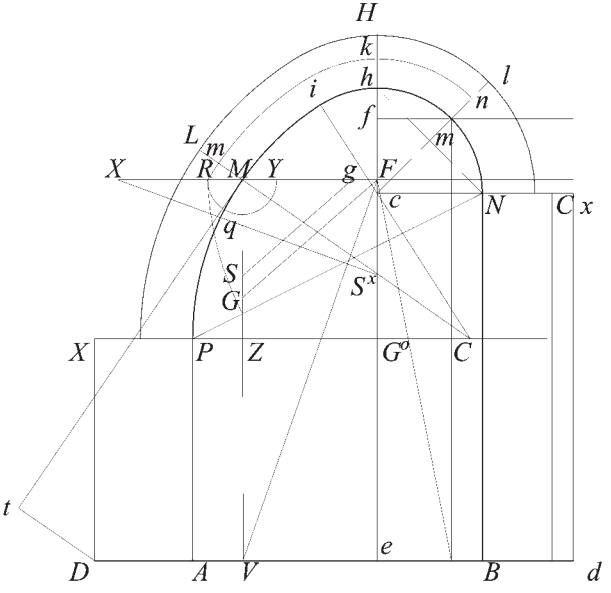


Fig. 217 Costruzione di una volta ellittica a sesto rampante.

curvatura ellittica

PRIMO
Dell'estradosso rialzato

Nell'esempio precedente, l'estradosso era di natura differente dalla doele, visto che la doele era circolare, e l'estradosso in linea dritta, che formava uno spessore della volta da tutte le parti diseguale, qui supponiamo, quello che è più ordinario negli edifici, è che l'estradosso sia un arco concentrico o equidistante dalla doele e che quest'arco sia ellittico di una ellisse, di cui il grande semi-asse è verticale. Per non moltiplicare le figure, noi prenderemo per metà del profilo,quella dell'arco rampante della Fig. 217 che supporremo essere tale in ARMhe sull'altezza del piedritto dato AR.

Avendo diviso la metà Rh in due uguali in M, porteremo da questo punto una tangente Mt all'arco ellittico, dal problema III del II° libro, al quale tireremo una perpendicolare MS^x taglierà la verticale del centro h al punto S^x del quale faremo uso come per il punto C nella figura 214.

L'operazione sarà perfettamente uguale, e anche un po' più semplice a causa dell'uniformità dello spessore della volta, ad esempio, per trovare la radice quadrata della parte LMhH, divideremo lo spessore della volta LM in due segmenti uguali in m, da dove porteremo l'arco mn equidistante dall'arco Mh, e porteremo questo arco medio mn in un posto a parte come in Fig. 215, e dove stenderemo una linea retta mh alla quale aggiungeremo la lunghezza hH, che è lo spessore della volta

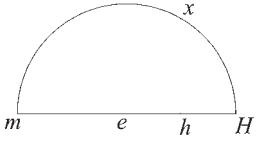
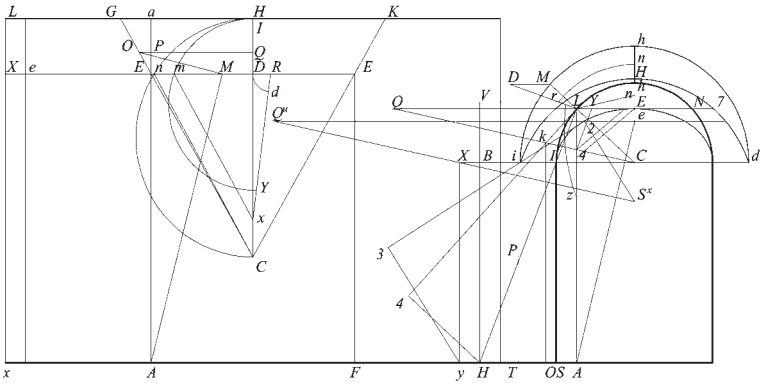


Fig. 215

della figura 217 per fare sopra la linea mH come diametro, un semicerchio mXH, che taglierà hX perpendicolare su mH al punto X; la linea hX sarà la radice quadrata della superficie del profilo di una parte di una volta LMhH, che porteremo da M in g e da M in G per continuare l'operazione dello stesso metodo dalla figura 214, la quale darà la lunghezza qz per lo spessore del piedritto RX che cerchiamo.

SECONDO
Per le volte ellittiche ribassate

Sia (Fig. 219) la curvatura ribassata punteggiata IEd, ed il suo estradosso iH7. Avendo diviso l'arco IE in due uguali in 2, porteremo da questo punto 2 una tangente indefinita 2˙3, alla quale tireremo una perpendicolare S^x, che taglierà la verticale dal centro della chiave ES^x al punto S^x al di sotto della linea dell'imposta Id, da questo punto ci serviremo come del punto C nella fig. 214 per tirare una linea S^xT alla linea Ae che taglierà l'orizzontale sT al punto T che si trova da questa costruzione molto più lontano dal punto Q pervenuto dalla costruzione della piena curvatura Ind della stessa figura dove risulta uno spessore più grande del piedritto, al contrario dell'esempio precedente della curvatura rialzata, dove il



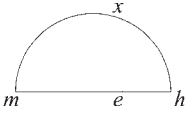


Fig. 218

punto S^x della figura 217 si trova sopra la linea di imposta XRC, dove risulta che la perpendicolare tirata da questo punto S^x alla linea FV, da un punto T di sezione con l'orizzontale MT molto più vicino della linea del centro he che è quello che proviene dal pieno centro della volta, poiché il punto G° da dove partirebbe la perpendicolare su VF è al di sopra del punto S^x.

Vediamo nella Fig. 218 l'estrazione della radice quadrata della superficie.

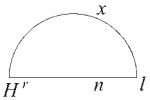
Abbiamo aggiunto alla figura 219 le due costruzioni della piena curvatura e della sottostante per farne il confronto, dove vediamo che le loro differenze derivano dalle inclinazioni diverse delle tangenti L4 a 2˙3 che sono state portate al centro degli archi ILh e I2E che danno le diverse altezze dei punti C e S^x.

Non parliamo qui dei piedritti a scarpa che rendono l'operazione molto più composta perché non hanno punti comuni negli edifici più usuali, come le polveriere, ecc. di cui dovremmo parlare formulando un'altra ipotesi.

TERZO
Per gli archi rampanti

Se la curvatura di un arco rampante è composta da due archi di circonferenza, come nella figura 217, l'arco Rh che è composto dall'arco RMi, di cui il centro è sulla linea dell'imposta bassa in C, e dell'arco ihmN, di cui il centro è in c sulla linea al livello dell'imposta superiore cN bisognerà cercare lo spessore del piedritto che conviene ad ogni parte

della volta a destra e a sinistra della verticale HE abbassata dalla punta



h dell'arco rampante. Così divideremo il piccolo arco superiore hmN in due uguali in m da dove porteremo al centro c la linea me, che taglierà la verticale He al punto c, divideremo anche l'arco composto RMih in due uguali in M da dove tireremo il raggio MC che taglierà la verticale He al punto x che sarà come il punto C della figura 214.

Prenderemo a parte le medie proporzionali tra le lunghezze dell'arco dello spessore medio rettificato mK e dello spessore Hh come si vede in fig. 215 e tra l'arco medio kn rettificato e lo stesso spessore Hh (Fig. 216) per avere le radici quadrate hX, nx della superficie di ognuna di queste metà della volta, e farne uso (fig. 214) che non comporta nessuna difficoltà.

Se l'arco rampante è una curva semplice di qualche sezione conica, avendo cercato il punto della sommità h che sarà quello che combacia con l'orizzontale parallela a RC, divideremo come in tutti i casi il mezzo di ogni arco tra l'imposta ed il punto in due parti uguali e tireremo da questi punti M e m delle tangenti alle quali faremo delle perpendicolari che daranno i punti c ed S^x come abbiamo fatto per le altre curvature ellittiche e continueremo l'operazione come nella figura 214.

Confronto e nota importante sulle regole degli autori che hanno trattato la spinta delle volte

Se invece della costruzione che ci ha dato lo spessore dei piedritti noi avessimo cercato gli stessi spessori con le regole degli autori che hanno preceduto il signor De la Hire, avremmo capito che erano inferiori, ed ogni tanto riusciremmo ad arrivare al necessario a seconda di quanto sarebbe stato più o meno lo spessore e la carica della volta e dell'altezza dei piedritti.

Per esempio nella figura 214, seguendo il metodo di P. Deran, che Blondel, Dechalles e La Rue, avendo diviso l'arco Bh in tre parti uguali nel punto 3, dobbiamo tirare la dritta 3B4, e fare B4 uguale a B3 per avere il punto 4 da cui tireremo la verticale 4°5, la quale secondo loro determinerebbe lo spessore del piedritto 5B. Ora è visibile che questo spessore essendo inferiore a XB di una quantità considerabile 5X che è quasi 1/3 di XB, la volta non avrebbe potuto resistere essendo già inferiore alla quantità 6°5 e allo spessore 6B che non è stato sufficiente; da cui segue che la volta costruita su tali misure avrebbe schiacciato gli operai che l'avrebbero disarmata.

La regola del signor Gautier si avvicina in questa circostanza ad un buon spessore per caso, perché se applichiamo la stessa regola alla volta della figura 217 troviamo che viene ridotta a prendere come spessore del piedritto la metà della corda Nh, la quale essendo portata in NG, cade all'interno del punto x che è quello dello spessore giusto, per conseguenza è troppo debole dove si incontra, e la volta si rovescerà durante il disarmo.

Al contrario sarà più forte al piedritto inferiore RX, il quale dimostra che può variare in più o in meno a seconda della carica della volta e l'altezza dei piedritti.

È strano che nessuno di questi studiosi non si sia accorto che bisognava dare più forza per poter sostenere una grande carica che non una piccola, rimanendo sempre lo stesso diametro, e che un piedritto molto elevato è più facilmente rovesciabile di uno più corto.

Dimostrazione della costruzione

La dimostrazione della soluzione del problema si trova nelle memorie dell'Accademia delle Scienze, dove il signor De la Hire dovendo parlare solo a scienziati di primo ordine non è entrato nei dettagli come converrebbe farlo con della gente di classe inferiore.

Sia la porzione dell'arco superiore LMF = ss e la porzione dell'arco inferiore ILM = vv. LE = f; CE = e; LA = g; IS = b; SA = a; TO = h; HS la larghezza del piedritto = y, e di conseguenza TS = ½ y, nella supposizione che l'altezza del piedritto sia uguale a LA, si trova la seguente equazione

ss e g – ss f y – ss f a = ½ y y g f

e ponendo ss = f m

si riduce a m e g – m f y – m f a = ½ y y g

e ponendo ancora m f = n g

e moltiplicando per 2 si trova

y y + 2 n y = 2 m e – 2 n a

che da la costruzione che abbiamo descritto, la cui dimostrazione non si presenta facilmente a prima vista, perché la si nota senza meditazione quando non siamo abbastanza concentrati nel calcolo, è per questo che ho pensato di sostituirla continuando la riduzione di questa equazione aggiungendo ad ogni termine nn, si avrà

y y + 2 n y + n n = n n + 2 m e – 2 n a

facendo la radice quadrata avremo

y + n = “n n + m e – 2 n a

e togliendo n avremo che

y = “ n n + 2 m e – 2 n a – n

con la quale abbiamo la costruzione che da y = HS.

Per scoprire le ragioni per le quali la grandezza 9°8 = y = H, bisognerà stare attenti che le linee delle costruzioni diano le seguenti analogie.

Siccome EZ è parallela a X4, avremo

LE (f) . LX (“ss) : : LZ (“ss) L4 (ss/f = fm/f = m)

siccome EZ è parallela a 4Y, avremo

LA (g) L4 (m) : : LE (f) LY (fm/g = ng/g = n)

e siccome i triangoli Ale e QEC sono simili, avremo

LE (f) LA(g) : : EC (e) . EQ (eg/f)

il resto della costruzione è abbastanza facile che si può seguirla senza altra spiegazione.

Problema II

DATI L’ALTEZZA DEI CONCI DI UNA PIATTABANDA E QUELLA DEI LORO PIEDRITTI, TROVARE SENZA CALCOLO LO SPESSORE DEI PIEDRITTI

Sia il rettangolo ABEF, l’apertura di una porta chiusa da una piattabanda, e l’altezza dei conci Ba e quella dei piedritti AB; dobbiamo trovare la lunghezza di una linea Ax che determina lo spessore dei piedritti affinché siano di una forza capace di resistere allo sforzo che fa la piattabanda per allargarli.

Dalla costruzione del disegno finito ordinario per il taglio delle pietre si determina l’inclinazione delle facce della sommità nell’allineamento BG del lato BC di un triangolo equilatero formato sulla piattabanda BE in modo che le tre linee BE, BC e EC siano uguali tra di loro e che i tagli GB, EK tendono al punto comune C.

Ciò supposto, avendo diviso la linea DH in due ugualmente in Q, avendo portato QO parallelo a BD porteremo la lunghezza QO in DY e con HY per diametro, avendo descritto il semicerchio YmH che taglierà BD nel punto m, porteremo Dm in BM e tireremo AM dal basso del piedritto dal punto M, dove faremo MP perpendicolare, che taglierà il piedritto AB prolungato in P.

Poi porteremo la metà di BD in DI, che arriva molto vicino al punto H; e con CI come diametro, avendo descritto il semicerchio CnI che taglierà BD in n dove tireremo la dritta nC alla quale faremo mx parallelo che taglierà CI nel punto x.

Porteremo poi BP in DR per tirare la linea Rx sulla quale avendo preso Rd uguale RD o BP, il resto XD sarà la lunghezza della linea che cerchiamo, la quale essendo portata da B in X o DA in x darà lo spessore del piedritto che deve sostenere lo sforzo di metà piattabanda, e l’altro EF la metà DK.

Dunque abbiamo ancora notato l’errore del metodo del signor Gautier che dà al piedritto solo lo spessore Be che è uguale a BD, metà della piattabanda: questo metodo era molto facile per farsi capire dagli operai.

Nota sull’utilità della teoria provata dai fatti

Sebbene la teoria della spinta delle volte sia un misto di cause fisiche l’esperienza conferma l’esattezza delle regole che abbiamo spiegato, visto che le volte che erano appoggiate su dei piedritti più deboli di quelli dati sono sprofondate; così seguendo queste regole non corriamo nessun pericolo. Basta aggiungere ancora un po’ di spessore così da dare soltanto quello che è necessario mettere la forza della resistenza dei piedritti in equilibrio con quella della spinta della volta; in questo stato si espone il fatto di vederlo rompere dal minimo incidente; sicché riporterò un fatto che prova la necessità di questa precauzione.

Ho fatto fare in un’opera staccata una piccola Cappella Ellittica per il distaccamento delle guardie la quale è inscritta in un ottagono allungato , coperta da una semplice volta coronata da un soffitto, avendo dato di spessore al muro soltanto quello che risulta dal calcolo della prima ipotesi l’ho fatta disarmare, appena è stata finita senza dargli il tempo di assestarsi è resistita senza alcuna frattura, però avendo avuto troppa fiducia nella bella stagione non mi sono affrettato a farla coprire; un temporale con pioggia abbondante fece riempire i pori dei mattoni aggiungendo nuova carica che ruppe l’equilibrio; avvennero quattro crepe una ad ogni asse ellittico, ma non ha avuto altre crepe da quando è stata coperta dal suo colmo.

Su quello dobbiamo fare tre riflessioni utili alla pratica; la prima, che dobbiamo aumentare la forza dei piedritti al di sopra dello stato d’equilibrio con la spinta.

La seconda, le volte dovevano essere fatte solo al coperto per paura che le piogge le caricassero troppo.

La terza, non bisogna fidarsi dell’esperienza della gente senza Teoria anche se nella pratica possono essere vere, per dare le misure dello spessore dei piedritti dei palazzi con le volte di cui non hanno esempio da imitare precisamente perché in questo un esperto è sempre un vecchio ignorante; è una conoscenza della molla della Teoria che la pratica non può mai dare né possono tirar fuori dei ragionamenti di confronto delle opere che vedono finite, nelle quali sono soggetti a sbagliarsi in quanto i casi variano, 46 anni di routine senza principio non poteva istruire l’Architetto del magazzino (di cui abbiamo parlato) del cambiamento delle misure che conveniva alla sua grandezza e alla sua carica, che era un po’ al di sopra dell’ordinario; non è l’unico a cui è successa una cosa del genere per la stessa ragione.

Questi eventi hanno fatto ingiustamente Gente onesta di connivenza sulla non esatta costruzione o di negligenza a stare attenti alla solidità, anche se l’esame della qualità dei materiali li ha giustificati, ed il Pubblico, anche gente di considerazione, che non sapevano che bisognava essere

un Matematico per dalle delle giuste misure ai piedritti delle Volte, hanno avuto delle difficoltà a ricredersi di questo falso giudizio, e l'hanno ributtato sulla cattiva qualità del suolo delle fondamenta, ma la gente pulita ha riconosciuto dalla non esecuzione delle regole fondate sulla Meccanica, che quello che aveva diretto i lavori del palazzo di cui si parla aveva sbagliato solo per un difetto di Teoria; seguito naturale e legittimo di alcuni casi che sono stati sempre affetti di un fare Spernit ignarus quod nequit assequi.

Mi sembra che questi siano degli argomenti senza replica contro quelli che odiano la Teoria, e che osano andare avanti senza arrossire, come Cartaud nel suo settimo pregiudizio, che le Matematiche non hanno contribuito al progresso delle Arti. Ne sapevano altrettanto prima del 1712? In mancanza di questa scoperta quante altre Volte sono cadute a causa di chi le ha costruite o fatte costruire: so che ai miei tempi questo incidente è accaduto a tre polveriere, ad un grande Edificio elevato con volte su tre piani per la Cancelleria di Wirsbourg, dopo essere stato totalmente finito; tuttavia coloro che si erano intromessi erano persone della pratica dell'Architettura; cosa rispondere a questo? Dobbiamo dunque ammettere che la Teoria in questi casi è più utile della pratica senza i principi della Geometria e della Meccanica.

Sono ancora delle ragioni patetiche per autorizzare la preferenza che dobbiamo dare nella scelta delle direzioni agli Ingegneri che possiedono la Teoria delle Arti, su quelli che danno soltanto dei servizi di guerra, perché si tratta del buon uso delle spese del Re, e non delle funzioni militari. Dobbiamo senza dubbio ricompensare i buoni Ufficiali che hanno esposto la loro vita utilmente con delle grazie e degli onori, e preferirli a quelli che hanno fatto meno quando sono altrettanto puliti alla costruzione che alla guerra, ma se sono raccomandabili soltanto con questa ultima parte senza genio e senza alcuna scienza, come se ne trova, è evidente che hanno solo la minima parte delle qualità necessarie di un Direttore, che importa al bene del lavoro che si preferisce, che sono essenziali per la costruzione. Se fossimo sempre stati attenti a questo, il Re avrebbe risparmiato molti soldi mal impiegati.

SECONDA IPOTESI

Per la ricerca della Spinta delle Volte

Nella precedente ipotesi abbiamo considerato la Volta in Culla come un massiccio di murature che si era consolidato ma che la spinta aveva fatto una crepa lungo i reni all'altezza di 45 gradi, qui la considereremo come un assemblaggio di Conci lisci senza legami che si spingono gli uni con gli altri agendo con la loro pesantezza secondo le differenti inclinazioni dei loro letti. È così che il signor Couplet li aveva considerati nella sua memoria inserita in quella dell'Accademia delle Scienze nel 1729 su quell'ipotesi ha stabilito più teoremi e problemi curiosi e utili per le spinte delle Volte; ma siccome il calcolo è molto lungo e complicato ho creduto rendere servizio al pubblico se gli avessi procurato una soluzione più semplice e più adatta alla pratica: in quest'idea consideriamo con ragione il signor Bernoulli come uno dei geometri dell'Europa il più capace a trovarla, l'ho pregato di darci qualche ora del suo tempo che ci accordato anche se scomodato, per cui mi ha dato una prova dell'amicizia per cui gli sono molto riconoscente.

Ma siccome questa soluzione suppone una conoscenza delle regole d'energia per le velocità virtuali, ha avuto la cortesia di mandarmi una lettera che lui scrisse al signor Varignon nel 1715 che riguardava questa regola di cui farò un estratto prima di entrare in materia; comincia per stabilire questo principio, che in ogni equilibrio c'è un'uguaglianza di energie di forze assolute delle velocità virtuali.

Per concepire questo principio, e farne uso nella statica bisogna immaginarsi diverse forze differenti che agiscono secondo differenti tendenze o direzioni per tenere in equilibrio un punto, una linea, una superficie, un corpo; se imprimiamo a tutto il sistema di forze un piccolo movimento sia parallelo a se stesso secondo qualunque direzione, sia intorno a un punto fisso qualunque, sarà facile capire che da questo movimento ognuna di queste forze andrà avanti o indietro nella sua direzione, almeno che una o più forze abbiano la loro tendenza perpendicolare alla direzione del piccolo movimento, in questo caso questa forza o queste forze non vanno né avanti né indietro, perché questi avanzamenti e indietreggiamenti che il sig. Bernoulli chiama velocità virtuali, non è altro che ogni linea di tendenza aumenta o diminuisce con il piccolo movimento, questi aumenti o diminuzioni si trovano con una perpendicolare che dobbiamo tirare all'estremità della linea di tendenza di qualche forza per ritagliare dalla stessa linea di tendenza messa nella vicina situazione dal piccolo movimento una parte che sarà la misura della velocità virtuale di questa forza.

Sia per esempio P, un punto qualunque nel sistema delle forze che si sostengono in equilibrio, F una di queste forze che spinge o che tira il punto P, secondo la direzione FP o PF; Pp una piccola linea dritta che descrive il punto P da un piccolo movimento, dal quale la tendenza FP prende la situazione fp, che sarà o esattamente parallela a FP, se il piccolo movimento del sistema si fa in tutte le parti parallelamente a una dritta data di posizione, dove sarà con FP essendo prolungata, un angolo infinitamente piccolo se il piccolo movimento del sistema si fa intorno a un punto fisso; se tiriamo dunque Pe perpendicolarmente in fp avremo cp per la velocità virtuale della forza F in modo che FXcp fa quel che il sig. Bernoulli chiama l'Energia.

Bisogna notare che cp è o affermativo o negativo in confronto agli altri; è affermativo se il punto P è spinto dalla forza F, e che l'angolo FPp sia ottuso; è negativo se l'angolo FPp è acuto: ma al contrario se il punto p è tirato, cp sarà negativo quando l'angolo FPp è ottuso, e affermativo quando è acuto. Quando tutto questo è ben capito il sig. Bernoulli forma questa proposta generale.

LEMMA

In tutto equilibrio qualunque forza in qualsiasi maniera siano applicate e seguendo qualche direzione che agiscono le une con le altre, immediatamente, la somma delle energie affermative sarà uguale alla somma delle energie negative prese affermativamente.

Questa proposta fornisce una regola ammirevole per determinare senza problemi il rapporto delle forze assolute negli equilibri e delle forze mobili nelle macchine.

L'applicazione è interessante nell'esame delle forze della leva della puleggia dei pesi sospesi su dei piani inclinati o tirati da più corde; ma visto che queste cose non riguardano il nostro soggetto basta fermarci a quel che è necessario per venire alla soluzione del problema della spinta delle volte, per la quale devo soltanto far precedere il seguente.

Problema III

UN PESO SFERICO COME UNA PALLA B, ESSENDO SOSTENUTO DA DUE PIANI AC, DC, TROVARE L'IMPRONTA CHE OGNUNO RICEVE DAL PESO DELLA PALLA.

Immaginiamo che tutta la macchina o il sistema BACD faccia un piccolo movimento seguendo la direzione di un piano AC per prendere la situazione bacd.

Se tiriamo Cn verticale, cn orizzontale e Ce perpendicolare per cd, la velocità virtuale dal punto B sarà espressa da Cn perché la palla B essendo arrivata in b avremo Bb o Aa = Cc di conseguenza la verticale Cn marca di quanto è sceso il peso B sulla sua tendenza naturale, e la velocità virtuale della resistenza che fa che il piano CD sostenendo la palla B, espresso da Ce o Df perché è in questa direzione che si fa questa resistenza e che è della quantità della stessa Df che indietreggia il piano CD nel tempo e che la palla B scende B.

Chiamando dunque R la resistenza, o quello che è la sstesa cosa l'impronta che riceve il piano CD del peso B e P il peso assoluto della palla B avremo P x cn = R x Cc; dunque P.R::Cc.Cn:: seno Cce (ACD): seno Ccn vuol dire che il peso assoluto della palla è all'impronta che fa su uno di questi piani, come il seno dell'angolo che sono i due piani insieme, al seno dell'inclinazione dell'altro piano.

Se uno dei piani come CD era verticale per trovare l'impronta che il piano patisce come il seno dell'angolo dei due piani è al seno del suo complemento così il peso assoluto della palla è all'impronta cercata.

Se si volesse determinare immediatamente la proporzione delle due impronte che ricavano i due piani senza cercarne il rapporto che hanno con il peso assoluto della palla basterebbe soltanto muovere il sistema BACD secondo la direzione orizzontale, allora si vedrà che la strada che fa il piano AC avanzando perpendicolarmente è sulla stessa strada che fa nello stesso tempo il piano DC indietreggiando perpendicolarmente come il seno del piano AC e al seno dell'inclinazione del piano DC.

Dove segue immediatamente che le due impronte fatte su i due piani sono una ragione contraria dei seni delle loro inclinazioni.

Seconda Soluzione del primo Problema

Se supponessimo la volta tutta intera, le parti sarebbero senza dubbio in equilibrio, e non ci sarebbe altra spinta che quella che la volta causerebbe sui piedritti facendo sforzo per rovesciarli, ammesso che i letti dei cuscinetti fossero obliqui all'orizzonte, e se fossero orizzontali non ci sarebbe alcuna spinta, ma visto che le volte sono composte di conci staccati, i conci non hanno una direzione verticale comune per scendere, ognuno ne ha una particolare ed obliqua.

Esaminiamo ora la volta ABCDEFG sostenuta dai piedritti HS, JT composta da conci a forma di angoli troncati, dei quali ognuno, come per esempio EFPO, essendo impedito da dei vicini di scendere verticalmente, conserva però uno sforzo obliquo per scendere lungo questi giunti EO, FP, e per respingere di conseguenza i suoi due vicini DEON, FGJP in senso contrario, e effettivamente scenderebbe se questi due stessi conci vicini non lo respingessero in contro senso con uno sforzo così, stando attenti a scivolare lungo i loro giunti, perché si fa astrazione della calcina e delle ineguaglianze e degli ingranamenti dei giunti, e in effetti perché staremmo attenti a questi ingranamenti, visto che potendo essere più o meno considerevoli, il loro effetto può impedire al concio di scivolare, non è e non sarebbe determinato. Tra l'altro il più sicuro è sempre costruire le volte in tale modo, che si sostengono indipendentemente dal cemento e dagli ingranamenti, quando anche i conci non sarebbero solo delle palle perfettamente tonde, che di conseguenza non si toccherebbero che in un sol punto.

Dunque da allora lo sforzo di un concio, per scivolare in basso secondo la direzione dei suoi giunti, superi lo sforzo che i vicini esercitano per respingerlo in senso contrario, non ci sarà più equilibrio, il concio effettivamente scivolerà, facendo salire i più deboli vicini, e poi gli altri scivoleranno, e tutta la volta crollerà e cadrà in rovina senza che i piedritti possano impedirlo, perché la spinta di tutta la volta non è esercitata solo sui piedritti.

Per far si che i piedritti subiscano la spinta di tutta la volta, per potere calcolare la forza di questa spinta, e apporgliene una uguale o più grande, dando ai piedritti la larghezza richiesta, bisogna assolutamente che i conci della volta siano in equilibrio, vale a dire che gli sforzi con i quali i conci tendono a scivolare lungo i loro giunti, siano controbilanciati gli uni dagli altri: ora questo si può sempre effettuare, visto che questo sforzo dipende in parte dalla direzione può o meno verticale dei giunti, e in parte della massa o del peso dei conci, e che questo peso può essere aumentato o diminuito a volontà, dobbiamo soltanto dare ai pesi dei conci la giusta proporzione che richiede l'obliquità dei loro giunti, perché rimangano tutti in un equilibrio perfetto.

Calcoliamo prima lo sforzo di un concio, o di un angolo, o di un peso qualunque che si trova tra due piani inclinati, e che tende a scivolare lungo questi piani, perché bisogna considerare i giunti o i letti come se dovessero essere dei piani immobili, da dove poi determineremo tranquillamente la ragione delle obliquità di questi piani, il peso di ogni concio come deve essere, per fare si che tutti i conci si sostengano in un reciproco equilibrio tra di loro.

Sai P il corpo rappresentato da un concio, e che si trova tra due piani AC, BC che rappresenteranno i giunti prolungati dei conci.

Siano in più il seno dell'angolo ACB = m, il seno dell'angolo ACD, (sarebbe a dire dell'inclinazione del piano superiore all'orizzontale CD)

= r; il seno dell'angolo BCD (o dell'inclinazione del piano inferiore all'orizzontale CD) = f; il peso del corpo P = p.

Prima è visibile che il peso P stretto tra i due piani AC, BC, cerca di allontanarli stringendo ognuno perpendicolarmente alla direzione; sapere il superiore AC di basso in alto, e l'inferiore BC dall'alto in basso; così avremo in virtù del principio del sig. Bernoulli, spiegato nella sua lettera al sig. Varignon, la pressione del peso sul piano superiore = sp / m perché capendo che il punto P sia scivolato un po' sul piano inferiore considerato come immobile, in modo che il punto C sia venuto in V, e il piano AC indietreggiato parallelamente in AV, la piccola linea CI perpendicolare su aV segnerà la velocità virtuale della pressione sul piano superiore, eCG segnerà la velocità visrtuale del peso, segnando la direzione naturale che è la verticale, di conseguenza CI è a CG (o prendendo CV per il seno totale, il seno dell'angolo dei piani è al seno dell'inclinazione del piano inferiore, sarebbe a dire) m.s::p.ps/m che sarà = alla pressione che il peso esercita sul piano superiore = Pr / m supponendo che il piano AC sia immobile, e che l'altro BC indietreggi un po' nella situazione parallela bK, e tirando poi la verticale CF sull'orizzontale KE e la perpendicolare CH su bK.

Consideriamo ora tre piani AD, BD, CD, richiudendo due pesi o conci Pð, e vediamo quale ragione questi pesi devono avere con l'inclinazione dei piani per rimanere in equilibrio.

Siano nominati il seno dell'angolo ADB, che fa il piano superiore con quello centrale = m; il seno dell'angolo BCD che fa il piano centrale con quello inferiore = n, il seno dell'angolo ADE (DE essendo supposto orizzontale) = r, il seno dell'angolo BDE = s, il seno dell'angolo CDE = t; il peso del corpo superiore = p, il peso del corpo inferiore = ð.

La pressione esercitata dal peso superiore p sul piano centrale BD, sarà come l'abbiamo visto ora Pr / m e la pressione esercitata dal peso inferiore ð sullo stesso piano BD dal basso in alto = ðt / n : ora bisogna che le pressioni contrarie esercitate da una parte all'altra sul piano centrale BD, siano uguali tra di loro, sarebbe a dire che rp / m = tð / n; da dove si tira quest'analogia che esprime il rapporto dei pesi p.ð::mt.nr: :mst::nrs::m/rs.m/st, da dove si vede che bisogna che i pesi dei conci siano direttamente tra di loro come i seni degli angoli dei piani che le racchiudono, e reciprocamente come i rettangoli dei seni dell'inclinazione di questi piani o dei giunti.

Se i punti p, ð, d, C sono concepiti molto piccoli come gli angoli ADB, BDC, ecc. è chiaro che i tre angoli consecutivi ADE, BDE, CDE finiti saranno diversi tra di loro soltanto di una quantità infinitamente piccola, e di conseguenza il seno r di quello centrale BDE confrontato a CDE, deve essere composto uguale al seno di questo qui; ma che lo stesso angolo del centro BDE confrontato ADE darà il seno di quello là uguale al seno di questo qui, sarebbe a dire m / rs passa da m / rr e m / st da n / tt.

Dunque in questo caso i pesi dei conci saranno semplicemente tra di loro in ragione diretta dei seni dell'angolo dei loro giunti, e doppiamente all'inverso dei seni dell'inclinazione di questi stessi giunti.

Ora anche questa è una proprietà essenziale della Catenaria o della curvatura di una catena perfettamente flessibile sospesa dalle due estremità, quello che dimostra che se si volesse costruire una volta composta di palline molto piccole e perfettamente lisce, che si sostengono da sé in equilibrio, bisognerebbe che la curvatura che passa dai centri di tutte queste palline abbia la figura di una catenaria rovesciata.

I pesi dei conci avendo dunque tra di loro il rapporto che veniamo a trovare, la volta farà lo stesso effetto che se fosse tutta d'un pezzo, non ci sarà altra spinta da considerare se non quella che esercita sui piedritti, e nello stesso modo che abbiamo determinato qui sopra, la forza della pressione che ogni concio esercita sul seguente nella direzione perpendicolare al giunto che è tra di loro; definiremmo anche la forza della pressione di tutta la volta su ognuno dei piedritti nella direzione perpendicolare al primo giunto: abbiamo per questo solo da considerare tutta la volta come un solo concio o se no quello che è la stessa cosa, dobbiamo solo cercare la forza della pressione del cuscinetto (considerando il resto della volta come immobile, quello che è permesso di fare, visto che tutto è in equilibrio e di conseguenza immobile) sul piedritto considerato come un concio seguente.

Sia dunque la volta rampante ABCDE (la suppongo rampante per più generalità) sui piedritti ADGF, ECTH; il peso di tutti i conci insieme = P; il seno dell'angolo AKC che i due giunti estremi AD, CE prolungati sono tra di loro = m; il seno dell'angolo che il giunto AD fa con l'orizzontale = s, il seno dell'angolo che il giunto CE fa con l'orizzontale = r: avremo in virtù di quello che abbiamo detto qui sopra rp / m per la forza della pressione della volta sul piedritto ADGF, seguendo la perpendicolare al giunto AD; però questa pressione non è tutta impiegata per fare sforzo per rovesciarsi o per far girare il piedritto intorno al punto F considerato come il punto di appoggio; perché non è perpendicolare ma obliquo alla linea AF. Per conoscere dunque il momento di questa forza per rovesciare il piedritto bisogna concepire tutta la forza rp / m come applicata al punto L (dove suppongo che sia il centro di gravità della base del giunto di cui la sezione è la linea AD) e muovendo secondo la direzione LO perpendicolare ad AD, tirando poi FO normale a LO. Questo FO rappresenterà il braccio della leva a forma di gomito OFu di cui F è il punto di appoggio, e l'altro braccio Fu sotto-centro del piedritto.

Bisogna dunque secondo i primi elementi della Meccanica moltiplicare la lunghezza del braccio FO per la forza rp / m applicata al punto l, e diretta al punto O; questo prodotto sarà il momento cercato.

Per far sì che il piedritto non si rovesci, bisogna che il momento della resistenza, nominando il peso del piedritto = ð, moltiplicato per il sotto-centro Fu, sia uguale o più grande di rp / m moltiplicato per il sotto-centro OF: ragiono nello stesso modo per l'altro piedritto.

Segue che se la base FG del piedritto è abbastanza larga affinché il punto O si confonda con il punto F, o che venga dall'altro lato di questo punto, la spinta sarà nulla o anche negativa, e in questo caso il piedritto sosterrebbe la volta anche se non avesse alcuna pesantezza.

Abbiamo supposto qui che il punto di appoggio fosse dato, perché lo possiamo trovare risolvendo un problema algebrico, che è semplice per quelli che sono portati in questo calcolo, che giungeremmo qui al

seguito di una seconda soluzione sullo stesso principio: ma prima di tutto dobbiamo fare una applicazione della precedente alla ricerca dello spessore dei piedritti del deposito proposto qui davanti alla fig. 214.

Supponendo i giunti estremi secondo la prima ipotesi a 45 gradi di altezza, il profilo della parete della volta compresa tra questi due giunti, della superficie mista di 296 piedi quadrati, dandogli un piede di spessore avremmo P = 296 piedi cubi.

Il seno dell'angolo chiamato m, sarà il seno totale m = 100000.

Il seno di ciascuno dei giunti estremi con l'orizzonte chiamato s o r, sarà di 45 gradi, così s = 70710 dunque sp / m = 21071580 / 100000 = 210 x 71580 / 100000 segue trascurando la frazione , sp / m = 210 x FO = 9, darà per la pressione o spinta della volta 1890.

Considerando il piedritto come composto dalla parte della volta compresa dall'imposta fino al giunto di 45 gradi, e del piedritto così detto, bisogna contare il profilo di questa parte che dà 147 piedi cubi. Il profilo del piedritto al di sotto di 14 piedi di altezza, moltiplicato per la larghezza della base 12, dà 168

totale del piedritto	315	
moltiplicato per la mezza larghezza della base	6	
dunque p = 315 x Fu = 6 dà	1890.	

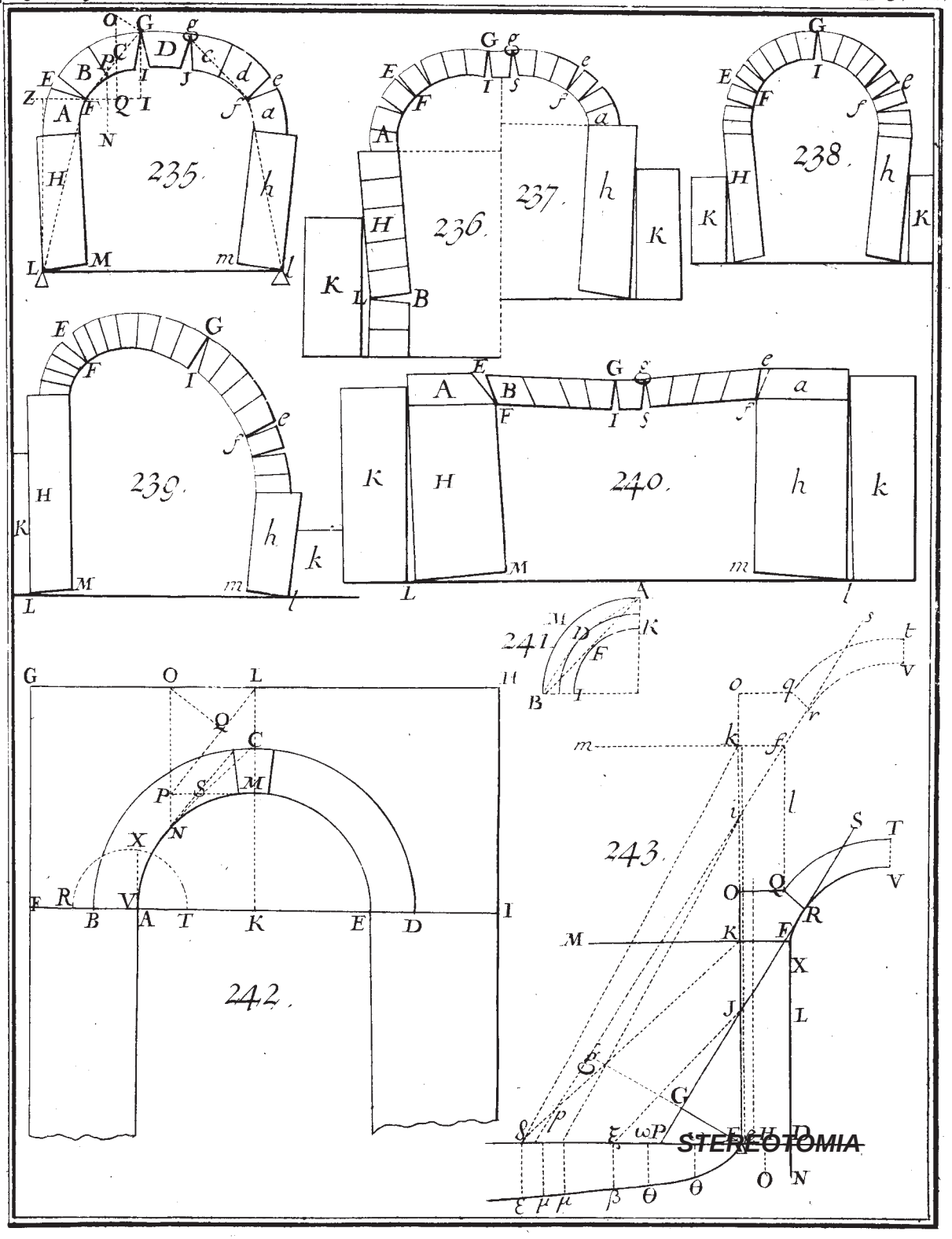
La somma è uguale a quella della spinta trovata qui sopra, di conseguenza ci sarebbe stato un equilibrio tra questa spinta e la resistenza del piedritto nell'ipotesi che i conci siano dei corpi infinitamente lisci, se avessimo dato 12 piedi di spessore alla base dei piedritti, quello che pare molto conforme all'esperienza.

Non propongo di aggiungere qui qualche spessore in più ai piedritti sebbene siano solo in uno stato di equilibrio. Primo perché i conci non essendo dei corpi lisci, come l'abbiamo supposto per il ragionamento, lo sfregamento dei loro letti deve impedire una parte del loro sforzo per scivolare gli uni sugli altri.

In secondo luogo, perché abbiamo preso solo il centro di gravità del piedritto nel centro della parte compresa al di sopra della fondazione fino all'imposta: ora questa parte non comprende tutto il piedritto, visto che quella della volta dall'imposta fino al letto del giunto estremo, lì deve essere aggiunta secondo la nostra ipotesi, e come questa ha il suo centro di gravità in G, che risponde al punto g della base sul quale cade la verticale venendo dal punto G, pesa su un braccio della leva Dg sotto-centro più lungo del primo Dp, di conseguenza rompe l'equilibrio in favore del piedritto che fortifica, dove segue che la volta non avrà più abbastanza forza per allargarla, dunque resisterà come lo proponiamo.

page 389.

Pl. 111.



STEREOTOMIA

$$X + l = (l^2 + 2m^3 + l\,m) \text{ e infine}$$

$$X = (l^2 + 2m^2 + l\,m - l)$$

Questa formula dà la costruzione descritta qui di seguito

Ricerche

Per una nuova soluzione senza alcuna ipotesi,ma solamente grazie alle conclusioni ottenute dall'esperienza delle fratture di volte composte da pietre assemblate senza alcun legame se non quello del loro taglio,posate su dei piedritti troppo deboli.

Si è detto prima che l'esperienza delle rotture di volte in muratura ad anelli o in mattoni che hanno fatto consistenza, ci mostra che esse si spaccavano di solito verso il centro della schiena, quando i piedritti erano troppo deboli; non avviene lo stesso con le volte in pietra di taglio le cui pietre sono senza legame.

Mr. Danisy ha fatto su ciò parecchi esperimenti con dei modelli di piccole volte per scoprire dove si creano le aperture delle parti della volta al momento della sua distruzione, quando i piedritti cedono allo sforzo della loro pressione per troppa debolezza, o quando alla presenza di forza capace di resistere, si carica la volta con qualche nuovo peso che ne aumenta la pressione al punto di ribaltare i piedritti: poiché questi esperimenti sono curiosi e possono tuttavia essere utili per trovare la soluzione del problema esposto, ve li riferisco così come sono riportat nel verbale dell'Assemblea pubblica dell'Accademia di Montpellier nel*1732*.

Egli fece fare una piccola volta in gesso a tutto sesto composta da sette pietre, così come rappresentato alla *Fig. 235*,alla cui base i piedritti *LM*;*l m* non era molto più grande di quello che avrebbero dovuto avere nello stato d'equilibrio; caricando la chiave con un piccolo peso,la volta si rompeva alle giunture *GI*,*g i* verso l'imbotte,e alle giunture *EF*,*e f* delle prime pietre del fianchetto,mentre le due altre pietre *BC*,e *b c* erano ferrate le une contro le altre ,come se fossero state un sol pezzo,come pure i piedritti *H*,*h* con i fianchetti *A*,*a*.

Da questo esperimento,ha trovato il modo di scoprire la quantità di pietre che rimangono attaccate insieme,tracciando dal vertice della giuntura della chiave *G* o *g* una tangente all'arco della volta a botte *GF*,oppure *g f*,tutte le pietre che essa attraversa non si separano affatto al momento delle fratture

La ragione è senza dubbio che non vi è alcuna interruzione di vuoto tra il punto d'appoggio superiore *G* e quello inferiore *F*.

Allo stesso modo Mr. Couplet ha dimostrato nel suo studio del *1730*,di cui si è parlato in precedenza ;che supponendo che la pietre non possano slittare le une contro le altre,la volta non si romperà se la corda *AB* dalla metà dell'estradosso non taglia l'imbotte,ma si trova nello spessore della volta ,come in *Fig. 241*.

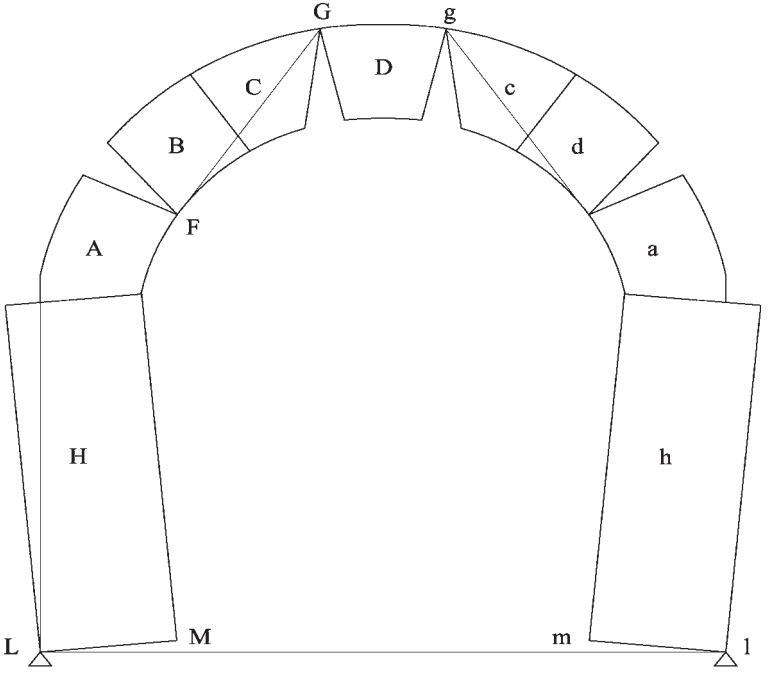
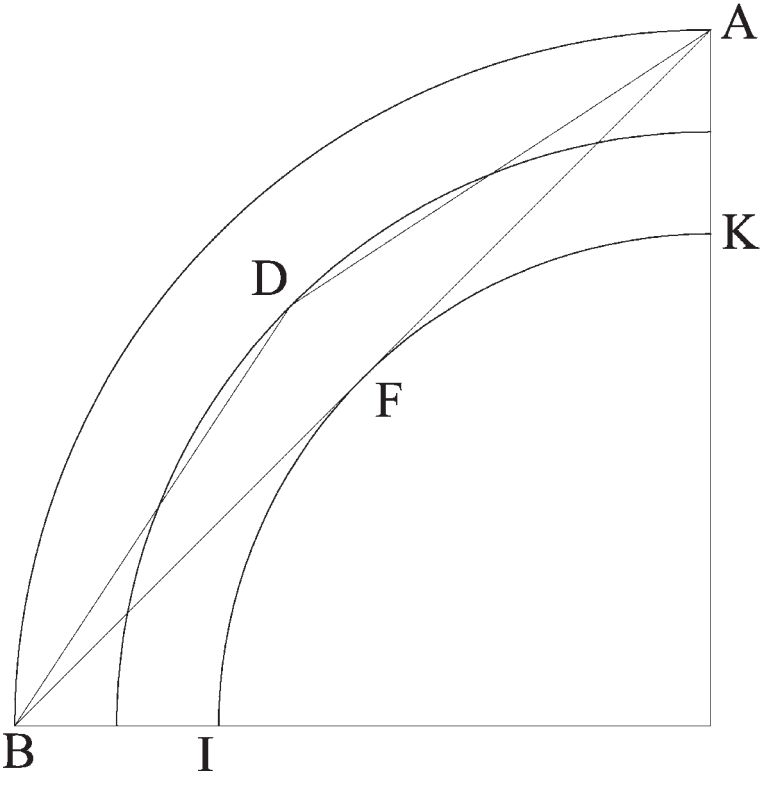


Fig. 235 Rappresentazione di una piccola volta in gesso a tutto sesto composta da sette pietre caricata sulla chiave con un piccolo peso

Il carico dal vertice *A*,così come sarà,comunicherà direttamente senza interruzione al cuscinetto *B*,seguendo la linea dritta

AFB che si trova nello spessore della volta.



Ma se vi è un'interruzione nella direzione ,come se l'arco della volta a botte passasse in *D*,è chiaro che il carico *A* spingendo in *AD* ,e la resistenza del piedritto in *BD*,l'angolo *ADB* si può aprire,e di conseguenza si può creare una frattura.
La stessa ragione prova che tale frattura non potrà verificarsi tra i punti *A* e *D*,*B* e *D*,perché la comunicazione del carico al punto di resistenza è diretta;ne consegue che le pietre che sono tra due non si devono separare.
Da ciò consegue che dato il punto d'appoggio *L* del piedritto,si può determinare quale sia la quantità di pietre dei primi fianchetti che rimangono attaccati al piedritto al momento della frattura,poiché se si traccia dal punto *L* una tangente all'arco della volta a botte ,se essa la tocca in *F* ,non vi saranno fratture nell'intervallo *LF*,e così la pietra *A*,e molte altre se ve ne sono,resteranno attaccate al piedritto *H*.

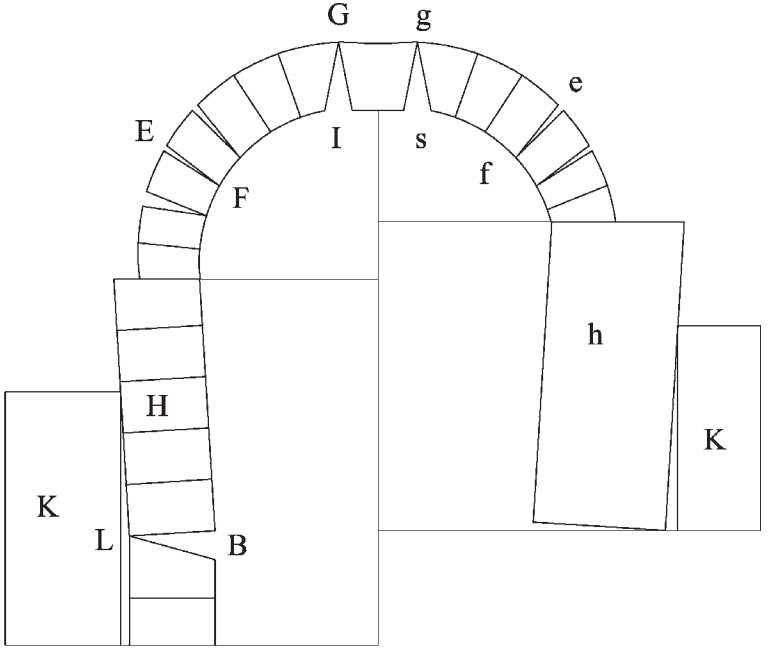
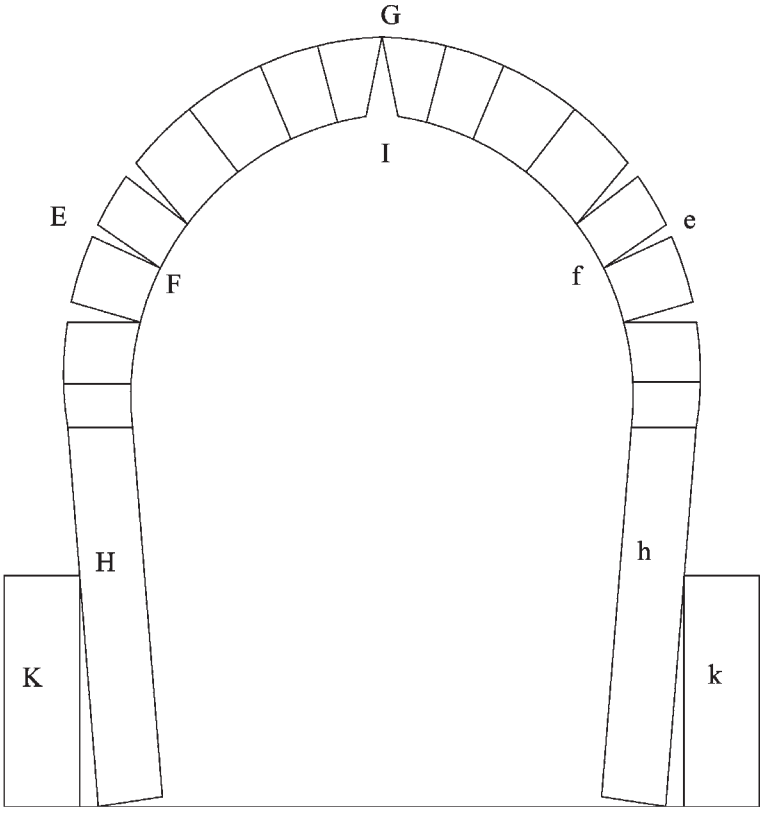


Fig. 236 Rappresentazione di una piccola volta in gesso a tutto sesto,composta da 5 pietre.

La seconda esperienza di Mr.Danisy,è tra quelle che egli fece vedere all'Assemblea pubblica nel *1732*. Si fece fare cinque piccoli modelli di archi di volta,dei quali uno era a tutto sesto composto da cinque pietre,così come raffigurato a metà nella *Fig. 236* .Caricatolo sulla chiave ,esso si apriva come il precedente ai due lati di questa chiave davanti e dietro alle giunture al di sopra della *2°*,*3°* e *4°* pietra;cosicché egli fece tre aperture alla schiena al posto di quella sola che avevamo visto nell'arco precedente:ciò rendeva la valutazione della spinta più difficile,perché essa era composta da più parti nelle quali non si trovano più i punti d'appoggio alla volta a botte dove le leve,tirate dall'una all'altra essendo moltiplicate,si confondevano con l'arco del cerchio;tutto ciò può portare un osservatore molto lontano.



Il secondo modello che mostrò all'Assemblea era sormontato da *16* pietre e senza chiave,e cioè il suo vertice era traversato da una giuntura ,così che le pietre erano in numero pari di *8* su ciascun lato. La volta si aprì in dentro in una sola fessura a metà e con altre tre su ciascun lato di seguito sul retro della schiena,allo stesso modo della precedente;la prima di queste fessure era al limite superiore della seconda pietra,cosicché restarono due pietre attaccate al piedritto come nella volta precedente in pieno centro di *15* pietre.

Il terzo modello di volta era schiacciato composto da *13* pietre;esso si aprì come il primo ed il secondo alle due giunture della chiave e con due fessure a ciascuna schiena,l'una al limite superiore,l'altra al limite inferiore della *3°* pietra,e restavano due pietre attaccate su ciascun lato come avvenuto per le due volte precedenti.

Per mostrare che le volte non si spaccavano costantemente negli stessi posti, ma secondo se esse erano più o meno caricate da un lato rispetto all'altro, egli fece vedere un quarto modello che era un arco rampante

di 18 pietre; questo si aprì all'estradosso al limite superiore ed inferiore della *3°* pietra partendo dal basso, e all'imbotte tra la *7°*e l'*8°*pietra ed infine all'estradosso al limite superiore della *4°* pietra partendo dall'alto: queste quattro pietre, essendo più sottili di quelle partendo dall'alto, occupavano alla volta a botte un intervallo più o meno uguale a quello delle due pietre dell'altro architrave.

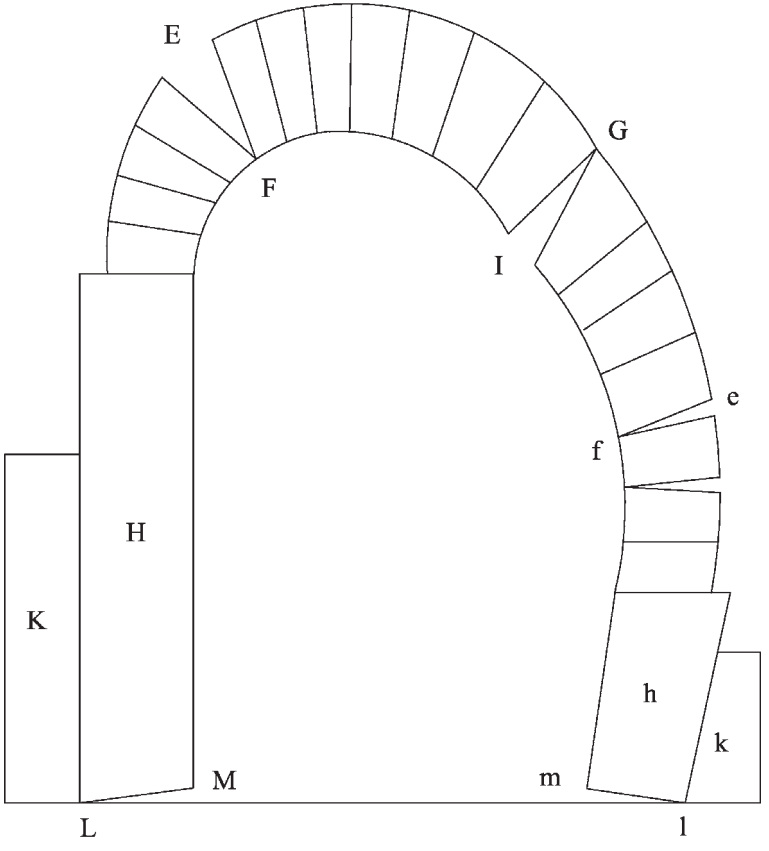


Fig. 239 Rappresentazione di un arco rampante di 18 pietre

Il quinto ed ultimo modello che Mr.Danisy fece vedere, era una piatta banda di *9* chiavi di volta che si aprì solo in due giunture della chiave in
basso come tutte le volte che non erano rampanti e sul retro tra il dormiente e la prima chiave.

Mr. Danisy fece vedere in seguito con un esperimento che più la chiave è larga meno grande è la spinta della volta: perché se si sostituisce a tre o più pietre, una sola chiave che occupa tutto l'intervallo che esse riempivano, o che sia uguale alla loro somma, si vedrà che la volta che non avrà potuto sostenersi dopo aver diminuito la forza dei piedritti, si sosterrà ancora quando si sarà messa questa chiave, benché sia pesante quanto lo erano le pietre, non in stato d'equilibrio, ma quando sorpassavano la resistenza dei piedritti.

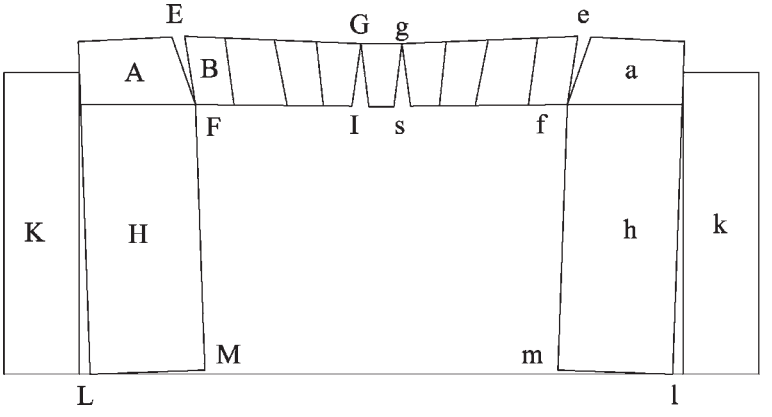


Fig. 240 Rappresentazione di una piatta banda di 9 chiavi di volta

Da ciò si trae spontaneamente una conseguenza che abbiamo stabilito da qui in poi come una cosa costante: che se la volta era tutta d'un pezzo, la spinta diventava nulla.

Dopo aver fatto degli esperimenti sulle rotture delle volte,Mr.Danisy ne fece su quelle dei loro piedritti,quando questi erano troppo deboli per resistere alla spinta delle pietre;egli produsse un modello di volta i cui piedritti erano costituiti da più pezzi,grazie ad esso egli fece vedere che quando i piedritti sono deboli e molto alti essi non si separano mai dalla base,ma si spezzano tra essa e l'architrave;da ciò ne concluse che se i piedritti dovessero spaccarsi verso la metà,è necessario che il contrafforte,usato per fortificarli,sia sollevato al di sopra di quel punto,com'è ovvio,ma non è altrettanto facile quello che viene detto sul verbale di cui parlo sul determinare precisamente questo posto,o almeno io non ne sento la facilità,perché l'Autore ci ha nascosto i mezzi per scoprirlo.

Credo al contrario che non è facile determinare che quando viene data l'altezza del contrafforte,poiché la sua cima serve d'appoggio alla parte superiore del piedritto,al momento che la spinta della volta comincia a farla cadere a strapiombo dal lato del contrafforte,facendola scarpare in dentro;allora la parte rotta compresa tra l'architrave e la frattura del piedritto può essere considerata come una leva che s'appoggia sulla cima del contrafforte:tale leva,essendo spinta dall'estremità dell'architrave all'indietro,viene respinta dall'altra estremità in senso contrario in dentro dei piedritti.

Da tutti questi esperimenti Mr.Danisy ha tratto una regola per determinare lo spessore necessario alla base dei piedritti che sono a piombo sul davanti e sul dietro,affinché essi non siano ribaltati dallo sforzo della spinta della volta, nella quale regola non vi è nessun riferimento all'altezza dei piedritti,poiché egli li fortifica più del necessario,per timore che qualche disuguaglianza del terreno non ribalti quelli che verrebbero fatti seguendo il rigore del calcolo,ugualmente non la formula perché rimanga nel rigore geometrico, ma solamente perché gli è parsa comoda nella pratica dei muratori in quanto non richiede altra conoscenza se non le regole ordinarie di aritmetica,l'estrazione della radice quadrata e la tesa[1]

Dopo questo preliminare non ci si deve sorprendere che egli abbia detto che, seguendo la sua regola,non ci si deve preoccupare per l'altezza che i piedritti devono avere. Il problema che mi ha riferito e che io ho esposto qui di seguito,prova con chiarezza che egli è convinto che l'altezza di un piedritto non ha alcuna influenza sullo spessore che deve avere per resistere ad una spinta costante.

Con uguale chiarezza si esprime su questa regola in una regola in una lettera che mi ha fatto l'onore di scrivermi:"Mi sono preso(egli dice) alcune licenze che potrebbero farle pensare che mi sia troppo allontanato dal rigore geometrico;devo quindi avvertirla che ho creduto di doverlo fare per venire incontro ai muratori che preferiscono le pratiche facili,se pur meno geometriche,ai metodi più esatti."
E' con questa idea che egli ha apparentemente soppresso lo sforzo verticale per fortificare il piedritto oltre il necessario,così come ha eliminato ciò che confonde durante la pratica e cioè le parti abbassate o rialzate oltre misura in maniera disuguale su un medesimo diametro orizzontale.
Se non è curioso vedere questa regola che non è suscettibile di alcuna dimostrazione per tutte queste ragioni,eccovela riportata parola per parola dal verbale citato:"Essa consiste nel tracciare da un qualsiasi punto della linea obliqua *GF*, una linea(perpendicolare) *GI*,e una linea orizzontale *FI*,ottenendo il triangolo *FIG*.
Quindi si misurerà la superficie *FE* e *f* con quella dei muri che sono edificati su questo arco *FE* e *f*,se se ne moltiplicherà la metà per la linea orizzontale *FI*;si dividerà il prodotto per il doppio dell'obliqua *FG*,ed infine si trarrà la radice quadrata del quoziente".
Per le aiuole si prenderà questo numero*"la"* tre volte,per gli archi sub-abbassati due volte e mezzo,per gli archi in pieno centro due volte e un quarto,per gli archi sopraelevati due volte:questo sarà lo spessore che Mr.Danisy stima si debba dare ai piedritti delle volte per una perfetta solidità,senza preoccuparsi dell'altezza che devono avere questi piedritti.

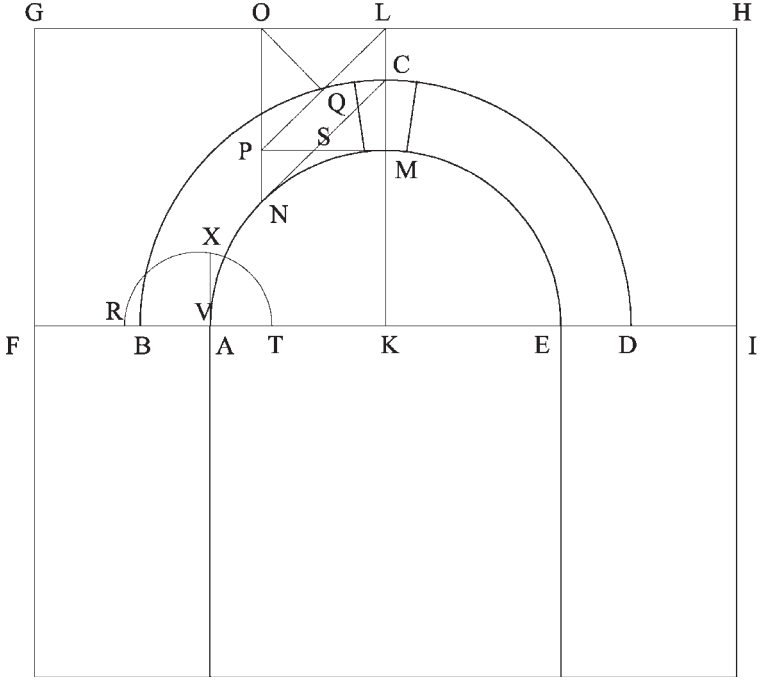


Fig.242 Rappresentazione di un arco di volta.

Ed ecco la costruzione con il regolo ed il compasso:
"Dopo aver tracciato su un muro,o in piccolo sulla carta,il disegno dell'arco di volta *ABCDE* ,gli operai divideranno questo arco in due parti uguali separate dalla perpendicolare *KM*, che prolungheranno fino a *L*;questa linea incontra la linea più alta *GH* del muro *FGHI* che è sostenuto dall'arco di volta dall'estremità *C* dalla chiave all'estradosso;quindi dal punto di contatto *N* gli operai tracceranno la linea *NO*;tracceranno *PL* parallela a *NC* e dal punto *O* abbasseranno la perpendicolare *OQ* sull'obliqua *PL*;si dovrà poi portare il segmento *OQ* da *A* in *R* sull'orizzontale *FI*;si dovrà ancora portare da *A* in *T* il segmento *PS* pari a metà di *PM* ,e per il punto *V*,a metà di *RT*, descrivere con un'apertura di compasso uguale a *RV* il semicerchio *RXT*. Si procederà poi a tracciare partendo dal punto *A* la linea perpendicolare *AX*: è questa lunghezza *AX* che si adotterà tre volte per le aiuole,due volte e mezzo per gli archi sub-abbassati,due volte e un quarto per quelli a pieno centro,e due volte per gli archi gotici ad ogiva;se si porta questo valore da *A* in *F, AF* sarà lo spessore che si può dare al piedritto e,sebbene si sia potuto arbitrariamente darla piccola,è sempre rischioso e sarebbe molto meglio fare i piedritti troppo forti piuttosto che troppo deboli.
Benché gli esperimenti di cui abbiamo appena parlato non sembrano sufficienti per fornire i mezzi per formulare una regola generale per la spinta delle volte,ecco ciò che si può trarre dall'esperimento della *Fig. 235* dove la volta in pieno centro si è aperta solo ai due lati della chiave e alle due schiene,dove si vedrà che l'equazione che ne risulta è diversa da quella che sembra aver stabilito la costruzione della regola di Mr.Danisy.

Problema VII

Trovare lo spessore necessario ai piedritti di una volta che si deve rompere solo in quattro parti al momento della sua distruzione,come mostrato nella *Fig. 335* seguendo l'esperimento.
Chiamiamo i dati seguenti *FI=a , GI=b , FG=d*

il segmento *LZ* tracciato perpendicolare dal punto *L* su *FI* prolungato *FM=h , LM=x*

supponiamo la gravità del piedritto espressa dalla superficie del rettangolo *MZ=hx*

Per ridurre i due sforzi N ed I in uno solo,bisogna moltiplicare il peso dalla metà della chiave,e quello dalla parte FEGI della volta,ciascuno per la sua distanza dal punto F,e dividere il prodotto per la somma di questi due pesi; il quoziente dà il punto C sulla linea FG dovunque possa essere.
Diamo nome a questi due pesi,che saranno appunto la pesantezza dalla metà dell'arco FE e f = q ,tracciamo dal punto C la linea CQ parallela a GI.
Non è necessario nella pratica fare questa operazione,come vedremo in seguito,ma bisogna supporla fatta per risolvere il problema con l'analisi.

Il peso q moltiplicato per CF esprime lo sforzo della pesantezza della metà dell'arco FE e f ,seguendo la direzione obliqua CF.
Questo sforzo q x CF si scompone in altri due,di cui uno è orizzontale seguendo FQ,e l'altro verticale seguendo CQ,perché CF può essere considerata come la diagonale di un parallelogramma avente per lati FQ e CQ.
Esso si scompone in modo tale che lo sforzo totale q x CF al punto F deve essere uguale allo sforzo orizzontale e allo sforzo verticale presi insieme e riuniti nello stesso punto F, e che questi tre sforzi devono essere tra di loro come i seguenti CF,FQ,CQ.
Queste due condizioni vengono soddisfatte esprimendo lo sforzo totale con q x FQ ,lo sforzo verticale con q x CQ ,dove si vede che questi tre sforzi conservano il rapporto richiesto,e che lo sforzo totale è uguale agli altri due,grazie al triangolo rettangolo CQF che dà CF=FQ+CQ.
Ma i triangoli simili FCQ e FIG daranno CF,FQ,CQ = GF,FI,IG.
Sostituendo dunque CF, FQ e CQ con i loro proporzionali GF, FI e IG, le espressioni precedenti diventeranno.

$$(q \times GF)x(q \times FI^2/GF)x(q \times GI^2/GF)$$

nelle quali si osservano le medesime relazioni.
A questo punto, se si considera che lo sforzo orizzontale, agendo contro la leva LF al punto F per farla girare sul punto L dal lato di Z, è applicato al braccio della leva LZ, la sua energia sarà:

$$(q \times FI^2/GF \times LZ)=(q \times a^2/d \times h)=(a^2qh/d)$$

Questa energia tende a ribaltare il piedritto.

Lo sforzo verticale, al contrario, tende a rinsaldare il piedritto e, agendo in F per fare girare la leva LF sul punto L dal lato di M, esso è applicato al braccio della leva LM; la sua energia sarà dunque:

$$(q \times GI^2/GF \times LM)=(q \times b^2/d \times X)=(b^2/d\ q\ x)$$

La differenza tra lo sforzo orizzontale che ribalta il piedritto e lo sforzo verticale che lo rinsalda è dunque precisamente la forza restante per agire contro il piedritto;questa forza è

$$(a^2\ q\ h/d)-(b^2\ q\ x/d)$$

Il piedritto per resistere a questa forza oppone il suo sforzo e questo sforzo è uguale al prodotto del suo peso per la perpendicolare abbassata dal punto L sulla direzione del centro di gravità,esso è dunque:

$$(h\ x)x(LM/2)=(hx^2)$$

Per conservare l'equilibrio,lo sforzo del piedritto deve essere uguale a quello che gli è contrario,da cui risulta questa equazione:

$$(hx^2/2)=(a^2\ qh/d)-(b^2\ qx/d)$$

Dividendo per h ,essa è:

$$x^2+(2b^2\ q\ x/d\ h)=(2a^2\ q/d)$$

Aggiungendo da ambedue le parti il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine,essa diventa:

$$x^2 +(2ä^2\ q\ x\ /d\ h)+(ä^4\ q^2/d^2\ h^2)=(ä^4q^2/d^2\ h^2)+(2\ a^2\ q/d)$$

la cui radice è:

$$x +(b^2/d\ h)\ q =[(b^4/d^2\ h^2)\ q^2 +(2a^2\ q/d)]$$

Questa formula insegna che bisogna prendere l'area dell'arco FE e f ,moltiplicare la sua metà per la quarta parte proporzionale a FG e a GI ,dividere questo secondo prodotto per il quadrato dell'altezza del piedritto,aggiungere questo quoziente al prodotto formato seguendo la prima regola,e estrarre la radice quadrata di questa somma.
E infine sottrarre da questa radice il prodotto dell'area della metà dell'arco FE e f per la quarta parte proporzionale a FG e a GI divisa per l'altezza del piedritto.
Ciò che resta è lo spessore che bisogna dare ai piedritti d'una volta a tutto sesto le cui pietre sono in numero dispari.

Se si fa attenzione alla condotta che si è tenuta per risolvere questo problema si noterà facilmente che si è scomposto lo sforzo totale della volta sul punto dove avviene l'apertura delle schiene in altre due,di cui una è orizzontale e l'altra verticale;che l'orizzontale si fa seguendo FI ,la linea compresa tra il punto di rottura e la verticale abbassata dall'estremità della chiave;che la verticale si fa seguendo GI ,linea verticale abbassata dall'estremità della chiave fino all'incontro con l'orizzontale;che questi due sforzi sono come le due linee FI e GI; e infine che lo sforzo orizzontale tende a ribaltare il piedritto,mentre quello verticale a consolidarlo.

Cccij

Corollario I

Dove ne consegue che più la chiave è larga ,meno grande è la spinta della volta,perché in questo caso la linea FI diminuisce di più man mano che la linea GI diminuisce, e cioè lo sforzo orizzontale diviene minore proporzionalmente a quello verticale.

Corollario II

Quando la pesantezza della volta ,la chiave,la distanza e l'altezza dei piedritti rimangono gli stessi,lo sforzo orizzontale non cambia più,mentre varia solo lo sforzo verticale a seconda che la volta differisca più o meno da quella in pieno centro,e cioè se l'arco è sub-abbassato o sopra-elevato;quando negli archi sub-abbassati lo sforzo verticale che agisce per il piedritto è minore, i piedritti richiedono maggior spessore,e al contrario gli archi sopra-elevati ne richiedono meno.
L'enunciato della regola di Mr.Danisy difetta di spiegazione,se infatti si cerca la strada che ha potuto seguire per arrivare alla sua costruzione si scopre che l'ha ottenuta solo mediante un falso ragionamento che dava:

$$LM^2=q \times (FI/2FG)$$

La radice quadrata della quale è:

$$LM =\text{"}q \times(FI/2FG)$$

E che dà precisamente questa costruzione;ma si è visto in precedenza che non si deve pensare che questo avvenga per inavvertenza,ma perché lo sforzo verticale del piedritto è stato soppresso affinché ne risultasse un maggior spessore.

DELLA SPINTA DELLE VOLTE COMPOSTE E DI QUELLE PIù SEMPLICI CHE SI POSSONO CONSIDERARE COME COMPOSTE

Gli autori che hanno lavorato per risolvere il problema della spinta delle volte, hanno preso in esame solo quelle a botte,e cioè quelle cilindriche e piane,senza fare alcuna mediazione ad altre specie le cui superfici interne sono costituite da diverse figure semplici,come le sferiche,sferoidee,coniche,anulari ed elicoidali;né a volte che sono composte da più parti di corpi semplici,radunati sotto diversi spigoli e che seguono direzioni diverse,il che meriterebbe tuttavia di essere messo in questione perché le volte a botte semplici non sono le volte più utilizzate negli edifici civili.
Cercherò di supplire a questa omissione per quanto è necessario alla pratica, riportando tutte le forze alle volte cilindriche con delle conclusioni tratte dalla ricerca e dall'esperimento.
Benché sarebbe buona regola procedere dal semplice al composto,esaminerò tuttavia le volte composte prima delle semplici,perché devo considerare le semplici come composte da piccole parti cilindriche,simili a quelle delle Volte a Spigolo e in Arco di Chiostro.

DELLA SPINTA DELLE VOLTE A SPIGOLO

Una volta a spigolo(come l'abbiamo detto all'inizio di questo 3° tomo)è un composto di due superfici di semi-cilindri:APBD il cui centro è AhP,e ADBP il cui centro è PHI ,che si incrociano su una stessa altezza di architrave e di chiave;ciò forma quattro porzioni di cilindri separati dagli spigoli delle loro intersezioni; si sotto-divide ancora ciascuna di queste porzioni in due parti uguali che chiamiamo pennacchi;chiamiamo "campata" quell'insieme di otto pennacchi,dei quali due contigui in ritorno sono un quarto di campata.
Se si considera ciascuno di questi pendagli a parte come un triangolo cilindrico la cui asse è orizzontale, e che è appoggiato su uno dei suoi punti posato su un pilastro che noi chiamiamo piedritto;è chiaro che lo sforzo della pesantezza che spinge il piedritto prenderà forma seguendo l'arco ellittico,che sarebbe la sezione di questo triangolo cilindrico attraverso il suo centro di gravità;considerando così questa superficie curva nella sua proiezione m PC ,oppure MPC ,divideremo il lato destro e orizzontale m C, oppure MC ,in due parti uguali in n, la spinta del pennacchio sul piedritto b P a x prenderà forma seguendo questa direzione n P.
Dove ne consegue che per trovare la direzione della spinta comune ai due pennacchi uniti insieme e appoggiati sul punto comune P, bisogna prolungare le direzioni n P in q e NP in r ,cercare lo spessore del piedritto necessario al centro e a carico dell'arco ellittico su n P e NP ,portare questo spessore in q e in r ;quindi tracciare per questi punti q ed r delle parallele alle direzioni così da formare il parallelogramma P r y q ; la linea P y sarà il valore della spinta del quarto di campata della volta a spigolo secondo questa ipotesi.
Ma se si fa attenzione al fatto che le superfici esterne delle pietre sono parallele agli assi di ciascuna delle parti di cilindro che fanno i pennacchi,si capirà che la direzione della loro spinta sarà determinata dalle perpendicolari ai piani delle superfici esterne delle pietre e ciò ne diminuisce lo sforzo perché l'angolo di coincidenza delle due spinte m PM è meno acuto di quello delle due spinte precedenti n PN,,secondo le proprietà dei movimenti composti ,dimostrati nei trattati di meccanica;cosicché noi abbandoniamo questa prima ipotesi per considerare i pennacchi come una successione di archi circolari o ellittici
paralleli tra di loro che vanno sempre a diminuire e che tendono a raddrizzarsi seguendo una direzione che è in un piano perpendicolare all'asse;in effetti una volta a spigolo,il cui apparato sia con giunture di testa di seguito in sconnessione,sebbene un po' meno solido non si manterrà di meno,a patto che gli spigoli siano fatti con una buona sezione sui loro letti.